

Valmir Ancelmo Dias

## **O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Ilha Solteira – SP

2015

Valmir Ancelmo Dias

## **O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre, junto ao PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus de São José do Rio Preto, Polo de Ilha Solteira.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Silvia Regina Vieira da Silva.

Ilha Solteira – SP

2015

Dias, Valmir Ancelmo.

O ensino de funções na educação básica / Valmir Ancelmo  
Dias. -- São José do Rio Preto, 2015  
202 f. : il., tabs.

Orientador: Sílvia Regina Vieira da Silva  
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual  
Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e  
Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) -  
Estudo e ensino. 3. Educação de base - Mato Grosso do Sul. 4. Mato  
Grosso do Sul - Matemática - Currículos. 5. Livros didáticos. I. Silva,  
Sílvia Regina Vieira da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de  
Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.  
III. Título.

CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Valmir Ancelmo Dias

## **O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre, junto ao PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus de São José do Rio Preto, Polo de Ilha Solteira.

Comissão Examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Silvia Regina Vieira da Silva  
UNESP/Ilha Solteira – SP  
Orientadora

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Deise Aparecida Peralta  
UNESP/Ilha Solteira – SP

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Irene Coelho Araujo  
UEMS/Cassilândia – MS

Ilha Solteira – SP

11 de Junho de 2015

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço a Deus por tudo.

Em especial, aos meus pais Valdeir e Sônia, por tudo que fizeram por mim. Pai, mãe vocês são dádivas de Deus em minha vida!

À minha filha Álira – uma adolescente – por ter conseguido conviver com minha ausência e, mesmo assim, me incentivar a continuar.

À Tatiana – minha namorada, companheira, amiga, conselheira, cúmplice, etc., enfim, a pessoa que suportou a minha falta de tempo e muito mais – a minha eterna gratidão e carinho.

A todas as pessoas que trabalharam comigo neste período. Na Escola Evangélica Avivamento Bíblico, especialmente às coordenadoras pedagógicas Eliane Cristina e Jucélia e à secretária Simoni, pelo total apoio, incentivo e amizade. Na FACHASUL – Faculdade de Chapadão do Sul, em especial ao coordenador de cursos Luiz Henrique e ao professor Eule José pelo apoio, a compreensão e a amizade. E na UEMS – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, especialmente aos coordenadores do curso de matemática Marco (ex-coordenador) e Regina (atual coordenadora) pela compreensão.

Às Instituições FACHASUL, pelo apoio financeiro e Escola Evangélica Avivamento Bíblico, por me liberar para estudar nas vésperas de provas e toda sexta-feira durante o ano de 2013 para frequentar aulas neste Mestrado. Ambas são instituições particulares, mas, mostraram comprometimento com uma educação de qualidade, que perpassa pela qualificação dos seus professores.

A todos os colegas de turma, principalmente ao Franklin (companheiro de viagens e de estudos), ao José Luis pelas listas de exercícios resolvidas, à Marli e à Luzia (pela hospedagem).

A todos os professores do Curso, especialmente à professora Dr.<sup>a</sup> Sílvia Regina – pela orientação deste trabalho, com muita paciência e compreensão.

À professora Adélia (coordenadora da escola estadual citada neste trabalho) pelos livros didáticos emprestados.

À professora Carla Christina pela preciosa ajuda com o Abstract.

Não posso deixar de externar meus sinceros e profundos agradecimentos àquelas pessoas que me ajudaram nos tempos da graduação, em especial ao professor Vantuir Adriano e à Luciene Vaz.

Enfim, a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram com meu sucesso pessoal e profissional até o momento: Muito Obrigado!

## RESUMO

A vivência num ambiente escolar (magistério e gestão) nos levou a conjecturar que muitos professores se organizam em função do que devem ministrar em determinado ano, considerando como pré-requisitos conteúdos ministrados em etapas anteriores, e muitas vezes, sem ter noção alguma do que será trabalhado posteriormente. Nesta Dissertação, portanto, considerando coleções de livros didáticos utilizados numa escola pública de Cassilândia – MS, evidenciaremos como alguns conceitos relacionados à Definição de Função surgem na Educação Básica. Assim, pretendemos, além de sensibilizar o professor de Matemática em relação ao desenvolvimento de uma definição, conscientizá-lo da necessidade do mesmo ter noções gerais de como os conteúdos matemáticos são desenvolvidos em cada série/ano da Educação Básica, independente da série/ano que efetivamente leciona. Ou seja, pretendemos defender a importância do professor de Matemática ter conhecimento da organização curricular de Matemática de toda a Educação Básica e não só da série/ano que leciona.

**Palavras-chave:** Currículo de Matemática; Ensino de Matemática; Função; Educação Básica; Livro Didático.

## ABSTRACT

The experience in a school setting (teaching and management) led us to conjecture that any teachers are organized according to the minister are in a given year, considering how prerequisites content taught in previous steps, and often without having any notion of to be worked subsequently. In this thesis, therefore, considering collections of textbooks used in a public school in Cassilândia - MS, we'll show how some concepts related to Function Definition arise in Basic Education. So, we want, in addition to sensitizing the professor of mathematics in relation to the development of a definition, the teacher aware of the need to have general notions of how the mathematical contents are developed in each grade/year of Basic Education, regardless of the series/year effectively he teaches. In other words, we intend to defend the importance of the mathematics teacher to have knowledge of curricular organization of Mathematics of the entire Basic Education and not only the series/year he teaches.

**Keywords:** Curriculum Mathematics; Mathematics Teaching; Function; Basic Education; Textbook.



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO</b> .....	<b>16</b>
<b>2. A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO NO ENSINO SUPERIOR: ALGUNS LIVROS DE “MATEMÁTICA SUPERIOR”</b> .....	<b>20</b>
2.1. Fundamentos de Matemática Elementar – conjuntos e funções (IEZZI, 1993).....	21
2.2. Cálculo com Geometria Analítica (SWOKOWSKI, 1994).....	21
2.3. O Cálculo com Geometria Analítica (LEITHOLD, 1994).....	22
2.4. Cálculo I (ÁVILA, 1994).....	23
2.5. Cálculo I (GUIDORIZZI, 2001).....	24
2.6. Cálculo I (ANTON, 2000).....	25
2.7. Números e Funções Elementares (LIMA, 2013).....	26
<b>3. A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA</b> .....	<b>28</b>
3.1. Educação Básica.....	29
3.1.1. No Ensino Fundamental I (1º ao 5º Ano).....	30
3.1.1.1. No Primeiro Ano do Ensino Fundamental I.....	30
3.1.1.2. No Segundo Ano do Ensino Fundamental I.....	42
3.1.1.3. No Terceiro Ano do Ensino Fundamental I.....	46
3.1.1.4. No Quarto Ano do Ensino Fundamental I.....	53
3.1.1.5. No Quinto Ano do Ensino Fundamental I.....	59
3.1.2. No Ensino Fundamental II (6º ao 9º Ano).....	62
3.1.2.1. Conjuntos e Relações entre Conjuntos.....	62
3.1.2.2. Dependência.....	63

3.1.2.3.	Variação.....	63
3.1.2.4.	Expressões Algébricas.....	68
3.1.2.5.	Representação Geométrica.....	81
3.1.2.6.	Funções (9º Ano do Ensino Fundamental).....	83
3.1.3.	No Ensino Médio (Funções).....	103
<b>4.</b>	<b>O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES E/OU SUGESTÕES.....</b>	<b>116</b>
4.1.	No Ensino Fundamental.....	117
4.1.1.	No Ensino Fundamental I (1º ao 5º Ano).....	118
4.1.2.	No Ensino Fundamental II (6º ano 9º Ano).....	120
4.2.	Introdução no Ensino Médio.....	125
4.3.	Aprofundamento no Ensino Médio.....	129
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>135</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>137</b>
	<b>ANEXOS.....</b>	<b>142</b>
	ANEXO I (Livros de “Matemática Superior”).....	143
	ANEXO II (Livros Didáticos do Ensino Fundamental I).....	151
	ANEXO III (Livros Didáticos do Ensino Fundamental II).....	173
	ANEXO IV (Livros Didáticos do Ensino Médio).....	186

## INTRODUÇÃO

Desde a década de 1990 estou no magistério; lecionei nove anos, na Educação Básica, sem ter formação específica. No início, como técnico em agropecuária, assumi disciplinas numa escola agrícola e, também, aulas de Matemática (mais de dois anos para o Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano e o restante para o Ensino Médio) e Física (Ensino Médio). Em 2000, deixei o Ensino Agropecuário e passei a dedicar-me apenas às disciplinas de Matemática e Física, especialmente, para o Ensino Médio. Terminei o curso de Licenciatura em Matemática em 2003, curso de especialização em Didática e Metodologia para o Ensino de Matemática em 2005 e, a partir de 2006, tornei-me professor colaborador no Ensino Superior em duas instituições, nos cursos de Ciências Contábeis, Administração, Agronomia e, inclusive, no curso de Licenciatura em Matemática; lecionando disciplinas como Estágio Curricular Supervisionado, Prática de Ensino, Fundamentos de Matemática, Matemática Financeira, Estatística, etc.

De dezembro de 2009 até dezembro de 2014 atuei, também, como gestor (diretor) de uma escola particular que oferecia todas as etapas da Educação Básica, para tanto utilizava material didático apostilado. Vale ressaltar que se tratava de uma escola pequena, as salas de aula possuíam, em média, 16 alunos. E, na condição de gestor, em 2013, em especial, aconteceu uma experiência com uma professora que, na época, era licenciada em Matemática há, aproximadamente, seis anos e lecionava no 4º ano do Ensino Fundamental (série/ano relacionada à experiência), há dois anos.

Um dia a referida professora quis saber sobre como ensinar aos seus alunos se um determinado número é par ou é ímpar (Paridade de Um Número). Ao ser questionada, se sabia como tal assunto era trabalhado nas séries/anos

anteriores, afirmou que não. Então, resolvemos analisar os livros didáticos dos anos anteriores para planejarmos como trabalhar com os alunos. Durante a pesquisa, resolvemos verificar como o assunto continuaria sendo tratado nos anos seguintes. O tempo gasto para efetuar a pesquisa nos livros didáticos e discutir sobre o assunto foi, em torno de, uns três ou quatro encontros, de uma hora cada um. O que foi primordial para traçarmos um plano de como trabalhar com os alunos da referida professora.

Na breve pesquisa que fizemos, sobre a construção do conceito de Paridade, verificamos que, ainda na Educação Infantil, o ato de formar duplas estava relacionado a conceitos de paridade; cada dupla é um par (sem falar em ímpar).

Posteriormente, nas séries/anos iniciais do Ensino Fundamental, encontramos uma forma de tratamento da situação: considerava-se uma determinada quantidade de objetos, formavam-se grupinhos de dois em dois e, se não sobrasse algum objeto, a quantidade seria par, se sobrasse um, a quantidade seria ímpar.

Quando os alunos já soubessem dividir, a sugestão seria afirmar que, na divisão por dois (formando grupinhos de dois em dois), se sobrar resto um, é ímpar, se não sobrar resto, é par – caso dos alunos da série/ano em questão.

Depois de todo esse trabalho, esperava-se que o aluno tivesse condições de fazer as seguintes conjecturas: “todo número que tem como último algarismo 0, 2, 4, 6, ou 8, é par”; “se tem como último algarismo 1, 3, 5, 7, ou 9, é ímpar”.

E, quando tivessem uma boa noção algébrica (no Ensino Médio, por exemplo) poderiam ser abordadas questões como: um número par pode ser expresso como  $2n$  e um número ímpar como  $2n + 1$ ,  $n$  um número inteiro qualquer.

[...] partindo do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que

caracterizam o “pensar matematicamente”. Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser criteriosa, proporcionando ao aluno “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p. 70) *grifos nosso*.

Partindo do princípio descrito anteriormente – a qualidade do processo é prioritária em relação à quantidade de conteúdos – após a verificação de como o conceito de Paridade era construído durante a Educação Básica, traçamos um plano de trabalho a ser desenvolvido com os alunos; o mesmo contemplava um momento (em torno de quatro aulas) para revisão/reconstrução do conceito para, posteriormente, chegarmos aos conteúdos específicos daquela série/ano.

A experiência induziu-me a acreditar que, além do planejamento da aula vinculada à etapa em questão, o professor deveria ter um “conhecimento diferenciado” do que se vai ensinar; ter noções gerais do tema em questão. Além de *“Ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções”*. (BRASIL, 2001, p. 37).

Ou seja, acreditamos que, independente da qualidade da sua formação inicial, ou tempo de magistério, o professor deve ter uma preocupação diferenciada ao preparar a sua aula. Que, além de considerar a “bagagem” do aluno, o professor deve ter noções sobre o que deve ser ensinado antes e depois da etapa em que o mesmo está ministrando aulas.

Portanto, a vivência num ambiente escolar (magistério e gestão) nos levou a conjecturar que muitos professores se organizam em função do que devem ministrar em determinada série/ano, considerando como pré-requisitos conteúdos ministrados em períodos anteriores. Alguns nem mesmo têm noções de como determinados assuntos são abordados nas séries/anos anteriores e/ou posteriores. E, em alguns casos, essa situação encontra amparo em documentos

oficiais. Por exemplo, muitas vezes, o licenciando em Matemática não tem noções de como as quatro operações são ensinadas nos primeiros anos do ensino fundamental, não existe previsão dessa necessidade em documentos oficiais. Daí, o licenciando se torna professor, recebe alunos com dificuldades nas quatro operações e, provavelmente, não conseguirá dar o tratamento adequado à situação.

Nessa Dissertação optamos por outro tema, “funções matemáticas”, mas, defendendo a mesma ideia, portanto, considerando coleções de livros didáticos utilizados numa escola pública de Cassilândia – MS, evidenciaremos como alguns conceitos relacionados à Definição de Função surgem na Educação Básica.

Assim, pretendemos, além de sensibilizar o professor de Matemática em relação ao desenvolvimento de uma definição, conscientizá-lo da necessidade do mesmo ter noções gerais de como os conteúdos matemáticos são desenvolvidos em cada série/ano da Educação Básica, independente da série/ano que efetivamente leciona. Ou seja, pretendemos defender a importância do professor de Matemática ter conhecimento da organização curricular de Matemática de toda a Educação Básica e não só da série/ano que leciona.

Mas, porque optamos pela Definição de Função? Por ser considerada uma das definições mais relevantes, não só na Educação Básica, mas, na Matemática como um todo.

O conceito função é um dos mais genéricos e mais unificadores de toda a Matemática contemporânea, fazendo-se presente em efetivamente todos os seus campos, incluindo Álgebra, Geometria, Análise, Combinatória, Probabilidade, etc. Diversas noções importantes – desde as mais elementares até as mais sofisticadas – admitem formulações em linguagem de funções, que contribuem para a clareza da exposição e impulsionam o desenvolvimento de ideias. (LIMA, 2012, p. 50).

E, no que diz respeito à relevância acadêmica, utilizamos o banco de dados do PROFMAT e, dentre os mais de 150 trabalhos que traziam o termo “função” como “localizador”, não encontramos algum que desse o enfoque almejado neste trabalho.

ARDENGI (2008), que fez um levantamento bibliográfico sobre trabalhos relacionados à função, tomando como referência 43 Dissertações de Mestrados e 03 Teses de Doutorados desenvolvidas no Brasil de 1970 a 2005, reforça a relevância deste trabalho, uma vez que não existe menção a algum trabalho semelhante.

Neste trabalho pretendemos, além de sensibilizar o professor de Matemática em relação ao desenvolvimento de uma definição, conscientizá-lo da necessidade do mesmo ter noções gerais de como os conteúdos matemáticos são desenvolvidos em cada série/ano da Educação Básica, independente da série/ano que efetivamente leciona. Ou seja, pretendemos defender a importância do professor de Matemática ter conhecimento da organização curricular de Matemática de toda a Educação Básica e não só da série/ano que leciona.

Para tanto, utilizaremos a História da Matemática e de coleções de livros didáticos utilizados numa escola pública de Cassilândia – MS.

Ou seja, pretendemos defender a importância do professor de Matemática ter conhecimento da organização curricular de Matemática de toda a Educação Básica e não só da série/ano que leciona. Pois, acreditamos que um conceito ou definição não é construído num único momento (série/ano), mas, é construído ao longo da escolarização.

Para tanto organizaremos o texto em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, será apresentado um breve resumo das principais elaborações da Definição de Função ao longo dos anos, com o intuito de sensibilizar o professor de Matemática com relação ao desenvolvimento histórico de uma definição.

No segundo capítulo, pretendemos destacar como a Definição de Função é apresentada em alguns livros de Matemática utilizados na graduação, pois, acreditamos que os mesmos podem influenciar na forma com que o (futuro) professor abordará o tema “Funções” na Educação Básica.

No terceiro capítulo, com o intuito de evidenciar como alguns conceitos (implícitos ou explícitos), relacionados à Definição de Função, surgem na Educação Básica, destacaremos a abordagem dos mesmos nos livros didáticos utilizados por uma escola estadual de Cassilândia – MS, em 2014, do 1º ano do Ensino Fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio.

E, no quarto capítulo, finalmente pretendemos promover algumas reflexões e compartilhar algumas sugestões que julgarmos relevantes ao professor (ou futuro professor) de Matemática, sobre a construção da Definição de Função no Ensino Fundamental e Ensino Médio.



## **CAPÍTULO I**

### **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.**

(...) o conceito de função sofreu significativas mudanças ao longo de seu desenvolvimento histórico, até que se chegasse à definição atual de Bourbaki. Nem sempre no passado o conceito foi assim tão genérico como é hoje. (LIMA, 2012, p. 50).

Como afirma ARDENGHI (2008), é usual, autores de trabalhos relacionados à “função matemática”, destinarem um capítulo à história do conceito ao invés de fazerem referências a autores que o fizeram anteriormente.

Não pretendemos cometer esse “erro”. Neste capítulo apenas explicitaremos elaborações da Definição de Função ao longo dos anos, com o intuito de sensibilizar o professor de Matemática com relação ao desenvolvimento de uma definição. Além disso, a presença da História da Matemática nas aulas pode contribuir para que os alunos percebam a Matemática como uma criação humana que se desenvolve ao longo do tempo. (ROQUE e GOMES, 2011).

#### **Um pouco de história...**

Segundo CARAÇA (1989) a noção de correspondência, um dos conceitos implícitos na Definição de Função, nasce nas contagens rudimentares do homem primitivo. Já na antiguidade, quando tudo na Ciência, de uma forma geral, estava por construir, as preocupações iniciais estavam relacionadas à descrição

qualitativa dos fenômenos naturais. Assim, não existiam condições de avanço com relação a conceitos de natureza qualitativa.

Há registros de apenas situações que envolvem a ideia intuitiva de dependência de quantidades, ou seja, uma quantidade depende de outra quantidade, por exemplo, as tabelas babilônicas que tratavam de registros de correspondências e as tabelas de Ptolomeu, parecidas com as atuais de senos, também estabeleciam correspondências consideradas hoje de natureza funcional.

Mas, com as mudanças ocorridas na sociedade, a partir do século XV, os fenômenos naturais começaram a ser associados à quantidade, assim, a variação (outro conceito implícito na Definição de Função) encontrou condições propícias para ser desenvolvida; antes os estudiosos buscavam algo constante para definir Ciência. Começa, então, a ideia de função como variação, ligada às representações geométricas e mecânicas, especialmente, devido ao desenvolvimento científico europeu; mais verbalmente ou graficamente do que por fórmulas.

Com o surgimento de novos problemas, alguns intrínsecos à própria Matemática, a Definição de Função passou por várias alterações, dentre elas, estar relacionada às expressões analíticas – Lei de Associação: outro conceito implícito na Definição de Função. As funções analíticas tornam-se as mais utilizadas até serem desvinculadas da Definição de Função a partir de Dirichlet, em 1837 (como veremos) e resultar na definição atual, de N. Bourbaki – 1939.

Segundo ROQUE (2012):

Hoje, quando pensamos em função, duas coisas vêm à mente: a curva que a representa graficamente e sua expressão analítica. Em seguida, se fizermos um exercício mais formal, também lembramos da ideia de correspondência, expressa pela definição em termos de conjuntos. As duas primeiras ideias serviram, durante muito tempo, como definição de função. (ROQUE, 2012, p. 296)

Para evidenciar o desenvolvimento da Definição de Função, utilizaremos ROQUE (2012, pp. 301-340), para destacar algumas definições, em ordem cronológica:

Jean Bernoulli (1718)	<i>“Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes.”</i>
Euler (1748)	<i>“Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer desta quantidade e de números, ou quantidades constantes.”</i>
Cauchy (1821)	<i>“Quando quantidades variáveis são ligadas de tal maneira que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente estas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de “variável independente”; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos funções desta variável.”</i>
Fourier (1822)	<i>“Uma função <math>f(x)</math> representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, arbitrárias. Dada uma infinidade de valores para as abscissas <math>x</math>, existe um igual número de ordenadas <math>f(x)</math>, todas com valores numéricos que podem ser positivos, ou negativos ou nulos. Não precisamos supor que essas ordenadas sejam sujeitas a uma lei comum, elas se sucedem de uma maneira qualquer e cada uma delas é determinada como se fosse uma única quantidade.”</i>
Dirichlet (1837)	<i>“Sejam <math>a</math> e <math>b</math> dois números fixos e <math>x</math> uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre <math>a</math> e <math>b</math>. Se, a cada <math>x</math>, corresponde um único <math>y</math> finito de maneira que, quando <math>x</math> se move continuamente no intervalo entre <math>a</math> e <math>b</math>, <math>y = f(x)</math> também varia progressivamente, então <math>y</math> é dita uma função contínua de <math>x</math> neste intervalo. Para isto, não é obrigatório, em absoluto, nem que <math>y</math> dependa de <math>x</math> de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas.”</i>

Riemann também teve a sua contribuição, “se preocupou (...) em estabelecer uma teoria das funções usando somente suas propriedades.” (ROQUE, 2012, p. 341).

Como vimos, a Definição de Função foi alterada ao longo do tempo, passando por diversas reformulações, até chegar à definição de Bourbaki<sup>1</sup>, 1939:

“Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável  $x$  de E e uma variável  $y$  de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer  $x \in E$ , existe um único  $y \in F$ , e apenas um, que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento  $x \in E$ , o elemento  $y \in F$  que se encontra na relação dada com x; dizemos que é o valor da função para o elemento, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função”. (Rüthing, 1984, apud BOTELHO e REZENDE).

Com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, a Definição de Função passou da ideia concreta de dependência e variação para uma visão mais abstrata relacionada às relações entre conjuntos numéricos. Porém, como veremos no decorrer deste trabalho, possivelmente, talvez não seja a melhor forma de introduzir a Definição de Função na Educação Básica.

No próximo capítulo observaremos como é tratada a Definição de Função em alguns livros de Matemática utilizados no Ensino Superior.

---

<sup>1</sup> Nicolas Bourbaki é o pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos, majoritariamente franceses, escreveram uma série de livros que expunham a Matemática Avançada Moderna, que começaram a ser editados em 1935. Com o objetivo de fundamentar toda a Matemática na Teoria dos Conjuntos, o grupo lutou por mais rigor e simplicidade, criando uma nova terminologia e conceitos ao longo dos tempos.

Enquanto que Nicolas Bourbaki é uma personagem inventada, o grupo Bourbaki é oficialmente conhecido como a Associação dos colaboradores de Nicolas Bourbaki, que tem um gabinete na École Normale Supérieure, em Paris. (WIKIPÉDIA).

## CAPÍTULO II

### A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO NO ENSINO SUPERIOR: ALGUNS LIVROS DE “MATEMÁTICA SUPERIOR”.

Um dos temas mais importantes em Cálculo é a análise das relações entre quantidades físicas e matemáticas. Tais relações podem ser descritas em termos de gráficos, de fórmulas, de dados numéricos ou de palavras. [...] o conceito de função é a ideia básica subjacente a quase todas as relações matemáticas e físicas, não importando como elas são expressas. (ANTON, 2000, p. 15)

Pretendemos, com este capítulo, destacar o referencial utilizado na graduação, acreditando que o mesmo pode influenciar na forma com que o (futuro) professor abordará o tema “Funções” na Educação Básica.

O critério para a escolha dos livros utilizados neste capítulo foi o acesso aos mesmos pelo autor durante a sua formação acadêmica (graduação e pós-graduação) e/ou por sua experiência no exercício da docência no Ensino Superior.

Os livros considerados são: Fundamentos de Matemática Elementar – conjuntos e funções (IEZZI, 1993); Cálculo com Geometria Analítica (SWOKOWSKI, 1994); O Cálculo com Geometria Analítica (LEITHOLD, 1994); Cálculo I (ÁVILA, 1994); Cálculo I (GUIDORIZZI, 2001); Cálculo I (ANTON, 2000); Números e Funções Reais (LIMA, 2013). Capas disponíveis no anexo I deste trabalho.

## 2.1. Fundamentos de Matemática Elementar – conjuntos e funções (IEZZI, 1993).

IEZZI (1993), depois de definir Relação, através do uso de diagramas de setas (não tem teoria dos conjuntos antes) define: “Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , não vazios, uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  recebe o nome de aplicação de  $A$  em  $B$  ou função de  $A$  com imagens em  $B$  se, e somente se, para todo  $x \in A$  existe um só  $y \in B$  tal que  $(x,y) \in f$ ” (IEZZI, 1993, p. 81).

Em seguida, através do uso de diagramas de setas mostra quais as condições devem satisfazer uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  para ser aplicação (ou função).

Após uma série de exemplos e exercícios destacando um dos conceitos inseridos na Definição de Função (a Lei de Associação) o autor define Domínio, Contradomínio e Imagem. E finaliza ressaltando a Unicidade, o Domínio, o Contradomínio e a Lei de Associação, da seguinte forma:

Observemos que uma função  $f$  fica completamente definida quando são dados o seu domínio  $D$ , o seu contradomínio e a lei de correspondência  $y = f(x)$ .

Quando nos referimos à função  $f$  e damos apenas a sentença aberta  $y = f(x)$  que a define, subentendemos que  $D$  é o conjunto dos números reais  $x$  cujas imagens pela aplicação  $f$  são números reais, isto é,  $D$  é formado por todos os números reais  $x$  para os quais é possível calcular  $f(x)$ . (IEZZI, 1993, p. 90)

## 2.2. Cálculo com Geometria Analítica (SWOKOWSKI, 1994).

SWOKOWSKI (1994) define função, sem fazer qualquer tipo de comentário antes (exceto que a noção de função é fundamental para o trabalho com o restante de seu livro - Cálculo), como segue:

Uma **função** de um conjunto D em um conjunto E é uma correspondência que associa a cada elemento x de D exatamente um elemento y de E.

O elemento y de E é o **valor** de f em x e se denota por  $f(x)$  (lê-se “f de x”). O conjunto D é o **domínio** da função. O **contradomínio** f é o subconjunto de E que consiste em todos os valores possíveis  $f(x)$  para x em D. SWOKOWSKI (1994, p. 17)

Percebe-se que o termo “contradomínio de f” é o que usualmente denominamos por Imagem de f (talvez seja um erro de tradução). O autor destaca o fato de o Domínio ser formado pelo conjunto dos números reais ou um subconjunto dos reais. Mas, ressalta que o maior subconjunto possível dos reais é que deve ser tomado como o Domínio da função.

### 2.3. O Cálculo com Geometria Analítica (LEITHOLD, 1994).

LEITHOLD (1994), antes de definir função, tece alguns comentários sobre situações do cotidiano relacionadas à ideia de dependência/variação que possuem natureza funcional:

[...] o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas; a produção total de uma fábrica pode depender do número de máquinas usadas; a distância percorrida por um objeto pode depender do tempo decorrido desde que ele deixou um dado ponto; o volume do espaço ocupado por um gás sob uma pressão constante depende da temperatura do gás; a resistência de um fio elétrico com comprimento fixo depende de seu diâmetro [...]. (LEITHOLD, 1994, p. 31)

E a seguir define, preliminarmente, função como:

Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto X de números reais  $x$  a um conjunto Y de números reais  $y$ , onde o número  $y$  é único para um valor específico de  $x$ .

[...] Estabelecendo o conceito de uma função de outra forma, consideramos intuitivamente o número real  $y$  no conjunto Y como uma função do número real  $x$  no conjunto X se houver uma regra pela qual um valor específico de  $y$  seja atribuído a um valor de  $x$ . Essa regra é dada, muitas vezes, por uma equação [...].

[...] O conjunto X de números reais descritos acima é o domínio da função, e o conjunto Y de números reais atribuídos aos valores de  $x$  em X é a imagem da função. (LEITHOLD, 1994, p. 31)

Em seguida, traz outra definição que a chama de “definição formal de função”, utilizando pares ordenados ao invés de uma lei de correspondência.

Uma **função** é um conjunto de pares ordenados de números  $(x,y)$ , sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de  $x$  é chamado de **domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de  $y$  é chamado a **imagem** da função. (LEITHOLD, 1994, p. 32)

Em ambas garante a unicidade e apenas não define o Contradomínio. A forma feita por LEITHOLD (1994) pode dificultar a compreensão, pois, pode passar a ideia de que se trata de conceitos diferentes, enquanto que o que se pretende é (talvez) mostrar o mesmo conceito sob pontos de vista diferentes.

#### 2.4. Cálculo I (ÁVILA, 1994).

Este livro, em especial, foi escolhido devido a um fato acontecido, recentemente, numa visita de uma Comissão Avaliadora do MEC ao Curso de Licenciatura em Matemática da UEMS/UUC. Os membros da referida Comissão



comentaram que o achavam um excelente livro, de linguagem bem acessível aos acadêmicos.

Definições:

- Um símbolo  $x$  que serve para designar os elementos de um conjunto  $D$  chama-se variável de domínio  $D$ .
- Quando duas variáveis  $x$  e  $y$  são tais que a cada valor de  $x$  corresponde um valor bem definido de  $y$ , segundo uma lei qualquer, dizemos que  $y$  é função de  $x$ . (ÁVILA, 1994, p. 58)

Certamente quando diz “[...] a cada valor de  $x$  corresponde um valor bem definido de  $y$  [...]” quer evidenciar que a cada valor de  $x$  deva ter um e apenas um valor correspondente  $y$ , porém, isso não fica claro em sua definição.

ÁVILA (1994), realmente, busca simplificar a linguagem utilizada no seu livro de Cálculo, no entanto, pode prejudicar algumas definições, como é o caso da Definição de Função.

## 2.5. Cálculo I (GUIDORIZZI, 2001).

Entendemos por uma função  $f$  uma terna  $(A, B, a \rightarrow b)$  onde  $A$  e  $B$  são dois conjuntos e  $a \rightarrow b$ , uma regra que nos permite associar a cada elemento  $a$  de  $A$  um único  $b$  de  $B$ . O conjunto  $A$  é o domínio de  $f$  e indica-se por  $D_f$ , assim  $A = D_f$ . O conjunto  $B$  é o contradomínio de  $f$ . O único  $b$  de  $B$  associado ao elemento  $a$  de  $A$  é indicado por  $f(a)$  (leia-se  $f$  de  $a$ ); diremos que  $f(a)$  é o valor que  $f$  assume em  $a$  ou que  $f(a)$  é o valor que  $f$  associa a  $a$ . GUIDORIZZI (2001, p. 26)

GUIDORIZZI (2001) usa uma linguagem “bem formal”, evidenciando todos os detalhes que a definição exige, como: a Unicidade, o Domínio, o Contradomínio e a Lei de Associação; só não utiliza o termo Imagem.

Em seguida, GUIDORIZZI (2001) deixa claro que tratará de funções de uma variável real a valores reais, ou seja, o Domínio e o Contradomínio serão subconjuntos dos números reais; salvo menção contrária.

## 2.6. Cálculo I (ANTON, 2000).

ANTON (2000) primeiro busca provocar reflexões sobre dependência/variação entre algumas grandezas e posteriormente traz duas definições para função.

Definição I: Se uma variável  $y$  depende de uma variável  $x$ , de tal forma que cada valor de  $x$  determina exatamente um valor de  $y$ , então dizemos que  **$y$  é uma função de  $x$** .

Definição II: Uma **função**  $f$  é um critério que associa uma única saída a cada entrada. Se a entrada for denotada por  $x$ , então a saída é denotada por  $f(x)$  (leia-se “ $f$  de  $x$ ”). (ANTON, 2000, p. 19)

ANTON (2000) ressalta que o termo “única”, significa “exatamente uma” e que, dependendo de como surge a função, a mesma pode ser representada de quatro maneiras básicas: *“Numericamente, por tabelas; Geometricamente, por gráficos; Algebricamente, por fórmulas; e Verbalmente”*. Trata do Domínio e da Imagem como sendo propriedades da Função. *“Se  $y=f(x)$ , então o conjunto de todas as entradas possíveis (valores de  $x$ ) é chamado **domínio** de  $f$ , e o conjunto de saídas (valores de  $y$ ), os quais resultam quando  $x$  varia sobre o domínio, é chamado de **imagem** de  $f$ ”*.

Uma definição só encontrada em ANTON (2000), dentre os livros considerados, é a definição de Domínio Natural:

Se uma função de variável real a valores reais for definida por uma fórmula e se não houver um domínio determinado explicitamente, então deve ser entendido que o domínio consiste de todos os números reais para os quais a fórmula dê lugar a um valor real. Isto é chamado de **domínio natural** da função. (ANTON, 2000, p. 19)

A definição dada para Domínio Natural reforça a preocupação em estabelecer o maior subconjunto possível dos reais como sendo o Domínio de uma função real.

## 2.7. Números e Funções Reais (LIMA, 2013).

Em LIMA (2013) encontramos:

Dados dois conjuntos  $X$ ,  $Y$ , uma função  $f: X \rightarrow Y$  (lê-se “uma função de  $X$  em  $Y$ ”) é uma *regra* (conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y = f(x) \in Y$  (leia-se “ $y$  igual a  $f$  de  $x$ ”). O conjunto  $X$  chama-se *domínio* e  $Y$  é o *contradomínio* da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se *imagem* de  $x$  pela função  $f$ , ou o *valor* assumido pela função  $f$  no ponto  $x \in X$ . Escreve-se  $X \rightarrow f(x)$  para indicar que  $f$  *transforma* (ou *leva*)  $x$  em  $f(x)$ . (LIMA 2013, p. 40)

Vale ressaltar que LIMA (2013) refere-se, ao que muitos chamam de Lei de Formação, como Lei de Associação (termo que também usamos nesse nosso trabalho); talvez, com a intenção de reforçar que uma função é “formada” não só pela Lei de Associação, mas também pelo seu Domínio e Contradomínio; uma vez que o termo “Lei de Formação” pode reforçar a ideia de que é apenas ela que “forma” uma função.

É importante lembrarmos que a Lei de Associação não precisa, necessariamente, ser uma Expressão Analítica e nem única.

### **Algumas palavras...**

Ressaltamos a importância da Definição de Função não só na Educação Básica, mas, na ciência Matemática. Logo, o desenvolvimento desta definição, se torna de extrema importância nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Mas, muitas vezes, tal definição é negligenciada no Ensino Superior, por professores que consideram que é um conteúdo que deveria ser visto no Ensino Básico; o assunto é tratado em forma de revisão.

Tal atitude pode causar danos muito maiores do que se fosse destinado um tempo para uma discussão e aprofundamento da referida Definição.

Com o exposto até o momento, elencamos, a seguir, os principais conceitos (implícitos e explícitos) na Definição de Função:

- ✓ Conjuntos e Relação entre Conjuntos;
- ✓ Dependência;
- ✓ Variação;
- ✓ Expressões Algébricas;
- ✓ Representação Geométrica.

No próximo capítulo, pretendemos mostrar como esses conceitos associados à Definição de Função, vão “surgindo” durante a Educação Básica.

## **CAPÍTULO III**

### **A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA.**

Relacionada à natureza da aprendizagem, é consagrada a proposição de que se constrói o conhecimento complexo a partir das experiências, pois os esquemas mentais são construídos em uma hierarquia cada vez mais complexa, sendo a aprendizagem entendida como ativa, volitiva e mediada interna e socialmente. A aprendizagem é um processo de descoberta, de construção pessoal e de significados compartilhados, que são obtidos a partir da informação e da experiência, filtrados pelas percepções, sentimentos e pensamentos, bem como da negociação com os outros. (BRITO, 2011, p. 34)

Com o intuito de evidenciar como os conceitos relacionados à Definição de Função (elencados no final do capítulo anterior) surgem na Educação Básica, neste capítulo utilizaremos três coleções de livros didáticos utilizados numa escola pública de Cassilândia – MS, em 2014; duas coleções relacionadas ao Ensino fundamental e outra ao Ensino Médio.

Tal escola foi selecionada por oferecer do 1º ano do Ensino Fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio e por ser considerada uma escola bem conceituada na Cidade. A referida escola está localizada num bairro distante da região central da Cidade, mas, todo início de ano letivo, surgem listas de espera para diversas turmas. Além disso, existem bons comentários feitos pela comunidade interna e externa à Escola.

Vale ressaltar que os livros didáticos utilizados pela escola foram escolhidos seguindo alguns critérios. Primeiro cada professor, individualmente, analisou o “Catálogo” (de livros) disponibilizado pelo MEC. Segundo, houve uma reunião posterior a análise individual, na qual foram reunidos todos os professores das três escolas estaduais existentes em Cassilândia. Na oportunidade foram discutidas as preferências de cada professor até chegarem num consenso.

Assim, todas as escolas fizeram a mesma opção. Com isso, acreditavam estar evitando possíveis transtornos decorrentes de transferências de alunos de uma escola para a outra.

### **3.1. Educação Básica.**

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996, com redação dada pela Lei 12.796 de 2013, a Educação Básica está dividida da seguinte forma:

- ✓ Pré-escola: Crianças de 4 e 5 anos.
- ✓ Ensino Fundamental: Do 1º ao 9º ano;
- ✓ Ensino Médio: 1º, 2º e 3º ano.

Porém, é muito comum no ambiente escolar, dividir o Ensino Fundamental em Ensino Fundamental I (do 1º ao 5º ano) e Ensino Fundamental II (do 6º ao 9º ano). Adotaremos essa divisão.

Embora a Educação Infantil (Pré-escola), atualmente, faça parte da Educação Básica não a incluiremos em nossas análises.

Optamos por destacar algumas atividades, por série/ano, em que os conceitos (implícitos e/ou explícitos) na Definição de Função predominavam.

E, logo após cada atividade, serão tecidos comentários que julgarmos relevantes. E, em se tratando dos Conjuntos Numéricos apresentaremos, no final de cada tópico (série/ano), o tratamento dado para a referida série/ano.

Mas, vale ressaltar que do 6º ao 9º ano os nossos registros são mais concentrados e disponibilizados de forma diferente da etapa anterior, por fazer parte da nossa formação, logo um espaço no qual nos sentimos mais a vontade.

### **3.1.1. No Ensino Fundamental I (1º ao 5º Ano).**

Os livros que serão considerados fazem parte da coleção “Matemática com Alegria” (CARMO, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e) 1º, 2º, 3º, 4º e 5º Ano, respectivamente – as imagens das capas e dos sumários estão disponibilizadas no anexo II deste trabalho.

#### **3.1.1.1. No Primeiro Ano – Ensino Fundamental I.**

- ✓ Logo no início do livro, mais precisamente, na página 07 temos:

**7** QUANTAS CRIANÇAS APARECEM EM CADA CENA?

**A)** NOS QUADROS QUE ESTÃO **AO LADO** DAS CRIANÇAS, FAÇA UM | PARA CADA UMA DELAS.

**B)** **DEPOIS**, ORALMENTE, DIGA QUANTAS CRIANÇAS APARECEM EM CADA CENA.

**Figura 1**

No item “A”, percebe-se a construção do conceito de correspondência, sendo que cada “traço” corresponde a (representa) cada criança, além do conceito de dependência (implícito na mesma), pois a quantidade de “traços” depende da quantidade de crianças.

No item “B”, provavelmente os alunos ainda não conhecem os numerais, por isso é solicitado que digam oralmente quantas crianças aparecem na cena. Espera-se que os alunos consigam relacionar a quantidade de crianças com a quantidade de “traços”.



Além desta atividade, em seguida, propõe uma série de outras atividades, de forma semelhante (comparando a quantidade de objetos com a quantidade de dedos levantados, explorando as quantidades de 1 a 10).

Nestas atividades associa a quantidade de crianças/objetos com a quantidade de dedos (“levantados”) ao invés de “traços”. Há outras atividades, no decorrer do livro, que fazem correspondência com a quantidade de “X” ou quadrinhos, entre outros.

✓ Na página 32:



Figura 2

Introdução (mesmo que de forma intuitiva) de correspondência biunívoca, sendo que a quantidade de meninas depende da quantidade de meninos e cada menina corresponde a um único menino – ideias de natureza funcional.

✓ Na página 37:

2 QUANTOS AMIGOS ESTÃO EM CADA QUADRO?



AGORA, VEJA COMO ESCRIVEMOS OS NÚMEROS **UM**, **DOIS** E **TRÊS**.



DESSES NÚMEROS, MARQUE UM **X** AO LADO DO NÚMERO QUE INDICA A **MAIOR QUANTIDADE** DE CRIANÇAS.

3 LIGUE CADA CARTÃO COM NÚMERO À QUANTIDADE DE LÁPIS QUE ELE INDICA.



3 TRÊS      1 UM      2 DOIS

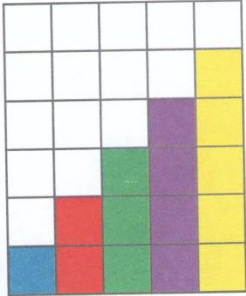

Figura 3

Aparecem pela primeira vez os números (símbolos). Reforçando a ideia de que cada número representa (corresponde) a uma quantidade (o número usado depende da quantidade). No decorrer do livro propõe outras atividades análogas, apenas ampliando o repertório de números/quantidades.

✓ Na página 76:



### REPRESENTANDO QUANTIDADES COM CORES



VEJA O QUADRO QUE CAMILA, PEDRO, ALICE, BETO E ANA ACABARAM DE PINTAR. NELE, CADA CRIANÇA REPRESENTA A QUANTIDADE DE PALITOS QUE POSSUI.




NESSO QUADRO, CADA QUADRADINHO PINTADO INDICA 1 PALITO DE PICOLÉ.

1 AS CORES USADAS PELAS CRIANÇAS FORAM:

CAMILA: AZUL  PEDRO: VERMELHO 

ALICE: VERDE  BETO: LILÁS 

ANA: AMARELO 

- QUANTOS PALITOS CADA CRIANÇA POSSUI?  
CAMILA: \_\_\_\_\_ PEDRO: \_\_\_\_\_ ALICE: \_\_\_\_\_  
BETO: \_\_\_\_\_ ANA: \_\_\_\_\_
- RESPONDA ORALMENTE: QUEM POSSUI **MENOS** PALITOS?
- E QUEM POSSUI **MAIS** PALITOS?

2 JUNTANDO OS PALITOS DE BETO E ANA, QUANTOS SÃO? \_\_\_\_\_ PALITOS.




Figura 4

Aparece a primeira ideia de gráfico. Cada cor está relacionada (corresponde) a cada criança e cada quadrinho colorido representa a um palito e varia conforme a quantidade de palitos de cada criança (dependência e variação).

Na atividade 2 percebe-se, mesmo que de forma intuitiva, a ideia de conjunto quando representa as quantidades de palitos de Beto e de Ana.

✓ Na página 77:

3 CONTE OS PALITOS DE CADA CRIANÇA.



ZECA MARTA RUI

- PARA REPRESENTAR A QUANTIDADE DE PALITOS DE CADA CRIANÇA, PINTE, PARA CADA PALITO, 1 QUADRINHO DA LINHA QUE O NOME DA CRIANÇA INDICA.

ZECA → 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MARTA → 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

RUI → 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- QUANTOS PALITOS CADA UM DELES POSSUI?  
ZECA: \_\_\_\_\_ PALITOS.  
MARTA: \_\_\_\_\_ PALITOS.  
RUI: \_\_\_\_\_ PALITOS.
- QUEM TEM MAIS PALITOS? \_\_\_\_\_

Figura 5

Nesta atividade, a qual vem logo na sequência da anterior, começa a introduzir o “gráfico de barras”.

E, no decorrer do livro, de forma parecida introduz o gráfico de colunas.

Podemos dizer que a altura das colunas ou o comprimento das barras dependem da quantidade de quadrinhos coloridos. São exploradas outras situações análogas, no decorrer do livro, ampliando o repertório de números/quantidades, inclusive com pictogramas.

✓ Na página 119:

8 VAMOS DETERMINAR O TOTAL DE LÁPIS?  
COMPLETE O QUADRO, ESCRREVENDO O QUE FALTA.

LÁPIS DE ESCREVER	LÁPIS DE COLORIR	TOTAL
1	1	$1 + 1 = 2$
1	2	$1 + 2 =$
1	3	$1 + 3 =$
1	4	$1 + 4 =$
1	5	
1	6	
1	7	
1	8	
1	9	

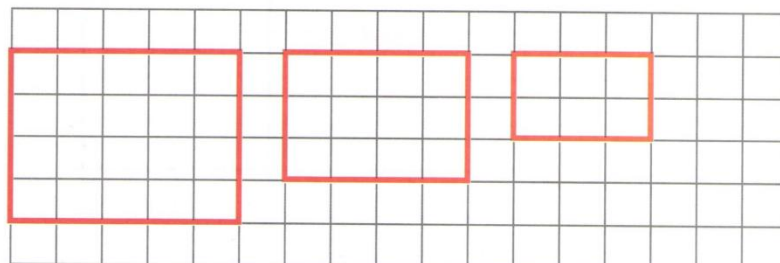
Figura 6

Nesta tabela explora o conceito de dependência, sendo que a última coluna depende dos valores das duas primeiras colunas, variando de acordo com as duas primeiras. Além da ideia de organização de dados.

✓ Na página 141:

MAIS SEQUÊNCIAS PARA VOCÊ COMPLETAR!

5. COBRINDO AS LINHAS DO QUADRICULADO, DESENHE A ÚLTIMA FIGURA.



A) TODAS ESSAS FIGURAS TÊM A MESMA FORMA?

B) VOCÊ DESENHOU A MAIOR OU A MENOR FIGURA DA SEQUÊNCIA?

Figura 7

O mais interessante nesta atividade é que está sendo explorada o conceito de dependência na Geometria, sendo que para construir cada retângulo depende da quantidade de quadrinhos utilizados como comprimento e como largura.

✓ Na página 165:

A BRINCADEIRA AGORA É COLOCAR MAIS CAIXAS DE FÓSFORO NA PILHA E RETIRAR CAIXAS DELA.

SÃO 7 CAIXAS. VOU COLOCAR MAIS 3 CAIXAS.

SÃO 5 CAIXAS. VOU RETIRAR 2 CAIXAS.

8 ANA EMPILHOU 7 CAIXAS DE FÓSFORO. DEPOIS, ELA COLOCOU MAIS 3 CAIXAS. COM QUANTAS CAIXAS DE FÓSFORO A PILHA FICOU?

MAIS 3 CAIXAS



COMPLETE:  
 $7 + 3 = \underline{\quad}$   
 A PILHA FICOU COM  $\underline{\quad}$  CAIXAS DE FÓSFORO.

9 A PILHA DE CAIXAS DE FÓSFORO DE RUI TINHA 5 CAIXAS. ELE RETIROU 2 CAIXAS DELA. QUANTAS CAIXAS DE FÓSFORO FICARAM NA PILHA?

MENOS 2 CAIXAS



A PILHA PASSOU A TER  $\underline{\quad}$  CAIXAS DE FÓSFORO.

Figura 8

Somar/Subtrair pode conter o conceito de dependência, sendo que o resultado da Adição/Subtração depende das quantidades somadas/subtraídas. Será que aqui poderíamos associar o conceito de variação? Talvez, pois quando aumentamos as quantidades a serem somadas/diminuídas, o resultado é maior/menor; e se diminuimos as quantidades a serem somadas/diminuídas, o

resultado é menor/maior. Situação que é tratada de forma semelhante no decorrer do livro, ampliando o repertório.

✓ Na página 176:

2. COM UMA LINHA COLORIDA, LIGUE CADA MOEDA AO QUADRINHO QUE INDICA O SEU VALOR.

10 CENTAVOS	5 CENTAVOS
5 CENTAVOS	10 CENTAVOS
1 CENTAVO	25 CENTAVOS
50 CENTAVOS	1 CENTAVO
25 CENTAVOS	1 REAL
1 REAL	50 CENTAVOS

Ilustração: Carlos Estrella, Luz

Figura 9

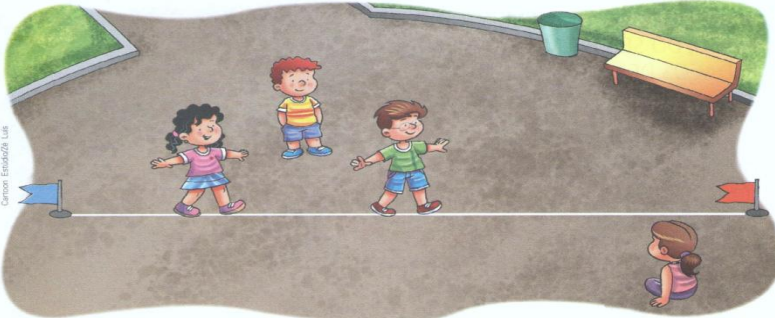
Nesta situação cada moeda corresponde a (representa) um valor. Posteriormente, são desenvolvidas várias atividades envolvendo trocas de moedas, reforçando (por exemplo) que uma de vinte e cinco centavos quando trocada por moedas de um centavo ou por de cinco centavos, resulta numa quantidade diferente de moedas; isto é, a quantidade de moedas que recebe



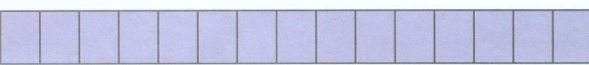
depende da moeda que está sendo trocada e por quais moedas está sendo trocada. São exploradas situações semelhantes com cédulas e com cédulas e moedas juntas.


✓ Na página 189:

9 NO PÁTIO, BETO E ALICE ESTÃO MEDINDO, COM PASSOS, A DISTÂNCIA QUE SEPARA A BANDEIRINHA AZUL DA BANDEIRINHA ALARANJADA.



A) NO GRÁFICO A SEGUIR, CADA QUADRINHO COLORIDO INDICA 1 PASSO. CONTE OS QUADRINHOS COLORIDOS E DESCUBRA A QUANTIDADE DE PASSOS DE BETO E DE ALICE.

BETO → 

ALICE → 

A) QUANTOS PASSOS BETO DEU? \_\_\_\_\_ PASSOS.

B) E A ALICE? \_\_\_\_\_ PASSOS.

C) CONVERSE COM SEUS COLEGAS E RESPONDA:

- QUEM TEM O PASSO MAIOR: BETO OU ALICE?

Figura 10

O valor encontrado para a distância depende da (varia com a) unidade de medida utilizada. Explora outras situações, inclusive utilizando a medida padrão metro.

Nesta atividade percebe-se a evolução de ideias, pois, na atividade da figura 4 o aluno contava a quantidade de quadrinhos e comparava com a quantidade de palitos; na atividade da figura 5, o aluno além de contar as quantidades, as representava pintando-as; e, nesta atividade (figura 10) o aluno deverá interpretar a representação “gráfica” – contar os quadrinhos coloridos e perceber que, quem deu mais passos, tem o menor passo.

✓ Na página 213:

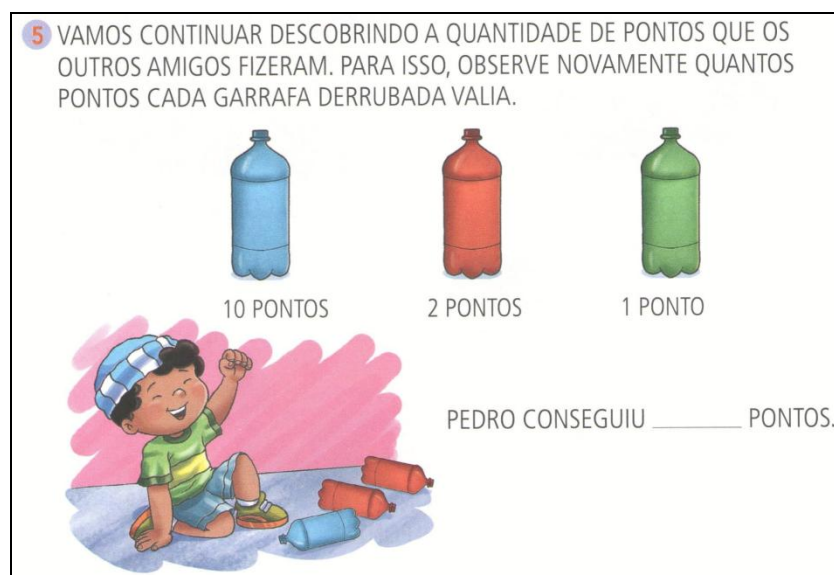


Figura 11

Esta atividade explora uma situação parecida com o caso do dinheiro. Tem-se aqui que cada cor tem um valor relativo (representa um valor) e o total de pontos varia, dependendo da cor e da quantidade de objetos.


Com relação aos Conjuntos Numéricos, no 1º Ano, trabalha-se com os Números Naturais até 50. Sendo que a partir do número dez a contagem é de 10 em 10 e não é feita menção a nomenclatura (Conjunto dos Números Naturais).

Percebemos, já nesta série/ano, conceitos como o de comparação, representação, dependência e até mesmo de variação, apesar de muito elementares serão úteis durante o processo da construção da Definição de Função.

### 3.1.1.2. No Segundo Ano – Ensino Fundamental I.

✓ Na página 122:

2. Observe novamente as moedas de real.




a) Marque com um **X** a moeda de 10 centavos e com um **O** as moedas de menor valor que as de 10 centavos.

- Quantas moedas valem menos que 10 centavos? \_\_\_\_\_


b) Marque com um **⊗** a moeda de 25 centavos e com um **∨** as moedas que valem mais que 25 centavos.

- Quantas moedas valem mais que 25 centavos? \_\_\_\_\_
- Quantas valem menos \_\_\_\_\_


3. Para responder às questões a seguir, use as moedas do Material de apoio, sempre que precisar.

a) Quantas moedas de  (1 centavo) são necessárias:

- para ter 5 centavos? \_\_\_\_\_
- para ter 10 centavos? \_\_\_\_\_

b) Quantas moedas de  (5 centavos) são necessárias:

- para ter 10 centavos? \_\_\_\_\_
- para ter 20 centavos? \_\_\_\_\_
- para ter 25 centavos? \_\_\_\_\_
- para ter 50 centavos? \_\_\_\_\_

c) Quantas moedas de  (10 centavos) são necessárias:

- para ter 50 centavos? \_\_\_\_\_
- para ter 1 real? \_\_\_\_\_

Figura 12

Explora os conceitos de correspondência e de dependência. Cada moeda representa (corresponde a) um valor e dependendo das moedas trocadas a quantidade utilizada é diferente.

✓ Na página 151:

8. Qual é a quantia obtida, quando retiramos de 80 reais:

- a) 10 reais? \_\_\_\_\_
- b) 20 reais? \_\_\_\_\_
- c) 30 reais? \_\_\_\_\_
- d) 50 reais? \_\_\_\_\_
- e) 70 reais? \_\_\_\_\_
- f) 80 reais? \_\_\_\_\_




Figura 13

Explora os conceitos de dependência e variação. Dependendo da quantidade retirada, varia o que sobra.

✓ Nas páginas 183 e 184:

4 Nesse zoológico vivem 33 espécies de mamíferos.

Anta Babuíno-verde Cervo

Canguru Carneiro Camelo Girafa

Elefante Hiena Leão Jaguaritica

Lobo-guará Lontra Macaco-aranha Macaco-rhesus

Macacos-pregos Macaco-de-cheiro Rinoceronte

cento e oitenta e três 18

Figura 14

Orangotango      Mico-leão-dourado      Morcego      Onça-preta

Quati      Sagui-leãozinho      Serval      Suçuarana

Tamanduá-bandeira      Tamanduá-mirim      Tigre      Urso

Zebra      Hipopótamo

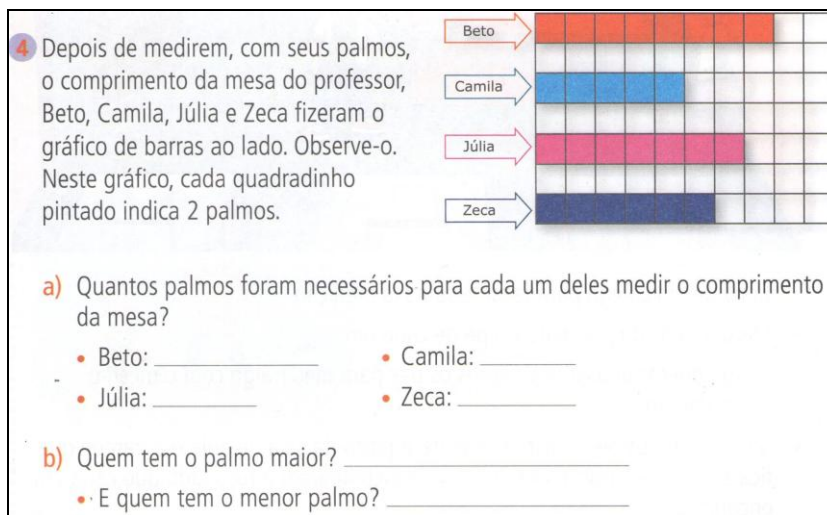
- Complete a tabela ao lado, na qual você encontra informações sobre a quantidade de espécies que alguns dos amigos conseguiram contar. Complete a tabela escrevendo as informações que estão faltando. Lembre-se de que nesse zoológico vivem 33 espécies de mamíferos.

AMIGO	ESPÉCIES DE MAMÍFEROS CONTADAS	ESPÉCIES DE MAMÍFEROS NÃO CONTADAS
Marta	28	_____
Gugu	_____	7
Taís	_____	4
Beto	20	_____
Camila	25	_____
Isa	30	_____
Pedro	_____	6
Júlia	_____	9

Figura 15

Explora a ideia de incógnita. Cada espaço vazio é uma incógnita.

✓ Na página 221:



**Figura 16**

Utiliza o gráfico de barras explorando os conceitos de correspondência, de dependência e de variação.

Como vimos nesses poucos exemplos, neste ano, estão presentes os mesmos conceitos do ano anterior (1º Ano) com ampliação do repertório de números/quantidade e com uma maior complexidade.

Em se tratando dos Conjuntos Numéricos, no 2º Ano, os números naturais, até 100, são desenvolvidos, inclusive, associados à conceitos do Sistema de Numeração Decimal.

### 3.1.1.3. No Terceiro Ano – Ensino Fundamental I.

✓ Na página 64:

4 Nas 4 mesas do refeitório, um delicioso lanche foi oferecido a todos os alunos que visitaram a fábrica naquele dia.

a) Complete a tabela, sabendo que na 3ª mesa havia 6 meninos a mais que meninas.

	1ª MESA	2ª MESA	3ª MESA	4ª MESA
MENINOS	_____	13	_____	24
MENINAS	13	17	15	_____
TOTAL	22	_____	_____	32

b) Quantos meninos estavam no refeitório? \_\_\_\_\_  
 • Quantas meninas? \_\_\_\_\_

c) Quantos meninos a mais que meninas? \_\_\_\_\_

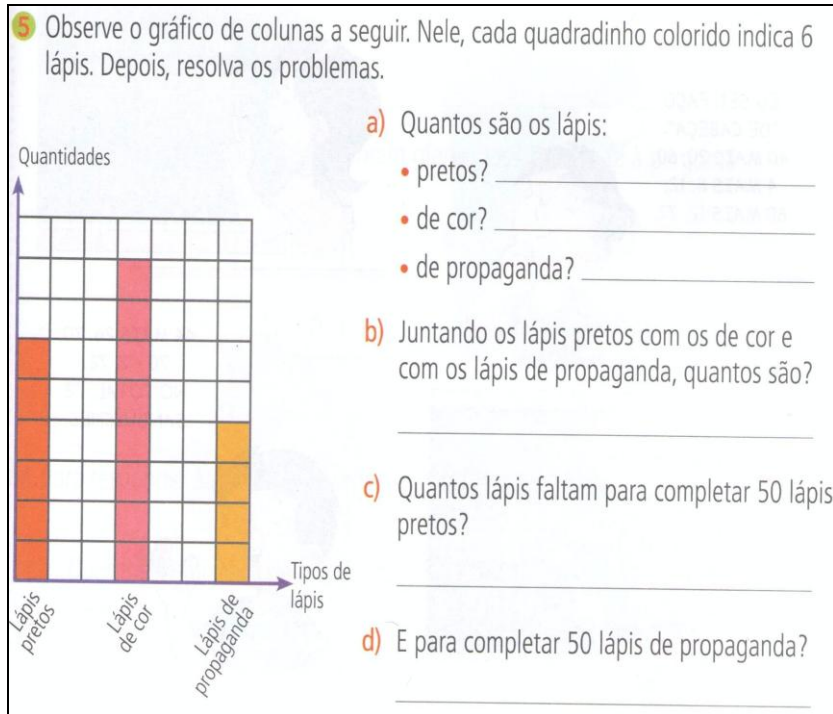
d) Quantas crianças participaram desse lanche? \_\_\_\_\_

**Figura 17**

Nas tabelas os espaços vazios podem ser associados a uma incógnita, induzindo ao conceito de equação.

✓ Na página 65:





**Figura 18**

Agora, cada quadrinho não representa apenas um objeto (uma unidade), mas vários, neste caso, seis lápis. Na sequência do livro são exploradas outras situações análogas a esta.

✓ Na página 110:

16 Complete as tabelas do 8 vezes(x), do 4 vezes(x) e do 2 vezes(x).

x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
2											

x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4											


x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
8											

a) Se  $2 \times 5 = 10$ , qual o resultado de:

- $4 \times 5?$  \_\_\_\_\_
- $8 \times 5?$  \_\_\_\_\_

b) Se  $2 \times 10 = 20$ , qual o resultado de:

- $4 \times 10?$  \_\_\_\_\_
- $8 \times 10?$  \_\_\_\_\_



ESTOU FICANDO SABIDO!

Figura 19

Explora os conceitos de dependência e variação. Em outras atividades faz de forma análoga com a divisão e com os conceitos de metade e de dobro.

✓ Na página 173:

1 Ana achou que algumas blusas e saias eram bonitas e resolveu combinar cada blusa com cada saia para ver como ficaria cada conjunto.

a) Quantos conjuntos diferentes Ana pôde formar com a blusa azul? Quais são esses conjuntos?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- E com a blusa cor-de-rosa, quantos conjuntos ela pôde formar?

\_\_\_\_\_

b) Quantos são os conjuntos diferentes que Ana pode formar, combinando a blusa marrom com cada uma das saias?

\_\_\_\_\_

c) Quantos conjuntos diferentes podem ser formados com cada uma das 5 blusas e cada uma das 3 saias? Responda com uma multiplicação.

\_\_\_\_\_

2 Quantos conjuntos poderiam ser formados combinando cada blusa e cada saia, se Ana tivesse separado:

a) 5 blusas e 2 saias? \_\_\_\_\_

b) 3 blusas e 3 saias? \_\_\_\_\_

**Figura 20**

O total de combinações depende da (varia com a) quantidade de blusas e de saias (objetos) combinadas. Em outros momentos explora a mesma ideia com sucos e sanduíches, por exemplo.

✓ Na página 237:

 **Fazendo e aprendendo**

Outro grupo de amigos preparou vários discos para o jogo com dardos. Observe-os organizando o 1º dia desse campeonato, que começou às 8 h e 30 min e que vai durar 2 horas e meia.



1 Se o campeonato de arremesso de dardos vai durar 2 horas e meia e começou às 8 horas e 30 minutos, qual é o horário combinado para terminar? \_\_\_\_\_

2 Observe, no disco a seguir, as regiões onde Alice acertou os dardos e na tabela o valor que eles atribuíram a cada região colorida.

					
Pontos	5 pontos	6 pontos	7 pontos	8 pontos	10 pontos

a) Quantos pontos Alice já conseguiu, com os dados que arremessou?  
\_\_\_\_\_

b) O último dardo ela acertou na região amarela. Quantos pontos a mais ela conseguiu?  
\_\_\_\_\_

- Nessa rodada, quantos pontos ela marcou?  
\_\_\_\_\_



**Figura 21**

O total de pontos depende da (varia com a) quantidade de dardos e da cor do alvo acertado pelo mesmo. Ideia análoga à figura 11 (atividade do 1º Ano).

✓ Na página 262:

5 Quantas destas cédulas ou moedas abaixo são necessárias para trocarmos por 1 cédula de  ?

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

6 Quantas das cédulas abaixo são necessárias para trocarmos por 1 cédula de  ?

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

7 Quantas destas cédulas ou moedas abaixo são necessárias para trocarmos por 1 cédula de  ?

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

 \_\_\_\_\_

Figura 22

A quantidade de cédulas ou moedas depende do (varia com o) valor das cédulas ou moedas utilizadas para trocar. Explora outras situações semelhantes utilizando o dinheiro como contexto. Ideia análoga à figura 9 (atividade do 1º Ano).


Percebe-se, neste ano, além da ampliação do repertório de números/quantidades um aprofundamento dos conceitos de comparação, representação, dependência e variação.

Nesta série/ano trabalha-se com o Conjunto dos Números Naturais até 1000, explorando ideias associadas ao Sistema de Numeração Decimal.

### 3.1.1.4. No Quarto Ano – Ensino Fundamental I.

✓ Na página 17:

Marta e Isa são muito amigas. Estão sempre juntas. Conversam muito e têm segredinhos que não gostam de contar para os outros.



ISA,  
O GAROTO NOVO  
DA MINHA CLASSE  
É UM GATINHO.

QUAL É O NOME  
DELE?

1. Marta e Isa gostam tanto de segredinhos que até inventaram um jeito de escrever bilhetes com código. A cada letra do nosso alfabeto elas associaram um número. Veja!

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

• Agora, substitua os números pelas letras correspondentes, para descobrir o que Isa escreveu para Marta no bilhete a seguir.

13 - 1 - 18 - 20 - 1:  
 22 - 1 - 13 - 15 - 19                      8 - 15 - 10 - 5                      1 - 15  
 16 - 1 - 18 - 17 - 21 - 5?  
 9 - 19 - 1

Figura 23

A primeira vez que utiliza números para substituir letras. O que facilitará a ideia oposta, letras para substituir números (incógnita e variável).

✓ Na página 39:

2. Depois de 15 rodadas com o baralho de flores, Camila e seus amigos registraram, num gráfico de colunas, o número de cartas que cada um conseguiu. Nesse gráfico, cada quadrinho colorido significa 1 carta. Observe a legenda e depois o gráfico.

As cartas estão representadas por letras. Observe-as pelo valor e cor.

**Legenda**

<b>A</b> : 1 000	<b>B</b> : 100	<b>C</b> : 10	<b>D</b> : 1
rosa	hortênsia	margarida	flor do campo

Nome	A (rosa)	B (hortênsia)	C (margarida)	D (flor do campo)
Camila	2	4	1	2
Pedro	3	2	2	1
Taís	2	1	3	2
Zeca	1	2	2	3

a) Apenas observando o gráfico, você é capaz de descobrir quem foi o vencedor? Por quê?

b) Quem foi o 2º, o 3º e o 4º colocado?

c) Quantos pontos cada um deles conseguiu?

d) Quantos pontos o campeão desse jogo conseguiu a mais que o Zeca?

3. Observe novamente o total de pontos que vale cada carta. Quantas cartas de cada modelo são necessárias para formar 1 650 pontos, sabendo que há somente 8 cartas de cada modelo?

Figura 24

Logo após apresentar o Material Dourado, muito útil no processo de ensino e aprendizagem das quatro operações básicas, trás esta atividade com representação análoga ao mesmo. Explorando os conceitos de correspondência, dependência e variação.

✓ Na página 87:

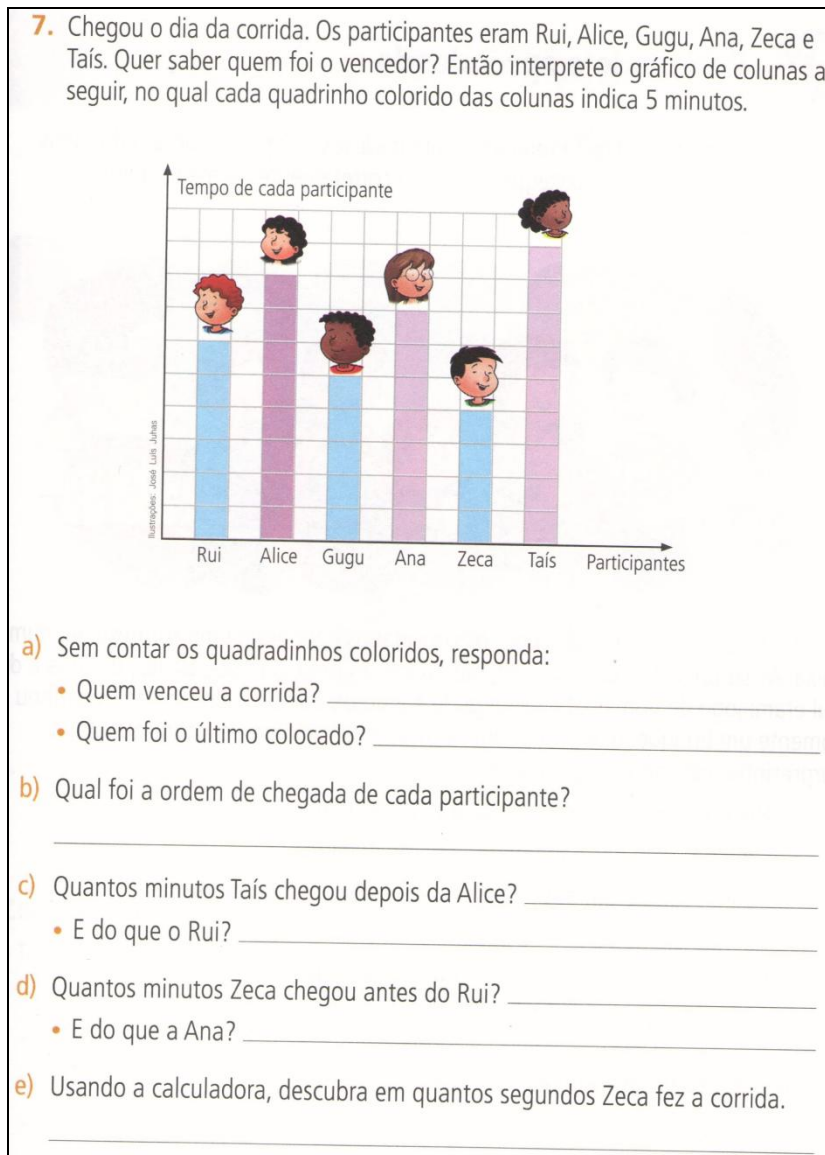


Figura 25



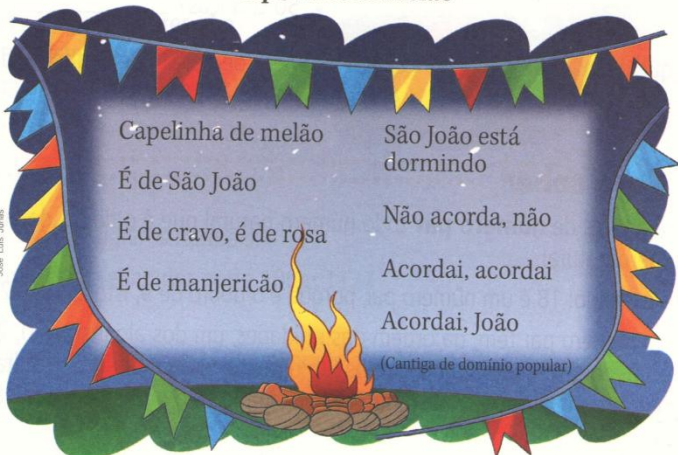
Explora a interpretação e a importância da representação gráfica.

✓ Na página 93 e 94:

## Multiplicando e dividindo por 2, 4 e 8

Entre os preparativos para a festa junina estão os ensaios da quadrilha e das danças com cantigas típicas. Veja uma dessas cantigas.

### Capelinha de melão



Capelinha de melão  
É de São João  
É de cravo, é de rosa  
É de manjerição

São João está dormindo  
Não acorda, não  
Acordai, acordai  
Acordai, João

(Cantiga de domínio popular)

1 Para a quadrilha, as crianças foram organizadas em duplas. Cada dupla é formada por 2 crianças. Quantas crianças formam:

- 2 duplas? \_\_\_\_\_
- 5 duplas? \_\_\_\_\_
- 8 duplas? \_\_\_\_\_
- 11 duplas? \_\_\_\_\_
- 3 duplas? \_\_\_\_\_
- 6 duplas? \_\_\_\_\_
- 9 duplas? \_\_\_\_\_
- 4 duplas? \_\_\_\_\_
- 7 duplas? \_\_\_\_\_
- 10 duplas? \_\_\_\_\_

• O que acontece com o número de crianças que estão dançando quando entra ou quando entram na dança:

- 1 nova dupla? \_\_\_\_\_
- 2 novas duplas? \_\_\_\_\_

Figura 26

2 Duas crianças formam 1 dupla ou 1 par de crianças. Quantos pares de crianças são formados com:

- 4 crianças? \_\_\_\_\_
- 6 crianças? \_\_\_\_\_
- 14 crianças? \_\_\_\_\_
- 10 crianças? \_\_\_\_\_
- 8 crianças? \_\_\_\_\_
- 18 crianças? \_\_\_\_\_
- 56 crianças? \_\_\_\_\_
- 50 crianças? \_\_\_\_\_

• O que cada número de crianças é do número de pares por elas formado?  
\_\_\_\_\_

**Para saber**

- Chamamos de **número par** todo número natural que é o dobro de outro número natural.  
Por exemplo: 18 é um número par, porque é o dobro de 9, isto é,  $18 = 2 \times 9$ .
- Todo número par tem, na ordem das unidades, um dos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8, pois, quando multiplicamos um número natural por 2, o resultado sempre termina em 0, 2, 4, 6 ou 8. Por exemplo: são números pares 18, 56, 124, 512, 1 350.

3 Para uma das danças foram formados 13 pares de crianças. Quantas crianças estão participando dessa dança? \_\_\_\_\_

- Esse número de crianças é um número par? \_\_\_\_\_
- Ele é o dobro de 13? \_\_\_\_\_

4 Podem ser formadas duplas com 15 crianças? Quantas? \_\_\_\_\_

- Sobram crianças? \_\_\_\_\_

5 Quais das quantidades de crianças a seguir permitem formar duplas, sem sobrar nenhuma criança? Marque-as com um X.

- 18 crianças ( )
- 19 crianças ( )
- 17 crianças ( )
- 16 crianças ( )

• Quantas duplas podem ser formadas com cada uma dessas quantidades de crianças? \_\_\_\_\_

**Figura 27**


Além de explorar os conceitos de dependência e variação, faz parte da construção do conceito de paridade (fato motivador deste trabalho).

✓ Na página 108:

5. Complete as tabelas. Depois, responda às questões.

×	1	3	5	7	9	2	4	6	8	10	0
2											
4											
8											

÷	2	4	8
40			
80			
8			
16			
32			
64			
24			
48			
0			
56			



a) Sabendo que  $80 \div 2 = 40$ , qual é o resultado de:

- $80 \div 4?$  \_\_\_\_\_
- $80 \div 8?$  \_\_\_\_\_
- $40 \div 4?$  \_\_\_\_\_
- $40 \div 8?$  \_\_\_\_\_

b) Os números 40, 80, 8, 16, 32, 64, 24, 48, 0 e 56 são **múltiplos de 8**.

- Eles também são múltiplos de 4? \_\_\_\_\_
- E de 2? \_\_\_\_\_

6. Na Festa Junina, em cada bandeja foram colocados 14 brigadeiros. No total, quantos brigadeiros foram colocados em:

- 2 bandejas? \_\_\_\_\_
- 4 bandejas? \_\_\_\_\_
- 8 bandejas? \_\_\_\_\_
- 5 bandejas? \_\_\_\_\_
- 10 bandejas? \_\_\_\_\_

7. No total, foram feitos 126 docinhos de coco. Colocando a mesma quantidade desses docinhos em todas as bandejas, quantos docinhos podem ser colocados em cada bandeja, se forem utilizadas apenas:

- 2 bandejas? \_\_\_\_\_
- 6 bandejas? \_\_\_\_\_
- 4 bandejas? \_\_\_\_\_
- 8 bandejas? \_\_\_\_\_

Figura 28

Explora os conceitos de dependência e variação.

Neste ano há um sensível reforço dos conceitos desenvolvidos no ano anterior; atividades muito parecidas, inclusive. Em relação aos Conjuntos Numéricos, no 4º Ano, os números decimais são introduzidos.

O Conjunto dos Números Racionais é introduzido (nomenclatura, inclusive)

### 3.1.1.5. No Quinto Ano – Ensino Fundamental I.

✓ Na página 15:

5 Gugu e seu grupo foram conhecer a criação de galinhas da fazenda. Num dos galpões, eles encontraram, afixado na parede, um gráfico de colunas com a produção diária de ovos, em dúzias, de cada dia da semana anterior. Observe o gráfico.

Nesse gráfico, cada quadradinho colorido indica 1 dúzia de ovos.

Dia da semana	Produção de ovos em dúzias
domingo	9
2ª-feira	12
3ª-feira	13
4ª-feira	10
5ª-feira	8
6ª-feira	12
sábado	13

a) Preencha a tabela a seguir observando os dados apresentados no gráfico. Depois, responda às questões.

Dia da semana	Produção de ovos em dúzias
domingo	_____
segunda-feira	_____
terça-feira	_____
quarta-feira	_____
quinta-feira	_____
sexta-feira	_____
sábado	_____
TOTAL	_____

b) Em quais dias dessa semana a produção de ovos foi menor? Quantas dúzias foram produzidas?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c) Em quais dias dessa semana a produção de ovos foi maior? De quantas dúzias?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

d) Se a mesma quantidade de ovos fosse produzida em cada dia dessa semana, de quantas dúzias seria essa produção diária para se obter o total que você registrou na tabela? \_\_\_\_\_

Figura 29

Além dos conceitos de dependência e variação, o autor poderia ter introduzido outros conceitos como o de crescimento e decrescimento, observando que em alguns dias houve aumento na produção e em outros houve diminuição, não apenas qual foi o dia que produziu mais e qual produziu menos.

Na página 99:

Volte a observar as representações do bolo de chocolate.

Complete a tabela a seguir, observando nas figuras a porção de bolo que cada grupo da classe do Rui recebeu. Lembre-se de que na classe dele há 6 grupos com 4 alunos em cada um.

Bolo	Número de partes em que o bolo foi dividido	Números de partes que cada grupo recebeu	Fração que representa a parte que coube a cada grupo
A			
B			
C			


Figura 30

Os conceitos de dependência e variação são desenvolvidos; o tamanho de cada quadrinho depende e varia com a quantidade de partes que o todo é dividido.

Vale ressaltar que no 5º Ano há uma predominância no trabalho com frações.

✓ Na página 241:

4 Com 2,50 metros de tecido, a costureira faz 1 vestido, que ela vende por R\$ 85,00.



a) Para atender uma encomenda de 5 desses vestidos, quantos metros de tecido serão necessários?

b) Cada metro de tecido custa, para a costureira, R\$ 11,50. Qual é o custo dos 2,50 metros necessários para confeccionar 1 vestido?

c) Se cada vestido é vendido por R\$ 85,00 e se você já conhece o custo de cada corte de tecido, quanto fica para pagar despesas, como linha e botões, se a costureira ganha R\$ 30,00 na venda de cada peça?

Figura 31

Conceitos de dependência e variação.

✓ Na página 243:

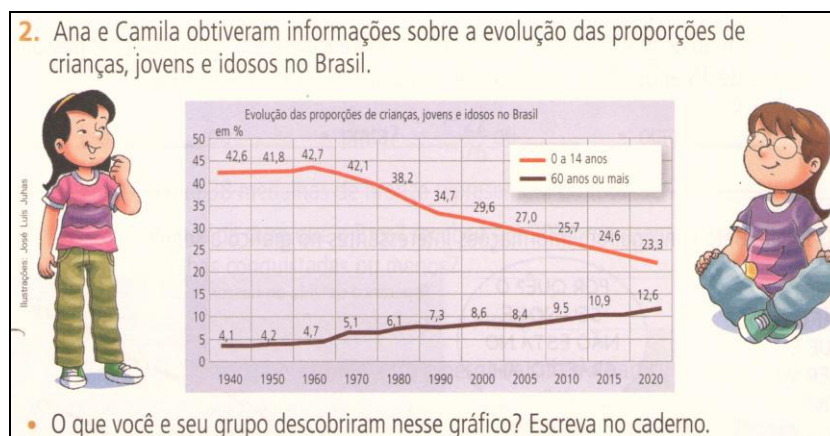


Figura 32

Dependendo da formação do professor, poderiam ser explorados os conceitos de crescimento e decrescimento.

No 5º ano, por percebermos a presença dos mesmos conceitos do ano anterior (na forma de “revisão”), com pequenas alterações (complexidade um pouco maior), optamos por não disponibilizar mais atividades, pois as reflexões seriam semelhantes.

Neste ano, em relação aos Conjuntos Numéricos, o conhecimento dos Racionais amplia, significativamente.

### **3.1.2. No Ensino Fundamental II (6º ao 9º Ano).**

Neste item observamos os exemplares da coleção “Praticando Matemática” (ANDRINI, 2012a, 2012b, 2012c, 2012d), 6º, 7º, 8º e 9º Ano, respectivamente – as imagens das capas e dos sumários estão disponibilizadas no anexo III deste trabalho.

Sempre que possível descreveremos o tratamento feito em cada exemplar e só disponibilizaremos imagens de atividades que julgarmos relevantes.

Observaremos, não mais por série/ano, mas pelos conceitos implícitos e explícitos na Definição de Função elencados no final do capítulo anterior.

#### **3.1.2.1. Conjuntos e Relação entre Conjuntos.**

No 6º ano, o conjunto dos números Naturais é desenvolvido. E as frações e a representação decimal dos números são desenvolvidas sem alguma menção ao conjunto dos números Racionais.

No 7º ano, o Conjunto dos números Naturais é utilizado para introduzir os números Inteiros. Já no 8º ano, existe uma revisão os conjuntos numéricos

estudados anteriormente e introduz os números Racionais, os Irracionais e os Reais.

No 9º Ano não trata, especificamente, dos conjuntos numéricos.

### **3.1.2.2. Dependência.**

Tal conceito é reforçado e ampliado, associado ao conceito de variação.

### **3.1.2.3. Variação.**

#### Proporcionalidade:

✓ Inicia-se com a análise de mapas e plantas (escalas) e em seguida são inseridas as Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais, Razões, Proporções e Regra de Três, conceitos que serão úteis (principalmente) no estudo da função Afim.

#### Porcentagens:

✓ Primeiro a definição é apresentada, sua forma decimal e cálculos de  $x\%$  de um dado valor (conceitos de dependência e variação). No 7º ano, o cálculo do percentual é inserido, e, do todo conhecendo a parte, introduz descontos e acréscimos diretos. Depois o autor retoma no 9º ano com uma revisão geral e nas páginas de 247 a 250 introduz cálculo dos juros (simples e compostos):





2. Júlio atrasou em 15 dias o pagamento de uma prestação de R\$ 180,00. Não havia multa, mas ele pagou R\$ 10,80 de juro. Qual é a taxa de juro cobrada ao dia?

$$\begin{aligned} j &= 10,80 \\ C &= 180 \\ i &= \text{?} \\ t &= 15 \end{aligned}$$

Como  $j = C \cdot i \cdot t$ , temos:

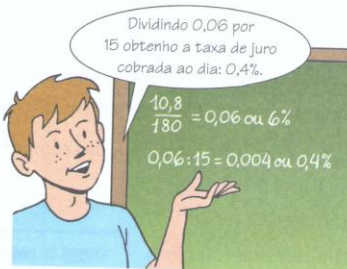
$$\begin{aligned} 10,80 &= 180 \cdot i \cdot 15 \\ 10,80 &= 2700 \cdot i \end{aligned}$$

$$i = \frac{10,80}{2700}$$

$$i = 0,004$$

$$0,004 = \frac{4}{1000} = \frac{0,4}{100}, \text{ ou seja, } 0,4\%$$

A taxa de juro por atraso foi de 0,4% ao dia.



3. Sidnei emprestou R\$ 1.000,00 ao seu amigo Paulo, no regime de juro simples. Combinaram uma taxa de 3% ao mês. No final do empréstimo, Paulo pagou a Sidnei R\$ 1.045,00. Por quantos dias o dinheiro ficou emprestado?

$$1045 - 1000 = 45$$

Paulo pagou a Sidnei R\$ 45,00 de juro.

$$\begin{aligned} 45 &= 1000 \cdot 0,03 \cdot t \\ 45 &= 30t \end{aligned}$$

$$t = \frac{45}{30}$$

$$t = 1,5$$



Como a taxa de juro é mensal, o tempo encontrado está em meses. Então, o dinheiro ficou emprestado por 1,5 mês = 1 mês e meio = 45 dias.

Figura 34

## Juro composto

Na maioria das operações envolvendo juro, é utilizado o **juro composto**. O cálculo do juro composto é mais complicado do que o do juro simples. Há fórmulas que auxiliam nessas situações, e você vai conhecê-las mais tarde. No entanto, por meio dos exemplos que daremos, você compreenderá as características fundamentais desse tipo de juro.

Acompanhe.

1. Uma pessoa fez uma dívida de R\$ 500,00, que será paga no regime de juro composto a uma taxa de 12% ao mês.

Ao valor da dívida será acrescentado o juro.

Lembrando que  $100\% + 12\% = 112\%$  e  $112\% = \frac{112}{100} = 1,12$

podemos calcular diretamente o valor da dívida depois de um mês, fazendo:

$$1,12 \cdot 500 = 560$$

No final de um mês, a pessoa deverá R\$ 560,00. Pagando essa quantia ela quita sua dívida.

Mas veja o que ocorre se ela deixar para pagar nos meses seguintes:

Para o segundo mês, o cálculo do juro não será feito sobre o capital inicial de R\$ 500,00, mas sobre R\$ 560,00. O juro é somado ao capital inicial.

$$1,12 \cdot 560 = 627,20$$

É o que comumente se chama de juro sobre juro. Ao final de cada período, o juro é incorporado ao capital.

No terceiro mês o juro será calculado sobre R\$ 627,20:

$$1,12 \cdot 627,2 = 702,46$$

Ao final do terceiro mês, a dívida inicial de R\$ 500,00 estará em R\$ 702,46.

Calcule quanto pagaria de juro uma pessoa que pegasse emprestados os mesmos R\$ 500,00 a 12% ao mês durante três meses, no regime de juro simples. Use calculadora, se preferir.  
Quanto a mais de juro a pessoa paga nesse período no regime de juro composto?

2. Nos meses de janeiro, fevereiro e março de certo ano, o rendimento médio pago pela caderneta de poupança foi de 0,7% ao mês. Uma pessoa abriu sua caderneta de poupança em 2 de janeiro, com R\$ 1.000,00 e não fez depósitos nem retiradas nos três meses citados. Que quantia ela tinha nessa caderneta de poupança em 2 de abril do mesmo ano?



A caderneta de poupança é um tipo de investimento muito procurado no Brasil. O dinheiro aplicado pelos brasileiros na poupança é investido pelo governo no setor de habitação.



Figura 35

Ao capital, serão acrescentados 0,7% de rendimentos.

Primeiro lembre-se de que  $100\% + 0,7\% = 100,7\%$  e

$$100,7\% = \frac{100,7}{100} = 1,007$$

Em 2 de fevereiro foram creditados os rendimentos de janeiro:

$$1,007 \cdot 1000 = 1007$$

Saldo: R\$ 1.007,00

Em 2 de março foram creditados os rendimentos de fevereiro:

$$1,007 \cdot 1007 = 1014,05$$

Saldo: R\$ 1.014,05

Em 2 de abril foram creditados os rendimentos de março:

$$1,007 \cdot 1014,05 = 1021,15$$

Saldo: R\$ 1.021,15

Em 2 de abril, a pessoa tinha na caderneta de poupança R\$ 1.021,15, obtendo, portanto, um total de R\$ 21,15 de rendimentos para essa aplicação, nesse período.

Observe que os rendimentos de janeiro foram incorporados ao capital para o cálculo dos rendimentos de fevereiro.



Com rendimentos creditados, queremos dizer que o valor dos rendimentos é depositado automaticamente na conta de poupança dessa pessoa.

### Compra à vista ou a prazo?

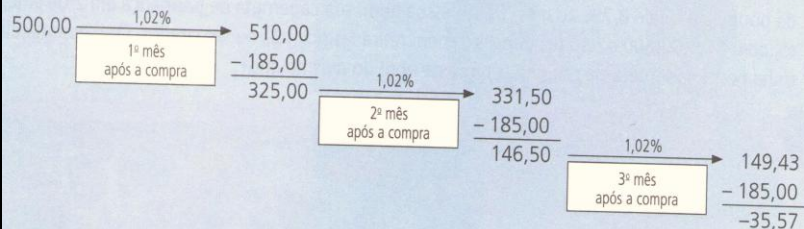
Um dos problemas matemáticos mais comuns no dia a dia é a decisão entre comprar uma mercadoria ou um serviço à vista ou a prazo.

Acompanhe a resolução deste problema:



(UFMG) Um fogão estava anunciado por R\$ 500,00 para pagamento à vista ou em três prestações mensais de R\$ 185,00 cada, a primeira delas a ser paga um mês após a compra. Paulo, em vez de pagar à vista, resolveu depositar, no dia da compra, os R\$ 500,00 numa aplicação que lhe renderia 2% ao mês, a juros compostos, nos próximos três meses. Desse modo, ele esperava liquidar a dívida fazendo retiradas de R\$ 185,00 daquela aplicação nas datas de vencimento de cada prestação.

Vamos mostrar que a opção de Paulo não foi boa. Para isso, calcularemos quanto a mais ele teve de desembolsar para pagar a última prestação.



Mesmo Paulo tendo aplicado os R\$ 500,00 com rendimento de 2% ao mês, ele pagou R\$ 35,57 a mais do que pagaria se tivesse comprado o fogão à vista. Para escolher a opção mais vantajosa, é necessário conhecer as taxas de juros da compra e da aplicação.

Figura 36

Apesar do conteúdo sobre Juros ter sido abordado neste exemplar após o conteúdo sobre funções, não existe alguma menção que são aplicações das mesmas.

### 3.1.2.4. Expressões Algébricas.

#### Equações e Inequações:

- ✓ No 6º ano, nas páginas 22 e 39:

**21** Complete as sequências, substituindo as letras pelos números convenientes:

a) 28 35 A 49 56 B

b) 4 500 C 3 500 3 000 D 2 000


c) 1 089 1 099 E F 1 129 1 139


Invente duas sequências e peça a um colega que as complete.

Figura 37

Primeira vez que utiliza letras no lugar de números (incógnitas).

**9** Calcule o número que falta em:

a)  + 3 = 20

c)  - 8 = 17

b) 49 +  = 85

d) 85 -  = 71

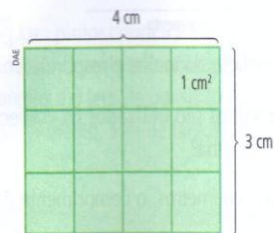
Figura 38

Explora também a ideia de incógnita.

✓ Nas páginas 245 e 251:

#### 4. A área do retângulo

Quantos quadrados de 1 cm de lado cabem no retângulo abaixo?



Temos 3 fileiras de 4 quadrados cada:  
 $3 \cdot 4 = 12$  quadrados de 1 cm de lado  
A área deste retângulo é  $A = 12 \text{ cm}^2$ .

Repare que, para calcular a área de um retângulo, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura. Se chamarmos o comprimento de  $c$  e a largura de  $\ell$ , teremos:

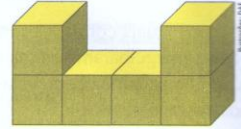
$$A_{\text{retângulo}} = c \cdot \ell$$

Como no quadrado o comprimento é igual à largura, a área do quadrado de lado  $\ell$  é:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

Figura 39

## Volume do bloco retangular



Essas pilhas foram formadas com cubos de 1 cm de aresta. Elas têm formas diferentes, mas o mesmo volume.

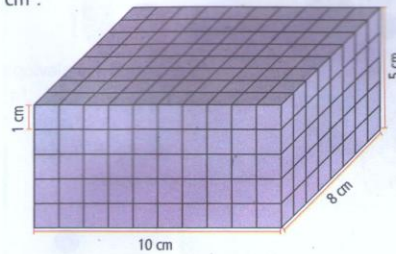
1. Qual é esse volume em centímetros cúbicos?  
Se sua resposta foi 6 cm<sup>3</sup>, você acertou.
2. Desenhe em seu caderno outra pilha de forma diferente, mantendo o mesmo volume.

Será que para calcular, por exemplo, o volume de uma caixa em forma de bloco retangular teremos de preenchê-la com cubinhos de 1 cm<sup>3</sup> e depois contá-los? Isso não seria muito prático...

Usaremos a ideia das camadas, como fizemos para contar as caixas de sabão empilhadas. O bloco retangular da figura tem 5 cm de altura: temos 5 camadas de 1 cm. Cada camada tem  $10 \cdot 8 = 80$  cubinhos de 1 cm<sup>3</sup>.

Então o volume do bloco é:

$$V = 80 \cdot 5 = 400 \text{ cm}^3$$



O volume de qualquer bloco retangular pode ser calculado usando este raciocínio:

$$V = \underbrace{\text{comprimento}}_{\text{número de cubos por camada}} \cdot \underbrace{\text{largura}}_{\text{número de camadas}} \cdot \text{altura} \quad \text{ou} \quad V = c \cdot \ell \cdot a$$

comprimento
altura

largura

Lembrando que o cubo tem todas as arestas com a mesma medida, ou seja, comprimento = largura = altura, podemos calcular seu volume fazendo:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3, \text{ em que } a \text{ é a medida da aresta.}$$

Figura 40

Nestas situações explora o conceito de variável.

✓ No 7º ano, nas páginas 9 e 21:

**6** Se  $n$  é um número natural, qual é o valor de  $n$  quando:

a)  $n + 3 = 10$ ?

b)  $n - 5 = 35$ ?

c)  $2 \cdot n = 18$ ?

Figura 41

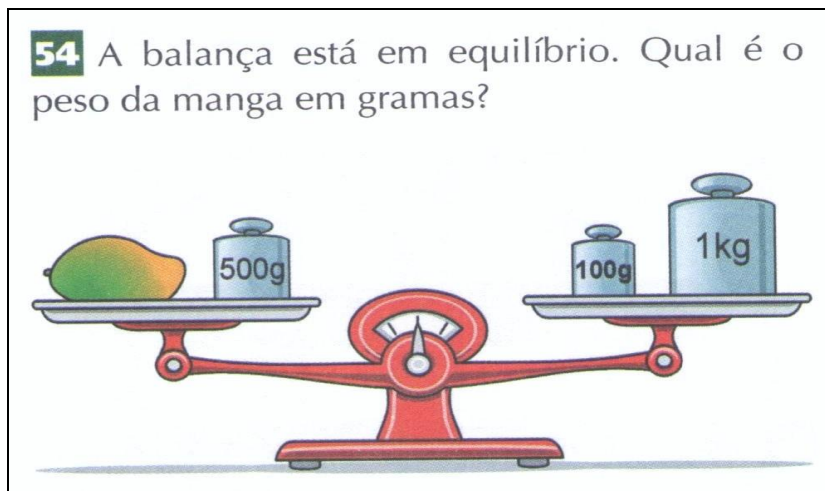


Figura 42

Ambas as situações exploram o conceito de incógnita (equação).



Na página 124:

**26** Uma vendedora de uma loja ganha um salário fixo mensal de R\$ 750,00, acrescido de 3% do valor das vendas efetuadas durante o mês. Qual é o seu salário quando vende no mês R\$ 16.000,00?

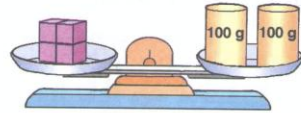
**Figura 43**

Explora conceitos relacionados à Função Afim.

✓ Nas páginas 206 e 207, é introduzido o conceito de equação utilizando balanças em equilíbrio.

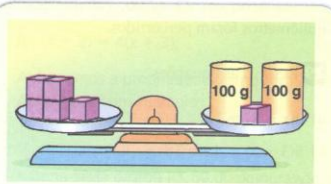
## 4. Balanças em equilíbrio e equações

Esta é uma balança de pratos. Esse tipo de balança não é muito comum hoje em dia: elas servem para medir massas com base no equilíbrio dos dois pratos. Essas balanças nos ajudarão a compreender as propriedades das igualdades.

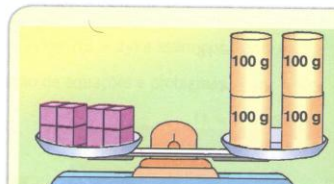


Observe que no prato da esquerda foram colocados quatro cubos idênticos e no prato da direita, dois cilindros de 100 g de massa cada. Como os pratos estão equilibrados, a massa dos quatro cubos é igual à massa dos dois cilindros.

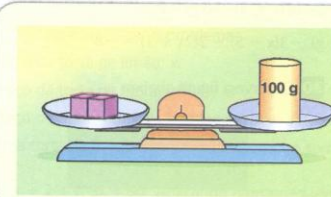
Partindo sempre dessa situação inicial de equilíbrio da balança acima, responda ao que se pede.



Se acrescentarmos a mesma massa a cada prato, o equilíbrio se mantém?



Se dobrarmos a massa de cada prato, o equilíbrio se mantém?



Se retirarmos de cada prato a metade de seu conteúdo, o equilíbrio se mantém?

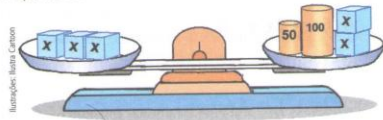
Numa balança de pratos em equilíbrio, quando acrescentamos ou retiramos massas iguais dos dois pratos o equilíbrio se mantém. As equações, que são igualdades, funcionam de modo semelhante. Numa equação podemos:

- somar o mesmo número aos dois membros da equação;
- subtrair o mesmo número dos dois membros da equação;
- multiplicar os dois membros da equação por um mesmo número diferente de zero;
- dividir os dois membros da equação por um mesmo número diferente de zero.

Figura 44

### Aplicando o que aprendemos:

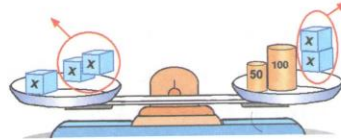
Para resolver a equação  $3x = 2x + 100 + 50$ , podemos imaginá-la como uma balança de pratos em equilíbrio:



$$3x = 2x + 100 + 50$$

$$3x = 2x + 150$$

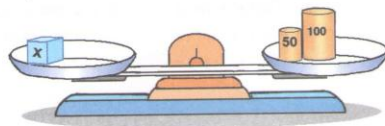
Vamos retirar a mesma massa dos dois pratos:



$$-2x \quad 3x = 2x + 150 \quad -2x$$

$$x = 150$$

O equilíbrio se mantém.



Descobrimos a massa do cubinho: 150 g.

Veja mais exemplos:

$$\bullet \quad \begin{array}{l} 5x - 8 = 3x + 6 \\ -3x \quad \quad \quad -3x \\ \hline 2x - 8 = 6 \end{array}$$

Vamos subtrair  $3x$  dos dois membros da equação.

Aí, usamos as operações inversas:

$$2x = 6 + 8$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Substitua  $x$  por 7 na equação e faça as operações indicadas. Você obteve uma igualdade verdadeira?

$$\bullet \quad 5(x + 3) = 4(x - 2) + 6$$

Primeiro aplicamos a propriedade distributiva:

$$5x + 15 = 4x - 8 + 6$$

Efetuamos  $(-8 + 6)$ :

$$\begin{array}{l} 5x + 15 = 4x - 2 \\ -4x \quad \quad \quad -4x \\ \hline x + 15 = -2 \end{array}$$

Subtraindo  $4x$  de ambos os membros da equação, temos:

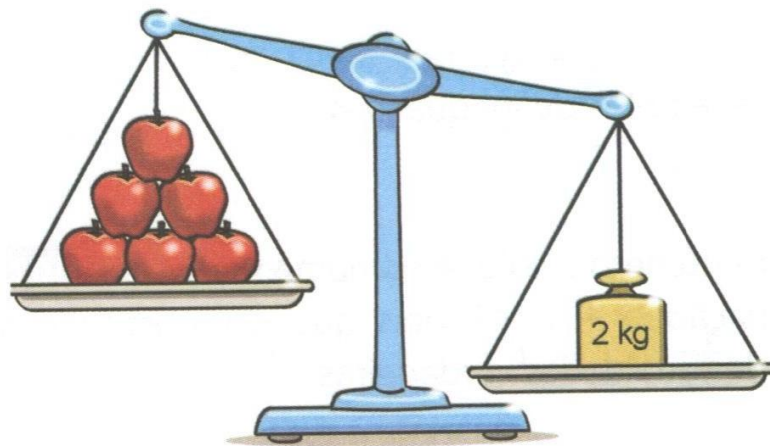
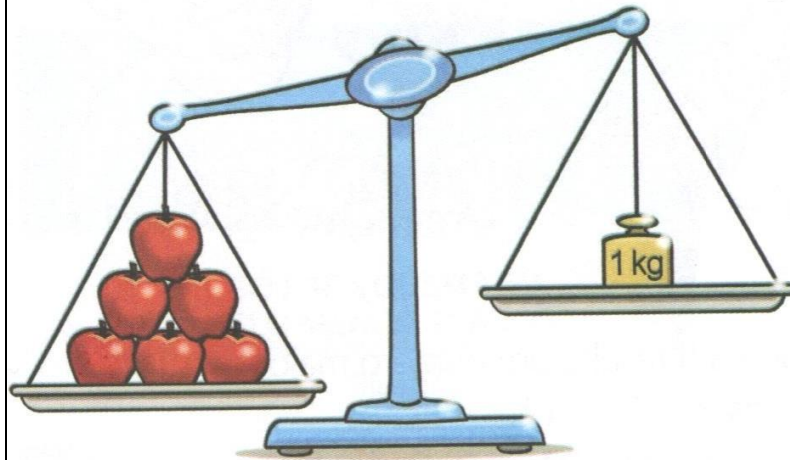
$$x = -2 - 15$$

$$x = -17$$

Figura 45

✓ Em seguida explora as inequações como balanças em desequilíbrio, na página 221:

**2** Veja as balanças:



Podemos afirmar o peso correto das maçãs? Se não, o que podemos afirmar, então?

Figura 46

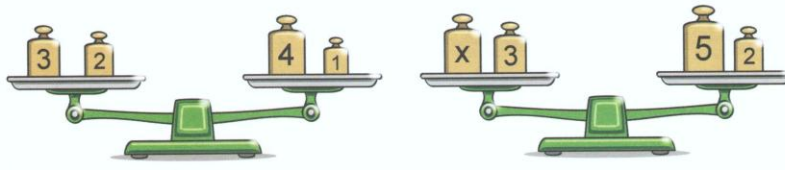
Tanto nas figuras 44 e 45 quanto na figura 46, consideramos adequada a escolha por essa forma de abordagem inicial dos assuntos equações e inequações.

✓ No 8º Ano, na página 71:

# Cálculo algébrico

## 1. Revendo equações

As balanças ilustradas estão equilibradas.



Podemos utilizar igualdades para representar esse equilíbrio:

$$3 + 2 = 4 + 1$$
$$x + 3 = 5 + 2$$

Esta igualdade apresenta uma letra que representa um valor desconhecido.

**Equação** é uma igualdade em que há pelo menos uma letra para representar um valor desconhecido.

A letra ou as letras que representam valores desconhecidos são as **incógnitas** da equação. Na equação  $x + 3 = 5 + 2$ , a incógnita é  $x$ .

Toda equação tem dois membros:

$$\underbrace{x + 3}_{1^\circ \text{ membro}} = \underbrace{5 + 2}_{2^\circ \text{ membro}}$$

Observe que o valor de  $x$  que torna a igualdade verdadeira é 4, pois, trocando  $x$  por 4 na equação, a igualdade fica verdadeira:  $4 + 3 = 5 + 2$ .

$x = 4$  é a única **solução** dessa equação. Resolver uma equação é encontrar sua solução.

Figura 47

Existem equações com uma única solução, com mais de uma solução e sem solução.  
 Por exemplo:

- a equação  $x = x - 3$  não tem solução, pois não há número que seja igual a ele mesmo menos 3;
- a equação  $a + a = 2a$  tem infinitas soluções, pois todo número somado a ele mesmo resulta no seu dobro.

Vamos resolver a equação  $5x - 8 = 3x - 12$  para recordar.

$3x$	$5x - 8 = 3x - 12$	$-3x$	Subtraímos $3x$ de ambos os membros da equação.
$8$	$2x - 8 = -12$	$+8$	Somamos $8$ a ambos os membros da equação.
$2$	$x = -2$	$:2$	Dividimos ambos os membros da equação por $2$ .
	$x = -2$		Encontramos a solução da equação.

Verificamos se a solução está correta substituindo  $x$  por  $-2$  na equação:

$$5 \cdot (-2) - 8 = 3 \cdot (-2) - 12$$

$$-10 - 8 = -6 - 12$$


$$-18 = -18 \text{ (verdadeiro!)}$$

A solução  $x = -2$  está correta.

Fazendo a verificação temos certeza se acertamos a resolução da equação.

Muitas vezes utilizamos equações para representar e resolver um problema. Acompanhe.

Comprei um lápis e duas canetas por R\$ 11,60. Cada caneta custou R\$ 1,00 a mais que o lápis. Qual é o preço do lápis? Qual é o preço de cada caneta?



Representamos o preço do lápis por  $x$ .  
 O preço de cada caneta será representado por  $x + 1$ .  
 Como o gasto foi de R\$ 11,60 no total, escrevemos:

$$x + 2(x + 1) = 11,6$$

Aplicando a propriedade distributiva.

$$x + 2x + 2 = 11,6$$

Fazendo  $x + 2x = 3x$ .

$$3x + 2 = 11,6$$

$$3x = 9,6$$

$$x = \frac{9,6}{3}$$

$$x = 3,2$$

Preço do lápis: R\$ 3,20  
 Preço da caneta: R\$ 4,20

Junte-se a um colega e resolvam, por meio de uma equação, o seguinte problema:  
 Mariana tem  $x$  reais. Para comprar um vestido que custa R\$ 120,00 ela precisa do triplo dessa quantia e ainda ficam faltando R\$ 6,00. Quanto tem Mariana?

Figura 48


Faz-se uma revisão de equações, começando pela mesma ideia do ano anterior – balanças em equilíbrio (conforme figura anterior).

✓ Nas páginas 74 e 75:

## 2. Variáveis

Célia costura camisas para uma confecção.  
Seu salário depende do número de camisas que costura no mês.

Vamos explicar melhor:  
Célia recebe R\$ 200,00 fixos mais R\$ 1,50 por camisa costurada.



- Se costurar 100 camisas no mês, recebe R\$ 350,00, pois:  
 $200 + 100 \cdot 1,50 =$   
 $= 200 + 150 = 350$
- Se costurar 180 camisas, recebe R\$ 470,00, pois:  
 $200 + 180 \cdot 1,50 =$   
 $= 200 + 270 = 470$
- Se Célia costurar  $n$  camisas no mês, qual será o valor de seu salário  $S$ ?

$S = 200 + n \cdot 1,50$

Observe que usamos letras e operações para mostrar como o salário de Célia depende do número de camisas costuradas no mês. Escrevemos uma **fórmula matemática**.

O número de camisas  $n$  pode ser 50, 82, 120 ou 200, por exemplo.  
Para cada valor de  $n$ , há um valor para o salário  $S$ .  
Por isso, nessa fórmula, as letras  $n$  e  $S$  são chamadas de **variáveis**. Vimos que há uma interdependência na variação que apresentam.

- Para receber R\$ 680,00, quantas camisas Célia precisa costurar?  
Basta substituir, na fórmula,  $S$  por 680:  
 $680 = 200 + n \cdot 1,50$

Obtemos uma **equação**, na qual o valor desconhecido é  $n$ . Vamos resolvê-la:

$$680 - 200 = n \cdot 1,50$$
$$480 = n \cdot 1,50$$
$$\frac{480}{1,5} = n$$
$$n = 320$$

Para receber R\$ 680,00, Célia precisa costurar 320 camisas.

$S = 200 + 1,50 \cdot n$	
$n$	$S$
170	
	800
	392

Quem quer ir ao quadro mostrar aos colegas como encontrar os valores que faltam nessa tabela?

Figura 49

As fórmulas matemáticas são usadas nas ciências e em muitas atividades humanas para descrever a relação entre grandezas.

- Um médico, por exemplo, usa fórmulas para calcular a dose certa de remédio para uma criança, de acordo com o peso e a idade dela.
- Um engenheiro também utiliza fórmulas para projetar uma ponte, um prédio ou um avião.
- Os economistas aplicam fórmulas para calcular a inflação do mês ou o rendimento de uma aplicação financeira, e por aí vai.

No exemplo da Célia, vimos que também podemos usar fórmulas para representar e resolver situações de nosso cotidiano. Vamos examinar **outra situação**.

Renata vai fazer uma horta retangular nos fundos de sua casa. A horta terá 6 m de comprimento, mas ela não decidiu ainda qual será a medida da largura.

Por isso chamou essa medida de  $x$ .

O perímetro  $P$  da horta depende da medida  $x$  da largura.

Renata escreveu a fórmula:  
 $P = 6 + x + 6 + x$  ou  
 $P = 2x + 12$

Para cada medida escolhida para  $x$ , teremos uma medida  $P$  para o perímetro da horta.

$P$  e  $x$  são as variáveis da fórmula  $P = 2x + 12$ .

A fórmula mostra a interdependência na variação entre elas.

- Renata tem 22 m de tela de arame para cercar a horta. Se a largura da horta for de 5,5 m, a tela será suficiente?  
 Se  $x = 5,5$  m  
 $P = 2 \cdot 5,5 + 12 = 11 + 12 = 23$   
 O perímetro da horta seria de 23 m, então faltaria 1 m de tela para cercar a horta.
- Para usar exatamente os 22 m de tela, qual deverá ser a largura da horta?  
 Fazendo  $P = 22$  na fórmula:  
 $22 = 2x + 12$   
 $22 - 12 = 2x$   
 $10 = 2x$   
 $x = 5$   
 Se a largura for de 5 m, Renata usará os 22 m de tela para cercar a horta.

Obtivemos uma equação cuja incógnita é  $x$ .

Para calcular o volume  $V$  de um bloco retangular fazemos:  
 $V = c \cdot \ell \cdot a$

Isso é uma fórmula?  
 O que são as letras  $V$ ,  $c$ ,  $\ell$  e  $a$ ?


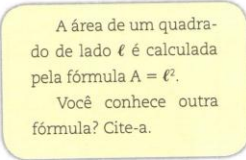
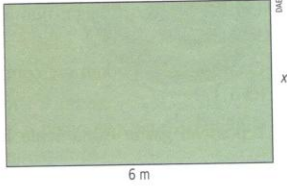
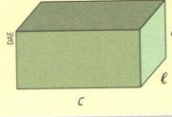





Figura 50


O conceito de Variável vem sendo construído desde o 1º Ano do Ensino Fundamental (conforme vimos), porém, é a primeira vez que o mesmo aparece de forma explícita.



✓ Na página 78:

### 3. Expressões algébricas

Veja o que Lucinha está dizendo.



Somei 4 a 7, multipliquei o resultado por 3 e subtraí 7.

A **expressão numérica** correspondente a essa sequência de operações é  $(7 + 4) \cdot 3 - 7$ . Podemos encontrar o valor dessa expressão fazendo:

$$\begin{aligned}(7 + 4) \cdot 3 - 7 &= \\ &= 11 \cdot 3 - 7 = \\ &= 33 - 7 = 26\end{aligned}$$

• Felipe pensou em um número.

Representando o número pensado por  $x$ , a expressão que representa essa sequência de operações é

$$(x + 4) \cdot 3 - x$$

Podemos aplicar a propriedade distributiva obtendo:  
 $3x + 12 - x$


Como  $3x - x = 2x$ , a expressão fica:  
 $2x + 12$

Essa é uma **expressão algébrica**.

Seu valor numérico depende do valor atribuído a  $x$ , que é a variável da expressão.

- Se  $x = 7$ , então  $2x + 12 = 2 \cdot 7 + 12 = 26$ .  
O valor numérico da expressão é 26.
- Se  $x = -3$ , então  $2x + 12 = 2 \cdot (-3) + 12 = 6$ .  
O valor numérico da expressão é 6.
- Se  $x = \frac{1}{2}$ , então  $2x + 12 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 12 = 1 + 12 = 13$ .  
O valor numérico da expressão é 13.

Pensei em um número, somei 4 a ele, multipliquei o resultado por 3 e subtraí o próprio número.



Uma expressão matemática contendo letras, números e operações é uma expressão algébrica.

- $4a^3$
- $5a + 3b - 2c$
- $\frac{2}{5}xy + 7x^2$
- $3(m - n) + 5m - 2(3m + 1)$

são exemplos de expressões algébricas.

Um CD custa  $x$  e um livro custa  $y$ . Quanto se paga por dois CDs e três livros?

Figura 51

Após a introdução feita nas figuras 50 e 51, no livro, é dada uma grande ênfase para as Expressões Algébricas como: monômios e polinômios, operações

com expressões algébricas, produtos notáveis, fatoração, frações algébricas e sistemas de equações.

Todos os conteúdos algébricos, citados anteriormente, para o 8º Ano, são muito importantes no estudo de Funções, pois, constituem-se numa preparação para a compreensão das expressões algébricas, na maioria das vezes (para não dizer em todas) relacionada à Lei de Associação de uma Função.

Além do excesso “inevitável” do conteúdo algébrico no 8º Ano (já mencionado), observamos um reforço muito grande desse “algebrismo excessivo” nos conteúdos de Geometria como: Retas e Ângulos, Triângulos, Quadriláteros e outros Polígonos, Circunferência e Círculo (capítulos de 9 a 13).

✓ No 9º Ano, após tratar das Equações do 2º Grau (as Equações Fracionárias, que recaem em equações de 2º grau; as Equações Biquadradas; e as Equações Irracionais), introduz o Sistema Cartesiano e em seguida inicia-se o conteúdo de funções conforme veremos mais adiante.

### **3.1.2.5. Representação Geométrica.**

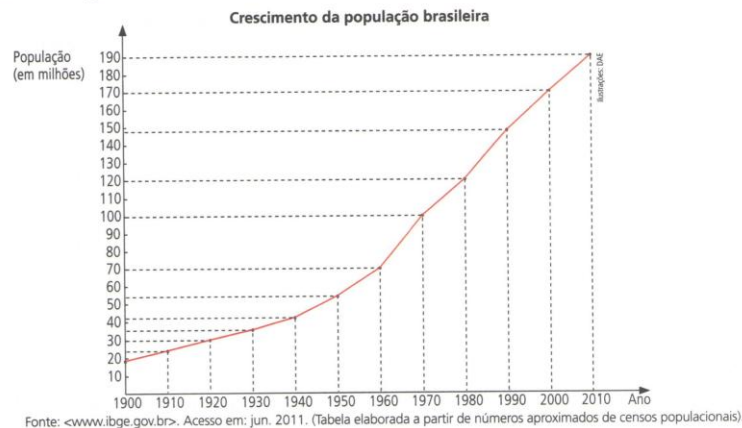
Tabelas e Gráficos – Em todas os anos (do 6º ao 9º ) são utilizadas tabelas e gráficos, em vários conteúdos (inclusive, em Geometria) sempre que conveniente, em situações contextualizadas e/ou cotidianas.

Vale ressaltar que nem todo gráfico ou tabela tem natureza funcional.

✓ No 8º ano, por exemplo, na página 263:

## Gráficos de segmentos

Você já deve ter visto gráficos como este que aparece a seguir. Eles recebem o nome de **gráficos de segmentos** e são eficientes para representar, por exemplo, a variação de uma grandeza no decorrer do tempo.



Vamos aprender a construir esse tipo de gráfico por meio de um exemplo.

Os alunos de certa escola estão recolhendo latinhas vazias de refrigerante. Elas serão doadas a um hospital que, com sua venda para reciclagem, poderá melhorar o atendimento à população carente da cidade.

A quantidade de latinhas arrecadadas por mês no primeiro semestre letivo está na tabela ao lado.

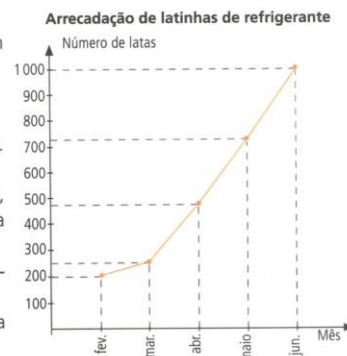
Mês	Número de latas
Fevereiro	200
Março	250
Abril	480
Mai	720
Junho	1 000

Podemos representar esses dados por meio de um gráfico de segmentos. Acompanhe.

- Traçamos dois eixos perpendiculares.
  - No eixo horizontal marcamos os meses.
  - No eixo vertical, o número de latas arrecadadas.
- Observe que não marcamos o zero nos eixos.

- Para cada par: mês, número de latas correspondente, marcamos um ponto. A unidade de medida adotada para graduar os eixos não precisa ser a mesma.
- Obtemos o gráfico ligando os pontos com segmentos de reta.

Podemos constatar com facilidade que a campanha vai de vento em popa.



**Figura 52**

No 8º ano, após mostrar os principais tipos de gráficos (os pictogramas, os de colunas, os de barras e os de setores), o autor apresenta os gráficos de segmentos, como na figura anterior.

Os gráficos de segmentos são utilizados para representar geometricamente funções de Domínio real.

No 9º ano são desenvolvidas interpretações de gráficos de segmentos para posterior introdução da construção de gráficos de funções reais (Afim e Quadrática).

### 3.1.2.6. Funções (9º Ano do Ensino Fundamental).

O estudo sobre Funções, propriamente dito, é feito apenas no 9º ano do Ensino Fundamental. No capítulo que antecede o estudo das funções é apresentado o Sistema Cartesiano (como já dissemos) e posteriormente é apresentada a Definição de Função como segue, nas páginas 95, 96 e 97:

**Funções**

## 1. Conceito de função

A quantidade de combustível consumida por um automóvel é função da distância que ele percorre.

Nessa afirmação e em outras presentes em nosso dia a dia, usamos a expressão “é função de” para mostrar que a quantidade de combustível depende do número de quilômetros rodados pelo automóvel.

Mas o que é função? Já percebemos a ligação entre a palavra **função** e a relação de interdependência entre os valores de grandezas.

Vamos descobrir mais?



Vamos fazer uma brincadeira: eu digo um número, vocês calculam o dobro dele, somam 3 e dizem o resultado!

Vamos lá!

Eu digo 4.

Nós respondemos 11.  
 $2 \cdot 4 + 3 = 11$

Figura 53

Veja na tabela os números ditos pelo professor e as respostas dos alunos:

Número dado pelo professor	Resposta dos alunos
4	11
6	15
-5	-7
0	3

Qual deveria ser a resposta dos alunos se o professor dissesse:

- $\frac{1}{2}$ ?
- 1,3?

A resposta dos alunos depende do número escolhido pelo professor.

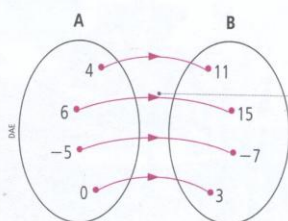
Observe que a cada número  $x$  dito pelo professor corresponde *um único* resultado correto  $y$  para a resposta dos alunos.

A fórmula que expressa a relação entre  $x$  e  $y$  é  $y = 2x + 3$ .

Nesse exemplo, dizemos que  $y$  é **função** de  $x$ .

A fórmula  $y = 2x + 3$  é a **lei de formação** dessa função.

Outro modo de representar essa tabela é por meio de um **diagrama**:



Cada seta associa o número falado pelo professor com a respectiva resposta dos alunos.

Formamos um conjunto A com os números dados pelo professor e um conjunto B com as respostas dos alunos.

Como os conjuntos que relacionamos são A e B, dizemos que essa é uma função de A em B.

Escreve-se:  $f: A \rightarrow B$  (Lê-se:  $f$  é uma função de A em B).

Sempre que atribuímos um valor a  $x$  e determinamos seu correspondente  $y$  por meio da lei de formação da função, obtemos um par de números.

Podemos escrever os pares ordenados  $(x; y)$  formados no nosso exemplo.

- $x = 4; y = 11$  par ordenado  $(4; 11)$
- $x = 6; y = 15$  par ordenado  $(6; 15)$
- $x = -5; y = -7$  par ordenado  $(-5; -7)$
- $x = 0; y = 3$  par ordenado  $(0; 3)$

Os pares são **ordenados**: o primeiro elemento do par é  $x$ , e o segundo é  $y$ .

Figura 54

Agora a brincadeira é outra. Eu digo um número e vocês respondem qual ou quais dos números escritos no quadro são menores do que ele.

Eu digo 5.

Nós respondemos 2 e 4.

Observe o diagrama:

Formamos um conjunto A com os números escolhidos pelo professor e um conjunto B com os números que estavam escritos no quadro.

Observe que cada seta faz corresponder o número dado pelo professor com o número (ou os números) registrados no quadro que são menores do que ele.

A relação entre o número  $x$  escolhido pelo professor e o número  $y$  que é a resposta dos alunos pode ser representada por  $y < x$ .

No entanto, aqui,  $y$  não é função de  $x$ . Veja por quê:

- para um mesmo valor de  $x$  do conjunto A, temos mais do que um correspondente  $y$  no conjunto B.
- há um valor de  $x$  em A que não tem correspondente  $y$  em B.

Para que tenhamos uma função é preciso:

- estabelecer dois conjuntos: um primeiro conjunto, do qual tomaremos os valores de  $x$ , e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de  $y$ ;
- haver uma relação entre  $x$  e  $y$  de forma que a cada  $x$  tomado no primeiro conjunto corresponda um único  $y$  no segundo conjunto.

No nosso exemplo, para  $x = 1$  em A não temos correspondente  $y$  em B. Além disso,  $x = 5$  tem dois correspondentes em B.  
Por isso, não temos uma função.

Figura 55

Observando as figuras 53, 54 e 55, vemos que, inicialmente, o leitor é provocado a refletir sobre o uso da expressão “é função de”, citando um exemplo que relaciona a quantidade de combustível consumida por um automóvel **em função** da distância percorrida. Mostrando a associação entre a palavra função e a interdependência entre os valores das grandezas.

Em seguida, propõe “uma brincadeira”: o professor fala um número ( $x$ ), os alunos calculam o dobro desse número e somam 3 e dizem o resultado ( $y$ ); constroem uma tabela de  $y$  “em função de”  $x$  verificando: a fórmula que expressa a relação entre  $x$  e  $y$ , a qual é a Lei de Associação da função ( $y = 2x + 3$ ); mostra que ainda é possível representar a tabela por diagrama de setas, formando pares ordenados com os respectivos valores de  $x$  e  $y$ .

E para mostrar uma relação que não seja função, o autor apresenta o seguinte contraexemplo: propõe “outra brincadeira”, o professor fala um número ( $x$ ) e os alunos têm que responder qual ou quais dos números ( $y$ ), previamente escritos na lousa, são menores do que o número citado; verificando que podem ocorrer duas situações que não são características de uma função – para um mesmo valor de  $x$  pode ter mais de um correspondente  $y$ ; e, que podem existir valores de  $x$  que não tenham correspondente  $y$ .

Em seguida, chega à seguinte “conclusão”:

Para que tenhamos uma função é preciso:

- Estabelecer dois conjuntos: um primeiro conjunto, do qual tomaremos os valores de  $x$ , e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de  $y$ ;
- Haver uma relação entre  $x$  e  $y$  de forma que a cada  $x$  tomado no primeiro conjunto corresponda um único  $y$  no segundo conjunto. (ANDRINI, 2012d, p. 97)

✓ Nas páginas 100:

### Domínio e imagem

Mostraremos, por meio de exemplos, o significado das palavras domínio e imagem no estudo das funções.


1. Marcela foi comprar bombons na confeitaria. Cada bombom custa R\$1,80. A quantia que ela pagará ( $y$ ) será função do número de bombons que levar ( $x$ ), pois, para cada quantidade de bombons, há um único preço a ser cobrado.

Número de bombons ( $x$ )	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	etc.
Preço a pagar ( $y$ )	0	1,80	3,60	5,40	7,20	9,00	10,80	12,60	14,40	16,20	18,00	

Os valores de  $x$  para essa função são números naturais. Não se compra 2,3 bombons ou algo assim. Dizemos que o **domínio** dessa função é o conjunto dos números naturais. Nessa função,  $x$  pode ser qualquer número natural, como  $x = 320$  ou  $x = 1000$ , mas  $x$  não pode ser uma fração ou número negativo, por exemplo.

Observando a tabela, vemos que quando  $x = 3$ , por exemplo, temos  $y = 5,40$ . Diremos que 5,40 é a **imagem** de 3 por esta função.

Todo elemento do domínio tem uma única imagem.

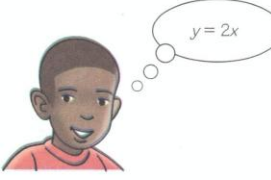


Qual seria a imagem de 0 por essa função?

2. Ariel pensou em uma função que associa um número  $x$  ao seu dobro ( $y = 2x$ ).

Existe algum número que não possui dobro? Não, então nessa função,  $x$  pode ser qualquer número real, pois é sempre possível calcular o dobro de um número. Diremos, então, que o **domínio** da função pensada pelo Ariel é  $\mathbb{R}$ .

No entanto, se a função associasse, por exemplo, cada número  $x$  ao seu inverso  $y = \frac{1}{x}$ , teríamos de excluir do domínio  $\mathbb{R}$  o número zero, pois zero é o único número real que não possui inverso.



$y = 2x$

Em geral, quando não se explicita qual é o domínio de uma função, consideramos o domínio como  $\mathbb{R}$ , tomando o cuidado de excluir, se necessário, números para os quais não exista  $y$  correspondente a ele pela função.

**Figura 56**

Após esta definição de Domínio e Imagem, apresenta algumas aplicações, como segue.

- ✓ Nas páginas de 102 a 105:



## 2. As funções e suas aplicações

Por que aprender funções?

Na ciência e nas mais variadas atividades humanas, as funções são usadas para descrever e estudar a relação entre grandezas.



• O gasto com combustível é função do número de litros colocados no tanque do automóvel.



• A dose de remédio dada a uma criança, muitas vezes, é função da massa da criança.



• O preço de uma ligação telefônica interurbana frequentemente é função do tempo de conversação.



• O juro pago por um empréstimo é calculado em função da quantia emprestada.

Figura 57

As funções têm aplicações nas situações do cotidiano e do trabalho. Acompanhe.

1. No açougue, o quilograma de determinado tipo de carne custa R\$ 6,00. O preço a pagar  $y$  é função da quantidade de carne comprada  $x$ . Veja a tabela:

Carne (kg)	Preço (R\$)
$x$	$y$
1	$6 \cdot 1 = 6$
2	$6 \cdot 2 = 12$
3	$6 \cdot 3 = 18$
4	$6 \cdot 4 = 24$

A cada valor de  $x$  corresponde um único valor de  $y$ .  
A lei de formação dessa função é  $y = 6x$ .

$x$  e  $y$  são as variáveis da função.



A **lei de formação** da função estabelece a relação matemática entre  $x$  e  $y$ .

Vamos aplicá-la para responder a algumas questões.

- Uma pessoa comprou 1,8 kg de carne. Quanto pagou?

Como  $y = 6x$ , para  $x = 1,8$  temos:  
 $y = 6 \cdot 1,8 = 10,80$

A pessoa pagou R\$ 10,80 por 1,8 kg de carne.

- Com R\$ 4,80, quanto de carne é possível comprar?

Agora temos  $y = 4,80$   
 $4,80 = 6 \cdot x$   
 $x = \frac{4,80}{6} = 0,8$

0,8 kg = 800 g,  
pois 1 kg = 1000 g

Com R\$ 4,80 é possível comprar 0,8 kg de carne.

Observe que, nesse exemplo de função,  $x$  não pode assumir valores negativos, pois uma medida de massa nunca é negativa.

Responda usando cálculo mental: quanto se paga por 2,5 kg dessa carne?

No açougue...



- O funcionário digita na balança o preço do kg de carne (R\$ 6,00).



- Coloca a carne sobre o prato da balança que registra a massa (é o valor de  $x$ ).



- A balança calcula automaticamente  $6 \cdot x$  e apresenta no visor o valor a pagar. É o valor de  $y$ .

Figura 58

**2.** Em um parque de diversões, os visitantes pagam R\$ 15,00 pelo ingresso e R\$ 3,00 para brincar em cada uma das 20 atrações disponíveis.

A quantia  $p$  gasta pelo visitante depende do número de atrações  $n$  que ele escolher e pagar.

Podemos representar a relação entre  $n$  e  $p$  pela fórmula  $p = 15 + 3n$ .

$n$  e  $p$  são as variáveis dessa função

Observe:  
 $n$  é o número de atrações pagas pelo visitante. O parque tem no total 20 atrações. Então  $n$  só pode ser um número inteiro de zero a 20.  
 Ou seja,  $0 \leq n \leq 20$ .

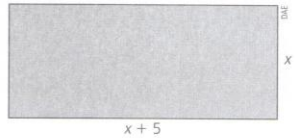
O visitante não pagou por atrações do parque. Seu gasto limitou-se ao ingresso.

O visitante pagou por todas as atrações do parque.

A cada valor de  $n$  nesse intervalo corresponde um único valor a pagar  $p$ . Então  $p$  é função de  $n$ .

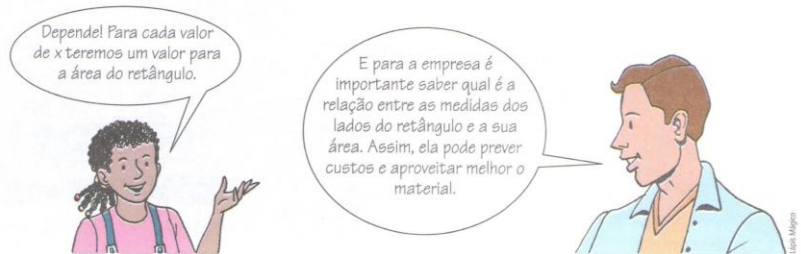
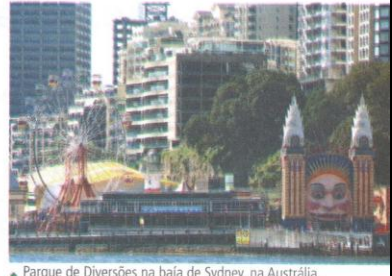
**3.** Uma fábrica produz placas de aço na forma de retângulos. As medidas variam; no entanto, a medida do comprimento tem sempre 5 cm a mais do que a medida da largura.

Quantos centímetros quadrados de aço são gastos em cada placa?



Depende! Para cada valor de  $x$  teremos um valor para a área do retângulo.

E para a empresa é importante saber qual é a relação entre as medidas dos lados do retângulo e a sua área. Assim, ela pode prever custos e aproveitar melhor o material.

Parque de Diversões na baía de Sydney, na Austrália.

**1.** Paulo pagou o ingresso e foi a quatro atrações. Ele gastou R\$ 27,00.  
 $15 + 4 \cdot 3 = 15 + 12 = 27$   
 Calcule mentalmente:

- Quanto gasta o visitante que vai a dez atrações do parque?

**2.** Pense e responda no caderno:

- Nessa função, qual é o menor valor que podemos ter para  $p$ ?
- E o maior?
- Explique esses valores.

Figura 59

Se os lados do retângulo medem  $(x + 5)$  e  $x$ , sua área é  $y = (x + 5) \cdot x$ .

Aplicando a propriedade distributiva obtemos  $y = x^2 + 5x$ .

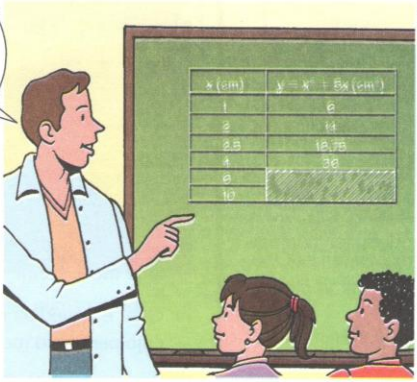
A cada valor de  $x$  corresponde um único valor de  $y$ . Então  $y$  é função de  $x$ .

Podemos montar uma tabela com alguns valores dessa função.

Podemos atribuir infinitos valores a  $x$ . No entanto, como  $x$  é a medida do lado do retângulo, devemos ter  $x > 0$ .

$x$ (cm)	$y = x^2 + 5x$ (cm <sup>2</sup> )
1	6
2	14
3,5	18,75
4	20
6	36
10	100

Quem vai ao quadro calcular os valores de  $y$  que faltam na tabela?



• Qual deve ser a medida  $x$  para que a área da peça retangular seja de  $104 \text{ cm}^2$ ?

Basta fazer  $y = 104 \text{ cm}^2$  na lei de formação da função:

$$y = x^2 + 5x$$

$$104 = x^2 + 5x$$

Obtivemos uma equação do 2º grau. Vamos resolvê-la para encontrar  $x$ .

Reescrevendo a equação:

$$x^2 + 5x - 104 = 0$$

$$a = 1; b = 5 \text{ e } c = -104$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 25 + 416 = 441$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm 21}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 21}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{-5 - 21}{2} = -13$$

Consideramos somente a solução positiva, pois  $x$  é a medida do lado do retângulo. Então, para que a área da peça seja de  $104 \text{ cm}^2$ , devemos ter  $x = 8 \text{ cm}$ .

Figura 60

Percebe-se, nestas aplicações, apenas o reforço da Lei de Associação.

✓ Na página 108:

### 3. Da tabela para a lei de formação da função

Vimos como obter valores da função a partir da sua lei de formação. Agora faremos o contrário: a partir de uma tabela com valores de uma função, escreveremos sua lei de formação. Acompanhe.

1. Um trem viaja com velocidade constante. A distância percorrida pelo trem ( $d$ ) é função do tempo de viagem ( $t$ ). Veja na tabela valores de  $t$  e de  $d$ .

$t$ (horas)	0	1	2	3	4
$d$ (quilômetros)	0	30	60	90	120



Observe que para cada valor de  $t$  obtemos  $d$  multiplicando  $t$  por 30. Ou seja,  $d = 30t$  é a lei de formação dessa função.

A velocidade do trem é constante. Se ele percorreu 30 km em 1 hora, sua velocidade é de trinta quilômetros por hora. Escreve-se 30 km/h.

Calcule mentalmente a distância percorrida pelo trem em 2,5 horas de viagem.

2. Na classe, durante uma aula de Matemática, o professor dizia um número. Os alunos faziam sempre uma mesma sequência de operações e davam o resultado obtido. A cada número  $n$  dado pelo professor, correspondia uma única resposta  $R$ .

Veja a tabela:

Número dado pelo professor ( $n$ )	Resultado calculado pelos alunos ( $R$ )
2	5
3	10
4	17
5	26
0,5	1,25

$R$  é função de  $n$ . Qual é a lei de formação da função?

Observe:

$$2^2 + 1 = 5$$

$$3^2 + 1 = 10$$

$$4^2 + 1 = 17$$

$$5^2 + 1 = 26$$

$$0,5^2 + 1 = 0,25 + 1 = 1,25$$

Os alunos elevavam ao quadrado o número  $n$  dado pelo professor, somavam 1 e obtinham o resultado  $R$ .

Concluimos que  $R = n^2 + 1$  é a lei de formação dessa função.

Figura 61

Como se observa na figura anterior, partir de tabela deduz a Lei de Associação da função. O que, conforme veremos é limitado.

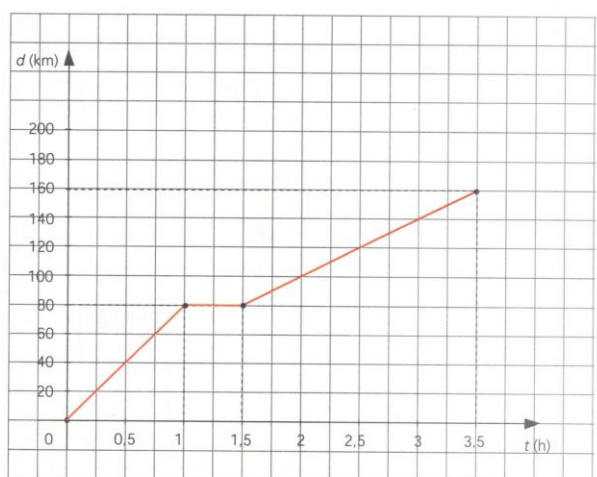
✓ Nas páginas 110, 111 e 112:

## 4. Interpretando gráficos

Agora vamos analisar gráficos, retirando deles informações sobre a função.

1. Sérgio saiu de sua casa dirigindo seu automóvel e fez uma viagem de 160 km, por uma estrada praticamente retilínea. Chegando ao seu destino, reclamou de um trecho da estrada em que teve de viajar com velocidade baixa por causa dos buracos.

O gráfico a seguir mostra a distância  $d$  percorrida pelo automóvel em função do tempo decorrido de viagem  $t$ .



O gráfico nos fornece muitas informações:

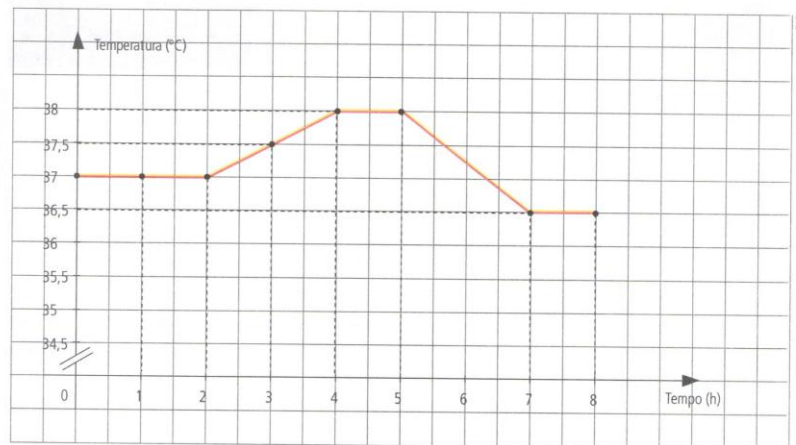
- Para  $t = 1$  h, temos  $d = 80$  km. Isso significa que em 1 hora de viagem o automóvel percorreu 80 km. Sua velocidade média nesse trecho da viagem foi de 80 km/h.
- Repare que entre  $t = 1$  h e  $t = 1,5$  h, a posição do automóvel permaneceu constante, ou seja, nesse intervalo de tempo de 0,5 hora, ou 30 minutos, o automóvel permaneceu parado (provavelmente uma parada para um lanche!).
- No trecho final da viagem, depois da parada, o automóvel percorreu 80 km ( $160 - 80 = 80$ ). Isso num intervalo de tempo de 2 horas ( $3,5 - 1,5 = 2$ ).  
80 km em 2 horas  $\longrightarrow$  40 km em 1 hora
- No trecho final da estrada, a velocidade média do automóvel foi de 40 km/h.

Realmente, nesse trecho Sérgio desenvolveu uma velocidade média menor por causa dos buracos na pista.

Figura 62

2. Um paciente, num leito de hospital, tem sua temperatura tomada pela enfermeira de hora em hora. O médico deixou instruções: se a temperatura do paciente atingisse 38 °C, ele deveria ser medicado.

Veja o gráfico construído pela enfermeira mostrando a variação da temperatura do doente em função do tempo.



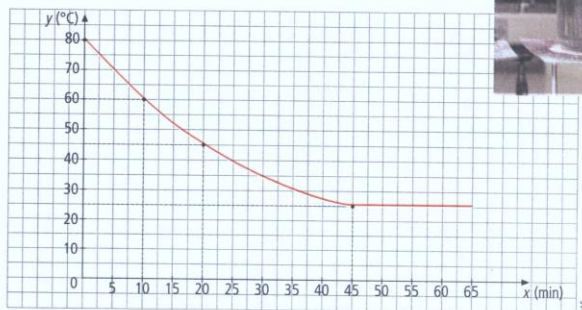
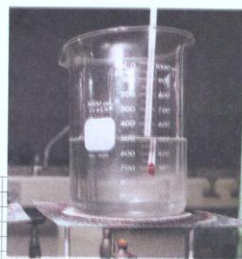
- O gráfico ilustra a variação de quais grandezas?
- Observe que o eixo vertical está seccionado próximo ao zero. Você tem ideia do significado disso?
- Observando o gráfico, responda:
  - Qual é a temperatura do paciente anotada pela enfermeira a zero hora?
  - E às 2 horas?  
Observe que nesse intervalo de tempo a temperatura manteve-se constante.
- O que aconteceu com a temperatura entre 2 e 4 horas? Qual é a temperatura do paciente às 4 horas?
- O que ocorreu com a temperatura entre 4 e 5 horas?  
Você teria uma possível explicação para a temperatura não ter baixado nesse período?
- Observe que entre 5 e 7 horas a temperatura do paciente caiu de 38 °C para 36,5 °C, permanecendo constante das 7 às 8 horas.

Analisando gráficos como esse, o médico pode verificar de forma mais rápida e fácil como variou a temperatura do paciente durante a noite.

Figura 63

3. Certa quantidade de água foi aquecida num recipiente e em seguida colocada para esfriar naturalmente. Um termômetro colocado no interior do recipiente permitiu verificar a variação da temperatura da água com o decorrer do tempo.

Com os valores de  $x$  para o tempo e de  $y$  para a temperatura da água, construiu-se o gráfico abaixo.



No início da contagem do tempo ( $x = 0$  min), a temperatura da água era de  $80^\circ\text{C}$ . A partir desse instante, a temperatura da água diminui, atingindo  $60^\circ\text{C}$  quando  $x = 10$  min,  $45^\circ\text{C}$  quando  $x = 20$  min e  $25^\circ\text{C}$  quando  $x = 45$  min.

A partir desse instante, a temperatura da água permaneceu constante, igual a  $25^\circ\text{C}$ , o que significa que o processo de resfriamento natural terminou.

#### Escalas termométricas

Nos exemplos 2 e 3, trabalhamos com temperaturas em graus Celsius.

A escala Celsius é uma escala termométrica (*termo*, em grego, significa calor), criada em 1742 por Anders Celsius (1701-1744). Essa escala baseia-se em dois pontos fixos:

- ponto de fusão do gelo  $\rightarrow$  valor zero;
- ponto de ebulição da água sob pressão normal  $\rightarrow$  valor 100 (cem).

O intervalo entre esses dois pontos foi dividido em 100 partes iguais. Cada parte corresponde a 1 grau Celsius ( $1^\circ\text{C}$ ).

Podemos citar também a escala Fahrenheit, criada por Daniel E. Fahrenheit (1686-1736) em 1726. É usada, por exemplo, nos EUA.

Comparando a escala Celsius com a Fahrenheit, temos:

- $0^\circ\text{C}$  corresponde a  $32^\circ\text{F}$ ;
- $100^\circ\text{C}$  correspondem a  $212^\circ\text{F}$ .

Para converter temperaturas da escala Fahrenheit para a escala Celsius, utiliza-se a fórmula:

$$T_c = \frac{5}{9} (T_f - 32), \text{ em que } \begin{matrix} T_c = \text{temperatura na escala Celsius} \\ T_f = \text{temperatura na escala Fahrenheit} \end{matrix}$$

Uma temperatura de  $41^\circ\text{F}$ , por exemplo, corresponde a uma temperatura de  $5^\circ\text{C}$ . Confira substituindo  $T_f$  por 41 na fórmula e fazendo os cálculos.



Figura 64

Após interpretar os gráficos acima, ressaltando conceitos de dependência, variação, crescimento e decrescimento (atividade muito importante e que muitas das vezes os alunos apresentam muitas dificuldades) o autor realiza a construção de gráficos das funções Afim e Quadrática, como segue.



✓ Nas páginas de 115 a 121:

## 5. Construindo gráficos de funções


Vimos que o gráfico fornece informações sobre a função. Vamos aprender a construir gráficos de algumas funções. Começaremos construindo o gráfico da função de lei de formação  $y = 2x$ .

Essa função associa cada número real  $x$  ao seu dobro  $y$ .

Inicialmente montamos uma tabela atribuindo valores a  $x$  e calculando, por meio da lei de formação, os valores de  $y$  correspondentes. Assim obtemos alguns dos pares ordenados  $(x; y)$  dessa função.

$x$	$y = 2x$	$(x; y)$
-3	-6	$(-3; -6)$
-2	-4	$(-2; -4)$
-1	-2	$(-1; -2)$
0	0	$(0; 0)$
1	2	$(1; 2)$
2	4	$(2; 4)$
3	6	$(3; 6)$

Nessa função,  $x$  pode ser qualquer número real. Escolhemos valores inteiros para facilitar os cálculos, mas poderíamos tomar  $x = 8,4$  ou  $x = \frac{1}{7}$ , por exemplo.



Em seguida localizamos no plano cartesiano os pontos que representam cada par ordenado. Observe que os pontos estão alinhados. Quanto mais pares ordenados da função representarmos, mais pontos alinhados obteremos.

Escolha outro valor para  $x$  na tabela, calcule  $y$  e localize o par  $(x; y)$  no plano. O ponto obtido está alinhado com os pontos já marcados?

Todos os pontos que representam os pares ordenados dessa função formam seu gráfico, que é uma **reta**. Veja ao lado.

Se você tomasse  $x = 150000$  e o seu  $y$  correspondente, esse par estaria na reta?

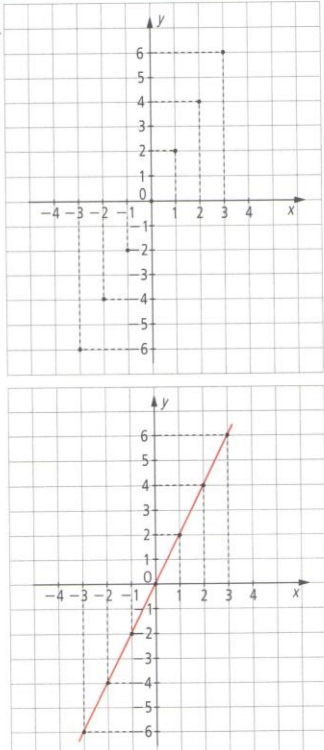
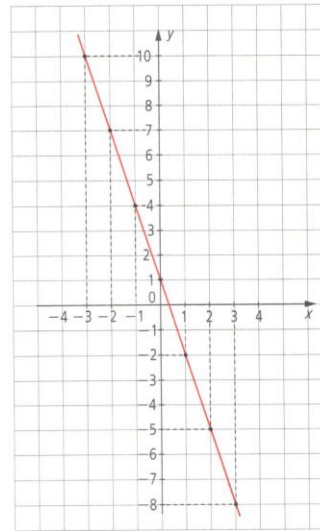


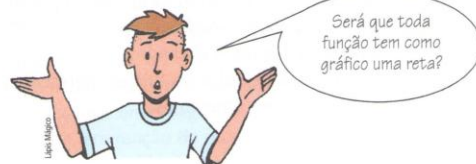
Figura 65

Como será o gráfico da função dada por  $y = -3x + 1$ ?  
 Montamos uma tabela atribuindo alguns valores para  $x$ , calculamos os valores de  $y$  por meio da lei de formação da função e representamos no sistema cartesiano os pares ordenados  $(x; y)$  obtidos.

$x$	$y = -3x + 1$	$(x; y)$
-3	10	$(-3; 10)$
-2	7	$(-2; 7)$
-1	4	$(-1; 4)$
0	1	$(0; 1)$
1	-2	$(1; -2)$
2	-5	$(2; -5)$
3	-8	$(3; -8)$

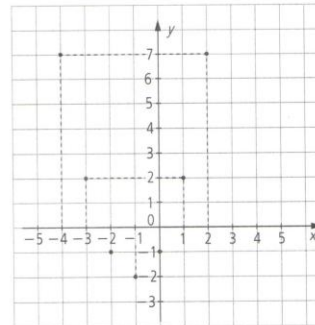


Os pontos obtidos estão alinhados.  
 Quanto mais pares ordenados da função representarmos, mais pontos alinhados obteremos.  
 São infinitos pares ordenados, pois  $x$  pode ser qualquer número real.  
 O gráfico dessa função é uma reta.



A resposta é não. Vamos montar uma tabela com alguns valores de  $x$  e de  $y$  para a função dada por  $y = x^2 + 2x - 1$  e representar os pares ordenados  $(x; y)$  no sistema cartesiano.

$x$	$y = x^2 + 2x - 1$	$(x; y)$
-4	7	$(-4; 7)$
-3	2	$(-3; 2)$
-2	-1	$(-2; -1)$
-1	-2	$(-1; -2)$
0	-1	$(0; -1)$
1	2	$(1; 2)$
2	7	$(2; 7)$



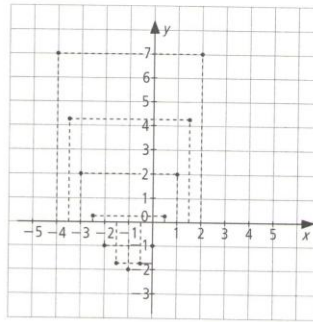
Os pontos não estão alinhados, portanto não determinam uma reta.

Nessa função,  $x$  pode ser qualquer número real. Podemos fazer  $x = 0,5$ ;  $x = 124$ ;  $x = \frac{3}{5}$  etc.

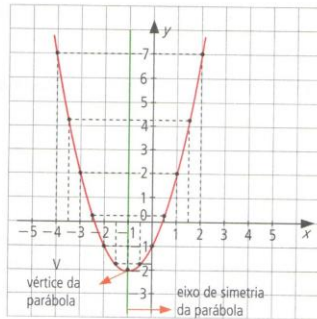
Vamos atribuir mais valores a  $x$  na tabela, obtendo outros pares ordenados  $(x; y)$  da função. Representando mais pontos no sistema cartesiano nos aproximaremos mais da forma final do seu gráfico.

Figura 66

$x$	$y = x^2 + 2x - 1$	$(x; y)$
-3,5	4,25	$(-3,5; 4,25)$
-2,5	0,25	$(-2,5; 0,25)$
-1,5	-1,75	$(-1,5; -1,75)$
-0,5	-1,75	$(-0,5; -1,75)$
0,5	0,25	$(0,5; 0,25)$
1,5	4,25	$(1,5; 4,25)$



Podemos prosseguir atribuindo valores a  $x$  e localizando ainda mais pares ordenados. Todos os pontos que representam os pares ordenados dessa função formam seu gráfico. O gráfico dessa função é uma curva chamada **parábola**, cuja forma você vê abaixo.



Observe que a parábola possui um **eixo de simetria**. O ponto da parábola que pertence ao eixo de simetria recebe o nome de **vértice (V)** da parábola.

No gráfico dessa função o vértice tem coordenadas  $(-1; -2)$ . A parábola que traçamos tem concavidade voltada para cima (ela é "aberta para cima"). No entanto, há funções cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo.



Figura 67

Funções cuja lei de formação pode ser escrita na forma  $y = ax + b$ , sendo  $a$  e  $b$  números reais e  $a$  diferente de zero, têm como gráfico uma **reta**. É o caso das funções:

- $y = 2x$  ( $a = 2$  e  $b = 0$ )
- $y = -3x + 1$  ( $a = -3$  e  $b = 1$ )

Essas funções são chamadas **funções polinomiais do 1º grau**, pois encontramos na sua lei de formação um polinômio do 1º grau.

Funções cuja lei de formação pode ser escrita na forma  $y = ax^2 + bx + c$ , sendo  $a$ ,  $b$ , e  $c$  números reais e  $a$  diferente de zero, têm como gráfico uma **parábola**. É o caso das funções:

- $y = x^2 + 2x - 1$  ( $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = -1$ )
- $y = -2x^2 + 4$  ( $a = -2$ ,  $b = 0$  e  $c = 4$ )

Essas são **funções polinomiais do 2º grau**, pois encontramos na sua lei de formação um polinômio do 2º grau.

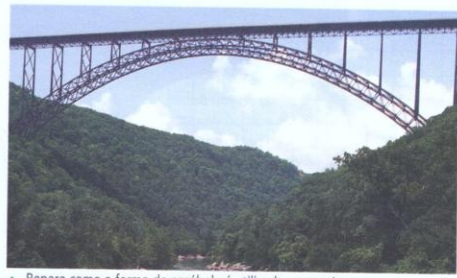
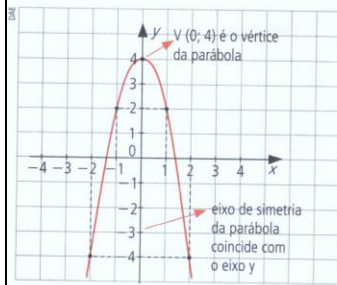
Há funções cujo gráfico não é uma reta nem uma parábola.

Ainda como exemplo, veja como obtivemos um esboço do gráfico da função dada por  $y = -2x^2 + 4$ .

A função é do 2º grau: sabemos que seu gráfico é uma parábola. Montamos a tabela com valores da função.

$x$	$y = -2x^2 + 4$	$(x; y)$
-2	-4	$(-2; -4)$
-1	2	$(-1; 2)$
0	4	$(0; 4)$
1	2	$(1; 2)$
2	-4	$(2; -4)$

Abaixo localizamos no sistema cartesiano os pontos correspondentes aos pares ordenados e traçamos um esboço da parábola, que nesse caso tem concavidade voltada para baixo.



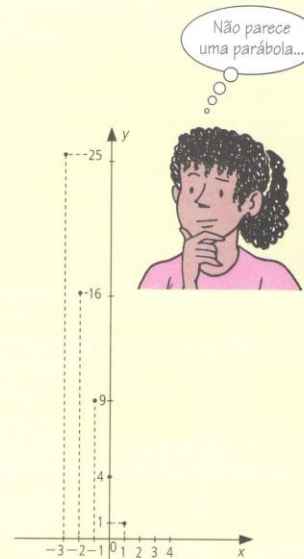
♦ Repare como a forma de parábola é utilizada na arquitetura

Figura 68

Luciana quer traçar o esboço do gráfico da função dada por  $y = x^2 - 4x + 4$ . Sabendo que o gráfico é uma parábola, montou uma tabela de valores da função. Mas, ao localizar os pares ordenados no plano cartesiano, não visualizou a forma da parábola!

x	$y = x^2 - 4x + 4$	(x; y)
-3	25	(-3; 25)
-2	16	(-2; 16)
-1	9	(-1; 9)
0	4	(0; 4)
1	1	(1; 1)

Sabe o que houve? Os pares (x; y) encontrados por Luciana representam pontos da parábola localizados todos de um mesmo lado em relação ao seu eixo de simetria. No entanto, como nessa função a variável x pode assumir qualquer valor real, basta que ela acrescente à tabela mais valores. Vamos ajudá-la: observando os pontos já localizados, sugira valores para x e calcule y de modo a obter pontos que permitam visualizar melhor a parábola. Trace o esboço do gráfico da função em seu caderno.

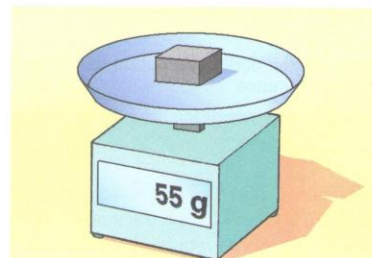


Vamos estudar mais algumas funções e seus gráficos, em situações práticas?

1. No laboratório do colégio, alguns alunos mediram, usando uma balança, a massa de blocos retangulares de chumbo cujo volume era conhecido.

Com os valores do volume V e da massa m de cada bloco, montaram a tabela abaixo.

V (cm <sup>3</sup> )	m (g)	(V; m)
1	11	(1; 11)
2	22	(2; 22)
3	33	(3; 33)
4	44	(4; 44)
5	55	(5; 55)

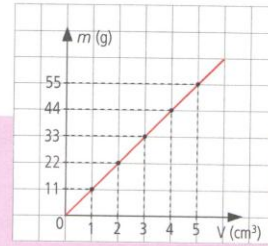


A massa do bloco é função de seu volume.

A tabela permite observar que a lei de formação dessa função é  $m = 11 \cdot V$ .

Figura 69

Os alunos localizaram os pares ordenados da tabela no sistema cartesiano e traçaram o gráfico da função, que é um trecho de reta, pois só temos valores de  $V$  e de  $m$  positivos.



Observe que o volume  $V$  e a massa  $m$  dos blocos de chumbo são grandezas diretamente proporcionais:

- Se  $V$  dobra,  $m$  dobra, se  $V$  triplica,  $m$  triplica, e assim por diante.

Funções cuja lei de formação é do tipo  $y = a \cdot x$  relacionam grandezas  $x$  e  $y$  que são diretamente proporcionais.

Como vimos, essas funções têm como gráfico uma reta. número diferente de zero

2. Um caminhão-tanque vai descarregar 20000 litros de gasolina no reservatório de uma empresa de ônibus. Serão descarregados 500 litros de gasolina por minuto. O volume de gasolina  $V$  no tanque do caminhão é função do tempo de descarga  $t$  decorrido.



O volume inicial de gasolina no caminhão é de 20000 litros. Desse volume subtrairemos 500 litros para cada minuto de descarga.

A lei de formação dessa função é  $V = 20000 - 500t$ , e seu gráfico é retilíneo. Quando  $t = 0$  minuto, ou seja, no momento em que a descarga se inicia, temos:

$$V = 20000 - 0 \cdot 500$$

$$V = 20000 \text{ litros}$$

Obtivemos o par ordenado  $(0; 20000)$ . Esse ponto está sobre o eixo  $y$ .

Quando o caminhão terminar o processo de descarga, seu tanque estará vazio.

Fazendo  $V = 0$  na lei de formação  $V = 20000 - 500t$ , temos:

$$0 = 20000 - 500t$$

$$500t = 20000$$

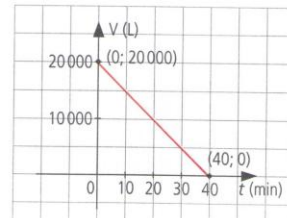
$$t = \frac{20000}{500}$$

$$t = 40 \text{ minutos}$$

O caminhão levará 40 minutos para descarregar todo o combustível.

Obtivemos o par ordenado  $(40; 0)$ . Esse ponto está sobre o eixo  $x$ .

Marcamos os pontos que representam os pares ordenados  $(0; 20000)$  e  $(40; 0)$  e traçamos o gráfico da função, que é um trecho de reta, pois a função só se define para valores de  $t$  entre 0 e 40 minutos.



Quando o gráfico da função é uma reta, ou um trecho de reta, basta determinar dois de seus pontos para traçá-lo.

Figura 70

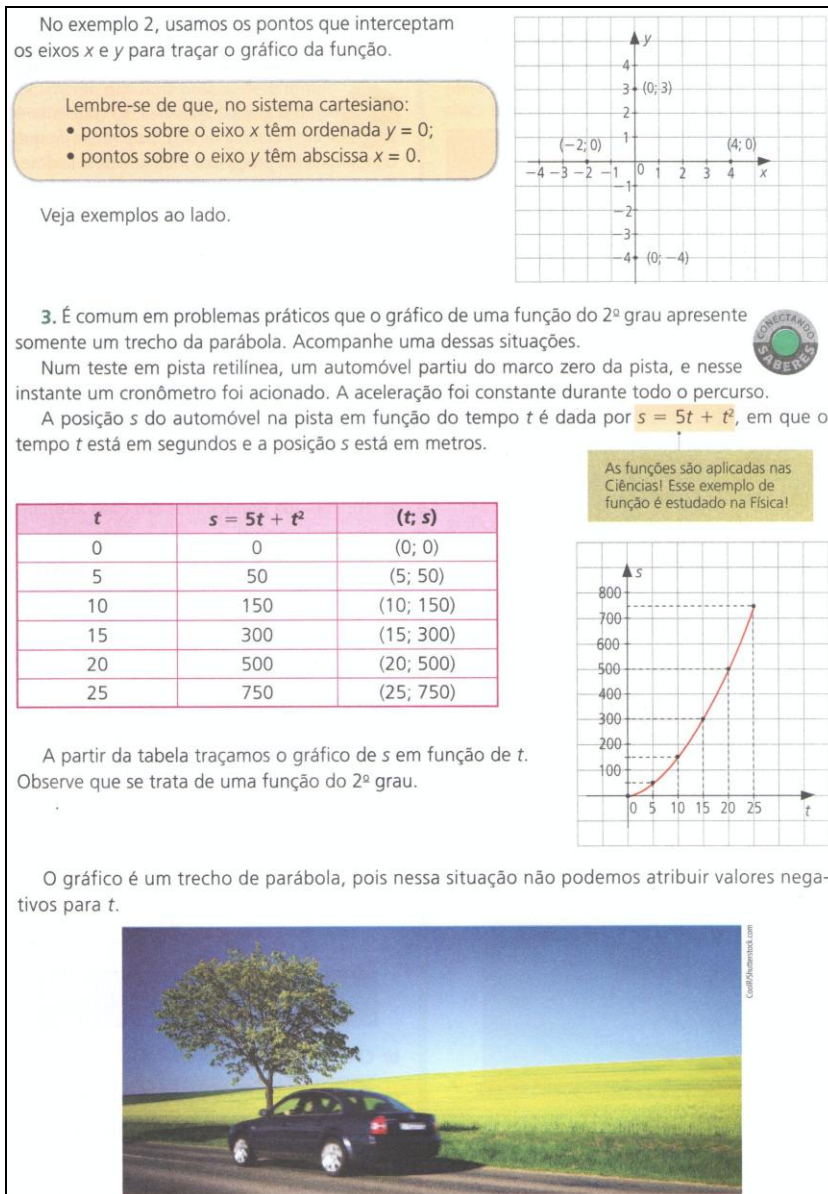


Figura 71

Podemos constatar, observando as construções de gráficos nas figuras anteriores (de 65 até 71), a utilização prévia de uma tabela de valores para posterior construção do gráfico. Veremos em breve que este método é limitado, porém, necessário neste momento de introdução dos gráficos de funções específicas, até a caracterização das mesmas.

### 3.1.3. No Ensino Médio (Funções).

Os livros considerados são da coleção “Matemática: ciência e aplicações” (IEZZI, 2010a, 2010b, 2010c), 1º, 2º e 3º Ano, respectivamente – as imagens das capas e dos sumários estão disponibilizadas no anexo IV deste trabalho.

O estudo sobre funções, além das Funções Trigonométricas estudadas no 2º ano, se dá, exclusivamente, no 1º ano.

Após tratar da Teoria dos Conjuntos (capítulo 1) e dos Conjuntos Numéricos (capítulo 2), define Função provocando algumas reflexões como segue (capítulo 3):

- ✓ Nas páginas de 44 a 48:


**Introdução: a noção intuitiva de função**

No estudo científico de qualquer fenômeno, sempre procuramos identificar grandezas mensuráveis ligadas a ele e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas.

**1 Exemplo**

**Tempo e espaço**  
Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 500 m. Enquanto um ciclista treina para uma prova, o técnico anota seu desempenho. O resultado pode ser observado na tabela abaixo.

Instante (min)	0	1	2	3	4	5	...
Distância (m)	0	500	1000	1500	2000	2500	...



A cada instante ( $x$ ) corresponde uma única distância ( $y$ ). Dizemos, por isso, que a distância é função do instante. A fórmula que relaciona  $y$  com  $x$  é:

$$y = 500x$$

**2 Exemplo**

**Mercadoria e preço**  
Uma barraca de praia, em Fortaleza, vende sucos naturais ao preço de R\$ 1,20 o copo. Para não ter de fazer contas a toda hora, o proprietário da barraca montou a seguinte tabela:

Números de copos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço (R\$)	1,20	2,40	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40	9,60	10,80	12,00

Nesse exemplo, estão sendo medidas duas grandezas: o número de copos de suco e o respectivo preço. A cada quantidade de copos corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é função do número de copos de suco. Aqui é possível achar uma fórmula que estabelece a relação de interdependência entre preço ( $y$ ) e o número de copos de suco ( $x$ ):

$$y = 1,20 \cdot x$$

Figura 72



### Exemplo 3

#### Passageiros e preço da passagem

Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares paga-se ao todo R\$ 360,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.

Para achar a quantia que cada um deverá desembolsar ( $y$ ), basta dividir o preço total (R\$ 360,00) pelo número de passageiros ( $x$ ). A fórmula que relaciona  $y$  com  $x$  é:

$$y = \frac{360}{x}$$

Observe na tabela alguns valores referentes à correspondência entre  $x$  e  $y$ :

$x$	4	12	15	18	20	24	36	40
$y$	90,00	30,00	24,00	20,00	18,00	15,00	10,00	9,00

### Exemplo 4

#### Tempo e temperatura

Um Instituto de Meteorologia, quando quer estudar a variação da temperatura em certa cidade, mede a temperatura a intervalos regulares, por exemplo, a cada 2 horas, e monta uma tabela que relaciona entre si as grandezas hora e temperatura. Vamos supor que a tabela seja assim:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura	7°	5°	3°	2°	5°	12°	18°	20°	20°	15°	11°	8°	6°

A cada hora corresponde uma única medida de temperatura. Dizemos, por isso, que a medida da temperatura é função da medida de tempo.

## Exercícios

1. Na tabela é dado o preço pago em função da quantidade de carne adquirida em um açougue:

Quantidade (em quilo)	Preço (R\$)
0,5	7,00
1,0	14,00
1,5	21,00
2,0	28,00
3,5	49,00



- a) Quanto pagará um cliente que comprar 4,5 quilos de carne?

- b) Dispondo-se de R\$ 350,00, qual é a quantidade máxima de carne que pode ser adquirida?  
c) Qual é a lei que relaciona o preço ( $p$ ) em função da quantidade em quilos ( $n$ ) comprada?

2. Na cidade, um veículo de passeio consome um litro de gasolina a cada 9 quilômetros rodados.

- a) Faça uma tabela que forneça a distância percorrida pelo veículo ao se consumirem: 0,25 ℓ; 0,5 ℓ; 2 ℓ; 3 ℓ; 10 ℓ; 25 ℓ; 40 ℓ de gasolina.  
b) Qual é a fórmula que relaciona a distância percorrida ( $d$ ) em função do número de litros ( $\ell$ ) consumidos?

3. Um moderno avião é capaz de manter uma velocidade média de cruzeiro de aproximadamente 800 km/h.

- a) Qual é a distância percorrida pelo avião em 15 minutos, meia hora, 2 horas e 5 horas? Represente em uma tabela.  
b) Em quanto tempo o avião percorre 5 200 km?  
c) Relacione, por meio de uma lei, a distância percorrida ( $d$ ), em quilometro, em função do tempo ( $t$ ), em horas.

Figura 73

4. Para prestar serviços domiciliares, um técnico em informática cobra R\$ 50,00 a visita e um adicional de  $r$  reais por hora de trabalho. Veja na tabela seguinte o preço total de serviço por número de horas trabalhadas.

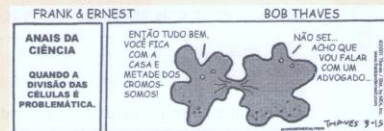
Número de horas de trabalho	Preço total de serviço (R\$)
2	94
3	116
5	160
8	226

- a) Qual é o valor de  $r$ ?
- b) Como se exprime matematicamente o total pago ( $y$ ) por um serviço de  $x$  horas de trabalho?
5. Dois pedreiros são capazes de executar a reforma de uma sala comercial em 12 dias.
- a) Faça uma tabela para representar o número de dias necessários para a realização dessa reforma, se o serviço for feito por 1, 4, 6, 8 ou 12 pedreiros. Admita que a produtividade de trabalho de cada pedreiro seja a mesma.

- b) Qual é a expressão matemática que relaciona o número de dias ( $d$ ) necessários para execução da reforma em função do número de pedreiros ( $n$ )?

6. Considere um processo de divisão celular em que cada célula se subdivide em outras duas a cada hora.

- a) Partindo-se de uma única célula, iniciou-se uma experiência científica. Faça uma tabela para representar a quantidade de células presentes nessa cultura após 1, 2, 3, 4, 5 e 6 horas de início da experiência.
- b) Qual é o tempo mínimo de horas (completas) necessárias para que haja mais de 1 000 células na cultura?
- c) Qual é a lei que relaciona o número de células ( $n$ ) encontrado na cultura após  $t$  horas do início da experiência?

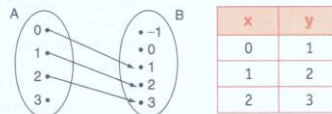


## A noção de função como relação entre conjuntos

Para caracterizar de modo mais preciso a noção de função, devemos recorrer à teoria dos conjuntos.

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  e observar algumas relações entre elementos de  $A$  e elementos de  $B$ .

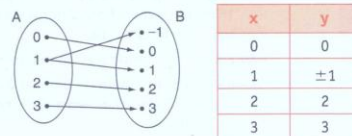
- 1ª) Vamos associar a cada elemento  $x \in A$  o elemento  $y \in B$  tal que  $y = x + 1$ :



Para cada elemento  $x \in A$ , com exceção do 3, existe um só elemento  $y \in B$  tal que  $y$  é o correspondente de  $x$ .

Para o elemento  $3 \in A$  não existe correspondente  $y \in B$ .

- 2ª) Vamos associar a cada elemento  $x \in A$  o elemento  $y \in B$  tal que  $y^2 = x^2$ :



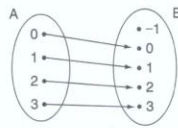
**Observação**  
Se  $x$  e  $y$  são números reais e  $y^2 = x^2$ , então  $y = x$  ou  $y = -x$ .

Figura 74

Para cada elemento  $x \in A$ , com exceção de 1, existe um só elemento  $y \in B$  tal que  $y$  é o correspondente de  $x$ .

Para o elemento  $1 \in A$  existem dois elementos correspondentes em  $B$ : o 1 e o -1.

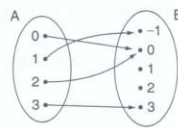
3<sup>a</sup>) Associe a cada  $x \in A$  o elemento  $y \in B$  tal que  $y = x$ :



$x$	$y$
0	0
1	1
2	2
3	3

Para todo  $x \in A$ , sem exceção, existe um único  $y \in B$  tal que  $y$  é o correspondente de  $x$ .

4<sup>a</sup>) Associe a cada  $x \in A$  o elemento  $y \in B$  tal que  $y = x^2 - 2x$ :



$x$	$y$
0	0
1	-1
2	0
3	3

Para todo  $x \in A$ , sem exceção, existe um único  $y \in B$  tal que  $y$  é o correspondente de  $x$ .

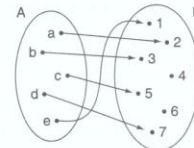
Nos dois últimos casos, para todo  $x \in A$  existe um só  $y \in B$  tal que  $y$  está associado a  $x$ . Por esse motivo, cada uma dessas relações recebe o nome de **função definida em  $A$  com valores em  $B$** .

## Definição

Dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento  $x \in A$  um único elemento  $y \in B$  recebe o nome de **função de  $A$  em  $B$** .

### Exemplo 5

Observe a relação ao lado entre os elementos dos conjuntos  $A = \{a, b, c, d, e\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Essa relação é uma função porque a todo elemento de  $A$  corresponde um único elemento  $B$ . Tal relação também poderia ser descrita por uma tabela em que cada  $x \in A$  tem um único correspondente  $y \in B$ .



$x \in A$	$y \in B$
a	2
b	3
c	5
d	7
e	1

A mesma relação poderia, ainda, ser descrita por um conjunto  $f$  de pares ordenados do tipo  $(x, y)$  em que  $x \in A$ ,  $y \in B$ , e  $y$  é o correspondente de  $x$ :

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 7), (e, 1)\}$$

Figura 75

Nessa função, dizemos que:  
 $x = a$  corresponde a  $y = 2$  ou  $x = a$  está associado a  $y = 2$  ou  $2$  é a imagem de  $a$ .  
 Da mesma forma:  
 $3$  é a imagem de  $b$ ,  $5$  é a imagem de  $c$ ,  $7$  é a imagem de  $d$  e  $1$  é a imagem de  $e$ .  
 Notemos, mais uma vez, que cada  $x \in A$  tem uma única imagem  $y \in B$ .

**Notação**

De modo geral, se  $f$  é um conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  que caracteriza uma função de  $A$  em  $B$ , indicamos:

$$f: A \rightarrow B$$

Se, nessa função,  $y \in B$  é imagem de  $x \in A$ , indicamos:  
 $y = f(x)$

Retomando o exemplo anterior, temos:  $f(a) = 2$ ;  $f(b) = 3$ ;  $f(c) = 5$ ;  $f(d) = 7$ ;  $f(e) = 1$

**Pense nisto:**  $f = f(x)$ ? Por quê?

**Funções definidas por fórmulas**

Existe um interesse especial no estudo de funções em que  $y$  pode ser calculado a partir de  $x$  por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei).

**Exemplo 6**

A lei de correspondência que associa cada número racional  $x$  ao número racional  $y$ , sendo  $y$  o dobro de  $x$ , é uma função  $f$  definida pela fórmula  $y = 2x$ , ou  $f(x) = 2x$ .

Nessa função:

- para  $x = 5$ , vem  $y = 2 \cdot 5 = 10$ . Dizemos que  $f(5) = 10$ .
- a imagem de  $x = -3$  é  $f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$ .
- $x = 11,5$  corresponde a  $y = 2 \cdot (11,5) = 23$ .
- $y = 7$  é a imagem de  $x = \frac{7}{2}$ .
- $f(3) = 6$

**Exemplo 7**

A função  $f$  que associa a cada número natural  $x$  o número natural  $y$ , sendo  $y$  o cubo de  $x$ , é  $y = x^3$ , ou  $f(x) = x^3$ .

Nessa função:

- para  $x = 2$ , vem  $y = 2^3 = 8$ . Dizemos que  $f(2) = 8$ .
- para  $x = 5$ , vem  $y = 5^3 = 125$ . Assim,  $f(5) = 125$ .
- $y = 64$  é a imagem de  $x = 4$ .

**Pense nisto:** Nessa função todo número natural  $y$  é imagem de algum  $x$  natural?

Figura 76

Podemos observar que o autor inicia citando 4 exemplos de relações entre grandezas mensuráveis através de tabelas, convenientemente construídas: tempo e espaço; mercadoria e preço; passageiros e preço da passagem; tempo e temperatura.

Utilizando tabelas e diagramas de setas, são apresentados exemplos de relações entre dois conjuntos numéricos fazendo algumas observações e chega à seguinte definição: “Dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento  $x \in A$  um único elemento  $y \in B$  recebe o nome de função de  $A$  em  $B$ ”. O que, para um momento inicial, é conveniente.

Ao autor ressalta que existe um interesse especial nas funções em que  $y$  pode ser calculado a partir de  $x$  por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei). Talvez, visando justificar a tendência “natural” e habitual de reforçar apenas a Lei de Associação da Função. O que não é recomendado.

✓ Nas páginas 51 e 52:

### Domínio e contradomínio

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.  
O conjunto  $A$  é chamado **domínio** de  $f$ , e o conjunto  $B$  é chamado **contradomínio** de  $f$ .

**Exemplo 8**

Seja  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , a função  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(x) = x + 1$  tem domínio  $A$  e contradomínio  $B$ .

**Exemplo 9**

Seja  $A = \mathbb{Z}$  e  $B = \mathbb{Z}$ , a função  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(x) = 2x$  tem domínio  $A$  e contradomínio  $B$ .

Observe que todo elemento  $x$  do domínio tem uma única imagem  $y$  no contradomínio, embora possam existir elementos do contradomínio que não são imagem de nenhum  $x$  do domínio. Note que: no Exemplo 8, 0 e 5 não são imagens de  $x \in A$ ; no Exemplo 9, os números inteiros ímpares não são imagens de  $x \in \mathbb{Z}$ .

Figura 77

**Determinação do domínio**

Muitas vezes se faz referência a uma função  $f$ , dizendo apenas qual é a lei de correspondência que a define. Quando não é dado explicitamente o domínio  $D$  de  $f$ , deve-se subentender que  $D$  é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de  $x$  na lei de correspondência  $y = f(x)$ , de modo que, efetuados os cálculos, resulte um  $y$  real. Vejamos alguns exemplos.

**10 Exemplo**

- O domínio da função definida pela lei  $y = 3x + 4$  é  $\mathbb{R}$ , pois, qualquer que seja o valor real atribuído a  $x$ , o número  $3x + 4$  também é real.
- O domínio da função dada por  $y = \frac{x+3}{x-1}$  é  $\mathbb{R} - \{1\}$ , pois, para todo  $x$  real diferente de 1, o número  $\frac{x+3}{x-1}$  é real.
- O domínio da função dada por  $y = \sqrt{x-2}$  é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ , pois  $\sqrt{x-2}$  só é real se  $x - 2 \geq 0$ .
- A função dada por  $y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$  só definida para  $x - 1 \neq 0$  e  $x \geq 0$ ; então, seu domínio é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\}$ .

**Conjunto imagem**

Se  $f: A \rightarrow B$  é uma função, chama-se **conjunto imagem de  $f$**  o subconjunto  $\text{Im}$  do contradomínio constituído pelos elementos  $y$  que são imagens de algum  $x \in A$ . Retomando os Exemplos 8 e 9, temos:

**Pense nisto:** Como você descreveria o conjunto imagem?

Figura 78

O autor define Domínio, Contradomínio e o conjunto Imagem – chamando a atenção para os casos em que se o Domínio não for dado explicitamente, usará o maior subconjunto possível dos reais.

Em seguida, após propor algumas atividades que envolvem a leitura de gráficos, retoma o Plano Cartesiano e trabalha a Construção de Gráficos a partir de tabelas. O que, já afirmamos ser limitado; mas, inevitável num primeiro momento, até serem definidas funções específicas e suas propriedades gráficas.

IEZZI (2010a), por exemplo, provoca reflexões sobre como o Domínio da Função pode mudar o seu gráfico; por exemplo, se o Domínio for o Conjunto dos números Inteiros o gráfico será formado apenas por pontos, mas, se for o conjunto dos Números Reais o gráfico poderá ser “uma linha contínua”. Fato muito

relevante, pois reforça que uma Função não é constituída apenas pela Lei de Associação.

Voltando ao exemplar considerado, o autor faz um estudo preliminar focando Crescimento e Decrescimento, Máximos e Mínimos, Simetria Gráfica, observando o sinal da função em cada pontos e/ou intervalo.

Nos capítulos seguintes, o autor aborda funções específicas, como: Afim, Quadrática, Modular, Exponencial e Logarítmica. Complementa com a classificação das funções em sobrejetivas, injetivas e bijetivas; função inversa e composição de funções.

Ressaltamos que, relaciona as funções ao estudo das Progressões (Aritméticas e Geométricas) e Matemática Comercial e Financeira, como segue:

- ✓ Nas páginas 204 e 205:

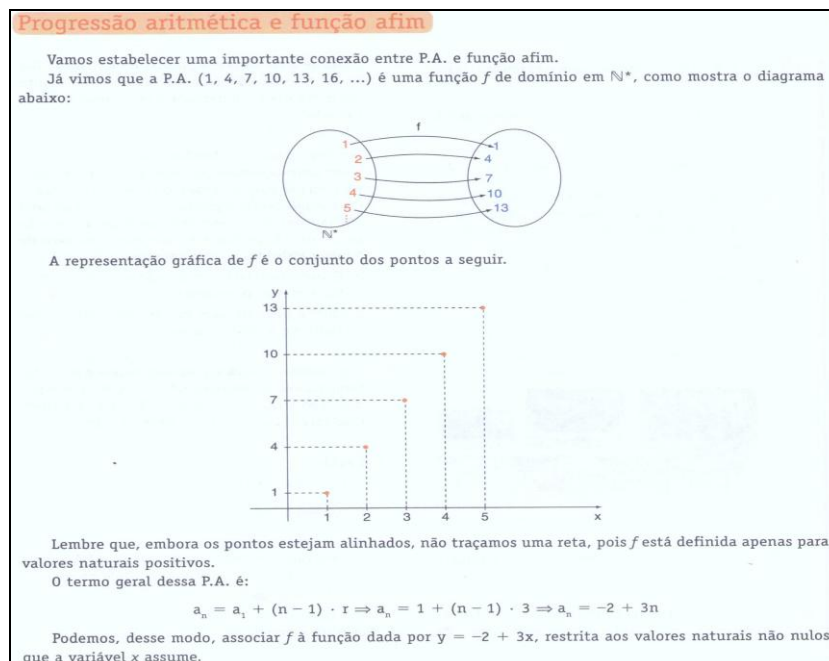
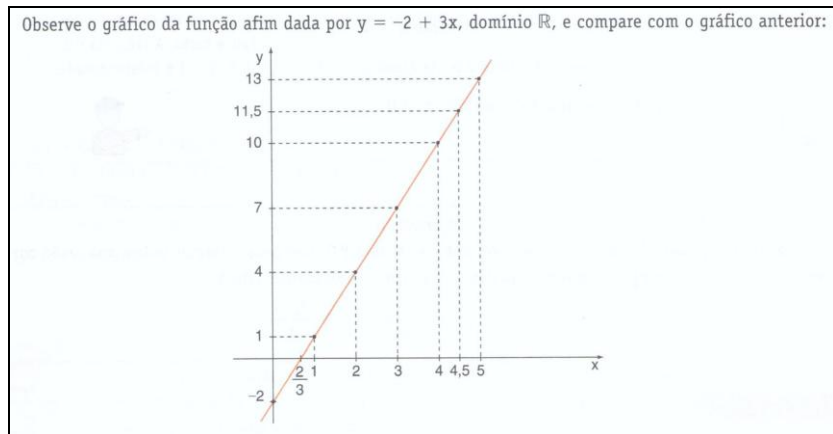


Figura 79



**Figura 80**

No encerramento de PA, faz relação com a função Afim, observando que em PA o Domínio não é real, mas natural (o gráfico não é contínuo).



✓ Na página 217:

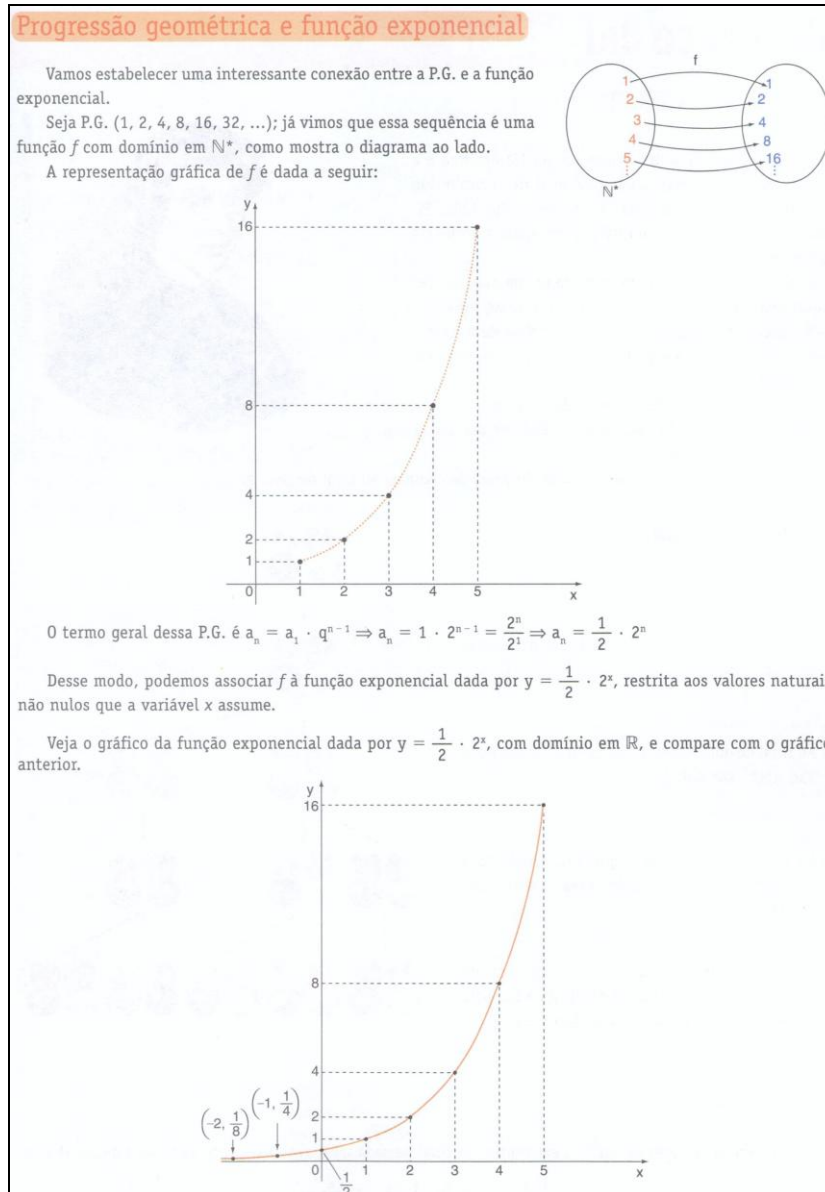


Figura 81

No encerramento de PG, faz relação com a função Exponencial, observando que em PG o Domínio não é conjunto dos Números reais, mas o conjunto dos Números Naturais (o gráfico não é contínuo).

✓ Nas páginas 236 e 237:

### Juros e funções

Uma dívida de R\$ 1000,00 será paga com juros de 50% ao ano.  
Vamos calcular, ano a ano, os montantes dessa dívida nos dois regimes de capitalização (simples e composto) e comparar os valores obtidos.

#### Juros simples

Os juros, por ano, são de 50% de 1000 = 0,5 · 1000 = 500,00.  
Dívida: R\$ 1000,00

Ano	1	2	3	4	5	6	...
Montante	1500	2000	2500	3000	3500	4000	...

A sequência de montantes (1500, 2000, 2500, 3000, 3500, ...) é uma P.A. de razão 500 e cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1500 + (n - 1) \cdot 500 \Rightarrow a_n = \underbrace{500}_{\text{acrésimo anual}} \cdot n + \underbrace{1000}_{\text{capital}}$$

#### Juros compostos

Para montar a tabela, é preciso lembrar que o montante da dívida em um determinado ano é 50% maior que o montante relativo ao ano anterior (ou 1,5 vez o montante anterior).  
Dívida: R\$ 1000,00

Ano	1	2	3	4	5	6	...
Montante	1500	2250	3375	5062,50	7593,75	11390,62	...

A sequência de montantes (1500; 2250; 3375; 5062,50; ...) é uma P.G. de razão 1,5 e cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1500 \cdot 1,5^{n-1} \Rightarrow a_n = 1500 \cdot \frac{1,5^n}{1,5} \Rightarrow a_n = \underbrace{1000}_{\text{capital}} \cdot 1,5^n$$

Vamos representar graficamente as duas sequências:

Ano	Juros Simples (R\$)	Juros Compostos (R\$)
0	1000	1000
1	1500	1500
2	2000	2250
3	2500	3375
4	3000	5062,50
5	3500	7593,75
6	4000	11390,62

Figura 82

Os pontos do gráfico (I) correspondem aos pontos da reta que representa a função afim dada por  $y = 500 \cdot x + 1000$ , quando a variável  $x$  assume valores naturais. Observe que, se  $x = 0$ , então  $y = 1000$  corresponde ao capital da dívida.

Os pontos do gráfico (II) correspondem aos pontos da curva exponencial dada por  $y = 1000 \cdot 1,5^x$ , quando a variável  $x$  assume valores naturais. Se  $x = 0$ , então  $y = 1000$  é o capital da dívida.

Os gráficos (I) e (II) interceptam-se em  $(1; 1500)$ . Isto é, decorrido exatamente um ano da aquisição da dívida, os montantes a juros simples e a juros compostos se equivalem. A partir daí, o gráfico (II) está sempre acima do gráfico (I), mostrando que, para qualquer valor de  $x$  (ano),  $x > 1$ , o montante da dívida a juros compostos é maior que o montante da mesma dívida calculado a juros simples.

**Figura 83**

No encerramento de Matemática Comercial e Financeira (Juros Simples e Compostos), os relacionam, respectivamente à PA (função Afim) e PG (função exponencial).

No PNLD – 2012, BRASIL (2011), têm os seguintes comentários sobre a coleção do Ensino Médio observada por nós:

O estudo das sequências é um dos pontos altos da coleção, com exemplos interessantes, como a sequência de Fibonacci.

O conceito de função como relação entre grandezas é desenvolvido acertadamente por meio de vários exemplos. Contudo, nas representações gráficas das funções, as opções feitas nem sempre contribuem para a compreensão dos conceitos em jogo.

O estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica é abrangente e inclui sugestivas aplicações a outras áreas do conhecimento.

Na matemática financeira estabelece-se uma boa articulação entre juros e funções. (BRASIL, 2011, p. 80)

Pode-se dizer, então, que esta coleção de livros explora razoavelmente bem o conteúdo sobre Funções.

No próximo capítulo e último do nosso trabalho pretendemos provocar algumas reflexões e apresentar algumas sugestões quanto à construção verificada nos livros didáticos observados neste capítulo e quanto ao aprofundamento do

assunto “funções” no Ensino Médio, levando em conta documentos oficiais, alguns pesquisadores na área e nossa experiência docente.

## CAPÍTULO IV

### O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES E/OU SUGESTÕES.

(...) levando em conta que um mesmo tema será explorado em diferentes momentos da aprendizagem e sua consolidação se dará pelo número cada vez maior de relações estabelecidas, é preciso identificar o nível de aprofundamento adequando a cada ciclo. (BRASIL, 2001, p. 58)

Neste capítulo, pretendemos promover algumas reflexões e/ou sugestões que julgamos relevantes ao professor (ou futuro professor) de Matemática, sobre a construção da Definição de Função no Ensino Fundamental e seu aprofundamento no Ensino Médio.

Para tanto consideraremos os documentos oficiais como referencia; Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ressaltando que é necessário que o professor pense em como o aluno aprende, o que o ajudará na hora de definir “o que”, “quando” e “como” ensinar.

[...] os professores necessitam conhecer e compreender os diferentes tipos de pensamento e buscar formas de aplicar esse entendimento diretamente ao ensino. Necessitam também adquirir familiaridade com os três tipos de pensamento da teoria triádica (pensamento analítico, pensamento criativo e pensamento prático), pois *estes são poderosas ferramentas para os estudantes, tanto na sala de aula como fora dela.* (BRITO, 2011, p. 34)

Além disso, o trabalho em sala de aula deve visar o desenvolvimento dos três tipos de pensamentos citados anteriormente:

- a) habilidade analítica: analisar teorias, criticar experimentos, avaliar conceitos.
- b) habilidade criativa: gerar novas teorias, elaborar novos experimentos, imaginar como as teorias necessitariam ser modificadas se certos pressupostos mudassem.
- c) habilidade prática: usar os conceitos, teorias e dados para conhecer e melhorar a vida cotidiana e o contexto de inserção. (BRITO, 2011, p. 43)

Caberá ao leitor, considerando a sua sala de aula, utilizar ou não as sugestões/reflexões que disponibilizaremos a seguir.

#### **4.1. No Ensino Fundamental.**

Antes, queremos ressaltar alguns dos vários objetivos para o ensino fundamental, indicados pelos PCN:

- Utilizar as diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 2001, p. 8)

Verifica-se a necessidade da utilização de diferentes linguagens, fontes de informação e recursos tecnológicos, que permitam, ao aluno, melhor comunicação, tanto como receptor ou como emissor, facilitando sua compreensão

da realidade que está inserido e proporcionando-lhe a capacidade de questionar e interferir de forma crítica e coerente.

Analisando os vários objetivos gerais de Matemática para o ensino fundamental, indicados pelos PCN, destacamos o seguinte:

Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente. (BRASIL, 2001, p. 51)

Sabemos que o conhecimento construído ao longo da escolarização, que geralmente origina-se em situações elementares, deve evoluir-se para situações mais complexas. *“Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos”* (BRASIL, 2001, p. 39). Portanto, trataremos separadamente de cada uma das fases da Educação Básica.

#### **4.1.1. No Ensino Fundamental I (1º ao 5º Ano).**

Os livros didáticos de Matemática considerados para este nível de ensino têm pouco conteúdo relacionado de forma direta com a Definição de Função, porém adequados aos PCN.

Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da

álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de equação. (BRASIL, 2001, p. 55)

Já no primeiro e segundo ciclo (Ensino Fundamental I) devem ser introduzidos alguns conceitos que serão úteis à consolidação da Definição de Função. O que pode ser confirmado analisando os objetivos de Matemática, estabelecidos nos PCN, para cada um destes ciclos.

Para o primeiro ciclo ressaltamos: *“Identificar o uso de tabelas e gráficos para facilitar a leitura e interpretação de informações e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas”* (BRASIL, 2001, p. 66).

E, para o segundo ciclo:

- Recolher dados e informações, elaborar formas para organizá-los e expressá-los, interpretar dados apresentados sob forma de tabelas e gráficos e valorizar essa linguagem como forma de comunicação.
- Utilizar diferentes registros gráficos – desenhos, esquemas, escritas numéricas – como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.
- Demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados neste ciclo.
- Vivenciar procedimentos de resolução de problemas, percebendo que para resolvê-los é preciso compreender, propor e executar um plano de solução, verificar e comunicar a resposta. (BRASIL, 2001, pp. 81 e 82)

Ao tratar de assuntos que envolvam o conceito de dependência, o professor pode dar ênfase em tal dependência e, quando possível, verificar se há



crescimento ou decrescimento de uma em relação à outra. Ou seja, ir introduzir o conceito de variação.

#### **4.1.2. No Ensino Fundamental II (6º ao 9º Ano).**

Segundo os PCN, no terceiro e quarto ciclo (Ensino Fundamental II), devemos aprofundar os conceitos trabalhados nos ciclos anteriores e introduzir outros que serão aprofundados no Ensino Médio. A coleção considerada atende essa sugestão.

Para o terceiro ciclo destacamos:

- Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções.
- Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras. (grifos nosso).
- Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.
- Resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a construção de sistemas de coordenadas cartesianas.
- Observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. (grifos nosso).
- Coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas. (grifos nosso). (BRASIL, 1998, pp. 64 e 65)

E, para o quarto ciclo, destacamos:

- Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades – identificando as equações, inequações e sistemas.
- Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos.
- Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre as variáveis. (grifos nosso).
- Interpretar e representar a localização e o deslocamento de figura no plano cartesiano.
- Obter e utilizar fórmulas para o cálculo de área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas).
- Representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional. (grifos nosso).
- Resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três. (grifos nosso).
- Construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos. (BRASIL, 1998, pp. 81 e 82)

Vale ressaltar que Brasil (1998) recomenda que não seja dada ênfase na parte algébrica no Ensino Fundamental, principalmente devido ao grau de abstração e pela forma que normalmente é trabalhada neste nível de ensino. Existe uma recomendação no referido documento: que sejam exploradas as várias concepções da Álgebra. Segue um quadro que enfatiza essas diversas concepções (BRASIL, 1998, p. 116):

<b>Álgebra no Ensino Fundamental</b>				
<b>Dimensões da Álgebra</b>	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
<b>Uso das Letras</b>	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações funcionais	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
<b>Conteúdos (conceitos e procedimentos)</b>	Propriedades das operações e generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes

Para que o aluno perceba os diferentes significados “do uso de letras”, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), no 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, devem ser trabalhadas situações que envolvam “o uso de letras” com os seguintes significados:

- Como substituta de um valor numérico, por exemplo, na fórmula para cálculo da área do triângulo ( $A = \frac{b \cdot h}{2}$ , b substitui o valor da base e h o valor da altura).
- Usadas para expressar regularidades, por exemplo, em sucessões numéricas [(1, 3, 5, 7, ... ,  $2n - 1$ ), onde n é um número natural que designa a posição do elemento].

- Na Geometria, os alunos devem ser estimulados a descobrir fórmulas para cálculos de áreas, de diagonais e da soma dos ângulos internos de um polígono – desenvolvendo a capacidade de identificar regularidades, fazer generalizações e aperfeiçoar a linguagem algébrica.

- Em generalizações entre números, por exemplo, para “adivinhar” uma regra, “inventada” pelo professor, para transformar números (o aluno fala 4 e o professor fala 18, o aluno fala 7 e o professor fala 24, o aluno fala 13 e o professor fala 36, assim sucessivamente; e o aluno tem que adivinhar a regra usada para a transformação ocorrida, que, neste caso, é  $y = 2 \cdot x + 10$ , onde  $x$  é o número falado pelo aluno e  $y$  é o número falado pelo professor).

- Transformar uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples o que facilita encontrar soluções de problemas (fatoração, por exemplo).

- Introduzir variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas, permitindo que o aluno perceba que as letras além da função de incógnitas, têm função de números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.

- Explorar situações-problemas sobre variações de grandezas, desenvolvendo assim, a noção de função não somente no 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, mas também no 6º e 7º ano.

- Representar e analisar as variações entre grandezas por meio de gráfico cartesiano.

Os cinco últimos itens estão diretamente ligados à Definição de Função. Observamos que os PCN recomendam, de forma explícita, a introdução ao estudo de funções no Ensino Fundamental, especialmente nas séries/anos finais (6º ao 9º ano) com mais ênfase no 8º e 9º ano:

A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja outra

função para as letras ao identifica-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.

(...) situações-problema envolvendo variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos (grifos nosso) (...) determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação.

(...) destacar a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de relações possíveis entre duas variáveis. (BRASIL, 1998, p. 118)

Nos livros considerados, notamos um excesso de Álgebra no 8º Ano. E, no 9º Ano, após a Definição de Função, notamos um enfoque direcionado apenas para a Lei de Associação da Função (somente expressões analíticas), deixando de lado as preocupações com o Domínio e o Contradomínio da função. Além, de deduzir a Lei de Associação e construir o Gráfico da função a partir de tabelas.

É bom ressaltar que quando se deduz a Lei de Associação da função a partir de uma tabela, pelo menos o professor, deve ter conhecimento de que este é um método limitado. O mesmo é válido para a construção de gráficos. É fácil verificar que a representação tabular de uma função apresenta limitações, muitas das vezes desconhecidas por muitos professores. Por exemplo: A tabela a seguir representa os pontos no plano cartesiano pertencentes a uma função real; há quantas funções reais, diferentes entre si, que contêm estes pontos?

$x$	$y$
-5	-5
-1	-1
0	0
8	8

A princípio, podemos responder que a função real que cujo gráfico contém os pontos citados na tabela acima é apenas a função identidade  $f(x) = x$ . Porém, há infinitas funções reais que podem conter tais pontos em seus gráficos; por exemplo, a função real definida por:  $f(x) = x, se x for inteiro$  e  $f(x) = 2x, se x for não inteiro$ . BRASIL (2006, p.72) reforça a limitação na construção de gráficos a partir de tabelas: *“a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções”*.

Constatamos, então, que no Ensino Fundamental, o autor da coleção considerada trabalha, desde as séries/anos iniciais, com situações que envolvem o conceito de dependência e, a partir do 6º ano, introduz situações relativas ao conceito de variação, até a formalização da Definição de Função no 9º ano (mesmo que de forma mais elementar).

É evidente que nem toda situação de dependência e/ou de variação tem natureza funcional. Aliás, essa percepção é importante para o aluno, de fato, apropriar-se da Definição de Função; bem como, perceber que as Tabelas e Gráficos podem ser usados em situações de natureza não funcional.

#### **4.2. Introdução no Ensino Médio.**

Algumas vezes, de forma intencional, são retomados assuntos já tratados no ensino fundamental – é o momento de consolidar certos conceitos e ideias da matemática escolar que dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade. Sugestões quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de “fixação” ou a aplicação direta de fórmulas. (BRASIL, 2006, p.70)

Antes de dar continuidade ao desenvolvimento da Definição de Função no Ensino Médio, queremos destacar alguns trechos dos PCNEM, que destacam a importância da Matemática.

[...] Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

[...] A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

[...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.

[...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

[...] no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade. (grifos nosso).

[...] habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações. (BRASIL, 2000, pp. 40 e 41)

Ainda, segundo os PCNEM, as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; (grifos nosso).
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; (grifos nosso).
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 42)

Dentre as várias competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática no Ensino Médio, selecionamos as que têm maior relação com a Definição de Função:

**Representação e comunicação:**

- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).



- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

**Investigação e compreensão:**

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

**Contextualização sociocultural:**

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 2000, pp. 43 e 44)

Visando complementar o desenvolvimento da Definição de Função no Ensino Médio, considerando a importância, a finalidade, as competências e as habilidades, mencionadas anteriormente, devemos tomar cuidado para que o Ensino de Funções, no Ensino Médio, não seja isolado dos demais conteúdos matemáticos e das outras ciências.

O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades

dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, pp. 44 e 45)

A introdução do livro didático considerado (IEZZI, 2012a) no capítulo anterior, está muito próxima das recomendações feitas em BRASIL (2006):

O estudo de *Funções* pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decréscimo (mais ou menos rápido). (BRASIL, 2006. p.72)

Até aqui, tratamos da Construção da Definição de Função. A seguir, apresentaremos algumas sugestões e/ou reflexões sobre o aprofundamento no estudo de Funções no Ensino Médio.

### **4.3. Aprofundamento no Ensino Médio.**

[...] as tarefas que são identificadas com o cotidiano e com a atividade profissional futura são percebidas como interessantes,

relevantes e significativas, são motivadoras e levam ao desenvolvimento da flexibilidade do pensamento. Deve ser considerado, ainda, se o grau de dificuldade e a complexidade da tarefa são apropriados às habilidades do aprendiz e ao nível de desenvolvimento conceitual exigido. (BRITO, 2011, p. 35)

Acreditando que o aluno precisa ter acesso ao significado dos conteúdos que aprende e partindo do pressuposto de que a Definição de Função esteja bem construída, vamos provocar algumas sugestões e/ou reflexões sobre o Ensino de Funções no Ensino Médio fundamentadas em nossa vivência profissional, em BRASIL (2006) e em LIMA (2012):

✓ Uma função é caracterizada por três componentes: Domínio, Contradomínio e Lei de Associação. **É possível sempre evidenciar isso!**

✓ A Lei de Associação não precisa ser única e nem ser uma expressão analítica.

✓ Devemos tomar cuidado para que o ensino não passe apenas para o campo algébrico. É plenamente possível estudar as funções específicas, sempre observando o Domínio, o Contradomínio, a Lei de Associação, o conjunto Imagem, a representação gráfica e se há presença de ideias de dependência/variação.

✓ É possível introduzir, por exemplo, ideia de Crescimento e Decrescimento, Ponto de Intersecção com o Eixo X e com o Eixo Y e Sinal da Função antes do tratamento de Funções específicas (Afim, Quadrática, Modular, Exponencial e Logarítmica).

✓ Como dito anteriormente, a representação tabular de uma função não é suficiente, tanto para deduzir a lei de formação quanto para a construção do seu gráfico.

✓ No primeiro ano do Ensino Médio, simultaneamente, os alunos estão tendo contato com a Definição de Função nas disciplinas de Matemática, de Química e de Física. Porém, como normalmente acontece em nossas escolas, os

enfoques são tão diferentes que os alunos não os relacionam entre si. Cabe aos professores das referidas disciplinas, principalmente o de Matemática, fazer essas conexões.

✓ É bom lembrar que proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa são apenas casos particulares de crescimento e decrescimento. A função Afim,  $f(x) = ax + b$ , com  $b \neq 0$ , é um caso de crescimento ou decrescimento (depende do sinal de  $a$ ) que não é proporcionalidade direta ou proporcionalidade inversa.

✓ Pode-se introduzir a função Quadrática com situações-problema onde se deseja descobrir, por exemplo, a área máxima de uma figura retangular conhecendo seu perímetro.

✓ Ainda sobre a função Quadrática, devemos evitar a simples memorização de regras. Praticamente todas as regras utilizadas no nível médio são possíveis de serem demonstradas em sala de aula. Seu gráfico deve ser identificado como a curva denominada parábola, entendida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz).

✓ Antes de apresentar as funções Trigonômicas devemos explorar bem as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno.

As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve  $f(x) = \text{seno}(x)$ , usualmente a variável  $x$  corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano. (BRASIL, 2006, p. 74)

✓ Neste nível, devem ser tratados apenas os casos em que as funções Polinomiais (além das funções Afim e Quadrática) se decompõe em um produto do tipo  $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$ , sendo  $Q(x)$  um polinômio de grau 1 ou 2. Nos casos em que  $Q(x)$  é de grau 2, a construção do gráfico só é recomendada utilizando-se de recurso computacional.

✓ Antes de introduzir a função exponencial, discutir as limitações da função Afim em casos relacionados a crescimento e decrescimento.

É interessante discutirem as características desses dois modelos, pois enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. (BRASIL, 2006, p. 75)

✓ Relacionar a função Afim ao estudo das Progressões Aritméticas e Juros simples e a função Exponencial ao estudo das Progressões Geométricas e Juros Compostos.

✓ Apresentar a função Logarítmica como a inversa da função Exponencial.

O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em suas **propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções**. (BRASIL, 2002, p. 165) grifos nossos

✓ Preferencialmente, com o auxílio de softwares específicos, mostrar aos alunos o que ocorre com o gráfico de uma função real quando alteramos seus parâmetros. Isso pode ser realizado sem o recurso tecnológico, porém, será muito trabalhoso e dificulta a completa visualização.

Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto solução de uma equação/inequação. (BRASIL, 2006, p. 89)

Percebe-se relação entre o desenvolvimento histórico Definição de Função e a construção proposta para a Educação Básica. Iniciando com conceitos de dependência e, posteriormente, com variação, até chegar à formalização de acordo com a definição atual. Mas, há duas tendências que podem ser consideradas equivocadas: introduzir como “pares ordenados” e/ou restringir aos casos em que a Lei de Associação é formada apenas por expressões analíticas.

[...] a definição de função como uma correspondência é muito mais simples, mais intuitiva e mais acessível ao entendimento do que a outra que usa uma série de conceitos preliminares, como produtos cartesianos, relação binária, etc. Por isso mesmo ela é utilizada, por todos, exceto os autores de livros didáticos brasileiros. (LIMA, 1999, p. 4)

LIMA (1999, p. 3) ainda ressalta que a correspondência é: “*uma regra, um critério, um algoritmo, ou uma série de instruções*”. E, como já foi mencionado neste trabalho, não precisa ser única e nem uma expressão analítica.

Portanto, acreditamos que no estudo das funções devemos dar maior ênfase à Definição, em suas propriedades gerais e aplicações, conforme afirma BRASIL (2002):

O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para

expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em suas **propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções**. (BRASIL, 2002, p. 165)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início deste estudo tínhamos várias conjecturas: que muitos professores se organizavam em função do que deviam ministrar em determinada série/ano, que a organização curricular tinha por princípio a cada série/ano escolar aprofundar conteúdos vistos em séries/anos anteriores, etc. Mas, não nos colocávamos na situação.

Mas, durante o desenvolvimento deste trabalho percebemos o quanto precisávamos aprender. E, no final, podemos afirmar: aprendemos muito! Daqui para frente, as aulas que serão planejadas para o Ensino Básico não serão como antes. A partir de agora terão como fundo uma preocupação maior com “o que” e “como” foi tratado nas séries/anos anteriores e “o que” e “como” será tratado nas séries/anos posteriores; direcionando/planejando melhor a aula, visando proporcionar um melhor aprendizado, conhecendo, pela prática da pesquisa, os princípios da organização curricular vigente.

Além do aprendizado profissional acreditamos ter atingido o nosso objetivo de pesquisa. Ou seja, ao disponibilizarmos uma possibilidade de desenvolvimento de uma definição matemática durante o Ensino Básico, acreditamos poder sensibilizar o professor de Matemática em relação a ter noções gerais de como os conteúdos matemáticos são desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica, independente da série/ano que efetivamente leciona. Ou seja, da importância do professor de Matemática ter conhecimento da organização curricular de Matemática de toda a Educação Básica e não só da série/ano que leciona.

O viés histórico endossou a forma como os documentos oficiais sugerem o desenvolvimento dos conceitos que culminam na Definição de Função, auxiliando nas considerações feitas com relação aos livros utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.



E as menções feitas aos livros utilizados no Ensino superior serviram para nos fazer refletir sobre a escolha de um referencial para tratar do assunto. E estas só foram possíveis depois de termos pesquisado sobre o tema.

Portanto, esperamos que este trabalho possa ser útil a professores (ou futuros professores) de Matemática ou a quem se interessar pelo assunto, provocando reflexões sobre a importância de se ter uma visão global de como os conceitos matemáticos (não só o de Função) são construídos historicamente e, principalmente, durante a Educação Básica. O que facilitará muito as abordagens, em cada série/ano da escolarização, promovendo um melhor aprendizado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Álvaro. **Praticando matemática, 6** / Álvaro Andrini, Maria José de Vasconcellos. 3ª edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012a. (Coleção praticando matemática).

\_\_\_\_\_. **Praticando matemática, 7** / Álvaro Andrini, Maria José de Vasconcellos. 3ª edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012b. (Coleção praticando matemática).

\_\_\_\_\_. **Praticando matemática, 8** / Álvaro Andrini, Maria José de Vasconcellos. 3ª edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012c. (Coleção praticando matemática).

\_\_\_\_\_. **Praticando matemática, 9** / Álvaro Andrini, Maria José de Vasconcellos. 3ª edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012d. (Coleção praticando matemática).

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte** / Howard Anton; Trad. Cyro de Carvalho e Márcia Tamanaha. 6ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil**. 2008. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo I**. 6ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1994.

BOTELHO, Leila; REZENDE Wanderley. **Um Breve Histórico do Conceito de Função**. Caderno dá Licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense v.6. Niterói, 2000. Disponível em:

[http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume6/UM\\_BREVE\\_HISTRICO\\_DO\\_CONCEITO\\_DE\\_FUNO.pdf](http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf). Acesso em: 20 de outubro de 2014.

BOURBAKI, Nicolas. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Nicolas\\_Bourbaki](https://pt.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki). Acesso em 21 de maio de 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática** / Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental, 3ª edição Brasília: A Secretaria, 2001.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM)**: Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC / SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 1996. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm). Acesso em 21 de maio de 2015.

*BRITO, M. R. F de.* **Psicologia da educação matemática: um ponto de vista**. Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 29-45, 2011. Editora UFPR.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CARMO, Cristina. **Matemática com alegria: 1º ano** / Cristina Carmo; ilustrações Cartoon Estúdio, Formato Comunicação. 2ª edição. Curitiba: Ed. Positivo, 2009a.

\_\_\_\_\_. **Matemática com alegria: 2º ano** / Cristina Carmo; ilustrações Cartoon Estúdio, Formato Comunicação. 2ª edição. Curitiba: Ed. Positivo, 2009b.

\_\_\_\_\_. **Matemática com alegria: 3º ano** / Cristina Carmo; ilustrações Cartoon Estúdio, Formato Comunicação. 2ª edição. Curitiba: Ed. Positivo, 2009c.

\_\_\_\_\_. **Matemática com alegria: 4º ano** / Cristina Carmo; ilustrações Cartoon Estúdio, Formato Comunicação. 2ª edição. Curitiba: Ed. Positivo, 2009d.

\_\_\_\_\_. **Matemática com alegria: 5º ano** / Cristina Carmo; ilustrações Cartoon Estúdio, Formato Comunicação. 2ª edição. Curitiba: Ed. Positivo, 2009e.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC. 2001, v. 1.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio** / Gelson Iezzi...[et al]. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010a.

\_\_\_\_\_. **Matemática: ciência e aplicações, 2: ensino médio** / Gelson lezzi...[et al]. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010b.

\_\_\_\_\_. **Matemática: ciência e aplicações, 3: ensino médio** / Gelson lezzi...[et al]. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010c.

\_\_\_\_\_. **Fundamentos de matemática elementar, 1: Conjuntos, funções: exercícios resolvidos, exercícios propostos com respostas, testes de vestibular com resposta** / Gelson lezzi, Carlos Murakami. 7ª edição. São Paulo: Atual, 1993.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica** / Louis Leithold; Trad. Cyro de Carvalho. 3ª edição. São Paulo: editora HARBRA Ltda., 1994.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

\_\_\_\_\_. **Números e Funções Reais**. Versão preliminar (utilizada nas aulas do PROFMAT/2012). Rio de Janeiro: SBM, 2012.

\_\_\_\_\_. **Conceituação, Manipulação e Aplicações: Os três componentes do ensino da Matemática**. Revista do Professor de Matemática 41. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

ROQUE, Ana Catarina Cantoni; GOMES, Maria Laura Magalhães. **História da Matemática na sala de aula**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, 2011, Recife. Anais ..., Recife, PE. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/XIICIAEM/artigos/1198.pdf>. Acesso em: 21 maio de 2015.

ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática** / Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho. 1ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SWOKOWSKI, Earl Willian. **Cálculo com geometria analítica** / Earl W.

Swokowski: tradução Alfredo Alves de Faria, com a colaboração dos professores Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno; revisão técnica Antônio Pertence Júnior. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 1994.

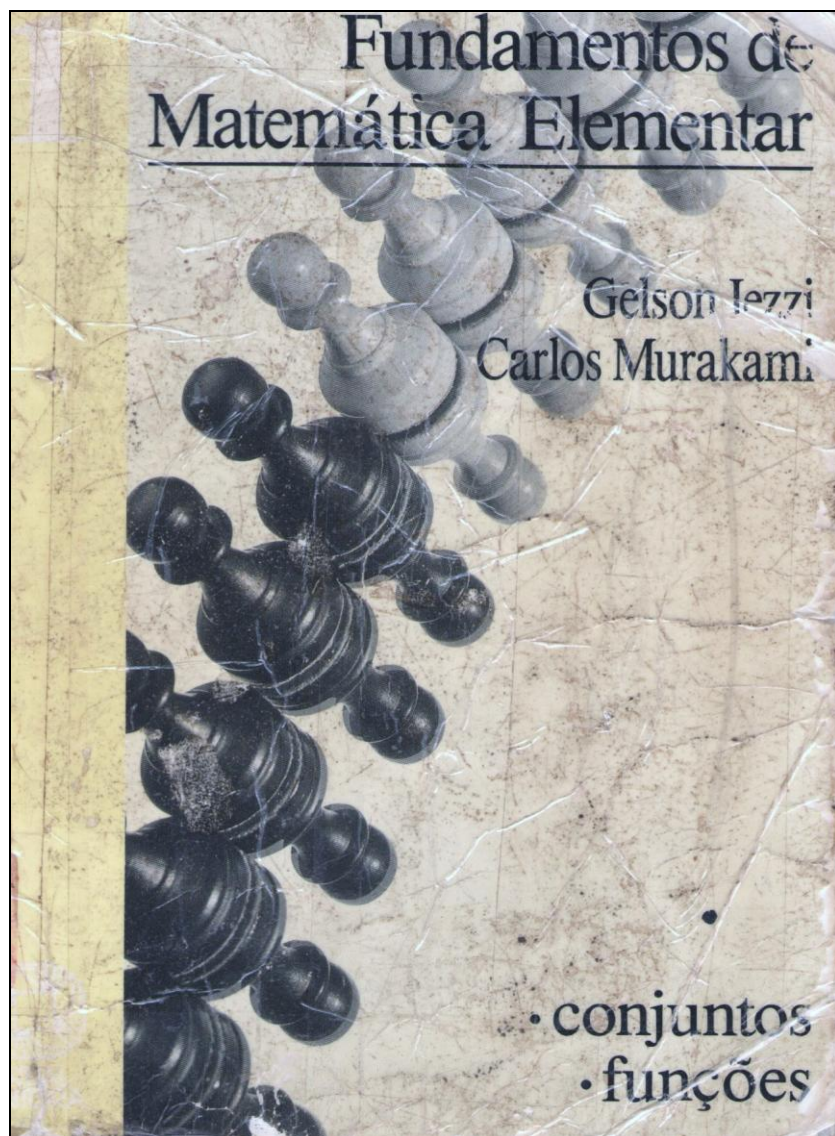
## ANEXOS

## **ANEXO I**

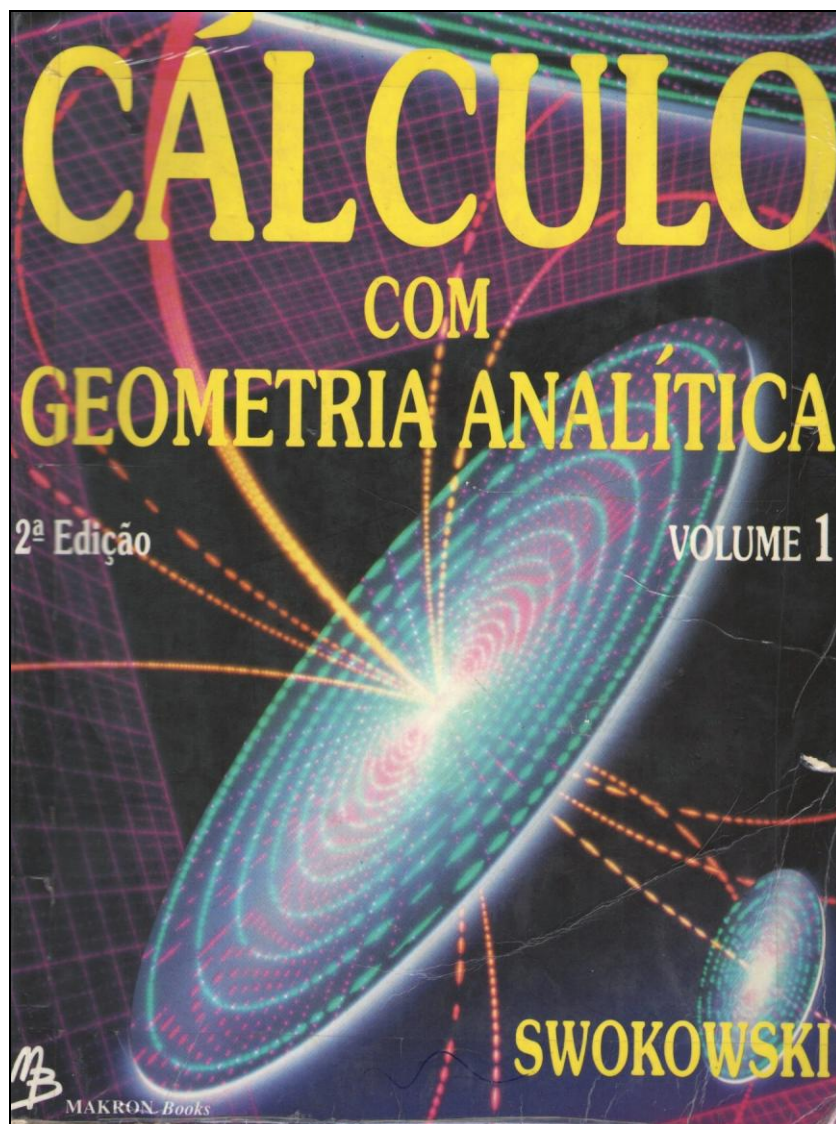
### **LIVROS DE MATEMÁTICA UTILIZADOS NO ENSINO SUPERIOR**



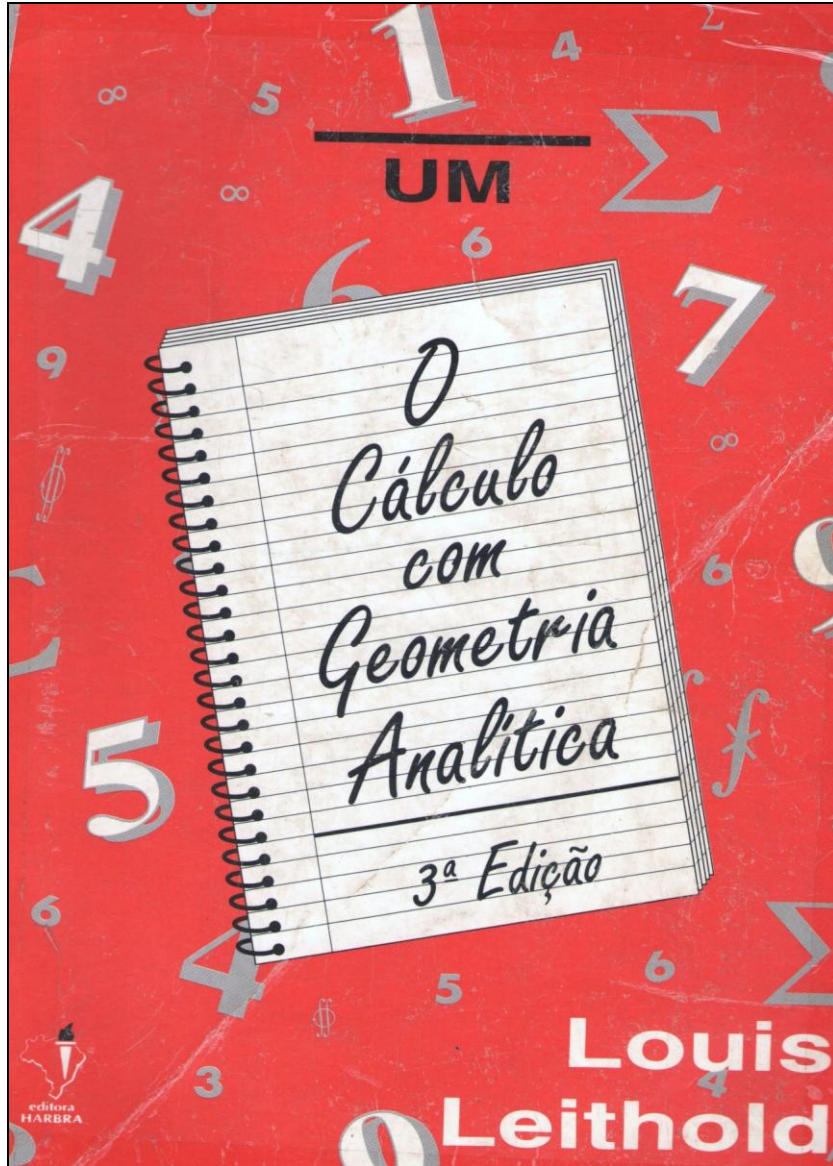
**Fundamentos de Matemática Elementar – conjuntos e funções (IEZZI, 1993):**



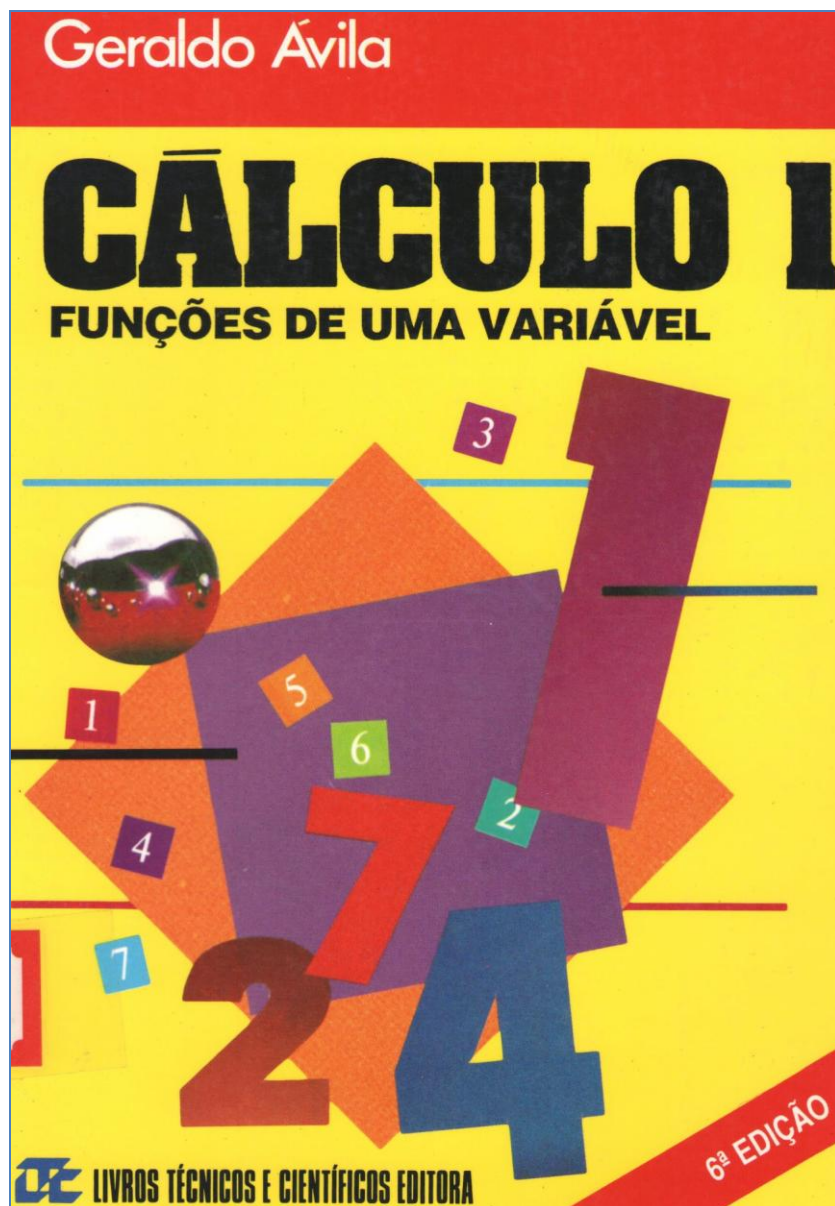
**Cálculo com Geometria Analítica (SWOKOWSKI, 1994):**



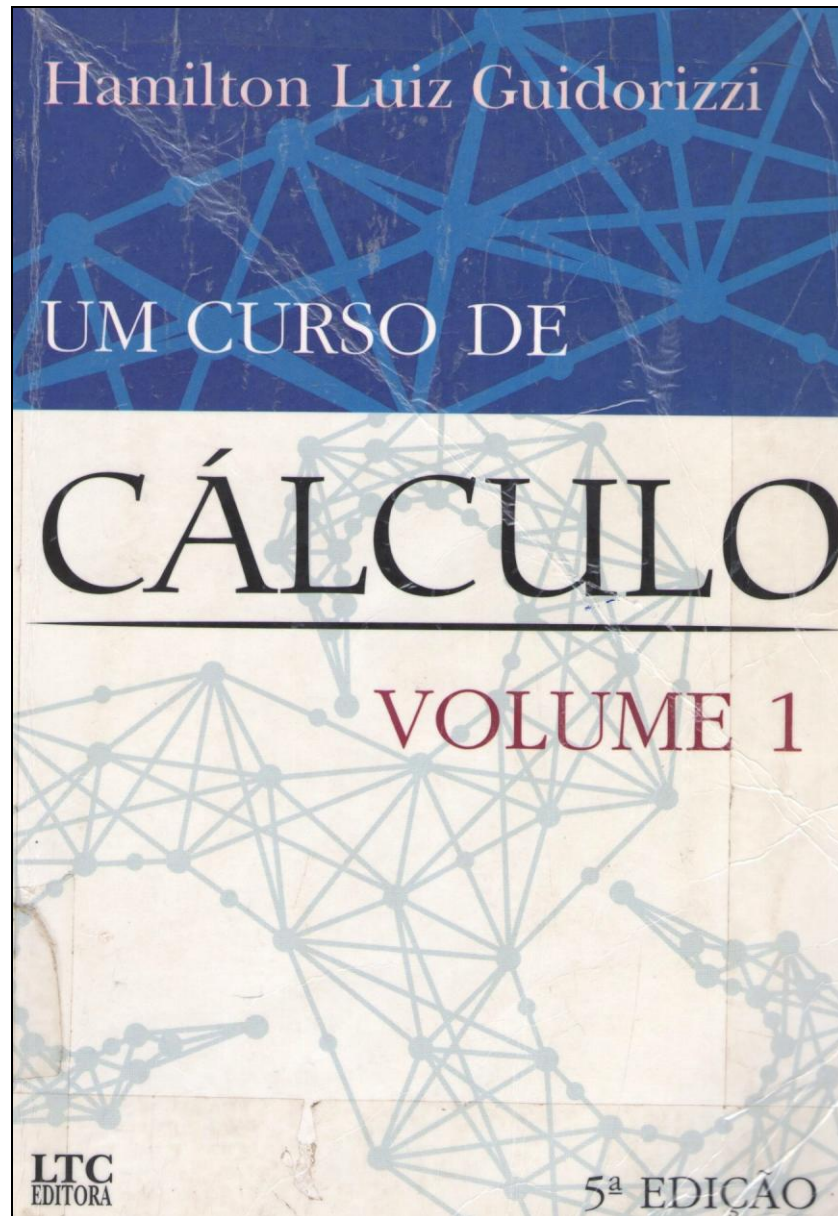
O Cálculo com Geometria Analítica (LEITHOLD, 1994):



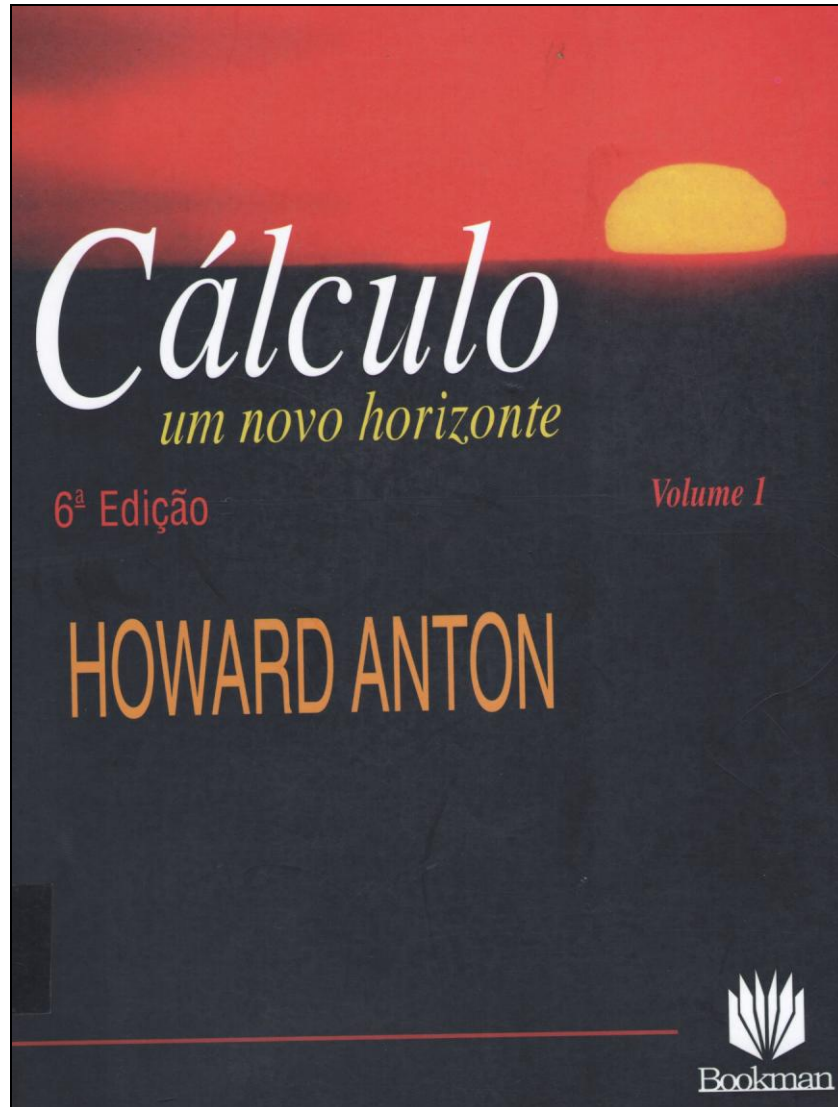
Cálculo I (ÁVILA, 1994):



Cálculo I (GUIDORIZZI, 2001):



Cálculo I (ANTON, 2000):

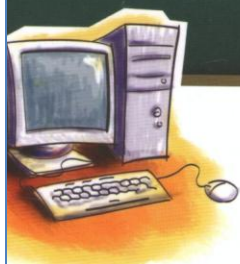


**Números e Funções Reais (LIMA, 2013):**

**Elon Lages Lima**

# **NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS**

**Coleção PROFMAT**



**Sociedade Brasileira de Matemática**

## **ANEXO II**

### **LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL I**



**1º Ano do Ensino Fundamental:**



# sumário

## UNIDADE 1 • NÚMEROS, OPERAÇÕES E GEOMETRIA

1. **NO PARQUE DE DIVERSÕES**..... 10
  - LOCALIZAÇÃO ESPACIAL: INTRODUÇÃO E USO DO VOCABULÁRIO BÁSICO
  - EXPERIÊNCIAS INICIAIS PARA A CONSTRUÇÃO DA IDEIA DE NÚMEROS: INDICANDO QUANTIDADE, ORDEM E POSIÇÃO
  - NOÇÕES DE MEDIDAS: INTRODUÇÃO E VOCABULÁRIO BÁSICO
2. **QUANTOS SÃO? VAMOS CONTAR!**..... 25
  - USO DO VOCABULÁRIO BÁSICO DE LOCALIZAÇÃO ESPACIAL
  - CONSTRUÇÃO DA IDEIA DE NÚMERO
  - REPRESENTAÇÃO DOS PRIMEIROS NÚMEROS
  - CONSTRUÇÕES INICIAIS PARA A SEQUÊNCIA NUMÉRICA DE 1 EM 1 COM FIGURAS

## UNIDADE 2 • NÚMEROS E OPERAÇÕES, MEDIDAS E GEOMETRIA

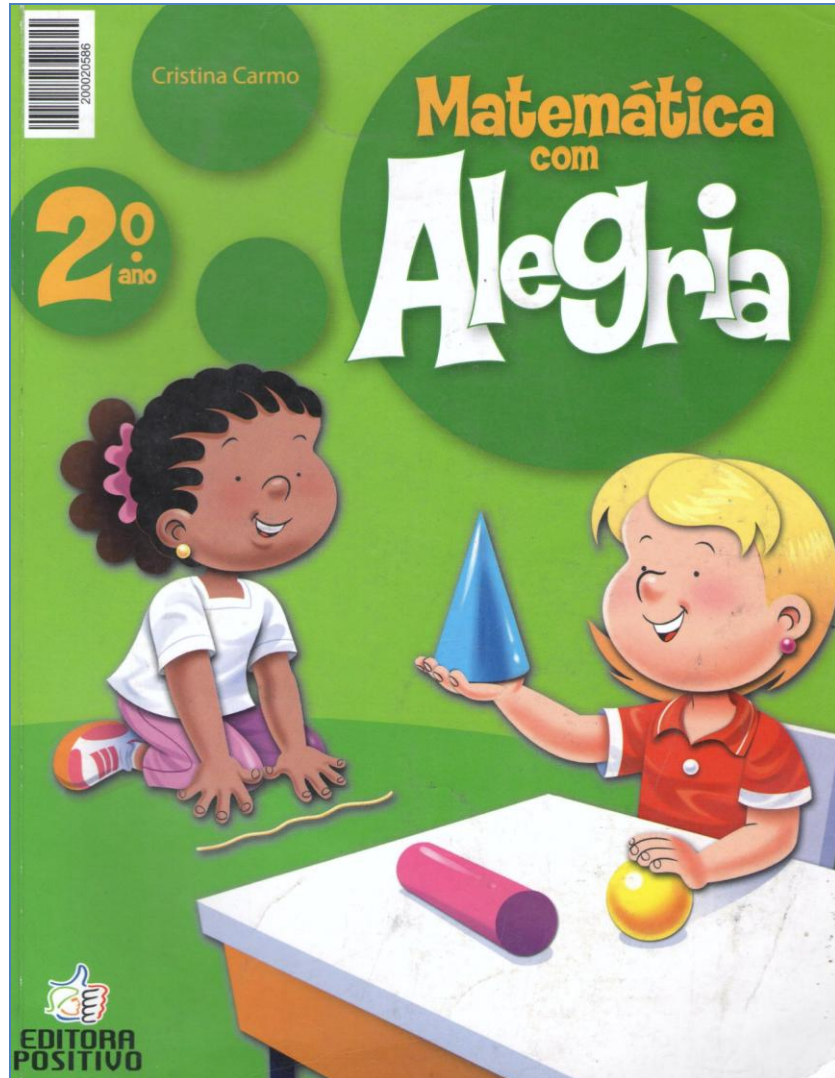
3. **BRINCANDO E CONTANDO** ..... 46
  - LOCALIZAÇÃO ESPACIAL
  - NÚMEROS NATURAIS DE 0 A 10: RECONHECIMENTO, LEITURA E ESCRITA
  - ESTIMATIVA E COMPARAÇÃO DE QUANTIDADES
  - IDEIAS DA ADIÇÃO E DA SUBTRAÇÃO
4. **CONTINUANDO A CONTAR** ..... 67
  - NÚMEROS NATURAIS DE 0 A 15: RECONHECIMENTO, LEITURA E REPRESENTAÇÃO ESCRITA E CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DE 1 EM 1 COM OS NÚMEROS ESTUDADOS
  - ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO: IDEIAS BÁSICAS, APRESENTADAS EM SITUAÇÕES DIVERSAS; RESOLUÇÃO COM CÁLCULO MENTAL
  - LOCALIZAÇÃO ESPACIAL: VOCABULÁRIO FUNDAMENTAL E IDEIAS DE POSIÇÃO

<b>5. MEDINDO O TEMPO.....</b>	<b>83</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• NOÇÕES TEMPORAIS: ONTEM, HOJE E AMANHÃ; MANHÃ, TARDE E NOITE</li> <li>• INTRODUÇÃO DAS MEDIDAS DE TEMPO COM RECONHECIMENTO DO DIA VIGENTE, DO ANTERIOR (ONTEM) E DO POSTERIOR (AMANHÃ)</li> <li>• USO DE DIFERENTES TIPOS DE CALENDÁRIOS, VISANDO À LOCALIZAÇÃO DO DIA, DA SEMANA E DO MÊS</li> <li>• PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS DE DOBRADURAS COM A OBSERVAÇÃO DAS DIFERENTES TRANSFORMAÇÕES NA FIGURA INICIAL</li> </ul>	
<b>PROJETO TEMÁTICO: PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS CULINÁRIAS.....</b>	<b>102</b>
<b>UNIDADE 3 • NÚMEROS, OPERAÇÕES E GEOMETRIA</b>	
<b>6. BRINCANDO E APRENDENDO COM SUCATA .....</b>	<b>108</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• CONTANDO OBJETOS E FORMANDO GRUPOS DE 10</li> <li>• RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES, COM CÁLCULO MENTAL</li> <li>• INTERPRETAÇÃO DE DADOS APRESENTADOS EM TABELAS E GRÁFICOS</li> <li>• RECONHECIMENTO E SIGNIFICADO DOS SINAIS MAIS (+) E IGUAL (=)</li> <li>• FATOS FUNDAMENTAIS DA ADIÇÃO COM TOTAL ATÉ 10</li> </ul>	
<b>7. BRINCANDO COM AS FIGURAS .....</b>	<b>125</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• CORES E TAMANHOS DOS BLOCOS LÓGICOS</li> <li>• PERCEPÇÃO DE DIFERENÇAS NAS FORMAS DOS OBJETOS RECONHECIMENTO DE FIGURAS DE FORMAS ARREDONDADAS E NÃO ARREDONDADAS</li> <li>• RECONHECIMENTO DA SUPERFÍCIE DE UM OBJETO</li> <li>• FIGURAS PLANAS: CÍRCULOS, FIGURAS RETANGULARES E FIGURAS TRIANGULARES</li> </ul>	
<b>8. NOVAS QUANTIDADES, NOVOS NÚMEROS! .....</b>	<b>144</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• CONTAGENS DE 1 EM 1 E DE 10 EM 10</li> <li>• ESCRITA E LEITURA DE NÚMEROS NATURAIS DA SEQUÊNCIA DE 0 A 20</li> <li>• RESOLUÇÃO DE ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES, COM CÁLCULO MENTAL</li> <li>• INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICO DE COLUNAS</li> </ul>	

## UNIDADE 4 • NÚMEROS E OPERAÇÕES, MEDIDAS E GEOMETRIA

<b>9. ACRESCENTANDO E RETIRANDO OBJETOS .....</b>	<b>160</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• CONTAGENS, LEITURA E ESCRITA DE 1 EM 1 (0 A 30) E DE 10 EM 10 (0 A 100)</li><li>• RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO, COM CÁLCULO MENTAL</li><li>• RECONHECIMENTO E DIFERENCIAÇÃO DO SIGNIFICADO DOS SINAIS MAIS (+) E MENOS (-)</li><li>• INTERPRETAÇÃO E USO DE TABELAS E GRÁFICOS PARA REPRESENTAR QUANTIDADES EM SITUAÇÕES-PROBLEMA</li><li>• MEDIDAS DE TEMPO: DIAS DA SEMANA E MESES DO ANO</li><li>• MOEDAS DE REAL EM USO</li></ul>	
<b>10. COMPARANDO, MEDINDO E CONTANDO .....</b>	<b>180</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• USO DO VOCABULÁRIO BÁSICO DE MEDIDAS DE COMPRIMENTO</li><li>• MEDIÇÃO DE COMPRIMENTOS UTILIZANDO O PALMO, O PASSO E PEDAÇOS DE BARBANTE</li><li>• RECONHECIMENTO DO METRO COMO UNIDADE DE MEDIDA DE COMPRIMENTO</li><li>• ESCRITA E LEITURA DOS NÚMEROS NATURAIS ATÉ 40</li></ul>	
<b>11. ENTRE FORMAS E NÚMEROS.....</b>	<b>199</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• CONTINUAÇÃO DO TRABALHO COM CÉDULAS E MOEDAS DE REAL EM USO</li><li>• RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO</li><li>• RECONHECIMENTO DO CÍRCULO NA SUPERFÍCIE DAS MOEDAS</li><li>• LEITURA, ESCRITA, COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS ATÉ 50</li><li>• RECONHECIMENTO DO PADRÃO DE SEQUÊNCIAS COM FIGURAS GEOMÉTRICAS</li></ul>	
<b>PROJETO TEMÁTICO: DA SUCATA AO BRINQUEDO .....</b>	<b>219</b>
<b>LEITURA RECOMENDADA.....</b>	<b>223</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>224</b>
<b>MATERIAL DE APOIO .....</b>	<b>225</b>
<b>CADERNO DE JOGOS .....</b>	<b>235</b>

2º Ano do Ensino Fundamental:



# sumário

## Unidade 1 • Números, cálculos, Geometria e medidas

<b>1. Brincando de contar</b> .....	<b>10</b>
• Contando de 1 a 9	
• Números de 0 a 10	
• Adições e subtrações fáceis resolvidas com cálculo mental	
• Resolução de situações-problema com as ideias de juntar e de tirar	
<b>2. Aprendendo a localizar</b> .....	<b>26</b>
• Noções de posição (primeiro/último; frente/atrás; perto/longe; imediatamente antes/ imediatamente depois; de frente/de costas)	
• Noções de grandeza (comprimento)	
• Noção de caminho (direção e sentido)	
• Brincando e aprendendo	
<b>3. Calculando “de cabeça”</b> .....	<b>38</b>
• Situações aditivas: noções de juntar e de acrescentar	
• Situações subtrativas: noções de tirar, de comparar	
• Adição e subtração de números até 10	
• Aprendendo a fazer arte	
• Brincando e aprendendo	
<b>4. Um dia depois do outro</b> .....	<b>54</b>
• Ontem, hoje e amanhã	
• Manhã, tarde e noite: mais um dia!	
• Dias da semana	
• Aprendendo a fazer arte	

## Unidade 2 • Números, operações e medidas

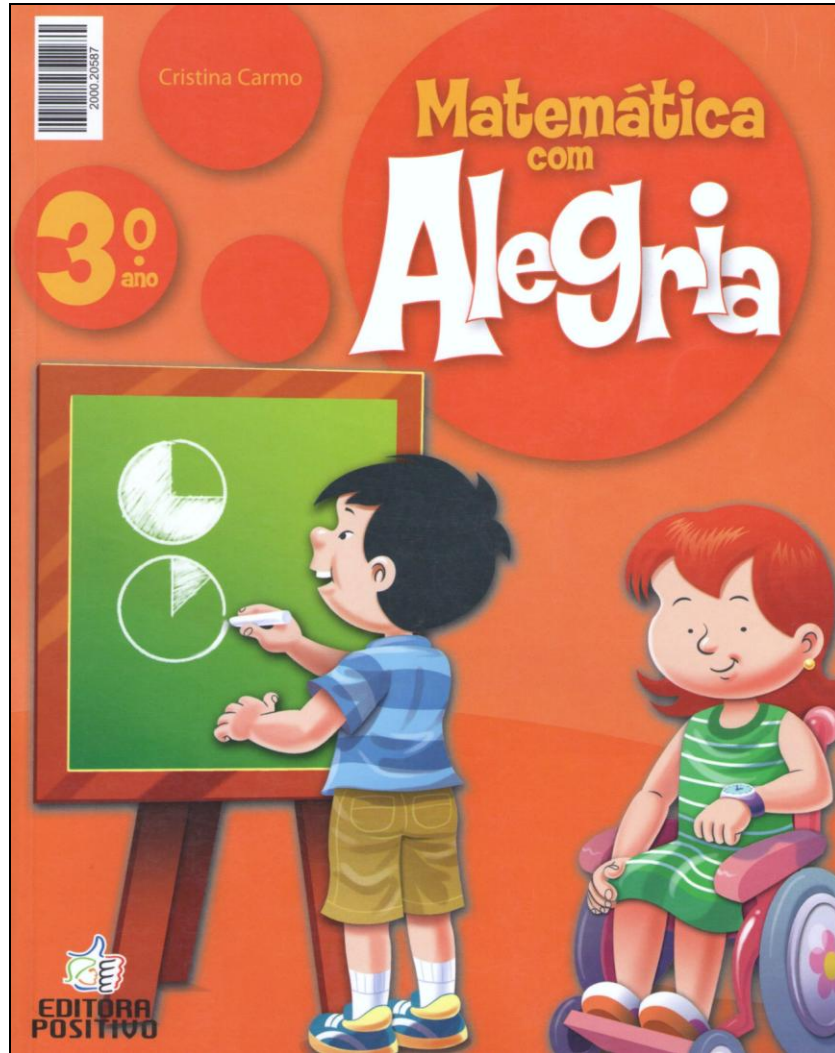
<b>5. Unidades ou dezenas?</b> .....	<b>68</b>
• Unidades	
• Grupos de 10 unidades	

• Dezena	
• Aprendendo a fazer arte	
• Brincando e aprendendo	
<b>6. É mais ou é menos?</b> .....	<b>84</b>
• Dez, onze e doze amigos	
• Treze, quatorze e quinze amigos	
• Dezesesseis, dezessete e dezoito amigos	
• Adições com total até 18	
• Subtrações com minuendo até 10	
• Reta numérica	
• Brincando e aprendendo	
<b>7. De 10 em 10 é melhor</b> .....	<b>106</b>
• Agrupando de 10 em 10	
• As dezenas exatas. Números maiores que 10 e menores que 100	
• As moedas de real	
• Composição e decomposição de números	
• Brincando e aprendendo	
<b>8. Um mês depois do outro</b> .....	<b>125</b>
• Os meses do ano. Os dias dos meses	
• Calendário	
• O ano. Anos bissextos	
• Brincando e aprendendo	
<b>Projeto temático: Recriando jogos e calculando “de cabeça”</b> .....	<b>136</b>
<b>Unidade 3 • Números, operações, Geometria e medidas</b>	
<b>9. Adição e subtração: como resolver?</b> .....	<b>140</b>
• Adição e subtração: estimativa, cálculo mental e cálculo escrito	
• Algoritmos da adição e da subtração: sem reagrupamento e sem recurso	
• Situações-problema aditivas e subtrativas com cédulas e moedas de real	
• Brincando e aprendendo	
<b>10. A Geometria nas embalagens</b> .....	<b>154</b>
• As embalagens do dia a dia	
• Objetos com forma arredondada	
• Objetos com forma não arredondada	

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sólidos geométricos (corpos redondos e corpos não redondos)</li> <li>• Blocos retangulares ou paralelepípedos</li> <li>• Faces, arestas e vértices</li> <li>• Retângulos e regiões retangulares</li> <li>• Aprendendo a fazer arte</li> </ul>	
<b>11. Dez unidades? Mais uma dezena .....</b>	<b>174</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Adição com reagrupamento (estimativa do resultado, resolução com cálculo mental e com cálculo escrito)</li> <li>• Brincando e aprendendo</li> </ul>	
<b>12. De hora em hora, tudo melhora? .....</b>	<b>189</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Horas e relógios <ul style="list-style-type: none"> <li>• Leitura de horas em relógios analógicos e digitais</li> </ul> </li> <li>• Brincando e aprendendo</li> </ul>	
<b>Unidade 4 • Números, operações e medidas</b>	
<b>13. Faltam unidades? Busque-as nas dezenas! .....</b>	<b>204</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subtração com “desagrupamento” (estimativa do resultado, resolução com cálculo mental e com cálculo escrito)</li> <li>• Adição com três ou mais parcelas</li> </ul>	
<b>14. Na medida certa .....</b>	<b>218</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparando para medir <ul style="list-style-type: none"> <li>• Medindo comprimento com unidades não padronizadas (palmo, passo, pé)</li> <li>• O metro. Instrumentos de medir comprimento</li> </ul> </li> </ul>	
<b>15. Descobrimos novas ideias .....</b>	<b>229</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formando pares. Números pares <ul style="list-style-type: none"> <li>• Números ímpares</li> </ul> </li> <li>• A multiplicação e suas ideias</li> <li>• A divisão e suas ideias <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de dobro e de metade</li> </ul> </li> <li>• Aprendendo a fazer arte</li> </ul>	
<b>Projeto temático: O lixo se transformando em brinquedos.....</b>	<b>250</b>
<b>Leitura recomendada .....</b>	<b>254</b>
<b>Referências .....</b>	<b>255</b>
<b>Material de apoio .....</b>	<b>257</b>
<b>Caderno de jogos .....</b>	<b>281</b>



**3º Ano do Ensino Fundamental:**



# sumário

## Unidade 1 • Números, operações e Geometria

<b>1. Números e cálculos para começar</b> .....	<b>10</b>
Os números até 100	
Adição e subtração: cálculo mental e escrito	
Ideia de juntar da adição e ideia de tirar da subtração em situações-problema	
Utilização e interpretação de tabelas e gráficos	
<b>2. De 10 em 10, de 100 em 100... 1 000</b> .....	<b>29</b>
Unidades, dezenas e centenas	
Números até 999: escrita, leitura, comparação e ordenação	
Agrupamentos e trocas de 10 em 10 unidades: valor posicional dos algarismos	
Representação do número natural na reta numérica	
<b>3. Redondos ou não redondos?</b> .....	<b>47</b>
Classificação dos sólidos geométricos, segundo a forma, em corpos redondos e corpos não redondos	
Superfície dos corpos redondos	
Reprodução da esfera, do cilindro e do cone com massa de modelar. Cortes nesses modelos	
Círculos e circunferências	
Contorno da parte plana do modelo de cilindro	
<b>4. Adição ou subtração?</b> .....	<b>61</b>
Adição e subtração de números menores que 1000	
Cálculo mental e estimativa da soma e da diferença. Aplicação de técnicas operatórias usuais	
Ideias da adição: de juntar e de acrescentar em situações-problema	
Ideias da subtração: de tirar, comparar e de complementar em situações-problema	
Utilização e interpretação de gráficos e tabelas	
<b>Projeto temático: Brincadeiras de ontem e de hoje</b> .....	<b>75</b>

## Unidade 2 • Números, operações, Geometria e medidas

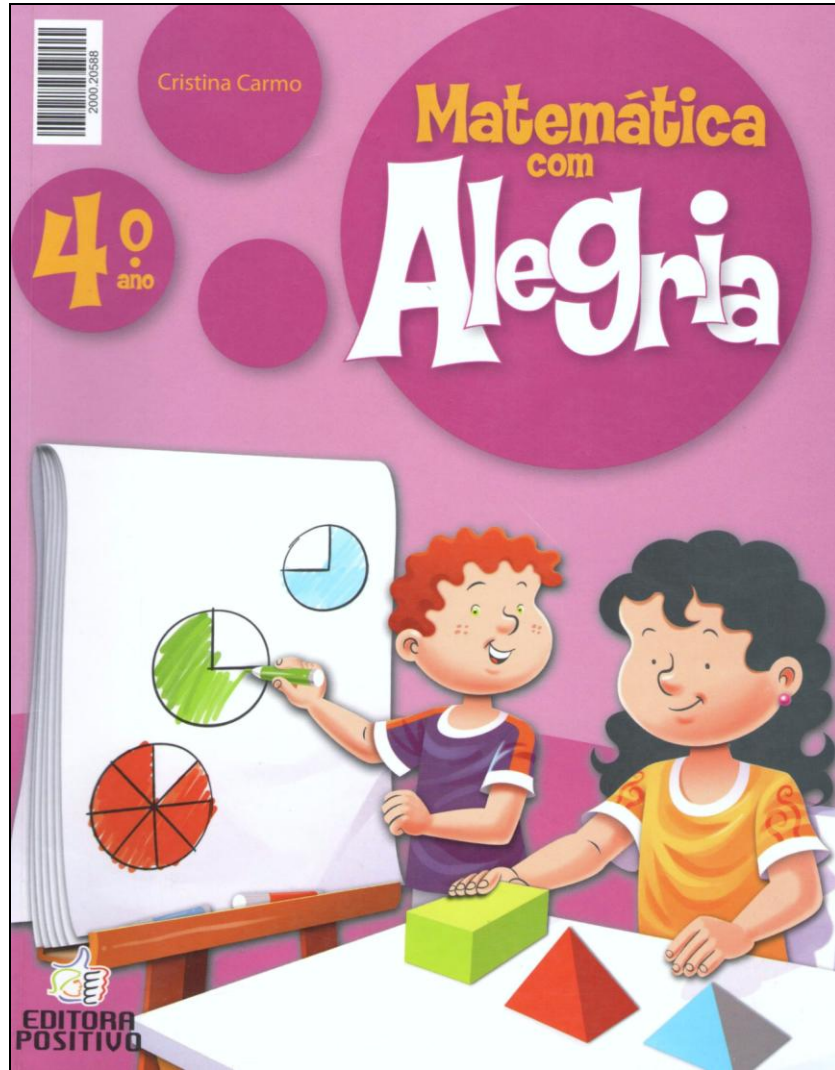
<b>5. Medindo ou contando?</b> .....	80
Conceito de medida	
Unidades não padronizadas de medir comprimento: pé, palmo, passo...	
Estimativa de medidas	
Unidade-padrão de medida de comprimento: o metro	
O centímetro e o quilômetro	
<b>6. Dobrando, dobrando, dobrando... uma quantidade</b> .....	94
Noção de dobro, de dobro do dobro, de dobro do dobro do dobro	
Multiplicação: a partir da adição de parcelas iguais, da proporcionalidade e das figuras retangulares considerando a quantidade de linhas e colunas de quadradinhos	
Multiplicação por 2, 4 e 8	
<b>7. Caixas, caixinhas... e muito mais!</b> .....	114
Corpos não redondos	
Os paralelepípedos e as pirâmides	
Fases, arestas e vértices dos paralelepípedos e das pirâmides	
Planificações de paralelepípedos e de pirâmides por meio de contorno de suas faces	
As figuras planas obtidas por planificação do paralelepípedo e da pirâmide	
<b>8. De metade em metade</b> .....	135
Noção de metade, de metade da metade, de metade da metade da metade	
Divisão a partir da ideia de repartir e de medir	
Divisão por 2, por 4 e por 8	

## Unidade 3 • Números, operações e medidas

<b>9. Um tempo para o tempo</b> .....	152
Calendários	
Períodos de tempo: o dia, a semana, o mês e o ano	
Bimestre, trimestre e semestre	
Linha de tempo	
Os dias da semana e dos meses	
Ano bissexto	
<b>10. Multiplicando solidariedade para dividir</b> .....	167
Situações de multiplicação envolvendo adição de parcelas iguais e a organização espacial retangular	
Proporcionalidade entre os fatores	

A determinação da quantidade de elementos diferentes que podem ser formados combinando cada elemento de uma coleção com cada elemento de outra coleção	
Multiplicações e divisões por 2, 4 e 8; 5 e 10	
Divisões em que o dividendo não é múltiplo do divisor (divisões com resto)	
<b>11. Mais tempo para o tempo</b>	<b>184</b>
Horas e minutos	
Unidades de medir o tempo	
Relógio digital e o de ponteiros	
Leitura e escrita de horas e minutos	
O segundo	
<b>12. De 3 em 3, de 6 em 6, de 9 em 9... também é fácil!</b>	<b>200</b>
Multiplicação e divisão por 3, 6 e 9	
Multiplicação a partir da proporcionalidade, da adição de parcelas iguais, das representações retangulares e da combinatória	
Algoritmos da multiplicação	
<b>Fazendo arte com dobraduras</b>	<b>220</b>
<b>Unidade 4 • Números, operações, medidas e Geometria</b>	
<b>13. Entre jogos e cálculos</b>	<b>226</b>
Multiplicação e divisão por 7	
Adição e subtração de números menores que 1 000 utilizando cálculo mental ou técnicas operatórias	
Multiplicação e divisão de números menores que 100 por números menores que 10 utilizando cálculo mental ou técnica operatória	
<b>14. A figura é ou não simétrica?</b>	<b>246</b>
Reconhecimento de figura plana simétrica	
Determinação do(s) eixo(s) de simetria de uma figura plana	
<b>15. De centavo em centavo</b>	<b>257</b>
As moedas e cédulas de real	
Trocadas entre moedas, entre cédulas e moedas, e entre cédulas e cédulas	
Escrita, leitura, comparação de quantias	
Operações com quantias utilizando cálculo mental	
<b>Leitura recomendada</b>	<b>271</b>
<b>Referências</b>	<b>272</b>
<b>Material de apoio</b>	<b>273</b>

4º Ano do Ensino Fundamental:



# sumário

## Unidade 1 • Números, operações e Geometria

<b>1. Números, uma grande ideia!</b> .....	<b>10</b>
• Os números no dia a dia	
<b>2. A escrita dos números: ontem e hoje</b> .....	<b>19</b>
• Sistema de numeração romano	
• Sistema de numeração decimal	
• A unidade de milhar	
<b>3. O que fazer? Adição ou subtração?</b> .....	<b>40</b>
• Adição e subtração de números naturais	
• Adição: estimativa, cálculo mental e cálculo escrito	
• Subtração: estimativa, cálculo mental e cálculo escrito	
• Ideias da adição e da subtração	
• Expressões numéricas. Uso da calculadora	
• Brincando e aprendendo	
<b>4. Figuras simétricas</b> .....	<b>58</b>
• Simetria em figuras não planas	
• Figuras simétricas planas	
<b>Projeto temático: A arte de transformar as partes em um todo</b> .....	<b>68</b>

## Unidade 2 • Números, operações, medidas e Geometria

<b>5. O tempo de que o tempo precisa</b> .....	<b>72</b>
• Dia, mês e ano	
• Linha do tempo. Calendário. Ano bissexto	
• Bimestre, trimestre e semestre. Semana e quinzena	
• Relógios. Hora, minuto e segundo	
• Brincando e aprendendo	

<b>6. Onde estão os múltiplos? E os divisores, onde estão? .....</b>	<b>89</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação e divisão: estimativa do resultado, cálculo mental e escrito <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ideias da multiplicação e da divisão</li> </ul> </li> <li>• Multiplicando e dividindo por 2, 4 e 8</li> <li>• Números pares e números ímpares</li> <li>• Dobro e metade</li> <li>• Múltiplo e divisor</li> </ul>	
<b>7. Corpos redondos e corpos não redondos .....</b>	<b>110</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Corpos redondos</li> <li>• Corpos não redondos: poliedros <ul style="list-style-type: none"> <li>• Blocos retangulares</li> <li>• Prismas e pirâmides</li> </ul> </li> <li>• Brincando e aprendendo</li> <li>• Aprendendo a fazer arte</li> </ul>	
<b>8. Multiplicando para dividir .....</b>	<b>136</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação e divisão por 3, 6 e 9: estimativa do resultado, cálculo mental e escrito <ul style="list-style-type: none"> <li>• Triplo e terça parte</li> </ul> </li> <li>• Outras multiplicações e divisões (por 5 e 10, 3, 6 e 9) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Múltiplo e divisor</li> </ul> </li> </ul>	
<b>Unidade 3 • Números, operações, medidas e Geometria</b>	
<b>9. Continuando a multiplicar para dividir .....</b>	<b>156</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação e divisão para continuar (por 7) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação com multiplicador composto</li> <li>• Divisão com divisor composto</li> </ul> </li> </ul>	
<b>10. Comparando e medindo.....</b>	<b>167</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Medindo comprimento</li> <li>• Unidades não padronizadas de medir comprimento (pé, passo, palmo)</li> <li>• Perímetro</li> <li>• Unidades padronizadas de medir comprimento (o metro, seus múltiplos e submúltiplos)</li> <li>• Caminhos</li> <li>• Aprendendo a fazer arte</li> </ul>	
<b>11. De centavo em centavo .....</b>	<b>188</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Centavo e real</li> </ul>	

<b>12. Direção e sentido: retas e ângulos</b> .....	<b>208</b>
• Direção e sentido	
• “Cantos” e ângulos	
<b>Projeto temático: Medindo para aprender a medir</b> .....	<b>222</b>
<b>Unidade 4 • Números, operações e Geometria</b>	
<b>13. Novos números, novas descobertas</b> .....	<b>226</b>
• Décimos, centésimos e milésimos	
• O inteiro e as partes fracionárias do inteiro	
• Notação decimal do número racional	
• Adição e subtração de números racionais com a notação decimal	
• Notação decimal de medidas de comprimento	
• Medidas de massa. Unidades trabalhadas: o quilograma, o grama e a tonelada	
• Brincado e aprendendo	
<b>14. Outra representação para os novos números</b> .....	<b>250</b>
• Frações: primeiras noções	
• O todo e suas partes	
• Numerador e denominador	
• Número racional. Representações do número racional	
• Frações decimais	
• Medidas e capacidade. Unidades trabalhadas: o litro e o mililitro	
• Brincando e aprendendo	
<b>15. É equivalente ou não é?</b> .....	<b>273</b>
• Frações equivalentes	
• Frações com denominadores maiores que 10 e diferentes de 100, 1 000...	
<b>16. Dos poliedros aos polígonos</b> .....	<b>289</b>
• Polígonos	
• Regiões poligonais: triângulos e quadriláteros	
– Quadriláteros (paralelogramos e não paralelogramos)	
– Paralelogramos (retângulo e, entre eles, o quadrado e o losango)	
<b>Leitura recomendada</b> .....	<b>303</b>
<b>Referências</b> .....	<b>304</b>
<b>Material de apoio</b> .....	<b>305</b>
<b>Caderno de jogos</b> .....	<b>327</b>



5º Ano do Ensino Fundamental:



# sumário

## Unidade 1 • Números, operações e Geometria

<b>1. Aquecendo para recomeçar</b> .....	<b>12</b>
• Cálculos e mais cálculos	
• Adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais em situações-problema	
• Interpretação de gráficos e tabelas	
• Média aritmética	
<b>2. Muita gente, muitos números</b> .....	<b>23</b>
• Números indicando grandes quantidades	
• Adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais	
• Uso da calculadora na verificação de resultados das operações	
• Escrita dos números (algoritmos, ordens, classes)	
• Composição, decomposição, comparação e ordenação de números naturais	
<b>3. Caminhando, caminhando</b> .....	<b>34</b>
• Retas paralelas e retas não paralelas	
• Retas coplanares	
• Retas paralelas e retas concorrentes. Retas coincidentes	
• Direção	
• Brincando e aprendendo	
<b>4. É múltiplo ou é divisor?</b> .....	<b>47</b>
• Divisor de um número natural	
• Todos os divisores de um número natural	
• Número primo e número composto	
• Maior divisor comum de dois ou mais números naturais	
• Números primos entre si	

- Múltiplos de um número natural
  - Número divisível
  - Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais
- Brincando e aprendendo

## Unidade 2 – Números, operações e Geometria

### 5. Fração? O que é?..... 72

- O número racional e suas representações
- Representação fracionária
- Frações que representam partes de um inteiro
  - Frações representando o número racional 1
  - Frações representando números racionais menores que 1
  - Frações representando números racionais maiores que 1
  - Representações mistas de um número racional maior que 1

### 6. Números racionais, para continuar! ..... 96

- Frações que representam um mesmo número racional
  - Frações equivalentes
  - Simplificação de frações. Fração irredutível
  - Outras representações para o número racional
  - Frações decimais e notação decimal do número racional
  - Números com vírgula: décimos, centésimos, milésimos
  - Porcentagem

### 7. Retas e ângulos..... 119

- Direção e sentido
  - Retas e retas coplanares. Retas paralelas. Retas concorrentes
  - Segmento de reta
- Ângulo
  - Semirreta
  - Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso.
  - Retas perpendiculares
- Brincando e aprendendo

### Projeto temático: Lendo gráficos e interpretando situações ..... 141

### Unidade 3 – Números, operações, medidas e Geometria

<b>8. Adicionando e subtraindo números racionais .....</b>	<b>148</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Adição e subtração de números racionais com representação fracionária</li><li>• Adição e subtração de números racionais com representação decimal<ul style="list-style-type: none"><li>• Estimativa do resultado das operações, determinação do resultado com cálculo mental e com cálculo escrito</li></ul></li></ul>	
<b>9. Linha ou superfície? .....</b>	<b>168</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Medindo o comprimento<ul style="list-style-type: none"><li>• O metro, seus múltiplos e submúltiplos</li></ul></li><li>• Determinando o perímetro</li><li>• Determinando a área</li><li>• Brincando e aprendendo</li></ul>	
<b>10. Multiplicando e dividindo números racionais .....</b>	<b>192</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Multiplicação de números racionais com representação fracionária e mista: estimativa, cálculo mental e cálculo escrito</li><li>• Divisão de números racionais com representação fracionária e mista: estimativa, cálculo mental e cálculo escrito</li><li>• Brincando e aprendendo</li></ul>	
<b>11. Polígonos .....</b>	<b>208</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Figuras poligonais<ul style="list-style-type: none"><li>• Regiões poligonais. Polígonos</li><li>• Classificação dos polígonos</li><li>• Figuras poligonais simétricas. Eixos de simetria</li><li>• Sólidos geométricos: corpos redondos e poliedros</li><li>• Prismas e pirâmides</li><li>• Composição e decomposição de figuras poligonais</li><li>• Área de figuras poligonais com unidades de medidas não padronizadas</li></ul></li></ul>	

### Unidade 4 – Números, operações, Geometria e medidas

<b>12. Multiplicação e divisão de números racionais com representação decimal.....</b>	<b>224</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Multiplicação<ul style="list-style-type: none"><li>• Números racionais representados por frações e com notação decimal<ul style="list-style-type: none"><li>– Estimativa, cálculo mental, cálculo escrito</li></ul></li></ul></li><li>• Divisão<ul style="list-style-type: none"><li>• Números racionais representados por frações e com notação decimal<ul style="list-style-type: none"><li>– Estimativa, cálculo mental, cálculo escrito</li></ul></li></ul></li></ul>	

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas envolvendo as unidades de medida de comprimento, de capacidade, de massa</li> <li>• Resolução de problemas envolvendo o sistema monetário</li> </ul>	247
<b>13. Triângulos e quadriláteros.....</b>	<b>247</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Triângulos <ul style="list-style-type: none"> <li>• Classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos</li> </ul> </li> <li>• Quadriláteros <ul style="list-style-type: none"> <li>• Paralelogramos e não paralelogramos</li> <li>• Retângulos e losangos</li> <li>• Trapézios</li> </ul> </li> </ul>	
<b>14. Área e volume: primeiras noções.....</b>	<b>262</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprendendo mais sobre áreas de figuras poligonais <ul style="list-style-type: none"> <li>• Unidades não padronizadas</li> <li>• Unidades padronizadas: centímetro quadrado, metro quadrado e quilômetro quadrado</li> </ul> </li> <li>• Volume: primeiras noções <ul style="list-style-type: none"> <li>• Unidades não padronizadas</li> <li>• Unidade padronizada: centímetro cúbico</li> </ul> </li> </ul>	
<b>Projeto temático: Brincando e descobrindo o que é probabilidade .....</b>	<b>278</b>
<b>Leitura recomendada .....</b>	<b>286</b>
<b>Referências .....</b>	<b>287</b>
<b>Material de apoio .....</b>	<b>289</b>
<b>Caderno de jogos .....</b>	<b>309</b>

## **ANEXO III**

### **LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II**

**6º Ano do Ensino Fundamental:**



# SUMÁRIO



Imagem: Educar

## Unidade 1

### Sistema de numeração decimal

1. Um pouco da história dos números ..... 7
2. Criando símbolos e regras ..... 10
3. O sistema de numeração decimal e os algarismos indo-arábicos ..... 14
4. Leitura e escrita de números no sistema de numeração decimal ..... 16
5. Matemática – uma grande criação da humanidade ..... 20

## Unidade 2

### Números naturais

1. Os números naturais e os processos de contagem ..... 25
2. A reta numérica e os números naturais ..... 28

## Unidade 3

### Adição e subtração de números naturais

1. As ideias da adição e da subtração ..... 35
2. O cálculo mental nas adições e nas subtrações ..... 40
3. Estimando por arredondamento ..... 42

## Unidade 4

### Multiplicação e divisão de números naturais

1. As ideias da multiplicação ..... 49
2. A divisão ..... 54
3. Expressões numéricas ..... 58
4. Propriedade distributiva da multiplicação ..... 62
5. Vamos resolver mais problemas? ..... 64
6. Medindo o tempo ..... 67

## Unidade 5

### Potenciação e raiz quadrada de números naturais

1. Potenciação ..... 75
2. Quadrados, cubos e potências ..... 77
3. O expoente 0 e o expoente 1 ..... 78
4. Raiz quadrada ..... 80

## Unidade 6

### Múltiplos e divisores

1. Sequência dos múltiplos de um número ..... 85
2. Fatores ou divisores de um número natural ..... 87
3. Critérios de divisibilidade – economizando cálculos ..... 89
4. Números primos ..... 93
5. Quando os múltiplos se encontram ..... 97
6. Divisores comuns e o mdc ..... 100

## Unidade 7

### Dados, tabelas e gráficos de barras

1. Para que servem os gráficos? ..... 107
2. Vamos fazer uma pesquisa estatística? ... 113



# SUMÁRIO

## Unidade 8

### Observando formas

1. As formas da natureza e as formas criadas pelo ser humano..... 117
2. Formas planas e não planas..... 119
3. Investigando os blocos retangulares .... 124
4. Perspectivas e vistas ..... 127

## Unidade 9

### Ângulos

1. Falando um pouco sobre ângulos..... 135
2. Ângulos – elementos e representação .... 136
3. Medidas de ângulos..... 138
4. Utilizando o transferidor ..... 141
5. Retas perpendiculares e retas paralelas .... 143
6. Os esquadros ..... 145

## Unidade 10

### Polígonos e circunferências

1. Polígonos..... 151
2. Triângulos..... 154
3. Quadriláteros..... 155
4. Polígonos regulares..... 158
5. Perímetro..... 160
6. Circunferências..... 162
7. Simetria nos polígonos e no círculo .... 165

## Unidade 11

### Frações

1. Inteiro e parte do inteiro ..... 171
2. Frações de uma quantidade ..... 174
3. Números mistos e frações impróprias..... 176
4. Frações equivalentes ..... 179
5. Comparação de frações ..... 182
6. Operações com frações..... 185
7. Inversa de uma fração..... 190
8. Potenciação e raiz quadrada de frações..... 193

## Unidade 12

### Números decimais

1. A notação decimal ..... 199
2. Números decimais e o registro de medidas..... 204
3. Números decimais na forma de fração..... 206
4. Comparando números decimais ..... 206
5. Adição e subtração de números decimais..... 208
6. Multiplicando por 10, 100, 1 000 ..... 210
7. Multiplicação de números decimais .... 212
8. Divisão de números naturais com quociente decimal..... 215
9. Divisão de números decimais..... 216

## Unidade 13

### Porcentagens

1. O que é porcentagem?..... 225
2. Calculando porcentagens..... 228
3. A forma decimal das porcentagens..... 232

## Unidade 14

### Medidas

1. O que é medir?..... 237
2. Comprimentos no sistema métrico decimal ..... 239
3. Medindo superfícies..... 244
4. A área do retângulo..... 245
5. Volumes ..... 250
6. Quando usamos cada unidade?..... 253
7. Medidas de massa ..... 255

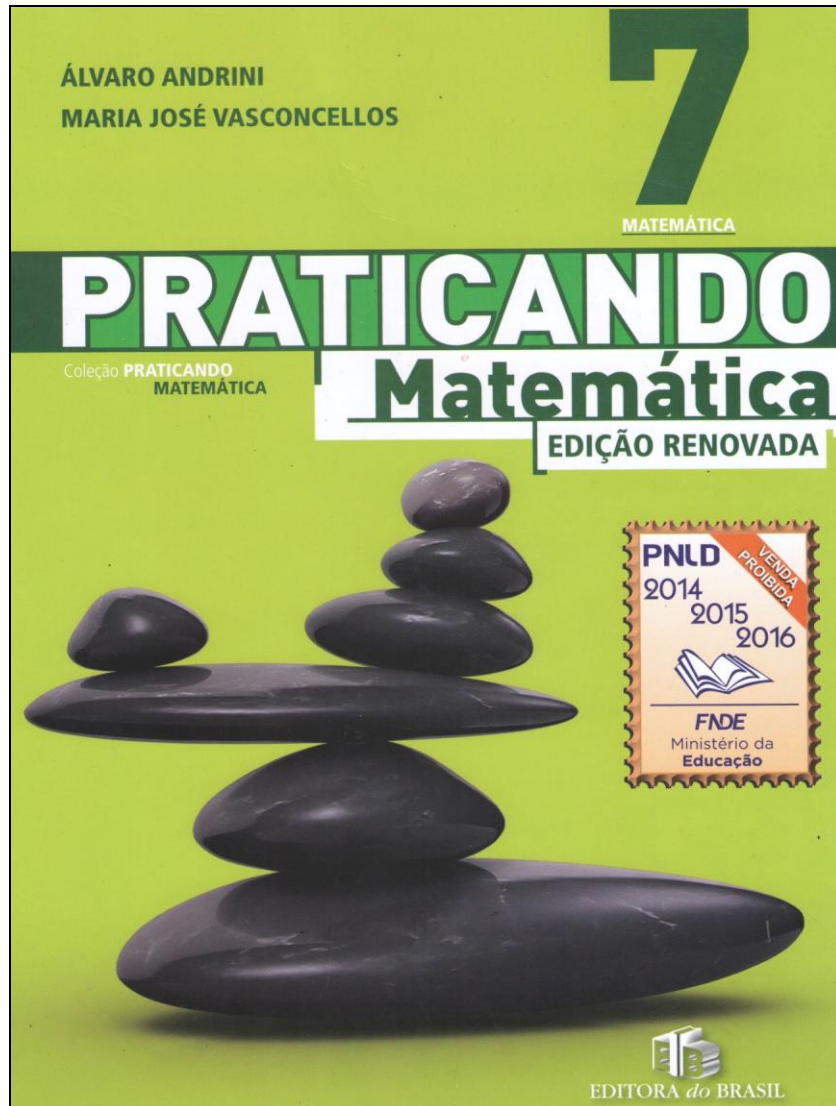
Sugestões de leitura e de sites para o aluno..... 267

Referências bibliográficas..... 270

Moldes e malha para as atividades..... 271

Respostas dos exercícios ..... 277

**7º Ano do Ensino Fundamental:**



# SUMÁRIO



Fernando L. Boeretto

## Unidade 1

### Números naturais

1. A sequência dos números naturais ..... 7
2. Representação na reta e comparação de números naturais ..... 10
3. Leitura e escrita ..... 10
4. Múltiplos e divisores ..... 12
5. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum ..... 17

## Unidade 2

### Frações e números decimais

1. Fração e divisão ..... 25
2. Frações equivalentes ..... 31
3. Frações e números decimais na reta numérica ..... 34
4. Expressões numéricas ..... 36
5. Potenciação e raiz quadrada de números decimais ..... 39
6. O tempo e suas medidas ..... 42

## Unidade 3

### Números negativos

1. Onde encontramos números negativos? ..... 55
2. Comparando números ..... 58
3. Reta numérica ..... 60
4. Distâncias na reta numérica ..... 61
5. Adição envolvendo números negativos ..... 63
6. Subtração envolvendo números negativos ..... 67
7. Simplificando registros ..... 68
8. Multiplicação com números negativos ..... 71
9. Divisão envolvendo números negativos ..... 74
10. Potenciação com base negativa ..... 76
11. Raiz quadrada ..... 78
12. Expressões numéricas ..... 80

## Unidade 4

### Proporcionalidade

1. O que é grandeza? ..... 87
2. Escalas, plantas e mapas ..... 92
3. Aplicações das razões ..... 96
4. Grandezas diretamente proporcionais ..... 100
5. Grandezas inversamente proporcionais ..... 104

## Unidade 5

### Razões e porcentagens

1. Porcentagens: representação e cálculo ..... 115
2. Calculando o percentual ..... 118
3. Da parte para o todo ..... 120
4. Cálculo direto de descontos e acréscimos ..... 122

# SUMÁRIO

## Unidade 6

### Construindo e interpretando gráficos

1. Porcentagens e gráficos ..... 129
2. Construindo um gráfico de setores ..... 132
3. Pictogramas ..... 136
4. Médias ..... 138
5. Estudando um orçamento familiar ..... 142

## Unidade 7

### Sólidos geométricos

1. Poliedros ..... 151
2. Prismas e pirâmides ..... 154
3. Poliedros regulares ..... 159
4. Cilindros, cones e esferas ..... 161

## Unidade 8

### Áreas e volumes

1. Uma, duas, três dimensões ..... 171
2. Unidades de medida de superfície ..... 173
3. Conversões entre as unidades de medida de superfície ..... 175
4. Comparando áreas ..... 178
5. Área do retângulo e do quadrado ..... 179
6. Área de polígonos ..... 182
7. Mais cálculos de áreas ..... 185
8. Relações entre as unidades de medida, de volume e de capacidade ..... 189

## Unidade 9

### Equações

1. Letras e padrões ..... 197
2. Equações ..... 198
3. Algumas operações com letras ..... 203
4. Balanças em equilíbrio e equações ..... 206
5. Mais problemas e equações ..... 209

## Unidade 10

### Inequações

1. Desigualdades – símbolos e propriedades ..... 219
2. Inequações ..... 222
3. Inequações e problemas ..... 224
4. Exercitando a resolução de inequações ..... 226

## Unidade 11

### Ângulos e triângulos

1. Recordando ..... 231
2. Congruência de segmentos e de ângulos ..... 234
3. Ângulos suplementares ..... 236
4. Ângulos complementares ..... 237
5. Ângulos opostos pelo vértice ..... 239
6. Ângulos, problemas e equações ..... 241
7. Grau e subdivisões do grau ..... 243
8. Bissetriz de um ângulo ..... 245
9. Existência de triângulos ..... 248
10. Classificação e construção de triângulos ..... 250
11. Simetria no triângulo isósceles ..... 252
12. Simetria no triângulo equilátero ..... 253
13. Ângulos internos dos triângulos ..... 255
14. Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero ..... 257

### Sugestões de leitura e

de sites para o aluno ..... 263

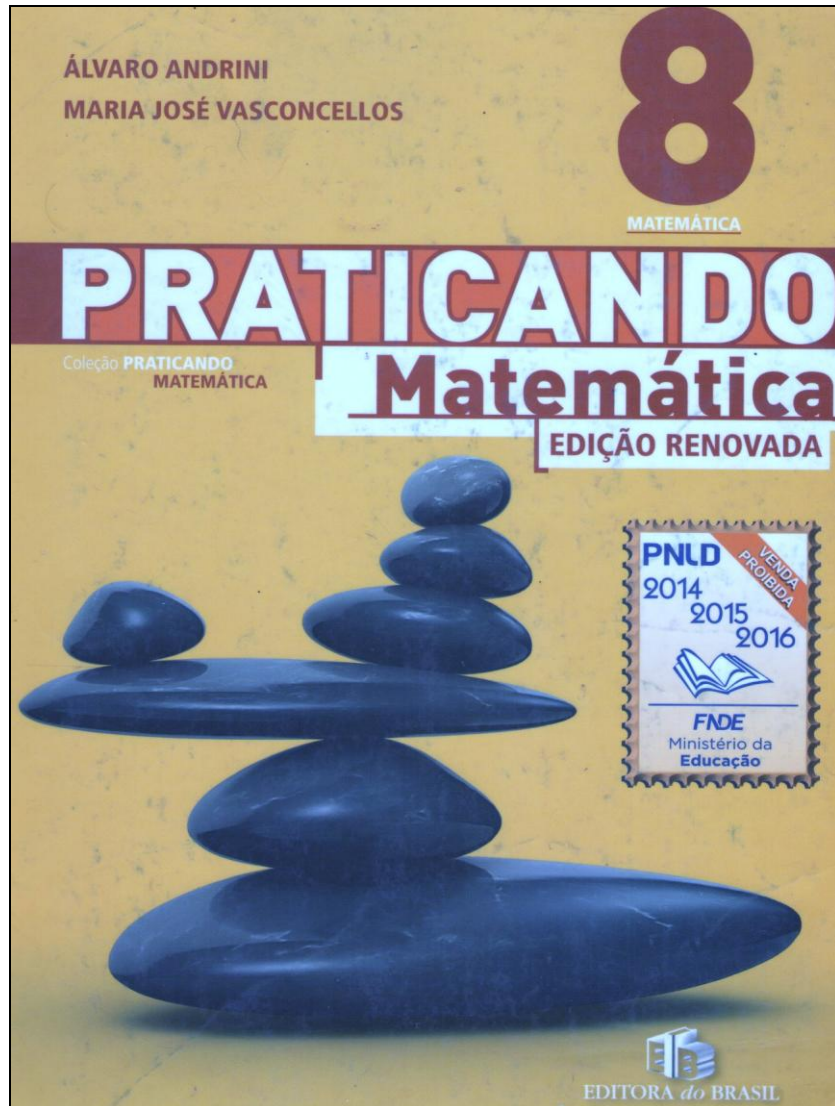
Referências bibliográficas ..... 266

### Moldes e malha para as

atividades ..... 267

Respostas dos exercícios ..... 278

**8º Ano do Ensino Fundamental:**



# SUMÁRIO



## Unidade 1

### Conjuntos numéricos

1. Números, uma criação humana ..... 7
2. Números naturais ..... 8
3. Números inteiros ..... 11
4. Números racionais ..... 14
5. Representação dos números racionais ..... 16
6. Números irracionais ..... 19
7. Pi – um número irracional ..... 22
8. Números reais ..... 24
9. Os números reais e as operações ..... 26

## Unidade 2

### Potenciação e notação científica

1. Expoentes inteiros ..... 35
2. Propriedades das potências ..... 39
3. Potências de base 10 ..... 43
4. Multiplicação por potências de base 10 ..... 44
5. Notação científica ..... 46

## Unidade 3

### Radiciação

1. Aprendendo mais sobre raízes ..... 53
2. Raízes exatas ..... 58
3. Raízes não exatas ..... 61

## Unidade 4

### Cálculo algébrico

1. Revisando equações ..... 71
2. Variáveis ..... 74
3. Expressões algébricas ..... 78
4. Monômios e polinômios ..... 81
5. Operações e expressões algébricas ..... 83
6. Multiplicação de polinômios ..... 91

## Unidade 5

### Produtos notáveis

1. Quadrado da soma de dois termos ..... 101
2. Quadrado da diferença de dois termos ..... 104
3. Produto da soma pela diferença de dois termos ..... 106

## Unidade 6

### Fatoração

1. Fator comum ..... 112
2. Agrupamento ..... 114
3. Trinômio quadrado perfeito ..... 115
4. Diferença de quadrados ..... 117

## Unidade 7

### Frações algébricas

1. Letras no denominador ..... 121
2. Resolvendo problemas ..... 124
3. Simplificando frações algébricas ..... 130
4. Adição e subtração com frações algébricas ..... 133
5. Novos problemas e equações ..... 135

# SUMÁRIO

## Unidade 8

### Sistemas de equações

1. Descobrimos o método da substituição ..... 141
2. O método da adição ..... 149
3. Dízimas periódicas na forma de fração ..... 156

## Unidade 9

### Retas e ângulos

1. Posição relativa entre retas ..... 163
2. Ponto médio de um segmento ..... 164
3. Construção de retas perpendiculares e de retas paralelas ..... 164
4. Distância entre dois pontos ..... 166
5. Distância de ponto à reta ..... 166
6. Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal ..... 168

## Unidade 10

### Triângulos

1. Elementos, perímetro e classificação ..... 181
2. Soma dos ângulos internos de um triângulo ..... 183
3. Propriedade do ângulo externo ..... 184

## Unidade 11

### Triângulos: congruência e pontos notáveis

1. Congruência de figuras planas ..... 191
2. Casos de congruência de triângulos ..... 193
3. Medianas, bissetrizes e alturas num triângulo ..... 199
4. Propriedades dos triângulos isósceles ..... 203
5. Maior lado e maior ângulo de um triângulo ..... 206

## Unidade 12

### Quadriláteros e outros polígonos

1. Nomenclatura – polígonos convexos ..... 211
2. Elementos dos quadriláteros ..... 211
3. Classificação dos quadriláteros ..... 212
4. Propriedades dos paralelogramos ..... 214
5. Propriedades dos trapézios isósceles ..... 217
6. Ângulos de um polígono ..... 218

## Unidade 13

### Circunferência e círculo

1. Caracterização ..... 231
2. Posição relativa de duas circunferências ..... 231
3. Posição relativa entre reta e circunferência ..... 231
4. Propriedade da mediatriz de uma corda ..... 231
5. Arco e ângulo central ..... 241
6. Comprimento de um arco ..... 241
7. Construindo polígonos regulares ..... 241
8. Ângulo inscrito ..... 241

## Unidade 14

### Possibilidades e estatística

1. Contando possibilidades ..... 251
2. Os gráficos estatísticos ..... 251

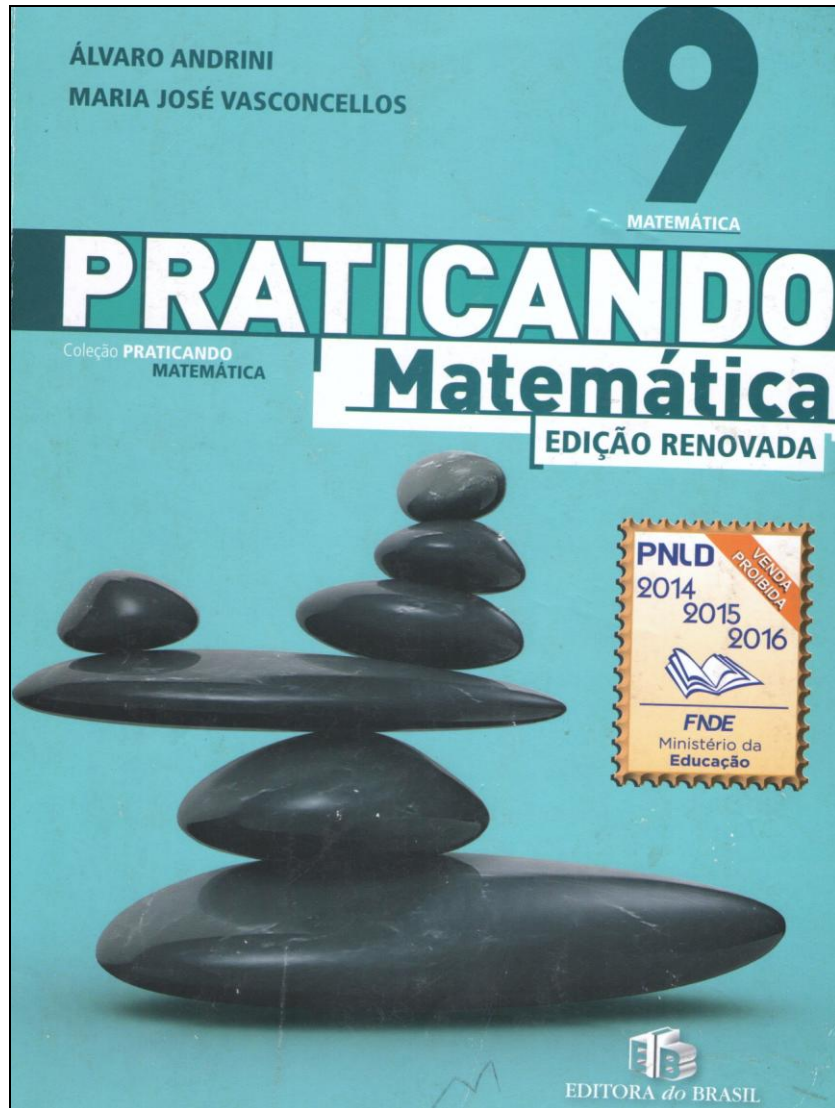
### Sugestões de leitura e de sites para o aluno ..... 271

### Referências bibliográficas ..... 280

### Moldes e malhas para as atividades ..... 281

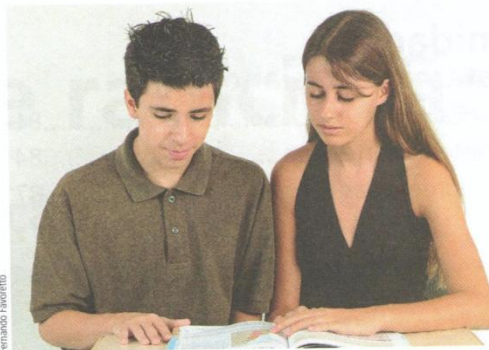
### Respostas dos exercícios ..... 285

9º Ano do Ensino Fundamental:





# SUMÁRIO



Fernando Faveretto

## Unidade 1 Potenciação e radiciação

1. Revendo a potenciação .....7
2. Propriedades das potências ..... 11
3. Revendo a radiciação ..... 15
4. Expoentes racionais ..... 18
5. Propriedades dos radicais ..... 19
6. Simplificação de radicais ..... 25
7. Adição e subtração de radicais ..... 28
8. Cálculos com radicais ..... 31
9. Racionalização ..... 33

## Unidade 2 Equações do 2º grau

1. Equações ..... 41
2. Resolvendo equações do 2º grau ..... 43
3. Forma geral de uma equação  
do 2º grau ..... 48
4. Trinômios quadrados perfeitos  
e equações do 2º grau ..... 49
5. Fórmula geral de resolução da  
equação do 2º grau ..... 54
6. Resolvendo problemas ..... 58
7. Soma e produto das raízes de  
uma equação do 2º grau ..... 62
8. Equações fracionárias que recaem em  
equação do 2º grau ..... 68
9. Equações biquadradas ..... 71
10. Equações irracionais ..... 72

# SUMÁRIO

## Unidade 3

### Sistema cartesiano

1. Localização .....81
2. Sistema cartesiano .....84
3. Coordenadas geográficas.....87

## Unidade 4

### Funções

1. Conceito de função .....95
2. As funções e suas aplicações ..... 102
3. Da tabela para a lei de formação da função..... 108
4. Interpretando gráficos ..... 110
5. Construindo gráficos de funções ..... 115

## Unidade 5

### Noções de probabilidade

1. Qual é a chance? ..... 133
2. As probabilidades e a estatística ..... 141
3. População e amostra..... 144

## Unidade 6

### Teorema de Tales e semelhança de triângulos

1. Razões, proporções e segmentos proporcionais..... 155
2. Teorema de Tales..... 157
3. Teorema de Tales nos triângulos ..... 162
4. Semelhança ..... 164
5. Semelhança de triângulos ..... 169
6. Aplicando a semelhança de triângulos. 173

## Unidade 7

### Relações métricas nos triângulos retângulos

1. O teorema de Pitágoras..... 181
2. Teorema de Pitágoras, quadrados e triângulos ..... 188
3. Relações métricas nos triângulos retângulos ..... 192

## Unidade 8

### Trigonometria no triângulo retângulo

1. As razões trigonométricas ..... 203
2. As razões trigonométricas e os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  ..... 212

## Unidade 9

### Círculo e cilindro

1. Área do círculo ..... 221
2. Área da superfície e volume de um cilindro ..... 229

## Unidade 10

### Porcentagem e juro

1. Revendo porcentagens, descontos e acréscimos ..... 241
2. Juro ..... 247

### Sugestões de leitura e de sites para o aluno

Referências bibliográficas ..... 261

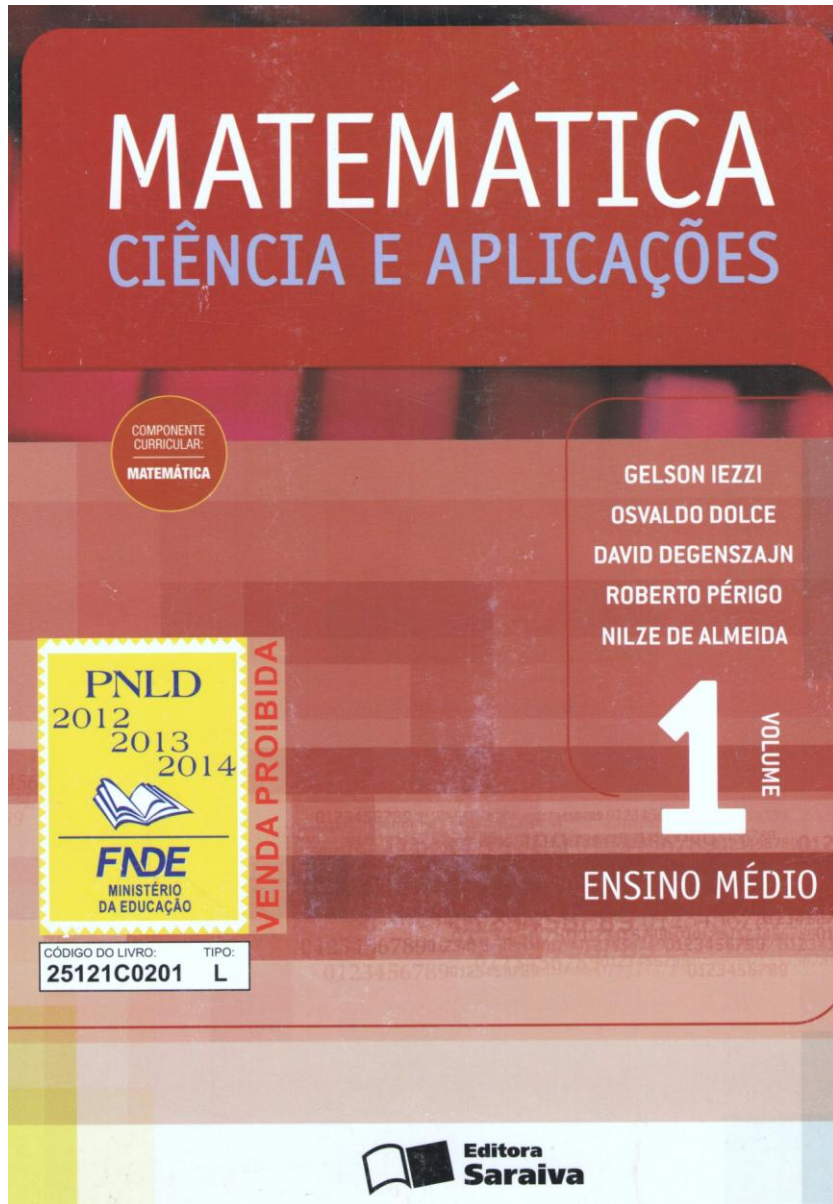
Malhas para as atividades ..... 262

Respostas dos exercícios ..... 264

## **ANEXO IV**

### **LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO**

1º Ano do Ensino Médio:



# Sumário

## 1 Teoria dos conjuntos

Introdução	9
Características gerais dos conjuntos	9
Subconjuntos – relação de inclusão	11
Propriedades da relação de inclusão	11
Intersecção e reunião	13
Propriedades da intersecção e da reunião	15
Diferença	17
apêndice: noções de Lógica	21

## 2 Conjuntos numéricos

O conjunto $\mathbb{N}$	29
O conjunto $\mathbb{Z}$	30
Números inteiros opostos	31
Módulo de um número inteiro	31
Interpretação geométrica	31
O conjunto $\mathbb{Q}$	33
Representação decimal das frações	34
Representação fracionária das dízimas periódicas	34
Representação geométrica do conjunto dos números racionais	35
Oposto, módulo e inverso de um número racional	36
O conjunto $\mathbb{I}$	37
O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais	38
Representação geométrica dos números reais	39
Intervalos reais	40
Um pouco de História – O número de ouro	42

## 3 Funções

Introdução: a noção intuitiva de função	44
A noção de função como relação entre conjuntos	46
Definição	47
Notação	48
Funções definidas por fórmulas	48
Domínio e contradomínio	51
Determinação do domínio	52
Conjunto imagem	52
Um pouco de História – O desenvolvimento do conceito de função	53
Leitura informal de gráficos	53
Noções básicas de plano cartesiano	56
Nomenclatura	57
Construção de gráficos	58
Análise de gráficos	61
Conceitos	63
O sinal da função	63
Crescimento/Decrescimento	64
Máximos/Mínimos	65
Simetrias	65

<b>4</b> Função afim	Introdução	70
	Definição	71
	Função linear	71
	Gráfico	72
	Função constante	74
	Função linear e grandezas diretamente proporcionais	75
	Razão	75
	Proporção	75
	Grandezas diretamente proporcionais	76
	Propriedade característica	78
	Coefficientes da função afim	80
	Raiz. Equação do 1º grau	80
	Crescimento e decrescimento	81
	Sinal	83
	Inequações	84
Inequação-produto. Inequação-quociente	87	
Aplicações – Funções custo, receita e lucro	89	
<b>5</b> Função quadrática	Introdução	93
	Definição	94
	Gráfico	94
	Raízes. Equação do 2º grau	95
	Quantidade de raízes	97
	Soma e produto das raízes	98
	Coordenadas do vértice da parábola	99
	Imagem	100
	Aplicações – A receita máxima	103
	Construção da parábola	104
	Sinal	107
	$\Delta > 0$	107
	$\Delta = 0$	107
	$\Delta < 0$	107
Inequações	109	
apêndice: eixo de simetria da parábola	116	
<b>6</b> Função modular	Função definida por mais de uma sentença	117
	Gráficos	119
	Módulo de um número real	121
	Introdução	121
	Definição	121
	Interpretação geométrica	122
	Propriedades	122
	Função modular	124
	Gráfico	124
	Outros gráficos	125
Equações modulares	127	
Inequações modulares	128	

**7**  
**Função**  
**exponencial**

<b>Introdução</b>	131
<b>Potência de expoente natural</b>	132
Definição	132
Propriedades	132
<b>Potência de expoente inteiro negativo</b>	133
Definição	133
Propriedades	134
<b>Aplicações – Notação científica</b>	135
<b>Potência de expoente racional</b>	135
Definição	136
Propriedades	136
<b>Potência de expoente irracional</b>	137
<b>Potência de expoente real</b>	138
<b>Função exponencial</b>	138
Definição	138
Gráfico	138
O número $e$	139
Propriedades	140
Gráficos com translação	142
<b>Aplicações – Radioatividade e meia-vida</b>	144
<b>Equação exponencial</b>	145
Introdução	145
Definição	145
<b>Inequações exponenciais</b>	147

**8**  
**Função**  
**logarítmica**

<b>Logaritmos</b>	151
Definição	151
Convenção importante	152
Consequências	153
<b>Um pouco de História – A invenção dos logaritmos</b>	155
<b>Sistemas de logaritmos</b>	156
<b>Propriedades operatórias</b>	156
Logaritmo do produto	156
Logaritmo do quociente	157
Logaritmo da potência	157
<b>Aplicações – A escala de acidez e os logaritmos</b>	160
<b>Mudança de base</b>	161
Propriedade	162
Aplicação importante	163
<b>Função logarítmica</b>	164
Introdução	164
Definição	164
Gráfico da função logarítmica	165
Função exponencial e função logarítmica	166
Propriedades do gráfico da função logarítmica	169
<b>Aplicações – Os terremotos e a escala Richter</b>	171
<b>Equações exponenciais</b>	173
<b>Equações logarítmicas</b>	174
<b>Inequações logarítmicas</b>	176
<b>Aplicações – Os sons e a audição humana</b>	178

<b>9</b> Complemento sobre funções	<b>Classificação das funções</b> .....	182
	Introdução .....	182
	Funções sobrejetoras .....	183
	Funções injetoras .....	184
	Funções bijetoras .....	185
	<b>Função inversa</b> .....	186
	Introdução .....	186
	Conceituação .....	186
	Inversas de algumas funções .....	186
	<b>Composição de funções</b> .....	189
Introdução .....	189	
Definição .....	190	
<b>10</b> Progressões	<b>Sequências numéricas</b> .....	194
	Introdução .....	194
	Formação dos elementos de uma sequência .....	195
	<b>Progressões aritméticas</b> .....	196
	Introdução .....	196
	Definição .....	197
	Classificação .....	197
	Termo geral da P.A. ....	198
	Soma dos $n$ primeiros termos de uma P.A. ....	201
	Progressão aritmética e função afim .....	204
	<b>Progressões geométricas</b> .....	205
	Introdução .....	205
	Definição .....	205
	Classificação .....	206
	Termo geral da P.G. ....	206
	Soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G. ....	210
	Soma dos termos de uma P.G. infinita .....	212
Produto dos $n$ primeiros termos de uma P.G. ....	216	
Progressão geométrica e função exponencial .....	217	
<b>Um pouco de História – A sequência de Fibonacci</b> .....	218	
<b>11</b> Matemática comercial e financeira	<b>Porcentagem</b> .....	221
	<b>Aumentos e descontos</b> .....	224
	<b>Variação percentual</b> .....	225
	<b>Juros</b> .....	228
	<b>Juros simples</b> .....	228
	<b>Juros compostos</b> .....	231
	Introdução .....	231
	Juros compostos com taxa de juros variáveis .....	233
	<b>Aplicações – Compras à vista ou a prazo (I)</b> .....	235
	<b>Juros e funções</b> .....	236
	Juros simples .....	236
Juros compostos .....	236	
<b>Aplicações – Compras à vista ou a prazo (II)</b> .....	237	



<b>12</b> Semelhança e triângulos retângulos	Semelhança entre figuras .....	241
	<b>Semelhança de triângulos</b> .....	244
	Introdução .....	244
	Razão de semelhança .....	245
	<b>CrITÉRIOS de semelhança</b> .....	248
	AA (ângulo – ângulo) .....	248
	LAL (lado – ângulo – lado) .....	249
	LLL (lado – lado – lado) .....	249
	<b>Consequências da semelhança de triângulo</b> .....	252
	Primeira consequência .....	252
	Segunda consequência .....	252
	Terceira consequência .....	253
	<b>O triângulo retângulo</b> .....	254
	Semelhanças no triângulo retângulo .....	254
	Relações métricas .....	254
Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras .....	256	
Um pouco de História – Pitágoras de Samos .....	257	
<b>13</b> Trigonometria no triângulo retângulo	<b>Um pouco de História – A Trigonometria</b> .....	262
	<b>Razões trigonométricas</b> .....	263
	Tangente de um ângulo agudo .....	263
	Seno e cosseno de um ângulo agudo .....	265
	<b>Relações entre razões trigonométricas</b> .....	271
Ângulos notáveis .....	274	
<b>Respostas</b> .....	280	
<b>Tabela trigonométrica</b> .....	301	
<b>Índice remissivo</b> .....	302	

**2º Ano do Ensino Médio:**



# Sumário

	<b>Tabela trigonométrica</b>	8
<b>1</b> <b>A</b> <b>circunferência</b> <b>trigonométrica</b>	<b>Arcos e ângulos</b>	9
	Medida e comprimento de arco	10
	Unidades de medidas de arcos e ângulos	10
	O comprimento de um arco	11
	<b>Circunferência trigonométrica</b>	14
	Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica	15
	Simetrias	17
	<b>Aplicações – Medindo distâncias inacessíveis – Matemática e Astronomia</b>	19
<b>2</b> <b>Razões</b> <b>trigonométricas</b> <b>na</b> <b>circunferência</b>	<b>Seno</b>	21
	Valores notáveis	22
	<b>Cosseno</b>	25
	Valores notáveis	26
	<b>Relações entre seno e cosseno</b>	29
	Relação fundamental da Trigonometria	29
	Arcos complementares	30
	<b>Tangente</b>	31
	Valores notáveis	32
	<b>Relação entre tangente, seno e cosseno</b>	33
<b>Outras razões trigonométricas</b>	35	
	Cotangente	35
	Cossecante	36
	Secante	37
	Relações decorrentes	37
	Identities	38
<b>3</b> <b>Triângulos</b> <b>quaisquer</b>	<b>Lei dos senos</b>	42
	Introdução	42
	Lei dos senos	42
	<b>Lei dos cossenos</b>	46
	Introdução	46
	Teorema	46
<b>4</b> <b>Funções</b> <b>trigonométricas</b>	<b>As demais voltas no ciclo trigonométrico</b>	51
	<b>Funções periódicas</b>	54
	<b>Função seno</b>	57
	<b>Aplicações – A trigonometria, a rodagigante e os fenômenos periódicos</b>	61
	<b>Função cosseno</b>	64
	<b>Função tangente</b>	68
<b>5</b> <b>Transformações</b>	<b>Introdução</b>	71
	<b>Fórmulas da adição e subtração</b>	71
	Cosseno da soma	72
	Cosseno da diferença	73
	Seno da soma	73
	Seno da diferença	74
	Tangente da soma	74
	Tangente da diferença	74
<b>Razões trigonométricas de 2a</b>	76	
	Seno	76
	Cosseno	76
	Tangente	76

## 6 Matrizes

Introdução	79	Subtração de matrizes	87
Um pouco de História – Como surgiram as matrizes	80	Definição	87
Definição	80	Multiplicação de um número real por uma matriz	89
Representação de uma matriz	81	Definição	89
Matrizes especiais	81	Propriedades	89
Matriz transposta	82	Multiplicação de matrizes	90
Igualdade de matrizes	84	Introdução	90
Elementos correspondentes	84	Definição	91
Adição de matrizes	85	Matriz identidade	94
Introdução	85	Definição	94
Definição	86	Aplicações – Computação gráfica e matrizes	98
Propriedades	86	Matriz inversa	101
Matriz oposta	87	Definição	101

## 7 Sistemas lineares

Equação linear	104	Resolução de um sistema na forma escalonada	112
Introdução	104	Classificação	114
Definição	104	Escalonamento	115
Solução de uma equação linear	105	Introdução	115
Sistemas lineares $2 \times 2$	106	Sistemas equivalentes	116
Interpretação geométrica e classificação	107	Um pouco de História – A origem dos determinantes	121
Sistema linear $m \times n$	109	Determinantes	121
Definição	109	Regras práticas	121
Um pouco de História	110	Regra de Cramer	124
Solução de um sistema	110	Caso $2 \times 2$	124
Matrizes associadas a um sistema	110	Caso $3 \times 3$	126
Representação matricial de um sistema	111	Discussão de um sistema	127
Sistemas escalonados	112	Sistemas homogêneos	130

## 8 Áreas de figuras planas

Introdução	133	Área do trapézio	145
Área do retângulo	134	Área de um polígono regular	147
Área do quadrado	135	Área do círculo e suas partes	149
Área do paralelogramo	137	Área do círculo	149
Área do triângulo	139	Área do setor circular	151
Expressões da área de um triângulo	139	Área da coroa circular	152
Casos particulares	142	Área do segmento circular	153
Área do losango	143	Razão entre áreas de figuras planas semelhantes	154

<b>9</b> <b>Geometria espacial de posição</b>	<b>Um pouco de História</b> .....	158	<b>Algumas propriedades</b> .....	167
	<b>Introdução</b> .....	159	<b>Ângulos de duas retas</b> .....	170
	<b>Noções primitivas (ou iniciais)</b> .....	161	<b>Retas que formam ângulo reto</b> .....	171
	<b>Proposições primitivas (ou iniciais)</b> .....	161	<b>Reta e plano perpendiculares</b> .....	172
	Postulados da existência .....	161	<b>Planos perpendiculares</b> .....	173
	Postulados da determinação .....	162	<b>Projeções ortogonais</b> .....	174
	Postulado da inclusão .....	162	<b>Distâncias</b> .....	175
	Postulado das paralelas (ou postulado de Euclides) .....	162	<b>Teoremas fundamentais</b> .....	178
	<b>Determinação de planos</b> .....	163	Teorema 1 .....	178
	<b>Posições relativas de dois planos</b> .....	164	Teorema 2 .....	178
	Planos secantes .....	164	Teorema 3 .....	179
	Planos paralelos .....	164	Teorema 4 .....	180
	<b>Posições relativas de uma reta e um plano</b> .....	165	Teorema 5 .....	181
	<b>Posições relativas de duas retas</b> .....	166	<b>Introdução ao estudo dos sólidos geométricos</b> .....	182
		<b>Formas reais e formas geométricas</b> .....	182	
		Sólidos geométricos .....	183	
<b>10</b> <b>Prisma</b>	<b>Introdução</b> .....	184	<b>Princípio de Cavalieri</b> .....	192
	<b>Conceito</b> .....	184	<b>Áreas e volume</b> .....	193
	<b>Elementos e classificação</b> .....	185	Área da base ( $A_b$ ) .....	193
	<b>Paralelepípedo</b> .....	186	Área lateral ( $A_l$ ) .....	194
	Paralelepípedo retângulo .....	186	Área total ( $A_t$ ) .....	194
	Cubo .....	189	Volume ( $V$ ) .....	194
<b>11</b> <b>Pirâmide</b>	<b>Introdução</b> .....	199	Altura ( $h$ ) .....	205
	<b>Conceito</b> .....	200	Volume ( $V$ ) .....	205
	<b>Elementos e classificação</b> .....	200	<b>Sólidos semelhantes</b> .....	209
	<b>Pirâmide regular</b> .....	201	Introdução .....	209
	Relação notável .....	201	Pirâmides semelhantes .....	211
	<b>Áreas e volume</b> .....	202	<b>Tronco de pirâmide</b> .....	214
	<b>Tetraedro regular</b> .....	205	Introdução .....	214
	Área total ( $A_t$ ) .....	205	Tronco de pirâmide regular .....	214
<b>12</b> <b>Cilindro</b>	<b>Introdução</b> .....	217	Área lateral ( $A_l$ ) .....	219
	<b>Conceito</b> .....	218	Área total ( $A_t$ ) .....	219
	<b>Elementos e classificação</b> .....	218	Volume ( $V$ ) .....	220
	<b>Áreas e volume do cilindro circular reto</b> .....	219	<b>Seção meridiana e cilindro equilátero</b> .....	221
	Área da base ( $A_b$ ) .....	219		
<b>13</b> <b>Cone</b>	<b>Introdução</b> .....	224	Volume ( $V$ ) .....	227
	<b>Conceito</b> .....	224	<b>Seção meridiana e cone equilátero</b> .....	229
	<b>Elementos e classificação</b> .....	225	<b>Tronco de cone</b> .....	231
	<b>Áreas e volume do cone circular reto</b> .....	225	Áreas .....	232
	Área da base ( $A_b$ ) .....	225	Volume .....	233
	Área lateral ( $A_l$ ) .....	226	Cones semelhantes .....	234
	Área total ( $A_t$ ) .....	226		





# Sumário

<b>1</b> O ponto	Um pouco de História – Introdução à Geometria Analítica	9
	Plano cartesiano	10
	Distância entre dois pontos	13
	Ponto médio de um segmento	16
	Mediana e baricentro	18
	Condição de alinhamento de três pontos	20
<b>2</b> A reta	Introdução	26
	Equação geral da reta	27
	Casos particulares	28
	Recíproca da propriedade	29
	Interseção de retas	32
	Inclinação de uma reta	34
	Coefficiente angular	35
	Equação reduzida de uma reta	37
	Equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$ com declividade conhecida	40
	Função afim e a equação reduzida da reta	41
	Paralelismo	43
	Base média de um triângulo	45
	Perpendicularidade	46
	Outros modos de escrever a equação de uma reta	50
	Forma segmentária	50
	Forma paramétrica	51
	Distância entre ponto e reta	52
Área do triângulo	56	
Inequações do 1º grau - Resolução gráfica	58	
Aplicações – Uma introdução à programação linear	62	
Ângulo entre retas	64	
apêndice: demonstração da fórmula da distância de um ponto a uma reta	67	
<b>3</b> A Circunferência	A equação reduzida da circunferência	70
	A equação geral da circunferência	73
	Completando os quadrados	74
	Analisando os coeficientes	74
	Posições relativas entre ponto e circunferência	76
	Inequações do 2º grau com duas incógnitas	78
	Posição relativa de reta e circunferência	81
	Método alternativo	83
	Tangência	86
Interseção de circunferências	89	
Posições relativas de duas circunferências	91	



## 4 As cônicas

<b>Introdução</b>	95
<b>Elipse</b>	97
O que é elipse?	97
Equação reduzida (I)	98
Equação reduzida (II)	99
<b>Aplicações – As órbitas de planetas e cometas</b>	101
Translação de sistema	102
Elipses com centro fora da origem	103
<b>Hipérbole</b>	104
O que é hipérbole?	104
Hipérbole equilátera	105
Equação reduzida (I)	105
Equação reduzida (II)	106
Hipérboles com centro fora da origem	108
Hipérboles e funções recíprocas	109
<b>Parábola</b>	110
O que é parábola?	110
Equação reduzida (I)	111
Equação reduzida (II)	111
Parábolas com vértice fora da origem	112
Parábolas e funções quadráticas	114
<b>Reconhecimento de uma cônica pela equação</b>	115
Elipses	115
Hipérboles	116
Parábolas	118
Interseções de cônicas	119

## 5 Números complexos

<b>Introdução</b>	122
<b>Um pouco de História</b>	122
<b>Conjunto dos números complexos</b>	123
Definição	123
<b>Forma algébrica de <math>z</math></b>	126
<b>Conjugado de um número complexo</b>	130
Definição	130
Interpretação geométrica do conjugado	130
<b>Quociente de dois números complexos na forma algébrica</b>	132
<b>Módulo</b>	135
Definição	135
Interpretação geométrica do módulo	135
<b>Argumento</b>	138
Definição	138
<b>Forma trigonométrica ou polar</b>	142
<b>Operações na forma trigonométrica</b>	146
Multiplicação	146
Quociente	148
Potenciação	149
Radiciação	152

## 6 Polinômios

Introdução	160
Definição	160
Coefficiente dominante	161
Função polinomial	161
Polinômio nulo	162
Definição	162
Valor numérico	163
Raiz	163
Polinômios iguais	165
Definição	165
Adição, subtração e multiplicação de polinômios	166
Divisão de polinômios	168
Definição	168
Divisões por $x - a$	172
Teorema do resto	172
Introdução	172
Dispositivo prático de Briot-Ruffini	174

## 7 Equações algébricas ou polinomiais

Introdução	178
Definição	179
Raiz	179
Conjunto solução	179
Um pouco de História - A resolução de equações	180
Teorema fundamental da Álgebra	180
Teorema da decomposição	180
Consequência do teorema da decomposição	181
Multiplicidade de uma raiz	185
Introdução	185
Definição	185
Relações de Girard (relações entre coeficientes e raízes)	187
Equação de 2º grau	187
Equação de 3º grau	188
Equação de 4º grau	189
Equação de grau $n$	189
Raízes complexas	192
Introdução	192
Teorema	192
Teorema das raízes racionais	195

<b>8</b> <b>Estatística</b>	<b>Introdução</b> .....	200
	<b>Variável</b> .....	201
	<b>Tabelas de frequência</b> .....	202
	<b>Aplicações – Os censos demográficos</b> .....	206
	<b>Representações gráficas</b> .....	207
	Gráfico de setores.....	209
	Gráfico de barras.....	211
	Histograma.....	211
	Gráfico de linhas (poligonal).....	214
	<b>Medidas de centralidade e variabilidade</b> .....	216
	Introdução.....	216
	Média aritmética.....	217
	Média aritmética ponderada.....	218
	Mediana.....	221
	Moda.....	223
	<b>Medidas de dispersão (ou variabilidade)</b> .....	224
	Introdução.....	224
	Variância.....	225
	Desvio padrão.....	226
	<b>Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados</b> .....	228
Introdução.....	228	
Cálculo do desvio padrão.....	229	
Determinação da classe modal.....	229	
Cálculo da mediana.....	229	
<b>Aplicações – O público em grandes eventos</b> .....	232	
<b>Coletânea de testes do Enem</b> .....	237	
<b>Novo Enem</b> .....	247	
<b>Respostas</b> .....	258	
<b>Índice remissivo</b> .....	272	