

Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional  
PROFMAT/SBM

Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias  
Sobre o Infinito

Bruno Vianna

Orientador: Marcelo Viana - IMPA  
Coorientador: Victor Giraldo - UFRJ

IMPA - 2013

*“Logo que comunicamos os nossos conhecimentos, deixamos de gostar deles suficientemente.”.*

(Friedrich Nietzsche)

## Agradecimentos:

A todos que se empenharam em idealizar e implementar esse Mestrado Profissional, que possibilitou-me contribuir, mesmo que de forma humilde, para melhoria do ensino de matemática em nosso país. Além de reacender a vontade desse autor de retornar ao meio acadêmico, com novas perspectivas e novos caminhos.

Aos professores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada pela dedicação, respeito e atenção dedicada a todos os mestrandos desse programa. Professores esses, que influenciaram intensamente nossa formação inicial, com suas primorosas produções acadêmicas, e que nesse programa nos presentearam com a honra de sermos seus alunos.

Aos orientadores, Marcelo Viana e Victor Giraldo pela confiança, incentivo, conselho e orientação nessa obra.

Ao amigo, Fábio Luis, por me convencer do tema dessa obra e por todo apoio.

Ao amigo, Luiz Amorim, pela enorme ajuda na confecção desse trabalho, e por toda atenção e apreço.

Ao amigo, Orlando Silva pelo incentivo, confiança e ajuda; além dos ensinamentos acadêmicos e de vida.

Ao amigo, Danilo pela dedicação e integração a esse grupo.

Aos amigos, Wallace Salgueiro e Leandro Freitas por estarem sempre presentes em minhas conquistas.

Aos meus pais, Iraguaci e Sônia e ao meu irmão Vinícius, por todo apoio e incentivo.

E por fim, em especial, à minha esposa Viviane Loures, pelo amor, paciência, ajuda e sacrifício.

## Dedicatória

À minha amada esposa Viviane Loures por seu amor,  
dedicação e abdicção.  
A Deus e aos meus pais, pela presença constante em  
minha vida.

## Resumo

Na busca de elaborar atividades para inserir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, nos deparamos com conteúdos já apresentados nesse nível de ensino, que abordam muito superficialmente o conceito de limite, mais precisamente referem-se às idéias de infinito e infinitésimos. Com isso, elaboramos atividades que abordem e aprofundem esses conceitos, utilizando novas tecnologias e possibilitando ainda ao discente, o contato com uma nova simbologia. Inicialmente elaboramos uma pesquisa qualitativa cujo objetivo era de sondar o conhecimento dos alunos, sobre os conceitos de Infinito e Infinitésimos. Essa sondagem ocorreu por meio da aplicação de um questionário que apresentava questões abertas sobre esses conceitos. Apoiados nas conclusões desse questionário, elaboramos atividades para aprofundar o conhecimento dos alunos sobre Infinito e infinitésimos além de abordar os conceitos de limites laterais e no infinito em gráficos de funções polinomiais ou trigonométricas.

**Palavras-Chave:** Infinito, Limite de Funções, Área de Círculo e Cálculo.

## Sumário

<b>I</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>8</b>
<b>II</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>III</b>	<b>ATIVIDADE 1 - Questionário Sobre o Infinito - Uma Sondagem de Conhecimento</b>	<b>11</b>
1	Questionário investigativo sobre o conhecimento do conceito de infinito para alunos do ensino fundamental e médio.	12
2	Análise dos dados sobre a aplicação do questionário nas turmas do Colégio Pedro II	16
3	Conclusões obtidas através da Análise das Respostas do Questionário	40
<b>IV</b>	<b>ATIVIDADE 2 - Área do Círculo</b>	<b>41</b>
4	Material do Professor	41
5	ATIVIDADE - Área do Círculo - Material do Aluno	50
<b>V</b>	<b>ATIVIDADE 3 - Alterações em Gráficos</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Introdução</b>	<b>55</b>
6.1	Objetivos da parte 1.1: . . . . .	56
6.2	Objetivos da parte 2.1: . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Procedimentos Operacionais (Parte 1):</b>	<b>58</b>
7.1	Novas Nomenclaturas e Simbologia . . . . .	69
<b>8</b>	<b>Parte 2.1 - QUIZ Interativo - Funções Polinomiais</b>	<b>73</b>
8.1	Procedimentos Operacionais . . . . .	73
8.2	Telas da apresentação contidas no arquivo "Alterações no gráfico 21.ppt" . . . . .	74
<b>9</b>	<b>Parte 1.2 -Funções Trigonométricas</b>	<b>111</b>
9.1	Procedimentos Operacionais - Parte 1.2 . . . . .	111

<b>10 Parte 2.2 - QUIZ Interativo - Funções Trigonométricas</b>	<b>114</b>
10.1 Procedimentos Operacionais . . . . .	115
10.2 Telas da apresentação contidas no arquivo "Alterações no gráfico 22.ppt" . . . . .	115
<b>VI Considerações Finais</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>138</b>

## Capítulo I

# Introdução Geral

A Educação Básica brasileira vem sofrendo mudanças ao longo do tempo. Muitas dessas mudanças foram desencadeadas por políticas públicas que priorizam o desenvolvimento social, cultural e tecnológico brasileiro. A criação do Parâmetro Curricular Nacional regulamentado em 1996 pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB), serviu para unificar o ensino em todo país, respeitando as diferenças culturais e sociais de cada Estado. Porém, apesar de as mudanças serem em diversos âmbitos, não se discutia uma nova reformulação dos componentes curriculares de matemática ao fim do Ensino Básico, mais precisamente no Ensino Médio. Segundo o artigo 22 da LDB, a seguir

“Art 22. A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e **fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores**”.

É fundamental que o Ensino Médio realmente faça a ponte entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior, oferecendo aos discentes, um embasamento real e fidedigno aos componentes curriculares da maioria dos Cursos Superiores.

É fato que a falta do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio deixa uma lacuna enorme para a maioria dos futuros graduandos, pois praticamente 50% deles terão alguma disciplina referente ao estudo dos limites, das derivadas e da integral. Afirmamos isso, baseados em um pequeno estudo realizado por este autor, que conferiu dois documentos sobre as condições de acesso à Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2013. Foram analisados o quadro de vagas oferecidas e a grade curricular de cada curso disponibilizado pela UFRJ em 2 013. Com isso constatamos que:

- das 4 745 vagas oferecidas pela UFRJ 2 366, destinam-se a turmas que terão Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso
- das 105 turmas previstas 53 delas terão aulas de Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso

Seguem os gráficos abaixo:







Dados obtidos em:

[LINK: Grades Curriculares](#) e [LINK: Edital 225 SiSu](#) <sup>1</sup>

A nossa proposta não é inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar nossos estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que têm o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias, e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina.

Foi com base nesses objetivos que elaboramos um projeto que vem ao encontro da atual situação político-econômica do nosso país, em que a carência de profissionais na área de exatas, faz com que importemos conhecimento científico ao invés de produzirmos. Esperamos que este estudo contribua nas discussões do Programa Ensino Médio Inovador (ProEMI), instituído pelo MEC através da Portaria nº 971, de 9 de outubro de 2009, e que integra as ações do Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE, como estratégia do governo federal para induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio.

Maiores informações, podem ser obtidas através do: [LINK: ProEMI](#)<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Acesso em: 11 de fev. 2 013

<sup>2</sup>Acesso em: 11 de fev. 2 013

## Capítulo II

# Introdução

O ensino de cálculo diferencial e integral no Brasil não ocorre diretamente na educação básica; os conceitos, apesar de abstratos, só entram em contato com nossos estudantes nos primeiros períodos do ensino superior. Porém, ao observarmos os conteúdos matemáticos abordados no Ensino Fundamental e Médio, percebemos que vários desses conteúdos utilizam diretamente os conceitos de limite, mais precisamente a idéia de *infinito* e *infinitésimos*.

Para iniciarmos o tema "Cálculo no Ensino Médio" resolvemos aprofundar os conhecimentos de *infinito* e *infinitésimos* que já estão presentes no Ensino Básico, além acrescentar outros conceitos e simbologias referentes a esses tópicos. Este trabalho foi elaborado como uma proposta de aplicação de três atividades que envolvem os conceitos anteriormente mencionados. Não temos aqui a pretensão de abordar todos os conteúdos do Ensino Básico onde apareçam tais conceitos, pelo caráter simplista desse Trabalho de Conclusão de Curso, abordamos apenas alguns desses tópicos.

A primeira atividade propõe ao professor, a aplicação de um questionário que tem como objetivo realizar uma sondagem sobre os conceitos de *infinito* e *infinitésimos*, que permeiam o conhecimento dos alunos. Esse questionário foi aplicado pelo autor, em suas turmas do Colégio Pedro II, e ao fim da atividade são apresentadas as tabulações das respostas de seus alunos, afim que outros professores utilizem esses dados de modo comparativo.

A segunda atividade opta por elucidar a idéia de *infinito* e *infinitésimos* utilizadas na demonstração do cálculo da área de um círculo de raio 1, demonstração essa, idealizada por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) baseada no método de Exaustão de Eudoxo<sup>3</sup>. A atividade utiliza recursos computacionais como os softwares: Geogebra e Excel e possibilita ao professor uma aplicação em aula (laboratório de informática) ou em casa, com o aluno baixando a atividade e os arquivos num site ou blog pré-determinado.

Já a terceira atividade tem como objetivo a inserção do estudo de limites laterais e no infinito, assim como a identificação de assíntotas e pontos de inflexão num gráfico dado ou a ser traçado. Para introduzir esses assuntos a atividade propõe anteriormente um estudo de transformações nos gráficos de funções polinomiais e trigonométricas baseada na variação dos coeficientes dessas funções; esse estudo é realizado pelo professor com o auxílio do software Geogebra. Encerramos a atividade 3, propondo a turma fixar os conhecimentos apresentados através de um QUIZ interativo, onde almejamos que os discentes discutam as questões apresentadas entre si.

---

<sup>3</sup>Para maiores informações vide [16]

### Capítulo III

# ATIVIDADE 1 - Questionário Sobre o Infinito - Uma Sondagem de Conhecimento

Iniciamos nosso trabalho sugerindo que o professor realize uma sondagem de conhecimento dos seus alunos a respeito do conceito de infinito, isto poderá ser feito através de um questionário aplicado pelo professor antes de iniciarmos todo o percurso que este material propõe. Este questionário proposto pelos autores, é apresentado a seguir.

E para termos a certeza que as perguntas atingiam nossos objetivos, resolvemos aplicá-lo em turmas do Colégio Pedro II, a qual somos professores. Esse processo ocorreu nos meses de Novembro e Dezembro de 2012, e as turmas envolvidas foram:

- Uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental
- Uma turma do 1º ano do Ensino Médio
- Duas turmas do 3º ano do Ensino Médio

A duração da aplicação desse questionário foi de uma hora, respondido individualmente e anonimamente por todos os alunos presentes, o professor aplicador não fez qualquer tipo de inferência ou apontamento sobre o conteúdo das questões. Porém, após o recolhimento dos questionários, houve um caloroso e produtivo debate promovido e sugerido pelos próprios alunos.

A seguir, apresentaremos o referido questionário, que virá acompanhado de um breve estudo estatístico das respostas dos alunos dessas quatro turmas e por fim apontaremos as conclusões que acabaram norteando as atividades subsequentes desse Trabalho de Conclusão de Curso.

# 1 Questionário investigativo sobre o conhecimento do conceito de infinito para alunos do ensino fundamental e médio.

I-No espaço abaixo escreva com suas palavras uma espécie de resposta a pergunta “O que é o infinito?”

---

---

---

II-Dê exemplos que vão de acordo com o texto redigido anteriormente:

---

---

---

1. A seqüência abaixo é formada por infinitos triângulos

$\Delta, \Delta, \Delta, \dots$

1.1) Se eu retirar um triângulo continuarei com infinitos triângulos? Justifique.

---

---

---

1.2) E se retirarmos 5 milhões de triângulos continuaremos com infinitos triângulos? Justifique.

---

---

---

2. A soma dos elementos de uma seqüência é denominada “Série”. A série abaixo é conhecida como “Série de Girandi”:

$1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$

2.1) Qual o resultado da “Série de Girandi”?, ou seja, qual o resultado da soma dos infinitos elementos da seqüência apresentada acima?

---

---

---

2.2) Seria possível essa série resultar em 9? E em -12?

---

---

---

3. Em nosso planeta,

3.1) a quantidade de cães representa um número muito grande ou uma infinidade?

---

---

---

3.2) se conseguíssemos contar todos os cães que nasceram (desde o primeiro) e também os que nascerão futuramente, o resultado dessa contagem é finita ou infinita?

---

---

---

3.3) A vida no planeta Terra é eterna, ou seja, para todo sempre?

---

---

---

3.4) Reavalie sua resposta no item 3.2.

---

---

---

4. Conjuntos Numéricos

4.1) Represente o conjunto dos números naturais a seguir:

$\mathbb{N} =$

4.2) Represente o conjunto dos números pares a seguir:

$\mathbb{P} =$

4.3) Qual conjunto possui maior número de elementos  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{P}$ ? Justifique.

---

---

---

4.4) Represente o conjunto dos números inteiros a seguir:  
 $\mathbb{Z} =$

4.5) Quantos números inteiros existem entre: 3 e 7? E entre -2 e -4?  
E entre 0 e 1?

---

---

---

4.6) Que números são inteiros mas não são naturais?

---

---

---

4.7) Tanto o conjunto dos números naturais quanto no conjunto dos números pares, ambos possuem início em zero, mas não possuem fim. Como se comporta o conjunto dos números inteiros, quanto a esse fato?

---

---

---

4.8) Qual conjunto possui maior número de elementos  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ ?

---

---

---

4.9) Descreva com suas palavras o conjunto dos números racionais.

---

---

---

4.10) Que números são racionais e não são inteiros?

---

---

---

4.11) Quantos números racionais existem entre:  $1/2$  e  $1/4$ ? E entre  $-2$  e  $0$ ? E entre  $0$  e  $1/1000$ ?

---

---

---

4.12) Explique com suas palavras como e porquê associamos o conjunto dos números racionais a uma reta.

---

---

---

4.13) Existem números que não são racionais, como você pode defini-los?

---

---

---

4.14) Explique com suas palavras o que seria o conjunto dos números reais.

---

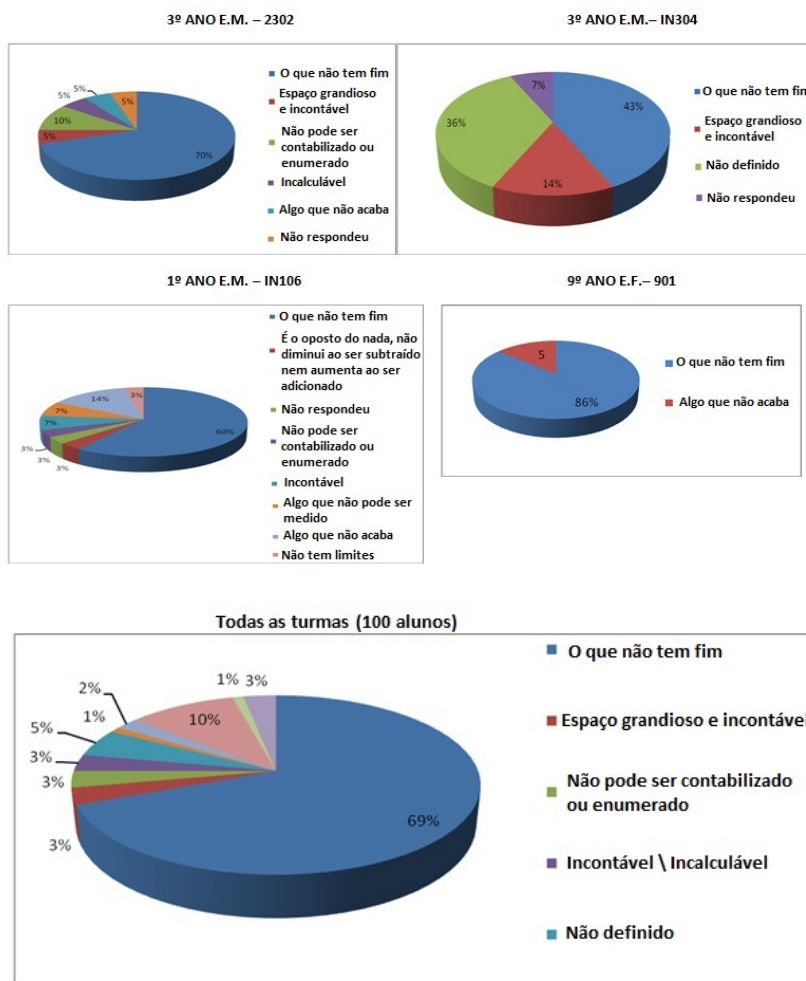
---

---

## 2 Análise dos dados sobre a aplicação do questionário nas turmas do Colégio Pedro II

Questionário investigativo sobre o conhecimento do conceito de infinito para alunos do ensino fundamental e médio.

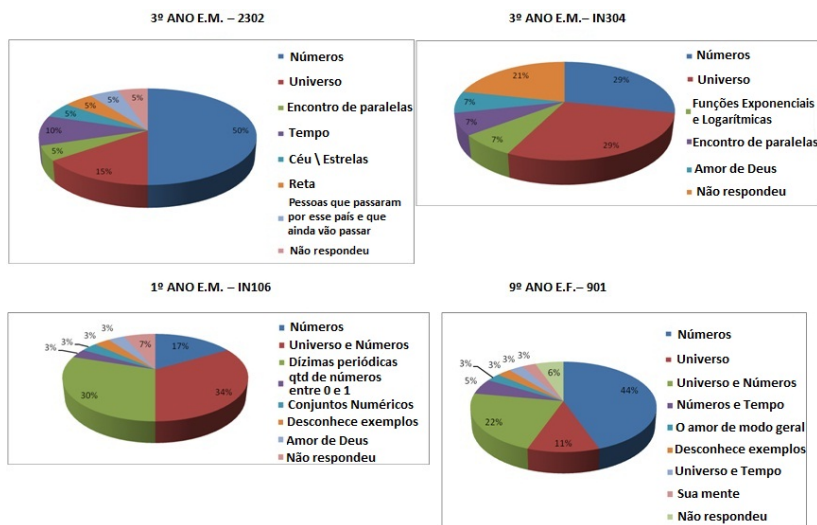
I-No espaço abaixo escreva com suas palavras uma espécie de resposta a pergunta “O que é o infinito?”



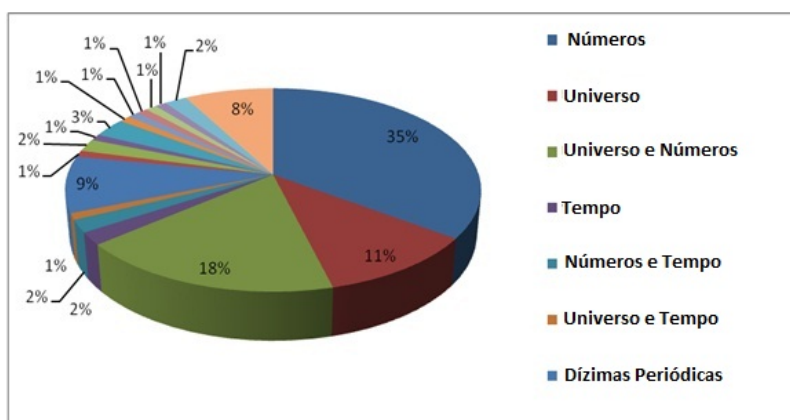
Notamos que praticamente todos os alunos optaram por uma definição simples e concisa, sem preocupar-se com possíveis contra-exemplos, o que já era esperado. Apesar de simples, as respostas também foram aceitáveis e compatíveis aos níveis escolares de cada um.



II-Dê exemplos que vão de acordo com o texto redigido anteriormente:



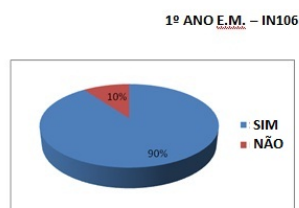
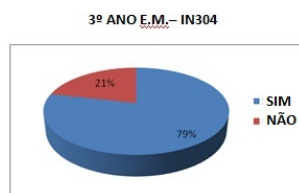
Todas as turmas (100 alunos)



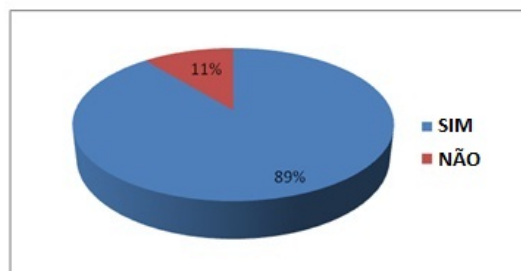
*Fica evidente a superficialidade dos exemplos citados, uma boa parte dos alunos citou o Universo, porém a humanidade ainda não têm a certeza da infinitude do Universo. Outros utilizaram o “Amor” como exemplo, algo matematicamente não mensurável, não apresentando qualquer justificativa para qualificá-lo como algo infinito.*

1. A seqüência abaixo é formada por infinitos triângulos  
 $\Delta, \Delta, \Delta, \dots$

1.1) Se eu retirar um triângulo continuarei com infinitos triângulos? Justifique.

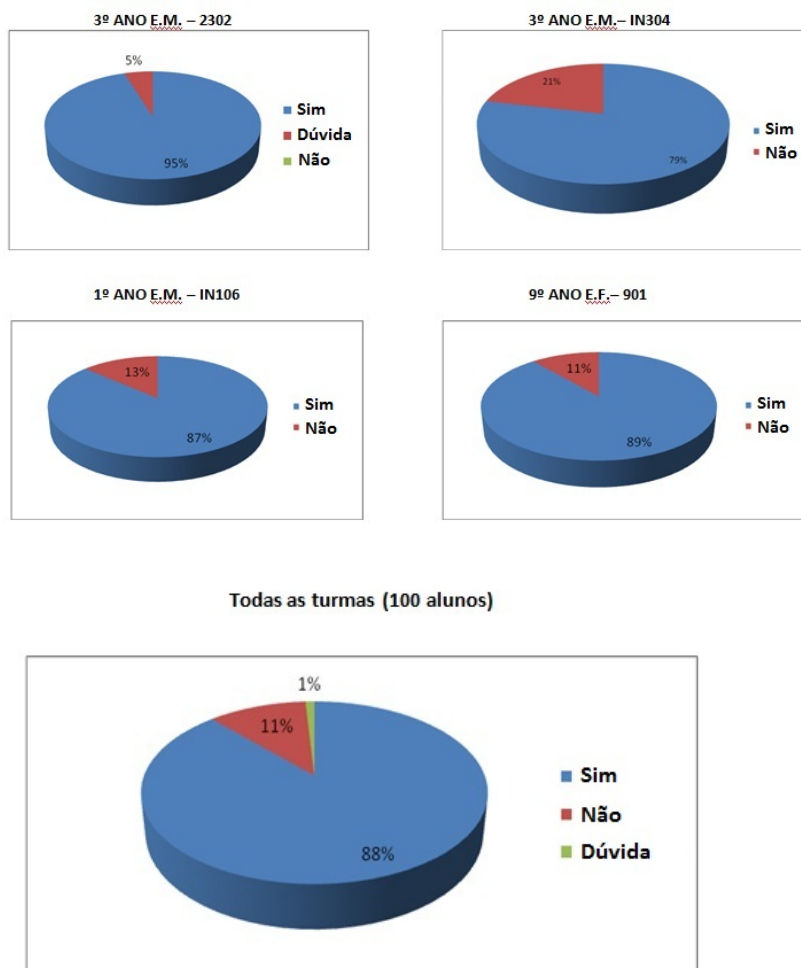


Todas as turmas (100 alunos)



*A grande maioria respondeu o que se esperava, porém ao analisar as respostas individuais encontramos em alguns casos um algebrismo com o infinito, como por exemplo “ $\infty - 1 = \infty$ ”, ou ainda, coisa do tipo “quando retirarmos o último outro ocupará o lugar dele”.*

1.2) E se retirarmos 5 milhões de triângulos continuaremos com infinitos triângulos? Justifique.

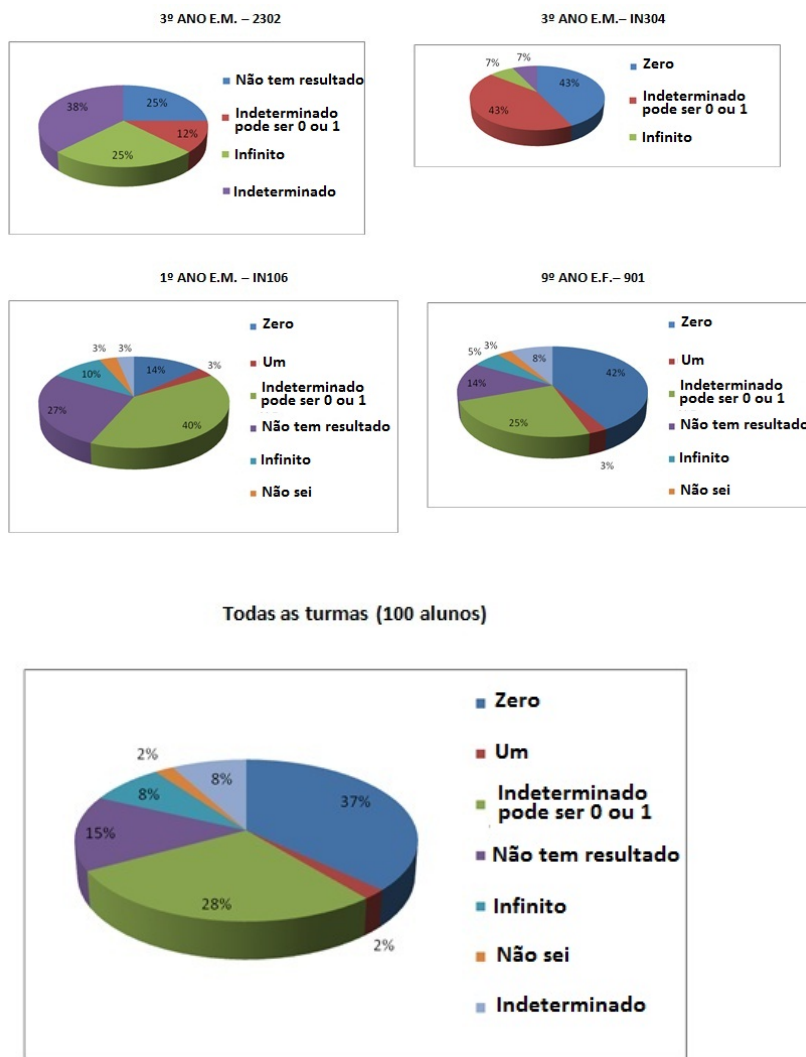


*Neste item também a grande maioria respondeu o que se esperava, porém continuamos a encontrar justificativas do tipo “ $\infty - 5000000 = \infty$ ”, ou coisas do tipo “quando retirarmos os 5 000 000 últimos outros ocuparão os lugares dos retirados”.*

2. A soma dos elementos de uma sequência é denominada “Série”. A série abaixo é conhecida como “Série de Girandi”:

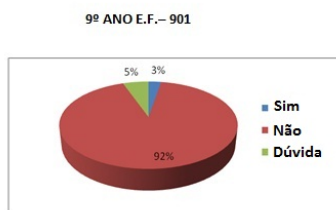
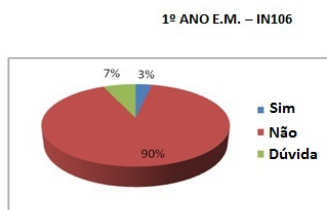
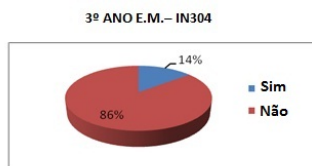
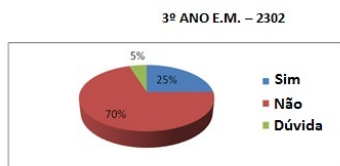
$$1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$$

2.1) Qual o resultado da “Série de Girandi”?, ou seja, qual o resultado da soma dos infinitos elementos da sequência apresentada acima?

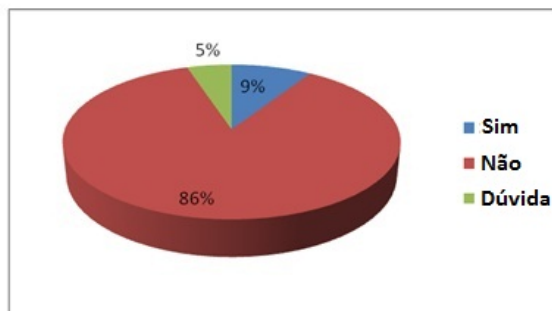


*Ficou evidente nesse item o pouco conhecimento dos alunos sobre séries, e muitos alunos tiveram (nas discussões ocorridas ao fim da aplicação) dificuldade de entender por que o resultado pode resultar em qualquer número.*

2.2) Seria possível essa série resultar em 9? E em -12?



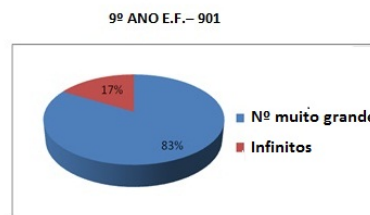
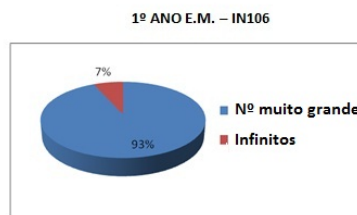
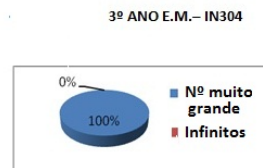
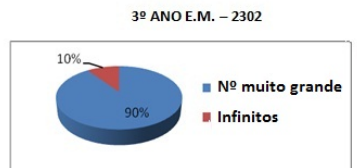
Todas as turmas (100 alunos)



*Fica reforçada a análise feita anteriormente pois a maioria respondeu que não, porém é possível sim. Basta utilizarmos a propriedade comutativa da adição e permutarmos os 9 primeiros “+1” para o início da série. E no segundo basta permutarmos os 12 primeiros “-1” para o início da série.*

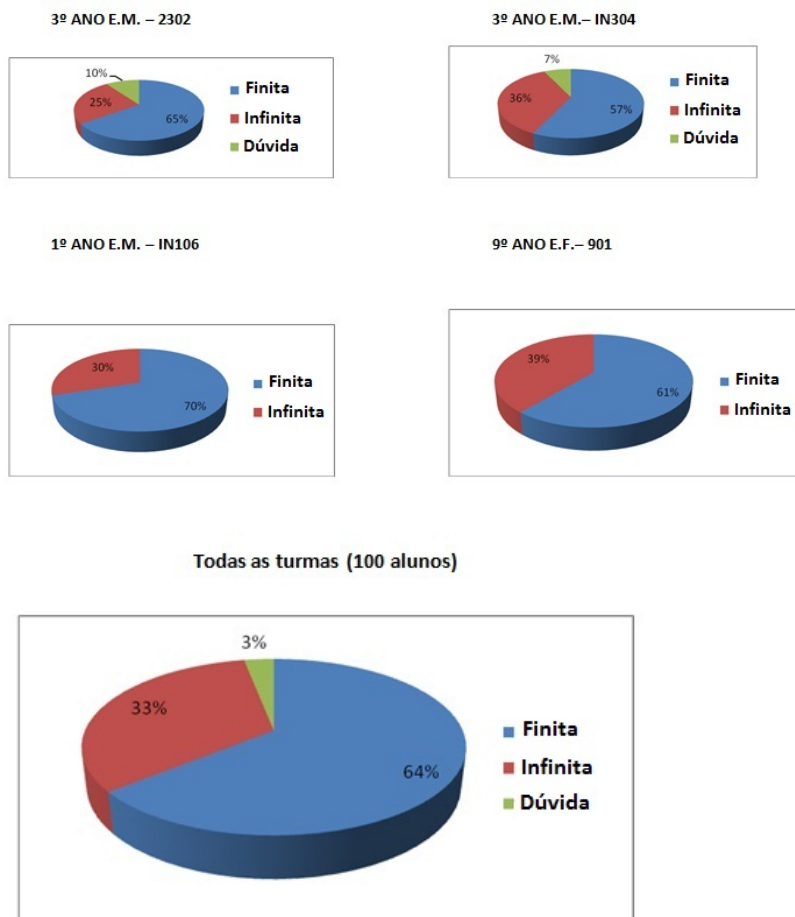
3. Em nosso planeta,

3.1) a quantidade de cães representa um número muito grande ou uma infinidade?



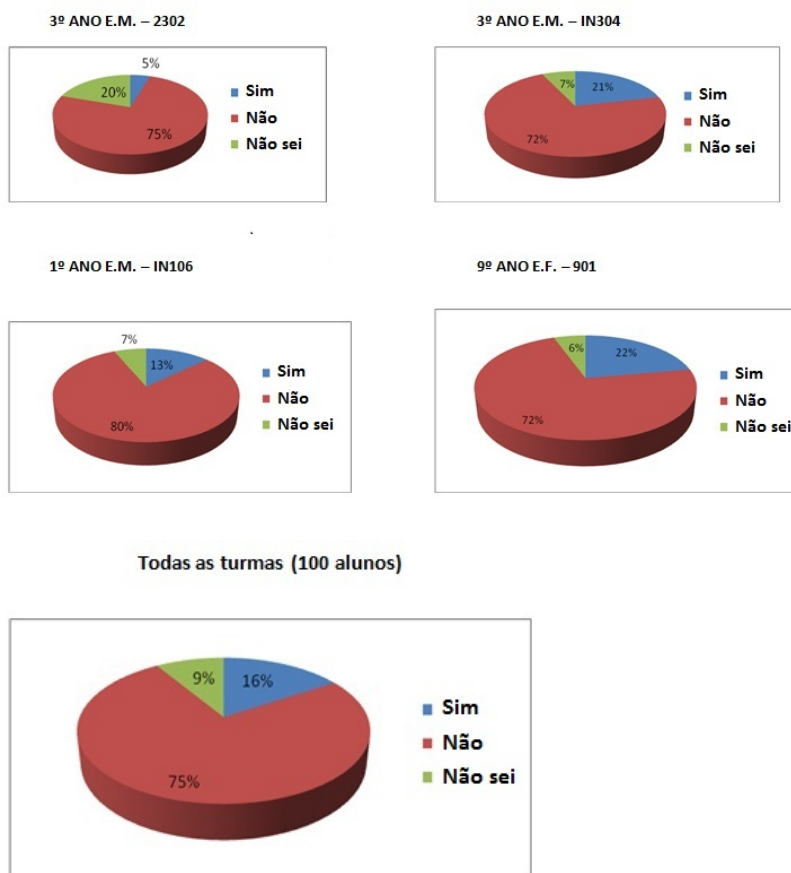
*Aqui a maioria esmagadora optou pela resposta esperada.*

3.2) se conseguíssemos contar todos os cães que nasceram (desde o primeiro) e também os que nascerão futuramente, o resultado dessa contagem é finita ou infinita?



*Apesar da pergunta induzir a resposta “infinita” a maioria marcou “finita”, pois sabemos que o planeta Terra irá desaparecer daqui a alguns milhões ou bilhões de anos, logo essa quantidade de cães, apesar de fazer referência a um número gigantesco ela é finita.*

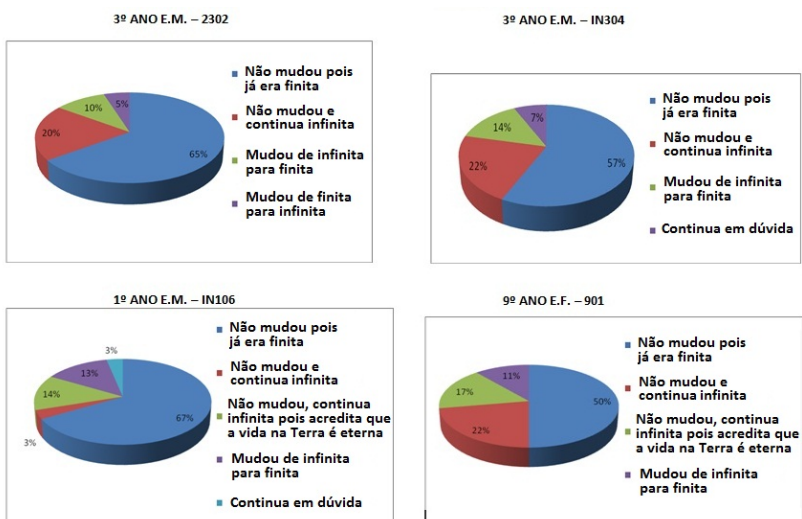
3.3) A vida no planeta Terra é eterna, ou seja para todo o sempre?



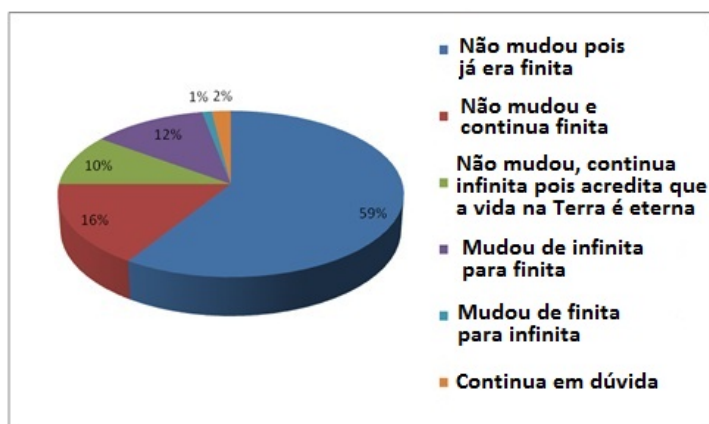
Apesar da maioria ter marcado “Não” temos 16 alunos que acreditam que sim.



3.4) Reavalie sua resposta no item 3.2.



Todas as turmas (100 alunos)

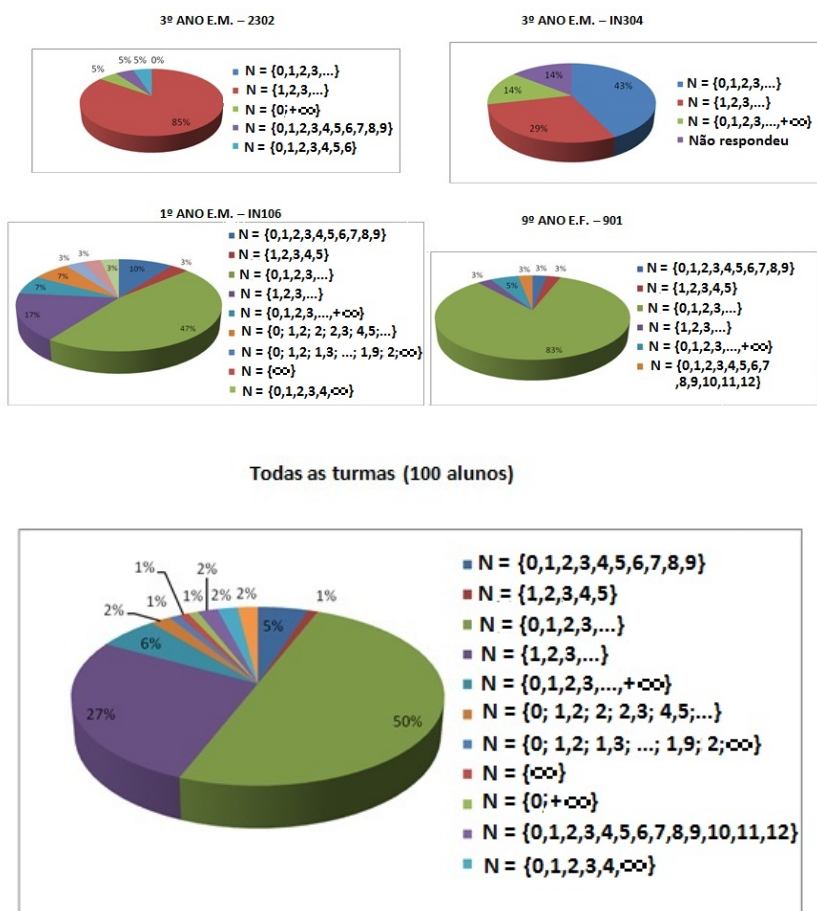


A reavaliação não foi realizada pela maioria, pois 59 alunos já haviam respondido “finita” e outros 10 alunos por acreditarem que a Terra não se extinguirá.

#### 4. Conjuntos Numéricos

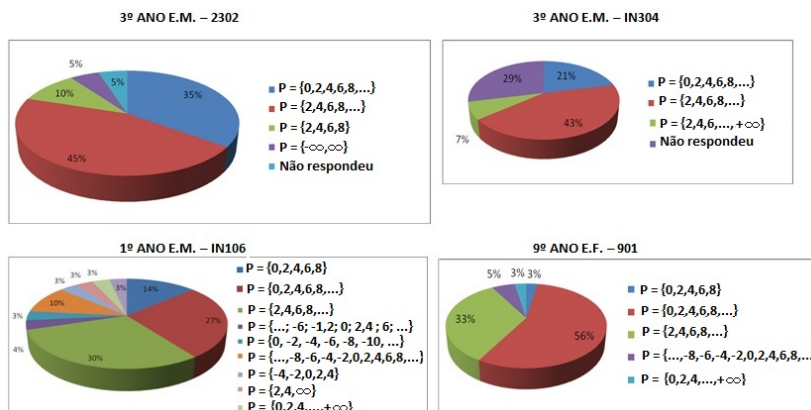
4.1) Represente o conjunto dos números naturais a seguir:

$\mathbb{N} =$

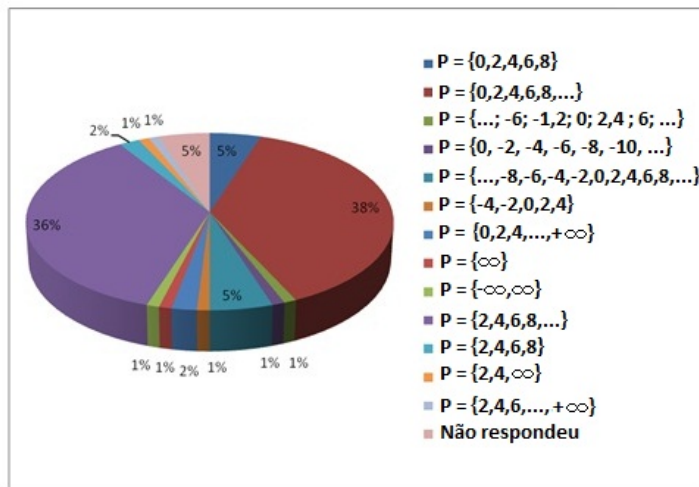


A resposta esperada foi atingida por mais da metade dos alunos, vale chamar a atenção que 27 alunos não incluem o zero no conjunto  $\mathbb{N}$  (o que não é problema), e alguns utilizam o símbolo do infinito como sendo um elemento desse conjunto, ou seja, um tipo de número.

4.2) Represente o conjunto dos números pares a seguir:  
 $P =$

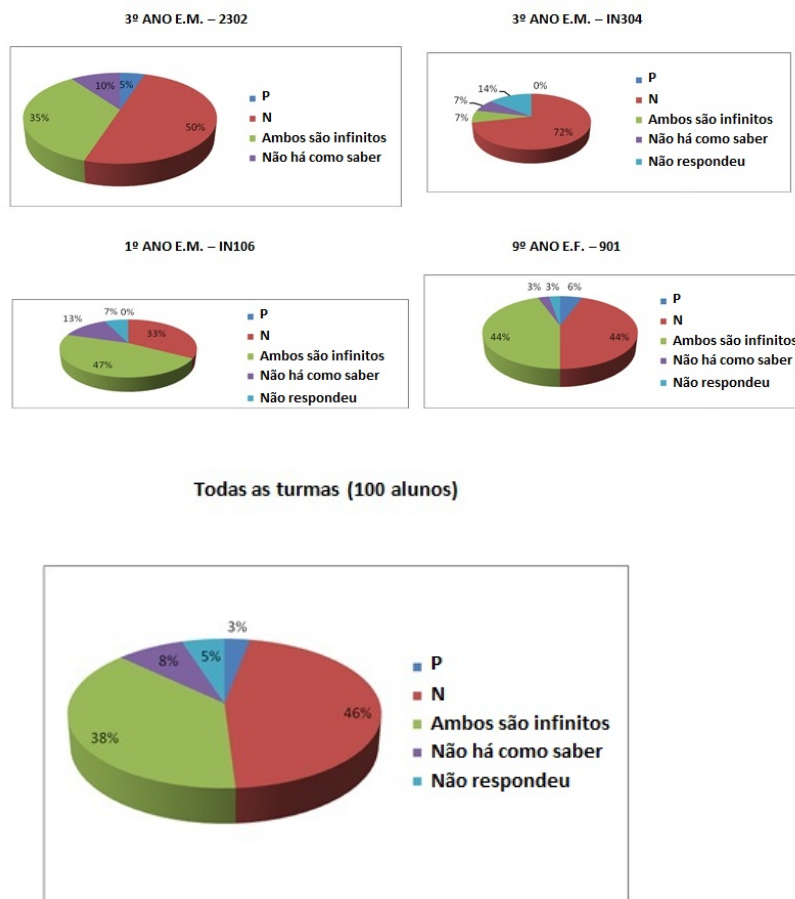


Todas as turmas (100 alunos)



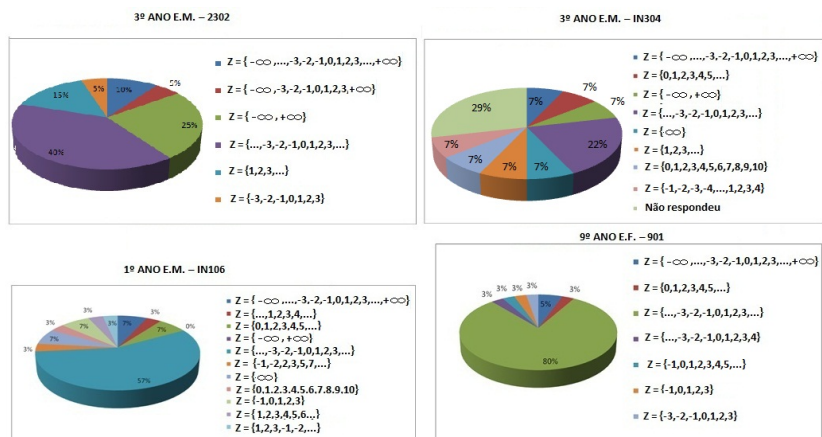
A maioria dos alunos não incluíram o zero no conjunto dos números pares, e alguns continuam utilizando o símbolo de infinito como elemento de conjunto numérico.

4.3) Qual conjunto possui maior número de elementos N ou P? Justifique.

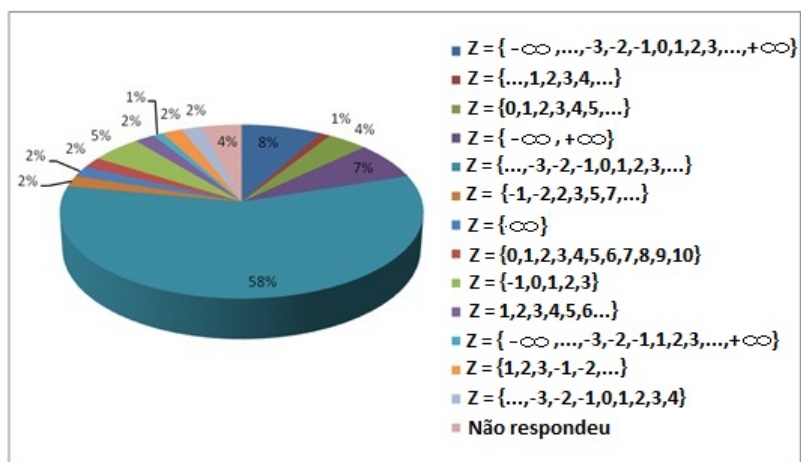


Um número significativo de alunos respondeu o que se esperava “Ambos são infinitos”, a maioria ou tem dúvida ou acredita que os naturais estão em maior número que os pares pois contém esses e mais os ímpares. Nenhum aluno apresentou uma bijeção para comprovar que “Ambos são infinitos”.

4.4) Represente o conjunto dos números inteiros a seguir:

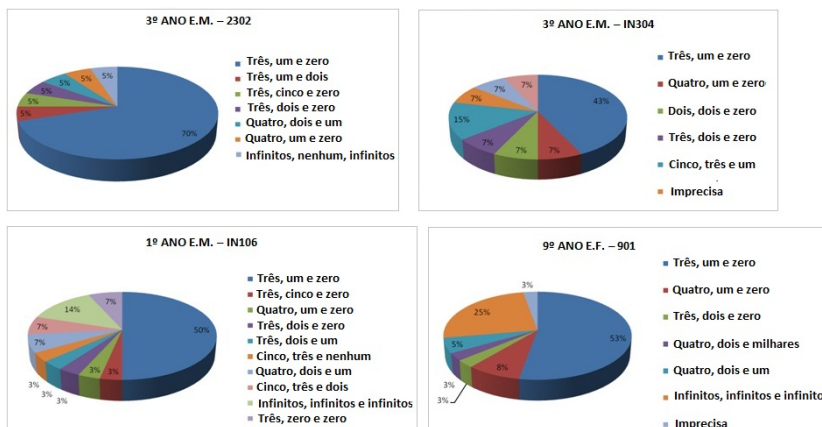


Todas as turmas (100 alunos)

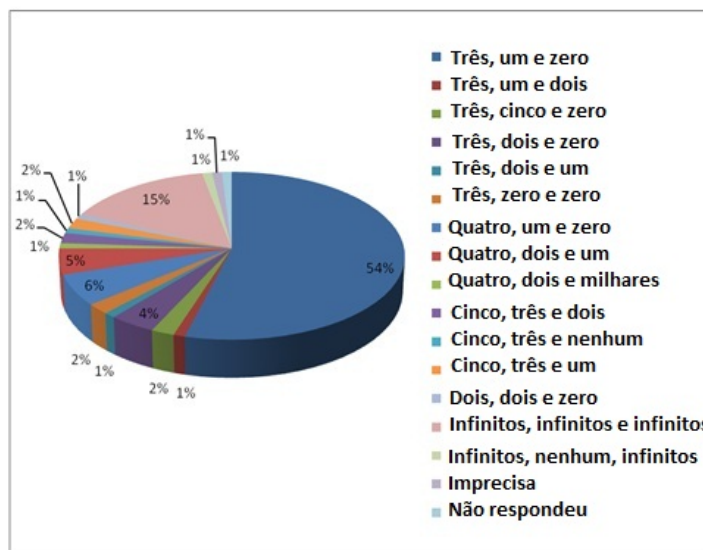


A maioria optou por representações aceitáveis, mas vale apontar novamente a utilização do símbolo do infinito como elemento do conjunto dos números inteiros.

4.5) Quantos números inteiros existem entre: 3 e 7? E entre -2 e -4?  
E entre 0 e 1?

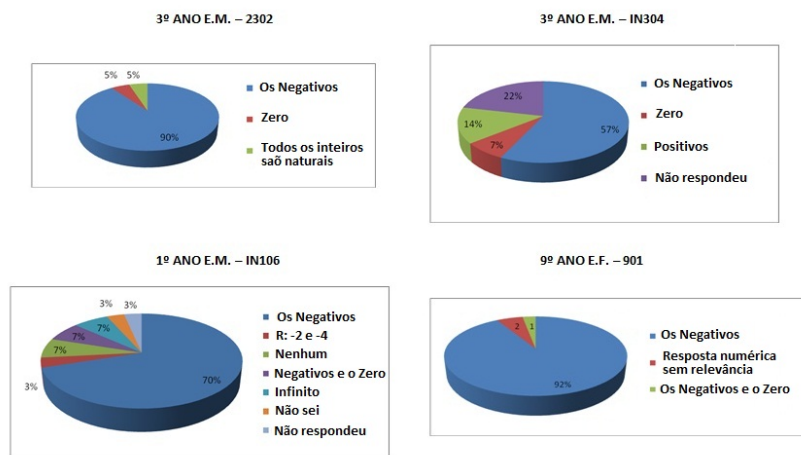


Todas as turmas (100 alunos)

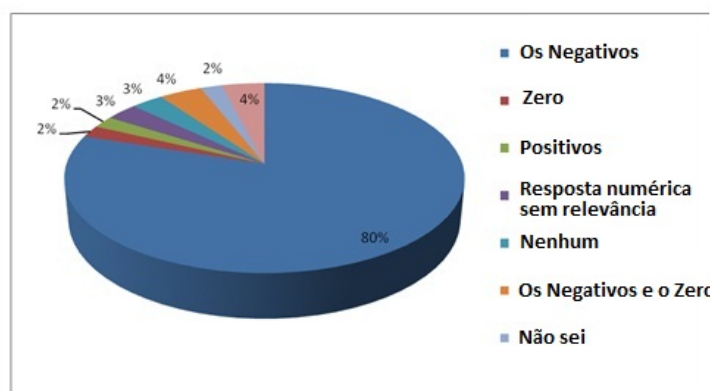


*A maioria dos alunos respondeu o que se esperava, alguns se confundiram com os comandos "Entre" e "De ... até ...".*

4.6) Que números são inteiros mas não são naturais?

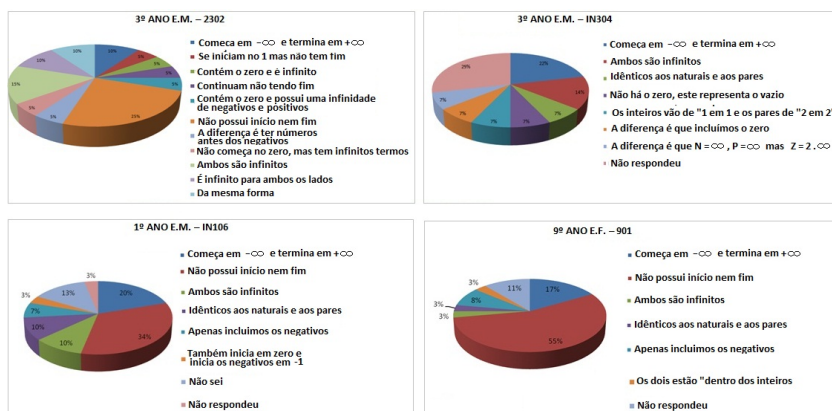


Todas as turmas (100 alunos)

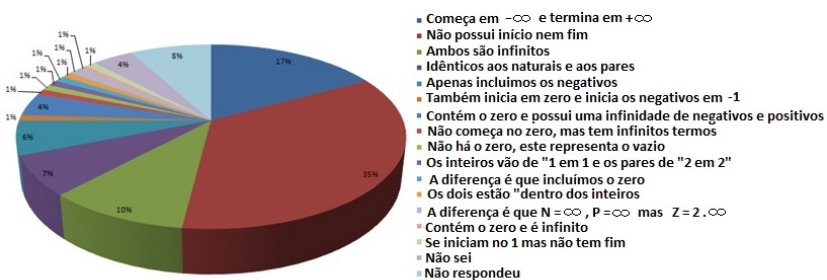


*A maioria dos alunos respondeu o que se esperava.*

4.7) Tanto o conjunto dos números naturais quanto no conjunto dos números pares, ambos possuem início em zero, mas não possuem fim. Como se comporta o conjunto dos números inteiros, quanto a esse fato?



Todas as turmas (100 alunos)

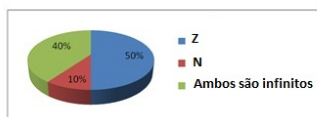


*As respostas foram muito heterogêneas, e as comparações pouco consistentes.*

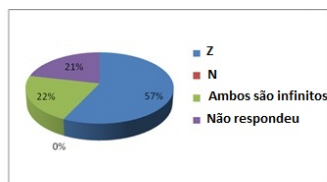


4.8) Qual conjunto possui maior número de elementos  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ ?

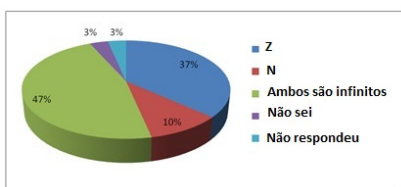
3º ANO E.M. – 2302



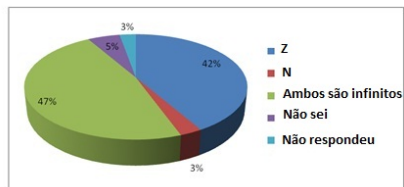
3º ANO E.M. – IN304



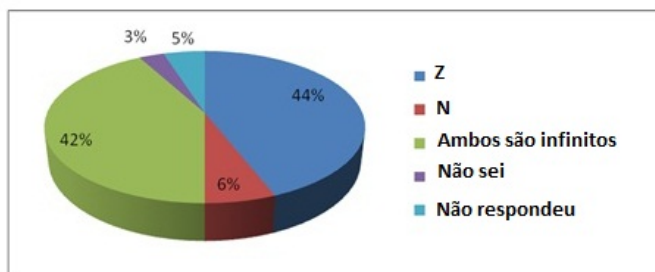
1º ANO E.M. – IN106



9º ANO E.F. – 901

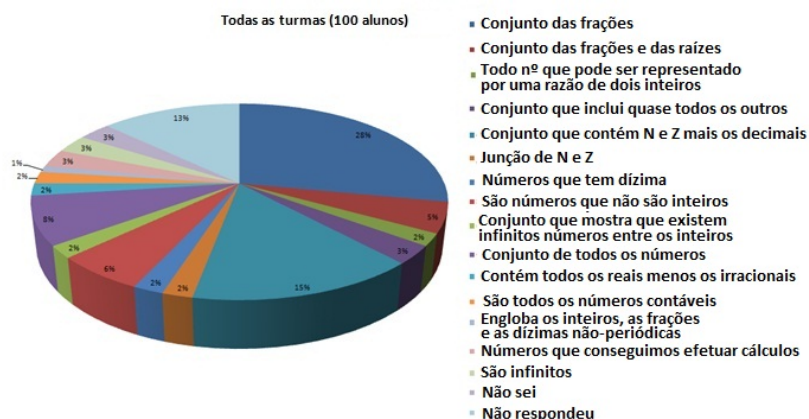
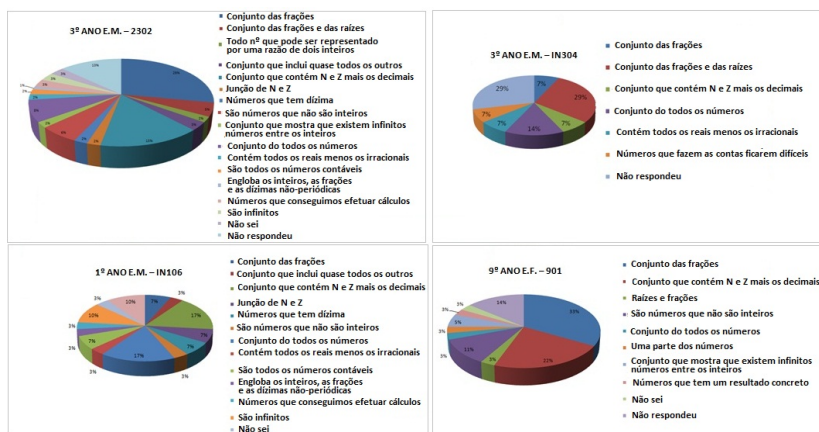


Todas as turmas (100 alunos)



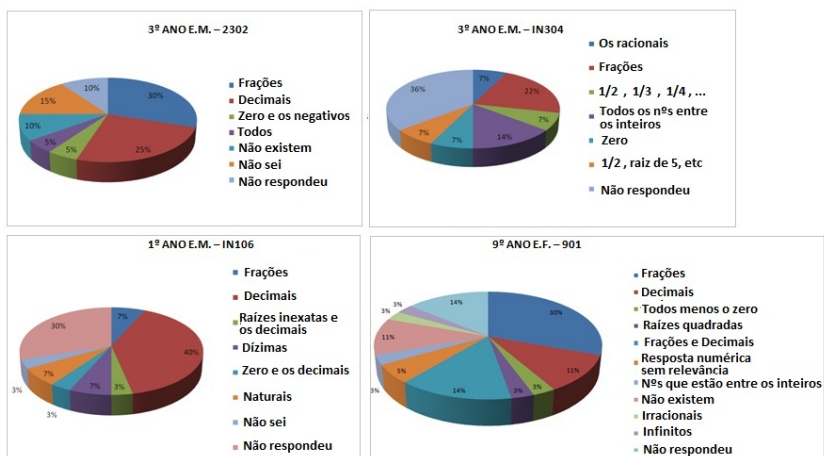
*Novamente obtemos a mesma avaliação da comparação dos naturais com o pares.*

4.9) Descreva com suas palavras o conjunto dos números racionais.



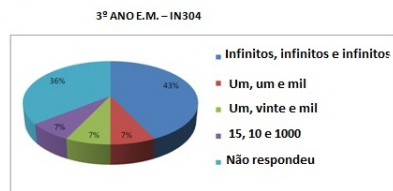
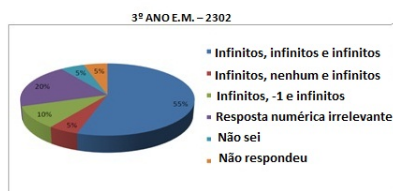
A maioria associa esse conjunto ao conjuntos dos decimais ou das frações, porém as suas descrições são muito superficiais. Os racionais podem ser definidos como o conjunto dos números que podem ser escritos sob a forma  $\frac{a}{b}$  sendo **a** e **b** inteiros com **b** diferente de zero e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . Pelas definições apresentadas os números  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $0,01001000100001\dots$  poderiam ser encarados como racionais de maneira equivocada, pois são respectivamente, fração e número decimal.

4.10) Que números são racionais e não são inteiros?



*Aqui começamos a perceber o pouco conhecimento de boa parte dos alunos sobre a transição da matemática discreta para matemática contínua, acarretada pelo entendimento superficial dos conjuntos numéricos.*

4.11) Quantos números racionais existem entre:  $1/2$  e  $1/4$ ? E entre  $-2$  e  $0$ ? E entre  $0$  e  $1/1000$ ?

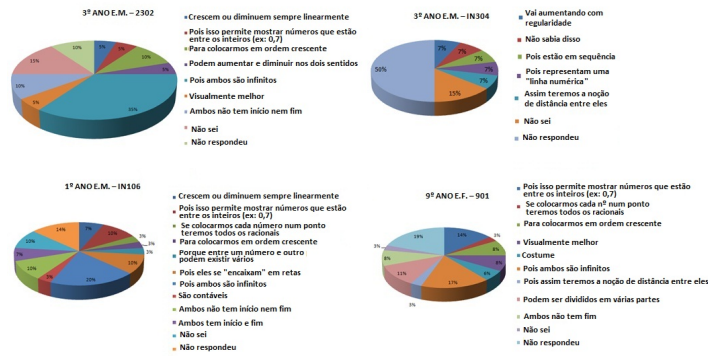


Todas as turmas (100 alunos)

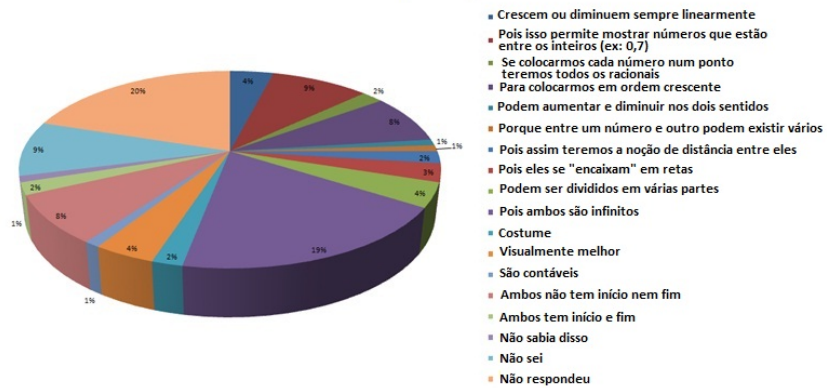


A grande maioria apresentou a resposta esperada.

4.12) Explique com suas palavras como e porquê associamos o conjunto dos números racionais a uma reta.

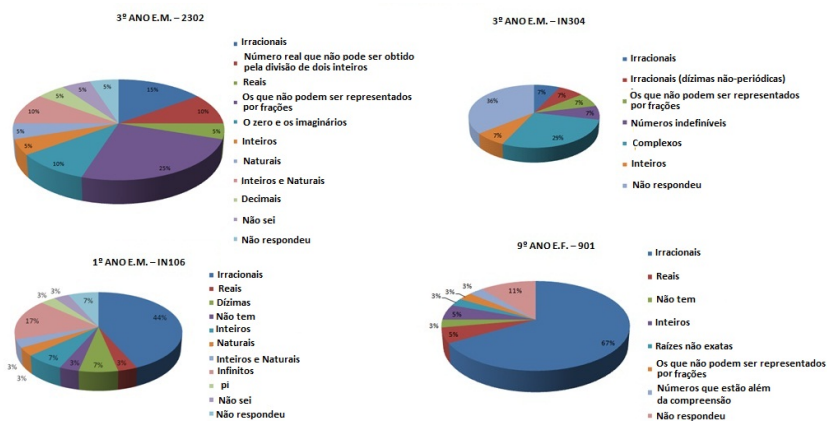


Todas as turmas (100 alunos)

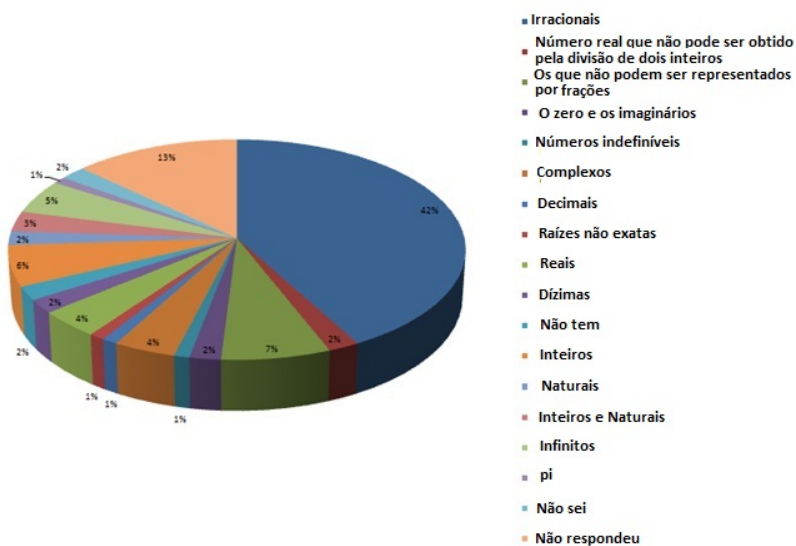


As respostas apresentadas foram muito heterogêneas e superficiais.

4.13) Existem números que não são racionais, como você pode defini-los?

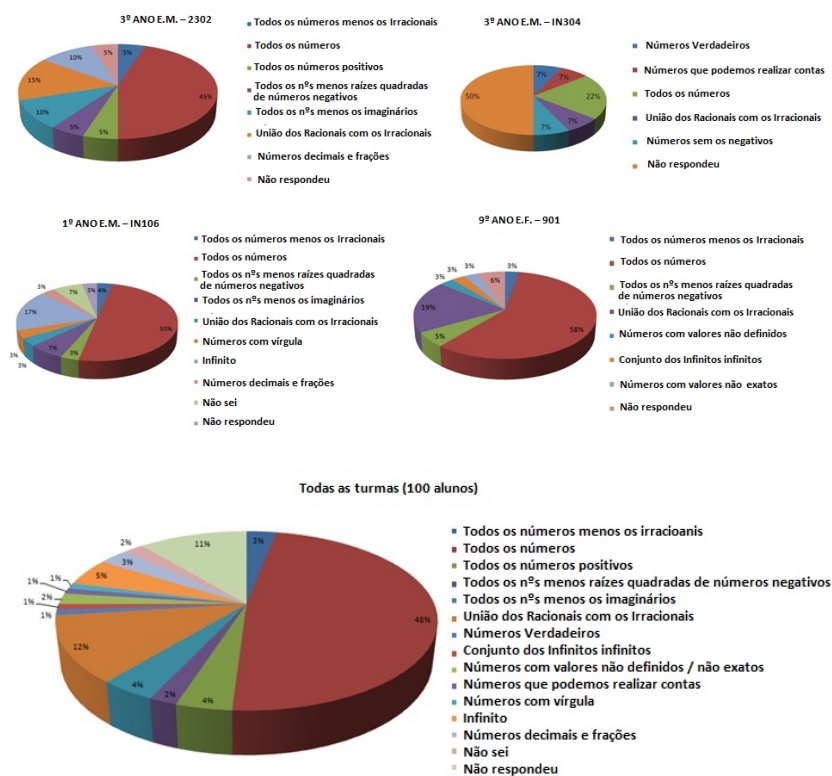


Todas as turmas (100 alunos)



Apesar das respostas serem muito heterogêneas é evidente a dificuldade da transição do racionais para os reais, boa parte dos alunos apresentam total desconhecimento dos irracionais.

4.14) Explique com suas palavras o que seria o conjunto dos números reais.



*As respostas foram concisas e muito abrangentes, totalmente sem justificativas. Isso nos mostra que a construção dos reais no ensino básico é bastante equivocada.*

### 3 Conclusões obtidas através da Análise das Respostas do Questionário

- *As definições de infinito foram satisfatórias apesar de suscintas e superficiais, porém vários alunos acabaram contradizendo suas definições após responder outras perguntas do questionário.*
- *Os exemplos de "infinito" citados foram na maioria, influenciados pela vida escolar do aluno fugindo totalmente dos campos da metafísica que envolvem discussões mais profundas e/ou de seus próprios cotidianos.*
- *Praticamente todos os alunos tiveram muita dificuldade em trabalhar com séries.*
- *Em várias situações os alunos utilizam o símbolo do infinito como sendo uma espécie de número, ora para representar operações, ora como elemento de conjuntos numéricos.*
- *Quando comparamos a quantidade de elementos de conjuntos numéricos como os naturais e os pares, ou os naturais e os inteiros, a maioria se confunde, poucos respondem "Ambos são infinitos".*
- *As definições e descrições apresentadas são muito superficiais.*
- *Boa parte dos alunos acredita que o número "zero" não é par.*
- *A grande maioria dos alunos tem uma visão equivocada sobre "Conjuntos Numéricos", em particular sobre os irracionais e reais.*



## Capítulo IV

# ATIVIDADE 2 - Área do Círculo

Prezado professor, essa atividade foi elaborada com o intuito de possibilitar aos alunos do 9º ano ou ano escolar superior, a compreensão de um dos processos que possa gerar a área de um círculo de raio um; tendo como pano de fundo uma abordagem sobre infinito e infinitésimo, propiciando assim aos seus alunos, um dos primeiros contatos com o conceito de convergência, mesmo que de uma maneira superficial e pouco formalizada. No item “Procedimentos Operacionais” desse texto, as informações em caixas de texto e itálico, são apontamentos que achamos pertinentes apenas ao professor, e não estará presente no material entregue ou enviado ao aluno. Aconselhamos que essa atividade seja feita antecipadamente pelo professor, para evitarmos quaisquer falhas no processo e também assegurar que o professor esteja prevenido e preparado para superar quaisquer dificuldades de seus alunos, seja presencialmente, ou on-line.

**Objetivo:** Introduzir o cálculo da área de um círculo por meio de aproximações sucessivas, utilizando polígonos regulares inscritos. E como pano de fundo desenvolver nos alunos as primeiras idéias de infinito e infinitésimos.

**Ano de Escolaridade Indicado :** a partir do 9º ano.

**Pré-Requisito:** Noções de área de polígonos, noções de inscrição de polígonos em circunferência.

**Descrição da atividade:**

Propomos uma atividade que faz alusão ao método de Exaustão de Eudoxo idealizada por Arquimedes, o objetivo do método é o de calcular a área de um círculo de raio um, limitada inferiormente pela área de um polígono regular de  $n$  lados inscrito nesse círculo. A atividade deverá ser realizada pelo aluno em um laboratório de informática, ou em casa com arquivos disponíveis em um site ou blog informado.

**Recursos Necessários:** Computador com internet, Geogebra e Excel instalados.

## 4 Material do Professor

**Procedimentos Operacionais:**

Passo 1: Abrir o arquivo “Área do circulo.ggb” no Geogebra.

[Link Área do circulo.ggb](#)

Passo 2: Abrir o arquivo “Área do círculo.xls” no Excel.

[Link Área do círculo.xls](#)

Passo 3: Observe que o controle deslizante encontra-se com  $n = 3$ . Ligue o



botão “polígono” Click nos três pontos apresentados na circunferência e retorne a clicar no primeiro. Observe que o polígono gerado foi um triângulo equilátero.

*Caro professor, caso haja alguma dúvida sobre o fato do triângulo ser equilátero, reforce o fato que o triângulo gerado possui todos os lados de mesma medida e que seus ângulos internos são iguais a*



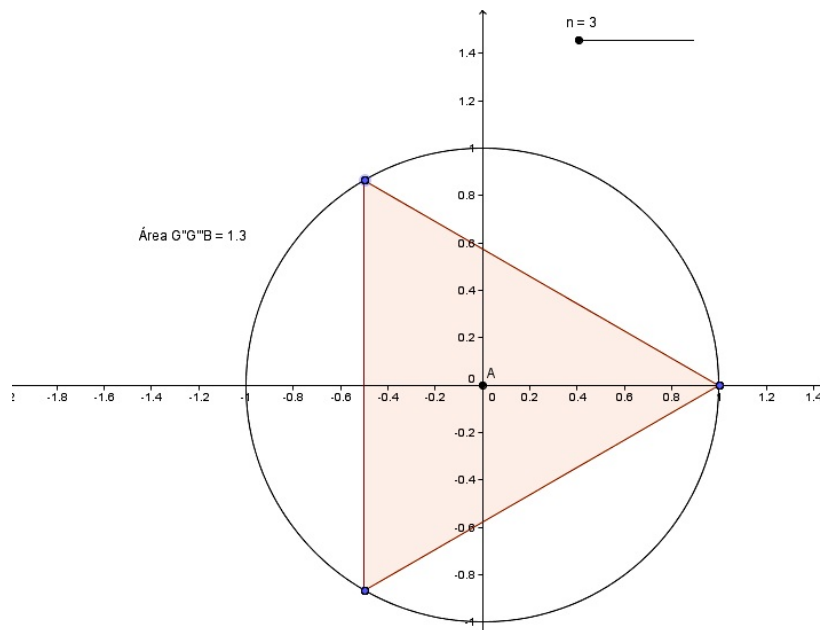
*60°, para comprovar esse fato utilize a ferramenta*



*para medir, em graus, os ângulos internos do triângulo equilátero.*



Passo 4: Ligue o botão “área” , e click sobre o triângulo gerado anteriormente.




Passo 5: Acesse a planilha no Excel, após preencha a coluna "Área do polígono inscrito" com o valor gerado pelo geogebra para a área do triângulo eqüilátero.


*Caro professor, atente ao fato que o geogebra (dependendo da versão) utiliza ponto para separar as casas decimais e o Excel utiliza vírgula.*

	A	B	C	D
1	n	Área do polígono Inscrito		
2	3	1,3		
3	4			
4	5			
5	6			
6	7			
7	8			
8	9			
9	10			



Passo 6: Retorne ao geogebra. Utilize o botão seta  para selecionar o triângulo, após selecionado aperte a tecla "DEL" no teclado.

Passo 7: Desloque o controle deslizante para posição "n=4", click no botão



"polígono" , Click nos quatro pontos apresentados na circunferência e retorne a clicar no primeiro. Observe que o polígono gerado foi um quadrado.

Caro professor, caso haja alguma dúvida sobre o fato do quadrilátero gerado ser um quadrado, faça-os observar que as diagonais estão sobre os eixos e o centro do círculo é a origem  $(0,0)$  com isso podemos concluir que as diagonais:

- [1] Se cruzam ao meio;
- [2] São perpendiculares;
- [3] tem mesmo comprimento.

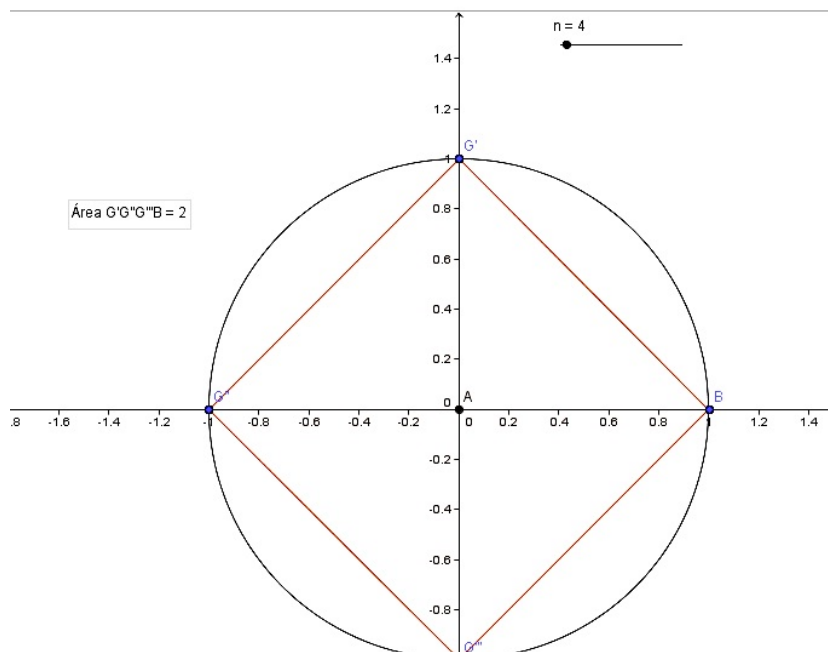
Com isso podemos apontar que [1] e [2] caracterizam um losango e [3] um retângulo, **portanto é um quadrado**, já que o único quadrilátero que é ao mesmo tempo retângulo e losango.

Outro método seria mostrar que os lados têm mesmo comprimento

e que os ângulos são retos, utilizando as ferramentas  e  já utilizadas anteriormente.



Passo 8: Ligue o botão “área”  , e click sobre o quadrado gerado anteriormente.

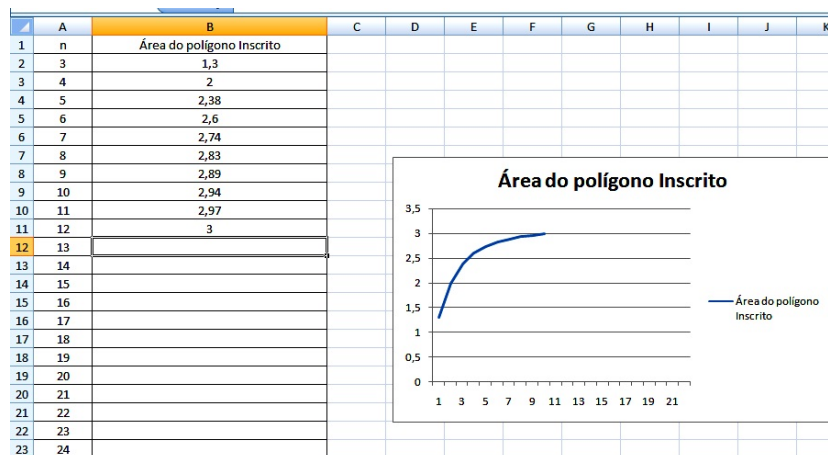


Passo 9: Retorne à planilha do Excel, após preencha a coluna "Área do polígono inscrito" com o valor gerado pelo geogebra para a área do quadrado.



Passo 10: Retorne ao geogebra. Utilize o botão seta para selecionar o quadrado, após selecionado aperte a tecla "DEL" no teclado.

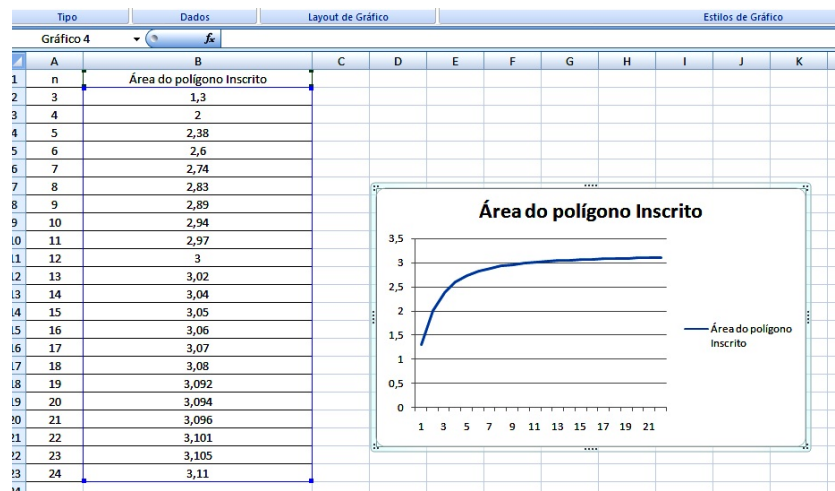
Passo 11: repita os passos anteriores para os valores de "n=5" até "n=24".



Passo 12: Observe que conforme são digitados os valores, o gráfico que representa a área do polígono em função do número de lados vai sendo traçado.

*Caro professor, atente seus alunos para o fato do valor se aproximar cada vez mais de 3,14. Aproveite para analisar e deixar que eles façam suas formulações a respeito do gráfico, que grandezas o gráfico aborda, a graduação dos eixos, etc...*

O gráfico deverá ser traçado.



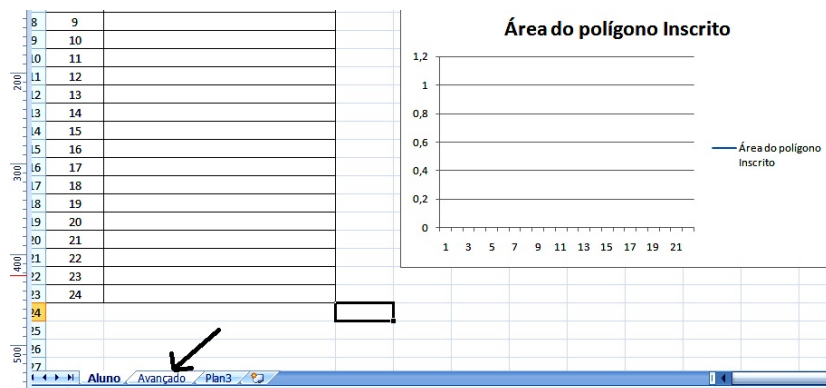
### Interpretação Pedagógica:

É esperado que o aluno perceba que conforme aumentamos o número de lados do polígono regular inscrito sua área cada vez mais se aproxima da área do círculo, tanto visualmente (Geogebra) quanto numericamente (Excel). Essa aproximação numérica é melhor ser visualizada no gráfico, onde o valor da área se aproxima de um número próximo a 3,14. Ou seja, quando trabalhamos com uma *infinitude* de lados (quando **n tende ao infinito**) a área tende para  $\pi$ .

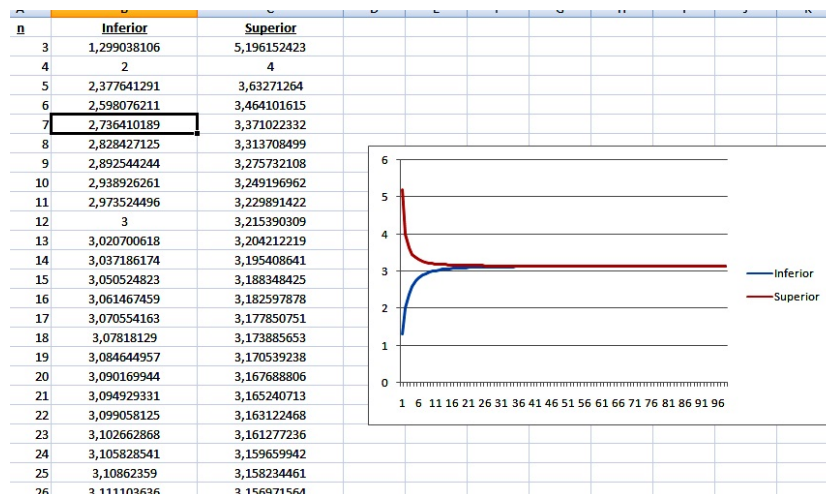
*Caro professor, essa clássica demonstração idealizada de maneira similar por Arquimedes é totalmente baseada no "Método de Exaustão de Eudoxo", método esse que introduziu, pela primeira vez, o conceito de infinito na antiguidade. Para maiores informações a respeito do método vide [16].*

### Observações e Sugestões ao Professor

No mesmo arquivo do Excel há uma outra planilha, para acessá-la click em "Avançado", conforme figura a seguir



Ela mostra a área dos polígonos de  $n$  lados inscritos (coluna inferior) e circunscritos (coluna superior) num círculo de raio 1, aponte para o fato de ambos convergirem para 3,14 quando  $n$  aumenta infinitamente, e perceba que a diferença entre os valores das colunas tende a zero quando nos aproximamos de  $n=100$ .



Prezado professor podemos também utilizar o link abaixo ao fim da atividade. O mesmo recria a mesma situação mas com um número maior de lados, além disso podemos explorar outros elementos da figura como os apótemas, o raio, os setores e ainda modificar o tamanho do raio.

<http://www.geogebraTube.org/student/m13004>

Uma outra apresentação que pode surtir grande efeito está descrita no link abaixo que recria a demonstração da área do círculo através da comparação com a área de um triângulo cuja base é  $2\pi R$  e a altura é  $R$ . Vale pedir aos alunos que aumentem e diminuam a quantidade de divisões do círculo.

<http://www.geogebra.org/student/m3491>

Por fim, vale discutir as idéias de infinito e infinitésimo por trás dessas demonstrações e concluímos com o intrigante vídeo a seguir, que aponta uma divertida abordagem sobre os tipos de infinito de Cantor, texto idealizado pelo matemático David Hilbert com vídeo produzido por alunos e professores da UNICAMP.

Hotel de Hilbert

[LINK: Hotel de Hilbert](#)

Ao final da atividade propomos que os alunos respondam as questões abaixo, sejam em grupo ou individualmente, onde as respostas ou comentários (que estão em itálico) estarão presentes apenas no material do professor.

Questões:

- 1) Por que podemos afirmar que a área dos polígonos apresentados é menor que a do círculo, independente da quantidade de lados de cada polígono?  
*Porque como todos os polígonos gerados pelo geogebra estão inscritos no círculo, suas áreas são obrigatoriamente inferiores à área do círculo.*
- 2) Quando aumentamos o número de lados do polígono sua área se aproxima ou não da área do círculo?  
*Cada vez que aumentamos o valor de  $n$  a área do polígono aumenta, se aproximando cada vez mais da área do círculo, isto pode ser notado visualmente no geogebra e numericamente no excel.*
- 3) Sabemos que não é possível construir um polígono com uma quantidade infinita de lados. Mas se conseguíssemos, que relação poderíamos estabelecer entre sua área e a do círculo?  
*Se existisse um polígono com infinitos lados sua área seria igual a área do círculo circunscrito a ele.*
- 4) Podemos afirmar que a área do círculo limita superiormente a área dos polígonos regulares nele inscritos? Por que?  
*Sim, pois como afirmamos na pergunta 1, os polígonos regulares estão todos inscritos no círculo, portanto não existirá (nessa atividade) um polígono que terá área superior a do círculo.*
- 5) Comente a seguinte afirmação: *"Quando o número de lados  $n$  de um polígono regular inscrito num círculo assume valores cada vez maiores, ou seja  $n$  tende ao infinito, afirmamos que a área desse polígono é igual a área do círculo".*



*Pela resposta que assumimos na pergunta 4, podemos afirmar que sim.*

*Caro professor caso se sinta à vontade com o desenvolvimento e envolvimento da turma com os conceitos apresentados, aproveite para inserir antecipadamente a simbologia:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{pol} = A_{circ}$$

Onde  $A_{pol}$  representa a área do polígono de  $n$  lados e  $A_{circ}$  representa a área do círculo.

Segue na próxima página, uma versão da atividade que deverá ser entregue ao aluno.

## 5 ATIVIDADE - Área do Círculo - Material do Aluno

### VERSÃO ALUNO

**Objetivo:** Introduzir o cálculo da área de um círculo por meio de aproximações sucessivas, utilizando polígonos regulares inscritos.

**Descrição da atividade:**

Propomos uma atividade que faz alusão ao método de Exaustão de Eudoxo idealizada por Arquimedes, o objetivo do método é o de calcular a área de um círculo de raio um, limitada inferiormente pela área de um polígono regular de  $n$  lados inscrito nesse círculo. A atividade deverá ser realizada pelo aluno em um laboratório de informática, ou em casa com arquivos disponíveis em um site ou blog informado.

**Recursos Necessários:** Computador com internet, Geogebra e Excel instalados.

**Procedimentos Operacionais:**

**Procedimentos Operacionais:**

Passo 1: Abrir o arquivo “Área do circulo.ggb” no Geogebra.

[Link Área do circulo.ggb](#)

Passo 2: Abrir o arquivo “Área do circulo.xls” no Excel.

[Link Área do circulo.xls](#)

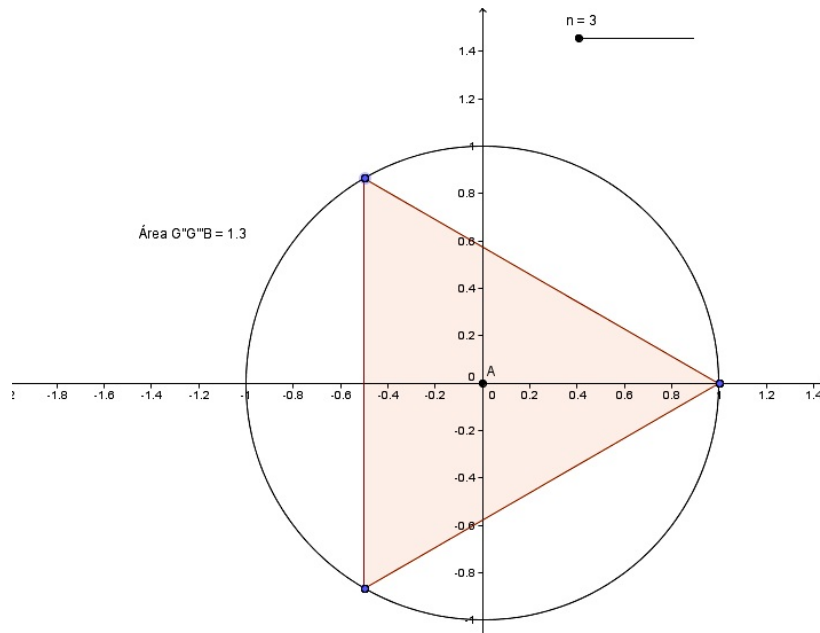
Passo 3: Observe que o controle deslizante encontra-se com  $n=3$ . Ligue o



botão “polígono” Click nos três pontos apresentados na circunferência e retorne a clicar no primeiro. Observe que o polígono gerado foi um triângulo equilátero.





Passo 4: Ligue o botão “área” , e click sobre o triângulo gerado anteriormente.




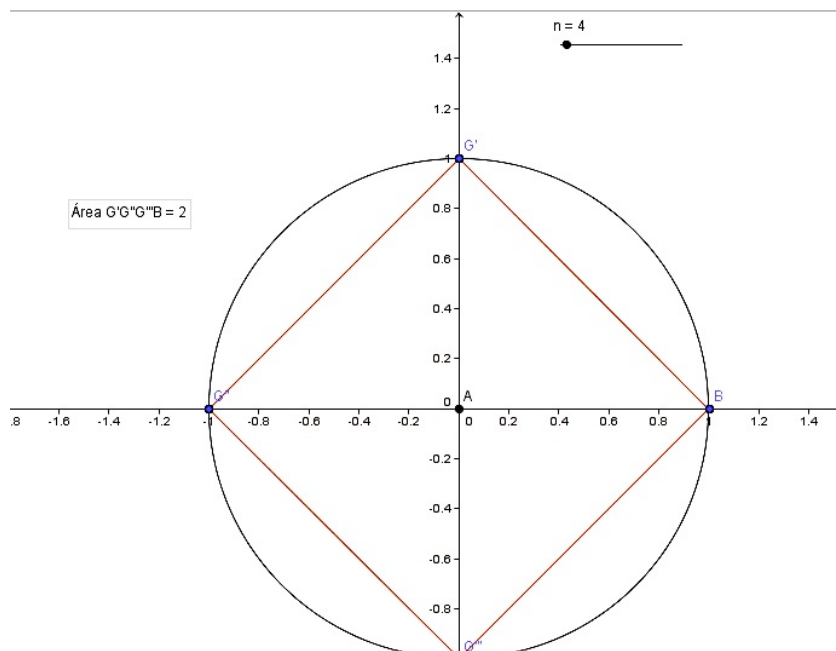
Passo 5: Acesse a planilha no Excel, após preencha a coluna Área do polígono inscrito com o valor gerado pelo geogebra para a área do triângulo equilátero.

Microsoft Excel - Área do polígono inscrito				
Início    Inserir    Layout da Página    Fórmulas    Dados    Revisão				
Calibri 11    N I S    Quebrar    Mesclar e				
Área de T...    Fonte    Alinhamento				
B2    fx    1,3				
	A	B	C	D
1	n	Área do polígono Inscrito		
2	3	1,3		
3	4			
4	5			
5	6			
6	7			
7	8			
8	9			
9	10			


Passo 6: Retorne ao geogebra. Utilize o botão seta  para selecionar o triângulo, após selecionado aperte a tecla “DEL” no teclado.

Passo 7: Desloque o controle deslizante para posição “n=4”, click no botão  “polígono”, Click nos quatro pontos apresentados na circunferência e retorne a clicar no primeiro. Observe que o polígono gerado foi um quadrado.

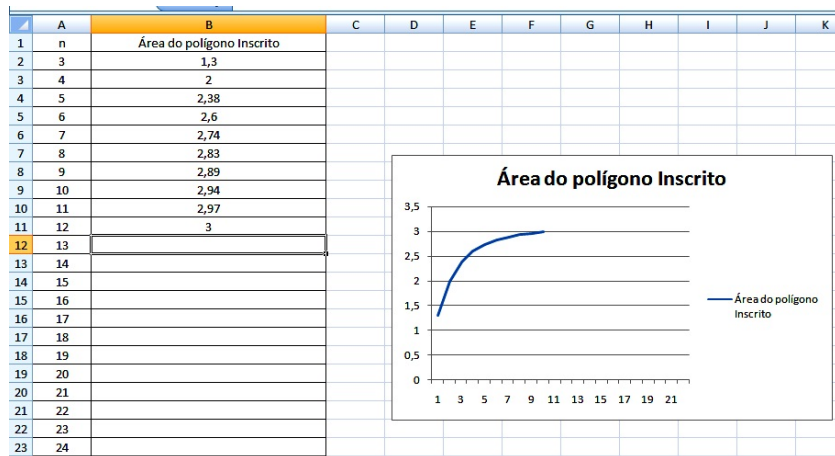
Passo 8: Ligue o botão “área” , e click sobre o quadrado gerado anteriormente.



Passo 9: Retorne à planilha do Excel, após preencha a coluna Área do polígono inscrito com o valor gerado pelo geogebra para a área do quadrado.

Passo 10: Retorne ao geogebra. Utilize o botão seta  para selecionar o quadrado, após selecionado aperte a tecla “DEL” no teclado.

Passo 11: repita o procedimento acima do valor “n=5” até o valor “n=24”.



Passo 12: Observe que conforme são digitados os valores o gráfico que representa a área do polígono em função do número de lados vai sendo traçado.

**Prezado aluno, responda as questões abaixo a cerca dos assuntos abordados pela atividade.**

- 1) Por que podemos afirmar que a área dos polígonos apresentados é menor que a do círculo, independente da quantidade de lados de cada polígono?

---



---



---

- 2) Quando aumentamos o número de lados do polígono sua área se aproxima ou não da área do círculo?

---



---



---

- 3) Sabemos que não é possível construir um polígono com uma quantidade infinita de lados. Mas se conseguíssemos, que relação poderíamos estabelecer entre sua área e a do círculo?

---



---



---

- 4) Podemos afirmar que a área do círculo limita superiormente a área dos polígonos regulares nele inscritos? Por que?

---

---

---

- 5) Comente a seguinte afirmação: *”Quando o número de lados  $n$  de um polígono regular inscrito num círculo assume valores cada vez maiores, ou seja  $n$  tende ao infinito, afirmamos que a área desse polígono é igual a área do círculo”*

---

---

---

Outros Links,

<http://www.geogebraTube.org/student/m13004>

<http://www.geogebraTube.org/student/m3491>

Hotel de Hilbert

LINK: [Hotel de Hilbert](#)

## Capítulo V

# ATIVIDADE 3 - Alterações em Gráficos

## 6 Introdução

É muito comum estudantes recém-chegados aos cursos de Ciências Exatas terem dificuldade em Cálculo Diferencial e Integral por não terem noções de transformações no plano, mais precisamente na plotagem de gráficos de funções aparentemente complicadas, mas facilmente obtidos através de translações de um gráfico de função mais elementar. Com isso, acreditamos que os conceitos de ponto de inflexão, assíntotas, limites laterais e limites no infinito possam ser explorados por alunos do ensino médio através de um apelo mais visual, abordado pelos efeitos geométricos dessas transformações, sejam elas lineares ou não.

A presente atividade não objetiva desenvolver esse conceito de maneira generalizada, mas sim focar nas principais transformações que ocorrem em gráficos de funções polinomiais, trigonométricas e outras menos comuns. Iniciaremos com um tratamento não formal e sim experimental de algumas das principais transformações lineares, e expandiremos o conceito para degenerações, do tipo “compressão” ou “expansão” de concavidades assim como suas mudanças de sentido. Com isso, esperamos que os alunos obtenham uma maior facilidade no entendimento de estudo do gráfico de uma função seja ela elementar ou não, e com isso absorvam os conceitos explicitados anteriormente.

Caro professor, a parte 1.1 da atividade 3 resume-se no estudo das transformações que ocorrem no gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = p(x+q)^n + r$  ocasionadas pelas variações dos coeficientes **p, q** e **r** de **-5 a 5** com incremento de 0,1 e pela variação de **n** também de **-5 a 5** com incremento de 1 (uma unidade). A parte 1.2 dessa mesma atividade resume-se em desenvolver as mesmas habilidades com as seguintes funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  trigonométricas definidas por:  $f(x) = c.\text{sen}(ax+b) + d$ ;  $f(x) = c.\text{cos}(ax+b) + d$  e  $f(x) = c.\text{tg}(ax+b) + d$ , fazendo **a, b, c** e **d** variarem de **-5 a 5**, com incremento de 1 (uma unidade).

Esperamos que essa parte seja desenvolvida pelo professor em uma aula expositiva com auxílio do software “Geogebra” exibindo as transformações citadas de maneira dinâmica. No item “Descrição da atividade” você encontrará as orientações necessárias.

Já na parte 2, sugerimos a aplicação de um QUIZ com sua turma, utilizando uma apresentação auto-explicativa no Power Point ou Impress fornecida nos arquivos “Alterações no gráfico 21.ppt” e “Alterações no gráfico 22.ppt”.

## 6.1 Objetivos da parte 1.1:

Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = p(x + q)^n + r$$

Fazer com que o aluno perceba que:

- Se somamos um valor  $r > 0$  em uma função  $f$ , a mesma “sobe”  $r$  unidades em relação ao eixo das abscissas e “desce”  $r$  unidades, se  $r < 0$ .

- Se somamos um valor  $q > 0$  na variável “ $x$ ” de uma função,  $f$  a mesma desloca-se para “a esquerda”  $q$  unidades em relação ao eixo das ordenadas e desloca-se para “a direita”  $q$  unidades, se  $q < 0$ .

Obs: As transformações acima são intituladas de **translações**.

- Ao variarmos o valor de  $n$ , a função  $f$  assume as seguintes “formas”:

Se  $n \geq 0$  temos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- a)  $n = 0$  obtemos a Função Constante:  $f(x) = p + r$
- b)  $n = 1$  obtemos a Função Afim:  $f(x) = p(x + q) + r$
- c)  $n = 2$  obtemos a Função Quadrática :  $f(x) = p(x + q)^2 + r$
- d)  $n = 3$  obtemos a Função Polinomial de grau 3 :  $f(x) = p(x + q)^3 + r$
- e)  $n = 4$  obtemos a Função Polinomial de grau 4 :  $f(x) = p(x + q)^4 + r$
- f)  $n = 5$  obtemos a Função Polinomial de grau 5 :  $f(x) = p(x + q)^5 + r$

Se  $n < 0$  temos  $f : \mathbb{R} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$

- g)  $n = -1$  obtemos a Hiperbole Equilátera :  $f(x) = \frac{p}{x+q} + r$
- h)  $n = -2$  obtemos o gráfico de:  $f(x) = \frac{p}{(x+q)^2} + r$
- i)  $n = -3$  obtemos o gráfico de:  $f(x) = \frac{p}{(x+q)^3} + r$
- j)  $n = -4$  obtemos o gráfico de:  $f(x) = \frac{p}{(x+q)^4} + r$
- k)  $n = -5$  obtemos o gráfico de:  $f(x) = \frac{p}{(x+q)^5} + r$

- Se multiplicarmos um valor positivo  $p$  em uma função  $f$ , podem ocorrer as seguintes transformações:

- 1) Se  $n = 0$  ,  $p + r$  assumirá o valor de  $y$  gerando a função constante (reta);



- 2) Se  $n = 1$ , a função afim (reta) será crescente se  $p > 0$  ou decrescente se  $p < 0$ ;
- 3) Se  $n$  for positivo e  $p > 0$  a concavidade da função irá expandir-se quando aproximamos o valor de  $p$  de zero e quando afastamos o valor de  $p$  de zero a concavidade irá diminuir, caso  $p < 0$ , além de ocorrerem as mesmas transformações a concavidade mudará de sentido.
- 4) Se  $n$  for negativo e  $p > 0$  a concavidade irá comprimir-se quando aproximamos o valor de  $p$  de zero e quando afastamos o valor de  $p$  de zero a concavidade irá aumentar, caso  $p < 0$ , além de ocorrerem as mesmas transformações a concavidade mudará de sentido.

Fazer com que o aluno se interesse de uma nova simbologia já utilizado nas atividades propostas pelo prof. Luiz Amorim Goulart [10], e que consiga identificar: **assíntotas, pontos de inflexão, limites laterais e limites no infinito** de funções polinomiais, trigonométricas e outras não muito usuais no Ensino Médio.

## 6.2 Objetivos da parte 2.1:

Esperamos que os alunos desfrutem de uma aula agradável, descontraída e extremamente interativa, almejamos também que os alunos discutam as questões que serão apresentadas pelo Power Point, fazendo com que os mesmos elaborem argumentos matemáticos que convençam seus colegas de grupo para a escolha de uma opção. Sabemos como professores de matemática, que o debate de assuntos referentes a matemática praticamente não é comum entre os discentes, propomos que cada questão seja debatida num espaço de tempo entre 2 a 5 minutos e que o professor aplicador do QUIZ não interfira na discussão dos grupos, mesmo que os argumentos sejam inválidos, pois com o tempo terminado o gabarito da questão será comentado pelo professor com o auxílio da própria apresentação do Power Point.

As questões envolverão os assuntos debatidos pela aula expositiva do professor realizada anteriormente (Parte 1.1). Iniciaremos apenas com questões de traçado ou identificação de funções utilizando as transformações, lineares ou não-lineares; depois com o cálculo de limites laterais, no infinito e por fim a identificação de assíntotas e/ou pontos de inflexão.

**Ano de Escolaridade Indicado:** a partir da 1ª série do Ensino Médio.

**Pré-Requisito:** Noções de Coordenadas Cartesianas, Conceito de Função, reconhecimento e traçado do gráfico das Funções Afim e Quadráticas.

### **Descrição da atividade:**

A atividade proposta consiste em duas partes. A primeira parte é desenvolvida de modo expositivo pelo professor, utilizando um projetor e o arquivo

do geogebra “Alterações no gráfico 11.ggb” que estará disponível para o professor.

Na segunda parte propomos uma atividade em forma de quiz, disponibilizada em forma de apresentação no arquivo ”Alterações no gráfico 21.ppt”, antes de iniciar a apresentação a turma deve ser dividida em grupo de até quatro alunos e cada grupo recebe quatro fichas de (A,B,C e D) encontradas na parte anexo desse arquivo. Iniciada a apresentação em Power Point o roteiro deve ser seguido e a pergunta deve ser exibida pelo professor, os alunos terão um tempo (de 2 a 5 minutos) para escolher a alternativa correta e dar a resposta, após isso o professor exhibe a resposta correta e comenta a resolução com a turma, com o auxílio da apresentação.

**Tempo de Duração:** 6h ou oito tempos de 45min de aula, divididos em:

- Parte 1.1: 1h e 30min - *Aula expositiva funções polinomiais*
- Parte 1.2: 1h e 30min - *QUIZ interativo funções polinomiais*
- Parte 2.1: 1h e 30min- *Aula expositiva funções trigonométricas*
- Parte 2.2: 1h e 30min- *QUIZ interativo funções trigonométricas.*

**Recursos Necessários:**

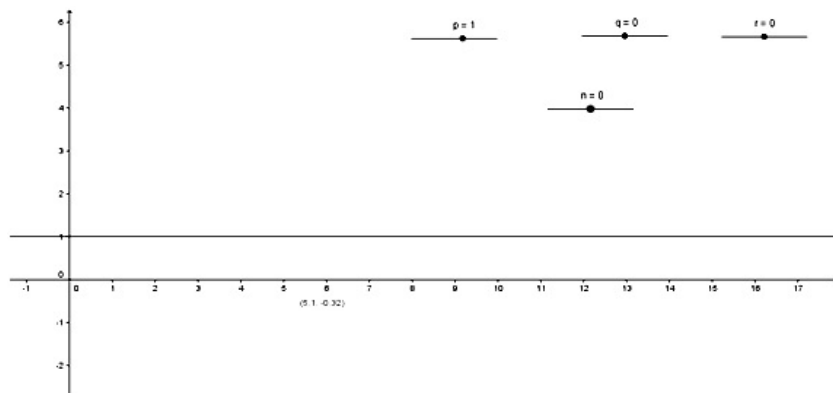
**Parte I** – Computador com geogebra e data-show;

**Parte II** – Data-show e Computador com Powerpoint(Microsoft Office) ou Impress (Br Office) instalados, várias cartelas com as letras A, B, C e D que deverão ser distribuídas entre os grupos de alunos da turma.

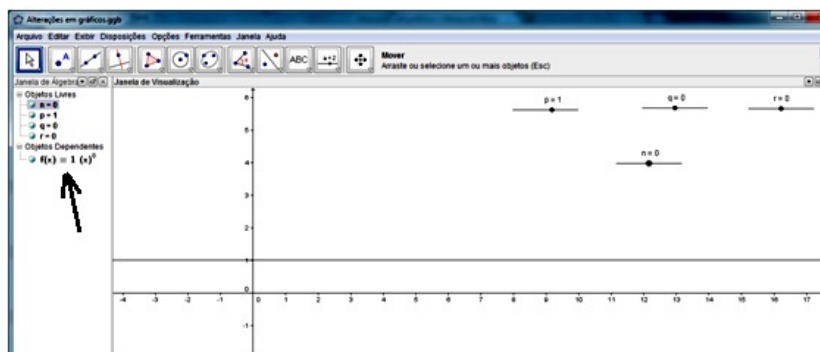
## 7 Procedimentos Operacionais (Parte 1):

### AULA 1

O professor deverá abrir o arquivo “Alterações em Gráficos 11.ggb” no geogebra ([Alterações em Gráficos 11.ggb](#)). Após isso o mesmo deverá exibir na lousa o tipo de função que estamos trabalhando é  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = p(x + q)^n + r$ . Ao abrir o arquivo os valores apresentados nas barras de rolagem são  $p = 1; q = 0; r = 0$  e  $n = 0$ , logo f será exibida na forma da reta  $f(x) = p$ , no caso  $f(x) = 1$ .



- 1) A primeira alteração de barra de rolagem é fazer o coeficiente  $p$  variar e depois  $r$ , aponte para seus alunos como fica definida a função  $f$  na “Janela Álgebra” no canto esquerdo da tela (indicado pela seta abaixo).

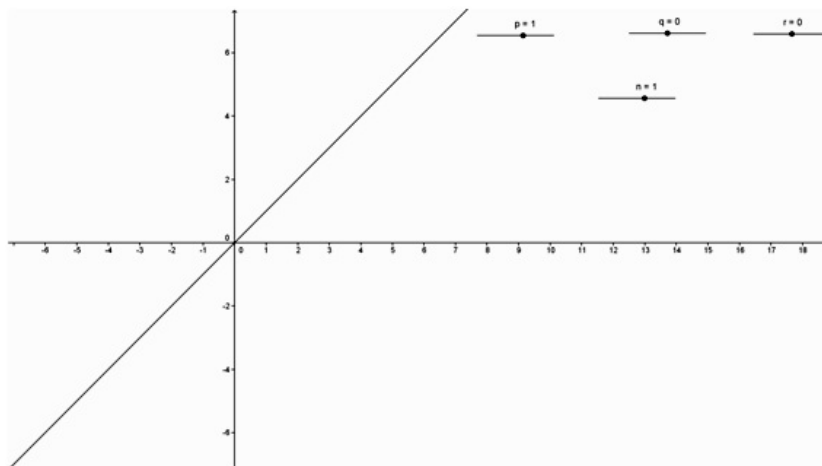


1.1) Faça com que eles respondam a pergunta: “O que irá acontecer com a função  $f$ , se variarmos os valores de  $p$ ?”, pergunte-os o porquê, e mostre o que realmente acontece, explicando que estamos traçando apenas as funções constantes  $f(x) = p$ , pois  $n = 0$  e  $r = 0$ .

1.2) Retorne o valor  $p = 1$ , faça com que eles respondam a pergunta: “O que irá acontecer com a função  $f$ , se variarmos os valores de  $r$ ?”, pergunte-os o porquê, e mostre o que realmente acontece, explicando que estamos traçando apenas as funções constantes  $f(x) = r$ , pois  $n = 0$  e  $p = 1$ .

1.3) Vale também arguir seus alunos: “Por que ao variar  $q$ , a função não se deforma e não se desloca?” O que ocorre é que  $n = 0$  logo  $f(x) = p(x + q)^0 + r = p.1 + r = p + r$ .

- 2) Colocar  $n = 1$ , e manter  $p = 1, q = r = 0$ . Com isso teremos a reta  $f(x) = x$ , bissetriz dos quadrantes ímpares.



2.1) Inicialmente variamos  $r$ , com isso a reta irá “subir” se  $r > 0$  ou “descer” se  $r < 0$ . Relembre seus alunos que neste caso estamos trabalhando com a função  $f(x) = x + r$  e que  $r$  nada mais é que o coeficiente linear da reta, ou seja, indica onde a reta intersecta do eixo das ordenadas.

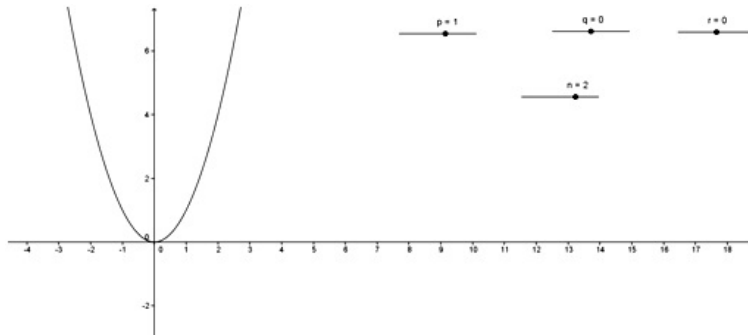
2.2) Retorne para  $r = 0$  e agora variamos  $p$  aumentando seu valor, fazendo com que os alunos observem que: quando  $p > 0$  e estiver “perto” de 5, o ângulo que a reta forma com o eixo das abcissas se aproximará de  $90^\circ$  (sendo ainda agudo); e quando  $p > 0$  e estiver “perto” de zero, o ângulo se aproximará de  $0^\circ$ . Quando  $p = 0$  a reta coincidirá com o eixo das abcissas, e quando  $p < 0$  e estiver “perto” de zero o referido ângulo estará perto de  $180^\circ$ , já quando  $p$  estiver “perto” de  $-5$  o ângulo se aproximará de  $90^\circ$  (sendo ainda obtuso). Vale lembrar seus alunos que  $p = \tan \alpha$  e que  $\alpha$  é o ângulo que a reta forma com o eixo  $x$  (sempre no sentido trigonométrico), além disso:

Se  $p > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \text{I quadrante (pois } 0^\circ < \alpha < 180^\circ) \Rightarrow \alpha \text{ é agudo} \Rightarrow \text{a reta é crescente.}$

Se  $p < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \text{II quadrante (pois } 0^\circ < \alpha < 180^\circ) \Rightarrow \alpha \text{ é obtuso} \Rightarrow \text{a reta é decrescente.}$

2.3) Retorne para  $p = 1$ , agora vamos variar  $q$ , pergunte a seus alunos “Por que a variação de  $q$  ocorre o mesmo que ocorreu em  $r$ ? A resposta é por que  $f(x) = p(x + q)^n + r = 1 \cdot (x + q)^1 + 0 = x + q$ . Note que se colocarmos  $q = 1,5$  e  $r = 0,5$  a reta intersectará o eixo das ordenadas no ponto  $(0,2)$ .

3) Colocar  $n = 2$ , e mantenha  $p = 1$ ,  $q = r = 0$ . Com isso teremos a parábola  $f(x) = x^2$



3.1) Inicialmente variamos  $\mathbf{r}$ , com isso a parábola irá “subir” se  $\mathbf{r} > \mathbf{0}$  ou “descer” se  $\mathbf{r} < \mathbf{0}$ . Relembre seus alunos que neste caso estamos trabalhando com a função  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + \mathbf{r}$  e que  $\mathbf{r}$  nada mais é que o termo independente, ou seja, indica onde a parábola intersecta do eixo das ordenadas.

3.2) Retorne para  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  e agora variamos  $\mathbf{q}$ , atente seus alunos que se escolhermos  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  a parábola desloca-se para a “esquerda” e se escolhermos  $\mathbf{q} < \mathbf{0}$  a parábola descola-se para “direita”, isso se deve ao fato da função  $f(x) = p(x+q)^n + r = 1 \cdot (x+q)^2 + 0 = (x+q)^2$ , onde  $\mathbf{q}$  é o valor acrescido em todos os valores de  $x$  dos pontos que satisfazem a função e no caso de  $f(x) = (x+q)^2$ ,  $\mathbf{q}$  representa a raiz dessa função quadrática cujo  $\Delta = 0$ .

3.3) Vamos agora variar  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$  juntos, atente para o fato que o ponto  $\mathbf{V} = (-\mathbf{q}, \mathbf{r})$  representa o vértice da parábola, e a função quadrática apesar de apresentada da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  também pode ser apresentada na sua **forma canônica**  $f(x) = p(x+q)^2 + r$ . Observe a equivalência:  $f(x) = p(x+q)^2 + r = p(x^2 + 2qx + q) + r = px^2 + 2pqx + pq + r$ , comparando com  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , temos que  $a = p$ ;  $b = pq$  e  $c = pq^2 + r$ , com  $a \neq 0$ .

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
 ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2 + 4a^2c}{4a^2}\right] = a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{a(4ac - b^2)}{4a^2}\right] \\
 ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}\right]
 \end{aligned}$$

Comparando com  $f(x) = p(x+q)^2 + r$ , temos que  $a = p$ ;  $\frac{b}{2a} = q$  e  $\frac{-\Delta}{4a} = r$   
 $\frac{b}{2a} = q \Rightarrow b = 2pq$  e  $\frac{-\Delta}{4a^2} = r \Rightarrow 4ac - b^2 = 4ar \Rightarrow 4pc = (2pq)^2 + 4pr \Rightarrow pc = p^2q^2 + pr \Rightarrow c = pq^2 + r$ .

Portanto  $-q$  é a coordenada  $x$  do vértice da parábola e  $r$  é a coordenada  $y$ , ou seja:

$$V = (x_V, y_V) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (-q, r)$$

3.4) Retornamos os valores  $r = 0$  e  $q = 0$  e agora variamos  $p$ , com isso a concavidade da parábola “fecha” quando  $p > 0$  e estiver “perto” de  $5$  e se “abre” quando  $p > 0$  estiver “perto” de zero. Quando  $p = 0$  a parábola vira uma reta que coincidirá com o eixo das abcissas, pois  $f(x) = p(x + q)^2 + r = 0(x + 0)^2 + 0 \Rightarrow f(x) = 0$ . Quando  $p < 0$  e estiver “perto” de zero a concavidade ficará “aberta”, porém no sentido contrário, já quando  $p$  estiver “perto” de  $-5$  a concavidade estará mais “fechada”. Vale relembrar seus alunos que  $p = a$ , logo se  $p > 0$  a concavidade estará voltada para cima e quando  $p < 0$  a concavidade estará voltada para baixo.

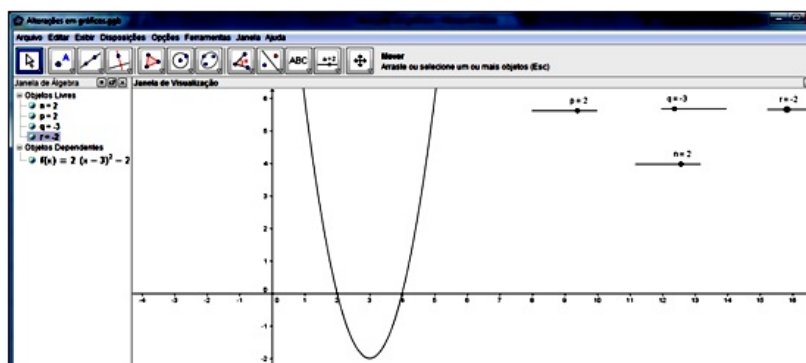
3.5) Vale agora variar  $p$ ,  $q$  e  $r$ . Como exemplo, escolha  $p = 2$ ,  $q = -3$  e  $r = -2$ , logo teremos:

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$$

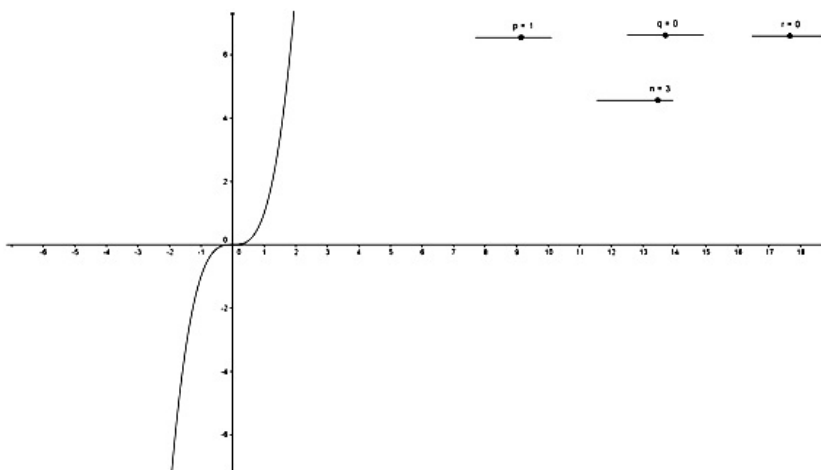
Note que o vértice é o ponto  $V = (3, -2)$  e podemos calcular as raízes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 2(x - 3)^2 - 2 &= 0 \\ 2(x - 3)^2 &= 2 \\ (x - 3)^2 &= 1 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{1} \\ x &= 3 \pm 1 \\ S &= \{4, 2\} \end{aligned}$$

Observe a solução apresentada no gráfico.



- 4) Coloque  $n = 3$ , e mantenha  $p = 1, q = r = 0$ . Com isso teremos a curva  $f(x) = x^3$



4.1) Inicialmente variamos  $r$ , com isso a curva irá “subir” se  $r > 0$  ou “descer” se  $r < 0$ .

4.2) Retorne para  $r = 0$  e agora variamos  $q$ , atente seus alunos que se escolhermos  $q > 0$  a curva desloca-se para a “esquerda” e se escolhermos  $q < 0$  a curva descola-se para “direita”, isso se deve ao fato da função  $f(x) = p(x+q)^n + r = 1.(x+q)^3 + 0 = (x+q)^3$ , onde  $q$  é o valor acrescido em todos os valores de  $x$  dos pontos que satisfazem a função e no caso de  $f(x) = (x+q)^3$ ,  $q$  representa a raiz dessa curva.

4.3) Retornamos os valores  $r = 0$  e  $q = 0$  e agora variamos  $p$ , com isso a concavidade da curva “fecha” quando  $p > 0$  e estiver “perto” de  $5$  e se “abre” quando  $p$  estiver “perto” de  $zero$ . Quando  $p = 0$  a curva vira uma reta que coincidirá com o eixo das abcissas, pois  $f(x) = p(x+q)^3 + r = 0.(x+0)^3 + 0 \Rightarrow f(x) = 0$ . Quando  $p < 0$  e estiver “perto” de zero a concavidade ficará “aberta”, porém no sentido contrário, já quando  $p$  estiver “perto” de  $-5$  a concavidade estará mais “fechada”. Vale fazer com que os alunos notem que, quando  $p$  muda de sinal a curva “muda de sentido”, ou seja se  $p > 0$  a parte do gráfico à direita do eixo das ordenadas está com concavidade virada para cima e a parte à esquerda está com a concavidade virada para baixo, e quando  $p < 0$  a parte da direita fica para baixo e a da esquerda fica para cima.

4.4) Vamos agora variar  $q$  e  $r$  juntos, atente para o fato que o ponto  $(-q, r)$  representa o “local” onde há mudança de concavidade da curva.

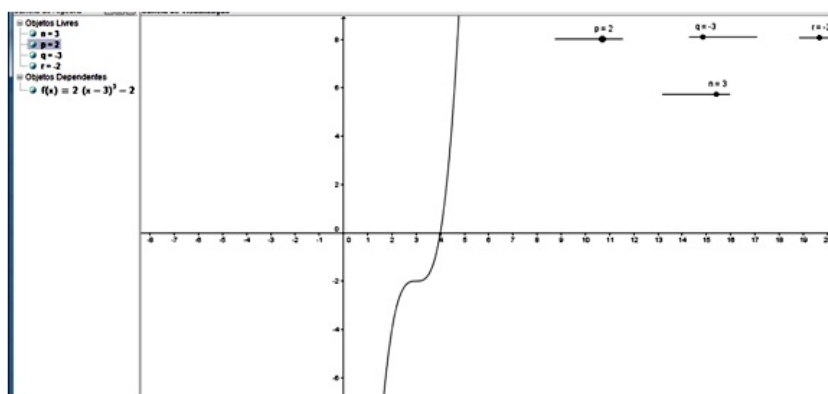
Este ponto é chamado de **PONTO DE INFLEXÃO**.

Notem que o ponto  $(3, -2)$  é o **ponto de inflexão** da curva. Segundo [7], segue a definição, apresentada na Unidade 14.

”Um ponto  $P$  no gráfico de uma função  $f(x)$  é chamado de *ponto de inflexão* se  $f$  é contínua em  $P$  e há uma mudança de concavidade do gráfico de  $f$  no ponto  $P$ .”

4.5) Vale agora variar  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ . A nível de exemplo escolha  $\mathbf{p} = 2$ ,  $\mathbf{q} = -3$  e  $\mathbf{r} = -2$ , logo teremos:

$$f(x) = 2(x + 3)^3 - 2$$



5) Repitam o mesmo procedimento para  $\mathbf{n} = 4$  e  $\mathbf{n} = 5$ . Faça com que os alunos percebam que:

5.1) Para todo  $\mathbf{r} > 0$ ,  $\mathbf{f(x) + r}$  faz o gráfico “subir” e  $\mathbf{f(x) - r}$  faz o gráfico “descer”.

5.2) Para todo  $\mathbf{q} > 0$ ,  $\mathbf{f(x + q)}$  faz o gráfico “ir para esquerda” e  $\mathbf{f(x - q)}$  faz o gráfico “ir para direita”.

5.3) Qualquer alteração em  $\mathbf{p}$  faz com que  $\mathbf{p \cdot f(x)}$  altere as concavidades dos gráficos e muda os sentidos caso mudemos os sinais de  $\mathbf{p}$ .

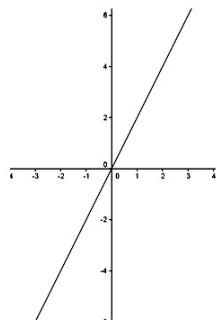
5.4) Portanto,  $\mathbf{f(x) + r}$ ;  $\mathbf{f(x) - r}$ ;  $\mathbf{f(x + q)}$  e  $\mathbf{f(x - q)}$  são translações no gráfico de  $\mathbf{f}$ , ou seja transformações lineares; e que  $\mathbf{p \cdot f(x)}$  alteram o formato do gráfico, logo são transformações não-lineares.



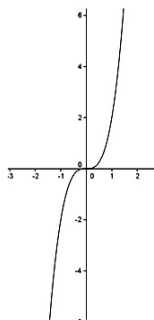
5.5) Faça-os notar a diferença entre funções pares e ímpares, comparando seus gráficos a suas definições:  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é par se é da forma  $f(x) = f(-x)$  e é ímpar se  $f(x) = -f(-x)$ ., para obtenção de exemplos veja [20] pag 224.

## Funções Ímpares

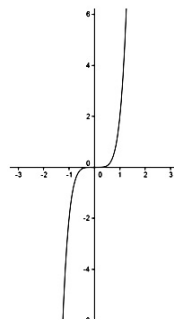
$$f(x) = 2x$$



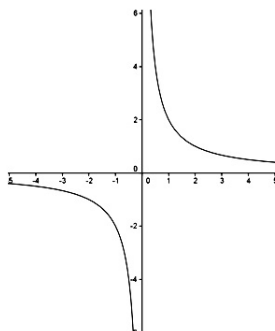
$$f(x) = 2x^3$$



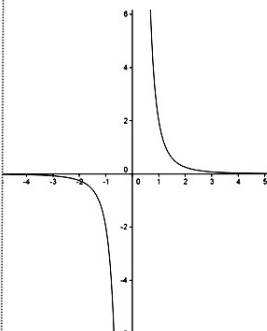
$$f(x) = 2x^5$$



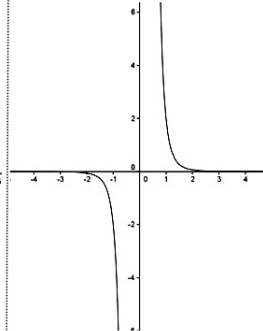
$$f(x) = 2/x$$



$$f(x) = 2/x^3$$

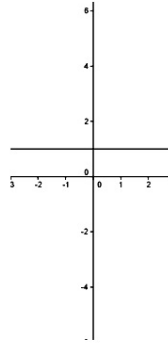


$$f(x) = 2/x^5$$

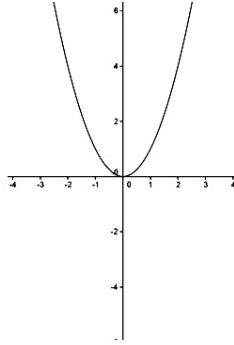


## Funções Pares

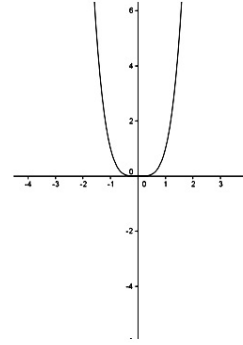
$$f(x) = 0$$



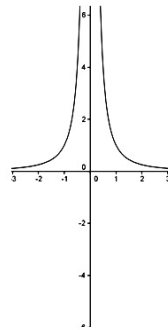
$$f(x) = x^2$$



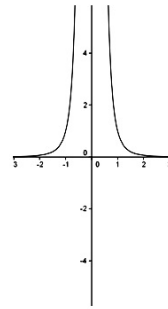
$$f(x) = x^4$$



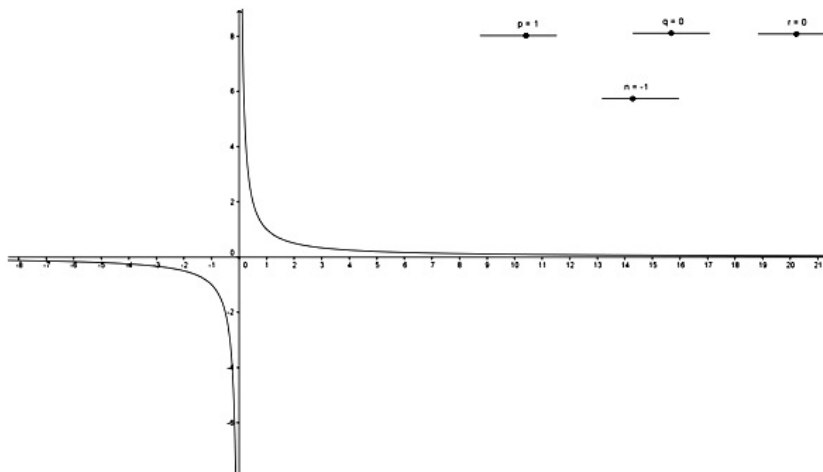
$$f(x) = 1/x^2$$



$$f(x) = 1/x^4$$



- 6) Iniciaremos o estudo de  $n < 0$ , coloque  $n = -1$ , e mantenha  $p = 1$ ,  $q = r = 0$ .  
Com isso teremos a curva  $f(x) = p(x + q)^n + r = 1(x + 0)^{-1} + 0 = x^{-1}$ ,  
ou seja a função  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{x}$ .



6.1) Confirme as translações vistas nos exemplos anteriores variando  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ .

6.2) Confirme as alterações de concavidade vistas nos exemplos anteriores variando  $\mathbf{p}$ .

6.3) Retorne para os valores  $\mathbf{n} = -1$ ,  $\mathbf{p} = 1$  e  $\mathbf{q} = \mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Faça as seguintes perguntas à turma:

6.3.1) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x}$  é positivo e muito grande?

*Resposta: Os valores de  $\mathbf{y}$  se aproximam de zero.*

6.3.2) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x}$  é positivo e muito pequeno, ou seja, está muito próximo de zero?

*Resposta: Os valores de  $\mathbf{y}$  se aproximam de valores muito grandes.*

6.3.3) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x}$  é negativo e está muito próximo de zero? Acontece o mesmo que na pergunta anterior?

*Resposta: Os valores de  $\mathbf{y}$  se aproximam de valores negativos muito afastados de zero. Não, pois na pergunta anterior  $\mathbf{y}$  assumirá valores cada vez maiores, ou seja ( $\mathbf{y} \rightarrow +\infty$ ) e agora assume valores cada vez menores, ou seja ( $\mathbf{y} \rightarrow -\infty$ ).*

6.3.4) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x}$  é negativo e está muito longe de zero? Acontece o mesmo que na primeira anterior?

*Resposta: Os valores de y se aproximam de zero. Sim.*

6.3.5) Quando  $x$  vai para o infinito a função vai para zero, mas existe algum valor “um pouquinho” maior que zero que a função não possa assumir?

*Resposta: Não.*

6.3.6) Quando  $x$  é positivo e está próximo de zero, existe algum número no eixo das ordenadas que seja o valor máximo que essa função pode assumir?

*Resposta: Não. Caro professor, caso sinta necessidade, vale apenas fazer uma análise numérica, com o próprio geogebra, ou com um modelo criado no excel.*

6.3.7) Essa função corta os eixos coordenados?

*Resposta: Não. Pois  $1/x$  nunca será igual a zero devido ao fato que não existe nenhum número que divida 1 em 0 partes, e por outro lado fazendo  $x = 0$  teremos o número  $1/0$  que não existe, pois zero não divide nenhum número.*

6.4) Usaremos agora os valores  $\mathbf{q} = -\mathbf{3}$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{2}$ . Representada por  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$

6.4.1) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $x$  é positivo e muito grande?

*Resposta: Os valores de y se aproximam de 2.*

6.4.2) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x} > \mathbf{3}$  e assume valores muito próximo de  $\mathbf{3}$ ?

*Resposta: Os valores de y se aproximam de valores muito grandes.*

6.4.3) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x} < \mathbf{3}$  e está muito próximo de  $\mathbf{3}$ ? Acontece o mesmo que na pergunta anterior?

*Resposta: Os valores de y se aproximam de valores negativos muito afastados de zero. Não, pois na pergunta anterior y assumirá valores cada vez maiores, ou seja ( $\mathbf{y} \rightarrow +\infty$ ) e agora assume valores cada vez menores, ou seja ( $\mathbf{y} \rightarrow -\infty$ ).*

6.4.4) O que acontece com os valores da função ( $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) quando  $\mathbf{x} < \mathbf{3}$  e está muito longe de  $\mathbf{3}$ ? Acontece o mesmo que na pergunta 6.4.1?

Resposta: Os valores de  $y$  se aproximam de 2. Sim.

6.4.5) Quando  $x$  vai para  $+\infty$ , ou seja, assume valores cada vez maiores, a função vai para 2, mas existe algum valor “um pouquinho” maior que 2 que a função não possa assumir?

Resposta: Não

6.4.6) Quando  $x > 3$  e está próximo de 3, existe algum número no eixo das ordenadas que seja o valor máximo que essa função pode assumir?

Resposta: Não.

6.4.7) Essa função corta a reta  $y = 2$ ?

Resposta: Não, pois estamos trabalhando com a função:

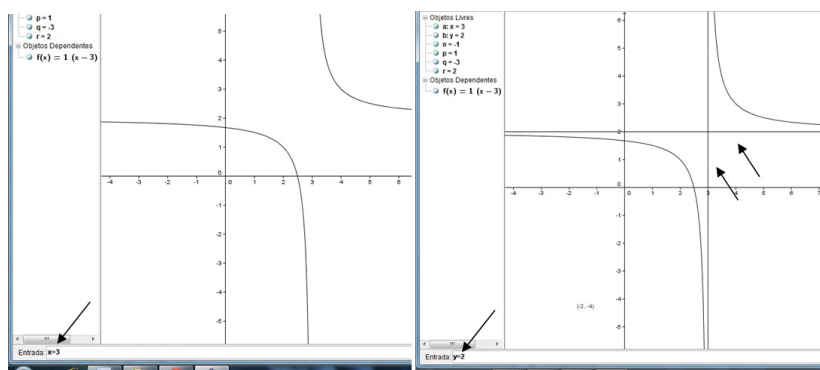
$f(x) = p(x + q)^n + r = 1(x - 3)^{-1} + 2$ , ou seja,  $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$  e para que  $f(x) = 2$ , teremos  $\frac{1}{x-3} = 0$ , o que já vimos que é impossível.

6.4.8) Essa função corta a reta  $x = 3$ ?

Resposta: Não, pois estamos trabalhando com a função:  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$  e para  $x = 3$  a função não está definida.

Caro professor, caso haja necessidade trace as assíntotas da seguinte forma:

Digite na caixa de entrada o geogebra ( $x = 3 < \text{entrar} >$  e  $y = 2 < \text{enter} >$ )



## 7.1 Novas Nomenclaturas e Simbologia

- Defina com seus alunos o conceito de assíntota e faça com que eles notem que no exemplo 6.3 e 6.4 ( $y = 0$  e  $y = 2$  são assíntotas horizontais) e ( $x = 0$  e  $x = 2$  são assíntotas verticais). *Caro professor, para obter uma*

*definição, exemplos e/ou formalização do conceito de assíntota veja em [7] Unidade 4*

- Nesse momento, aproveitaremos a sequência didática do prof. Luiz Amorim Goulart <sup>4</sup> no intuito de expandirmos o simbologismo que envolve o conceito de limite.

1) Quando dizemos que um valor  $x > 0$  assume valores cada vez maiores, diremos daqui em diante que  $x$  tende a  $+\infty$  e representaremos por  $x \rightarrow +\infty$ .

2) Quando dizemos que um valor  $x$  é negativo e assume valores muito afastados de zero, diremos daqui em diante que  $x$  tende a  $-\infty$  e representaremos por  $x \rightarrow -\infty$ .

3) Quando dizemos que  $x$  é positivo e está muito próximo de zero, diremos daqui em diante que  $x$  tende a zero pela direita e representaremos por  $x \rightarrow 0^+$ .

4) Analogamente quando dizemos que  $x > 3$  e assume valores muito próximo de 3, diremos daqui em diante que  $x$  tende a 3 pela direita e representaremos por  $x \rightarrow 3^+$ .

5) Quando dizemos que  $x$  é negativo e está muito próximo de zero, diremos daqui em diante que  $x$  tende a zero pela esquerda e representaremos por  $x \rightarrow 0^-$ .

6) Analogamente quando dizemos que  $x < 3$  e assume valores muito próximo de 3, diremos daqui em diante que  $x$  tende a 3 pela esquerda e representaremos por  $x \rightarrow 3^-$ .

---

<sup>4</sup>A obra encontra-se em [10]

**As perguntas e respostas associadas as suas equivalências simbólicas:**

<p>6.4.1) O que acontece com os valores da função (<math>y = f(x)</math>) quando <math>x</math> é positivo e muito grande?  <i>Resposta: Os valores de <math>y</math> se aproximam de 2.</i></p>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} + 2 = 2$
<p>6.4.2) O que acontece com os valores da função (<math>y = f(x)</math>) quando <math>x &gt; 3</math> e assume valores muito próximo de <math>3</math>?  <i>Resposta: Os valores de <math>y</math> se aproximam de valores muito grandes.</i></p>	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} + 2 = +\infty$
<p>6.4.3) O que acontece com os valores da função (<math>y = f(x)</math>) quando <math>x &lt; 3</math> e está muito próximo de <math>3</math>? Acontece o mesmo que na pergunta anterior?  <i>Resposta: Os valores de <math>y</math> se aproximam de valores negativos muito afastados de zero. Não, pois na pergunta anterior <math>y</math> assumirá valores cada vez maiores, ou seja (<math>y \rightarrow +\infty</math>) e agora assume valores cada vez menores, ou seja (<math>y \rightarrow -\infty</math>).</i></p>	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} + 2 = -\infty$
<p>6.4.4) O que acontece com os valores da função (<math>y = f(x)</math>) quando <math>x &lt; 3</math> e está muito longe de <math>3</math>? Acontece o mesmo que na pergunta 6.4.1?  <i>Resposta: Os valores de <math>y</math> se aproximam de 2. Sim.</i></p>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} + 2 = 2$

7) Coloque  $n = -2$ , e mantenha  $p = 1, q = r = 0$ .

**Peça para que seus alunos respondam as seguintes perguntas observando o gráfico.**

Perguntas	Respostas para o professor
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = ?$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = ?$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = ?$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = ?$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

7.1) Agora vamos variar  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ , colocando  $\mathbf{q} = \mathbf{2}$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{-5}$

Perguntas	Respostas para o professor
a) Essa função possui assíntotas verticais? E horizontais? Caso afirmativo quem são?	<i>R: Sim; Sim; <math>x = -2</math> (assíntota vertical) e <math>y = -5</math> (assíntota horizontal)</i>
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = ?$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = -5$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = ?$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = -5$
d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = ?$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = +\infty$
e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = ?$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x+2)^2} - 5 = +\infty$

8) Coloque  $\mathbf{n} = \mathbf{-3}$ , e mantenha  $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

Peça para que seus alunos respondam as seguintes perguntas observando o gráfico.

Perguntas	Respostas para o professor
a) Essa função possui assíntotas verticais? E horizontais? Caso afirmativo quem são?	<i>R: Sim; Sim; <math>x = 0</math> (assíntota vertical) e <math>y = 0</math> (assíntota horizontal)</i>
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = ?$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = ?$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = ?$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$
e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = ?$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

8.1) Vamos variar  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ , colocando  $\mathbf{q} = \mathbf{-1}$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{4}$



Peça para que seus alunos respondam as seguintes perguntas observando o gráfico.

Perguntas	Respostas para o professor
a) Essa função possui assíntotas verticais? E horizontais? Caso afirmativo quem são?	R: Sim; Sim; $x = 1$ (assíntota vertical) e $y = 4$ (assíntota horizontal)
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = ?$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = 4$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = ?$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = 4$
d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = ?$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = +\infty$
e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = ?$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} + 4 = -\infty$

- 9) Repita o mesmo procedimento para  $n = -4$  e  $n = -5$ . Elabore perguntas, deixe que eles formulem outras ao apresentar esses gráficos.

## 8 Parte 2.1 - QUIZ Interativo - Funções Polinomiais

### AULA 2

Propomos nesse momento que o professor inicie a **Parte 2.1** Aplicando o QUIZ interativo. Recomendamos que o professor estude anteriormente o conteúdo das questões contidas no QUIZ, para que ele se aproprie das explicações dadas a cada questão pela própria apresentação, e caso sinta necessidade faça as alterações necessárias.

#### 8.1 Procedimentos Operacionais

**Passo 1:** Divida a turma em grupos de 3 a 5 alunos, distribua para cada grupo as quatro cartelas: "A" ; "B" ; "C" e "D". Explique para os grupos como será o procedimento durante o QUIZ, caso sinta necessidade estabeleça regras. Abra o arquivo "Alterações no gráfico 21.ppt" ([LINK: Alterações no gráfico 21.ppt](#)) e inicie a apresentação.

**Passo 2:** Passe direto para primeira questão, estipule um tempo entre 2 a 5 minutos para que eles discutam e cheguem num consenso de resposta.

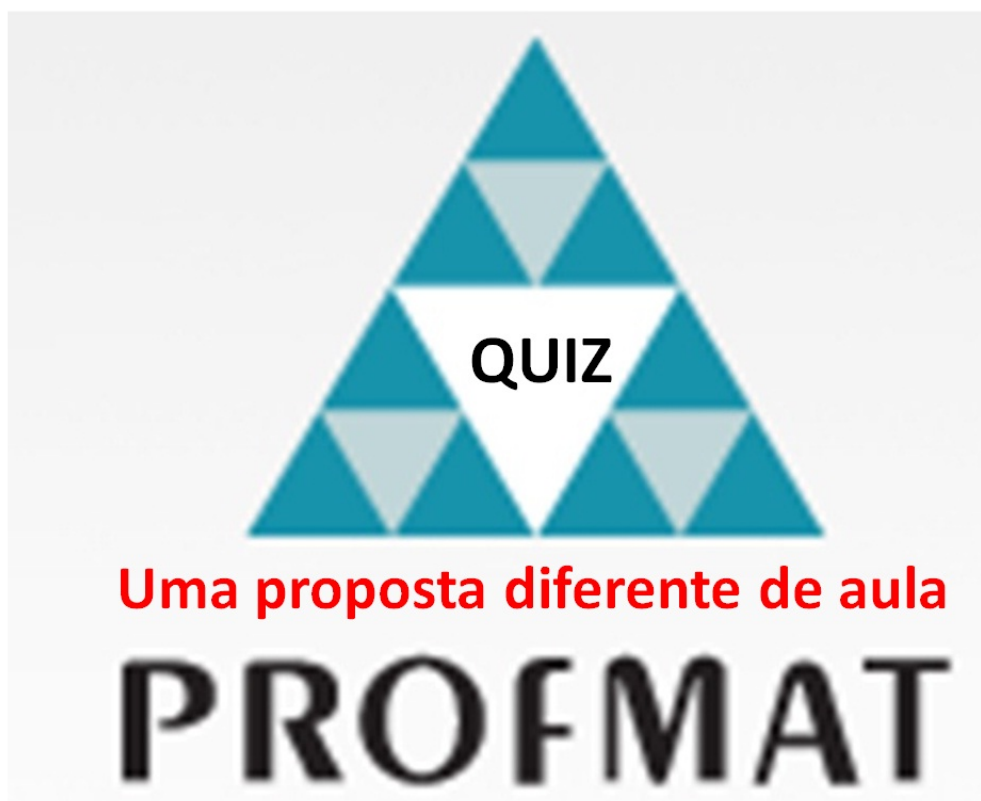
**Passo 3:** Anuncie o fim do tempo, peçam para que eles levantem as cartelas com a opção escolhida, anote as respostas de cada grupo, mostre a opção correta

na apresentação.

**Passo 4:** Comente o gabarito da questão com o auxílio do apresentação.

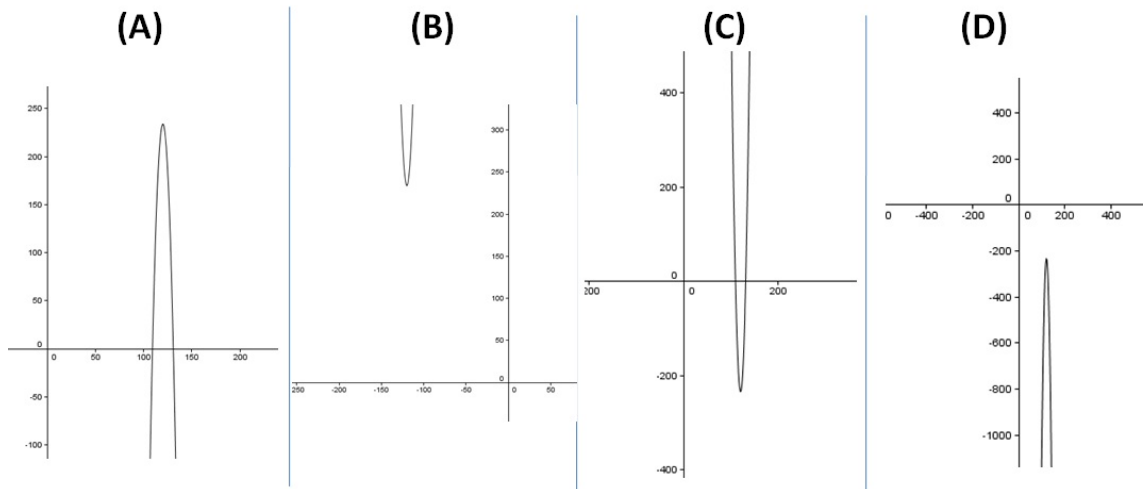
Repita os passos 2, 3 e 4 para cada questão. Ao final anuncie o grupo vencedor e caso haja tempo peça para que eles verbalizem suas impressões sobre a aula.

## 8.2 Telas da apresentação contidas no arquivo "Alterações no gráfico 21.ppt"



**1) Dada a função:**  $f(x) = -2(x - 120)^2 + 284$

Qual gráfico abaixo melhor representa a função acima, onde as linhas pontilhadas são suas assíntotas?

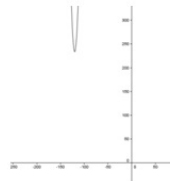


RESPOSTA LETRA:

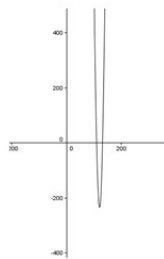
**A**

**Ao observar função:**  $f(x) = -2(x - 120)^2 + 284$

**Eliminamos (B)**



**Eliminamos (C)**



**Gabarito(A)**

De concavidade  
para baixo

Trata-se de uma  
**parábola**

$$x_V = 120$$

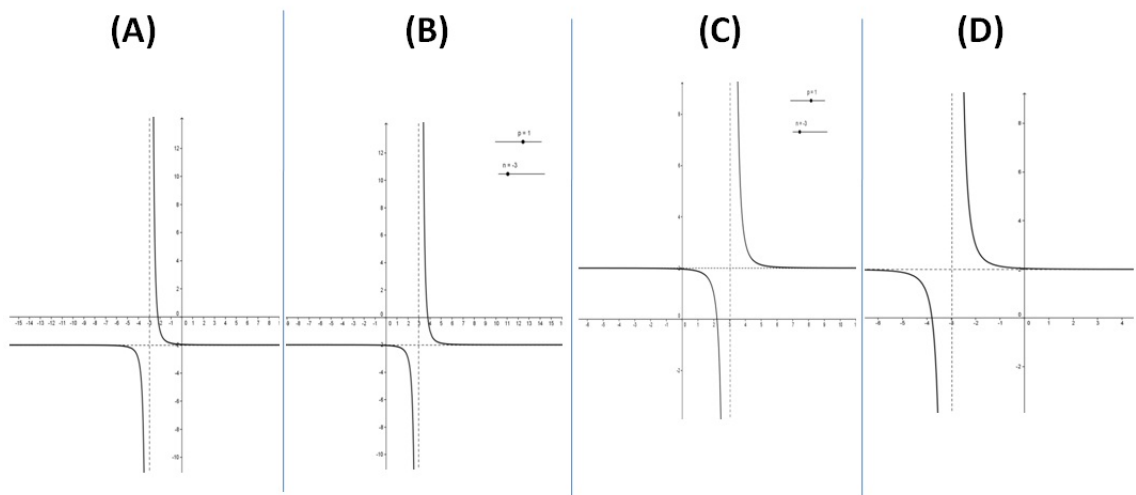
Ou translate a  
função  $f(x) = -2x^2$   
120 unidades para  
esquerda

$$y_V = 284$$

Ou translate a  
função  $f(x) = -2x^2$   
284 unidades para  
cima

**2) Dada a função:**  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} + 2$

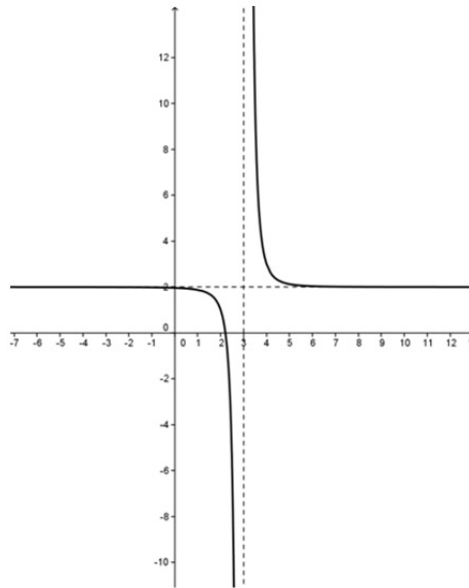
Qual gráfico abaixo melhor representa a função acima, onde as linhas pontilhadas são suas assíntotas?



RESPOSTA LETRA:

C

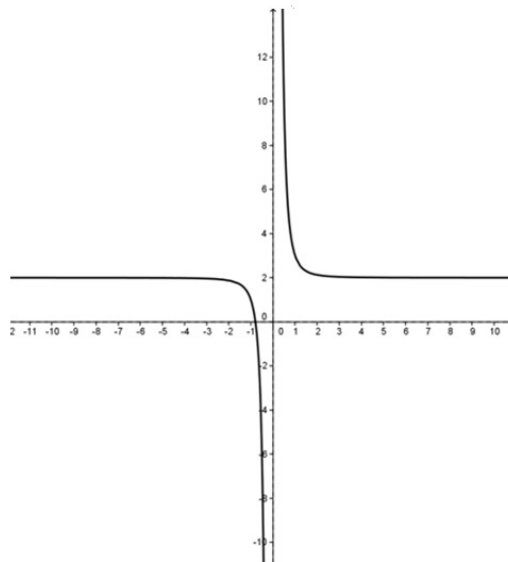
Observe o gráfico da a função:  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} + 2$



As assíntotas são as retas  $(x = 3)$  e  $(y = 2)$

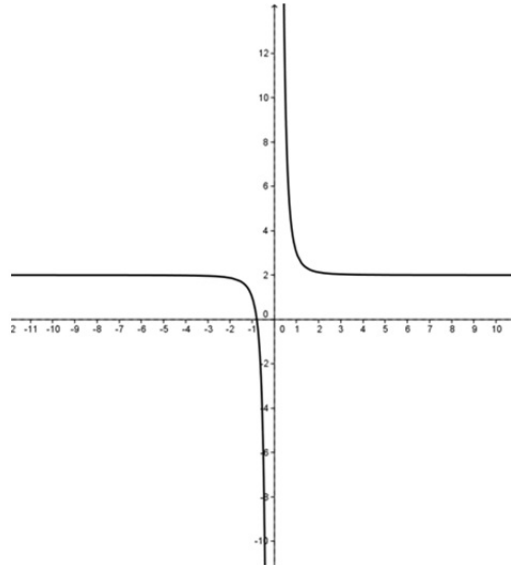


Observe o gráfico da a função:  $f(x) = \frac{1}{x^3} + 2$



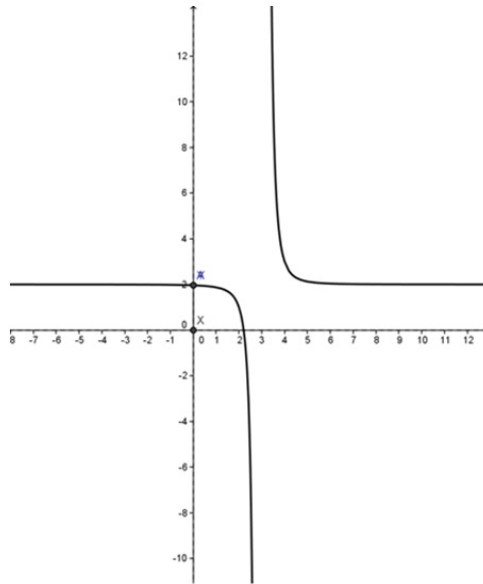
A função “sobe” duas unidades.

Observe o gráfico da a função:  $f(x) = \frac{1}{x^3} + 2$



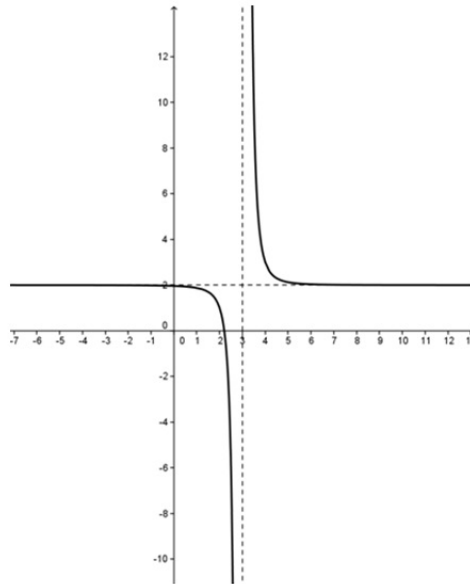
Subtrairemos 3 unidades de  $x \rightarrow f(x-3)$

Observe o gráfico da a função:  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} + 2$



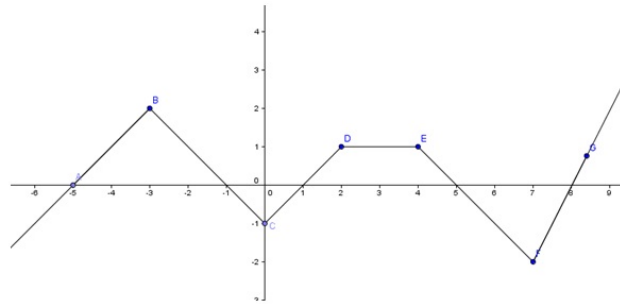
A função “vai para direita” 3 unidades

Observe o gráfico da a função:  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} + 2$

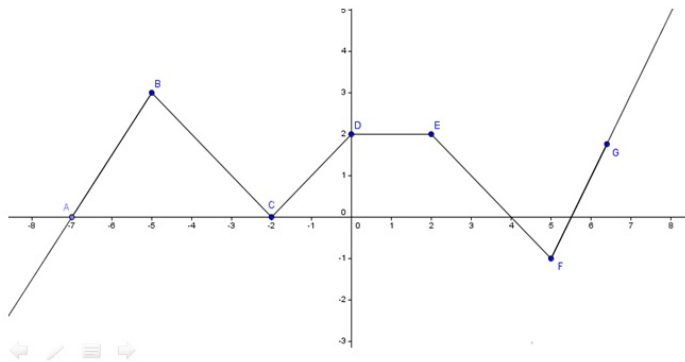


As assíntotas são as retas  $(x = 3)$  e  $(y = 2)$

**3) Observe a seguir o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$**



**Observe a seguir o gráfico da função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$**



Observando os dois gráficos, podemos afirmar que  $g(x)$  é igual a:

(A)  $f(x+1) - 2$

(B)  $f(x-2) + 1$

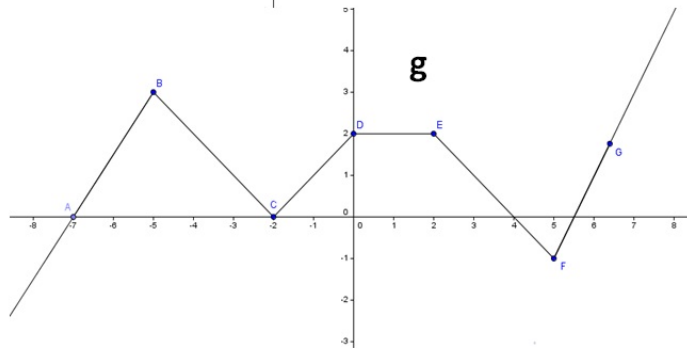
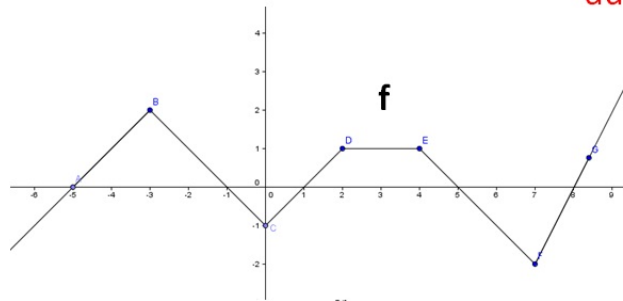
(C)  $f(x+2) + 1$

(D)  $f(x+2) - 1$

RESPOSTA LETRA:

C

**Observe o gráfico da a função f se transformou na função g após ter:** Transladado 1 unidade “para cima” e duas para “esquerda”.



Basta observar as coordenadas de dois pontos:  
 $C_f = (0, -1) = (0 - 2, -1 + 1) = (-2, 0) = C_g$

e

$D_f = (2, 1) = (2 - 2, 1 + 1) = (0, 2) = D_g$

Com isso:  
 $g(x) = f(x+2) + 1$

#### 4) Observe a seguir o gráfico da função f.

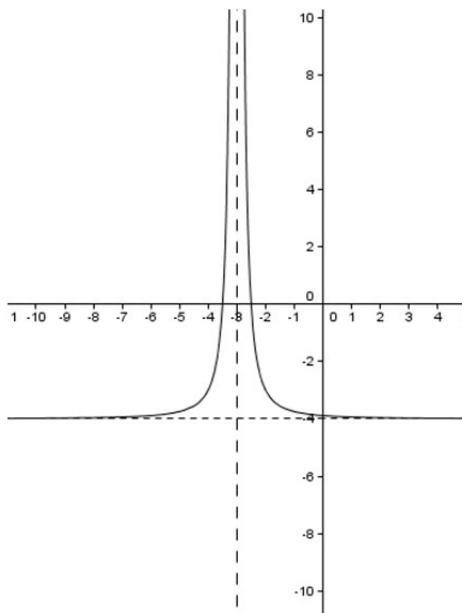
Sabendo que as retas  $y=-4$  e  $x=-3$  pontilhadas são as assíntotas do gráfico, podemos afirmar que f está definida por:

(A)  $f(x) = \frac{1}{(x+3)^3} - 4$

(B)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} + 4$

(C)  $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2} - 4$

(D)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 4$





RESPOSTA LETRA:

C

## Observe o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

A função original só pode ser do tipo:  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  ou  $h(x) = \frac{1}{x^4}$

Com isso:

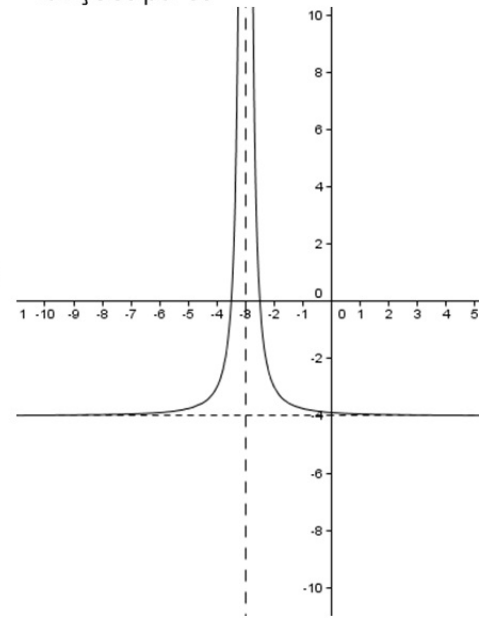
Eliminamos (A)  $f(x) = \frac{1}{(x+3)^3} - 4$

Pois ambas são  
funções pares

Eliminamos (B)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} + 4$

Fazendo a funções g descer 4 unidades e  
transladar 3 para esquerda, concluímos que:

Gabarito é (C)  $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2} - 4$



5) Observe o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{(x-5)^3} + 2$  definida por:

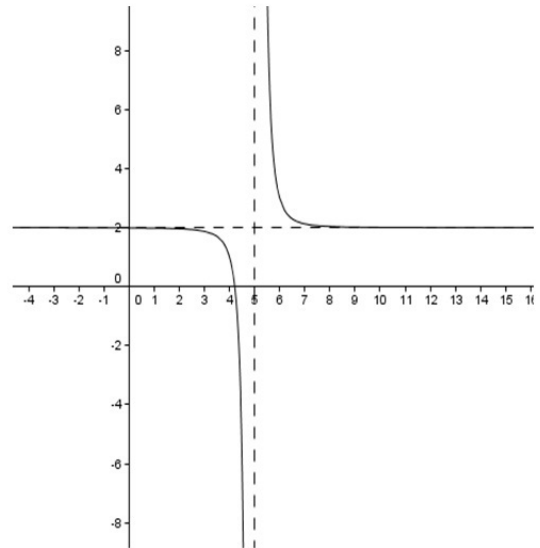
Qual das respostas a seguir é **FALSA**?

(A)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$

(B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

(C)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty$



RESPOSTA LETRA:

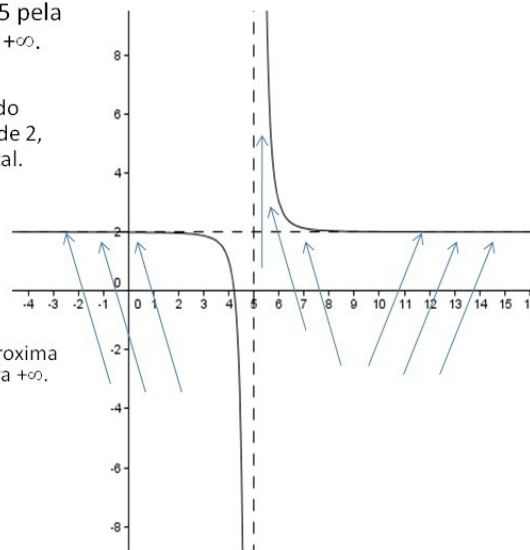
**D**

Observe o gráfico da função  $f$  definida por:

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)^3} + 2$$

Analisaremos as alternativas

- (A)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$  Quando  $x$  se aproxima de 5 pela direita a função vai para  $+\infty$ .
- (B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  Quando  $x$  aumenta no sentido positivo a função se aproxima de 2, pois  $y=2$  é assíntota horizontal.
- (C)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  Quando  $x$  diminui no sentido negativo a função também se aproxima de 2, pelo mesmo motivo.
- (D)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty$  Já vimos no item A, que  $x$  se aproxima de 5 pela direita a função vai para  $+\infty$ .



Logo a alternativa falsa é (D)

**6) Gráfico da função  $f$  definida por:  $f(x) = (x - 2)^3 + 3$**

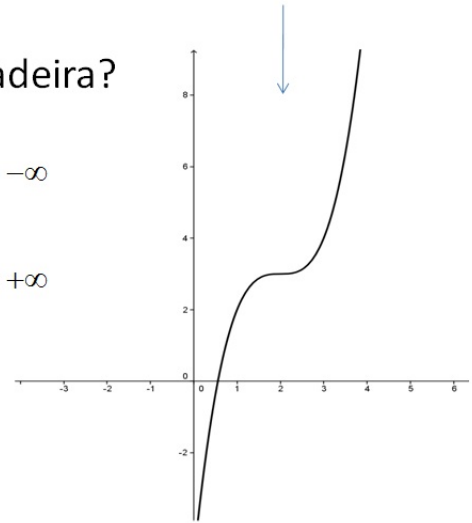
Qual das respostas a seguir é verdadeira?

(A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^3 + 3 = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)^3 + 3 = -\infty$

(B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^3 + 3 = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)^3 + 3 = +\infty$

(C)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^3 + 3 = 3$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)^3 + 3 = 3$

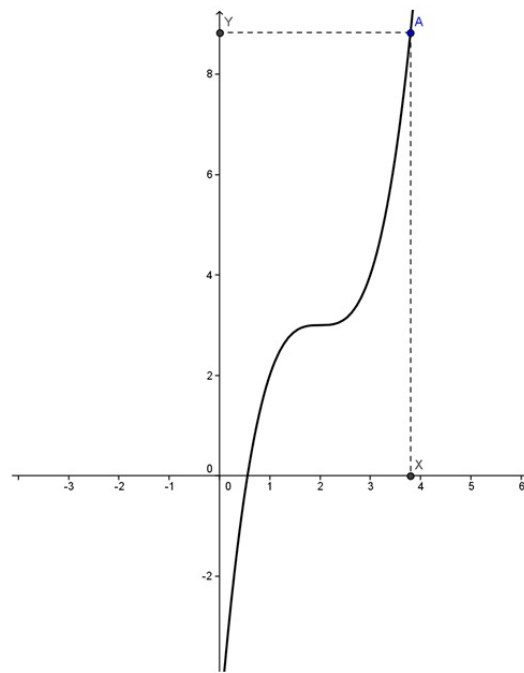
(D)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^3 + 3 = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)^3 + 3 = 2$



RESPOSTA LETRA:

**A**

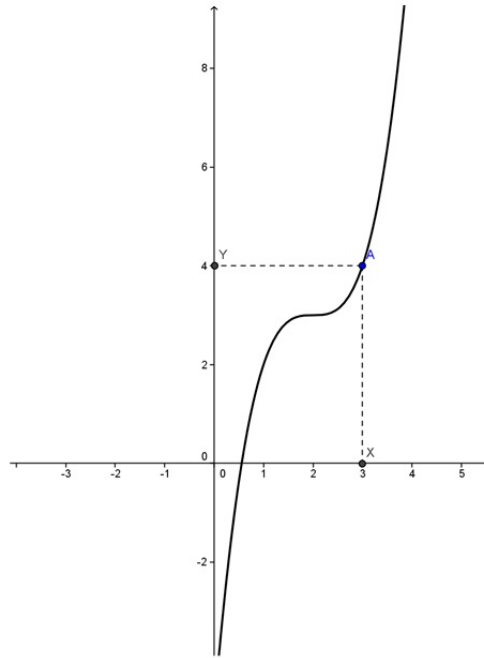
**Gráfico da função:**  $f(x) = (x - 2)^3 + 3$



Ao aumentarmos o valor de  $x$ , o valor de  $f(x)=y$  também aumenta.

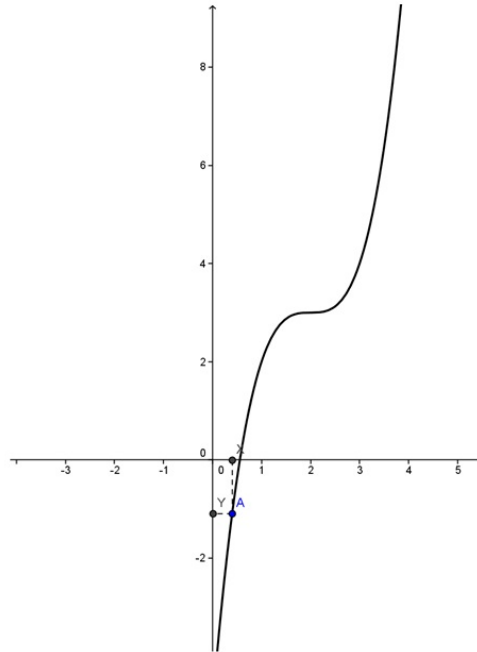


**Gráfico da função:**  $f(x) = (x - 2)^3 + 3$



Ao diminuirmos o valor de  $x$ , o valor de  $f(x)=y$  também diminui.

**Gráfico da função:  $f(x) = (x - 2)^3 + 3$**



Ao diminuirmos o valor de  $x$ , o valor de  $f(x)=y$  também diminui.

7) De acordo com o gráfico da função  $f$  abaixo, analise as sentenças:

(1) A função tem valor de máximo entre -4 e -6

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(3) A função tem **dois** pontos de inflexão

(4) A função assume seu valor mínimo no intervalo  $[-2,0]$

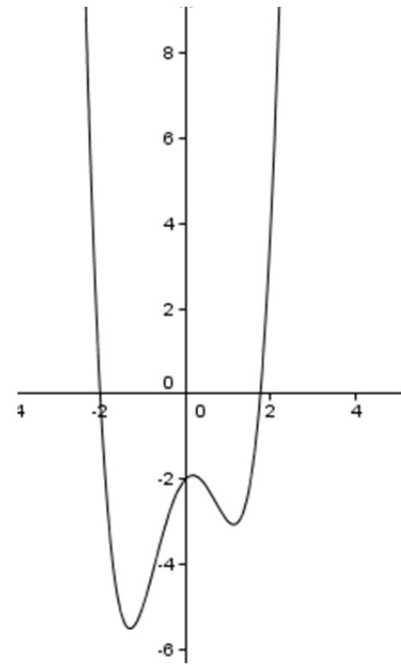
Podemos afirmar que:

(A) (1 – V); (2 – F); (3 – F) e (4 – V)

(B) (1 – F); (2 – V); (3 – V) e (4 – V)

(C) (1 – F); (2 – V); (3 – F) e (4 – V)

(D) (1 – V); (2 – V); (3 – V) e (4 – V)



RESPOSTA LETRA:

**B**

7) Analisando individualmente

(1) A função tem valor de máximo entre -4 e -6

Falso: O valor é mínimo e não máximo

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Verdadeiro: em suas extremidades a função aumenta seus valores infinitamente.

(3) A função tem dois pontos de inflexão

Verdadeiro: Atenção, não confunda com os pontos em vermelho

(4) A função assume seu valor mínimo no intervalo  $[-2,0]$

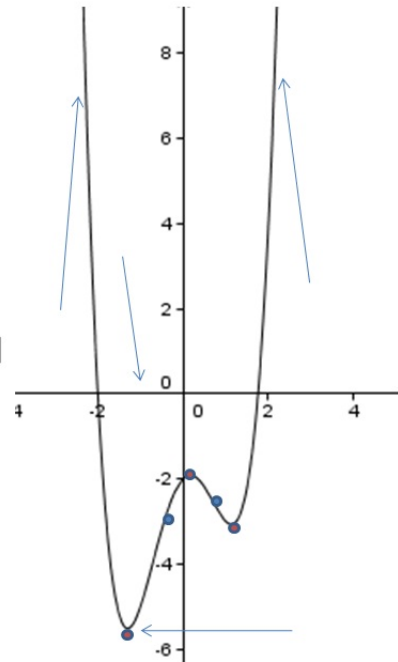
Verdadeiro: Olhe para os valores de x

~~(A) (1 - V); (2 - F); (3 - F) e (4 - V)~~

(B) (1 - F); (2 - V); (3 - V) e (4 - V)

(C) (1 - F); (2 - V); (3 - F) e (4 - V)

~~(D) (1 - V); (2 - V); (3 - V) e (4 - V)~~



8) Dada a função  $f: \mathbb{R} - \{34\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \frac{1}{(x-34)^5} + 21$

Responda as perguntas a seguir:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 34^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 34^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

As respostas são, respectivamente:

(A) (1 :  $+\infty$ ) ; (2 : 21) ; (3 :  $-\infty$ ) e (4: 21)

(B) (1 :  $-\infty$ ) ; (2 : 21) ; (3 :  $+\infty$ ) e (4: 21)

(C) (1 : 21) ; (2 :  $+\infty$ ) ; (3 : 21) e (4:  $-\infty$ )

(C) (1 : -21) ; (2 :  $-\infty$ ) ; (3 :  $-\infty$ ) e (4: 21)



RESPOSTA LETRA:

**A**

$$f(x) = \frac{1}{(x-34)^5} + 21$$

(1)  $\lim_{x \rightarrow 34^+} f(x) = +\infty$

Observe as setas

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 21$

Observe as setas

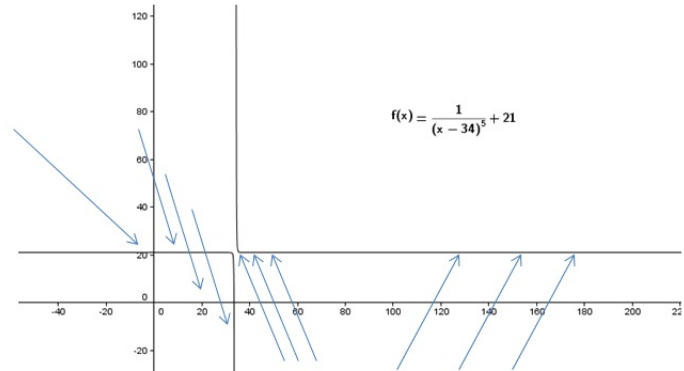
(3)  $\lim_{x \rightarrow 34^-} f(x) = -\infty$

Observe as setas

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 21$

Basta notar que  $y=21$  é assíntota horizontal

**Gabarito : (1 :  $+\infty$ ) ; (2 : 21) ; (3 :  $-\infty$ ) e (4: 21)**





**9) Responda as questões preenchendo os espaços**

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{36}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^{47}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{100}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{43}{x^{43}} = \underline{\hspace{2cm}}$

**As respostas são, respectivamente:**

**(A) (1 :  $+\infty$ ); (2 : 100); (3 :  $-\infty$ ) e (4: 43)**

**(B) (1 :  $-\infty$ ); (2 : 0); (3 :  $+\infty$ ) e (4: 0)**

**(C) (1 : 0); (2 :  $+\infty$ ); (3 : 0) e (4:  $-\infty$ )**

**(D) (1 :  $+\infty$ ); (2 : 0); (3 :  $-\infty$ ) e (4: 0)**

RESPOSTA LETRA:

**D**

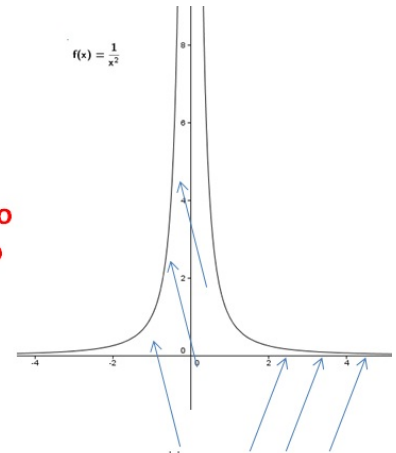
$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{36}} = \underline{+\infty}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{100}} = \underline{0}$$

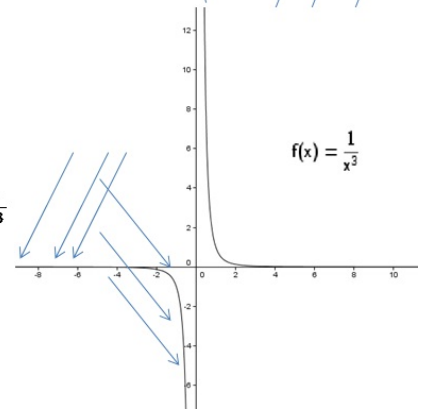
$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^{47}} = \underline{-\infty}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{43}{x^{43}} = \underline{0}$$

São funções pares, tem o mesmo comportamento de  $\frac{1}{x^2}$



São funções ímpares, tem o mesmo comportamento de  $\frac{1}{x^3}$



10) Seja  $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função que tem as seguintes características:

1) É função ímpar

2) Possui assíntota vertical  $x = 4$  e assíntota horizontal  $y = 3$

3) As concavidades têm mesma “amplitude” da função  $g(x) = \frac{2}{x^3}$

Podemos afirmar que  $f$  é definida por:

(A)  $g(x) = \frac{1}{x-4} + 3$

(B)  $g(x) = \frac{2}{(x-4)^3} + 3$

(C)  $g(x) = \frac{1}{x+4} - 3$

(D)  $g(x) = \frac{2}{(x+4)^3} - 3$



RESPOSTA LETRA:

**B**

Seja  $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função que tem as seguintes características:

1) É função ímpar    Então os expoentes de  $x$  são ímpares

2) Possui assíntota vertical  $x = 4$  e assíntota horizontal  $y = 3$

Portanto possui  $x$  no denominador e foi transladada 4 unidades para direita e 3 unidades para cima, logo é da forma :  $f(x-4) + 3$ , portanto as opções são:

$$f(x) = \frac{P}{(x-4)^n} + 3$$

3) As concavidades têm mesma “amplitude” da função  $g(x) = \frac{2}{x^3}$

Para que as concavidades tenham a mesma amplitude de  $g$ , a função  $f$  tem que ter  $p=2$  e  $n=3$

**GABARITO:**       $f(x) = \frac{2}{(x-4)^3} + 3$

## 9 Parte 1.2 -Funções Trigonômétricas

### AULA 3

Prezado professor, sugerimos agora, um trabalho voltado para funções trigonométricas, essa parte do material foi inspirada no trabalho apresentado pelo prof. Cláudio Silveira de Souza no curso de Recursos Computacionais, e recomendamos a leitura do capítulo 4 da obra [18].

Anteriormente trabalhamos as transformações do plano sob a ótica das funções polinômias, quando abordamos os mesmos aspectos nas funções trigonométricas do tipo  $f(x) = c.\text{sen}(ax+b)+d$ ;  $f(x) = c.\text{cos}(ax+b)+d$  e  $f(x) = c.\text{tg}(ax+b)+d$ , observamos que **b** faz o papel de **q** e **d** faz o papel de **r**. Continuando a comparação entre as funções trigonométricas citadas e a família de funções polinômias do tipo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x} + \mathbf{q})^n + \mathbf{r}$  vemos que no caso de **c** e **a** não temos quaisquer associações com os parâmetros **p** e **n** das funções polinômias.

Com o intuito de não sermos repetitivos, recomendamos que o leitor aprofunde as conclusões sobre os parâmetros **b** e **d**, e focaremos para as diferenças encontradas nos parâmetros **c** e **a**.

#### 9.1 Procedimentos Operacionais - Parte 1.2

**Passo 1:** Abra o arquivo "Alterações no gráfico do seno.ggb" ([LINK:Alterações no gráfico do seno.ggb](#)), note que  $a = c = 1$  e que  $b = d = 0$ , ou seja,  $f(x) = c.\text{sen}(ax + b) + d = f(x) = 1.\text{sen}(1.x + 0) + 0 \rightarrow f(x) = \text{sen}x$ .

- 1.1) Faça com que **d** varie aponte as translações verticais para seus alunos, comparando com a variação de  $r$  nas funções polinômias da "parte 1.1";
- 1.2) Faça com que **b** varie aponte as translações horizontais para seus alunos, comparando com a variação de  $r$  nas funções polinômias da "parte 1.1";
- 1.3) Faça com que **a** varie, aponte que a variação ocorre apenas no *comprimento da onda*, pois se **a** está próximo de zero o comprimento da onda *umenta*, e quando **a** se afasta de zero, seja qual for o sentido, o comprimento da onda *diminui*.
- 1.4) Faça com que **c** varie, aponte que a variação ocorre apenas na *amplitude*, pois se **c** está próximo de zero a amplitude *diminui*, e quando **c** se afasta de zero, seja qual for o sentido, a amplitude *umenta*.

**Passo 2:** Caro professor aproveite o arquivo no Geogebra e elabore algumas perguntas específicas sobre a função seno para sua turma, seguem algumas sugestões:

- 2.1) Colocando  $a = c = 1$  e  $b = d = 0$  obtemos a função  $f(x) = \text{sen}x$ , qual é a imagem dessa função?

*Resposta:*  $Im(f) = [-1, 1]$

2.2) Se colocarmos  $c = 3$  obtemos a função  $f(x) = 3\text{sen}x$ , qual é a imagem dessa nova função?

*Resposta:*  $\text{Im}(f) = [-3, 3]$

2.3) Ainda com  $c = 3$  e a função  $f(x) = 3\text{sen}x$ , podemos afirmar que  $y = -3$  e  $y = 3$  são assíntotas horizontais da função  $f$ ?

*Resposta:* Não, pois a função assume esses valores, por exemplo, quando  $x = \frac{\pi}{2}$  ou  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

2.4) Ainda com  $c = 3$  alteramos agora  $a = 2$  obtendo a função  $f(x) = 3\text{sen}2x$ , podemos afirmar que a imagem dessa nova função é a mesma da anterior?

*Resposta:* Sim, pois a função apenas encurtou seu comprimento de onda, ou **período**.

2.5) Qual o período da função  $f(x) = 3\text{sen}2x$ ?

*Resposta:* De  $[0, k\pi]$ , com  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

2.6) Alterando  $d = -2$  obtemos a função  $f(x) = 3\text{sen}(2x) - 2$ . O período mudou? E imagem?

*Resposta:* O período continua o mesmo, já a imagem mudou para  $\text{Im}(f) = [-5, 1]$ , pois a função "desceu 2 unidades"

2.7) Alterando agora  $b = 5$  obtemos a função  $f(x) = 3\text{sen}(2x + 5) - 2$ . O período mudou? E imagem?

*Resposta:* A imagem continua a mesma do item anterior, já o período mudou para  $[-\frac{5}{2}, \pi - \frac{5}{2}]$ , pois a função "deslocou-se  $\frac{5}{2}$  unidades para a esquerda", ou seja, todos os pontos da função tiveram seus valores subtraídos de  $\frac{5}{2}$ .

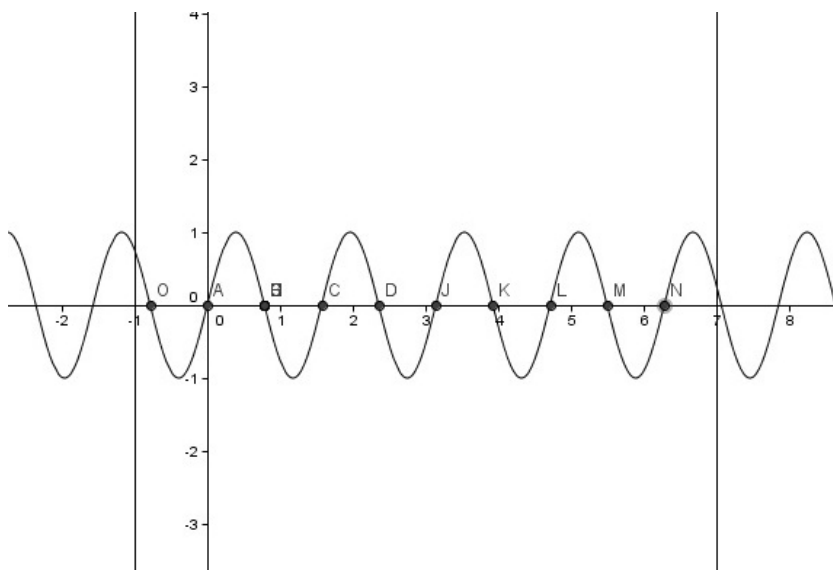
2.8) Retorne para função  $f(x) = \text{sen}x$  alterando  $a = c = 1$  e que  $b = d = 0$ . Quantos pontos de inflexão a função tem no intervalo de  $[-1, 7]$ ?

*Resposta:* Possui 3 pontos de inflexão, são eles  $(0, 0); (\pi, 0); (2\pi, 0)$ .

2.9) Se alterarmos  $a = 4$  obtemos a função  $f(x) = \text{sen}4x$ . Quantos pontos de inflexão a nova função tem no intervalo de  $[-1, 7]$ ?

*Resposta:* Possui 10 pontos de inflexão, veja na figura a seguir.





**Passo 3:** Abra o arquivo "Alterações no gráfico do cosseno.ggb" ([LINK: Alterações no gráfico do cosseno.ggb](#)), note que  $a = c = 1$  e que  $b = d = 0$ , ou seja,  $f(x) = c \cdot \cos(ax + b) + d = f(x) = 1 \cdot \cos(1 \cdot x + 0) + 0 \rightarrow f(x) = \cos x$ .

Repita com a turma todos os subitens dos passos 1 e 2, utilizando a função cosseno. Cuidado que algumas respostas irão se alterar, especialmente as que abordam o período.

**Passo 4:** Abra o arquivo "Alterações no gráfico do tangente.ggb" ([LINK: Alterações no gráfico do tangente.ggb](#)), note que  $a = c = 1$  e que  $b = d = 0$ , ou seja,  $f(x) = c \cdot \text{tg}(ax + b) + d = f(x) = 1 \cdot \text{tg}(1 \cdot x + 0) + 0 \rightarrow f(x) = \text{tg} x$ .

- 4.1) Faça com que **d** varie aponte as translações verticais para seus alunos, comparando com a variação de  $r$  nas funções polinomiais da "parte 1.1";
- 4.2) Faça com que **b** varie aponte as translações horizontais para seus alunos, comparando com a variação de  $r$  nas funções polinomiais da "parte 1.1";
- 4.3) Faça com que **a** varie, aponte que a variação ocorre apenas no *período*, pois se **a** está próximo de zero o período *aumenta*, e quando **a** se afasta de zero, seja qual for o sentido, o período *diminui*.
- 4.4) Faça com que **c** varie, aponte que a variação ocorre apenas nas *concavidades*, pois se **c** está próximo de zero as concavidades *aumentam*, e quando **c** se afasta de zero, seja qual for o sentido, as concavidades *diminuem*, note que se  $c = 0$  temos a reta  $y = 0$  pois  $f(x) = 0 \cdot \text{tg}(1 \cdot x + 0) + 0 = 0 \cdot \text{tg} x = 0$ .

**Passo 2:** Caro professor aproveite o arquivo no Geogebra e elabore algumas perguntas específicas sobre a função tangente para sua turma, seguem algumas sugestões:

2.1) Colocando  $a = c = 1$  e  $b = d = 0$  obtemos a função  $f(x) = \operatorname{tg}x$ , qual é a imagem dessa função? E o domínio?

*Resposta:*  $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$  ;  $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$  ; onde  $k \in \mathbb{Z}^*$

2.2) Se colocarmos  $c = 3$  obtemos a função  $f(x) = 3\operatorname{tg}x$ , qual é o domínio dessa nova função?

*Resposta:* O mesmo do item anterior

2.3) Ainda com  $c = 3$  e a função  $f(x) = 3\operatorname{tg}x$ , podemos afirmar que  $x = \frac{\pi}{2}$  é uma assíntota vertical da função  $f$ ?

*Resposta:* Sim, pois a função nunca assumirá um valor real quando  $x = \frac{\pi}{2}$  pois sabemos que não existe a  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2.4) Observando o gráfico responda qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}x$ ? E de  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}x$ ?

*Resposta:*  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}x = -\infty$  .

2.5) Colocando  $c = 3$  e  $a = 2$ , responda: qual o período da função  $f(x) = 3\operatorname{tg}2x$ ?

*Resposta:* O período é  $\left[-\frac{k\pi}{4}, \frac{k\pi}{4}\right]$ , com  $k = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 1\}$  onde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2.6) Retornando  $a = c = 1$  e  $b = d = 0$  obtemos a função  $f(x) = \operatorname{tg}x$ . Quantos pontos de inflexão e quantas assíntotas verticais e horizontais a função têm no intervalo de  $[-4, 4]$ ?

*Resposta:* Três pontos de inflexão, são eles:  $(-\pi, 0)$  ;  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ . Duas assíntotas verticais, são elas:  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ . E nenhuma assíntota horizontal.

## 10 Parte 2.2 - QUIZ Interativo - Funções Trigonômicas

### AULA 4

Propomos nesse momento que o professor inicie a **Parte 2.2** aplicando o segundo QUIZ interativo. Recomendamos que o professor estude anteriormente o conteúdo das questões contidas no QUIZ, para que ele se aproprie das explicações dadas a cada questão pela própria apresentação, e caso sinta necessidade faça as alterações necessárias.

## 10.1 Procedimentos Operacionais

**Passo 1:** Divida a turma em grupos de 3 a 5 alunos, distribua para cada grupo as quatro cartelas: "A" ; "B" ; "C" e "D". Explique para os grupos como será o procedimento durante o QUIZ, caso sinta necessidade estabeleça regras. Abra o arquivo "Alterações no gráfico 22.ppt" ([LINK: Alterações no gráfico 22.ppt](#)) e inicie a apresentação.

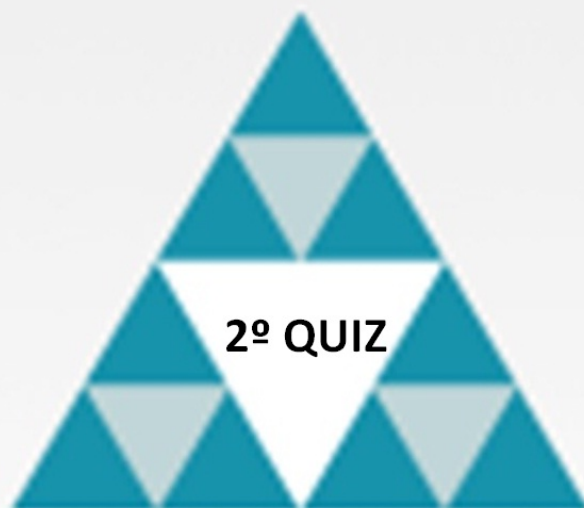
**Passo 2:** Passe direto para primeira questão, estipule um tempo entre 2 a 5 minutos para que eles discutam e cheguem num consenso de resposta.

**Passo 3:** Anuncie o fim do tempo, peça para que eles levantem as cartelas com a opção escolhida, anote as respostas de cada grupo, mostre a opção correta na apresentação.

**Passo 4:** Comente o gabarito da questão com o auxílio da apresentação.

Repita os passos 2, 3 e 4 para cada questão. Ao final anuncie o grupo vencedor e caso haja tempo peça para que eles verbalizem suas impressões sobre a aula.

## 10.2 Telas da apresentação contidas no arquivo "Alterações no gráfico 22.ppt"

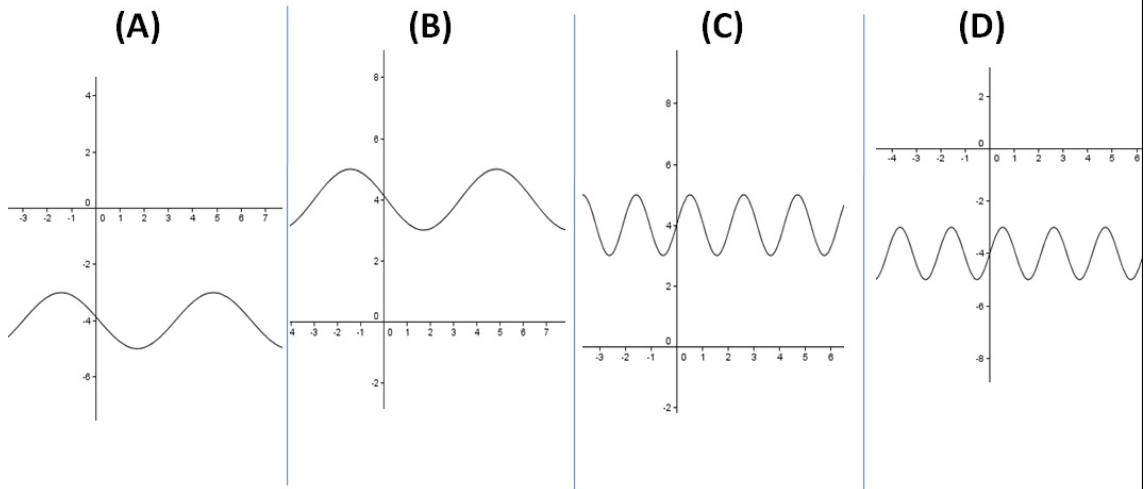


**Uma proposta diferente de aula**

**PROFMAT**

1) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{sen } x$ .

Qual gráfico abaixo melhor representa a função  $f(x) = \text{sen}(x + 3) - 4$ ?



RESPOSTA LETRA:

**A**

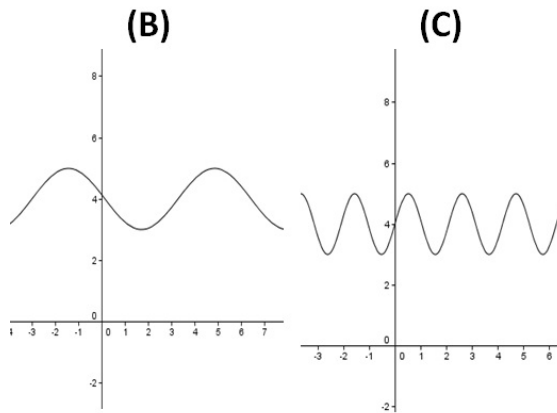
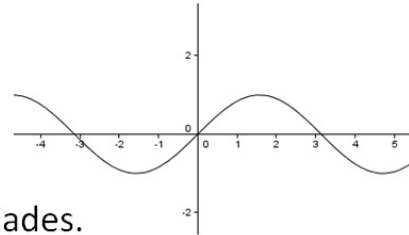
**1) Observemos o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sin x$ .**

Para se transformar na função:

$$f(x) = \sin(x + 3) - 4?$$

A função  $f(x) = \sin x$ ; “desceu” 4 unidades.

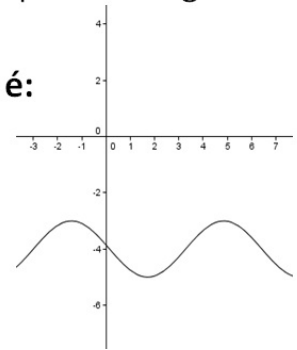
Com isso eliminamos as opções **B** e **C**



E trasladou-se 3 unidades para a esquerda, sem modificar seu período e amplitude. Logo:

**O gabarito é:**

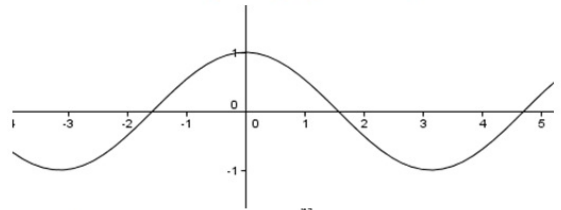
**(A)**



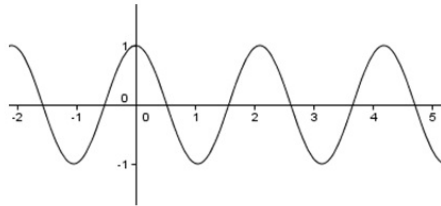
2) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos x$ , e o seu gráfico:

Qual gráfico abaixo melhor representa a função:

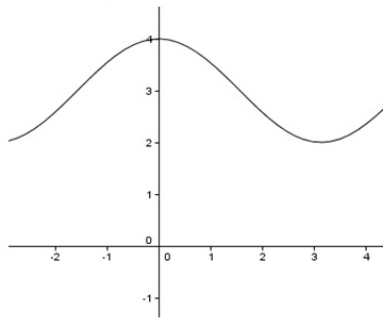
$$f(x) = 3 \cos x?$$



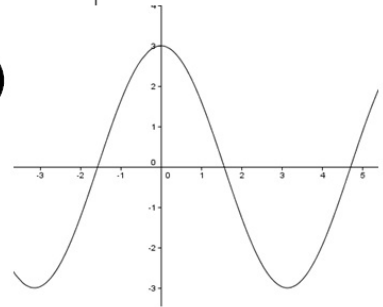
(A)



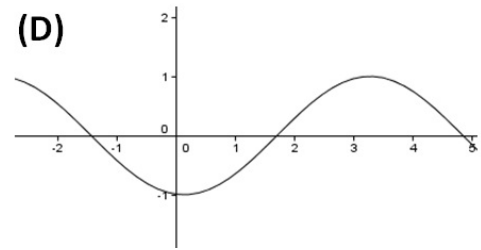
(B)



(C)



(D)

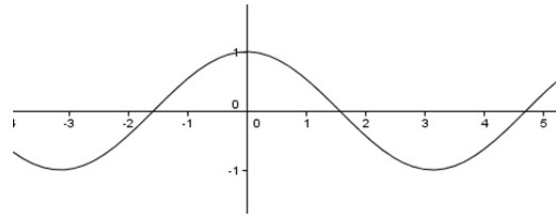




RESPOSTA LETRA:

C

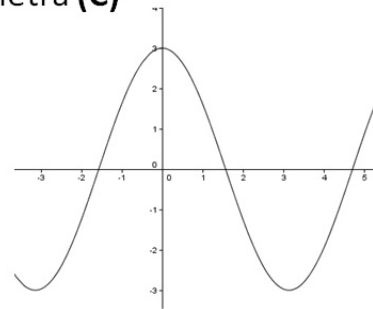
2) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos x$ , e o seu gráfico:



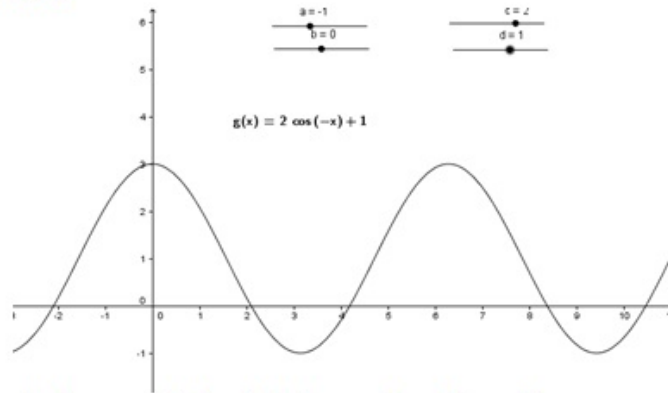
A função:  $f(x) = 3\cos x$  foi obtida multiplicando todos os valores de  $y$  por 3 da função  $f(x) = \cos x$ .

Portanto a opção correta é a letra **(C)**

Ou seja a única alteração é na **amplitude** da função cosseno.



3) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = 2 \cos(-x) + 1$  e o seu gráfico:



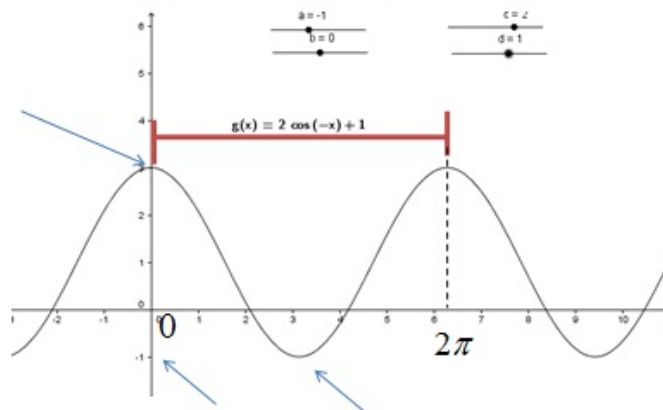
A imagem (Im) e período ( $p$ ) dessa função, são respectivamente:

- (A)  $\text{Im } f(x) = [-1, 3]$  e  $p = \pi$       (C)  $\text{Im } f(x) = [0, 2\pi]$  e  $p = 4$   
 (B)  $\text{Im } f(x) = [-1, 3]$  e  $p = 2\pi$       (D)  $\text{Im } f(x) = [0, \pi]$  e  $p = 4$

RESPOSTA LETRA:

**B**

3) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = 2 \cos(-x) + 1$  e o seu gráfico:

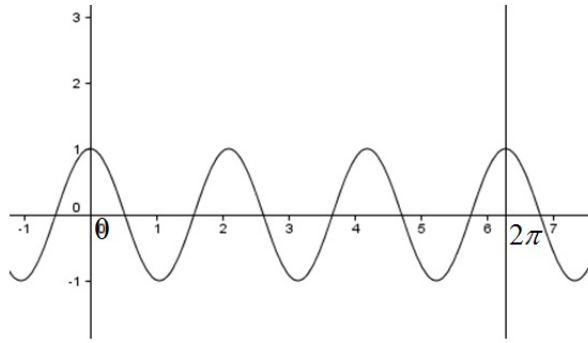


A imagem ( $\text{Im}$ ), são os valores de  $y=f(x)$  assumidos pela função, portanto:  $\text{Im } f(x) = [-1, 3]$

Já o período pode ser visto pelos delimitadores a seguir: Ele se repete um número inteiro de vezes, portanto:  $p = 2\pi$

**Gabarito: (B)**

4) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \cos 3x$  e o seu gráfico:



Quantos pontos de inflexão a função possui no intervalo de  $[0, 2\pi]$ ?

(A) 8

(C) 6

(B) 7

(D) 5

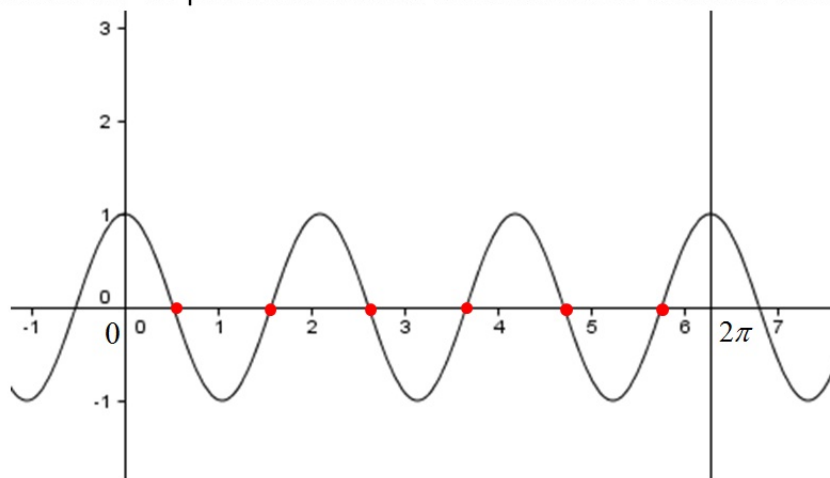


RESPOSTA LETRA:

C

4) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \cos 3x$  e o seu gráfico:

Basta observar os pontos onde as concavidades mudam de sentido.

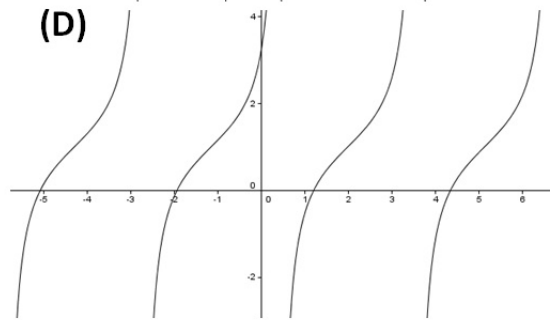
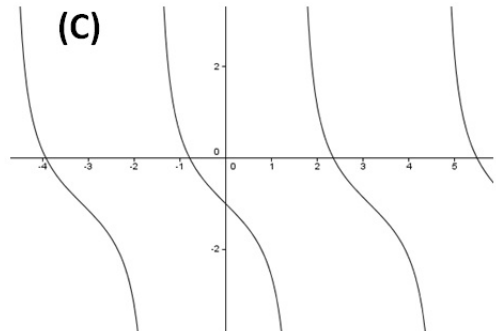
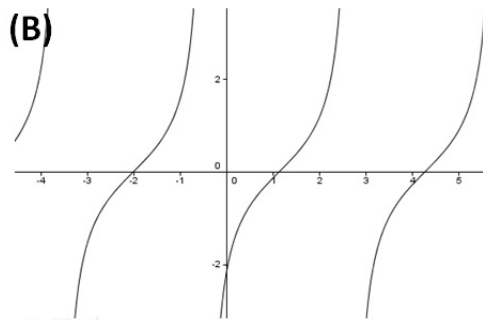
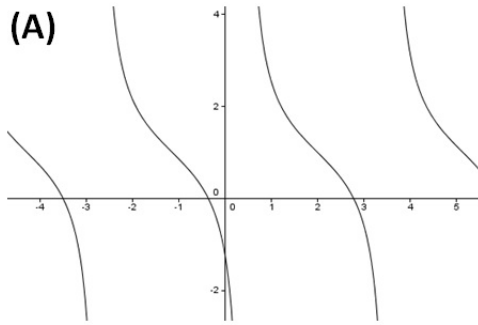


6 pontos. Gabarito (C)



5) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} - \{k\pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{tg } x$ . (onde  $k$  é inteiro ímpar diferente de zero)

Qual gráfico abaixo melhor representa a função  $f(x) = \text{tg}(x - 2) + 1$ ?

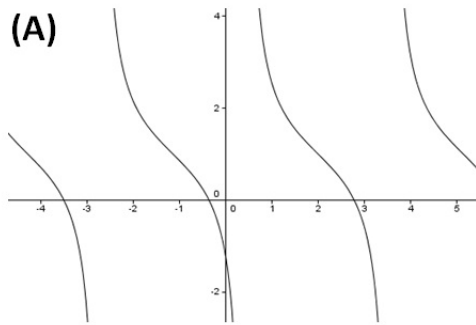


RESPOSTA LETRA:

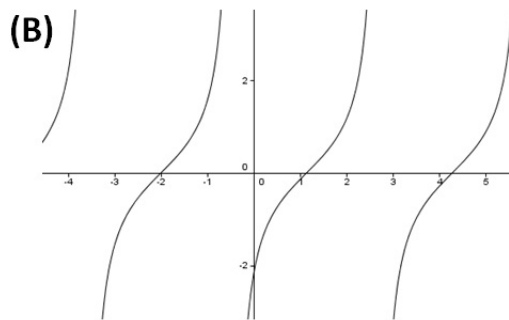
**D**

5) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} - \{k\pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{tg } x$ . (onde  $k$  é inteiro ímpar diferente de zero)

Vamos fazer uma análise por eliminação:  $f(x) = \text{tg}(x - 2) + 1$ ?



A função apresentada tem  $c < 0$ .  
Pois as concavidades estão invertidas, quando comparadas com a função  $f(x) = \text{tg } x$ .

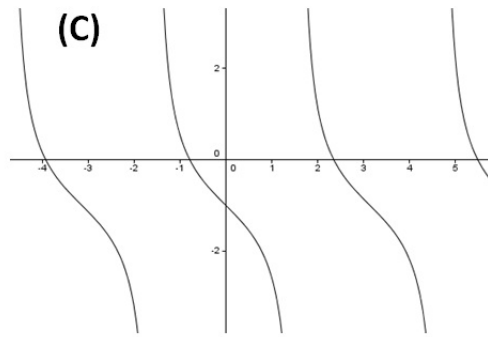


O sinal de  $c$  bate pois  $c > 0$ .  
Porém os pontos de inflexão estão sobre o eixo  $X$ , o que não poderia ocorrer pois a função procurada sofreu uma translação “subindo” 1 unidade.

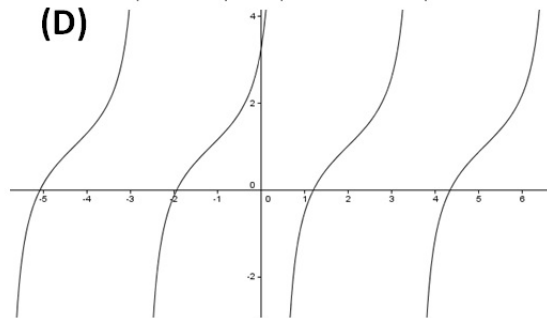
5) Tendo como base a função  $f: \mathbb{R} - \{k\pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{tg } x$ . (onde  $k$  é inteiro ímpar diferente de zero)

Analisando:

$$f(x) = \text{tg}(x - 2) + 1?$$



A função apresentada tem  $c < 0$ . Pois as concavidades estão invertidas, quando comparadas com a função  $f(x) = \text{tg } x$ .



Este é o gabarito, note que ao compararmos com o gráfico da função  $f(x) = \text{tg } x$  o gráfico apresentado apresenta um deslocamento de 1 unidade para cima e 2 unidades para direita.

**6) Responda as questões preenchendo os espaços**

(1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x - \pi) = \underline{\hspace{2cm}}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{2}^+} -\operatorname{tg}(x - \pi) = \underline{\hspace{2cm}}$

**As respostas são, respectivamente:**

**(A) (1 :  $+\infty$ ); (2 :  $+\infty$ ); (3 :  $-\infty$ ) e (4:  $-\infty$ )**

**(B) (1 :  $-\infty$ ); (2 :  $+\infty$ ); (3 :  $+\infty$ ) e (4:  $-\infty$ )**

**(C) (1 :  $+\infty$ ); (2 :  $+\infty$ ); (3 :  $-\infty$ ) e (4:  $+\infty$ )**

**(D) (1 :  $-\infty$ ); (2 :  $-\infty$ ); (3 :  $+\infty$ ) e (4:  $-\infty$ )**

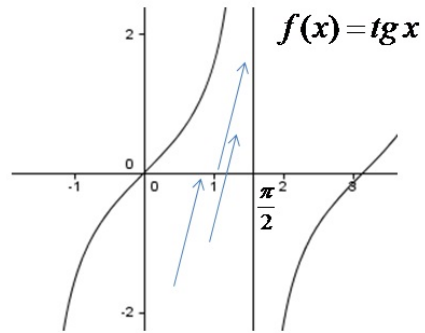


RESPOSTA LETRA:

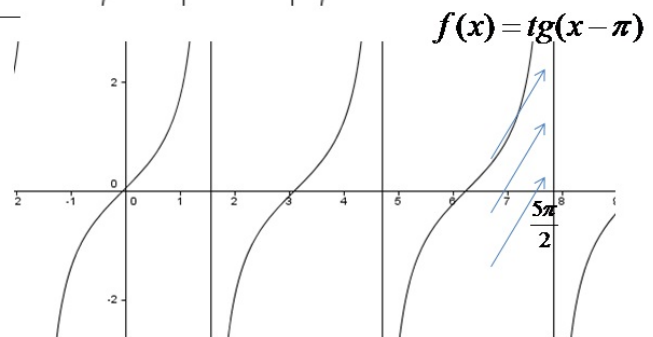
C

6) Responda as questões preenchendo os espaços

(1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$



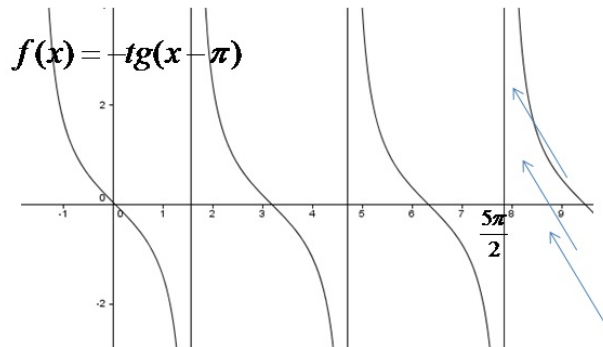
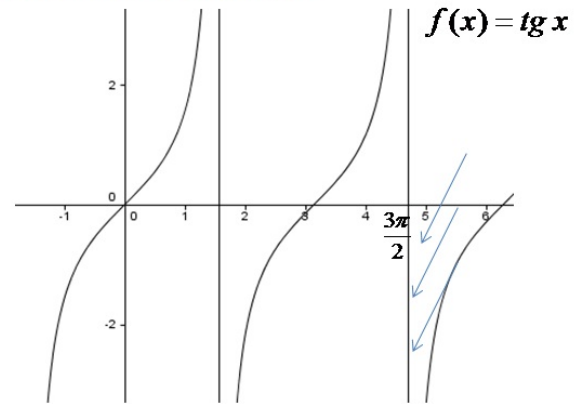
(2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x - \pi) = +\infty$



6) Responda as questões preenchendo os espaços

(3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{2}^+} -\operatorname{tg}(x - \pi) = +\infty$



**Gabarito (C)**

(1 :  $+\infty$ ) ; (2 :  $+\infty$ ) ; (3 :  $-\infty$ ) e (4 :  $+\infty$ )



## Capítulo VI

# Considerações Finais

Podemos afirmar que o ponto de partida para esse trabalho foram os altos índices de evasão e reprovação nos cursos de Cálculo; Durante a pesquisa ficou claro que existem vários fatores que contribuem para esse fato. A partir dessa constatação encontramos a oportunidade de elaborar metodologias que possam reduzir esses índices. Metodologias essas que possivelmente deverão poder ser aplicadas em turmas de 9º ano do ensino fundamental e de qualquer ano do ensino médio.

Esperamos que professores possam utilizar essas atividades em suas aulas ou mesmo fazer uma releitura das mesmas, adaptando-as para sua realidade. De fato, o que apresentamos aqui é um trabalho em construção, que oferece ideias que acreditamos serem úteis, mas esta longe de estar concluído.

Acreditamos que a abordagem em sala de aula do conceito de infinitésimo e da noção de limite propriamente dito não deve focar as definições formais nem se ater a linguagem técnica. Pelo contrário, deve ser priorizada a compreensão das ideias relevantes para esses conceitos já presentes nos currículos de matemática do nosso país. Com isso espera-se que os futuros graduandos encontrem terreno mais sólido e fértil para prosseguir seus estudos profissionais e/ou acadêmicos.

Estamos cientes que as atividades 2 e 3 da presente obra não foram testadas em salas de aula, por isso propomos que professores, alunos ou não do PROFMAT, apliquem essas atividades em turmas cada vez mais heterogêneas. O intuito dessa aplicação é de verificar a real eficácia dessas atividades, sugerindo adaptações, alterações ou mesmo reelaborações das mesmas em alguns casos.

## Bibliografia

- [1] LIMA, E. L. “*Meu Professor de Matemática e outras histórias*”, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1991.
- [2] ÁVILA, G. “*O Ensino de Cálculo no 2º Grau*”, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1991.
- [3] ÁVILA, G. “*As Séries Infinitas*”, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1996.
- [4] ÁVILA, G. “*Ainda as Séries Infinitas*”, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1996.
- [5] CARNEIRO, J. P. e Wagner, E. “*Vale a Pena Estudar Cálculo?*”, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, 2004.
- [6] ÁVILA, G. “*Limites e Derivadas no Ensino Médio?*”, Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo, 2006.
- [7] Viana, M. “*Noções de Cálculo*”, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [8] ALMEIDA, T. B. de; MARTINELLI, R. O. M.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. da. “*Fractais no Ensino Fundamental: Explorando Essa Nova Geometria*”. Disponível em: “[Fractais no Ensino Médio](#)”, PUCRS.
- [9] WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; ZANI, S. “*Progressões e Matemática Financeira*”. Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [10] Amorim, L. “*Cálculo no Ensino Médio: Progressões Geométricas e o Que Vai Para Baixo do Tapete*”. PROFMAT/SBM, 2013.
- [11] Stewart, J. “*Cálculo, volume I*”, 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- [12] Hefez, A. “*Elementos de Aritmética*”, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2011.
- [13] Nelsen, R. B. “*Proofs Without Words - Exercises in Visual Thinking*”, Mathematical Association Of America, Washington, 1993.
- [14] BOYER, Carl, B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* Dover Publications, 1959.
- [15] GRATAN, Ivor, G. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910: An Introductory History*, Princeton University Press, Princeton, 1980.
- [16] EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
- [17] LIMA, E. L. *A Matemática no ensino médio, volume 1*, 1. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2004

- [18] GIRALDO, Victor. *Recursos Computacionais.* , Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [19] CARNEIRO, Moaci A. *LDB fácil: leitura crítico-compreensiva artigo a artigo* Vozes, 1998.
- [20] EDWARDS Jr., C.H ; PENNEY, D. *Cálculo com Geometria Analítica* LTC, 1996.
- [21] GIRALDO, V. *Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada.* Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: COPPE-UFRJ, 2004.
- [22] REZENDE, W.M. *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite.* Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.
- [23] PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade* Dissertação de Mestrado. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.