unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
Câmpus de Ilha Solteira

Leandro Ramiro

Situações Didáticas no Ensino de Geometria com o aplicativo *GeoGebra*

Ilha Solteira
2014

Leandro Ramiro

Situações Didáticas no Ensino de Geometria com o aplicativo *GeoGebra*

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", polo de Ilha Solteira.

Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira
Orientador

Ilha Solteira

2014

Ramiro, Leandro.
Situações didáticas no ensino de geometria com o aplicativo GeoGebra / Leandro Ramiro. -- São José do Rio Preto, 2014
137 f. : il.

Orientador: Ernandes Rocha de Oliveira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Simetria (Matemática) 4. Matemática – Metodologia. 5. Tecnologia educacional. 6. Ensino auxiliado por computador. I. Oliveira, Ernandes Rocha de. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Leandro Ramiro

Situações Didáticas no Ensino de Geometria com o aplicativo *GeoGebra*

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pólo de Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira
UNESP – Ilha Solteira
Orientador

Profa. Dra. Luciana Vanessa de Almeida Buranello
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

Profa. Dra. Zulind Luzmarina Freitas
UNESP – Ilha Solteira

Ilha Solteira
2014

Dedico este trabalho, principalmente a Deus
por ter me dado força e discernimento
para poder enfrentar as barreiras
que surgiram em meu percurso.
Também a meus pais por me instruírem desde cedo
acerca da necessidade dos estudos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por estar sempre ao meu lado, dando forças para que meus sonhos se tornem realidade.

Ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pela oportunidade de milhares de professores da educação básica realizar uma Pós-Graduação Stricto Sensu.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), por acolher o programa e pelo compromisso e responsabilidade de buscar continuadamente oferecer uma pós-graduação de excelência no cenário acadêmico.

À Secretaria de Estado da Educação de São Paulo pela iniciativa de conceder apoio financeiro por meio de uma bolsa de estudos para professores da rede pública.

A todos os colegas e professores da turma 2012 do PROFMAT que colaboraram direta ou indiretamente para a realização desta obra, e em especial ao Charles e Osvaldo pelo companheirismo nas viagens para Ilha Solteira.

Agradecimento especial a meu orientador, Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira, pela paciência, pelos ensinamentos, pela prestatividade em sempre me atender, por me fazer enxergar a Matemática de uma maneira diferente e pelas sugestões que acabaram por constituir-se neste trabalho.

Aos professores que participaram das entrevistas, dando contribuições valorosas.

Aos meus pais Valdeide Ramiro e Maria Aparecida Munarin Ramiro por sempre me apoiarem nos estudos e fazerem a pessoa que eu sou.

À minha namorada, Tatiane por me apoiar, incentivar e estar sempre ao meu lado.

Ao meu irmão, Alex e os demais familiares pelo companheirismo. O meu muito obrigado a todos!

'A Matemática,
quando a compreendemos bem,
possui não somente a verdade,
mas também a suprema beleza.
(Bertrand Russel)

Resumo

Este trabalho tem como um dos objetivos discutir a importância das demonstrações no ensino básico de Matemática. Há tempos esse tópico é destacado nos documentos orientadores da educação básica (PCN e Currículos Oficiais), porém na prática não encontramos materiais ou atividades que efetivamente orientem os professores a como implementar argumentações lógico-dedutivas em sala de aula. Concomitantemente constatamos nas aulas de Matemática uma passividade por parte da maioria dos alunos frente aos problemas que lhes são propostos, desta forma, baseando-nos na Teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau e explorando os recursos tecnológicos presentes nas escolas, propomos atividades ligadas à geometria para serem desenvolvidas, em sala de aula, utilizando-se do software *GeoGebra*. As atividades têm como objetivo levar o aluno a interagir de uma forma autônoma com os conceitos e propriedades envolvidas e possibilitar a elaboração de conjecturas e argumentos sobre os fatos observados e de checar os resultados por meio dos movimentos dinâmicos que o software permite. Apresentamos uma revisão sobre conteúdos ligados aos movimentos no plano: congruências, isometrias, semelhanças e homotetias, necessários ao entendimento do tema proposto. Por fim, realizamos uma entrevista, por meio de um questionário, com um grupo composto por quatro professores da Educação Básica, com o objetivo de saber a opinião deles quanto às atividades propostas, sua relação com as novas tecnologias e o seu interesse em formação continuada.

Palavras-chave: Geometria. Situações Didáticas. Simetria. GeoGebra.

Abstract

This work has as an objective to discuss the importance of demonstrations in teaching basic mathematics. There has been a long time that this topic is highlighted in the guiding documents of basic education (PCN and Official Curriculum), but in practice we have not found materials or activities that effectively guide teachers on how to implement logical-deductive argumentation in the classroom. Concomitantly we found in Mathematics classes passivity on the part of most students in tackling the problems that are offered to them, in this way, based on the Theory of Didactic Situations as formulated by Guy Brouseau, and exploring the technological resources available at schools we propose activities that can be used in classrooms related to the geometry to be developed using the GeoGebra software. The activities are intended to bring the student to interact in an autonomous way with the concepts and properties involved and enable them in the development of conjectures and arguments on observed facts and check the results by means of dynamic movements that the software allows. We present a review of contents linked to movements in the plan: congruences, isometries, similarities and homotheties, necessary to the understanding of the proposed topic. Finally, we conducted an interview with a group of four school teachers in order to know their opinion about the proposed activities, their relationship with the new technologies and their interest in continued education.

Key-words: Geometry. Didactic Situations. Symmetry. GeoGebra.

Sumário

Lista de ilustrações

Introdução

Recordando minha trajetória escolar na Escola Estadual Profa. Cinelzia Lorenci Maroni, na cidade de Piacatu-SP, nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (1993-1999), é possível lembrar que meus professores de matemática não realizavam demonstrações. Lembro-me perfeitamente quando minha professora de matemática da 8ª série, colocou na lousa a fórmula de Bhaskara e, ensinando-nos a trocar os coeficientes, resolvíamos os cálculos indicados, ou mesmo, quando naquele mesmo ano, a professora nos apresentou um triângulo retângulo, identificou o que eram os catetos e a hipotenusa, e nos apresentou a equação que representava o Teorema de Pitágoras. Após alguns exemplos de resolução da equação, passava-nos uma "bateria" de exercícios. O fato é, que muitas vezes, questionávamos a professora porque estávamos aprendendo aqueles conteúdos e que aqueles cálculos não nos produziam sentido.

De acordo com o professor Per Christian Braathen, em artigo publicado na Revista EIXO(2012), os fatos apresentados acima caracterizam uma Aprendizagem Mecânica, pois em suas palavras:

> A Aprendizagem Mecânica ocorre com a incorporação de um conhecimento novo de forma arbitrária, ou seja, o aluno precisa aprender sem entender do que se trata ou compreender o significado do porquê. Essa aprendizagem também acontece de maneira literal, o aluno aprende exatamente como foi falado ou escrito, sem margem para uma interpretação própria. A aprendizagem acontece como produto da ausência de conhecimento prévio relacionado e relevante ao novo conhecimento a ser aprendido. (BRAATHEN, 2012).

No ano de 2000, ingressei no curso de licenciatura em Matemática nas Faculdades Adamantinenses Integradas (FAI), na cidade de Adamantina-SP. Nesse momento, me deparo com as primeiras demonstrações, principalmente nas disciplinas de Geometria Analítica e Introdução à Álgebra. Ao longo do curso, tanto eu como a maioria dos alunos da minha turma demonstramos dificuldades com demonstrações.

Já no ano de 2004, após ser aprovado em concurso público da Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo, retorno a Escola Estadual Profa. Cinelzia Lorenci Maroni como professor de Matemática. No início, as principais fontes para preparar aulas e consultas foram os livros didáticos. Concomitantemente, tive a socialização de atividades dos professores de Matemática mais antigos, muitos deles, meus professores nos meus anos de estudo na Educação Básica.

Desde 2011, passei a integrar a equipe do Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino da Região de Birigui como Professor Coordenador da área de Matemática. Uma das minhas funções passa a ser a de acompanhar aulas de outros colegas professores de Matemática e, embasado no Currículo Oficial do Estado de São Paulo (2010), realizar *feedback* sobre as aulas acompanhadas.

Ao longo da minha trajetória como aluno, estudante universitário, professor da rede pública e professor coordenador, foi possível observar como os professores e alunos têm dificuldades em fazer inferências, levantar hipóteses, produzir provas e contra-exemplos, fazer conjecturas e realizar demonstrações. Porém, apesar de não estar explicitamente indicado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) para o Ensino Fundamental, os princípios da lógica devem ser integrados aos conteúdos, e desenvolvidos ao longo da trajetória escolar pelos alunos, pois é inerente à Matemática.

> No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal. (BRASIL, 1998b, p. 49).

Com a oportunidade de observar a prática docente de vários professores de matemática, devido a função de professor coordenador, das lembranças que tenho da época de estudante, é possível afirmar que ao longo dos últimos 20 anos, os procedimentos didáticos e os processos de ensino-aprendizagem pouco se alteraram. Para agravar a situação, muito professores de matemática têm dificuldades em implementar o uso das novas tecnologias.

Inicialmente esse trabalho têm como principal público-alvo alunos, professores e gestores das escolas públicas estaduais do Estado de São Paulo, porém nada impede que outros segmentos façam uso deste, pois a principal preocupação é a elaboração de atividades que conduzam ao uso das novas tecnologias presentes na escola, ao mesmo tempo que tenta resgatar a importância de justificar os resultados matemáticos e uma maior participação dos alunos nas aulas. Como veremos adiante, é sabido que há décadas as propostas curriculares do Estado de São Paulo não trazem orientações quanto a demonstrações no ensino da Matemática, principalmente no ensino de geometria, fato esse que é há muito tempo denunciado por vários autores, como por exemplo, (PAVANELLO, 1993).

> O gradual abandono do ensino de geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que tem preocupado os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas, principalmente após a promulgação da Lei 5692/71. (PAVANELLO, 1993, p.7).

Na prática, tal qual aconteceu comigo e outras gerações, os alunos não tiveram (ou não têm) contato com justificativas e demonstrações de resultados inerentes à Matemática. Geralmente, os resultados já são repassados prontos, ocultando todas as conjecturas, tentativas e experimentações e não raro desconsideram os obstáculos epistemológicos dos objetos matemáticos. O objetivo é propor atividades que despertem no aluno a necessidade de explorar e justificar resultados obtidos em ambientes informatizados e dinâmicos, além de familiarizá-los com termos, notações e propriedades específicas de objetos da geometria. Logo, não abordaremos diretamente as demonstrações na disciplina de matemática, mas discutiremos sua importância na construção do pensamento matemático por parte dos alunos. A intenção é instigar os alunos a buscarem justificativas, demonstrações ou provas, para os resultados obtidos empiricamente.

A questão que surge naturalmente é: como incorporar o uso das novas tecnologias à educação básica e desenvolver a capacidade de realizar demonstrações, argumentações, de fazer conjecturas e generalizações na sala de aula e ainda tornar os alunos sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem?

Para responder a esta pergunta, no primeiro capítulo vamos primeiramente estabelecer um referencial teórico que propicie entender o raciocínio matemático, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos na construção dessa demonstração, apoiados nas pesquisas de Nickerson (2009 apud FILHO, 2013). Em seguida, abordaremos o uso de software de geometria dinâmica como ferramenta para que o aluno possa formular e reconstruir conjecturas. Para isso, discutiremos e apresentaremos algumas propostas do Currículo Oficial do Estado de São Paulo para o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo.

No segundo capítulo, estudaremos a Teoria das Situações Didáticas e suas contribuições para o ensino da matemática. A proposta é que o aluno exponha suas respostas aos problemas propostos em relação ao meio em que ele está inserido e não a exigência do professor; ele tem que tomar para si a responsabilidade de gerenciar suas aprendizagens em um contrato didático dialogado e definido com o professor; ao último, cabe o papel de gerenciar situações que produza nos alunos os mesmos efeitos esperados neles. O papel do professor passa a ser o de mediador e gestor das aprendizagens de seus alunos. No terceiro capítulo, apresentaremos uma breve revisão bibliográfica sobre importantes resultados da geometria plana, tais como: casos de congruência, soma dos ângulos internos de um triângulo, homotetias (translação, rotação e reflexão), definição geral de semelhança, casos de semelhança, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras. No quarto capítulo, apresentaremos atividades investigativas a serem exploradas no software *GeoGebra*. A proposta inicial é que as atividades sejam disponibilizadas prontas e com a exploração dos movimentos dinâmicos que o software permite, sejam respondidas perguntas sobre o conteúdo em questão. No segundo momento, será fornecido os protocolos de construção para que os usuários construam as atividades. Julgamos que os comandos do *GeoGebra* são intuitivos e permitem ao usuário apropriar-se das notações e das propriedades dos objetos matemáticos, o usuário (aluno) passa a interagir com o software, reduzindo as intervenções exteriores (professor). As atividades não têm como objetivo cobrir todos os conteúdos relacionados a geometria euclidiana plana, mais sim, sinalizar uma metodologia diferenciada que possa ser utilizada em sala de aula para que os alunos tornem-se sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem, portanto caberá no futuro uma constante busca de atividades que complementem os demais conteúdos e otimize a aprendizagem. No quinto capítulo, será apresentada a análise das atividades por parte de um grupo de professores de matemática da Diretoria de Ensino de Birigui, com suas impressões, sugestões e adaptações. Para finalizar será elaborado uma conclusão sobre as dificuldades e as possibilidades de implementação do trabalho apresentado.

Considerações sobre demonstrações em Matemática

De maneira geral usamos a palavra demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque na disciplina. Segundo Balacheff (2004 apud ALMOULOUD, 2007) há distinção de significado das palavras explicação, prova e demonstração, pois:

> A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição "verdadeira" ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração. As provas são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:
>
> • são as únicas aceitas pelos matemáticos;
>
> • respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
>
> • trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (ALMOULOUD, 2007, p. 2-3)

Um exemplo clássico da confusão que os professores fazem entre uma prova e uma demonstração é a proposta da seguinte atividade: desenha-se um triângulo em papel; assinalam-se os ângulos; com ajuda de uma tesoura faz-se o recorte; colocam-se os recortes de tal modo que apenas um dos lados fique sobre lado de outro ângulo com coincidência dos vértices e, analisa-se o tipo de ângulo que a junção dos três forma, resultando em um ângulo de meia volta (180°).

Para Balacheff (2004 apud ALMOULOUD, 2007), a propriedade na geometria euclidiana plana, de que a soma dos ângulos internos de triângulo qualquer é 180°, por meio dessa atividade é validada por meio da prova pragmática e classificada como empirismo ingênuo (*empirisme naïf*), pois consiste em validar a propriedade (ou propriedades) a partir da verificação de alguns poucos casos, e sem questionamento. Porém, a maioria dos professores de matemática da educação básica classificaria tal atividade como uma demonstração da propriedade mencionada.

Segundo Nickerson (2009 apud FILHO, 2013), para haver uma compreensão do raciocínio matemático em sua totalidade, temos de entender o que pensam os pesquisadores e educadores matemáticos de nosso tempo sobre a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos na construção dessas demonstrações. Isto acontece pois, de tempos em tempos, desde os tabletes da Mesopotâmia, as publicações em revistas especializadas de Matemática dos dias de hoje, os saberes são reinventados e passam por transformações de linguagens, concepção e a forma que são apresentados pedagogicamente. E isto é positivo, pois torna a matemática uma ciência viva e dinâmica, os pesquisadores e educadores matemáticos buscam ideias simplificadoras e essas são divulgadas pelos meios acadêmicos e mudam nossa forma de “enxergar” a matemática. Se utilizássemos um texto matemático escrito há mais de dois séculos, teríamos muitas dificuldades em interpretá-lo, bem como daqui a 200 anos nossos descendentes terão dificuldades em interpretar nossos textos atuais. Diante destas premissas, Nickerson propõe a reflexão em torno de algumas questões:

- *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração?*
- *O que constitui uma demonstração?*
- *O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração?*
- *Como as demonstrações são construídas?*
- *Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida?*
- *Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração?*

A primeira pergunta: *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração?* Para responder esta questão, temos que levar em consideração que nos dias atuais há poucas evidências históricas, ou seja, seria muito incerto afirmar alguma coisa, pois segundo Boyer (1996):

> Afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidências fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjectural, a partir de documentos que sobreviveram. (BOYER, 1996, p. 4)

Porém, se considerarmos as conquistas matemáticas realizadas pelas antigas civilizações (egípcia, babilônica, chinesa e indiana), podemos avançar sobre um melhor entendimento sobre esta questão. Será que podemos conjecturar que a origem e a noção de demonstração surgiram com o desenvolvimento da Matemática dessas civilizações, ou esse papel coube exclusivamente aos gregos? Se olharmos para os dias atuais, em que uma geração aprende com a outra e pesquisadores estabelecem protocolos de cooperação entre si, podemos afirmar que geralmente um novo conhecimento não é criação exclusiva de uma única pessoa, mas sim de várias pesquisas anteriores e da ajuda mútua, logo, seria preconceituoso ignorar as contribuições das antigas civilizações e exaltar apenas a civilização grega e desconsiderar todas as evidências anteriores. Dessa forma, Pitombeira e Roque (2012) afirmam que

> Querer comparar as práticas "geométricas" dos antigos egípcios com o encaminhamento dado 'a geometria pelos gregos, mais tarde, é colocar uma alternativa que não faz sentido. Os preconceitos que cercam nossa visão da Matemática egípcia impediram, até recentemente, que ela fosse apreciada tal como se apresenta nos registros disponíveis. (PITOMBEIRA; ROQUE, 2012, p. 7)

Hoje, segundo Filho (2013), pesquisas mais recentes e aprofundadas sobre a Matemática praticada por esses povos mostram um desenvolvimento considerável de procedimentos, métodos e fórmulas aproximadas e exatas no estudo da aritmética, geometria, álgebra e astronomia. Desta forma, ao considerar por exemplo as contribuições dos antigos egípcios, temos que conceituar que eles não raciocinavam como os gregos, no sentido de buscar uma verdade universal para se chegar a uma conclusão. Para eles, bastava encontrar um método exato que desse conta dos desafios enfrentados por eles, sem que para isso, houvesse a necessidade de estabelecer uma cadeia de argumentos lógicos para justificar tais métodos. Para eles, bastava descrever uma sequência ordenada dos passos necessários para obter a solução de um problema e, para finalizar, adicionavam uma verificação ou prova que mostrava que realmente esse método levava a resolução correta do problema proposto. Não cabe a nós comparar, depois de mais de 2000 anos, os métodos dos gregos em relação aos povos anteriores, pois com certeza a matemática grega provavelmente foi edificada a partir do conhecimento desses povos. Logo, concluímos que no decorrer da História da Matemática a descoberta de novas teorias e proposições não é precedida por procedimentos puramente axiomáticos e sim por vários processos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc). Enfim, a demonstração matemática não pode ser concebida como algo pronto e acabado. Ao final, esses processos corroboram de maneira cíclica para a construção de uma demonstração organizada, lógica e rigorosa.

A segunda pergunta: *O que constitui uma demonstração*?

Para Nickerson (2009 apud FILHO, 2013), as demonstrações matemáticas são concernentes a várias formas. Em primeiro lugar, uma demonstração existe sempre dentro de um sistema axiomático; este é constituído por uma coleção de termos primitivos, denominados axiomas, e um conjunto de todos os teoremas que são deduzidos a partir desses termos. Logo, em um sistema axiomático, tudo tem de ser provado para ser considerado verdadeiro, exceto os termos primitivos. Ou seja, em um sistema axiomático, partindo de premissas verdadeiras e regras válidas, obtêm-se novas sentenças verdadeiras. As conclusões são alcançadas com a manipulação dos símbolos de acordo com um conjunto de regras. Em segundo lugar, a História da Matemática nos apresenta vários exemplos de demonstrações que ao longo do tempo, com o desenvolvimento da Matemática, após um período de repouso, num tempo considerável, se mostraram insuficientes para uma geração e para as gerações posteriores. Em terceiro lugar, mesmo aquelas demonstrações que são tidas como perfeitas, divergem na sua capacidade de convencimento, pois existem vários teoremas que foram demonstrados de diferentes maneiras. Em quarto lugar, as demonstrações consideradas perfeitas variam também em sua exposição (beleza, elegância e atrativas para os matemáticos); as deselegantes, complexas, feias e de difícil entendimento, permanecem como desafios para que os matemáticos possam aperfeiçoá-las. Em quinto lugar, a concepção de demonstração está em constante evolução e as mudanças ocorridas na ideia do que constitui uma demonstração rigorosa têm gerado revoluções na Matemática. Em sexto lugar, mesmo em períodos históricos da Matemática, o conceito de demonstração pode ter conotações diferentes em contextos diversos. Por fim, mesmo entre os matemáticos que concordam com as regras universais (estabelecidas pela comunidade matemática) que caracterizam uma demonstração, surgem divergências sobre a veracidade de demonstrações específicas, assim, a Matemática apresentada nos periódicos é certificada pelo convencimento de especialistas qualificados no assunto e de notoriedade na comunidade de matemáticos.

A terceira pergunta: *O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração*?

Segundo Mortari (2012), em uma concepção de ciência empírica, após a realização de um experimento por várias vezes, é possível mostrar a verdade de uma proposição em estudo por meio do recurso à *observação* e *experimentação*. Isso acontece em ciências como a Física e a Química, por exemplo. Há também os casos que pode se mostrar que alguma proposição da Física é verdadeira mostrando que ela é consequência lógica de outras proposições verdadeiras da Física.

Porém, nas ciências formais como a Matemática, apesar dos matemáticos envolverem recursos à experimentação e observação, ele só vai se mostrar convencido de que, por exemplo, o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos se houver uma demonstração disso. Segundo o autor, pode-se mostrar que alguma proposição é verdadeira por meio de algum argumento correto do qual ela seja a conclusão. Certas proposições são *provadas* ou *demonstradas*, ao mostrar que elas seguem logicamente de algumas outras, cuja veracidade já foi estabelecida. Sendo assim, uma demonstração de alguma proposição matemática consiste em mostrar que ela segue logicamente de outras proposições matemáticas (supostamente) verdadeiras. Em sua obra “Elementos”, Euclides deixa isso claro, pois:

> A ideia de Euclides foi a seguinte: algumas proposições geométricas são tão simples, mas tão simples, que realmente não se pode duvidar de sua verdade – ou seja, elas são *autoevidentes* e não precisam ser demonstradas. Por exemplo, as proposições seguintes: O todo é maior que cada uma das partes. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si. (MORTARI, 2012, p. 229)

A quarta e a quinta perguntas: *Como as demonstrações são construídas*? *Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida*?

Para Filho (2013), para responder as questões acima, necessita-se recorrer à Filosofia da Matemática e à Lógica Matemática, pois estas serão importantes para se estabelecer considerações consistentes em relação aos aspectos da demonstração. Nesta linha, a Filosofia da Matemática busca examinar aspectos intrínsecos relacionados à demonstração matemática e às correntes filosóficas em meio a diferentes enfoques epistemológicos e ontológicos e buscam mostrar que as várias demonstrações que se apresentam nos diferentes ramos da Matemática são capazes de fornecer um conhecimento global dessa ciência. Paralelamente, em conjunto, a Lógica Matemática tem contribuído ao abordar esse tema, pois estabelece explicações racionais de padrões axiomáticos utilizados por matemáticos na elaboração de uma teoria e principalmente em formalizar e avaliar por intermédio de regras de inferências quando demonstrações em Matemáticas podem ser obtidas e consideradas válidas na área de conhecimento. Neste sentido, a arquitetura de uma teoria matemática está condicionada ao estabelecimento de um sistema axiomático que tenha subjacente alguns elementos fundamentais: uma linguagem implícita ao sistema axiomático; um sistema lógico; um vocabulário de palavras não definidas; um conjunto de proposições (axiomas) referentes às palavras não definidas; e um conjunto de definições oriundas desse conjunto de palavras não definidas e desse conjunto de axiomas.

Logo, conforme Shoenfield (1967 apud FILHO, 2013),

> em sistemas formais, a Lógica Matemática é a estrutura sobre a qual as demonstrações rigorosas são edificadas. Convém salientar que, externo à área da Lógica Matemática, os vários procedimentos utilizados nas demonstrações em Matemática quase nunca envolvem uma lógica formal. Porém, os operadores lógicos básicos (conjunção, disjunção e negação), as combinações primordiais que formam as tautologias e as contradições, método de demonstração por contradição, declarações logicamente equivalentes, declarações condicionais e as equivalências lógicas constituídas com outras declarações, declarações contrárias e contrapositivas e as combinações de sentenças declarativas condicionais estabelecem mediante a Lógica os métodos direto, contrapositivo e indireto com o intuito de apresentar uma construção correta e rigorosa na validação das demonstrações em Matemática. (FILHO, 2013, p. 6)

A sexta pergunta: *Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração*?

Em diferentes momentos da História da Matemática, segundo Filho (2013), houve o surgimento de comunidades matemáticas inseridas em escolas filosóficas, acadêmicas, escolas monásticas, universidades e academias de ciências, estas foram de certa maneira, responsáveis pelo desenvolvimento e divulgação da Matemática, principalmente a partir do século XIX, pois implicitamente essas instituições definiam, julgavam e deliberavam sobre a validade de uma demonstração.

Para Pietropaolo (2005), o processo de validação de uma prova é um processo social, pois:

> O processo de validação de uma prova é nitidamente social, ou seja, não é o formalismo que necessariamente vai referendá-la, mas sim o convencimento de um grupo de especialistas qualificados no assunto e de reconhecida notoriedade na comunidade dos matemáticos. (PIETROPAOLO, 2005, p. 68)

Esse referendamento a nível internacional, só foi possível graças a uma estruturação, organização e uma linguagem universal, que é adotada pelas várias comunidades matemáticas.

Reflexão sobre as possibilidades do uso de software de geometria dinâmica

Para Pietropaolo (2005), a Matemática é uma ciência dedutiva, porém as demonstrações são elaboradas a partir de uma série de observações, do emprego de analogias e experimentações, que envolvem por muitas vezes, um processo especulativo. Sendo assim, a análise somente do produto matemático final tende a ocultar a natureza dos processos utilizados para a obtenção das demonstrações. Desta forma, o autor propõe que o professor de matemática, seja lá de qual nível for, leve em consideração esses fatos e considere que, muitas vezes, os matemáticos utilizam-se de raciocínio hipotético-indutivo para atingir seus objetivos, ou seja, a demonstração de um fato ou teorema em questão. O documento Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998b) enfatiza a importância de o professor refletir como é concebido o conhecimento matemático, pois

> interferem processos heurísticos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas do conhecimento. A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. (BRASIL, 1998b, p. 26)

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. (BRASIL, 1998b, p. 26)

É consenso que "a Geometria é uma seara bastante fértil - provavelmente a mais fértil- ao desenvolvimento das diferentes formas de raciocínio, em especial o dedutivo" (PIETROPAOLO, 2005, p.83). Pietropaolo (2005) ressalta que

> Alguns educadores defendem que o ensino de geometria pode ser otimizado pela incorporação de programas de Geometria dinâmica, pois estes permitiriam a formulação e reformulação de conjecturas, verificando as verdadeiras e refutando as falsas. A demonstração decorreria da necessidade do aluno, diante de um problema na tela do computador. (PIETROPAOLO, 2005, p.88-89)

Logo, o uso de software de geometria dinâmica permite aos alunos desenvolverem atividades de investigação e convencê-los de determinados resultados, isso catapultaria um questionamento, "por quê" as coisas funcionam de uma maneira e não de outra. Por fim, Pietropaolo (2005) através de suas pesquisas, afirma que

> o grande desafio do professor, a nosso ver, seriam a organização e direção de situações com a finalidade de levar os alunos a perceber a necessidade na construção de uma argumentação dedutiva para explicar e justificar um resultado geométrico percebido ou induzido no ambiente informatizado ou em qualquer outro contexto. Esta seria uma consequência essencial. (PIETROPAOLO, 2005, p.90)

A abordagem do pensamento lógico-dedutivo no Currículo Oficial do Estado de São Paulo-Matemática (2010)

Ao fazer a leitura do Currículo Oficial do Estado de São Paulo - Matemática (SÃO PAULO, 2011), percebe-se um avanço ao considerar a Matemática como uma área específica do conhecimento, diferente do Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1998a), que, na época considerava a disciplina Matemática pertencente à área das Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Na busca pelo equilíbrio entre a contextualização e a abstração, o documento enfatiza

> que a valorização da contextualização seja equilibrada com o desenvolvimento de outra competência, igualmente valiosa: a capacidade de abstrair o contexto, de apreender relações que são validas em múltiplos contextos e, sobretudo, a capacidade de imaginar situações fictícias, que não existem concretamente, ainda que possam vir a ser realizadas.(SÃO PAULO, 2011, p.30)

A partir das ideias gerais utilizadas na formulação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o documento cita que "é possível vislumbrar um elenco de competências básicas a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo da escola básica, incluindo três pares complementares de competências" (SÃO PAULO, 2011, p.31). Estes três eixos são:

> o eixo **expressão/compreensão**: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.;
>
> o eixo **argumentação/decisão**: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas;
>
> o eixo **contextualização/abstração**: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações - sobretudo no mundo do trabalho -, e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe.(SÃO PAULO, 2011, p.31-32)

Particularmente em relação ao eixo argumentação/decisão articulado com a língua materna, o documento destaca que "na construção do pensamento lógico, seja ele indutivo ou dedutivo, a Matemática e a língua materna partilham fraternalmente a função de desenvolvimento do raciocínio."(SÃO PAULO, 2011, p.32) Em relação ao processo de ensino aprendizagem de Geometria a orientação é para dar "certa ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos e esta (grifo nosso) poderá ser a tônica dos trabalhos na 7ª série/8º ano e na 8ª série/9º ano." (SÃO PAULO, 2011, p.41)

Ao final do documento, são listados os conteúdos a serem desenvolvidos ao longo das séries/anos com as respectivas habilidades. Abaixo se encontra particularmente os conteúdos/habilidades de Geometria previsto para a 7ª série/8º ano e a 8ª série/9º ano (ver Figuras 1 e 2).

Apesar de haver a orientação, especialmente na área de geometria, com certa ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos, nesta etapa de escolaridade, ao examinar o rol de conteúdos e habilidades, não encontramos nenhuma menção ao desenvolvimento de demonstrações. Será essa uma tendência no ensino da Matemática ou uma visão de que a maioria dos professores da rede pública não estão preparados para trabalhar com demonstrações e provas? As demonstrações trazem relevância para o desenvolvimento intelectual dos alunos?

Essas questões já eram refletidas pelo professor Ruy Pietrapaolo quando o mesmo participava da equipe técnica de matemática, Divisão de Currículo, da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP, da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, no ano de 1985, órgão este, que à época, era responsável pela elaboração de propostas curriculares e projetos para as escolas públicas do Estado de São Paulo. Em suas palavras, naquele momento

Figura 1 – Conteúdos do 8º ano

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
4º Bimestre	**Geometria** Geometria • Teorema de Tales • Teorema de Pitágoras • Área de polígonos • Volume do prisma	• Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos • Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares • Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes

Fonte: SEE/SP

> passamos a sustentar que a seleção de conteúdos deveria considerar a relevância social e não apenas a contribuição destes para com o desenvolvimento intelectual dos alunos. Por julgarmos, na época, que as demonstrações não eram socialmente relevantes, acreditávamos que os currículos deveriam diminuir ainda mais a ênfase dada a esse tema. Algumas questões permaneceram durante todo o tempo conosco, dentre as quais destacamos: será que estávamos certos em defender a não-ênfase, ou até mesmo o abandono, das demonstrações nos currículos de Matemática para a Educação Básica? (PIETROPAOLO, 2005, p.25-26)

Quanto ao trabalho dos professores, ele é enfático ao afirmar que

> Como o nosso trabalho na CENP envolvia os professores da rede pública estadual, percebíamos as dificuldades que esses docentes tinham na implementação de inovações curriculares em suas aulas. Pudemos constatar, assim, que os modelos existentes de formação de professores, por nós conhecidos, não eram suficientes para atender as demandas curriculares, como a de buscar uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos, a resolução de problemas e a utilização da história da Matemática, como meio de ensinar e aprender matemática. (PIETROPAOLO, 2005, p.26)

Pelo visto, essas ideias e concepções perduram até os dias atuais, pois percebemos que no atual currículo de Matemática do Estado de São Paulo não há orientações específicas quanto o desenvolvimento de demonstrações na Educação Básica.

Figura 2 – Conteúdos do 9º ano

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Geometria/Relações** Proporcionalidade na Geometria • O conceito de semelhança • Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas	• Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes • Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos • Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos
4º Bimestre	**Geometria/Números** Corpos redondos • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo • Volume e área do cilindro Probabilidade • Problemas de contagem e introdução à probabilidade	• Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes • Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência • Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro • Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo • Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade

Fonte: SEE/SP

A Teoria das Situações Didáticas

A Didática da Matemática

Segundo D'Amore (2007), "*A Grande Didática*" escrita por Comenius no século XVII, levou muito tempo para ser refutada, pois a ideia que "... um método único basta para ensinar todas as matérias... as artes, as ciências e as línguas" perdurou até o século XX. Hoje é consenso que os conceitos de didática podem ser e são específicos. Para ele, "... isso foi útil para a didática (geral) se libertar do jugo da pedagogia e para as didáticas específicas (disciplinares) chegarem a um status autônomo."(D'AMORE, 2007, p.3-4)

A Didática da Matemática teve seu desenvolvimento a partir do final dos anos 60, na França, através de pesquisas desenvolvidas por matemáticos nos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (IREM). Guy Brousseau[1] já era reconhecido como um dos principais pesquisadores da área. Naquele momento, a visão cognitiva era fortemente influenciada pela epistemologia piagetiana e dominava os processos de ensino aprendizagem das disciplinas de ciências exatas. A teoria das Situações Didáticas propôs outro olhar: "*uma construção que permitisse a compreensão das interações sociais de alunos, professores e conhecimentos matemáticos que ocorrem em uma sala de aula e que condicionam o que se aprende e a forma como isso se dá.*"(BROUSSEAU, 2008, p.11).

Nessa perspectiva, D'Amore (2007) define a Didática da Matemática como:

> é a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal) (D'AMORE, 2007, p. 4)

Para D'Amore (2007) é preciso estabelecer que a aprendizagem é um conjunto de modificações de comportamentos (portanto de realizações de tarefas solicitadas) que indicam, para um observador pré-estabelecido, segundo sujeito em jogo, que o primeiro sujeito dispõe de um conhecimento (ou de uma competência) ou de um conjunto de conhecimentos (ou de competências), o que conduz a diversas representações, a criação de convicções específicas, ao uso de diferentes formas de se expressar, ao domínio de um conjunto de

[1] Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, cidade ao norte de Marrocos à época colônia da França. É considerado um dos primeiros estudiosos da Didática da Matemática Francesa, é professor aposentado do IUFM (Instituto Universitário de Formação de Professores), em Aquitânia e da Universidade Bordeaux, ambas na França. Foi ganhador da Medalha Felix Klein da Educação Matemática em 2003, pela Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), em razão de seus estudos e por ter alavancado o desenvolvimento da educação matemática.

repertórios de referências idôneos, de experiências, de justificações ou de obrigações. Essas condições devem ser colocadas em ação e reproduzidas intencionalmente. Nesse caso, fala-se em práticas didáticas. Essas práticas didáticas são elas próprias "condições" e, portanto, objeto de estudo. A didática apresenta-se então como o estudo de tais condições, na forma de projetos e de realizações efetivas.

Para Almoulod (2007), o objetivo principal da Didática da Matemática é conseguir definir situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que venham a caracterizar o processo de aprendizagem e estabelecer fatores determinantes para o avanço do comportamento dos alunos. Assim, "*o objetivo central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber*" (ALMOULOUD, 2007, p. 32), e tanto as situações exitosas como as fracassadas devem ser consideradas, para que o professor possa reavaliar as situações e propor modificações.

O '*Milieu*' (ambiente, meio)

Segundo D'Amore (2007), os estudos sobre a teoria das situações mostram que o professor tem que instigar no aluno comportamentos, que o próprio, a fim de manifestar seu conhecimento, teria que adotar autonomamente. Para ele,

> Parece um paradoxo. Aliás: é um paradoxo. A única solução consiste em envolver um terceiro elemento, o *milieu*, e fazer com que a resposta do aluno se refira exclusivamente às necessidades do *milieu*, que o professor conhece bem, ou que predispôs para esse fim. A arte do professor está então na organização de uma relação entre aluno e *milieu* (D'AMORE, 2007, p.5)

Sendo assim, a tarefa do professor está na organização de uma relação entre aluno e *milieu*, que possa por um lado, deixar uma razoável incerteza que deve ser reduzida pelos conhecimentos do sujeito e, por outro lado, fazer com que essa redução possa efetivamente ocorrer, isto é, com um grau de incerteza limitado, do ponto de vista do professor. Por isso, Brousseau (2008) afirma que o comportamento do aluno mostra como funciona o *milieu* (meio), logo o que deve ser modelado é o *meio*.

> Assim, um problema ou exercício não pode ser considerado mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que responde ao sujeito, segundo algumas regras. Que jogo o sujeito deve jogar para precisar de um conhecimento determinado? Que aventura – sucessão de jogos – pode levá-lo a conceber ou adotar esse conhecimento? [...] Que informação, que sanção pertinente deve o sujeito receber do meio para orientar suas escolhas e comprometer tal conhecimento em vez de outro? Essas perguntas, pois, levam a considerar o meio como um sistema autônomo, antagônico ao sujeito, e é deste que convém fazer um modelo, visto como um tipo de autômato. (BROUSSEAU, 2008, p.19).

Assim, o *milieu* deve-se organizar para propiciar que durante a aprendizagem haja desequilíbrios, assimilações e acomodações (conforme Piaget), permitindo ao aluno refletir sobre suas ações e retroações, sempre respeitando regras previamente definidas.

Para Brousseau (2008), o novo conhecimento se edifica a partir de conhecimentos antigos e também contra esses. Isto possibilita o domínio de saberes matemáticos por meio da mobilização de conhecimentos como ferramentas. Deste modo,

> À semelhança do que acontece na sociedade humana, o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradição, dificuldades, desequilíbrios. Esse saber, fruto de sua adaptação, manifesta-se por intermédio de novas respostas, que são a marca da aprendizagem. (BROUSSEAU, 2008,p.34).

Logo, o momento atual exigirá que os professores reflitam de uma forma sensata quais “problemas” ou “atividades” são mais adequados para que se possa desenvolver nos alunos uma postura mais autônoma, em que eles possam ser sujeitos ativos. Outro ponto a refletir é que cada aluno ou turma tem sempre suas próprias peculiaridades, logo tais “problemas” ou “atividades” devem ser adaptados às características do público-alvo.

Teoria das situações matemáticas

Para Brousseau (2008), quando se considera apenas as relações entre os sistemas “professor” e “aluno”, os elementos que compõem uma *Situação Didática* são o *professor*, o *aluno* e o *saber*.

Esse entrelaçamento entre professor e aluno é uma das bases da *teoria das Situações Didáticas* e constitui o denominado **Contrato Didático**.

De acordo com Brousseau (2008), o *contrato didático* é o regulamento que determina, direta ou indiretamente, o que cada envolvido na relação didática deverá fazer e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. Ou seja, o contrato didático é o conjunto de comportamentos esperado do professor por parte dos alunos e vice-versa.

A relação professor-aluno está associada a regras e convenções que funcionam como um contrato entre as partes. Essas regras geralmente não são explícitas, mas são observadas principalmente quando se dá a transgressão das mesmas. O conjunto das cláusulas que organizam as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber, constitui o chamado contrato didático (MELLO, 1999).

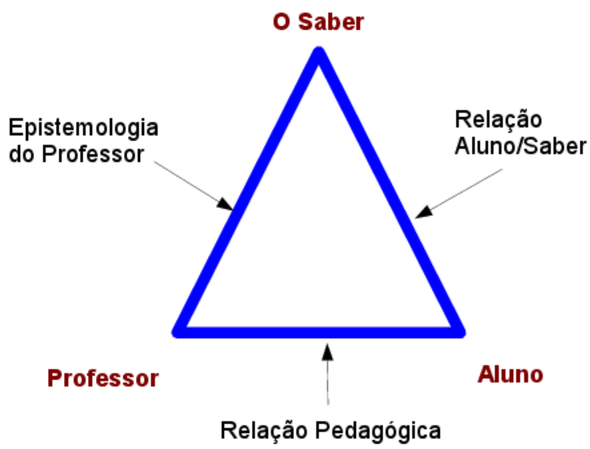
Sendo assim, o contrato didático vai depender da estratégia que o professor adotará, pois os fatores que influenciaram o contrato didático vão desde a formação e as representações do professor até mesmo as escolhas pedagógicas e os objetivos das atividades.

Para Mello (1999) em síntese,

> a aquisição do saber pelos alunos é a causa fundamental do contrato didático. A cada nova etapa, o contrato didático deve ser renovado e renegociado. Na maior parte do tempo, esta negociação passa despercebida. O contrato didático se manifesta principalmente quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática. Em muitos casos é preciso que haja a ruptura e a renegociação do mesmo para o avanço do aprendizado.(MELLO, 1999, p.17).

Para modelar a Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (2008) propôs o triângulo didático (Figura 3). Este é formado por três elementos, o aluno, o professor e o saber. Estes fazem parte de uma relação dinâmica e complexa, que envolvem a relação didática - interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber (elemento não-humano), que define a maneira como tais relações irão se corresponder.

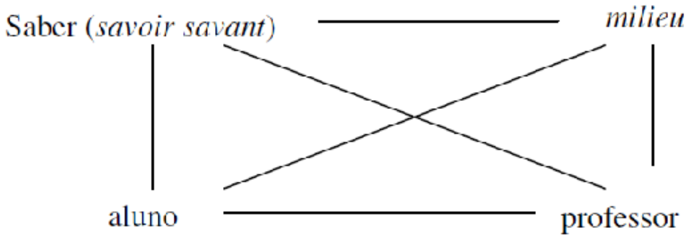
Figura 3 – Triângulo didático



Fonte: Brousseau (2008)

Porém de acordo com D'Amore (2007), nesse triângulo não aparece o *milieu* o que revela a sua incompletude. Introduzindo um novo "vértice" podemos passar a um *quadrilátero da didática*:

Figura 4 – Quadrilátero da didática



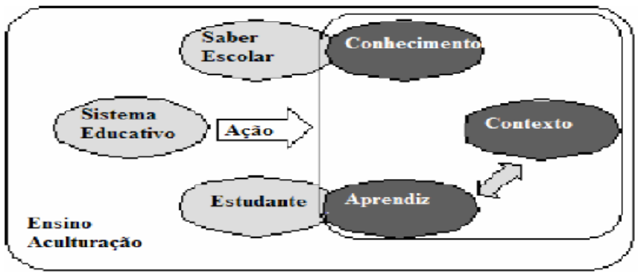
Fonte: D'Amore (2007)

Ainda segundo o autor, esse esquema revela sua própria insuficiência, pois

> ... quando consideramos que nele não se evidencia a diferença entre os "saberes" escolares a ensinar ou ensinados de fato e os "conhecimentos" do aluno, que não coincidem e que funcionam segundo diferentes modalidades; além disso, mesmo as peculiaridades do sujeito que aprende são diferentes, o que leva a um "hexágono da didática". (D'AMORE, 2007, p. 6).

Este novo esquema é traduzido por Brousseau, com o objetivo de destacar seu significado funcional.

Figura 5 – Esquema de Brousseau



Fonte: D'Amore (2007)

Nas próximas pesquisas, D'Amore afirma que

> teremos que entrar numa análise profunda desse esquema e de seus significados relacionais implícitos. E também usá-lo para estudar os eventos didáticos em sala de aula."(D'AMORE, 2007, p. 7).

Gálvez (1996) apud CASTRO (2012) destaca que a caracterização de uma Situação Didática tem em seu cerne uma natureza intencional, isto é, o ato de ser construída, organizada, com o principal objetivo de fazer com que o estudante aprenda. A autora salienta que a Situação Didática é objeto de estudo da Didática da Matemática, logo é preciso que se desenvolva uma metodologia em que a *situação* seja um componente de análise. A mesma autora complementa:

> Para analisar as situações didáticas, Broussseau as modeliza, utilizando elementos da teoria dos jogos e da teoria da informação. Para uma situação didática determinada identifica-se um estágio inicial e o conjunto dos diversos estágios possíveis, entre os quais se encontra o estágio final que corresponde à solução do problema envolvido na situação. Explicitam-se as regras que permitem passar de um estágio a outro. A situação é descrita, então, em termos das decisões que os jogadores (alunos) podem tomar a cada momento e das diferentes estratégias que podem adotar para chegar ao estágio final. (GÁLVEZ, 1996, p. 29).

Brousseau (2008) aponta quatro tipos de situação: ação, formulação, validação e institucionalização. Essas situações caracterizam a situação a-didática.

Na *situação a-didática*, o aluno aplica certo conhecimento fora da intenção de ensino, ou seja,

> o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. (FREITAS, 2008, p.84)

> O trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem, para que ele elabore seus conhecimentos como reposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor. Há uma grande diferença entre adaptar-se a um problema formulado pelo meio e adaptar-se ao desejo do professor. A significação do conhecimento é completamente diferente. Uma situação de aprendizagem é uma situação onde o que se faz tem um caráter de necessidade em relação a obrigações que não são arbitrárias nem didáticas. (BROUSSEAU, 2008, p. 49).

Desta forma, Brousseau destaca a *devolução*, o professor faz com que o estudante assuma uma responsabilidade diante do saber que está sendo proposto, de maneira que o docente possa controlar a *situação* e não o *saber*, já que esse está sendo construído pelo estudante como se fosse um pesquisador e não porque o professor assim o deseja (FREITAS, 2008).

> A *devolução* é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência. (BROUSSEAU, 2008, p.91).

As *situações de ação* são quando o aluno age sobre o *milieu* de forma a ponderar sobre regularidades e incorporá-las às suas decisões; posteriormente, há as *situações de formulação*. Nesse caso, o aluno necessita comunicar um conhecimento a outro sujeito, de maneira que seja necessário reconstruí-lo linguisticamente, sem a necessidade de usar explicitamente a linguagem matemática formal. Temos também as *situações de validação*, nas quais o aluno busca convencer os interlocutores de suas afirmações; para isso, elaboram provas, demonstrações, justificativas para seus argumentos e, por fim, as *situações de institucionalização*, nas quais o professor deve checar as tarefas que os alunos deveriam fazer ou refazer, ou seja, o que realmente aprenderam ou ainda o que precisam aprender. Essa situação tem papel de destaque para o professor, pois:

> não se pode reduzir o ensino à organização das aprendizagens. O fato de o aluno "oficialmente" levar em conta o objeto de conhecimento e de o professor considerar a aprendizagem do aluno é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático: esse duplo reconhecimento é o objeto da institucionalização. (BROUSSEAU, 2008, p. 102)

A epistemologia espontânea do professor

Para direcionar suas decisões em sala de aula, inicialmente os professores utilizam, direta ou indiretamente, suas experiências como alunos e/ou as aulas que frequentaram em sua formação acadêmica. Posteriormente, eles vão testando diversos métodos, convicções sobre a maneira de encontrar, aprender ou organizar um saber. "Essa bagagem epistemológica é essencialmente construída de modo empírico para satisfazer às necessidades didáticas" (D'Amore, 2007, p. 10). Em determinados instantes, essa é a maneira encontrada pelos professores de justificar os processos didáticos escolhidos e de fazê-los aceitar pelos alunos e pelo ambiente deles. Sendo assim, D'Amore (2007) afirma:

> O conjunto das convicções dos professores, dos alunos ou dos pais sobre o que convém fazer para ensinar, para aprender e para compreender os saberes que estão em jogo constitui uma *epistemologia* prática que é impossível ignorar ou eliminar. A epistemologia filosófica ou científica está longe de poder pretender assumir esse papel. (D'AMORE, 2007, p. 10).

Nessa linha de pensamento, o autor afirma que a epistemologia espontânea tem suas raízes numa prática antiga, dado que na história da humanidade a comunicação de experiências de uma geração para outra é uma característica essencial. Seria desproporcional confrontá-la aos conhecimentos científicos: é preciso respeitá-la, compreendê-la e estudá-la experimentalmente, como um fenômeno "natural".

Deste modo, a utilidade da introdução da epistemologia e das teorias científicas, aferentes à formação dos professores, apresenta-se então segundo um novo aspecto. (D'AMORE, 2007).

Para evidenciar o funcionamento dos dois tipos de epistemologia, que acabamos de ver, vamos analisar um exemplo retirado de Brousseau (2006) apud D' Amore (2007).

> O professor propõe aos seus alunos um problema que considera *análogo* a um problema que havia proposto precedentemente, mas no qual eles haviam fracassado. O professor espera que eles reconheçam a semelhança e que utilizem a correção e as explicações que havia dado para *reproduzir* o mesmo método de resolução, a fim de enfrentar com sucesso a nova situação. Aconselha fortemente então que seus alunos procurem utilizar essa analogia. Esse procedimento leva ao sucesso segundo o professor. Mas, na realidade, é uma fraude epistemológica. O aluno produz uma resposta correta, mas não porque tenha entendido a sua necessidade matemática ou lógica a partir do enunciado, não porque tenha "compreendido e resolvido o problema", não porque tenha aprendido um objeto matemático, mas simplesmente porque estabeleceu uma semelhança com outro exercício; ele apenas reproduziu uma solução já feita por outros para ele. O pior é que ele tem consciência que isso é o que o professor quer. Então acreditará ter compreendido a questão matemática em jogo, enquanto que só interpretou uma intenção didática expressa explicitamente pelo professor e forneceu a resposta esperada. (D'AMORE, 2007, p. 10).

O uso abusivo de analogias que Guy Brousseau já destacou desde o final dos anos 70, mas que ainda hoje é muito observado em ações didáticas em sala de aula, é denominado pelo autor de "efeito Jourdain", decorrente do contrato didático. Ele descreve que

> O professor, para evitar o debate do conhecimento com o aluno e, eventualmente, comprovar o fracasso, admite perceber o indício de um conhecimento sábio nos comportamentos ou nas respostas dele, ainda que sejam, na realidade, motivados por causas e significados banais. (BROUSSEAU, 2008, p. 80-81)

Há ainda, segundo Brousseau (2008), o efeito *Topaze*. Neste caso, o professor traz para si uma parte significativa do aprendizado, o qual seria de incumbência do estudante, forçando assim, uma espécie de transmissão de conhecimento. Ao perceber as dificuldades do aluno, o professor formula perguntas que induzem a resposta correta, antecipando conclusões e respostas que seriam esperadas por parte do estudante. Um exemplo simples, é quando o estudante é questionado sobre 3×7 e o professor ao ver o mesmo titubear, diz: vinte e ..., cabendo ao aluno completar a frase com o "um". Outra característica é que muitas vezes, para atingir êxito no processo de aprendizagem, o professor usa explicações longas e repetitivas, induzindo a memorização e aplicação de algoritmos sem reflexão do "porquê".

O exemplo apresentado acima expõe que a epistemologia e as ciências cognitivas podem estudar e encontrar motivos para as respostas dos alunos quantos as condições a-didáticas que determinam uma resposta original e a organização de conhecimentos específicos, porém não podem ajudar os professores a ignorar aquelas determinadas pelas condições didáticas que têm o objetivo de fazer produzir a resposta esperada, independentemente da modalidade de produção. "As obrigações didáticas vão acabar oprimindo as obrigações cognitivas" (D'AMORE, 2007).

Por fim, Brousseau (2008) destaca que

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. (BROUSSEAU, 2008, p. 34-35).

Logo, caberá ao professor buscar situações-problemas e jogos que possuam as características adequadas para a ampliação das situações didáticas, que valorizem a interação do aluno com o *milieu* e reduzam a intervenção do professor.

Teoria x Prática

Em minhas observações empíricas no ofício da função de Professor Coordenador do Núcleo Pedagógico da Diretoria Regional de Birigui-SP, trago comigo a opinião que de alguma maneira o professor têm que tirar os alunos da inércia que os mesmos se encontram na maioria das aulas de Matemática, tornando-os mais ativos e participativos nas aulas.

De maneira geral, os professores (também me incluo) têm dificuldades em romper com o ciclo de definições, exemplos, exercícios e correção, em que o professor é o transmissor e controlador do conhecimento. Dessa maneira, a *Teoria das Situações Didáticas* veio trazer respaldo quanto a necessidade de rever a relação entre o professor, o aluno e o saber. Essas imbricações devem levar os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem a refletirem sobre os meios que estão sendo utilizados no ambiente escolar.

Os professores e os gestores precisam estar atentos ao contrato didático estabelecido com os alunos, pois dele demanda as escolhas pedagógicas, os objetivos com as atividades proposta e o envolvimento dos alunos. As situações devem ser organizadas, objetivando sempre que o aluno aprenda, envolva-se e participe; o mesmo tem que tomar para si a aprendizagem como uma resposta sua em face dos problemas propostos e não ao professor, para "tirar" notas.

Outros fatos que acontecem frequentemente na prática e estão associados à Teoria das Situações Didáticas são os efeitos *Topaze* e *Jourdain*. Vários professores relatam que ao constatar que seus alunos foram mal em uma prova, fazem a correção da prova na lousa, explicando passo a passo e mesmo assim os alunos vão mal posteriormente. Outro relato sintomático é os que dizem que estão diminuindo o *nível* das suas aulas para que os alunos acompanhem, tendo que disponibilizar muitas vezes as repostas "quase prontas".

Todas essas constatações devem levar o professor a refletir sobre sua epistemologia prática e aprofundar o estudo e seleção de atividades que proporcione ao aluno ser um sujeito ativo e autônomo no processo de ensino aprendizagem, cabendo ao professor o papel de mediar as relações e a aquisição do conhecimento.

Congruência e Semelhança

Neste capítulo, discutiremos os casos de congruência de triângulos. Optamos por considerar o caso lado, ângulo, lado (LAL) como axioma e a partir daí obter os demais casos de congruência. Posteriormente serão abordados os três casos de isometrias no plano (translação, rotação e reflexão). Como requisito para acompanhar as definições e demonstrações, é necessário um conhecimento básico de geometria euclidiana, axiomática, tais como: ponto, reta, plano, semirreta, semiplano, congruência, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc, conforme apresentado, por exemplo no livro do João Lucas Marques Barbosa (BARBOSA, 2004).

Congruência

A ideia intuitiva que se procura precisar com a noção de congruência é a de que dois segmentos ou ângulos congruentes podem ser superpostos através de um movimento rígido do plano, ou seja, por uma aplicação que preserve as medidas das figuras. Essa noção de congruência de segmentos e ângulos será naturalmente estendida aos triângulos e, posteriormente, a figuras mais gerais.

Congruência de segmentos

Definição 1. Dois segmentos AB e CD são chamados *congruentes* se eles têm a mesma medida, ou seja, se $\overline{AB} = \overline{CD}$. Diremos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são *congruentes* se eles têm a mesma medida.

Denotaremos a congruência entre os segmentos AB e CD utilizando o símbolo $\equiv$ e escreveremos $AB \equiv CD$. Assim, $AB \equiv CD$ equivale a dizer que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Da mesma forma para a congruência de ângulos, diremos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes denotando por $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Com esta definição de congruência, as propriedades que envolvem igualdade de números reais passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência disso, a relação $\equiv$ é uma relação de equivalência, ou seja, satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva de congruência e, neste sentido, justifica-se algumas vezes tratá-la como igualdade.

Congruência de triângulos

A fim de simplificar a notação, denotaremos um triângulo, definido por três pontos não-colineares A, B e C, por $\triangle ABC$ ou, quando não houver perigo de confusão, por triângulo ABC.

Definição 2. Dois triângulos são chamados de congruentes se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Isso significa que se ABC e XYZ são dois triângulos congruentes e se

$$\nu : \{A, B, C\} \to \{X, Y, Z\}$$

for a bijeção que define a congruência, de modo que

$$A \to X, \;\; B \to Y, \;\; C \to Z,$$

então valem as seguintes relações:

$$\hat{A} \equiv \hat{X}, \;\; \hat{B} \equiv \hat{Y}, \;\; \hat{C} \equiv \hat{Z},$$

$$AB \equiv XY, \;\; AC \equiv XZ, \;\; BC \equiv YZ.$$

Os vértices A e X, B e Y, C e Z são chamados *correspondentes. Ângulos correspondentes* são aqueles cujos vértices são correspondentes e lados correspondentes são os lados cujas extremidades são vértices correspondentes.

Se $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são triângulos congruentes, escreveremos $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$, significando que a congruência leva A em X, B em Y e C em Z.

Axioma de Congruência:

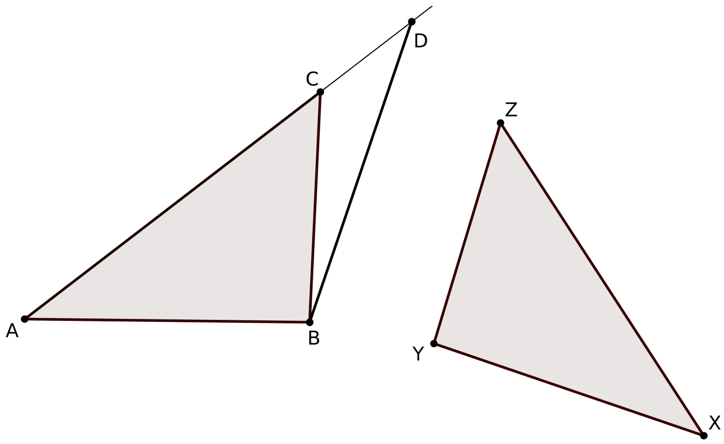
Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são tais que $AB \equiv XY$, $AC \equiv XZ$ e $\hat{A} \equiv \hat{X}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$.

Pelo **Axioma de congruência**, a fim de verificar a congruência entre dois triângulos, basta verificar apenas três relações, ao invés das seis relações exigidas anteriormente. Este axioma é chamado **primeiro caso de congruência de triângulos** ou, simplesmente, caso LAL.

Teorema 1 (caso ALA)**.** *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são congruentes se $AB \equiv XY$, $\hat{A} \equiv \hat{X}$ e $\hat{B} \equiv \hat{Y}$.*

Demonstração. Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$, com $\hat{A} \equiv \hat{X}$ e $\hat{B} \equiv \hat{Y}$, considere o ponto D sobre a semirreta AC tal que $AD \equiv XZ$. Considere o triângulo $\triangle ABD$. Como $AB \equiv XY$, $AD \equiv XZ$, e $\hat{A} \equiv \hat{X}$, segue-se do Axioma de congruência que $\triangle ABD \equiv \triangle XYZ$. Logo, em particular, que $A\hat{B}D \equiv \hat{Y}$. Como, por hipótese, temos $A\hat{B}C \equiv \hat{Y}$, concluímos que $A\hat{B}D \equiv A\hat{B}C$. Decorre daí que as semirretas BD e BC coincidem e, assim, os pontos B e C são coincidentes. Portanto, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são congruentes e, pela transitividade da relação de equivalência, concluímos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são congruentes.

Figura 6 – Caso ALA



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

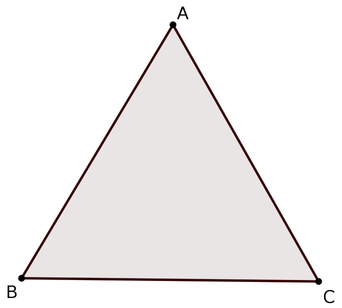
$\square$

Definição 3. Um triângulo que tem dois lados congruentes é chamado *isósceles*; os lados congruentes são as *laterais* e o terceiro lado é a *base* do triângulo. Os ângulos opostos às laterais são chamados de *ângulos da base*. Um triângulo que tem os três lados congruentes chama-se *equilátero*.

Proposição 1. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

Demonstração. Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$, isto é, associemos a A, B e C, respectivamente, A, C e B. Temos que $AB \equiv AC$, $B\hat{A}C \equiv C\hat{A}B$ e $AC \equiv AB$. Pelo axioma de congruência, segue-se que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$. Isto implica que $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

Figura 7 – $\triangle ABC$ é um triângulo isósceles de lados $AB \equiv AC$



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

$\square$

Proposição 2. *Se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.*

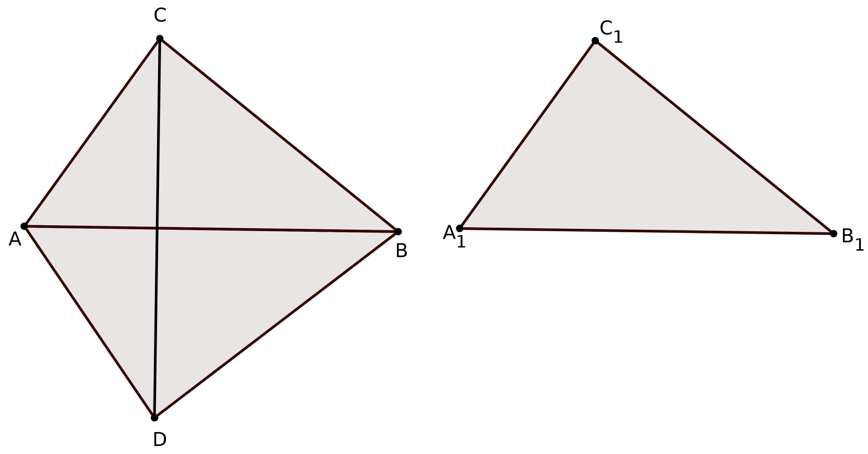
Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo, com $\hat{B} = \hat{C}$. Queremos provar que $AB \equiv AC$. Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$, isto é, associemos a A, B e C, respectivamente, A, C e B. Como $\hat{B} \equiv \hat{C}$, $\hat{C} \equiv \hat{B}$ e $BC \equiv CB$, segue-se, pelo Teorema 1 (caso ALA) que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$. Disso decorre, em particular, que $AB \equiv AC$. $\square$

Das proposições anteriores, concluímos que um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos da base são congruentes.

Teorema 2 (caso LLL)**.** *Dois triângulos são congruentes se possuem os lados correspondentes congruentes.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ dois triângulos tais que $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$ e $BC \equiv B_1C_1$. Considere o semiplano determinado pela reta AB e que não contém o ponto C. Nesse semiplano, considere o ângulo de vértice A, congruente ao ângulo $\hat{A}_1$ e tendo por um dos lados a semirreta de origem em A, passando por B. No outro lado desse ângulo, considere o ponto D de tal modo que $AD \equiv A_1C_1$. Como $AB \equiv A_1B_1$, $AD \equiv A_1C_1$ e $D\hat{A}B \equiv \hat{A}_1$, segue-se pelo Axioma de Congruência que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A_1B_1C_1$ são congruentes.

Figura 8 – Caso LLL



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Como $AD \equiv A_1C_1 \equiv AC$ e $BD \equiv B_1C_1 \equiv BC$, seque que os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ são isósceles, deste modo, resulta que

$$A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C \;\text{ e }\; B\hat{C}D \equiv B\hat{D}C.$$

Logo, $A\hat{C}B \equiv A\hat{D}B$. Pelo Axioma de Congruência segue-se que os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ACB$ são congruentes. Portanto, por transitividade, segue-se a congruência entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$. □

Teorema 3 (Caso LAA)**.** *Se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ são tais que*

$$AB \equiv A_1B_1, \;\; \hat{A} \equiv \hat{A}_1 \;\; e \;\; \hat{B} \equiv \hat{B}_1,$$

então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Se nesses triângulos tivermos $AC \equiv A_1C_1$, então, pelo Primeiro Critério de Congruência de Triângulos, os dois triângulos são congruentes.

Se nesses triângulos tivermos $\overline{AC} \neq \overline{A_1C_1}$, então ou $\overline{AC} > \overline{A_1C_1}$ ou $\overline{AC} < \overline{A_1C_1}$. Vamos supor que ocorra $AC > A_1C_1$. Isto é, acrescentemos isto como hipótese.

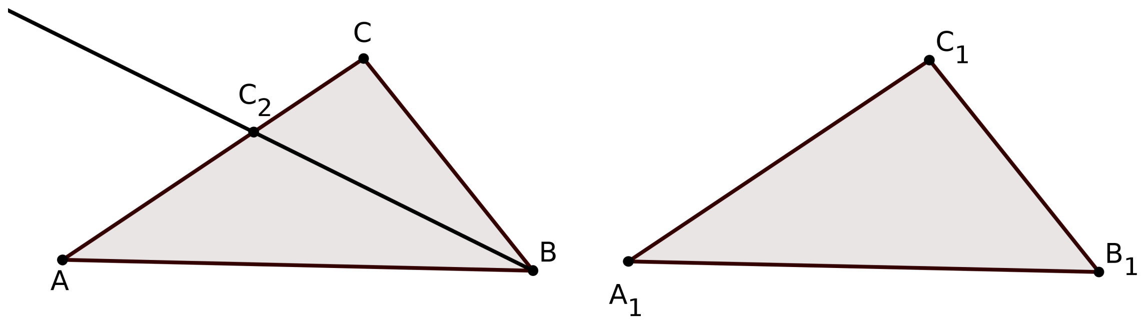
Podemos construir na semirreta AC um segmento AC_2 de mesmo comprimento que A_1C_1. O ponto C_2 está entre os pontos A e C. Pelo Axioma de Congruência, os triângulos $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle ABC_2$ são congruentes, uma vez que, as hipótese e a construção fornecem-nos as relações

$$A_1B_1 \equiv AB, \quad A_1C_1 \equiv AC_2 \quad \text{e} \quad \hat{A}_1 \equiv \hat{A}.$$

Deste modo, os ângulos $A_1\hat{B}_1C_1$ e $A\hat{B}C_2$ são congruentes. Pela hipótese do teorema, os ângulos $A_1\hat{B}_1C_1$ e $A\hat{B}C$ são congruentes.

A semirreta BC_2 passa entre as semirretas BA e BC, pois corta o segmento AC. Assim, o ângulo $A\hat{B}C_2$ é menor que o ângulo $A\hat{B}C$, ou seja, o ângulo $A\hat{B}C_2$ é *menor que* o ângulo $A_1\hat{B}_1C_1$, mas isto contradiz a congruência estabelecida para esses ângulos.

Figura 9 – Caso LAA



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

□

Isometrias do plano

Nesta seção, usaremos livremente a linguagem de conjuntos e suas relações de pertinência para nos referirmos aos objetos do plano euclidiano. Se F e F_1 são duas figuras no plano, isto é, dois conjuntos de pontos do plano, diremos que existe uma aplicação de F em F_1 se a cada ponto de F corresponder um e somente um ponto de F_1. Escrevemos

$$\Phi : F \to F_1.$$

Se a aplicação Φ for *bijetora*, isto é, se cada ponto de F_1 estiver associado a um ponto de F, diremos que F e F_1 se correspondem de modo biunívoco, ou que Φ é uma correspondência biunívoca ou ainda que Φ aplica F sobre F_1 (e F_1 sobre F) de modo biunívoco.

Definição 4. Dados dois pontos A e B no plano, a *distância* entre A e B é definida como o comprimento do segmento AB, no caso em que $A \neq B$ e como *zero* no caso em que $A = B$.

Usaremos aqui a notação $\overline{AB}$ para indicar o comprimento do segmento AB.

Teorema 4 (Desigualdade Triangular)**.** *Se A, B e C são três pontos, não necessariamente distintos, então*

$$\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}.$$

No caso em que os três pontos são dois a dois distintos, a igualdade ocorre somente se os três pontos estão na mesma reta e o ponto C estiver entre os pontos A e B.

Definição 5. Uma *isometria* do plano é uma aplicação bijetora Φ do plano no plano que *preserva distâncias*, ou seja, para quaisquer pontos A e B do plano, tem-se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

onde $A' = \Phi(A)$ e $B' = \Phi(B)$.

Em alguns textos as isometrias do plano também são chamadas de *movimentos rígidos no plano.*

Proposição 3. *Toda isometria Φ transforma retas em retas, semirretas em semirretas e segmentos em segmentos.*

Demonstração. Será suficiente observar que se os pontos A, B e C estiverem em uma mesma reta, então $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$ e $C' = \Phi(C)$ também estarão em uma reta. Sem perda de generalidade, podemos supor que B está entre A e C. Assim,

$$\overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}.$$

Portanto, $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$ e $C' = \Phi(C)$ estão em uma mesma reta e B' está entre A' e C'. $\square$

Teorema 5. *Se Φ e Θ são isometrias do plano, então a aplicação Γ definida por*

$$\Gamma = \Phi \circ \Theta,$$

também é uma isometria do plano. Ou seja, a composição de duas isometrias é também uma isometria.

Teorema 6. *Se Φ for uma isometria do plano, então a aplicação inversa Φ^{-1} também é uma isometria.*

Observação 6. Se $F' = \Phi(F)$ e $F'' = \Theta(F)$, então $F'' = (\Theta \circ \Phi^{-1})(F')$ e $F' = (\Phi \circ \Theta^{-1})(F'')$. Claramente a aplicação identidade, Id, que é aquela que aplica cada ponto do plano em si mesmo é uma isometria. Isto justifica a seguinte definição.

Definição 7. Seja Φ uma isometria do plano. Se F for uma figura qualquer e $F' = \Phi(F)$ for sua imagem por Φ, então diremos que F e F' são *congruentes*. Usaremos a notação

$$F \equiv F'$$

Observação 8. Neste trabalho, para evitar complicações desnecessárias, tomaremos a congruência de triângulos no sentido da Definição 2 e faremos a hipótese que a bijeção lá existente pode ser estendida a uma isometria no sentido da Definição 7.

Teorema 7. *Toda isometria preserva ângulos.*

Demonstração. Sejam AB e AC duas semirretas que partem de um mesmo ponto comum A e que não estejam na mesma reta. Suponhamos que a semirreta AB seja levada na semirreta $A'B'$ e que a semirreta AC seja levada na semirreta $A'C'$. Ora, pelo caso LLL os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, portanto $\hat{A} = \hat{A}'$ ou seja,

$$B\hat{A}C \equiv B'\hat{A}'C'.$$

□

Corolário 8. *Toda isometria transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Teorema 9. *Se uma isometria possuir três pontos fixos não colineares então essa isometria é a identidade.*

Demonstração. Sejam A, B e C pontos não colineares e Φ uma isometria do plano. Suponha que $A = \Phi(A)$, $B = \Phi(B)$ e $C = \Phi(C)$. A imagem da reta AB é a reta a própria reta AB, além disso, se X for um ponto na reta AB e se $X' = \Phi(X)$, então como $\overline{AX} = \overline{AX'}$ e $\overline{BX} = \overline{BX'}$ segue-se que A e B seriam ponto médio do segmento XX', caso esses dois pontos, X e X', fossem distintos. Porém, neste caso deveríamos ter $A = B$. Portanto $X = X' = \Phi(X)$. Com isso mostramos que se uma isometria deixa fixos dois pontos, U e V, então todos os pontos da reta UV são fixos da isometria. Tomemos agora um ponto X qualquer do plano. Sem perda de generalidade podemos supor que X não pertença a qualquer das retas AB e AC. É fácil construir por X uma reta que intersecta as retas AB em U e AC em V, pelo que foi demonstrado acima, todos os pontos da reta UV são mantidos fixos por Φ, portanto $\Phi(X) = X$. □

Corolário 10. *Se duas isometrias coincidem em três pontos não colineares, então elas coincidem em todos os pontos.*

Exemplos de isometrias

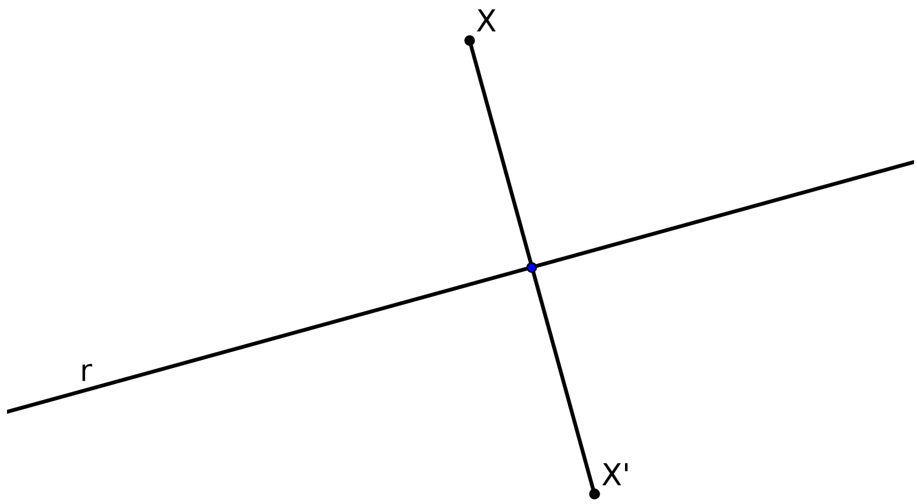
Nesta seção construiremos as isometrias do plano.

Reflexão em torno de uma reta

Seja r uma reta. Para cada ponto X do plano, vamos construir sua imagem $\Phi_r(X) = X'$ do seguinte modo:

- Se $X \in r$ então $\Phi_r(X) = X$.
- Se $X \notin r$ então X' está no outro semiplano definido por r e no qual X não está, a reta XX' é perpendicular a r e, se A for o ponto de interseção dessas duas retas, $\overline{XA} = \overline{X'A}$.

Figura 10 – Reflexão em torno de uma reta



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

A aplicação assim definida chama-se *Simetria*, ou *Reflexão*, em torno da reta r. O ponto $\Phi_r(X)$ é chamado o simétrico do ponto X em relação a reta r. É claro que

$$\Phi_r(\Phi_r(X)) = X \text{ para cada } X.$$

Teorema 11. *A reflexão em relação a uma reta é uma isometria.*

Demonstração. Sejam r uma dada reta e Φ_r a reflexão em relação a r. Sejam X e Y dois pontos quaisquer e sejam $X' = \Phi(X)$ e $Y' = \Phi(Y)$. Devemos mostrar que

$$\overline{XY} = \overline{X'Y'}.$$

Vamos separar em casos.

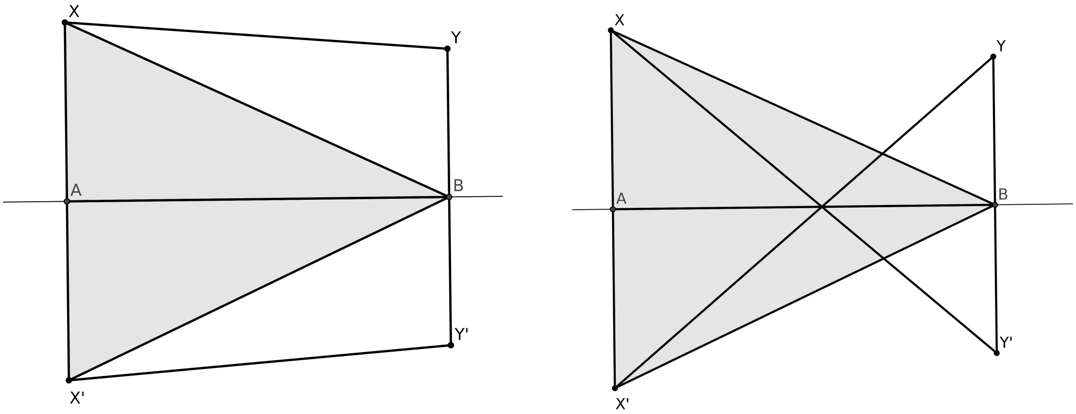
- Se X e Y estão em r, então $X' = X$ e $Y' = Y$, portanto,

$$\overline{XY} = \overline{X'Y'}.$$

- Suponha que X e Y estão em uma mesma perpendicular, s, a r. Seja A o ponto de interseção entre s e r. Sem perda de generalidade, podemos supor que uma das duas situações ocorra:
  - $\overline{X'Y'} = \overline{X'A} + \overline{AY'}$ ou
  - $\overline{X'Y'} = \overline{X'A} - \overline{AY'}$

  em qualquer das duas situações, como $\overline{X'A} = \overline{XA}$ e $\overline{AY'} = \overline{AY}$ segue-se que
  $$\overline{XY} = \overline{X'Y'}.$$

- Suponha que X e Y não estejam nem em r nem em uma reta perpendicular a r. Seja A ponto de interseção da reta XX' com r e B ponto de interseção da reta YY' com r.



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Os triângulos $\triangle ABX$ e $\triangle ABX'$ são retângulos em A, AB é comum e $\overline{AX} = \overline{AX'}$, logo, são congruentes. Assim, $\overline{XB} = \overline{X'B}$ e $X\hat{B}A = X'\hat{B}A$. Considere os triângulos $\triangle XYB$ e $\triangle X'Y'B$. Tem-se $\overline{XB} = \overline{X'B}$, $\overline{YB} = \overline{Y'B}$ e $Y\hat{B}X = Y'\hat{B}X'$. Logo, os dois triângulos são congruentes, isto acarreta que $XY = X'Y'$. $\square$

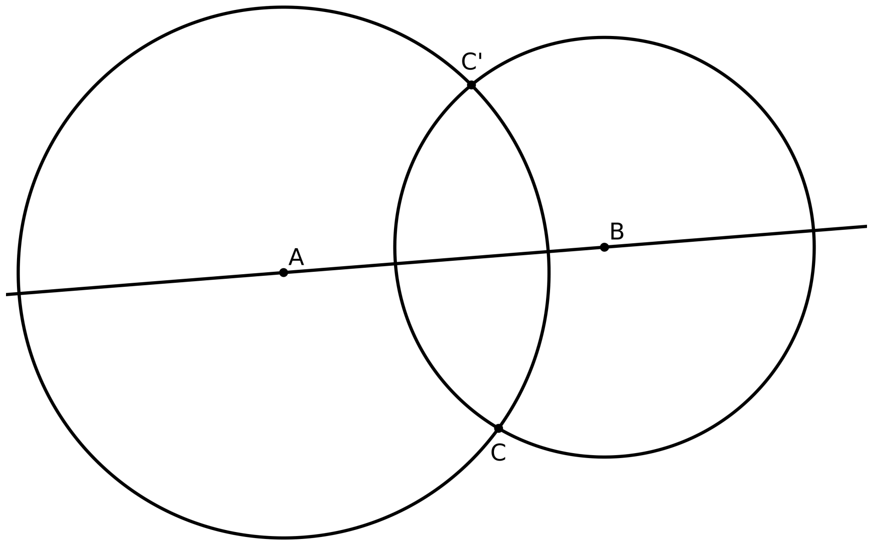
Definição 9. Uma figura F é dita *simétrica* em relação à reta r se a imagem de F pela reflexão em relação a r coincide com F. Diz-se também que r é *eixo de simetria* de F.

Teorema 12. *Se uma isometria possui dois pontos fixos distintos, então ou é a aplicação identidade ou é a reflexão em torno da reta que contém esses dois pontos.*

Demonstração. Sejam Φ uma isometria e $A \neq B$ pontos fixos de Φ, isto é,

$$\Phi(A) = A, \;\; \Phi(B) = B.$$

De acordo com o que foi demonstrado no Teorema 9, Φ deixa fixos todos os pontos da reta AB. Seja C um ponto não pertencente à reta AB. Se $\Phi(C) = C$ então, pelo Teorema 9 a aplicação Φ seria a identidade. Suponha então que $C' = \Phi(C) \neq C$.



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Como $AC = AC'$ e $BC = BC'$ a reta AB é mediatriz do segmento CC', deste modo as isometrias Φ e a reflexão em torno da reta AB coincidem em pelo menos três pontos não colineares e, de acordo com o Corolário 10, elas coincidem em todos os pontos. $\square$

Corolário 13. *Sejam Φ e Ψ isometrias e $A \neq B$ pontos tais $\Phi(A) = \Psi(A)$ e $\Phi(B) = \Psi(B)$. Então $\Phi = \Psi$ ou $\Phi = \Psi \circ \Phi_{AB}$ onde Φ_{AB} é a reflexão em torno da reta AB.*

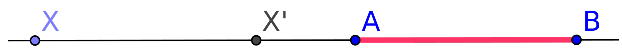
Demonstração. Considere a aplicação $\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$. Então $\Theta(A) = A$ e $\Theta(B) = B$, logo, pelo Teorema 12, Θ é a aplicação identidade ou é a aplicação Φ_{AB}. $\square$

Translação paralela

Definição 10. Uma translação paralela é uma transformação do plano no plano sob a qual os pontos se deslocam a uma mesma distância, segundo retas paralelas.

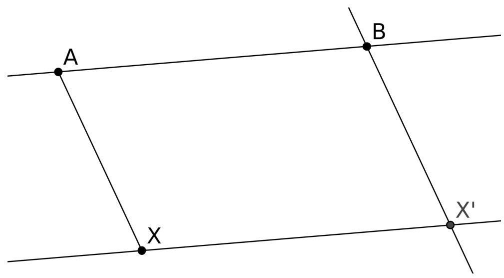
Dados dois pontos A e B, consideremos o segmento AB. Definiremos a translação paralela, Φ_{AB}, segundo a reta AB do seguinte modo:

- $\Phi_{AB}(A) = B$ e se $X \neq A$ pertence à reta AB então $X' = \Phi_{AB}(X)$ é o ponto da reta AB tal que $\overline{XX'} = \overline{AB}$. Existem duas possibilidades para o ponto X'. Escolheremos aquela que satisfaz a condição de que o sentido de percurso de X para X' é o mesmo de A para B.



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

- Seja X um ponto qualquer fora da reta AB. Neste caso, tomaremos para $X' = \Phi_{AB}(X)$ o quarto vértice do paralelogramo que tem os segmentos AB e AX como lados.



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Observe que qualquer que seja a posição de X no plano, sua imagem $X' = \Phi_{AB}(X)$ fica determinada pelo fato de que os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio. Observamos também que $\Phi_{AB}^{-1} = \Phi_{BA}$.

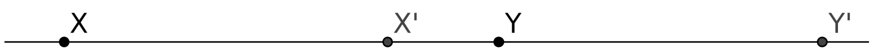
Teorema 14. *Toda translação é uma isometria.*

Demonstração. Fixemos os pontos A e B e consideremos a translação definida pelo segmento AB.

Sejam X e Y dois pontos quaisquer e $X' = \Phi_{AB}(X)$ e $Y' = \Phi_{AB}(Y)$. Devemos mostrar que $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$. Vamos separar em dois casos:

Caso 1: os pontos X e Y ou estão sobre a reta AB ou estão em uma paralela a AB. Recordemos que $\overline{AB} = \overline{XX'} = \overline{YY'}$.

Figura 11 – Caso 1 a

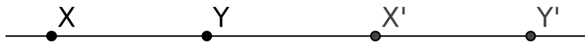


Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Conforme a figura acima teremos,

$$\overline{XY} = \overline{XX'} + \overline{X'Y} = \overline{XX'} + \overline{X'Y'} - \overline{YY'} = \overline{X'Y'}.$$

Figura 12 – Caso 1 b

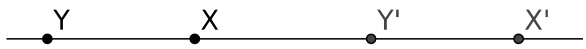


Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Conforme a figura acima teremos,

$$\overline{XY} = \overline{XX'} - \overline{X'Y} = \overline{XX'} + \overline{X'Y'} - \overline{YY'} = \overline{X'Y'}.$$

Figura 13 – Caso 1 c



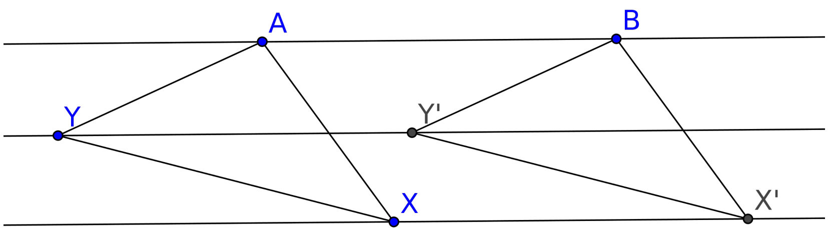
Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Conforme a figura acima teremos,

$$\overline{XY} = \overline{YY'} - \overline{XY'} = \overline{YY'} + \overline{X'Y'} - \overline{XX'} = \overline{X'Y'}.$$

Caso 2: os pontos X e Y não estão sobre a reta AB nem em uma paralela a AB. Recordemos que $\overline{AB} = \overline{XX'} = \overline{YY'}$.

Figura 14 – Caso 2



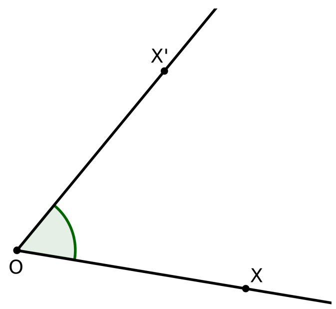
Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Os quadriláteros convexos $ABX'X$ e $ABYY'$ são paralelogramos, assim os lados YY' e XX' do quadrilátero convexo $YY'X'X$ são paralelos e congruentes, portanto, o quadrilátero convexo $YY'X'X$ é um paralelogramo o que implica em $XY \equiv X'Y'$. $\square$

Rotação

Definição 11. Dados um ângulo θ e um ponto O; chama-se rotação de ângulo θ em torno do ponto O a transformação pela qual o ponto O permanece fixo e toda semirreta que tem origem em O gira de um ângulo θ, isto é, sua imagem forma um ângulo θ com a semirreta inicial.

Figura 15 – Rotação de um ângulo θ



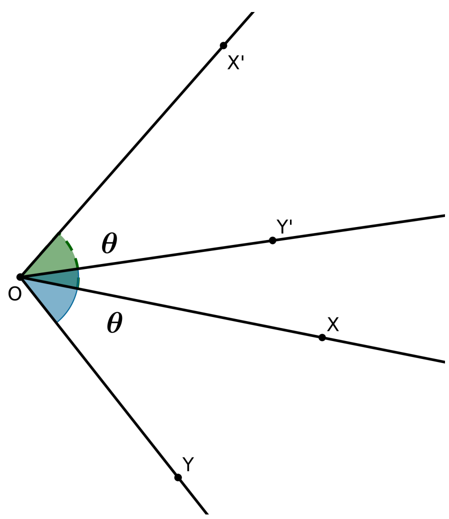
Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Observe que se $\Phi_{O,\theta}$ representar a rotação de um ângulo θ em torno do ponto O, então, pela definição, $\Phi_{O,\theta}(O) = O$ e, para cada $X \neq O$, $X' = \Phi_{O,\theta}(X)$ é o ponto do plano tal que

$$\overline{OX'} = \overline{OX}, \quad X\hat{O}X' = \theta.$$

Teorema 15. *A rotação de um ângulo θ em torno do ponto O é uma isometria.*

Figura 16 – Rotação de um ângulo θ



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Demonstração. Observe que os triângulos $\triangle OXY$ e $\triangle OX'Y'$ são congruentes pelo critério LAL. De fato, $OX \equiv OX'$, $X\hat{O}Y \equiv X'\hat{O}Y'$ e $OY \equiv OY'$. Portanto, $XY \equiv X'Y'$. □

Teorema 16. *Se uma isometria possuir um único ponto fixo, então esta isometria é uma rotação.*

Demonstração. Seja Φ uma isometria e suponha que $O = \Phi(O)$ seja seu único ponto fixo. Sejam $A \neq O$ e $A' = \Phi(A)$. Seja Ψ a rotação de ângulo $\theta = A\hat{O}A'$ em torno de O. Então

$$\Phi(O) = \Psi(O), \ \text{ e } \ \Phi(A) = \Psi(A).$$

Pelo Corolário 13, teremos $\Phi = \Psi$ ou $\Phi = \Psi \circ R_{OA}$ onde R_{OA} é a reflexão em torno da reta OA. Mas a aplicação $\Psi \circ R_{OA}$ deixa todos os pontos da bissetriz do ângulo $A\hat{O}A'$ fixos. Portanto, $\Phi = \Psi$. □

Teorema 17. *Existem apenas três tipos de isometrias do plano: translação, rotação e reflexão, além da aplicação identidade ou composição das aplicações anteriores.*

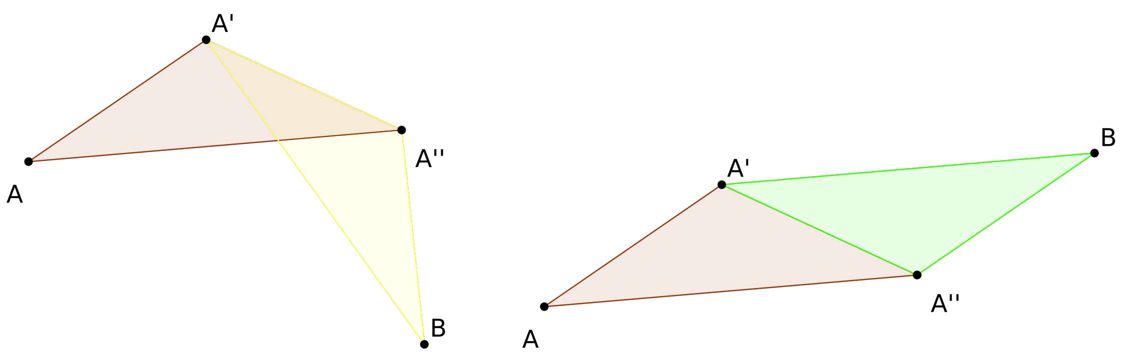
Demonstração. Seja Φ uma isometria diferente da aplicação identidade. Assim, existe um ponto A tal que $A' = \Phi(A) \neq A$. Seja $A'' = \Phi(A')$. Temos, assim, que $\overline{A'A''} = \overline{AA'} > 0$, logo os pontos A, A' e A'' são dois a dois distintos. Consideremos os três seguintes casos.

Caso 1: A, A' e A'' são não-colineares. Neste caso, a imagem do triângulo $\triangle AA'A''$ pela isometria Φ é um triângulo $\triangle A'A''B$. Como os lados deste triângulo têm medidas congruentes às dos lados do triângulo $\triangle AA'A''$, existem duas possíveis posições para o vértice B, conforme ele e o ponto A estejam ou não no mesmo semiplano determinado pela reta $A'A''$. Existem duas possíveis posições para o vértice B:

1. B e A estão no mesmo semiplano definido pela reta $A'A''$;

2. B e A estão em semiplanos distintos relativamente à reta $A'A''$;

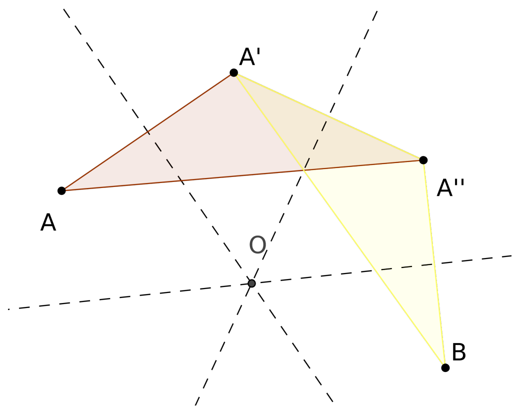
Figura 17 – A, A' e A'' são não-colineares



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

No primeiro caso, o ponto $B = \Phi(A'')$ forma com A, A' e A'' a poligonal convexa $AA'A''B$, na qual os lados têm a mesma medida e os ângulos $\hat{A}'$ e $\hat{A}''$ são congruentes (pelo Teorema 7), logo ela pode ser inscrita numa circunferência de raio $\overline{OA}$, cujo centro O é a interseção das mediatrizes dos segmentos AA', $A'A''$ e $A''B$.

Figura 18 – Determinação do centro da circunferência

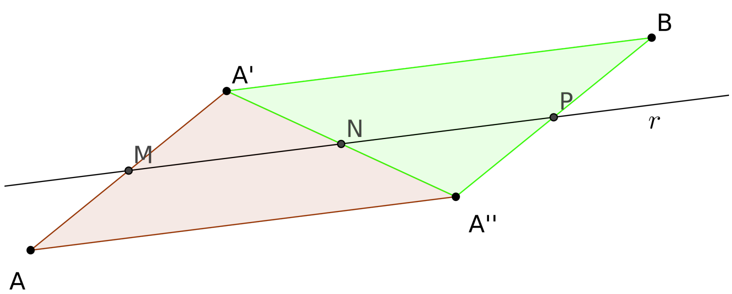


Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Seja $O' = \Phi(O)$. Como $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$, temos $\overline{O'A'} = \overline{O'A''} = \overline{O'B}$, logo O' pertence às mediatrizes dos segmentos $A'A''$ e $A''B$, portanto $O' \equiv O$, isto é, O é ponto fixo de Φ. Como Φ não é a identidade, somente poderia possuir mais um ponto fixo. Porém, se Φ possuísse um segundo ponto fixo, C, de acordo com o Teorema 12, Φ seria a reflexão em torno da reta OC, mas isso acarretaria que $A' = A''$. Portanto, Φ possui apenas um ponto fixo e, de acordo com o Teorema 16, Φ é uma rotação.

Na segunda hipótese, para o ponto B, temos um paralelogramo no qual AA' e $A''B$ são lados opostos e $A'A''$ é uma diagonal.

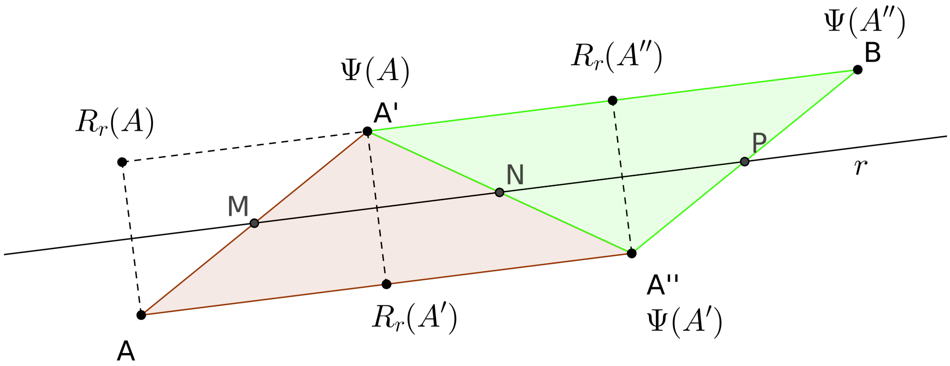
Figura 19 – Paralelogramo $AA'BA''$



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Disso decorre que os pontos médios M, N e P dos segmentos AA', $A''B$ e $A'A''$, respectivamente, estão sobre uma reta r. Considere a isometria $\Psi = T_{MN} \circ R_r$, composta da translação T_{MN} com a reflexão, R_r, em torno da reta r.

Figura 20 – Composição de isometrias



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Segue que Ψ e Φ coincidem nos três pontos não colineares A, A' e A'' . Portanto, pelo Corolário 10, tem-se $\Phi = \Psi$, ou seja, Φ é a composição de uma translação com uma rotação. $\square$

Semelhança

No dia-a-dia quando falamos de objetos e figuras semelhantes, temos a noção intuitiva que um é a ampliação ou redução do outro, ou seja, seus tamanhos são diferentes, mas seu formato e suas proporções são iguais.

No estudo tradicional da Geometria, principalmente nos livros didáticos, o conceito de semelhança, geralmente entre triângulos, é definido como aqueles que têm "ângulos iguais e lados homólogos proporcionais".

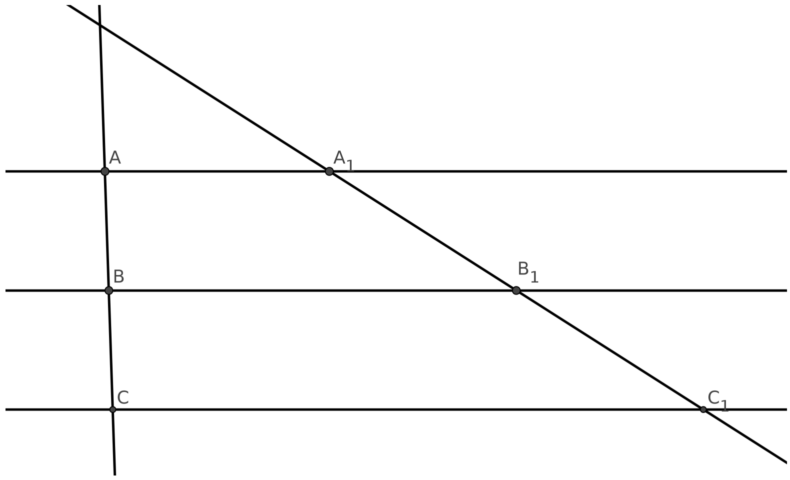
Entretanto, essa abordagem deixa escapar todos os casos em que existe semelhança e que muitas vezes fazem parte do nosso senso comum, fazendo parte no cotidiano dos alunos, como por exemplo: a foto de uma pessoa no celular, embalagens de produtos nos supermercados, bolas de diferentes esportes (futebol, vôlei, basquete, tênis, handebol) etc.

Nos exemplos acima, como em muitos outros, às vezes, fica inviável aplicarmos o conceito de semelhança presente nos livros didáticos. Isso acontece, porque em certas ocasiões não temos ângulos nem lados para comparar. Logo, acarreta a perda de uma grande oportunidade para que o professor extrapole os conhecimentos teóricos da matemática para situações do cotidiano.

Concordamos com o professor Elon Lajes Lima (LIMA, 1991) que a definição correta e geral de semelhança é extremamente simples e permite que se desenvolva toda a teoria elementarmente. Os livros didáticos ao adotá-la teriam um grande ganho, pois abarcariam todos os casos, como alguns citados anteriormente e não apenas os polígonos.

Semelhança de triângulos

Teorema 18. *Suponhamos que as retas paralelas r, s e t cortam as retas a e b, respectivamente nos pontos A, B e C e A_1, B_1 e C_1. Se o ponto B estiver entre A e C, então o ponto B_1 estará entre A_1 e C_1. Se AB é congruente a BC então A_1B_1 é congruente a B_1C_1.*



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Definição 12. Dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, satisfazem a relação S se existir uma correspondência biunívoca ν entre seus vértices de modo que

$$\nu : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\},$$

$$A \to A', \;\; B \to B', \;\; C \to C',$$

e valem as seguintes relações:

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', \;\; \hat{B} \equiv \hat{B}', \;\; \hat{C} \equiv \hat{C}',$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Lema 1. *Os números reais r e s são iguais se e somente se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ tivermos*

$$|r - s| \leq \frac{1}{n}.$$

Teorema 19. *Se nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tivermos $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então os triângulos satisfazem a relação* S.

Demonstração. Em primeiro lugar, como a soma dos ângulos em qualquer triângulo é 180^o, segue-se que $\hat{C} = \hat{C}'$. Vamos agora demonstrar a proporcionalidade entre os lados dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, isto é, devemos mostrar que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

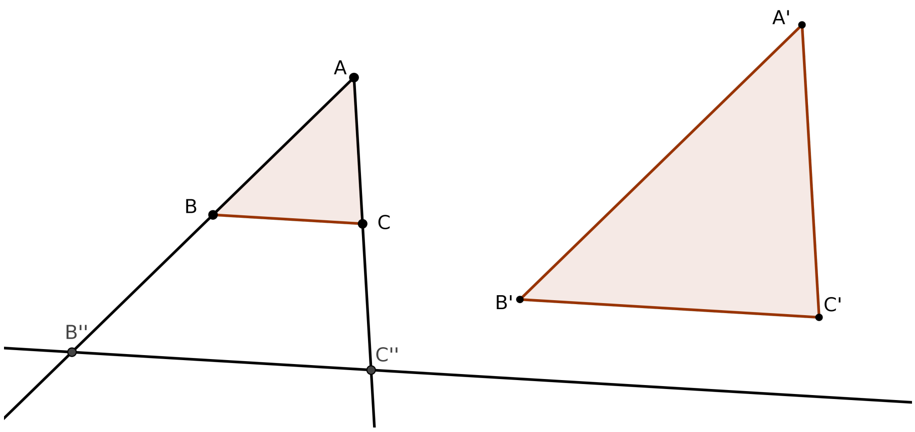
Suponhamos que

$$\overline{AB} \leq \overline{A'B'}. \tag{1}$$

Tomemos na semirreta AB o segmento AB'' congruente a $A'B'$ e tracemos por B'' uma paralela ao lado BC. Essa paralela tem o ponto C'' de interseção com a semirreta AC. Assim, as paralelas BC e $B''C''$ são cortadas pela secante AB'', portanto temos que

$$A\hat{B}C \equiv A\hat{B}''C''.$$

Figura 21 – Ilustração supondo $\overline{AB} < \overline{A'B'}$



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Assim os triângulos $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo critério ALA, pois, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B}'' \equiv \hat{B}'$ e $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$. Observe que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}.$$

Tomemos um segmento AP_1 na semirreta AB de tal modo que as duas razões $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}}$ e $\frac{\overline{AB''}}{\overline{AP_1}}$ não sejam inteiros. Consideremos na semirreta AB os pontos $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ de modo que

$$\overline{AP_k} = k \cdot \overline{AP_1}.$$

Seja n a parte inteira do quociente de $\overline{AB}$ por $\overline{AP_1}$ e seja m a parte inteira do quociente de $\overline{AB''}$ por $\overline{AP_1}$. O ponto B estará entre os pontos P_n e P_{n+1} e o ponto B'' estará entre os pontos P_m e P_{m+1}. Assim,

$$n \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1},$$

$$m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB''} < (m+1) \cdot \overline{AP_1}.$$

Dessas desigualdades resulta:

$$\frac{n}{m+1} < \frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} < \frac{n+1}{m}. \tag{2}$$

Tracemos pelos pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ retas paralelas a BC. Essas retas cortam a semirreta AC nos pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ sendo congruentes os segmentos $AQ_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{k-1}Q_k$. O ponto C se encontra entre os pontos Q_n e Q_{n+1} e o ponto C'' se encontra entre os pontos Q_m e Q_{m+1}. Desse modo,

$$n \cdot \overline{AQ_1} < \overline{AC} < (n+1) \cdot \overline{AQ_1},$$

$$m \cdot \overline{AQ_1} < \overline{AC''} < (m+1) \cdot \overline{AQ_1}.$$

Dessas desigualdades resulta:

$$\frac{n}{m+1} < \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} < \frac{n+1}{m}. \tag{3}$$

As desigualdades (2) e (3) permitem-nos observar que as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB''}}$ e $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$ diferem em no máximo $\dfrac{n+1}{m} - \dfrac{n}{m+1}$. Como estamos considerando que $\overline{AB} \leq \overline{A'B'}$, resulta que $n \leq m$. Assim,

$$\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{m+n+1}{m(m+1)} \leq \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m},$$

ou seja,

$$\left| \frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} \right| \leq \frac{2}{m}.$$

Tomando o segmento AP_1 suficientemente pequeno, podemos considerar m tão grande quanto se queira. Desse modo, de acordo com o Lema 1, podemos concluir que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$$

ou ainda que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

De modo análogo prova-se a outra igualdade, isto é,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

□

Teorema 20. *Se nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tivermos $\hat{A} = \hat{A}'$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

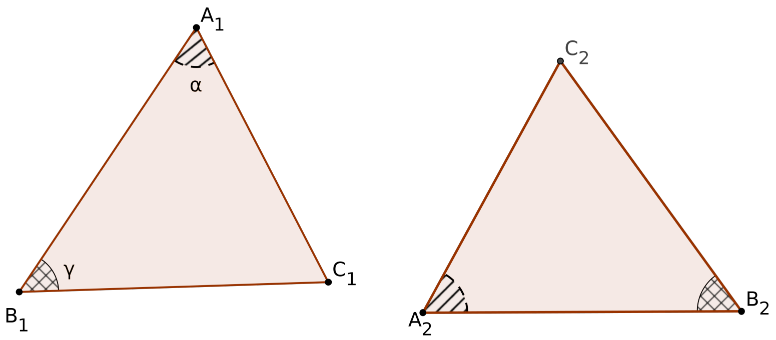
então os triângulos satisfazem a relação S.

Demonstração. Consideremos o triângulo $\triangle A''B''C''$, construído de tal modo que $A''B'' \equiv A'B'$, $\hat{A}'' = \hat{A}$ e $\hat{B}'' \equiv \hat{B}$. O triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A''B''C''$ satisfazem a relação S pelo Teorema 19. Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A''C''}}. \tag{4}$$

Como $A''B'' \equiv A'B'$ segue-se que $A''C'' \equiv A'C'$. Podemos então afirmar que os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A''B''C''$ são congruentes, posto que, por construção, $A'B' \equiv A''B''$, mostramos que $A''C'' \equiv A'C'$ e, como por hipótese, $\hat{A} = \hat{A}'$, segue-se do fato de que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A''B''C''$ satisfazem a relação S que $\hat{A}'' = \hat{A}'$.

Figura 22 – Relação S - Caso 2



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Assim, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ satisfazem a relação S. □

Teorema 21. *Se nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tivermos*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \tag{5}$$

então os triângulos satisfazem a relação S.

Demonstração. Construamos o triângulo $\triangle A''B''C''$, de tal modo que $A''B'' \equiv A'B'$, $A''C'' \equiv A'C'$ e $\hat{A}'' = \hat{A}$. De acordo com o Teorema 20, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A''B''C''$ satisfazem a relação S. Portanto,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A''C''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}. \tag{6}$$

Como por construção, $A''C'' \equiv A'C'$ resulta das igualdades (5) e (6) que $B''C'' \equiv B'C'$. Pelo terceiro critério de congruência (ver Teorema 2 na página 42), os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A''B''C''$ satisfazem a relação S. Assim, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ satisfazem a relação S. $\square$

O conceito geral de semelhança

Definição 13. Uma *transformação de semelhança* é qualquer aplicação, ϕ, bijetora do plano sobre si mesmo satisfazendo: existe um número real positivo, r, tal que se X, Y são pontos quaisquer e $X' = \phi(X)$, $Y' = \phi(Y)$ então

$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}.$$

O número r é chamado *coeficiente de semelhança*, ou *razão de semelhança*.

Observação 14. Toda *isometria* é uma aplicação de semelhança de razão 1.

Exemplo 1. *Consideremos dois segmentos AB e CD, de tal modo que $\overline{CD} = r\overline{AB}$, para algum número real $r > 0$, definimos uma aplicação $\phi : AB \to CD$ que associa a cada ponto X do segmento AB o ponto X' de CD tal que*

$$\overline{CX'} = r\overline{AX}$$

Então ϕ é uma semelhança.

Para de fato provar que ϕ é uma semelhança, sejam $X, Y \in AB$. Se X está entre A e Y então, pela própria definição de ϕ, o ponto X' está entre C e Y'. Assim,

$$\overline{X'Y'} = \overline{CY'} - \overline{CX'} = r\overline{AY} - r\overline{AX} = r\left(\overline{AY} - \overline{AX}\right) = r\overline{XY}.$$

O caso que Y está entre A e X é análogo ao anterior. Portanto, os segmentos AB e CD são semelhantes.

Exemplo 2. *Dadas duas semirretas AB e CD quaisquer, a aplicação $\phi : AB \to CD$ que associa a cada ponto X em AB o ponto $X' = \phi(X)$ em CD tal que, para algum $r > 0$,*

$$\overline{CX'} = r\overline{AX}$$

é uma aplicação de semelhança.

De fato, a prova de que ϕ é uma semelhança se faz como no Exemplo anterior. Analogamente se prova que duas retas quaisquer são semelhantes.

Proposição 4. *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração. Sejam ϕ uma semelhança de razão r e três pontos A, B, C de tal forma que C pertença ao segmento AB. Mostraremos que C' pertence ao segmento $A'B'$. Com efeito temos que, $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, logo

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = r\overline{AC} + r\overline{CB} = r\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) = r\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

provando que C' pertence ao segmento $A'B'$. □

Corolário 22. *Toda transformação de semelhança aplica retas em retas, segmentos em segmentos e semirretas em semirretas.*

Teorema 23. *A composição de duas aplicações de semelhança é uma aplicação de semelhança. A inversa de uma aplicação de semelhança de razão $r > 0$ é uma aplicação de semelhança de razão $\frac{1}{r}$.*

Teorema 24. *Toda aplicação de semelhança preserva os ângulos entre semirretas.*

Demonstração. Considere as semirretas OA e OB e o ângulo $A\hat{O}B$ e a aplicação de semelhança ϕ de razão $r > 0$. Sejam $O' = \phi(O)$, $A' = \phi(A)$ e $B' = \phi(B)$ e considere os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle A'O'B'$. Temos que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = r.$$

Pelo Teorema 21, segue-se que esses dois triângulos também possuem os ângulos congruentes; isto implica que

$$A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B'.$$

□

Homotetias

Seja π um plano e fixemos um ponto arbitrário O. Seja r um número real positivo.

Definição 15. Uma homotetia de centro O e razão r é a função $\phi : \pi \to \pi$ definida do seguinte modo: $\phi(O) = O$ e, para todo $X \neq O$, $\phi(X) = X'$ é o ponto da semirreta OX, tal que $\overline{OX'} = r \cdot \overline{OX}$.

Observação 16. Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma.

Temos ainda que toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão *1/r*.

Exemplo 3. *Uma homotetia (de razão $r > 1$) se obtém considerando o centro O como foco de um projetor de slides. F' é a imagem ampliada do slide F, que você vê sobre a tela.*

Teorema 25. *Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.*

Demonstração. Seja ϕ uma homotetia de centro O e razão r. Note que o caso $r = 1$ é trivial, pois ϕ é a identidade. Suponhamos então $r \neq 1$ e considere dois pontos quaisquer X, Y. Se X, Y e O são colineares então, da definição de homotetia, tem-se $X'Y' = r \cdot \overline{XY}$. Suponha então que X, Y e O não sejam colineares. Então X', Y' e O não são colineares. Agora os triângulos $\triangle OXY$ e $\triangle OX'Y'$ são tais que

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OX'}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OY'}} = r$$

e

$$X\hat{O}Y \equiv X'\hat{O}Y'$$

pelo Teorema 20 resulta que

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = r.$$

Além disso, pelo Teorema 20 resulta que

$$O\hat{X}Y \equiv O\hat{X}'Y', \qquad O\hat{Y}X \equiv O\hat{Y}'X'$$

o que mostra que os segmentos XY e $X'Y'$ são paralelos. Como queríamos demostrar. □

Definição 17. Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um *número real positivo*. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, se existir uma correspondência biunívoca $\phi : F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', satisfazendo:

- Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = \phi(X)$, $Y' = \phi(Y)$ são seus correspondentes em F' então
$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}.$$

A correspondência biunívoca $\phi : F \to F'$ chama-se uma *semelhança de razão r entre* F e F'. Se $X' = \phi(X)$, diz-se que os pontos X e X' *são homólogos*. Quando F for semelhante a F', escreveremos $F \sim F'$.

Observação 18. Toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $\phi : F \to F'$ é uma semelhança de razão 1.

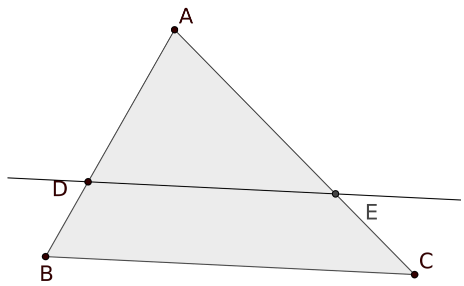
Também, se F é semelhante a F', então F' é semelhante a F pois, dada uma semelhança $\phi : F \to F'$ de razão r, a função inversa $\phi^{-1} : F' \to F$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$.

Finalmente tem-se a transitividade: se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F'' então F é semelhante a F''. Com efeito, se $\phi : F \to F'$ e $\phi' : F' \to F''$ são semelhanças, de razões r e s respectivamente, então a função composta $\phi' \circ \phi : F \to F''$ é uma semelhança de razão rs. Isso mostra que a definição geral de é uma relação de equivalência.

Proposição 5 (Teorema de Tales)**.** *Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.*

Demonstração. Tome o triângulo $\triangle ABC$ e considere uma reta paralela ao lado BC, interceptando os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente.

Figura 23 – Teorema de Tales



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Queremos provar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes. De fato, considere a homotetia ϕ de centro A e razão $r = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. Temos que ϕ transforma D em B e E num ponto C' sobre a semirreta AC. A imagem de DE por ϕ é o segmento BC' paralelo a DE. Então, C' pertence às retas BC e AC, isto é, $C' \equiv C$. Portanto, $\phi(A) = A$, $\phi(D) = B$ e $\phi(E) = C$, ou seja, ϕ é uma semelhança entre os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$. Em particular, podemos concluir

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 19. Dados um ponto O do plano e a um número real positivo, o *disco* de centro O e raio a é o conjunto de todos os pontos P do plano tais que $\overline{OP} \leq a$.

Definição 20. Diz-se que um ponto X está no *interior* de uma figura F quando é centro de algum disco inteiramente contido em F.

Definição 21. Diz-se que um ponto X pertence ao *contorno* de uma figura F quando X pertence a F mas não é interior a F.

Proposição 6. *Uma semelhança $\phi : F \to F'$ de razão r transforma:*

(a) *Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'.*

(b) *Um disco de raio a contido em F num disco de raio $r.a$ contido em F'.*

(c) *Pontos interiores a F em pontos interiores a F'.*

(d) *Pontos do contorno de F em pontos do contorno de F'.*

(e) *Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).*

Demonstração. **(a)** Dado um segmento AB contido em F e um ponto $C \in AB$, o ponto C' pertence ao segmento $A'B'$ em razão da proposição 4 anterior. Reciprocamente, dado um ponto C' em $A'B'$, tem-se $C' = \phi(C)$, onde $C = \phi^{-1}(C')$. Como ϕ^{-1} é uma semelhança, vem da proposição 4 que o ponto C pertence ao segmento AB. Portanto, ϕ leva uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos AB e $A'B'$.

(b) O círculo de centro O e raio a, contido em F, é a reunião dos segmentos de reta OX tais que $\overline{OX} = a$. Sua imagem por ϕ é a reunião dos segmentos $O'X'$, com $O' = \phi(O)$, tais que $\overline{O'X'} = r.a$, portanto é o círculo de centro O' e raio ra.

(c) Seu homólogo $X' = \phi(X)$ é, pelo item **(b)**, o centro de um círculo de raio ra, contido em F'. Portanto, X' é ponto interior de F'.

(d) Neste caso o ponto $X' = \phi(X)$ deve pertencer ao contorno de F' pois, se X' estivesse no interior de F', então, em virtude do item **(c)**, $X = \phi^{-1}(X')$ também estaria no interior de F.

(e) Suponhamos que F e F' sejam polígonos e que X seja um vértice de F. Em particular, X está no contorno de F e, pelo item **(d)**, seu homólogo $X' = \phi(X)$ está no contorno de F'. Se X não fosse vértice, X' pertenceria ao lado $A'B'$ de F', sendo diferente de $A' = \phi(A)$ e de $B' = \phi(B)$. Mas isso implicaria que X pertenceria ao lado AB de F, com $X \neq A$ e $X \neq B$, logo X não seria vértice de F.

□

Proposição 7. *Num triângulo $\triangle ABC$, considere um ponto D sobre o lado AB e um ponto E sobre o lado AC tais que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Então, DE é paralelo ao lado BC.

Demonstração. Considere a homotetia ϕ de centro A e razão

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Como $B = \phi(D)$ e $C = \phi(E)$, segue do Teorema 25 que DE e BC são paralelos. □

Semelhança de triângulos

Mostraremos agora que a definição geral de semelhança, quando aplicada a triângulos, reduz-se à definição tradicional.

Teorema 26. *Dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições abaixo então eles são semelhantes:*

a) *Têm lados proporcionais.*

b) *Têm ângulos iguais.*

c) *Têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.*

Demonstração. Seja $\phi : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$ uma semelhança de razão r entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, com $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$ e $C' = \phi(C)$. Então, pela definição de semelhança,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r$$

ou seja, os triângulos têm os lados correspondentes proporcionais. Pelo Teorema 21, os triângulos satisfazem a relação S (ver pág. 56).

a) Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos e $r > 0$, tais que

$$\overline{A'B'} = r\overline{AB}, \quad \overline{A'C'} = r\overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{B'C'} = r\overline{BC}.$$

A homotetia de centro A e razão r transforma o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo $\triangle AB''C''$, cujos lados medem

$$\overline{AB''} = r\overline{AB}, \qquad \overline{AC''} = r\overline{AC} \qquad \text{e} \qquad \overline{B''C''} = r\overline{BC}.$$

Os triângulos $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes porque têm os lados correspondentes de mesmo comprimento (Teorema 2). Como $\triangle AB''C''$ é semelhante a $\triangle ABC$, segue (veja o Teorema 5, a Observação 14 e o Teorema 23) que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

b) Sejam agora dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tais que

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', \qquad \hat{B} \equiv \hat{B}' \qquad \text{e} \qquad \hat{C} \equiv \hat{C}'.$$

Pelo Teorema 19, os dois triângulos satisfazem a relação S, ou seja,

$$\overline{A'B'} = r\overline{AB}, \quad \overline{A'C'} = r\overline{AC} \quad \text{e} \qquad \overline{B'C'} = r\overline{BC}.$$

Podemos então utilizar o item **a)** para concluir que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

c) Por fim, suponha que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ cumpram

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', \qquad \overline{A'B'} = r\overline{AB} \qquad \text{e} \qquad \overline{A'C'} = r\overline{AC}.$$

Pelo Teorema 20 os dois triângulos satisfazem a relação S e, portanto, $\hat{B} = \hat{B}'$. Pelo item **b)** resulta que os dois triângulos são semelhantes.

□

Podemos então enunciar, novamente, resultados anteriores (Teorema 19, Teorema 20 e Teorema 21) na forma

Corolário 27. *Se nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tivermos $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então os triângulos são semelhantes.*

Corolário 28. *Se nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tivermos $\hat{A} = \hat{A}'$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

então os triângulos são semelhantes.

Corolário 29. *Se nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tivermos*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \tag{7}$$

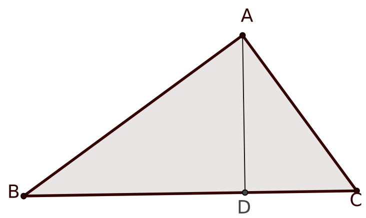
então os triângulos são semelhantes.

Um resultado importante que cabe mencionar é o

Teorema 30 (Teorema de Pitágoras). *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração. Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto no vértice A, trace a altura AD relativa o lado BC.

Figura 24 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Pelo Teorema 26, os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ e $\triangle BDA$ são semelhantes. Da semelhança de $\triangle ADC$ e $\triangle BAC$, temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

e da semelhança entre $\triangle BDA$ e $\triangle BAC$, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Assim,

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD},$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}.$$

Portanto,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\left(\overline{BD} + \overline{CD}\right) = \overline{BC}^2,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Proposta de Atividades

Inicialmente iremos propor atividades prontas no **GeoGebra** para que, a partir daí, por meio da manipulação dos objetos matemáticos, sejam respondidas questões relativas às atividades. O objetivo é despertar nos alunos e até mesmo nos professores a necessidade de uma justificativa formal dos resultados obtidos experimentalmente na manipulação do software. Provavelmente, ao longo do processo, muitas conjecturas serão propostas e, depois de um certo tempo, umas se mostrarão verdadeiras e outras falsas. Mas afinal, como podermos afirmar que tais conjecturas ou observações são sempre verdadeiras ou falsas? É aí, que presumimos que surja a necessidade de uma demonstração lógico-formal para tais fatos por parte dos envolvidos. Sabemos que geralmente os resultados, teoremas em matemática, são repassados aos nossos alunos como prontos e acabados, portanto a proposta é que os alunos participem dessa construção e desenvolvam argumentos plausíveis para justificar suas observações e se familiarizem com os termos e notações características de uma linguagem matemática universal.

Tal proposta está em consonância com nossos estudos sobre a Teoria das Situações Didáticas, pois o que deve ser modelado é o meio e as relações entre o aluno, o professor e o saber. Se o meio produz respostas com certa regularidade, o sujeito associa essas informações às suas decisões, levando-os a antever suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. O conhecimento então permite mudar e produzir passos futuros, logo a aprendizagem passa a ser o processo em que os conhecimentos vão se modificando frente aos problemas propostos. A intenção é que o aluno torne-se sujeito ativo em todo o processo. Cada atividade proposta, será acompanhada de seu *Protocolo de Construção*(no Anexo B). A finalidade é que, após a manipulação das atividades prontas, o próprio aluno/professor realize as construções no *GeoGebra*. Julgamos que essas construções permitirão uma assimilação das propriedades dos objetos matemáticos e a familiarização com as notações e, paulatinamente, a autonomia para novas construções, diminuindo as intervenções. Portanto, no primeiro instante, as atividades são disponibilizadas prontas e, no segundo momento, de posse dos Protocolos de Construção, elas devem ser construídas.

Sobre o GeoGebra

Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, na Áustria e nos Estados Unidos da América, o *GeoGebra* é um **software livre**, [2] de matemática dinâmica, desenvolvido

[2] De acordo com a definição de **software livre**expressa em <https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.html>

para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O *GeoGebra* reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o *GeoGebra* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o *GeoGebra* é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas em processadores de texto como o *LibreOffice* ou o LaTeX. Atualmente, o *GeoGebra* é aprimorado pelo seu idealizador, assim como outros colaboradores e programadores pelo mundo todo. É de distribuição livre e pode ser adquirido pela internet através do site oficial do programa: <http://www.geogebra.org>.

A escolha desse programa se deve ao fato de que todas as salas do *Acessa Escola* (Sala de Informática) das escolas estaduais do *Estado de São Paulo* possuírem tal programa instalado em seus computadores. Outros pontos importantes são: a facilidade de sua interface, pois os comandos básicos são apresentados em linguagem simples e de fácil entendimento e o fato de se tratar de um software livre que os alunos podem baixar em seus computadores pessoais, bem como em seus *tablets* e *smartphones*. Sua estrutura é dividida em cinco partes:

1. **Barra de Comandos**, onde são encontradas todas as ferramentas de geometria dinâmica deste programa.

2. **Janela de Álgebra**, onde aparecem as informações algébricas de todas as construções.

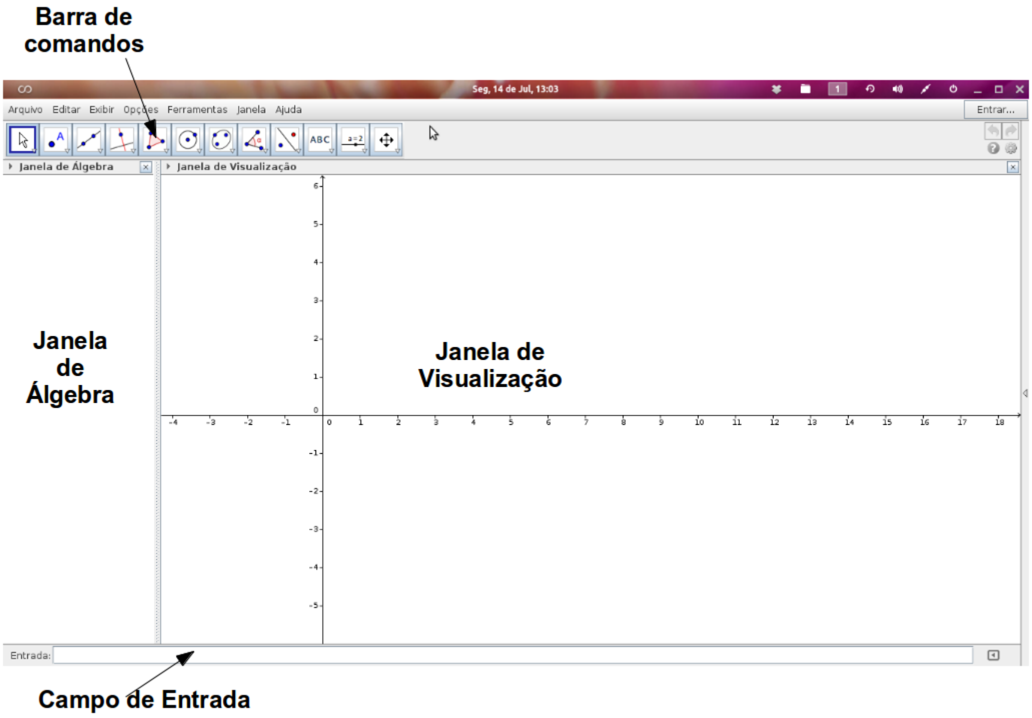
3. **Janela de Visualização**, onde é apresentada a construção geométrica.

4. **Planilha**, onde os dados podem ser inseridos em forma de tabelas.

5. **Campo de Entrada**, onde se pode entrar com comandos algébricos para que sejam feitas as devidas construções geométricas.

A versão utilizada na elaboração desse trabalho foi a 5.0.19.0-3D. Para que o programa funcione, é necessário ter instalado no computador o aplicativo *Java*®, que é gratuito.

Figura 25 – Tela do GeoGebra no Ambiente **Gnome**



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Atividades

Neste capítulo, o objetivo é propor atividades que levem os alunos/professores a conjecturarem alguns casos de congruência de triângulos e alguns dos principais resultados da geometria plana. Ao final, de maneira empírica, espera-se que eles sejam capazes de realizar afirmações acerca dos resultados obtidos.

Comentários e expectativas de aprendizagem para as Atividades 1 e 2

Definimos no terceiro capítulo que dois triângulos são chamados de congruentes se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Dessa maneira, teríamos que verificar seis condições para dizer se um triângulo ABC é congruente a algum triângulo XYZ. Porém, para verificar a congruência de triângulos, basta utilizar os critérios de congruência e verificar três condições específicas para que possamos garantir a congruência. Naquele momento, para facilitar as demonstrações, admitimos o caso LAL como axioma e a partir dele obtemos os demais resultados.

Na sequência, serão propostas duas atividades, uma abordando o caso LAL e a outra o caso ALA. Espera-se que alunos/professores percebam que, quando dois triângulos satisfazem determinadas condições, eles são congruentes, mesmo estando em posições diferentes. Isso evita a necessidade de se verificar a congruência dos três pares de lados correspondentes e dos três pares de ângulos correspondentes.

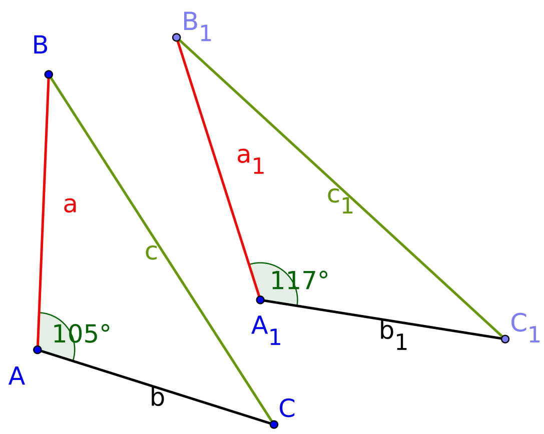
Especificamente quanto a atividade **Explorando** LAL, a expectativa é que o professor/aluno perceba que o comprimento do terceiro par de lados correspondentes (BC e B_1C_1) está diretamente relacionado com o ângulo de "abertura" dos dois pares de lados congruentes ($AB = A_1B_1$ e $AC = A_1C_1$). É possível observar que, se a "abertura" do ângulo entre os lados AB e AC for menor que a "abertura" do ângulo entre os lados A_1B_1 e A_1C_1, o comprimento BC sempre será menor que o comprimentoB_1C_1 ou vice-versa. Deve se ao final perceber que a igualdade de todos os lados e ângulos dos triângulos só será possível, se os dois ângulos de "abertura" forem congruentes.

Já quanto a atividade **Explorando** ALA, a expectativa é que o professor/aluno perceba que a medida dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}_1$ são congruentes, independentemente do comprimento dos demais lados dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ e que, quanto o lado AC for maior que o lado A_1C_1, maior será o triângulo $\triangle ABC$ em relação ao triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ ou vice-versa. Deve se ao final perceber que a igualdade de todos os lados e ângulos dos triângulos só será possível, quando o comprimento dos lados AC e A_1C_1 forem iguais.

Em ambos os casos, o intuito é que professor/aluno seja capaz de realizar conjecturas acerca dos resultados obtidos, por exemplo, deduza que no caso da atividade LAL, que quando dois triângulos possuem dois pares de lados congruentes e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, que os triângulos são congruentes, evitando assim a obrigatoriedade de verificar a congruência dos demais elementos dos triângulos. Por fim, o objetivo é suscitar a necessidade de buscar argumentos convincentes, ou até mesmo demonstrações para justificar os resultados. Inicialmente esses argumentos serão orais e se utilizarão na lógica e a partir das observações realizadas no ambiente informatizado, caberá ao professor sistematizar e demonstrar os resultados observados.

Atividade 01 - Congruência de triângulos (caso LAL)

Figura 26 – Explorando LAL



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

São dados os segmentos AB, AC, A_1B_1 e A_1C_1, de modo que $AB = A_1B_1$ e $AC = A_1C_1$. Mova os pontos de modo que os ângulos α e β tenham o mesmo valor.

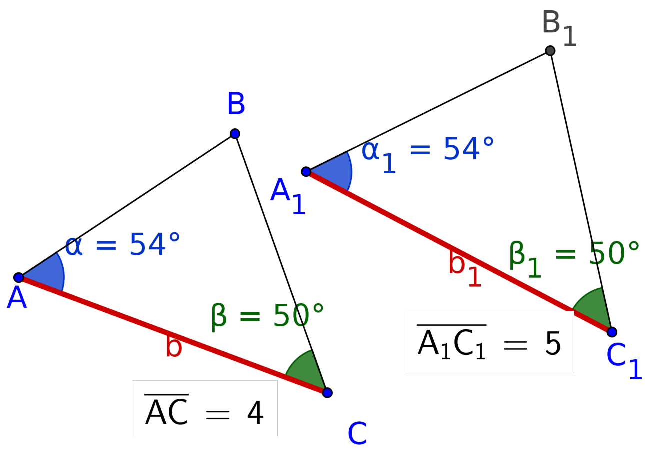
1) O que ocorre com o comprimento dos segmentos BC e B_1C_1 ? Isto é, qual a relação que se estabelece entre eles?

2) Considerando os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nas condições acima de igualdade entre os ângulos α e β o que ocorre com as medidas dos outros ângulos correspondentes?

3) Se $\alpha < \beta$, qual a relação entre BC e B_1C_1?

Atividade 02 - Congruência de triângulos (caso ALA)

Figura 27 – Caso ALA



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

São dados os ângulos α, β, α_1 e β_1, de modo que $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$. Mova os pontos de modo que os segmentos AC e A_1C_1 tenham o mesmo comprimento.

1) O que ocorre com o valor dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A_1\hat{B}_1C_1$? Ou seja, qual a relação que se estabelece entre eles?

2) Considerando os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nas condições acima de igualdade entre os comprimentos AC e A_1C_1 o que ocorre com o comprimento dos outros lados correspondentes?

3) É possível fazer alguma afirmação quanto ao formato e ao tamanho dos triângulos ABC e $A_1B_1C_1$?

4) Se $AC < A_1C_1$ qual a relação entre os demais lados correspondentes?

Comentários e expectativas de aprendizagem para as Atividades 3, 4 e 5

Designa-se os ângulos internos de um triângulo $\triangle ABC$ qualquer por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. O suplemento de cada ângulo interno é chamado de *ângulo externo* do triângulo $\triangle ABC$.

A expectativa quanto a Atividade 3 é que o professor/aluno consiga estabelecer a relação de que $\gamma = \alpha + \beta$, ou seja, que a medida do ângulo externo de um vértice de um triângulo é a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Isso só será possível, após o professor/aluno testar várias posições para os vértices do triângulo ABC e uma observação atenta aos valores destacados. Uma pergunta natural que poderá surgir é: será que essa propriedade relativa ao ângulo externo ao vértice C vale para os demais vértices? Cabe ao professor motivar os alunos a buscarem resposta para essa pergunta.

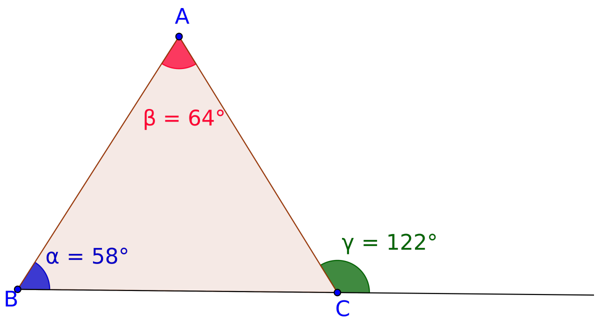
Durante a aplicação da atividade, pode ocorrer a necessidade de que o professor chame a atenção do aluno para observar a soma dos ângulos internos α e β com o ângulo externo γ. Após isso, a ideia é que o professor/aluno consiga determinar o ângulo suplementar do ângulo externo γ, ou seja, o terceiro ângulo interno do triângulo ABC, utilizando-se do simples fato de que o ângulo procurado é o suplemento de um ângulo de meia volta. Se for opção do professor, pode-se discutir qual a soma dos ângulos internos do triângulo ABC. Possivelmente, os alunos ficarão intrigados com essa relação, logo, cabe ao professor instigá-los a buscarem justificativas. Inicialmente, essa investigação com a orientação do professor pode ser realizada por meio de pesquisas em livros e/ou *internet*, ao final caberá ao professor sistematizar todas as conjecturas e justificativas trazidas pelo aluno.

A Atividade 4 trata-se uma versão dinâmica da atividade de recortes realizada pelos professores e citada no capítulo "Considerações sobre demonstrações em Matemática" (ver pág. 19). A grande vantagem, nesse caso, é a possibilidade de verificar o teorema para um grande número de casos com a simples mudança dos vértices do triângulo ABC. Espera-se que o professor/aluno associe os ângulos internos do triângulo ABC com o ângulo de meia volta formado em torno do ponto D, ao se mover o controle deslizante de 0 até 1. Deve-se notar que, independentemente da posição dos vértices, ou seja, de qualquer triângulo que possa ser formado, que o movimento dos ângulos internos do triângulo ABC em torno do ponto D sempre resultará em um ângulo de meia volta. Espera-se que o aluno fique convencido com essa atividade que, não importa o tamanho e/ou o formato do triângulo, pois sempre a junção (soma) dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre um ângulo raso (180^o).

Quanto a Atividade 5, espera-se que o professor/aluno reconheça a congruência dos ângulos alternos ao se mover livremente as retas paralelas e transversais através dos pontos A, B, C e D. É esperado que, a partir daí por meio dos ângulos suplementares e opostos pelo vértice (OPV), sejam determinados os demais ângulos. Por fim, a atividade tem como objetivo reforçar a validade do teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e estabelecer relação com a atividade anterior. Esta relação com a atividade anterior pode ajudar o aluno a verificar se cometeu algum erro na determinação dos ângulos.

Atividade 03 - Medida dos ângulos externos de triângulos

Figura 28 – Ângulos externos de triângulos



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

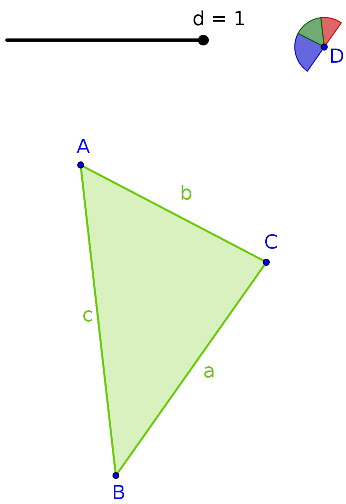
Seja ABC um triângulo qualquer. Dados os ângulos internos α, β e o ângulo externo γ, mova os vértices do triângulo ABC.

1) Qual é a relação entre α, β e γ?

2) É possível determinar o valor do ângulo $A\hat{C}B$? Como?

Atividade 04 - Soma dos ângulos internos de um triângulo

Figura 29 – Ângulos internos de triângulos



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

Seja um triângulo ABC qualquer e os seus ângulos internos $B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$, $A\hat{C}B$ e um ponto D fora do triângulo ABC, mova o controle deslizante d.

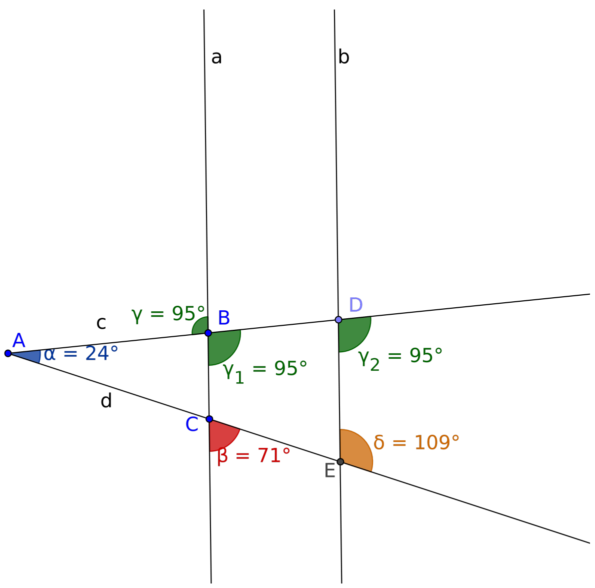
1) O que aconteceu com os ângulos internos do triângulo e com aqueles que estão em torno do ponto D?

2) Mova agora os vértices do triângulo ABC e o controle deslizante d. O que você observou?

3) É possível fazer alguma generalização em relação aos ângulos internos do triângulo ABC?

Atividade 05 - Ângulos correspondentes, alternos e colaterais

Figura 30 – Ângulos alternos



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

Dadas duas retas paralelas a e b, cortadas por duas semirretas transversais c e d, ficam determinados nove ângulos. Mova os pontos A, B, C e D.

1) Qual a relação entre os valores dos ângulos γ, γ_1 e γ_2?

2) Considerando que o ângulo $E\hat{C}B$ é suplementar ao ângulo β, é possível determiná-lo? Existe alguma relação com o ângulo δ? Se sim, ao mover os pontos essa relação se altera?

3) É possível de alguma maneira encontrar os valores dos ângulos que não estão indicados? Como?

4) Identifique os pares de ângulos congruentes.

5) Qual é a soma dos ângulos internos do triângulo ABC? E do triângulo ADE?

Comentários e expectativas de aprendizagem para as Atividades Translação (Atividade 6), Reflexão (Atividade 7) e Reflexão/Rotação (Atividade 8)

Definimos no capítulo 3 (ver pág. 44) que toda isometria do plano é uma aplicação que preserva distâncias, ou seja, produz objetos congruentes. Provamos que existem três tipos básicos de isometria:translação, reflexão, rotação Provamos também que todos os tipos de isometria no plano são composições desses três tipos básicos.

As expectativas quanto a Atividade Translação são de que o professor/aluno perceba que o movimento do polígono transladado está diretamente relacionado com o movimento do *vetor*[3] AB. Outra característica importante das translações que deve ser observada é que os segmentos de retas que unem os respectivos vértices C e C_1, D e D_1,...,G e G_1 são sempre paralelos ou coincidem. Ao final da atividade, não necessariamente com os termos matemáticos específicos, espera-se que o aluno relacione o movimento do polígono translado com o vetor AB e perceba que as coordenadas do polígono transladado tem o mesmo módulo, direção e sentido do vetor AB.

Espera-se que na Atividade Reflexão, o professor/aluno perceba que no caso de uma reflexão em relação a uma reta, essa reta também é a mediatriz dos segmentos de reta que unem os respectivos vértices. O professor/aluno ao associar esse fato às coordenadas cartesianas deve reconhecer que as coordenadas (x, y) dos vértices do triângulo ABC, ao ser refletida em relação ao eixo x, dão origem ao triângulo $A_1B_1C_1$ de coordenadas cartesianas $(x, -y)$. Analogamente, as coordenadas cartesianas de um triângulo refletido em relação ao eixo y serão $(-x, y)$. Dessa forma, o professor/aluno deve se atentar que o triângulo $A_2B_2C_2$ é a reflexão do triângulo $A_1B_1C_1$ em relação ao eixo y e relacionar suas coordenadas. Outra possibilidade é o professor/aluno perceber que a composição de duas reflexões: a primeira em relação ao eixo x e a segunda em relação ao eixo y, que levaram o triângulo ABC para a posição do triângulo $A_2B_2C_2$ no plano, ou ainda, que a reflexão em relação a origem levou diretamente um triângulo no outro e observar que as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo $A_2B_2C_2$ em relação ao triângulo ABC são $(-x, -y)$.

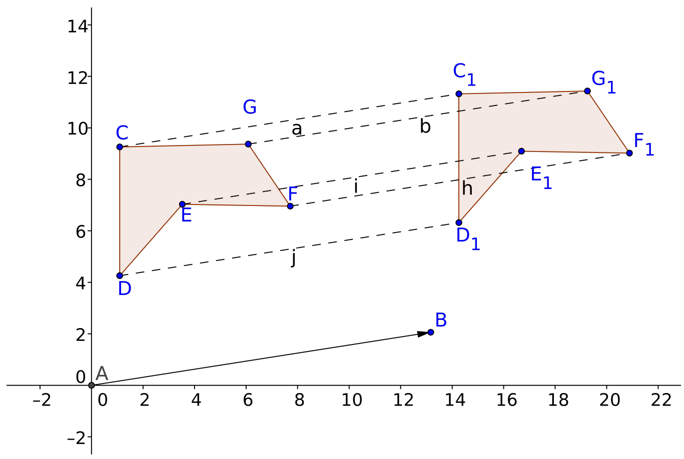
Na Atividade Reflexão/Rotação, o objetivo é que o professor/aluno perceba que a reta de reflexão a funciona como um espelho plano, ou seja, a imagem formada é invertida

[3] Embora seja um conteúdo do Ensino Médio não vemos problema em apresentar aqui também para o Ensino Fundamental a ideia de um segmento orientado cuja função é transladar objetos

em relação à imagem original e está à mesma distância da imagem original à reta de reflexão. Inicialmente, esse fato deve ser facilmente reconhecido ao observar as distâncias $\overline{BF}$ e $\overline{B_1F}$; posteriormente, essa observação deve ser extrapolada a toda a figura. Ao relacionar essa atividade com a anterior, é possível perceber que uma rotação de 180^o em torno do ponto B é equivalente a uma reflexão em relação ao ponto B e que uma rotação de 360^o leva as imagens em suas posições originais. Espera-se que nesse processo, o professor/aluno perceba que em qualquer ângulo de rotação as suas imagens estão refletidas em relação a reta a e preservam todas as propriedades ditas no início.

Atividade 06 - Translação

Figura 31 – Translação



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

São dados no plano: o polígono $CDEFG$, o polígono transladado $C_1D_1E_1F_1G_1$ e o vetor (seta) AB. Observe que cada vértice do polígono $CDEFG$ possui um segmento de reta, ligando ao vértice correspondente do polígono $C_1D_1E_1F_1G_1$. Mova o o vetor (seta) AB.

1) O que aconteceu com o polígono $C_1D_1E_1F_1G_1$?

2) É possível mover o vetor (seta) AB de tal forma que os polígonos coincidam? O que podemos concluir?

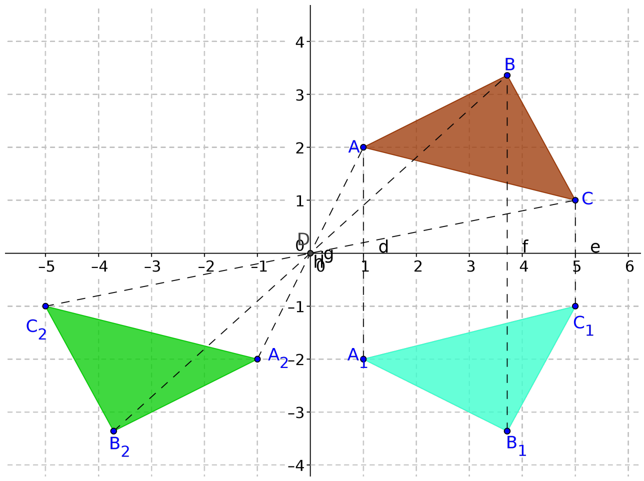
3) Mova os vértices do polígono $CDEFG$ e o vetor (seta) AB. O que podemos afirmar em relação aos segmentos de reta que unem os vértices correspondentes dos polígonos?

4) Mova o vetor (seta) AB sobre o eixo das abcissas (x) e sobre o eixo das ordenadas (y). Qual a relação entre os vértices dos polígonos e o vetor (seta) AB?

5) Comente sobre as principais características de uma translação que você observou.

Atividade 07 - Reflexão

Figura 32 – Explorando reflexão



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

São dados no plano três triângulos. O primeiro triângulo ABC foi refletido em torno do eixo x e deu origem ao triângulo $A_1B_1C_1$, posteriormente, o mesmo triângulo foi refletido em relação à origem, dando origem ao triângulo $A_2B_2C_2$. Sendo assim, mova o triângulo ABC e seus vértices de maneira que suas coordenadas (x, y) sejam inteiras.

1) Considerando a intersecção dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1 com o eixo x, o que podemos afirmar?

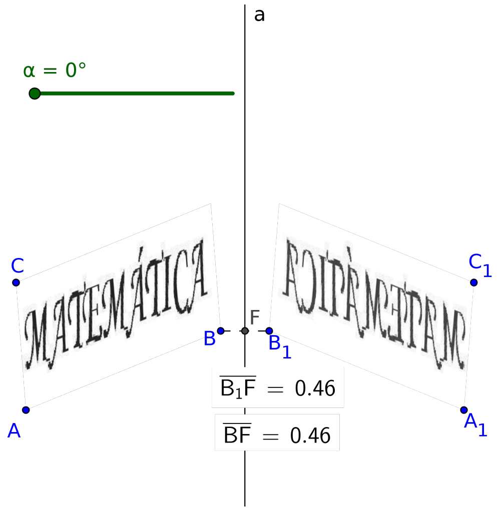
2) Qual a relação entre as coordenadas dos vértices do triângulo ABC com as do triângulo $A_1B_1C_1$?

3) As mesmas observações anteriores poder ser aplicadas em relação ao triângulo $A_2B_2C_2$? Quais as semelhanças e diferenças?

4) Considere os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$, e o eixo y. Podemos afirmar que um é a reflexão do outro em torno do eixo y? Qual a relação entre suas coordenadas cartesianas?

Atividade 08 - Reflexão/Rotação

Figura 33 – Explorando rotação



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as questões

A figura MATEMÁTICA sofreu uma reflexão em à relação a reta a. Simultaneamente, tanto a figura MATEMÁTICA quanto sua imagem refletida sofreram rotação em relação ao ponto B e B_1 respectivamente, a primeira no sentido anti-horário e a segunda no sentido horário. Inicialmente, com o controle deslizante em $\alpha = 0^o$, mova a figura MATEMÁTICA e os pontos A, B e C.

1) O que você observa? Cite algumas semelhanças e diferenças entre a figura original e a refletida.

2) Quanto as distâncias BF e B_1F, o que é possível observar? Isso se aplica aos demais pontos e figuras?

Agora, mova o controle deslizante α e a figura MATEMÁTICA.

3) Quando $\alpha = 180^o$, o que você observa? E quando $\alpha = 360^o$?

4) As imagens rotacionadas têm alguma relação com as observações realizadas na questão 1?

Comentários e expectativas de aprendizagem para as Atividades Homotetia (Atividade 9), Teorema de Pitágoras(Atividade 10) e Teorema de Tales (Atividade 11)

No capítulo 3, (ver pág. 60), foi apresentada uma definição geral para os casos de semelhanças. Essa definição tem a vantagem de permitir o desenvolvimento de toda a teoria não apenas para polígonos, mas também para todas as figuras contidas em um plano ou no espaço e que, muitas vezes, não têm lados homólogos para serem comparados.

Observamos que toda semelhança de razão 1 é uma isometria, posteriormente, definimos as homotetias. Vimos que a definição geral de semelhança quando aplicada a triângulos, resulta na definição tradicional presente nos livros didáticos. De posse das propriedades resultantes da semelhança entre triângulos, foi possível provar os milenares Teoremas de Tales e de Pitágoras.

De início, a expectativa para a Atividade Homotetia é que o professor/aluno perceba que o movimento do controle deslizante está diretamente relacionado aos fatores de ampliação e redução do quadrado $ABCD$ ao se obter o quadrado $A_1B_1C_1D_1$, isto é, suas medidas lineares são multiplicadas pela constante associada ao controle deslizante. Em seguida, ao explorar alguns valores para o controle deslizante e analisar as razões entre os seus lados e suas áreas, espera-se que o professor/aluno conclua que, enquanto a medida do lado do quadrado $A_1B_1C_1D_1$ duplicou em relação ao quadrado $ABCD$, sua área quadruplicou. Ou seja, a área do quadrado $A_1B_1C_1D_1$ é diretamente proporcional ao quadrado da razão entre os lados do quadrado $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$. No início, essa conclusão possivelmente não será imediata para a maioria dos alunos, portanto, quanto mais casos se verificar, inclusive com valores entre 0 e 1, mais o aluno perceberá essa relação. Provavelmente o professor/aluno, ao fazer o ponto E coincidir com o vértice A, terá mais clareza quanto à semelhança entre as figuras e isso facilitará as observações anteriores.

Quanto à Atividade Teorema de Pitágoras o objetivo é que o professor/aluno perceba que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo ABC é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo ABC. Se o professor achar necessário, pode solicitar aos alunos que utilizem uma calculadora para verificar a veracidade dos cálculos apontados, o professor deve chamar a atenção dos alunos quanto aos arredondamentos, pois, como sabemos, muitas vezes as medidas envolvidas são números irracionais e sua representação decimal com duas casas decimais é uma boa aproximação. Espera-se que o aluno consiga estabelecer a relação de que, para se calcular a área de um quadrado, elevamos a medida de seu lado ao quadrado. Tendo claro esse fato, o aluno deve enunciar corretamente o Teorema de Pitágoras, isto é, “em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados

dos comprimentos dos catetos". Um questionamento que poderá surgir e que será uma oportunidade para que o professor aprofunde o estudo de semelhanças entre figuras é: esse teorema se aplica somente a quadrados? E se fossem semicírculos? Será que ele válido para todas figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo?

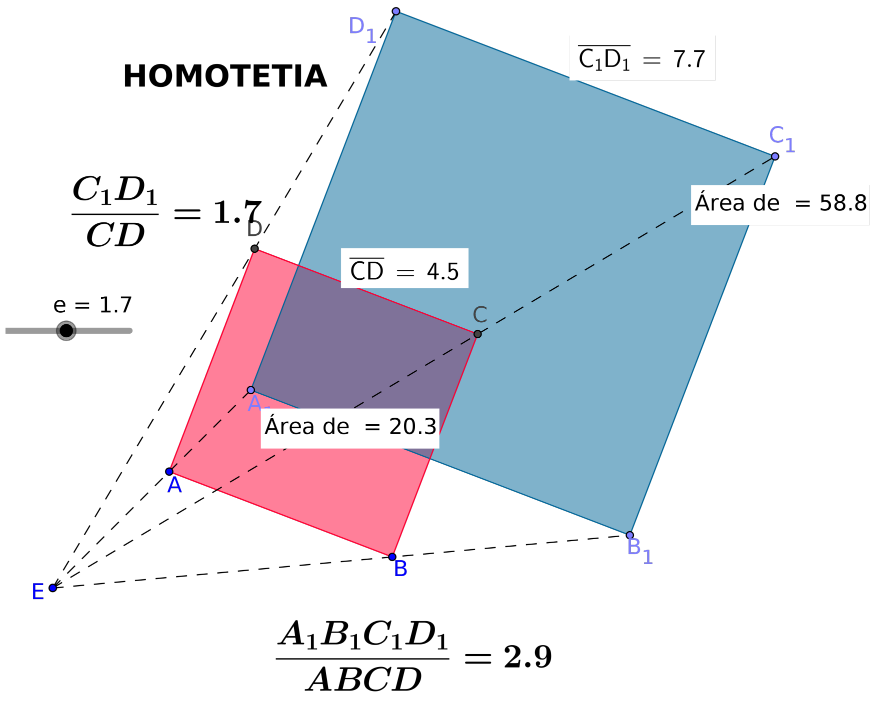
O Teorema de Pitágoras encanta a séculos gerações pela sua simplicidade, elegância e aplicabilidade, com certeza os alunos se interessaram em buscar uma justificativa formal para tal teorema. Há várias demonstrações geométricas para o Teorema de Pitágoras, estas apoiadas no *GeoGebra* podem enriquecer e facilitar o entendimento por parte dos alunos.

Na Atividade Teorema de Tales, a expectativa é que nas condições apresentadas ao se mover os pontos e as retas o professor/aluno observe que as razões entre os segmentos $\dfrac{AB}{BC}$ e $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$ são constantes independentemente da posição, ou seja, os segmentos mantêm uma proporcionalidade. Aqui também valem as observações anteriores quanto aos arredondamentos e o uso da calculadora. Usando o princípio de igualdade e de proporcionalidade, espera-se que os alunos sejam capazes de determinar o valor de um segmento, conhecidos os demais. Uma questão que pode surgir e/ou pode ser explorada pelo professor para ampliar o conhecimento do aluno é a determinação das razões entre os segmentos $\dfrac{AB}{A_1B_1}$ e $\dfrac{BC}{B_1C_1}$. Os alunos devem ser capazes de reconhecer a condição necessária e suficiente de que as retas a, b e c devem ser paralelas e cortadas por duas retas transversais para que valham as relações de proporcionalidade.

Demonstrações baseadas em aproximações para os segmentos incomensuráveis podem ser inviáveis neste nível de escolaridade, porém demonstrações que se utilizam dos conceitos de semelhança e áreas entre triângulos são perfeitamente possíveis e desejáveis.

Atividade 09 - Homotetia

Figura 34 – Explorando homotetia



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as Questões

São dados no plano o quadrado $ABCD$ e o ponto D. O quadrado sofre uma homotetia e dá origem ao quadrado $A_1B_1C_1D_1$. Observe que temos as razões entre seus lados e entre suas áreas. Dessa forma, mova o controle deslizante para $e = 2$, anote os valores das razões, repita o processo para $e = 3$.

1) É possível estabelecer alguma relação entre as razões? Qual?

2) Mova o controle deslizante para $e = 1$. O que aconteceu? Quais conclusões podemos tirar?

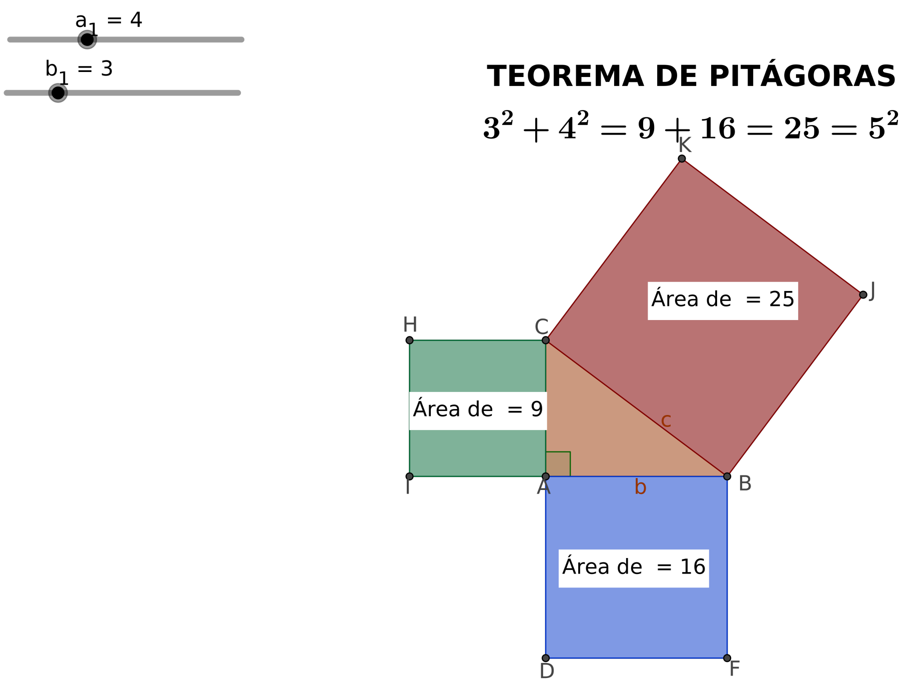
3) Mova o controle deslizante para $e = 0,5$. O que você observou? Qual a relação entre as áreas?

4) Mova o controle deslizante para $e = -1$. Quais são as semelhanças e diferenças com os casos anteriores?

5) Mova o ponto E de forma que coincida como ponto A, posteriormente movimente o controle deslizante. O que você observou? Valem as mesmas relações anteriores?

Atividade 10 - Teorema de Pitágoras

Figura 35 – Explorando homotetia



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as Questões

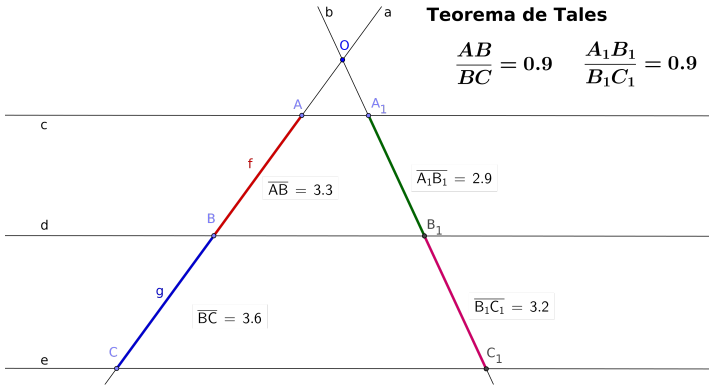
É dado no plano o triângulo retângulo ABC. Sobre os catetos e a hipotenusa são construídos quadrados com suas respectivas áreas. Com isso, mova os vértices do triângulo ABC e/ou o próprio triângulo ABC. (Obs. Os valores estão com arredondamento de 1 casa decimal)

1) O que você observa com relação a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa? É possível tirar alguma conclusão?

2) Com suas palavras, elabore uma afirmação que justifique os fatos observados.

Atividade 11 - Teorema de Tales

Figura 36 – Explorando homotetia



Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Roteiro com as Questões

Sejam três retas paralelas c, d e e, cortadas por duas retas transversais a e b. Note que ficam determinados os segmentos AB, BC, A_1B_1, B_1C_1 e as razões $\dfrac{AB}{BC}$ e $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Mova os pontos e as retas livremente.

1) O que você observa quanto as razões?

2) Se algum dos segmentos fosse desconhecido, como poderíamos determiná-lo?

3) Com suas palavras, elabore uma afirmação que justifique os fatos observados.

Relação com a avaliação de larga escala

A Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo estabeleceu, a partir do ano de 2008, através do documento MATRIZES DE REFERÊNCIA PARA A AVALIAÇÃO SARESP - Ensino Fundamental e Médio (SÃO PAULO, 2009), as habilidades a serem avaliadas no Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) na 6ª série/7º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental e na 3ª série do Ensino Médio nas disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Física, Química e Biologia. Particularmente quanto a disciplina de Matemática, são 38 habilidades avaliadas na 6ª série/7º ano, 45 habilidades avaliadas na 8ª série/9º ano e 38 habilidades avaliadas na 3ª série.

A seguir, após uma pesquisa neste documento, listamos as habilidades que julgamos relacionadas com as atividades propostas.

Tabela 1 – Relação entre atividades e habilidades

Atividades 1 e 2	8ª série/9º ano ➢ H24-Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.
Atividades 3, 4 e 5	6ª série/7º ano ➢ H26- Identificar a soma das medidas dos ângulos de um triângulo (180^o) e de um polígono de n lados (por decomposição em triângulos). ➢ H27- Resolver problemas que envolvam medidas de ângulos de triângulos e de polígonos em geral. 8ª série/9º ano ➢ H29- Resolver problemas que utilizam propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).
Atividades 6, 7 e 8	6ª série/7º ano ➢ H20-Identificar simetria axial e de rotação na leitura das representações dos objetos no dia a dia e das figuras geométricas. ➢ H24-Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não-retos. 8ª série/9º ano ➢ H28- Usar o plano cartesiano para representação de pares ordenados; coordenadas cartesianas e equações lineares.
Atividades 9, 10 e 11	8ª série/9º ano ➢ H21- Reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da congruência das medidas angulares e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes. ➢ H31-Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares. ➢ H35- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, em diferentes contextos. ➢ H36- Resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam as relações métricas dos triângulos retângulos. (Teorema de Pitágoras).

Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Entrevistas

Introdução

Geralmente as mudanças ocorridas na educação, sejam elas administrativas ou pedagógicas, demandam tempo, aceitação, estudo, apropriação e colaboração dos envolvidos. Dessa forma, acredito que todas as propostas de mudanças de metodologias e o uso de novas tecnologias devem atender a esses requisitos. O ideal seria que a proposta do uso de software de geometria dinâmica, tal como, o *GeoGebra* e as atividades por ora propostas, fizessem parte de cursos de formação continuada de professores de matemática e desenvolvidas com alunos em salas de aula, a fim de propiciar o aprimoramento de todo esse processo proposto. Infelizmente, este trabalho peca nesse aspecto, pela impossibilidade de haver tempo hábil e disponibilidade para tais propostas.

Para contornar e amenizar esse fato, propus a um grupo formado por quatro professores com aulas atribuídas na disciplina de matemática da Diretoria Regional de Ensino - Região de Birigui, que realizassem uma análise crítica das atividades, procurando oferecer-me sugestões, modificações, adequações, avaliassem a viabilidade de aplicação em sala de aula e a possibilidade de integrar o *software GeoGebra* no desenvolvimento do currículo oficial do Estado de São Paulo. Esse retorno, ficou acordado, que seria através de uma entrevista.

As questões norteadoras da entrevista (em anexo), além de abordarem as atividades, tinham como objetivo saber a visão do professor sobre o uso de novas tecnologias, sua formação, suas fontes de pesquisas para preparar suas aulas e sua percepção sobre o uso de *software* no ensino da matemática.

Na escolha dos professores, procuramos atender a diversidade encontrada nas escolas estaduais do Estado de São Paulo. O grupo foi formado por um professor graduando de um curso de licenciatura plena em Matemática, por um professor com mais de vinte anos de docência e larga experiência no uso de recursos tecnológicos em sala de aula e por dois professores, com uma média de dez anos de docência e certo domínio no uso das novas tecnologias, porém se o uso corriqueiro em sala de aula.

As reuniões com cada professor aconteceram individualmente. No primeiro contato, foram apresentadas as atividades, o *software GeoGebra*, os objetivos da pesquisa e o convite para a entrevista. Apesar de todos conhecerem o *software*, foi interessante perceber que, nenhum deles tinham o *software* instalado em seus computadores, *tablets* ou celulares. Por isso, inicialmente, utilizamos os computadores da escola e junto com os professores realizamos o *download* e a instalação do *software*. Todos comentaram que foi um processo simples e que os alunos não encontrariam grandes dificuldades. Após esse primeiro contato, ficou acordado que os professores teriam quinze dias para analisar as atividades e em seguida seria realizada a entrevista. Essas entrevistas foram gravadas em áudio e depois transcritas de modo a procedermos às leituras e interpretações do autor.

A seguir apresentamos um quadro descritivo com dados relevantes dos entrevistados.

Tabela 2 – Perfil dos professores entrevistados

	Entrevistado A	Entrevistado B	Entrevistado C	Entrevistado D
Sexo	Masculino	Feminino	Masculino	Masculino
Leciona em escola pública	Sim	Sim	Sim	Sim
Leciona em escola particular	Sim	Não	Não	Não
Disciplinas que leciona	Matemática, Recuperação e reforço	Matemática	Matemática	Matemática, Ciências e Física
Formação	Graduando Licenciatura Plena em Matemática	Licenciatura Plena em Matemática	Licenciatura Plena em Matemática	Licenciatura Plena em Matemática
Tempo de magistério	1 ano e 9 meses	7 anos	12 anos	20 anos

Fonte: Arquivo pessoal, 2014

Interpretações

Nas interpretações que se seguem, agrupei as respostas às entrevistas em torno de temas centrais.

Formação quanto ao uso de tecnologias em sala de aula

Os entrevistados C e D relataram que em sua formação inicial não receberam nenhuma formação quanto ao uso de tecnologia aplicada em sala de aula. Isso se deve ao fato de eles terem cursado a faculdade nas décadas de 90 e 80, respectivamente e, nessa época, as principais tecnologias que temos hoje ainda não existiam ou não tinham se popularizado. O entrevistado D, inclusive, disse que na sua graduação cursou datilografia, algo impensável para os dias de hoje. Já os entrevistados A e B cursaram (ou então cursando) a faculdade após o ano 2000 e já se percebe uma preocupação em propiciar uma formação inicial aos graduandos sobre o uso de tecnologia. O entrevistado A está cursando uma disciplina específica (Laboratório de Informática com a Educação Matemática) quanto ao uso de tecnologia em sua graduação e o entrevistado B não se lembra muito, mas diz ter cursado uma disciplina em que foi abordado o *software GeoGebra*.

Outro ponto interessante foi que todos os entrevistados citaram Cursos e Orientações Técnicas oferecidos pela Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo como atualização profissional, logo percebemos a importância da formação continuada ao longo da carreira, principalmente os oferecidos pela Secretaria de Educação. Deve-se destacar que todos são favoráveis a receberem formações para o uso de *software* em sala de aula e reconhecem a importância para o aprimoramento profissional.

Uso de tecnologia em sala de aula

Todos os entrevistados de uma maneira ou de outra dizem que fazem uso de tecnologia em sala de aula e a principal fonte é a *internet*. O entrevistado A citou o portal do Currículo+ como fonte de pesquisa para preparar as atividades. Tal portal é uma iniciativa da Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo, onde é possível encontrar *links* para vídeos, áudios, *software* e experimentos disponíveis gratuitamente na *internet*, com a análise de cada objeto de aprendizagem por parte de especialistas da SEE/SP. Outras fontes citadas pelos demais entrevistados são vídeos do Telecurso 2000, vídeos do *YouTube*, apresentações em *slides* criados a partir de pesquisas na *internet* e jogos *online*.

É importante destacar que, em outras épocas, a principal fonte de pesquisa dos professores eram os livros didáticos, porém, agora, quando o professor busca uma atividade diferenciada, recorre principalmente à *internet*. Mas essa busca deve ser feita com certo cuidado, pois nas palavras do entrevistado B, "apesar de termos um conhecimento (das novas tecnologias, grifo nosso) às vezes dá uma certa insegurança com o novo", logo o professor precisa se preparar para enfrentar as adversidades que possam surgir com o uso da tecnologia advindas da *internet* e ter a criticidade de selecionar atividades ou problemas que segundo a Teoria das Situações Didáticas permitam desenvolver nos alunos uma postura autônoma, não pode se esquecendo que cada turma tem suas particularidades e muitas situações precisam ser adaptadas a sua realidade.

Software e jogos para o ensino de Matemática

Todos os entrevistados citaram que conheciam ou já ouviram falar dos *software Cabri Géomètre* e *GeoGebra*, porém apenas o entrevistado A disse que utilizou o *software GeoGebra* em sala de aula, com apenas três alunos que eram atendimentos em projetos de Recuperação e Reforço. O entrevistado C disse que nunca trabalhou o *GeoGebra* em sala de aula devido às dificuldades de levar o aluno para a sala de informática. Outros software citados pelos entrevistados foram *Excel*, *Winplot* e *Graphmatica*.

O entrevistado D enfatiza que utiliza muitos jogos no computador e no celular, pois em suas palavras "eu acredito que principalmente as crianças aprendem de uma maneira lúdica, então eu vou abrindo *sites* e apresentando jogos (matemáticos); isso é uma forma divertida que faz com que a matemática se torne uma boa matemática e não fique uma coisa somente na repetição de cálculos, mas sim, na construção do conhecimento do aluno e o jogo faz parte dessa prática eu gosto muito de usar esses jogos". Destaca que em situações de jogos, os alunos se tornam sujeitos ativos e, se essas atividades forem bem conduzidas pelo professor, podem potencializar a aprendizagem dos alunos. Essa concepção vai ao encontro da Teoria das Situações Didáticas.

Ainda, em relação ao entrevistado D, o mesmo relata que anteriormente utilizava muito o *software Cabri Géomètre*, mas agora, após o contato com o *software GeoGebra* espera em breve utilizá-lo em sala de aula.

Análise das atividades propostas para o GeoGebra

Os entrevistados B, C e D afirmaram que as atividades disponibilizadas contemplavam o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, já o entrevistado A ficou em dúvida. Essa pode ser constatada pela fala: "tá bem paralelo sim". Talvez, essa afirmação se deva ao fato do entrevistado ter menos de dois anos de docência e ter conhecimento superficial do Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

O entrevistado B constatou que muitas atividades eram sobre conteúdos que ele estava trabalhando em sala de aula e que era uma forma muito mais prática e visual de mostrar as propriedades para os alunos (translação, reflexão).

Em relação à questão levantada anteriormente: Como fazer o aluno ser mais participativo nas aulas de Matemática, rompendo com aquela aula tradicional de definições e exercícios? Nesse ponto, todos os entrevistados são unânimes em afirmar que os alunos se interessariam por atividades a serem desenvolvidas no *GeoGebra*, ou seja, participariam mais ativamente das aulas. O entrevistado B destaca que a abordagem de conteúdos através do *GeoGebra* permite aos alunos entenderem propriedades que eles acham muito teórica; o entrevistado D complementa dizendo que os alunos teriam interesse, pois o uso de tecnologias como o *GeoGebra* afasta da sala de aula aquela ideia de quadro-negro e desperta no aluno o interesse para que eles mesmos descubram fatos novos.

Uma das propostas deste trabalho é a de que, após manusearem e responderem as questões referentes às atividades, os alunos realizem suas próprias construções no *GeoGebra* a partir dos **Protocolos de Construções**; essa ideia foi avaliada positivamente pelos entrevistados. A ressalva para o entrevistado C fica por conta da necessidade de integrar tais atividades e construções desde o 6º ano do ensino fundamental; essa inserção levaria à familiarização dos alunos com as ferramentas do *GeoGebra*.

O entrevistado B destaca que os alunos atuais são avançados em questões tecnológicas, pois nasceram imersos em tais tecnologias e têm dificuldades de concentração quando se deparam com aulas tradicionais que utilizam apenas giz e lousa, logo crê que, se forem apresentados aos alunos atividades mais simples, com crescente grau de complexidade, os ganhos pedagógicos seriam maiores e tanto professor quanto o aluno seriam beneficiados por essa iniciativa.

Por outro lado, temos que analisar todas as realidades, pois segundo o entrevistado A muitos alunos apresentam dificuldades em manusear e operar os recursos tecnológicos, isso demandaria por parte do professor uma preparação e apresentação do uso e das funções do computador e do *software*.

O entrevistado D frisa que, se o professor conseguir canalizar toda a curiosidade e conhecimento que os alunos demonstram, conduzindo-os a perceberem que o *software* é uma ferramenta capaz de construir vários conceitos, várias particularidades, possibilita a elaboração de hipóteses e conjecturas; isso pode levar o aluno a construir atividades até mais complexas com uso dos **Protocolos de Construção**.

Os entrevistados, quando questionados sobre os procedimentos preparatórios para trabalhar as atividades, divergem em suas respostas. Para o entrevistado A, as atividades seriam uma complementação dos conteúdos trabalhados em sala de aula, por isso utilizaria as atividades como fechamento de um tema ou como atividades complementares. Já o entrevistado B, é contrário a essa opinião, pois afirma que "muitas dessas atividades servem até para definir certas propriedades", que "seriam muito teóricas para fazermos essas definições na lousa, no papel, no caderno", logo ele começaria a abordagem de um novo conceito ou conteúdo utilizando atividades produzidas, por exemplo, no *GeoGebra*; isso segundo ele chamaria a atenção dos alunos. O entrevistado C demonstrou preocupação quanto aos aspectos comportamentais dos alunos na sala de informática; citou que há necessidade de se fazer combinados com os alunos e desenvolver a teoria e familiarizar os alunos ao *GeoGebra* antes de trabalhar as atividades. Para o entrevistado D, inicialmente, o conteúdo deve ser exposto de forma clara. Em seguida, o professor deve apresentar o *software* a todos através de uma projeção e, por fim, convidar os alunos a baixarem o programa em casa para que eles percebam as funcionalidades. Sua fala em seguida realça a importância do aluno gerir sua aprendizagem, pois ele diz que "... a gente sabe que o melhor professor do aluno é ele mesmo, é ele que aprende por conta, a curiosidade dele pode levar ele a fazer muita coisa". Podemos concluir que todos são unânimes em afirmar que, antes das atividades, os alunos devem ser familiarizados com as ferramentas do *GeoGebra*, porém apoiados em suas práticas cotidianas divergem na forma e no momento de abordar tais atividades.

Quanto às sugestões para o aprimoramento das atividades, todos citaram que as atividades são interessantes e pertinentes e as perguntas são claras e objetivas. O entrevistado B diz que, agora, o desafio é desenvolver atividades para outros assuntos; o entrevistado C retoma a questão que os alunos precisam começar por atividades mais simples e destaca que "... o aluno aprende por si só, mexendo, (ele) manuseando o programa; talvez você falando uma coisa, (ele) não assimile tão fácil como ele mexendo e vendo os procedimentos". O entrevistado D faz uma reflexão interessante quanto as atividades: "Você sabe que todo trabalho pode ser mudado de uma hora para outra, depende do resultado que você está alcançando". Isso nos leva a refletir que apesar de os entrevistados sinalizarem que as atividades estão coerentes, elas só se mostrarão realmente facilitadoras do ensino, mediante o retorno das aprendizagens dos alunos e que, em processos pedagógicos, devemos a todo momento estarmos realizando avaliações do nosso trabalho e as adequações que se fizerem necessárias.

Em seguida, o mesmo entrevistado, relatando sua experiência com o uso de *software* e a exploração de *sites*, diz que "... eu acho que a questão maior é pedir para que o aluno baixe em casa esse programa e que ele trabalhe e explore todas as ferramentas, mesmo que seja com o intuito de fazer um desenho, para que realmente ele esteja o conhecendo, pela experiência que eu tenho e pelos projetos que venho desenvolvendo sempre que meu aluno explora um *site* que eu recomendo e de alguma coisa que mando fazer, ele me traz um conhecimento depois maior do que aquele que eu passo, então eu acho interessante ele fazer isso em casa, o professor se torna o mediador do conhecimento, não passando tudo pronto". O entrevistado, em seguida, mencionou algo já exposto neste trabalho: "Eu quero deixar registrado o quanto a escola pública peca no ensino da geometria, como os livros sempre trouxeram esse assunto ao final, poucas séries acabam realmente estudando geometria, hoje tem muitos alunos do ensino médio que reclamam disso, então seria interessante já colocar esses problemas em séries iniciais para que o aluno perceba que a geometria está ligada a todas as áreas do conhecimento de uma forma conjunta, ela não pode ser separada da álgebra e da aritmética".

Em relação a outros conteúdos que poderiam ser abordados pelo *GeoGebra*, os professores citaram: estudo de funções em geral, sistemas lineares, matrizes, geometria analítica, estudo da reta numérica (localização de números).

Para finalizar, gostaria de registrar alguns pontos que considero relevantes e foram abordados durante as entrevistas:

- A principal fonte de pesquisas para que os professores diversifiquem suas aulas nos dias atuais é a *internet*;

- A Secretaria de Educação tem um papel importante na formação continuada dos professores, sendo assim, os cursos devem prezar pela qualidade e ser na modalidade presencial ou semipresencial;

- Os professores assumem suas dificuldades e demonstraram interesse em capacitações para o uso de novas tecnologias, inclusive por *software* educacionais;
- Os professores reconhecem que atividades diversificadas, que fazem uso de novas tecnologias, despertam o interesse do aluno;
- A necessidade de uma familiarização do aluno com as funções e ferramentas do *software GeoGebra*, antes da realização das atividades;
- A necessidade das construções realizadas no *GeoGebra*, através dos **Protocolos de Construção**, serem escalonadas em uma ordem crescente de dificuldades, começando do 6º ano do Ensino Fundamental a 3ª série do Ensino Médio;
- A importância de se integrar aos currículos propostas como as apresentadas neste trabalho, ao longo de todo o percurso do aluno;
- O reconhecimento por parte dos professores de que o aluno aprende através da interação com os meios tecnológicos e as atividades propostas, cabendo ao professor o papel de mediar tais situações;
- A constatação por parte dos professores que o uso do *software GeoGebra* pode ser estendido a outros temas/áreas/conteúdos.

Conclusão

Inicialmente abordamos neste trabalho que o ensino da Matemática praticado nas escolas públicas, em que atuei, tanto como aluno, professor e professor coordenador, é pautado muitas vezes por uma aprendizagem mecânica, baseada em fórmulas prontas e algoritmos para serem aplicados e não em argumentações, justificativas e demonstrações, apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais(1998) para o Ensino Fundamental destacar que a construção do conhecimento matemático permite ao aluno elaborar conjecturas e generalizações, bem como desenvolver a capacidade de justificar resultados por meio de demonstrações formais. O Currículo Oficial do Estado de São Paulo - Matemática (SÃO PAULO, 2011) complementa ao enfatizar que a partir da 7ª série/8º ano e 8ª série/9º ano a tônica do trabalho dos professores deve ser a construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos. Portanto, os documentos norteadores são unânimes em apontar a importância das demonstrações no ensino da Matemática, principalmente em Geometria.

Com base nestes pressupostos, este trabalho partiu da premissa de estabelecer um referencial teórico que permitisse entender o raciocínio matemático, a natureza das demonstrações matemáticas e os processos envolvidos na construção de demonstrações. Ao analisar a evolução do conceito de uma demonstração, ao longo do tempo e suas formas, é possível que o professor estabeleça uma analogia entre a matemática prática desenvolvida pelos egípcios e a matemática lógico-formal desenvolvida pelos gregos com os processos reproduzidos em uma sala de aula. Inicialmente, os alunos experimentam técnicas e regras operatórias na resolução de problemas do cotidiano, como por exemplo, escrita dos números no sistema decimal, operações aritméticas, cálculo de perímetro e área, etc. Posteriormente, o ensino passa a conter elementos abstratos e exigir que o aluno faça inferência a elementos que não fazem parte diretamente do seu cotidiano, como por exemplo, equações algébricas, teoremas, razões trigonométricas, etc. Portanto, o professor deve ter essa clareza das nuances de cada fase de aprendizagem da criança e do adolescente e estabelecer uma relação com o próprio desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo e considerar os obstáculos epistemológicos e os saltos conceituais.

Em relação aos materiais pedagógicos produzidos pela Secretaria da Educação de São Paulo, mais especificamente ao rol de habilidades previstas para a 7ª série/8º ano e 8ªsérie/9ºano no Currículo Oficial do Estado de São Paulo - Matemática, não é possível estabelecer correlação entre os pressupostos teóricos e as orientações contidas nesse documento, ou seja, as habilidades previstas não fazem menção a generalizações, argumentações e demonstrações. Historicamente, segundo Pietropaolo (2005), é consenso que a geometria possibilita o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio, principalmente o dedutivo, portanto uma das possibilidades de aprimoramento do Currículo Oficial do Estado de São Paulo-Matemática, quanto ao desenvolvimento de demonstrações, é a abordagem indutiva que a geometria permite; essa abordagem possibilita que o aluno levante hipóteses, faça conjecturas, realize argumentações, observe casos particulares, identifique regularidades. Após essa etapa, abre-se a porta para a análise do pensamento dedutivo e a determinação de "verdades" matemáticas, ou seja, a demonstração de teoremas.

Essa foi uma das razões pela opção em desenvolver atividades ligadas ao tema Geometria. Outro fator preponderante para a escolha foi a possibilidade de junção das novas tecnologias disponíveis na escola com a Geometria. O *software* escolhido para desenvolver as atividades foi o *GeoGebra*. Este é um *software livre*, instalado em todas as escolas estaduais do estado de São Paulo nas salas do "Acessa Escola". Outro ponto positivo, é que este *software* pode facilmente ser instalado pelos alunos em seus *smartphones*, *tablets* e computadores pessoais, isso possibilita a ampliação dos espaços e tempos de aprendizagem.

Sabemos que com o barateamento e a difusão de equipamentos muitos dos alunos de hoje já estão familiarizados com as novas tecnologias de informação. Eles estão acostumados a interagir com sistemas operacionais de celulares, computadores, videogames, etc, logo, para eles é natural e intuitivo o uso de *software*. Dessa maneira, com o desenvolvimento de atividades no *software GeoGebra*, pretende-se despertar nos alunos um maior interesse com a Matemática, principalmente a Geometria, tida por muitos como "difícil". Outra característica importante do *GeoGebra* é que (ele) permite ao usuário uma autonomia na realização de construções geométricas ou mesmo na manipulação de objetos matemáticos em ambientes dinâmicos; isso redefine o papel do professor no processo de ensino aprendizagem e este passa de transmissor do conhecimento para o mediador ou facilitador da aprendizagem.

Portanto, precisávamos de uma fundamentação teórica para entender esse novo papel do professor, suas possibilidades e seu comprometimento com elas, tanto na teoria quanto na prática, que levasse a uma reflexão sobre a relação do aluno com o meio e o saber. A *Teoria das Situações Didáticas* mostrou-se adequada a nosso propósito ao salientar que a aprendizagem fica caracterizada quando o aluno modifica um conjunto de comportamentos, ou seja, realiza as tarefas solicitadas. Essas tarefas indicarão ao professor se o aluno dispõe de um conjunto de competências (ou conhecimentos). Dessa forma, o aluno tem a possibilidade de expressar de diversas formas o conhecimento adquirido e ser capaz de realizar justificativas e pôr em jogo vários recursos a fim de resolver um problema ou uma tarefa solicitada. Cabe ao professor definir situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas que favoreçam definir quais são os fatores determinantes ao avanço dos alunos nos problemas apresentados a eles.

Procuramos, nas atividades propostas, desenvolver situações didáticas associadas a forma com que os alunos se relacionam com o "*meio*", ou seja, essas atividades devem suscitar determinadas incertezas que serão reduzidas pelo conhecimento produzido pelo aluno. Portanto, o "*meio*" deve favorecer, no processo de aprendizagem, momentos de desequilíbrios, assimilações e acomodações. Nesse processo, segundo Brousseau (2008), estabelece-se o *contrato didático*; este determina direta ou indiretamente as regras que cada envolvido na relação didática deverá fazer e daquilo que cada um terá que prestar contas ao outro. Os fatores que influenciam o contrato didático vão desde a formação e as representações do professor, até mesmo as escolhas pedagógicas e os objetivos das atividades propostas.

É importante levar em consideração a classificação das situações didáticas, pois ao desenvolver as atividades propostas neste trabalho, espera-se que elas perpassem pela situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. Nas situações de ação, o aluno, ao seguir as comandas e responder as questões, deve observar as regularidades, relacionar informações e antecipar respostas; na situação de formulação, o aluno deve ser capaz de comunicar a outro aluno, ou mesmo ao professor, suas conclusões; essa comunicação pode ser apenas verbal e não necessariamente precisa ser feita em uma linguagem matemática formal. Na situação de validação, o aluno a fim de convencer a todos deve elaborar provas, demonstrações e argumentações convincentes. Por fim, nas situações de institucionalização, o professor deve analisar as atividades realizadas pelo aluno, referendando, se estiverem corretas e, solicitando que sejam refeitas, no caso de estarem incorretas ou com conclusões incompletas.

Sendo assim, concluímos que mais importante do que o professor realiza em sala de aula, são as respostas que os alunos apresentam frente a problemas propostos a eles, portanto o desafio do professor passa a ser o de selecionar atividades que sejam significativas para a aprendizagem ao mesmo tempo que diminua sua interferência e se torne mediador do aluno e o saber.

A fim de utilizar todas as plataformas que alunos e professores tem a disposição, este trabalho além dessa versão, estará disponível em um formato que facilita a visualização de todo o texto em *smartphones* e *tablets*, por exemplo. Há de se destacar que a maioria desses aparelhos atualmente possuem configurações que permitem aos usuários instalarem o *GeoGebra* para uso *offline* ou mesmo *online*.

Levando-se em consideração que o *GeoGebra* permite movimentos dinâmicos, optamos em elaborar atividades que explorem os movimentos no plano. Inicialmente, desenvolvemos uma abordagem tradicional quanto a congruência de triângulos; posteriormente estendemos para isometrias no plano. Através dos teoremas demonstrados, esperamos que o trabalho implicitamente leve o leitor a concluir que uma isometria ou uma composição de isometrias abarca todos os casos de figuras congruentes do plano, pois em particular, um triângulo congruente a outro nada mais é do que uma aplicação (ou composição) de isometria que preserva ângulos e distâncias. Para semelhança, optamos por uma definição geral. Essa se aplica a todos os polígonos e não apenas a triângulos. Além disso, essa definição permite o estudo de casos de semelhança na ampliação e redução de fotos, em embalagens da mesma marca, mas de tamanhos diferentes, de bolas de variados esportes, etc. Vimos que semelhança de razão 1 nada mais é do que uma isometria. Interessamo-nos também em definir as homotetias, pois dessa maneira foi possível obtermos uma demonstração para o *Teorema de Tales* e a definição de semelhança para triângulos. Por fim, através das relações métricas de um triângulo retângulo, provamos o *Teorema de Pitágoras*. Esperamos que o leitor perceba que todas as definições, teoremas e resultados abordados podem satisfatoriamente serem exploradas na educação básica por meio do *GeoGebra*.

Decidimos, além de elaborar as atividades, incluir ao final do trabalho, como anexo, os protocolos de construção. Essa ideia surgiu ao longo do desenvolvimento das atividades com a troca de uma atividade com o professor-orientador, pois ao tentar refazer essa atividade, percebemos a apreensão de novos conceitos. Essa, possibilitou a construção de atividades mais elaboradas. Tal situação se mostrou, a meu ver, em um facilitador da aprendizagem e, de acordo com a Teoria das Situações Didáticas, possibilita a interação do sujeito com um meio determinado, ocasionando assim a resolução do problema. Em nosso caso, a construção da atividade, segundo Brousseau(2008), é plausível pressupormos que a aprendizagem é atingida pela adaptação do aluno; este deve assimilar o meio criado por esta situação, independentemente de qualquer intervenção do professor no decorrer do processo. Dessa forma, a aprendizagem manifestar-se-á como um instrumento de controle da situação. Portanto, acreditamos que esse processo de construção permitirá que os alunos, ao interagirem com o *software*, apropriem-se das notações e das propriedades dos objetos matemáticos, além de torná-los protagonistas e menos dependentes de intervenções externas (professor).

Ao final do trabalho interessava-nos saber a opinião dos professores quanto às atividades propostas, sua relação com as novas tecnologias em sala de aula, seu interesse em formação continuada sobre o tema e a viabilidade de implementação das atividades propostas. Desta forma, convidamos um grupo de professores para entrevistas. Esse grupo representa uma amostra dos docentes de Matemática da Diretoria Regional de Ensino de Birigui. Destaca-se nas respostas a importância da Secretaria de Educação na formação continuada dos professores, pois todos citaram terem nos últimos anos realizado cursos oferecidos pela SEE/SP. Outro ponto recorrente é que todos citaram que utilizam a internet como fonte de pesquisas para prepararem suas aulas e todos relataram ter interesse em receber formação quanto ao uso de novas tecnologias. Quanto às atividades propostas, os professores opinaram dizendo que seus alunos se interessariam, porém tais atividades e suas construções deveriam fazer parte do currículo desde a 5ª Série/6º Ano. Segundo eles, isso acarretaria uma familiarização com as ferramentas do *software GeoGebra* e a possibilidade de incrementar atividades em níveis crescentes de dificuldade.

Dessa forma, dentro da governabilidade da Diretoria de Ensino, é importante pensar em ações que visem propiciar aos professores de Matemática formação continuada quanto ao uso de novas tecnologias. Estas reflexões devem ser feitas em nível regional e na elaboração do plano de trabalho da equipe de Matemática da Diretoria de Ensino.

Ressaltamos que as atividades propostas neste trabalho com o uso do *GeoGebra* visam externar aos professores a possibilidade de implementar aulas diversificadas desde a 5ª Série/6º ano do Ensino Fundamental até a 3ª Série do Ensino Médio, com o objetivo de tornar os alunos mais participativos. Por outro lado, é evidente que a simples disponibilização de atividades no *GeoGebra* não assegurará a efetivação de uma nova prática pedagógica, daí a importância que professores passem por formações e eles se sintam seduzidos e seguros para o uso dessas novas tecnologias.

Por fim, esperamos que este trabalho propicie a professores e gestores das escolas o reconhecimento da importância das demonstrações no ensino da Matemática, a carência de orientações específicas quanto a implementação de demonstrações em sala de aula em documentos norteadores, a necessidade de tornar o aluno mais participativo nas aulas de Matemática, as possibilidades de uso de novas tecnologias e a importância da formação continuada em serviço. O ideal é que os professores desenvolvam autonomia para propor atividades no *GeoGebra* ou *softwares* similares desde as séries iniciais até o ensino médio.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: ANPED. *Atas do 30º Reunião Anual da ANPED*. Timbauda-PE: Espaço Livre, 2007. v. 1, p. 1–18. 19

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, n. 109, 2004. 19

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 85-85818-02-6. 39

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. [S.l.]: Editora EDGARD BLUCHER Ltda., 1996. ISBN 9788521200239. 20

BRAATHEN, P. C. Aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa no processo de ensino-aprendizagem de química. *REVISTA EIXO*, v.1, n. 1, p. 63–69, 2012. Disponível em: <http://revistaeixo.ifb.edu.br/index.php/RevistaEixo/article/view/53>. 15

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*: Matemática e suas tecnologias. São Paulo, S.P., 1998. 25

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática quinta a oitava séries*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília, D.F., 1998. 16, 24

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdo e métodos de ensino*. Rio de Janeiro, RJ: ATICA, 2008. 128 p. (Educação em Ação). ISBN 978-85-0811-966-0. 30, 31, 32

D'AMORE, B. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, S.P., v. 20, n. 28, p. 179–205, 2007. 29, 33

FILHO, I. F. B. Alguns aspectos da demonstração em matemática: uma discussão sobre os métodos empregados no desenvolvimento do raciocínio matemático. In: *Atas do VII CIBEM*. [s.n.], 2013. v. 2301, p. 0797. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/550.pdf>. 17, 20, 21, 23

FREITAS, J. L. M. de. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação Matemática*: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008, (Série Trilhas). p. 77–113. 34

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). *Didática da Matemática*: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre, R.S.: Artes Médicas, 1996. p. 27–35. 34

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 93 p. ISBN 9788585818050. 55

MELLO, E. G. S. de. *Uma Seqüência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geometria*. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — PUC Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999. 31, 32

MORTARI, C. A. *Introdução à Lógica*. São Paulo, S.P.: Editora Unesp, 2012. 22, 23

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no brasil: causas e consequências. *Zetetiké Revista de Educação Matemática*, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7–18, 1993. 16

PIETROPAOLO, R. C. *(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática*. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — PUC Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2005. 24, 25, 27, 97

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. ISBN 978858581865654. 21

SÃO PAULO. *Matrizes de referência para a avaliação. Documento Básico. SARESP. Ensino Fundamental e Médio*. São Paulo, 2009. 86

SÃO PAULO. *Currículo do estado de São Paulo*: Matemática e suas tecnologias. São Paulo, S.P., 2011. 25, 26, 97

Anexos

ANEXO A – Protocolo de entrevistas

Questionário

Nome:

Escola(s) que leciona:

Disciplina(s) que leciona:

Formação:

Tempo de magistério:

1) Em sua formação inicial (graduação) ou continuada (cursos, aperfeiçoamentos) você recebeu formação para o uso de tecnologia em sala de aula? De que forma?

2) Você faz uso de tecnologia em suas aulas?
   ( ) Sim. Qual(is) as fontes?

   ( ) Não. Por que?

3) Você conhece algum software (programa) para o ensino de Matemática?
   ( ) Sim. Qual(is)?

   ( ) Não. Você tem interesse em conhecer?

4) Você conhece, já ouviu e/ou já utilizou o software GeoGebra?
   ( ) Sim.
   ( ) Não.
   Teria interesse em formação sobre o software GeoGebra?

5) As atividades propostas para ser executadas com o GeoGebra contemplam o Currículo Oficial do Estado de São Paulo – Matemática?
   ____
   ____
   ____

6) Em sua opinião seus alunos poderiam se interessar por atividades no GeoGebra?
   ( ) Sim.
   ( ) Não.
   Por que?

7) Em sua opinião os alunos de posse dos Protocolos de Construção conseguiriam realizar construções no GeoGebra?
   ( ) Sim.
   ( ) Não.
   Comentários

8) Antes da realização das atividades em sua opinião quais seriam os procedimentos preparatórios?

9) Quais sugestões você faria para aprimorar as atividades?

10) Além das atividades propostas quais temas/conteúdos em sua opinião poderia ser abordado pelo software GeoGebra em sala de aula?

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) participante:

Sou estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Estou realizando uma pesquisa sob supervisão do professor Dr. Ernandes Rocha de Oliveira, cujo objetivo é elaborar situações didáticas (atividades) sobre Geometria para serem desenvolvidas no software GeoGebra.

Sua participação envolve a análise dessas atividades e a proposição de sugestões e adequações, posteriormente uma entrevista que será gravada se assim você permitir, e que tem duração aproximada de 1 hora.

A participação nesse estudo é voluntária e se você decidir não participar ou quiser desistir de continuar em qualquer momento, tem absoluta liberdade de fazê-lo.

Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo (a).

Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador Leandro Ramiro, fone: (18) 99731-6862.

Atenciosamente

Birigui, 30-07-14

Nome e assinatura do estudante
Matrícula: 64901-3

Local e data

Consinto em participar deste estudo e declaro ter recebido uma cópia deste termo de consentimento.

João Lucas Drago da S

Birigui, 30/07/2014

Nome e assinatura do participante

Local e data

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) participante:

Sou estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Estou realizando uma pesquisa sob supervisão do professor Dr. Ernandes Rocha de Oliveira, cujo objetivo é elaborar situações didáticas (atividades) sobre Geometria para serem desenvolvidas no software GeoGebra.

Sua participação envolve a análise dessas atividades e a proposição de sugestões e adequações, posteriormente uma entrevista que será gravada se assim você permitir, e que tem duração aproximada de 1 hora.

A participação nesse estudo é voluntária e se você decidir não participar ou quiser desistir de continuar em qualquer momento, tem absoluta liberdade de fazê-lo.

Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo (a).

Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador Leandro Ramiro, fone: (18) 99731-6862.

Atenciosamente

05/08/14, Birigui/SP

Nome e assinatura do estudante
Matrícula: 64901-3

Local e data

Consinto em participar deste estudo e declaro ter recebido uma cópia deste termo de consentimento.

Paulo R. Culeme

05/08/14, Birigui/SP

Nome e assinatura do participante

Local e data

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) participante:

Sou estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Estou realizando uma pesquisa sob supervisão do professor Dr. Ernandes Rocha de Oliveira, cujo objetivo é elaborar situações didáticas (atividades) sobre Geometria para serem desenvolvidas no software GeoGebra.

Sua participação envolve a análise dessas atividades e a proposição de sugestões e adequações, posteriormente uma entrevista que será gravada se assim você permitir, e que tem duração aproximada de 1 hora.

A participação nesse estudo é voluntária e se você decidir não participar ou quiser desistir de continuar em qualquer momento, tem absoluta liberdade de fazê-lo.

Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo (a).

Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador Leandro Ramiro, fone: (18) 99731-6862.

Atenciosamente

Birigui / SP 01/08/14

Nome e assinatura do estudante
Matrícula: 64901-3

Local e data

Consinto em participar deste estudo e declaro ter recebido uma cópia deste termo de consentimento.

Fabiana Tomi Garcia

Birigui / SP 01/08/2014

Nome e assinatura do participante

Local e data

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) participante:

Sou estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Estou realizando uma pesquisa sob supervisão do professor Dr. Ernandes Rocha de Oliveira, cujo objetivo é elaborar situações didáticas (atividades) sobre Geometria para serem desenvolvidas no software GeoGebra.

Sua participação envolve a análise dessas atividades e a proposição de sugestões e adequações, posteriormente uma entrevista que será gravada se assim você permitir, e que tem duração aproximada de 1 hora.

A participação nesse estudo é voluntária e se você decidir não participar ou quiser desistir de continuar em qualquer momento, tem absoluta liberdade de fazê-lo.

Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo (a).

Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador Leandro Ramiro, fone: (18) 99731-6862.

Atenciosamente

Biriguí/SP - 06/08/14

Nome e assinatura do estudante
Matrícula: 64901-3

Local e data

Consinto em participar deste estudo e declaro ter recebido uma cópia deste termo de consentimento.

Biriguí, 06 de agosto de 2014

Nome e assinatura do participante

Local e data

ANEXO B – Protocolos de construção

Explorando LAL

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Ponto A				A = (-4, 0)
2	Ponto B				B = (-4, 7)
3	Ponto C				C = (2, -2)
4	Segmento a		Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	a = 7
5	Segmento b		Segmento [A, C]	Segmento[A, C]	b = 7
6	Ponto A_1				A_1 = (2, 1)
7	Número c_2		abs(Distância[A, C])	abs(Distância [A, C])	c_2 = 7
8	Ponto C_1		Ponto sobre Círculo[A_1, abs (Distância[A, C])]	Ponto[Círculo [A_1, abs (Distância[A, C])]]	C_1 = (9, 0)
9	Segmento b_1		Segmento [A_1, C_1]	Segmento[A_1, C_1]	b_1 = 7
10	Número d		abs(Distância[A, B])	abs(Distância [A, B])	d = 7
11	Ponto B_1		Ponto sobre Círculo[A_1, abs (Distância[A, B])]	Ponto[Círculo [A_1, abs (Distância[A, B])]]	B_1 = (0, 8)
12	Segmento a_1		Segmento [A_1, B_1]	Segmento[A_1, B_1]	a_1 = 7
13	Ângulo α		Ângulo entre C, A, B	Ângulo[C, A, B]	α = 105°
14	Ângulo β		Ângulo entre C_1, A_1, B_1	Ângulo[C_1, A_1, B_1]	β = 117°
15	Segmento c		Segmento [B, C]	Segmento[B, C]	c = 11
16	Segmento c_1		Segmento [B_1, C_1]	Segmento[B_1, C_1]	c_1 = 12

17	Texto texto1	ABC			São dados os segmentos AB, AC, A_1B_1 e A_1C_1, de modo que $AB=A_1B_1$ e $AC=A_1C_1$. Mova os pontos de modo que os ângulos α e β tenham o mesmo valor. 1) O que ocorre com o comprimento dos segmentos BC e B_1C_1 ? Isto é, qual a relação que se estabelece entre eles? 2) Considerando os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nas condições acima de igualdade entre os ângulos α e β o que ocorre com as medidas dos outros ângulos correspondentes? 3) Se $\alpha < \beta$ qual a relação entre BC e B_1C_1?

criado com o GeoGebra

Explorando ALA

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Comando
1	Ponto D	A		D = (-4, 6)	
2	Ponto E	A		E = (2, 6)	
3	Ponto A	A		A = (-2, 1)	
4	Ponto B	A		B = (1, 3)	
5	Ponto C	A		C = (2, 0)	
6	Segmento a		Segmento [A, B]	a = 3	Segmento[A, B]
7	Segmento b		Segmento [A, C]	b = 4	Segmento[A, C]
8	Segmento c		Segmento [C, B]	c = 4	Segmento[C, B]
9	Ângulo α		Ângulo entre C, A, B	α = 54°	Ângulo[C, A, B]
10	Ângulo β		Ângulo entre B, C, A	β = 50°	Ângulo[B, C, A]
11	Ponto A_1	A		A_1 = (2, 3)	
12	Ponto C_1	A		C_1 = (6, 1)	
13	Segmento b_1		Segmento [A_1, C_1]	b_1 = 5	Segmento[A_1, C_1]
14	Ponto G'		Rotação de C_1 pelo ângulo α	G' = (6, 5)	Girar[C_1, α, A_1]
15	Ângulo $α_1$		Ângulo entre C_1, A_1, G'	$α_1$ = 54°	Ângulo[C_1, A_1, G']
16	Ponto F'		Rotação de A_1 pelo ângulo -β	F' = (5, 5)	Girar[A_1, -β, C_1]
17	Ângulo $β_1$		Ângulo entre F', C_1, A_1	$β_1$ = 50°	Ângulo[F', C_1, A_1]
18	Semirreta e		Semirreta com origem A_1 passando por G'	e: -2x + 4y = 6	Semirreta[A_1, G']
19	Semirreta f		Semirreta com origem C_1 passando por F'	f: -4x = -28	Semirreta[C_1, F']
20	Ponto B_1		Ponto de interseção de e, f	B_1 = (5, 4)	Interseção[e, f]
21	Segmento a_1		Segmento [A_1, B_1]	a_1 = 4	Segmento[A_1, B_1]
22	Segmento c_1		Segmento [C_1, B_1]	c_1 = 4	Segmento[C_1, B_1]
23	Número distânciaAC	cm	Distância de A a C	distânciaAC = 4	Distância[A, C]
24	Texto TextoAC	ABC	"\overline{" + (Nome[A]) + (Nome[C]) + "} \, = \, " + distânciaAC	\overline{AC} \, = \, 4	"\overline{" + (Nome[A]) + (Nome[C]) + "} \, = \, " + distânciaAC
25	Número distânciaFG	cm	Distância de A_1 a C_1	distânciaFG = 5	Distância[A_1, C_1]

26	Texto TextoFG	ABC	"\overline{" + (Nome[A_1]) + "" + (Nome[C_1]) + "} \, = \, " + (LaTeX[distânciaFG]) + ""	\overline{A_1C_1} \, = \, 5	"\overline{" + (Nome[A_1]) + "" + (Nome[C_1]) + "} \, = \, " + (LaTeX[distânciaFG]) + ""
27	Texto texto1	ABC		São dados os ângulos α, β, α_1 e β_1, de modo que $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$. Mova os pontos de modo que os segmentos AC e A_1C_1 tenham o mesmo comprimento. 1) O que ocorre com o valor dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle A_1B_1C_1$? Ou seja, qual a relação que se estabelece entre eles? 2) Considerando os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nas condições acima de igualdade entre os comprimentos AC e A_1C_1 o que ocorre com o comprimento dos outros lados correspondentes? 3) É possível fazer a alguma afirmação quanto ao formato e ao tamanho dos triângulos ABC e $A_1B_1C_1$? 4) Se AC < A_1C_1 qual a relação entre os demais lados correspondentes?	
28	Valor Booleano d			d = true	

criado com o GeoGebra

Explorando ângulo externo

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Ponto A	A			A = (-2, 8)
2	Ponto B	A			B = (-7, 2)
3	Ponto C	A			C = (2, 2)
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C	Polígono[A, B, C]	pol1 = 28
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1	Segmento[A, B, pol1]	c = 8
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1	Segmento[B, C, pol1]	a = 8
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1	Segmento [C, A, pol1]	b = 8
5	Semirreta d		Semirreta com origem B passando por C	Semirreta[B, C]	d: 0x + 8y = 15
6	Ângulo α		Ângulo entre C, B, A	Ângulo[C, B, A]	α = 58°
7	Ângulo β		Ângulo entre B, A, C	Ângulo[B, A, C]	β = 64°
8	Ângulo γ		Ângulo entre d, b	Ângulo[d, b]	γ = 122°
9	Texto texto1	ABC			Seja ABC um triângulo qualquer. Dados os ângulos internos α, β e o ângulo externo γ, mova os vértices do triângulo ABC. 1) Qual é a relação entre α, β e γ? 2) É possível determinar o valor do ângulo $\angle ACB$? Como?

criado com o GeoGebra

Soma dos ângulos internos

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Ponto A				A = (-3, 5)
2	Ponto B				B = (-2, 1)
3	Ponto C				C = (0, 4)
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C	Polígono[A, B, C]	pol1 = 5
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1	Segmento[A, B, pol1]	c = 4
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1	Segmento[B, C, pol1]	a = 3
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1	Segmento[C, A, pol1]	b = 3
5	Ponto D				D = (1, 7)
6	Número d				d = 1
7	Ponto D'		Homotetia de centro B e razão d aplicada em D	Homotetia[D, d, B]	D' = (1, 7)
8	Reta e		Reta passando por D' e paralela a a	Reta[D', a]	e: -3x + 2y = 12
9	Reta f		Reta passando por D' e paralela a c	Reta[D', c]	f: 4x = 6
10	Círculo g		Círculo com centro D' e raio 1	Círculo[D', 1]	g: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 1$
11	Ponto E		Ponto de interseção de g, e	Interseção[g, e, 2]	E = (1, 8)
12	Ponto F		Ponto de interseção de g, f	Interseção[g, f, 1]	F = (1, 8)
13	Ângulo α		Ângulo entre E, D', F	Ângulo[E, D', F]	α = 42°
14	Ponto D'_1		Homotetia de centro C e razão d aplicada em D	Homotetia[D, d, C]	D'_1 = (1, 7)
15	Reta h		Reta passando por D'_1 e paralela a b	Reta[D'_1, b]	h: -1x - 2y = -18
16	Círculo k		Círculo com centro D'_1 e raio 1	Círculo[D'_1, 1]	k: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 1$
17	Ponto G		Ponto de interseção de k, e	Interseção[k, e, 1]	G = (0, 6)
18	Ponto H		Ponto de interseção de k, h	Interseção[k, h, 2]	H = (0, 8)
19	Ângulo β		Ângulo entre H, D'_1, G	Ângulo[H, D'_1, G]	β = 82°
20	Ponto D'_2		Homotetia de centro A e razão d aplicada em D	Homotetia[D, d, A]	D'_2 = (1, 7)
21	Círculo p		Círculo com centro D'_2 e raio 1	Círculo[D'_2, 1]	p: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 1$

22	Ponto I		Ponto de interseção de p, f	Interseção[p, f, 2]	I = (1, 6)
23	Ponto J		Ponto de interseção de p, h	Interseção[p, h, 1]	J = (2, 7)
24	Ponto I'		Rotação de I pelo ângulo (180d)°	Girar[I, (180d)°, D'_2]	I' = (1, 8)
25	Ponto J'		Rotação de J pelo ângulo (180d)°	Girar[J, (180d)°, D'_2]	J' = (0, 8)
26	Ângulo γ		Ângulo entre I', D'_2, J'	Ângulo[I', D'_2, J']	γ = 56°
27	Texto texto1	ABC			Seja um triângulo ABC qualquer e os seus ângulos internos ∠BAC, ∠CBA , ∠ACB e um ponto D fora do triângulo ABC, mova o controle deslizante d. 1) O que aconteceu com os ângulos internos do triângulo e com aqueles que estão em torno do ponto D? 2) Mova agora os vértices do triângulo ABC e o controle deslizante d. O que você observou? 3) É possível fazer alguma generalização em relação aos ângulos internos do triângulo ABC?

criado com o GeoGebra

Ângulos alternos

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Ponto A				A = (-5, -1)
2	Ponto B				B = (-1, 0)
3	Ponto C				C = (-1, -2)
4	Semirreta c		Semirreta com origem A passando por B	Semirreta [A, B]	c: 0x + 4y = -1
5	Semirreta d		Semirreta com origem A passando por C	Semirreta [A, C]	d: 1x + 4y = -11
6	Reta a		Reta BC	Reta[B, C]	a: 2x = -2
7	Ponto D		Ponto sobre c	Ponto[c]	D = (2, 0)
8	Reta b		Reta passando por D e paralela a a	Reta[D, a]	b: 2x = 4
9	Ponto E		Ponto de interseção de d, b	Interseção [d, b]	E = (2, -3)
10	Ângulo γ_2		Ângulo entre b, c	Ângulo[b, c]	γ_2 = 95°
11	Ângulo β		Ângulo entre a, d	Ângulo[a, d]	β = 71°
12	Ângulo γ_1		Ângulo entre a, c	Ângulo[a, c]	γ_1 = 95°
13	Ponto F		Ponto sobre d	Ponto[d]	F = (1, -3)
14	Ponto G		Ponto sobre a	Ponto[a]	G = (-1, 0)
15	Ângulo γ		Ângulo entre G, B, A	Ângulo[G, B, A]	γ = 95°
16	Ponto H		Ponto sobre b	Ponto[b]	H = (2, -7)
17	Ângulo α		Ângulo entre C, A, B	Ângulo[C, A, B]	α = 24°
18	Ponto I		Ponto sobre d	Ponto[d]	I = (18, -8)
19	Ângulo δ		Ângulo entre I, E, D	Ângulo[I, E, D]	δ = 109°

20	Texto texto1	ABC			Dadas duas retas paralelas a e b, cortadas por duas semirretas transversais c e d, ficam determinados nove ângulos. Mova os pontos A, B, C e D. 1) Qual a relação entre os valores dos ângulos γ, γ_1 e γ_2? 2) Considerando que o ângulo ∠ECB é suplementar ao ângulo β é possível determiná-lo? Existe alguma relação com o ângulo δ? Se sim, ao mover os pontos essa relação se altera? 3) É possível de alguma maneira encontrar os valores dos ângulos que não estão indicados? Como? 4) Identifique os pares de ângulos congruentes. 5) Qual é a soma dos ângulos internos do triângulo ABC? E do triângulo ADE?
21	Valor Booleano e				e = true

criado com o GeoGebra

Translação

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Ponto A		Ponto de interseção de EixoX, EixoY	Interseção [EixoX, EixoY]	A = (0, 0)
2	Ponto B				B = (6, 1)
3	Vetor u		Vetor[A, B]	Vetor[A, B]	u = (6, 1)
4	Ponto C				C = (1, 9)
5	Ponto D				D = (1, 4)
6	Ponto E				E = (4, 5)
7	Ponto F				F = (3, 7)
8	Ponto G				G = (5, 8)
9	Pentágono pol1		Polígono C, D, E, F, G	Polígono[C, D, E, F, G]	pol1 = 12
9	Segmento c		Segmento [C, D] de Pentágono pol1	Segmento[C, D, pol1]	c = 5
9	Segmento d		Segmento [D, E] de Pentágono pol1	Segmento[D, E, pol1]	d = 3
9	Segmento e		Segmento [E, F] de Pentágono pol1	Segmento[E, F, pol1]	e = 2
9	Segmento f		Segmento [F, G] de Pentágono pol1	Segmento[F, G, pol1]	f = 2
9	Segmento g		Segmento [G, C] de Pentágono pol1	Segmento[G, C, pol1]	g = 4
10	Ponto C_1		Translação de C por u	Transladar[C, u]	C_1 = (7, 10)
11	Ponto D_1		Translação de D por u	Transladar[D, u]	D_1 = (7, 5)
12	Ponto E_1		Translação de E por u	Transladar[E, u]	E_1 = (10, 6)
13	Ponto F_1		Translação de F por u	Transladar[F, u]	F_1 = (9, 8)
14	Ponto G_1		Translação de G por u	Transladar[G, u]	G_1 = (11, 9)
15	Pentágono pol1'		Polígono C_1, D_1, E_1, F_1, G_1	Polígono[C_1, D_1, E_1, F_1, G_1]	pol1' = 12
15	Segmento c'		Segmento [C_1, D_1] de Pentágono pol1'	Segmento[C_1, D_1, pol1']	c' = 5
15	Segmento d'		Segmento [D_1, E_1] de Pentágono pol1'	Segmento[D_1, E_1, pol1']	d' = 3
15	Segmento e'		Segmento [E_1, F_1] de Pentágono pol1'	Segmento[E_1, F_1, pol1']	e' = 2
15	Segmento f'		Segmento [F_1, G_1] de Pentágono pol1'	Segmento[F_1, G_1, pol1']	f' = 2
15	Segmento g'		Segmento [G_1, C_1] de Pentágono pol1'	Segmento[G_1, C_1, pol1']	g' = 4
16	Segmento a		Segmento [C, C_1]	Segmento[C, C_1]	a = 6

17	Segmento b		Segmento [G, G_1]	Segmento[G, G_1]	b = 6
18	Segmento h		Segmento [F, F_1]	Segmento[F, F_1]	h = 6
19	Segmento i		Segmento [E, E_1]	Segmento[E, E_1]	i = 6
20	Segmento j		Segmento [D, D_1]	Segmento[D, D_1]	j = 6
21	Texto texto1	ABC			São dados no plano o polígono CDEFG, o polígono transladado $C_1D_1E_1F_1G_1$ e o vetor (seta) AB. Observe que cada vértice do polígono CDEFG possui um segmento de reta ligando ao vértice correspondente do polígono $C_1D_1E_1F_1G_1$. Mova o o vetor (seta) AB. 1) O que aconteceu com o polígono $C_1D_1E_1F_1G_1$? 2) É possível mover o vetor (seta) AB de tal forma que os polígonos coincidam? O que podemos concluir? 3) Mova os vértices do polígono CDEFG e o vetor (seta) AB. O que podemos afirmar em relação aos segmentos de reta que unem os vértices correspondentes dos polígonos? 4) Mova o vetor (seta) AB sobre o eixo das abcissas (x) e sobre o eixo das ordenadas (y). Qual a relação entre os vértices dos polígonos e o vetor (seta) AB? 5) Comente sobre as principais características de uma translação que você observou.

criado com o GeoGebra

Reflexão

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Ponto A				A = (1, 2)
2	Ponto B				B = (4, 3)
3	Ponto C				C = (5, 1)
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C	Polígono[A, B, C]	pol1 = 4
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1	Segmento[A, B, pol1]	c = 3
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1	Segmento[B, C, pol1]	a = 3
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1	Segmento[C, A, pol1]	b = 4
5	Ponto A_1		Reflexão (ou Inversão) de A em relação a EixoX	Reflexão[A, EixoX]	A_1 = (1, -2)
6	Ponto B_1		Reflexão (ou Inversão) de B em relação a EixoX	Reflexão[B, EixoX]	B_1 = (4, -3)
7	Ponto C_1		Reflexão (ou Inversão) de C em relação a EixoX	Reflexão[C, EixoX]	C_1 = (5, -1)
8	Triângulo pol1'		Polígono A_1, B_1, C_1	Polígono[A_1, B_1, C_1]	pol1' = 4
8	Segmento c'		Segmento [A_1, B_1] de Triângulo pol1'	Segmento[A_1, B_1, pol1']	c' = 3
8	Segmento a'		Segmento [B_1, C_1] de Triângulo pol1'	Segmento[B_1, C_1, pol1']	a' = 3
8	Segmento b'		Segmento [C_1, A_1] de Triângulo pol1'	Segmento[C_1, A_1, pol1']	b' = 4
9	Segmento d		Segmento [A_1, A]	Segmento[A_1, A]	d = 4
10	Segmento e		Segmento [C_1, C]	Segmento[C_1, C]	e = 2
11	Segmento f		Segmento [B_1, B]	Segmento[B_1, B]	f = 7
12	Ponto D		Ponto de interseção de EixoX, EixoY	Interseção [EixoX, EixoY]	D = (0, 0)
13	Ponto A_2		Reflexão (ou Inversão) de A em relação a D	Reflexão[A, D]	A_2 = (-1, -2)
14	Ponto B_2		Reflexão (ou Inversão) de B em relação a D	Reflexão[B, D]	B_2 = (-4, -3)
15	Ponto C_2		Reflexão (ou Inversão) de C em relação a D	Reflexão[C, D]	C_2 = (-5, -1)
16	Triângulo pol1'$_1$		Polígono A_2, B_2, C_2	Polígono[A_2, B_2, C_2]	pol1'$_1$ = 4
16	Segmento c'$_1$		Segmento [A_2, B_2] de Triângulo pol1'$_1$	Segmento[A_2, B_2, pol1'$_1$]	c'$_1$ = 3
16	Segmento a'$_1$		Segmento [B_2, C_2] de Triângulo pol1'$_1$	Segmento[B_2, C_2, pol1'$_1$]	a'$_1$ = 3
16	Segmento b'$_1$		Segmento [C_2, A_2] de Triângulo pol1'$_1$	Segmento[C_2, A_2, pol1'$_1$]	b'$_1$ = 4

17	Segmento g		Segmento [A_2, A]	Segmento[A_2, A]	g = 4
18	Segmento h		Segmento [C_2, C]	Segmento[C_2, C]	h = 10
19	Segmento i		Segmento [B_2, B]	Segmento[B_2, B]	i = 10
20	Texto texto1	ABC			São dados no plano três triângulos. O primeiro triângulo ABC foi refletido em torno do eixo x e deu origem ao triângulo $A_1B_1C_1$, posteriormente o mesmo triângulo foi refletido pela origem dando origem ao triângulo $A_2B_2C_2$. Mova o triângulo ABC e seus vértices de maneira que seus tenham coordenadas (x,y) inteiras. 1) Considerando a intersecção dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1 com o eixo x, o que podemos afirmar? 2) Qual a relação entre as coordenadas dos vértices do triângulo ABC com as do triângulo $A_1B_1C_1$? 3) As mesmas observações anteriores poder ser aplicadas em relação ao triângulo $A_2B_2C_2$? Quais as semelhanças e diferenças? 4) Considere os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$, e o eixo y. Podemos afirmar que um é a reflexão do outro em torno do eixo y? Qual a relação entre suas coordenadas cartesianas?
21	Valor Booleano j				j = true

criado com o GeoGebra

Reflexão/Rotação

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Imagem fig1				fig1
2	Ponto A				A = (-3.94, 3.44)
3	Ponto B				B = (-2.28, 3.52)
4	Ponto C				C = (-4.08, 5.72)
5	Imagem fig1'		Reflexão (ou Inversão) de fig1 em relação a EixoY	Reflexão[fig1, EixoY]	fig1'
6	Ponto A_1		Reflexão (ou Inversão) de A em relação a EixoY	Reflexão[A, EixoY]	A_1 = (3.94, 3.44)
7	Ponto B_1		Reflexão (ou Inversão) de B em relação a EixoY	Reflexão[B, EixoY]	B_1 = (2.28, 3.52)
8	Ponto C_1		Reflexão (ou Inversão) de C em relação a EixoY	Reflexão[C, EixoY]	C_1 = (4.08, 5.72)
9	Ângulo α				α = 0°
10	Imagem $fig1'_1$		Rotação de fig1 pelo ângulo α	Girar[fig1, α, B]	$fig1'_1$
11	Imagem fig1''		Rotação de fig1' pelo ângulo -α	Girar[fig1', -α, B_1]	fig1''
12	Ponto D		Ponto de interseção de EixoX, EixoY	Interseção[EixoX, EixoY]	D = (0, 0)
13	Ponto E		Ponto sobre EixoY	Ponto[EixoY]	E = (0, 3.94)
14	Reta a		Reta DE	Reta[D, E]	a: x = 0
15	Segmento b		Segmento [B, B_1]	Segmento[B, B_1]	b = 4.56
16	Ponto F		Ponto de interseção de b, a	Interseção[b, a]	F = (0, 3.52)
17	Número distânciaBF		Distância de B a F	Distância[B, F]	distânciaBF = 2.28
18	Texto TextoBF		"\overline{" + (Nome[B]) + (Nome[F]) + "} \, = \, " + distânciaBF	"\overline{" + (Nome[B]) + (Nome[F]) + "} \, = \, " + distânciaBF	\overline{BF} \, = \, 2.28
19	Número distânciaB1F		Distância de B_1 a F	Distância[B_1, F]	distânciaB1F = 2.28
20	Texto TextoB1F		"\overline{" + (Nome[B_1]) + (Nome[F]) + "} \, = \, " + distânciaB1F	"\overline{" + (Nome[B_1]) + (Nome[F]) + "} \, = \, " + distânciaB1F	\overline{B_1F} \, = \, 2.28

21	Texto texto1	ABC			A figura MATEMÁTICA sofreu uma reflexão em relação a reta a. Simultaneamente tanto a figura MATEMÁTICA quanto sua imagem refletida sofreram rotação em relação ao ponto B e B_1 respectivamente, a primeira no sentido anti-horário e a segunda no sentido horário. Inicialmente com o controle deslizante em $\alpha=0°$ mova a figura MATEMÁTICA e os pontos A, B e C. 1) O que você observa? Cite algumas semelhanças e diferenças entre a figura original e a refletida. 2) Quanto as distâncias BF e B_1F o que é possível observar? Isso se aplica aos demais pontos e figuras? Agora mova o controle deslizante α e a figura MATEMÁTICA. 3) Quando $\alpha=180°$, o que você observa? E quando $\alpha=360°$? 4) As imagens rotacionada tem alguma relação com as observações realizadas na questão 1?

criado com o GeoGebra

Homotetia

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Comando
1	Ponto A			A = (-1.4, -0.9)	
2	Ponto B			B = (2.8, -2.5)	
3	Polígono ABCD		Polígono[A, B, 4]	ABCD = 20.3	Polígono[A, B, 4]
3	Segmento a		Segmento [A, B] de Polígono ABCD	a = 4.5	Segmento[A, B, ABCD]
3	Segmento b		Segmento [B, C] de Polígono ABCD	b = 4.5	Segmento[B, C, ABCD]
3	Ponto C		Polígono[A, B, 4]	C = (4.4, 1.7)	Polígono[A, B, 4]
3	Ponto D		Polígono[A, B, 4]	D = (0.2, 3.4)	Polígono[A, B, 4]
3	Segmento c		Segmento [C, D] de Polígono ABCD	c = 4.5	Segmento[C, D, ABCD]
3	Segmento d		Segmento [D, A] de Polígono ABCD	d = 4.5	Segmento[D, A, ABCD]
4	Ponto E			E = (-3.6, -3.1)	
5	Número e	a = 2		e = 1.7	
6	Polígono ABCD'		Homotetia de centro E e razão e aplicada em ABCD	ABCD' = 58.8	Homotetia[ABCD, e, E]
7	Ponto D_1		Ponto em ABCD'	D_1 = (2.9, 7.8)	PontoEm[ABCD']
8	Ponto C_1		Ponto em ABCD'	C_1 = (10, 5.1)	PontoEm[ABCD']
9	Ponto B_1		Ponto em ABCD'	B_1 = (7.3, -2.1)	PontoEm[ABCD']
10	Ponto A_1		Ponto em ABCD'	A_1 = (0.1, 0.7)	PontoEm[ABCD']
11	Segmento f		Segmento [E, D_1]	f = 12.7	Segmento[E, D_1]
12	Segmento g		Segmento [E, C_1]	g = 15.9	Segmento[E, C_1]
13	Segmento h		Segmento [E, A_1]	h = 5.3	Segmento[E, A_1]
14	Segmento i		Segmento [E, B_1]	i = 10.9	Segmento[E, B_1]
15	Ponto PontoABCD		Ponto em ABCD	PontoABCD = (1.2, -0.1, 0)	PontoEm[ABCD]
16	Ponto PontoABCD'		Ponto em ABCD'	PontoABCD' = (10, 5.1, 0)	PontoEm[ABCD']
17	Texto TextoABCD'	ABC	"Área de = " + ABCD' + ""	Área de = 58.8	"Área de = " + ABCD' + ""
18	Texto TextoABCD	ABC	"Área de = " + ABCD + ""	Área de = 20.3	"Área de = " + ABCD + ""
19	Número distânciaCD	cm	Distância de C a D	distânciaCD = 4.5	Distância[C, D]
20	Texto TextoCD	ABC	"\overline{" + (Nome[C]) + (Nome[D]) + "} \, = \, " + distânciaCD	\overline{CD} \, = \, 4.5	"\overline{" + (Nome[C]) + (Nome[D]) + "} \, = \, " + distânciaCD
21	Número distânciaC1D1	cm	Distância de C_1 a D_1	distânciaC1D1 = 7.7	Distância[C_1, D_1]

22	Texto TextoC1D1	ABC	"\overline{" + (Nome[C_1]) + (Nome[D_1]) + "} \, = \, " + distânciaC1D1	\overline{C_1D_1} \, = \, 7.7	"\overline{" + (Nome[C_1]) + (Nome[D_1]) + "} \, = \, " + distânciaC1D1
23	Número k_1		Distância[C_1, D_1] / Distância[C, D]	k_1 = 1.7	Distância[C_1, D_1] / Distância[C, D]
24	Número k_2		Área[ABCD'] / Área [ABCD]	k_2 = 2.9	Área[ABCD'] / Área [ABCD]
25	Texto texto1	ABC	"\frac{C_1D_1}{CD}=" + (LaTeX[k_1]) + ""	\frac{C_1D_1}{CD}=1.7	"\frac{C_1D_1}{CD}=" + (LaTeX[k_1]) + ""
26	Texto texto2	ABC	"\frac{$A_1B_1C_1D_1$}{ABCD}=" + (LaTeX[k_2]) + ""	\frac{$A_1B_1C_1D_1$}{ABCD}=2.9	"\frac{$A_1B_1C_1D_1$}{ABCD}=" + (LaTeX[k_2]) + ""
27	Texto texto3	ABC		HOMOTETIA	
28	Texto texto4	ABC		São dados no plano quadrado ABCD eo ponto D. O quadrado sofre uma homotetia e dá origem ao quadrado $A_1B_1C_1D_1$. Observe que temos as razões entre seus lados e entre suas áreas. Mova o controle deslizante para e = 2, anote os valores das razões, repita o processo para e = 3. 1) É possível estabelecer alguma relação entre as razões? Qual? 2) Mova o controle deslizante para e = 1. O que aconteceu? Quais conclusões podemos tirar? 3) Mova o controle deslizante para e = 0,5. O que você observou? Qual a relação entre as áreas? 4) Mova o ponto E de forma que coincida como ponto A, posteriormente movimente o controle deslizante. O que você observou? Valem as mesmas relações anteriores? 5) Os dois são quadrados são semelhantes, ou seja, têm o mesmo formato?	

criado com o GeoGebra

Teorema de Pitágoras

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Número a_1				$a_1 = 4$
2	Número b_1				$b_1 = 3$
3	Ponto A_1				$A_1 = (-2.16, -2.66)$
4	Ponto B_1				$B_1 = (11.18, -2.66)$
5	Reta c_1		Reta A_1B_1	Reta[A_1, B_1]	c_1: $y = -2.66$
6	Ponto C_1				$C_1 = (1.54, 3.06)$
7	Reta d		Reta passando por C_1 e perpendicular a c_1	Perpendicular[C_1, c_1]	d: $x = 1.54$
8	Ponto A		Ponto de interseção de d, c_1	Interseção[d, c_1]	$A = (1.54, -2.66)$
9	Círculo e		Círculo com centro A e raio a_1	Círculo[A, a_1]	e: $(x - 1.54)^2 + (y + 2.66)^2 = 16$
10	Círculo f		Círculo com centro A e raio b_1	Círculo[A, b_1]	f: $(x - 1.54)^2 + (y + 2.66)^2 = 9$
11	Ponto E		Ponto de interseção de e, c_1	Interseção[e, c_1]	$E = (-2.46, -2.66)$
11	Ponto B		Ponto de interseção de e, c_1	Interseção[e, c_1]	$B = (5.54, -2.66)$
12	Ponto G		Ponto de interseção de f, d	Interseção[f, d]	$G = (1.54, -5.66)$
12	Ponto C		Ponto de interseção de f, d	Interseção[f, d]	$C = (1.54, 0.34)$
13	Triângulo pol1		Polígono B, A, C	Polígono[B, A, C]	pol1 = 6
13	Segmento b		Segmento [B, A] de Triângulo pol1	Segmento[B, A, pol1]	b = 4
13	Segmento a		Segmento [A, C] de Triângulo pol1	Segmento[A, C, pol1]	a = 3
13	Segmento c		Segmento [C, B] de Triângulo pol1	Segmento[C, B, pol1]	c = 5
14	Ângulo α		Ângulo entre B, A, C	Ângulo[B, A, C]	α = 90°
15	Polígono pol2		Polígono[B, A, 4]	Polígono[B, A, 4]	pol2 = 16
15	Segmento g		Segmento [B, A] de Polígono pol2	Segmento[B, A, pol2]	g = 4
15	Segmento i		Segmento [A, D] de Polígono pol2	Segmento[A, D, pol2]	i = 4
15	Ponto D		Polígono[B, A, 4]	Polígono[B, A, 4]	$D = (1.54, -6.66)$
15	Ponto F		Polígono[B, A, 4]	Polígono[B, A, 4]	$F = (5.54, -6.66)$
15	Segmento j		Segmento [D, F] de Polígono pol2	Segmento[D, F, pol2]	j = 4
15	Segmento k		Segmento [F, B] de Polígono pol2	Segmento[F, B, pol2]	k = 4
16	Polígono pol3		Polígono[A, C, 4]	Polígono[A, C, 4]	pol3 = 9
16	Segmento l		Segmento [A, C] de Polígono pol3	Segmento[A, C, pol3]	l = 3
16	Segmento m		Segmento [C, H] de Polígono pol3	Segmento[C, H, pol3]	m = 3
16	Ponto H		Polígono[A, C, 4]	Polígono[A, C, 4]	$H = (-1.46, 0.34)$
16	Ponto I		Polígono[A, C, 4]	Polígono[A, C, 4]	$I = (-1.46, -2.66)$
16	Segmento n		Segmento [H, I] de Polígono pol3	Segmento[H, I, pol3]	n = 3
16	Segmento p		Segmento [I, A] de Polígono pol3	Segmento[I, A, pol3]	p = 3
17	Polígono pol4		Polígono[C, B, 4]	Polígono[C, B, 4]	pol4 = 25
17	Segmento q		Segmento [C, B] de Polígono pol4	Segmento[C, B, pol4]	q = 5
17	Segmento r		Segmento [B, J] de Polígono pol4	Segmento[B, J, pol4]	r = 5
17	Ponto J		Polígono[C, B, 4]	Polígono[C, B, 4]	$J = (8.54, 1.34)$
17	Ponto K		Polígono[C, B, 4]	Polígono[C, B, 4]	$K = (4.54, 4.34)$

17	Segmento s		Segmento [J, K] de Polígono pol4	Segmento[J, K, pol4]	s = 5
17	Segmento t		Segmento [K, C] de Polígono pol4	Segmento[K, C, pol4]	t = 5
18	Texto Textopol4	ABC	"Área de = " + pol4	"Área de = " + pol4	Área de = 25
19	Ponto Pontopol4		Ponto em pol4	PontoEm[pol4]	Pontopol4 = (5.26, 0.92, 0)
20	Texto Textopol3	ABC	"Área de = " + pol3	"Área de = " + pol3	Área de = 9
21	Ponto Pontopol3		Ponto em pol3	PontoEm[pol3]	Pontopol3 = (-0.08, -1.34, 0)
22	Ponto Pontopol2		Ponto em pol2	PontoEm[pol2]	Pontopol2 = (3.02, -4.68, 0)
23	Texto Textopol2	ABC	"Área de = " + pol2 + ""	"Área de = " + pol2 + ""	Área de = 16
24	Número k_1	cm	Distância de C a H	Distância[C, H]	$k_1 = 3$
25	Número k_2	cm	Distância de A a B	Distância[A, B]	$k_2 = 4$
26	Número k_3	cm	Distância de B a C	Distância[B, C]	$k_3 = 5$
27	Número k_4	cm^2	Área[pol3]	Área[pol3]	$k_4 = 9$
28	Número k_5	cm^2	Área[pol2]	Área[pol2]	$k_5 = 16$
29	Número k_6	cm^2	Área[pol4]	Área[pol4]	$k_6 = 25$
30	Texto texto1	ABC	"" + (LaTeX[k_1]) + "^{2}+" + (LaTeX[k_2]) + "^{2}=" + (LaTeX[k_4]) + "+" + (LaTeX[k_5]) + "=" + (LaTeX[k_6]) + "=" + (LaTeX[k_3]) + "^{2}"	"" + (LaTeX[k_1]) + "^{2}+" + (LaTeX[k_2]) + "^{2}=" + (LaTeX[k_4]) + "+" + (LaTeX[k_5]) + "=" + (LaTeX[k_6]) + "=" + (LaTeX[k_3]) + "^{2}"	3^{2}+4^{2}=9+16=25=5^{2}
31	Texto texto2	ABC			TEOREMA DE PITÁGORAS
32	Texto texto3	ABC			É dado no plano o triângulo retângulo ABC. Sobre os catetos e a hipotenusa são construídos quadrados com suas respectivas áreas. Inicialmente mova os controles deslizantes de forma a obter números naturais. 1) O que você observa? É possível tirar alguma conclusão? 2) Mova agora livremente os controles deslizantes e de posse de uma calculadora acompanhe os cálculos em cada posição. O que você observou? 3) Com suas palavras, elabore uma afirmação que justifique os fatos observados.

criado com o GeoGebra

Teorema de Tales

Leandro Ramiro

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Comando	Valor
1	Texto texto1	ABC			Teorema de Tales
2	Ponto O	A			O = (0.9, 1.8)
3	Ponto N	A			N = (0.4, 2.9)
4	Ponto M	A			M = (3.3, 5.1)
5	Reta a		Reta MO	Reta[M, O]	a: 3.2x - 2.4y = -1.4
6	Reta b		Reta NO	Reta[N, O]	b: 1.1x + 0.5y = 1.9
7	Ponto A	A	Ponto sobre a	Ponto[a]	A = (0, 0.6)
8	Ponto B	A	Ponto sobre a	Ponto[a]	B = (-1.9, -2)
9	Ponto C	A	Ponto sobre a	Ponto[a]	C = (-4.1, -4.9)
10	Ponto A_1	A	Ponto sobre b	Ponto[b]	A_1 = (1.5, 0.6)
11	Reta c		Reta AA_1	Reta[A, A_1]	c: 0x + 1.5y = 0.9
12	Reta d		Reta passando por B e paralela a c	Reta[B, c]	d: 0x + 1.5y = -3
13	Reta e		Reta passando por C e paralela a c	Reta[C, c]	e: 0x + 1.5y = -7.3
14	Ponto B_1		Ponto de interseção de b, d	Interseção[b, d]	B_1 = (2.7, -2)
15	Ponto C_1		Ponto de interseção de b, e	Interseção[b, e]	C_1 = (4.1, -5)
16	Número distânciaAB	cm	Distância de A a B	Distância[A, B]	distânciaAB = 3.3
17	Texto TextoAB	ABC	"\overline{" + (Nome[A]) + (Nome[B]) + "} \, = \, " + distânciaAB	"\overline{" + (Nome[A]) + (Nome[B]) + "} \, = \, " + distânciaAB	\overline{AB} \, = \, 3.3
18	Número distânciaBC	cm	Distância de B a C	Distância[B, C]	distânciaBC = 3.6
19	Texto TextoBC	ABC	"\overline{" + (Nome[B]) + (Nome[C]) + "} \, = \, " + distânciaBC	"\overline{" + (Nome[B]) + (Nome[C]) + "} \, = \, " + distânciaBC	\overline{BC} \, = \, 3.6
20	Número distânciaA1B1	cm	Distância de A_1 a B_1	Distância[A_1, B_1]	distânciaA1B1 = 2.9
21	Texto TextoA1B1	ABC	"\overline{" + (Nome[A_1]) + (Nome[B_1]) + "} \, = \, " + distânciaA1B1	"\overline{" + (Nome[A_1]) + (Nome[B_1]) + "} \, = \, " + distânciaA1B1	\overline{A_1B_1} \, = \, 2.9
22	Número distânciaB1C1	cm	Distância de B_1 a C_1	Distância[B_1, C_1]	distânciaB1C1 = 3.2
23	Texto TextoB1C1	ABC	"\overline{" + (Nome[B_1]) + (Nome[C_1]) + "} \, = \, " + distânciaB1C1	"\overline{" + (Nome[B_1]) + (Nome[C_1]) + "} \, = \, " + distânciaB1C1	\overline{B_1C_1} \, = \, 3.2

24	Número K_1		Distância[A, B] / Distância [B, C]	Distância[A, B] / Distância [B, C]	K_1 = 0.9
25	Número K_2		Distância[A_1, B_1] / Distância[B_1, C_1]	Distância[A_1, B_1] / Distância[B_1, C_1]	K_2 = 0.9
26	Texto texto2	ABC	"\frac{AB}{BC}=" + (LaTeX[K_1]) + ""	"\frac{AB}{BC}=" + (LaTeX[K_1]) + ""	\frac{AB}{BC}=0.9
27	Texto texto3	ABC	"\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=" + (LaTeX[K_2]) + ""	"\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=" + (LaTeX[K_2]) + ""	\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=0.9
28	Segmento f		Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	f = 3.3
29	Segmento g		Segmento [B, C]	Segmento[B, C]	g = 3.6
30	Segmento h		Segmento [A_1, B_1]	Segmento[A_1, B_1]	h = 2.9
31	Segmento i		Segmento [B_1, C_1]	Segmento[B_1, C_1]	i = 3.2
32	Texto texto4	ABC			Sejam três retas paralelas c, d e e, cortadas por duas retas transversais a e b. Note que ficam determinados os segmentos AB, BC, A_1B_1, B_1, C_1 e as razões AB/BC e A_1B_1/B_1C_1. Mova os pontos e as retas livremente. 1) O que você observa quanto as razões? 2) Se algum dos segmentos fosse desconhecido, como poderíamos determiná-lo? 3) Com suas palavras, elabore uma afirmação que justifique os fatos observados.

criado com o GeoGebra