RICARDO JOSÉ AGUIAR SILVA

CONTEXTO E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO: Uma Abordagem Interdisciplinar

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

SETEMBRO DE 2015

RICARDO JOSÉ AGUIAR SILVA

CONTEXTO E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO: Uma Abordagem Interdisciplinar

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
SETEMBRO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **63/2015**

Silva, Ricardo José Aguiar

Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio: uma abordagem interdisciplinar / Ricardo José Aguiar Silva. – Campos dos Goytacazes, 2015.

86 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.

Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.

Área de concentração: Matemática.

Bibliografia: f. 82-83.

1. FUNÇÃO EXPONENCIAL 2. INTERDISCIPLINARIDADE 3. MATEMÁTICA (ENSINO MÉDIO) I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 512.922

RICARDO JOSÉ AGUIAR SILVA

CONTEXTO E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO: Uma Abordagem Interdisciplinar

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 18 de Setembro de 2015.

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Profª. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

A toda minha família, em especial a minha esposa Grasiane, meus pais Verônica e Sebastião e minha irmã Mayara. Pessoas enviadas por Deus e motivadores do meu trabalho.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, pelo dom da vida, por todo seu amor e pela direção a mim atribuída nessa jornada de estudo e trabalho, me ajudando a prosseguir nos momentos mais difíceis.

A minha esposa, por toda compreensão, toda paciência, todo apoio e, principalmente, por todo amor dedicado a mim, sem o qual simplesmente não teria sido possível sequer um dia de vitória durante todo o tempo dessa longa jornada.

A meus pais, pelo amor e educação que sempre me deram, os quais permitiram que eu chegasse onde estou.

A minha irmã, pela grande colaboração e apoio que me deu ao longo da realização desta dissertação.

A meu orientador Oscar, pela competência, sabedoria e profissionalismo.

A todos meus novos amigos provenientes desse mestrado, pela amizade, companheirismo e bons momentos proporcionados mesmo nos dias mais tensos durante o curso.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse concluir com sucesso essa importante etapa da minha vida.

Que a precisão da matemática não seja estanque, mas se constitua elemento facilitador para a vida que nos convida todos os dias a sermos mais que o que acreditamos ser.

Resumo

Com o objetivo de evidenciar os principais aspectos das Funções Exponenciais para, então, apontar a importância de uma nova e significativa abordagem do estudo delas em que sejam destacadas suas aplicações e interdisciplinaridades, o presente trabalho trata-se de um estudo bibliográfico realizado à luz das principais diretrizes e conceitos elaborados acerca da temática escolhida. O foco das abordagens aqui trazidas é o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do ensino médio no Brasil. Para tanto, foram utilizados, principalmente, os estudos em torno da Função Exponencial e suas variações, assim como as diretrizes apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de alguns dos últimos anos no que tange não somente ao ensino da matemática, mas ao ensino médio de maneira global. Com suas nuances de multidisciplinaridade, apontadas desde a evolução de seu conceito até a utilização atual nas mais diversas disciplinas e profissões, a Função Exponencial foi trabalhada aqui de maneira a se tornar elemento facilitador da interdisciplinaridade e da desmistificação da matemática como disciplina assustadora, sendo apontada, em seu elo de conexão, como exemplo de uma nova abordagem da matemática para o ensino médio.

Palavras-chaves: Função Exponencial, Interdisciplinaridade, Ensino Médio.

Abstract

Showing the purpose of evincing the main aspects of Exponential Functions, in order to point out the importance of a new and remarkable approach on its study, where there can be emphasized its applications and interdisciplinaries, this research is a bibliographic study held in the light of the main guidelines and concepts developed on the theme chosen. The focus of the approaches here brought to analyze is the teaching and learning process from high school students in Brazil. To do this, it was mainly used the studies around the National Curricular Parameters from recent years concerning not only the mathematical tuition but the high school education in general. With its stages of multi-disciplinarity indicated since the evolution of its definition till the current use on the most varied subjects and professions, the Exponential Function was treated here in order to become a facilitator of interdisciplinary and the demystification of the mathematics as frightening subject, being suggested in its connecting link as an example of a new mathematical approach for High School education.

Key-words:Exponential Function; Interdisciplinarity; High School.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Há milhares de anos, desde os primórdios da humanidade, a matemática vem se construindo enquanto ciência e profissão. Nascida das necessidades do dia a dia e elaborada a partir de atravessamentos das mais diversas áreas do conhecimento, ela se formulou e reformulou em conceitos, teorias e teoremas que, embora lhes sejam próprios, corroboraram para o estudo e a evolução de tantas outras pesquisas e projetos.

De fato, quando falamos de matemática, falamos em geral de uma disciplina de cunho próprio, com suas leis e peculiaridades. Todavia, da mesma maneira que sua criação permeou campos diversos de estudo, sua aplicabilidade hoje também se estende e atravessa tantas outras áreas de conhecimento. Enquanto disciplina do núcleo comum, faz parte do currículo básico de ensino e aprendizagem de qualquer escola em qualquer lugar do mundo, sendo seu estudo uma das mais importantes ferramentas da sociedade.

Entre seus conceitos de elevada importância, destaca-se o de função, e sua forma exponencial. Assim como muitos outros, o conceito de função, na matemática, foi construído e formulado por filósofos, teóricos e cientistas que não se limitavam ao estudo da matemática enquanto instrumento isolado, mas como ferramenta para solucionar desde problemas cotidianos às questões mais complexas como a astrologia ou física em geral.

Atravessando então o campo híbrido de diversas outras disciplinas, o conceito e a própria teoria de função são reconhecidamente uma ponte que conecta, ainda hoje, a matemática às tantas outras disciplinas e instrumentaliza tantas outras profissões que não se limitam exclusivamente a ela, colaborando para o que propõe os Parâmetros Curriculares Nacionais, ano 1998 (BRASIL, 1998) e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, ano 2002 (BRASIL, 2002).

Estes documentos, por sua vez, afirmam não bastar apenas a transmissão do conhecimento, mas apontam para a extrema importância de se estimular e desenvolver a inteligência por meio da formação de competências e habilidades mentais que favoreçam a resolução de problemas comuns ou específicos.

Tomando o fato de que o tema do presente trabalho foi escolhido por se tratar de um dos tópicos matemáticos com a maior gama de aplicações em problemas naturais, a proposta dessa dissertação é relevar os principais aspectos do processo de ensino de exponenciais, primando-se em apontar a importância de uma nova abordagem significativa para o estudo das funções exponenciais, com destaque para suas aplicações e interdisciplinaridades.

Nesse sentido, primeiramente nos dispusemos a contextualizar o conceito de função por meio de sua história, para, posteriormente, apresentarmos a função exponencial explanando suas características, bem como apresentando sua inversa, a função logarítmica. Essa abordagem foi baseada em estudo e pesquisa bibliográficos de importantes fontes de relevo atual na disciplina da matemática como Carl B. Boyer (BOYER; MERZBACH, 2012), Howard Eves (EVES, 2004), Elon Lages Lima (LIMA, 2012), entre outros.

A partir desses fundamentos, prosseguimos no caminho da apresentação e breve discussão a respeito das aplicações e interdisciplinaridades, relacionando as funções exponenciais às diversas áreas do conhecimento. O que o presente trabalho defende com seus fundamentos e abordagens, é que o estudo das funções exponenciais deve ser introduzido não somente através de uma sólida fundamentação teórica, mas também a partir de relações e problemas que tenham significado real para o aluno, utilizando-se das mais variadas e possíveis interações com as outras áreas do conhecimento, justificando assim o potencial interdisciplinar inerente ao tema do referido trabalho.

Nesse âmbito é que destacamos, com especial atenção, o estudo das funções exponenciais e suas aplicações na formação dos alunos do Ensino Médio. Veremos como podemos aplicar os conceitos de exponenciais e logaritmos na resolução de variados problemas de ordem natural, apontando para a interdisciplinaridade que atravessa e propondo, a partir dessa prerrogativa, ações efetivas no ensino e aprendizado escolar.

Capítulo 1

Caráter Histórico do Conceito de Função Exponencial

Para começar nossa explanação sobre os principais aspectos das funções exponenciais partimos da contextualização histórica de seu conceito. Ao longo deste capítulo, que trará em suas duas seções a história do conceito de função e sua variação exponencial, veremos momentos importantes e nomes ícones das ciências de forma geral e, porque não, da própria filosofia, que contribuíram para o crescimento e amadurecimento do conceito de função. Nomes que trouxeram, no bojo de seus estudos, avanços para a evolução da matemática e da própria humanidade.

A apresentação que se segue seguirá uma linha cronológica dos principais pensadores que contribuíram para o objetivo aqui exposto, tendendo à construção de uma linha única de raciocínio que culminou no que conhecemos hoje como função exponencial, que começa a ser apresentada categoricamente ao final da segunda seção deste capítulo e, de forma mais pormenorizada, naquele que se segue.

1.1 História da Função

Historicamente, o conceito de função está atrelado a momentos diferentes da evolução da própria humanidade. Como poderemos ver ao longo das linhas que se seguem, as experiências e necessidades dos homens construíram e reconstruíram afirmações que foram se somando, alterando e caracterizaram ao longo dos séculos o que se tem hoje compreendido como conceito de função.

De maneira resumida, na antiguidade a noção de função aparece como uma dependência de valores de forma intuitiva. Ainda na Idade da Pedra, os homens a partir de suas experiências cotidianas e, digamos mesmo, caóticas, começaram a perceber a possibilidade de se realizar analogias e relações de semelhanças entre conjuntos de objetos variados que, estabelecendo uma correspondência entre eles, geram o processo de contagem (BOYER;

MERZBACH, 2012). Óbvio que estamos aqui tratando de um período em que a linguagem era completamente arcaica e não havia nem mesmo a palavra, todavia, o conceito de função tem suas origens também nessa época por ser nela o momento em que surge o conceito do número (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

É, porém de muitos anos após que podemos destacar dois povos como precursores da dependência funcional: os gregos e os babilônios. Ambos utilizavam tabelas de funções relacionais, todavia, pela maneira peculiar com a qual os gregos expressavam seus pensamentos, a compreensão de seus escritos ainda hoje é dificultada. Talvez se possa dizer que os babilônios tenham sido mesmo os maiores compiladores de tabelas. Com elas, eles expressavam claramente a ideia de dependência de quantidades que associavam valores por meio de operações de multiplicações, divisões, potenciações (quadrados e cubos) e radiciações, demonstrando que o conceito de função já estava implicitamente surgindo. Isso aponta para o fato de que os babilônios já tinham, naquela época, a álgebra muito bem desenvolvida (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008).

A maioria desses estudos babilônicos concentravam-se no campo da Astronomia e, de fato, podemos considerar que a ideia da função matemática ligou-se, original e historicamente, com a evolução do conhecimento de correspondências físicas, com Nicolau Oresme (1323 – 1382) e Galileu Galilei (1564 – 1642) já na idade média. Mas nesse aspecto o progresso obtido pelos babilônicos através de suas tabulações e interpolação de dados astronômicos ganham profunda notabilidade, pois as funções expressas em suas tabelas serviram de base para o desenvolvimento da astronomia (BOYER; MERZBACH, 2012).

Para entendermos a evolução do conceito de função até a caracterização que ganha hoje no meio matemático, devemos nos ater ao fato de que o início de sua elaboração precede a própria invenção do cálculo. Da Antiguidade à Idade Média, os estudos das relações entre as grandezas físicas e os fenômenos naturais compuseram, de fato, a mola motriz para diversas discussões matemáticas que levaram ao que hoje se tem como conceito de função. Esse ganhou sua abrangência geral nas escolas de filosofia natural de Oxford e de Paris, onde pensadores afirmavam que a matemática era de fato um instrumento importante que servia à ciência.

Na verdade, a origem do conceito está mesmo nas contribuições de filósofos escolásticos como Nicolau Oresme e Galileu Galilei, que, em momentos diferentes e que se somam, através do estudo e tipificação dos movimentos dos corpos, estabelecem uma relação funcional entre grandezas diferentes levando a conclusão de que essa relação gerava uma progressão aritmética de segunda ordem[1]. Após eles, e já no século XVI, outros importantes nomes como François Viète, Descartes e Fermat em um primeiro momento e, posteriormente, Newton e Leibniz trouxeram avanços significativos no campo da Álgebra.

1 Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos formam, entre si, uma progressão aritmética não estacionária.

Nicolau Oresme, no século XIV, com o que propõe em sua chamada Teoria de Latitude de Formas, desenvolve o que hoje é considerada a representação gráfica de uma função: começou a se questionar sobre a possibilidade de traçar uma figura da maneira como as coisas variam e foi o descobridor da curvatura da luz através da refração atmosférica, muito embora o crédito a esse feito não tenha sido dado a ele (BOYER; MERZBACH, 2012).

Foi Nicolau Oresme, então, quem percebeu o princípio fundamental de representar uma função variável como uma curva. Foi ele, quem pela primeira vez, representou uma quantidade variável por meio de um sistema de coordenadas gráficas. Latitude e longitude, usadas por Nicolau Oresme, hoje são equivalentes à ordenada e à abscissa e, de fato, ainda que sua forma de apresentar as funções fosse primitiva, caracterizou-se como um importante passo para a evolução do conceito de função e contribuiu em muito para o renascimento da matemática e mesmo para a evolução de outras ciências (BOYER; MERZBACH, 2012).

Seguindo pela cronologia, entre Nicolau Oresme e Galileu está François Viète (1540 – 1617), também conhecido como Franciscus Vieta, um matemático francês que, com seus trabalhos relacionados à cosmologia e astronomia, desenvolveu o simbolismo algébrico contribuindo para o avanço da Álgebra e sua diferenciação em relação à Aritmética (EVES, 2004).

Galileu Galilei, seguindo esse raciocínio, traz as relações funcionais expressas por palavras e na linguagem das proporções. Utilizando-se da matemática para modelar os fenômenos da natureza e suas variáveis dependentes, acaba criando relações entre as quantidades e medidas dos fenômenos observáveis introduzindo tais medidas em representações gráficas e criando a noção de variáveis dependentes. O estudo do movimento realizado por Galileu foi, portanto o que gerou os conceitos de relação entre variáveis, assim como também o de função, muito embora este não tenha sido de fato formalizado por ele (EVES, 2004).

As bases do que se chama hoje de Geometria Analítica foram desenvolvidas por outros grandes nomes da matemática: René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Estes, utilizando das descobertas do século XVI e aplicando recursos da nova álgebra à geometria, foram quem apresentaram o método analítico para ser introduzido no trabalho das funções. A partir deles, para analisar as relações entre as variáveis conectadas com uma curva, foram utilizadas equações (BOYER; MERZBACH, 2012).

De fato, foi Descartes quem primeiro afirma essa descrição e desde então o método analítico de tratar as funções jamais deixou de ser utilizado. Com explicações detalhadas sobre geometria algébrica, ele proporcionou um avanço em relação à geometria grega, pois em seus estudos abandona o princípio de homogeneidade para focar na preservação do sentido geométrico. Todavia, a análise cartesiana era centrada basicamente nas curvas, e estas eram vistas apenas como uma materialização da relação x e y e não necessariamente como um gráfico de função y = f(x) (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003).

Ao longo do século XVII, muitos outros teóricos matemáticos trouxeram contribuições à análise cartesiana e descobriram como desenvolver funções em séries infinitas, possibilitando a representação analítica de todas as relações funcionais conhecidas na época. Uma descoberta, de fato, importantíssima para o avanço do conceito funcional e para toda história da matemática, porventura, das ciências em geral.

Fermat também contribuiu muito para a criação da Geometria Analítica ao afirmar que, sempre que numa equação final encontrarem-se duas quantidades incógnitas, se terá um lugar geométrico que pode ser uma reta ou uma curva. O desenvolvimento da Geometria Analítica foi um feito importante e que possibilitou também a criação do Cálculo, em tese, de mérito de Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhem Leibniz (1646 – 1716). Ambos, em seus estudos, trouxeram também contribuições sobre os estudos das funções, tanto que a origem da noção de função confunde-se com os primórdios do cálculo infinitesimal (BOYER; MERZBACH, 2012).

Newton foi quem introduziu o termo "variável independente", e mostrou que uma função poderia ser descrita como uma série de potência. Com seu método de fluxos, em que uma curva é gerada pelo movimento contínuo de um ponto, possibilitou que a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passassem a serem quantidades variáveis. Newton, então se aproxima do sentido atual de funções com a utilização de termos como *"relatia quantias"* para designar variáveis dependentes e *"genita"* para designar quantidade obtida a partir de outras por intermédio de operações aritméticas (EVES, 2004).

Leibniz também introduziu os termos constantes, variável e parâmetro, e foi ele o primeiro a, efetivamente, usar o termo função para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto e uma curva, termo que denotava quase o mesmo sentido utilizado nos tempos atuais. Leibniz, ao lado de Newton, tem como maior contribuição, todavia, o cálculo diferencial e integral, aos quais também contribui, posteriormente, Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Johan Bernoulli (1667 – 1748) (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003).

Muito embora todos os nomes citados até aqui tenham trazido importantes e significativas contribuições para o conceito de função e para a história da evolução da própria matemática enquanto ciência, podemos nos atrever a dizer que nenhum outro matemático contribuiu tanto para essa evolução quanto Leonhard Euler (1707 – 1793).

Nessa altura da história da matemática, a noção de função já havia deixado as representações geométricas e mecânicas típicas da idade média, para serem representadas por expressões analíticas, característica principal da fase moderna. Foi Leonhard Euler quem fez a distinção entre função algébrica e transcendente, e apresentou pela primeira vez a notação f(x) usada para uma função de x. Foi também ele o primeiro a tratar com logaritmos usando a forma exponencial e a trazer as notações cós, tang, cot, sec e cossec, de maneira próxima à que hoje é utilizada (CORREIA, 1999).

De fato, o conceito de função não se originou com Euler, mas, sem dúvidas, ele foi o responsável por tratar o cálculo como uma teoria formal de funções. Correia (1999) afirma, por sua vez, que o conceito de função teve sua reformulação influenciada principalmente pelo chamado problema da corda vibrante, ainda no século XVIII. Esse problema foi descrito por esse autor da seguinte maneira:

> Uma corda elástica é presa em dois pontos A e B a uma distância l um do outro. Considera-se o referencial cartesiano em que A é a origem, AB é o eixo Ox e a linha perpendicular a AB por A é o eixo Oy. A corda assume a sua posição de equilíbrio ao longo do eixo Ox. Se desloca a corda de sua posição inicial, ela inicia um movimento vibratório, em virtude das tensões que se exercem nos seus pontos. Considera-se que esse movimento consiste de pequenas oscilações, ou seja, que os pontos da corda sofrem pequenos desvios de sua posição inicial. Podemos, portanto, admitir que durante o movimento, cada ponto P da corda permanece na mesma reta vertical, perpendicular ao eixo Ox, isto é, tem abscissa x constante (resumidamente, podemos dizer que as oscilações são transversais). Também podemos supor que a força de tensão é idêntica em cada ponto da corda. Pretende-se encontrar uma equação que represente o movimento ondulatório da corda, sendo o deslocamento y de cada ponto uma função da abscissa x e do tempo t; de seguida, resolver a equação de modo a encontrar explicitamente uma expressão para y (CORREIA, 1999, p. 45).

A questão era que a ideia de que uma função poderia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências era restrita na resolução de outros problemas de matemática aplicada. O problema da corda vibrante gerou uma série de discussões entre importantes nomes da época, como Euler, D'Alembert (1717 – 1783), Daniel Bernoulli (1700 - 1782), Lagrange (1736 – 1813) e Joseph Fourier (1768 – 1830), por exemplo. O fato de não haver formalização do conceito e, tão pouco, um consenso a respeito, fez com que estes e outros matemáticos saíssem em busca de modelos explicativos nas mais diversas vertentes e abordagens da ciência. Em verdade, era necessária uma formalização que pudesse sustentar uma fundamentação teórica e prática coerente e resistente, já que no século anterior elas eram impregnadas de muita intuição (CORREIA, 1999).

Dessa maneira, a ideia de função (assim como de outros conceitos), precisou ser definida. Benhard Bolzano (1781 – 1848) foi o pioneiro nessa formalização e após o seu trabalho, outros matemáticos como August Louis Cauchy (1789 – 1857), Georg Cantor (1845 – 1918) e Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805 – 1859), também contribuíram (BOYER; MERZBACH, 2012).

Especialmente os trabalhos de Dirichlet acabaram por influenciar dois outros importantes nomes da matemática, os alemães Richard Dedekind (1831 – 1916) e Riemann (1826 – 1866), que apresentaram o conceito de função sob a seguinte caracterização: Uma aplicação φ de um sistema S é uma lei, que associa a cada elemento s de S uma certa coisa, que é chamada imagem s e que escrevemos $\varphi(s)$ onde o domínio e o contradomínio podem ser qualquer conjunto, não somente de números, mas de matrizes, vetores e mesmo de funções (BOYER; MERZBACH, 2012).

Sinteticamente, Riemann trabalhou com representações de funções de séries de Fourier. Fazendo a expansão do conceito de integral estabelecido por Cauchy, faz surgir um outro conceito que pudesse ser aplicado também em funções descontínuas, originando o conceito de integral de Riemann. Entretanto, ainda assim, para se chegar ao conceito de função que temos hoje, outras teorias, como a Teoria de Conjunto de Georg Cantor e, outros conceitos como o de variável dependente, variável independente, continuidade, domínio e contradomínio, funções analíticas e tantos outros, também tiveram que ser desenvolvidos (BOYER; MERZBACH, 2012).

Segundo Roque (2012), a definição formal de função, atualmente oferecida na escola, segue o padrão bourbakista, sendo $Bourbaki$ um pseudônimo adotado por uma coligação de matemáticos franceses dos anos 1930 cujo objetivo era elaborar livros contemporâneos sobre todos os ramos da matemática. A definição de função proposta por esse grupo foi:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma relação funcional se, para todo x pertencente a E, existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x. Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E, o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x ; y será dito o valor da função no elemento x (ROQUE, 2012, p. 474).

Ainda segundo Roque (2012), podemos conceber funções de outras formas, ao longo da história, sejam por exemplos físicos, curvas ou expressões analíticas. Mostrando assim que, isoladamente de seu contexto histórico, durante nosso aprendizado de matemática, a definição de função e as funções que conhecemos não convergem, o que somente favorece à deficiência do ensino.

Todavia, de maneira geral, a evolução apresentada até aqui nos permitiu chegar ao que hoje é conhecido como função. Em tese, inúmeras são as formas de se conceituar, mas em essência, o que não se perde é que função é uma regra que indica como associar cada elemento de um conjunto, chamado domínio, a um único elemento de outro conjunto, chamado contradomínio.

1.2 Uma breve explanação sobre as origens das funções exponenciais

Como se pode observar pelo trajeto histórico apresentado até aqui, principalmente entre a antiguidade e a idade média, a matemática teve sua evolução mesclada à evolução de outras ciências. Em verdade, também nos séculos XVI e XVII, já na idade moderna, houve uma grande expansão do conhecimento científico e tecnológico de diversas áreas como geografia, cartografia, astronomia e física, que muito contribuiu para que conceitos e teorias matemáticas surgissem e fossem então estabelecidos.

Um desses conceitos, e aqui em evidência, foi o conceito de função, e em especial o de função exponencial. É valido reforçar que para este conceito chegar à definição que hoje é utilizada e difundida, passou por inúmeros processos de testagens, formulações e reformulações estabelecidos por diversos e importantes nomes da matemática, como já apresentados nesse trabalho. Vimos que foi no estudo da relação entre quantidades variáveis, ainda no século XVII, que o conceito de função teve sua origem e que apesar disso gradativamente saiu desse âmbito do cálculo para habitar o âmbito da Teoria dos Conjuntos, já no século XX.

Atualmente, entende-se por função toda relação de dependência, em que uma incógnita depende do valor da outra. A função denominada como exponencial possui essa relação de dependência e sua principal característica é que a parte variável representada por x se encontra no expoente: $f(x) = a^x$, daí sua denominação exponencial, sendo importante também ressaltar que a base a é um valor real constante, isto é, um número real.

É verdade, portanto que toda evolução citada até aqui mostrou-nos o caminho trilhado pela matemática a se chegar ao que hoje conhecemos de função. Todavia, é sabido que ao conceito de função exponencial está atrelado intimamente o conceito de logaritmo, já que esse é sua representação inversa. A questão que aqui falta dizer então é que, cronologicamente, a ideia de logaritmo antecede ao próprio conceito de função, sendo-nos, portanto, também importante apresentar sua origem para melhor contextualizar a própria origem da função exponencial, propriamente dita.

Sabemos que o povo babilônico, juntamente com os gregos, destacou-se por sua excelsa sabedoria nas ciências exatas em tempos tão primitivos. Em verdade, diante dos mínimos recursos que tinham fizeram grandes e importantíssimas descobertas que influenciaram a construção de inúmeros trabalhos em diversas áreas de conhecimentos nos séculos que se seguiram. Uma das grandes constatações de suas descobertas que aqui citamos como colaborativas a posterior conceituação da função exponencial foi a utilização de um sistema sexagesimal, cuja origem é incerta.

Esse sistema pode ser encontrado exposto em algumas tabelas de argila babilônica em que eles registravam suas escalas. Em muitas dessas tabelas pode-se ver a aparição de potências sucessivas de um dado número e que, segundo Boyer e Merzbach (2012), em muito se assemelham às tabelas atuais de logaritmos. Ainda segundo Boyer e Merzbach (2012), foram encontradas tabelas exponenciais em que se pode observar as dez primeiras potências para diferentes bases.

É verdade que pode-se dizer que existiam algumas lacunas entre valores nas tabelas exponenciais babilônicas, o que era resolvido por eles através do chamado método de interpolação linear[2], por meio do qual interpolavam partes proporcionais para conseguir obter valores intermediários aproximados. Naturalmente que a denominação dada aos seus cálculos só ocorreu séculos depois, embora isso não diminua a importância da existência deles para a evolução da matemática.

O conceito de função exponencial, que é dependente também do conceito de potência, está intimamente ligado, portanto, ao conceito de logaritmo. Nesse quesito pode-se afirmar que foi apenas no século XVI e XVII, a partir dos trabalhos de John Napier (1550 – 1617), que o nome logaritmo começou a fazer parte do universo dos estudiosos e cientistas. À título de curiosidade, consta que um dos primeiros matemáticos a utilizar as construções teóricas de Napier foi Johannes Kepler (1571 – 1630) no cálculo das órbitas planetárias. De fato, estes eram contemporâneos em uma época que, como vimos, era de intensas produções científicas e mesmo culturais (BOYER; MERZBACH, 2012).

O desenvolvimento científico e tecnológico da época fazia surgir uma problemática de cunho prático relacionado às grandes quantidades de dados numéricos e os cálculos envolvendo números grandes. Dessa maneira, era necessário uma resolutiva que facilitasse tal atividade. Foi com essa motivação que Napier começou seus estudos sobre logaritmos, que, segundo consta as bibliografias a respeito, duraram cerca de 20 anos.

Naturalmente que Napier obteve inspiração em trabalhos anteriores a ele, como nas tabelas da antiguidade já citadas (babilônios e gregos) e sobretudo em Arquimedes, por volta de 287 – 212 a.c, e nos trabalhos de Stifel (1487 – 1567). Ambos, Arquimedes e Stifel trabalhavam com potências sucessivas de um dado número. Sobretudo Stifel estabeleceu uma relação entre a progressão geométrica e os expoentes dos respectivos termos. O que Napier fez foi aproveitar-se dessas e outras ideias da época para criar algo que pudesse transformar operações mais complicadas da época em operações mais simples. E para isso, acreditava bastar tabelas com valores já calculados de referência (BOYER; MERZBACH, 2012).

Dessa maneira, para montar suas tabelas ele pensou nos logaritmos como valores de uma sequência geométrica, escrevendo os expoentes de maneira a formar uma faixa contínua de valores. Todavia, Napier não tinha em mente o conceito de base de logaritmo que hoje temos, o que faz com que seus estudos sejam substancialmente diferentes dos logaritmos com os quais hoje trabalha-se habitualmente.

Segundo Boyer e Merzbach (2012) o conceito de função logarítmica está implícito

[2] Denomina-se interpolação linear o método de interpolação (método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos) que se utiliza de uma função linear p(x) (um polinômio de primeiro grau) para representar, por aproximação, uma suposta função f(x) que originalmente representaria as imagens de um intervalo descontínuo (ou degenerado) contido no domínio de f(x).

na definição de Napier assim como em todo seu trabalho sobre logaritmos, mas a falta de simetria com os modelos atuais de logaritmos não diminui em nada a importância dos estudos desse teórico para a evolução desse conceito, pois foi com as invenções de Napier, especialmente na publicação de um trabalho intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descripitio*, que o termo foi difundido e rapidamente aceito e utilizado por toda Europa e, posteriormente, em todo mundo.

Obviamente que após Napier inúmeros matemáticos se debruçaram aos estudos dos logaritmos e, com a evolução do conceito de função, das funções exponenciais. Todavia pelo caráter histórico e original de sua criação, Napier tornou-se o mais notável e importante nome no que tange às origens dos logaritmos.

Paralelo e posteriormente, o atravessamento do conceito de logaritmo na própria evolução do conceito de função fez com que se chegasse ao que hoje conhecemos como função exponencial, já citada ao longo desse trabalho e tema principal de sua abordagem.

Capítulo 2

Características e Propriedades da Função Exponencial e sua Inversa

2.1 Função Exponencial

Como visto anteriormente o conceito de função não nasceu pronto, mas foi evoluindo por meio de pesquisas e trabalhos de diferentes teóricos e ramos de conhecimento ao longo da história. Naturalmente durante esse próprio processo evolutivo observações foram sendo constatadas e leis de relação sendo estabelecidas até se chegar ao que hoje é compreendido como função.

Muitas grandezas com as quais lidamos no nosso cotidiano dependem uma da outra, isto é, a variação de uma delas tem como consequência a variação da outra. Conceitualmente, uma relação f entre dois conjuntos A e B é uma **função** se, e somente se, todo elemento de A está associado através de f a um único elemento de B.

Juntamente com as funções afins[1] (ou funções polinomiais do 1º grau) e as quadráticas[2] (ou funções polinomiais do 2º grau), as funções exponenciais são os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. Assim como as funções afins estão intimamente relacionadas aos problemas que ocorrem durante o ensino fundamental, as funções quadráticas e exponenciais aparecem com destaque nos três últimos anos do ensino básico (que compreendem o ensino médio). Têm também importância considerável na universidade, sendo amplamente utilizadas em Matemática Aplicada a atividades científicas ou profissionais.

Decidindo-se que modelo usar para um determinado problema, entre uma função afim, quadrática ou exponencial, o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. As dúvidas que possam surgir acontecem, geralmente, antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda. Para que essa escolha

1 Toda função do tipo $f(x) = ax + b$ com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
2 Toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Uma dessas propriedades, por exemplo, diz respeito a situações em que uma grandeza varia em função do tempo de tal forma que o acréscimo sofrido a partir de um determinado instante é proporcional ao valor da própria grandeza naquele instante. Este é o caso, por exemplo, dos juros compostos e do decaimento radioativo, que serão devidamente tratados na seção 3.2 desse trabalho. Deve-se, então, esclarecer que a função exponencial, representada por: $f(x) = a^x$, possui características funcionais que lhes são próprias e que devem ser observadas quando em uso.

Antes de apresentarmos uma definição formal para a Função Exponencial, bem como suas características e propriedades, faremos uma breve revisão das potências com expoente natural, que servirá de referência para as potências com expoente real, caracterizando então, o uso de uma função desse tipo.

Teorema 2.1 ***(Potências de expoente natural)***

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, a potência a^n de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a.

Consequências do Teorema 2.1

(1) Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição.

(2) Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $a^m.a^n = a^{m+n}$, pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a.

(3) Para $n = 0$, teremos $a^0 = 1$. Como a igualdade $a^0.a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, teremos $a^0.a = a$. Logo, a única definição possível é $a^0 = 1$.

(4) Para $m_1, m_2, ..., m_k$ quaisquer em $\mathbb{N}$, vale $a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\dots+m_k}$. Em particular, se $m_1 = \dots = m_k = m$, temos $(a^m)^k = a^{mk}$.

(5) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, assim, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Diante de tais consequências e estendendo o conceito de potências de expoente natural do número real $a > 0$, para admitir também expoentes inteiros, racionais e reais (cujas respectivas demonstrações se encontram no apêndice desse trabalho), entendemos que já temos o necessário para que possamos definir a função exponencial com domínio em $\mathbb{R}$.

Definição 2.1 (Função Exponencial)

Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a, uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Em símbolos:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto a^x$$

As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição anteriormente exposta, são necessárias, pois na medida em que $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x e, logo não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$, assim como também não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$ para $a < 0$ e $x = \dfrac{1}{2}$. Em outro caso, se $a = 1$ e x qualquer número real, então $a^x = 1$, o que indicaria função constante.

Dessa maneira, fixado $0 < a \neq 1$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$ deve ser definida de modo a possuir as propriedades fundamentais citadas a seguir.

Propriedades:

(1) $a^x.a^y = a^{x+y}$

(2) $a^1 = a$

(3) se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente.

(4) se $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é decrescente.

(5) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

(6) A função exponencial é injetiva.

(7) A função exponencial é contínua.

(8) A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$, é sobrejetiva.

(9) A função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa.

Considerações e(ou) demonstrações:

(1) Inicialmente, observemos que se a função $f(x) = a^x$ possui a propriedade (1) acima, implica dizer que $f(x + y) = f(x).f(y)$ (propriedade de transformar soma em produto), pois pela função temos que $f(x + y) = a^{x+y}$ e $f(x).f(y) = a^x.a^y$.

Mais ainda, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo x real, pois

$$f(x) = f\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\right) = f\left(\tfrac{x}{2}\right) \cdot f\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left[f\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Logo, diante da propriedade (1) tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}^+$, sendo que leva-se vantagem escolher $\mathbb{R}^+$ como contradomínio pois desse modo f será sobrejetiva, como veremos na propriedade (8).

(2) Se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem as propriedades (1) e (2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1) = a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n$.

(3) Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos: $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$.

Demonstração

$a^{x_1} > a^{x_2} \iff \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \iff a^{x_1 - x_2} > 1 \iff x_1 - x_2 > 0 \iff x_1 > x_2$

(4) Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos: $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 < x_2$.

Demonstração

$a^{x_1} > a^{x_2} \iff \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \iff a^{x_1 - x_2} > 1 \iff x_1 - x_2 < 0 \iff x_1 < x_2$

(5) Mais precisamente temos que:

i) se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. Para exprimir que a sequência crescente (a^x) é ilimitada superiormente (supondo $a > 1$), escrevemos

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

e dizemos que a^x tende ao infinito quando x cresce indefinidamente.

ii) se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande. Exemplificando, temos que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty}$$

(6) Temos que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$, pois ou ela é crescente $(a > 1)$ ou é decrescente $(0 < a < 1)$, logo cada domínio (valor x_n) possui sua própria imagem (valor a^{x_n}).

(7) A continuidade, ou monotonicidade da função (o que caracteriza sua injetividade $x \mapsto a^x$), implica que, dado $x \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $\mid a^x - a^{x_0} \mid$ tão pequena quanto se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Ou ainda, que o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}, simbolicamente temos $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

(8) Esta propriedade diz que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$, ou ainda, que todo número real positivo é uma potência de a. Em outras palavras, a imagem da função é igual ao seu contradomínio.

(9) Ser bijetiva significa ser injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, como visto anteriormente. E como veremos na seção 2.2, a função exponencial admite uma função inversa, chamada função logarítmica.

Assim, tomando tais propriedades da função exponencial, provamos o seguinte resultado:

Para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) \,.\, f(y)$.

2.1.1 Gráfico da Função Exponencial

A estreita ligação dos gráficos com situações do dia-a-dia do aluno e a variedade de fenômenos de outras disciplinas e da própria Matemática que podem assim ser representados, garantem especial dedicação ao estudo do comportamento gráfico das funções em geral. Assim como as propriedades nos garantem um conhecimento mais seguro da aplicabilidade da função exponencial, os gráficos são particularmente importantes, pois além do apelo visual, favorecem a observação de determinados comportamentos que, em outras representações (numéricas, algébricas e por tabelas), são difíceis de serem percebidos.

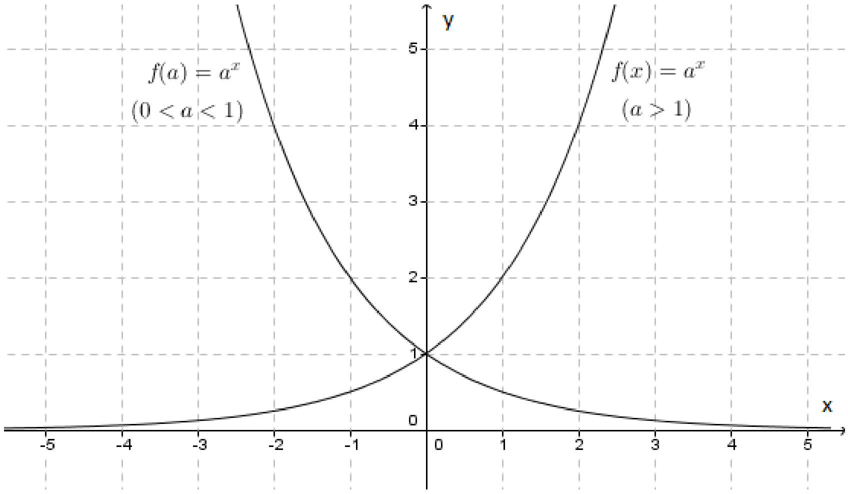
Com relação ao gráfico cartesiano da função exponencial $f(x) = a^x$, podemos dizer:
1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

3º) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente.

4º) toma os aspectos da Figura 1.

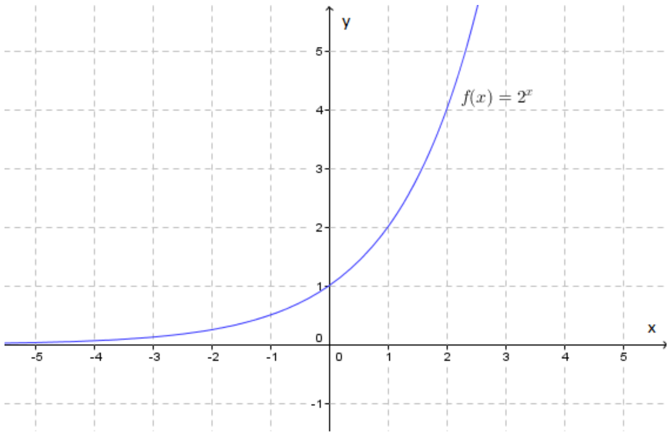
Figura 1 – Gráfico da Função Exponencial



Fonte: Dados da Pesquisa

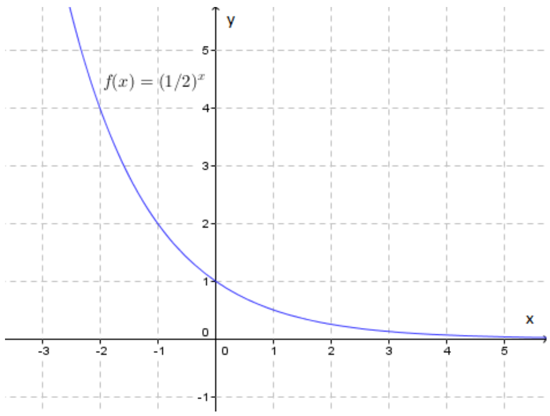
Como exemplos particulares, apresentam-se os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definidas por $f(x) = 2^x$ (2) e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (3).

Figura 2 – Função Exponencial de comportamento crescente



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 3 – Função Exponencial de comportamento decrescente



Fonte: Dados da Pesquisa

No Ensino Médio, gráficos de funções exponenciais são muitas vezes traçados de forma displicente, como se fossem arcos de parábola. Entretanto, é importante observar que o crescimento exponencial é qualitativamente bastante diferente do crescimento polinomial, o que justifica dizer que o crescimento exponencial, quando $a > 1$, supera o de qualquer polinômio. Tal diferença qualitativa é justificada pela propriedade que diz que o crescimento exponencial se caracteriza pelo fato de que a variação da variável dependente é proporcional ao seu próprio valor.

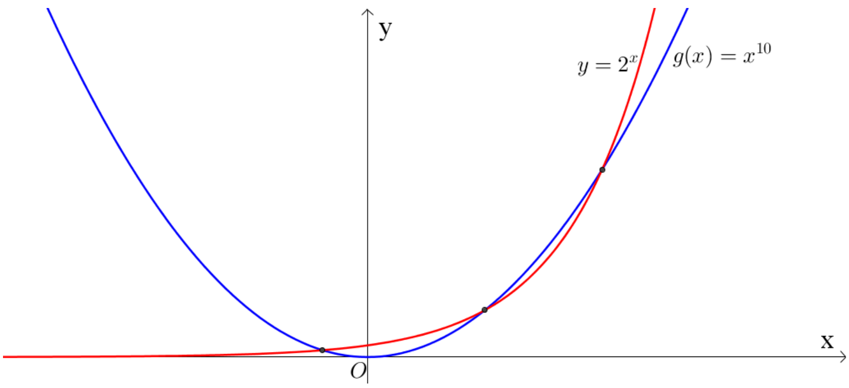
Se compararmos, por exemplo, o gráfico de $y = 2^x$ com o de $g(x) = x^{10}$ veremos que (4):

i) para $0 < x < 1,077$ temos $x^{10} < 2^x$

ii) para $1,077 < x < 58,77$ temos $x^{10} > 2^x$

iii) para todo $x > 58,77$ tem-se sempre $2^x > x^{10}$

Figura 4 – Função Exponencial vs Função Polinomial



Fonte: Dados da Pesquisa

Assim, diferentemente das representações numéricas, algébricas e outras mais, a representação gráfica nos permite visualizar as interações entre as variáveis e, percebendo de maneira mais direta as relações possíveis entre elas, prever comportamentos em intervalos maiores e chegar às conclusões possíveis de maneira mais clara e fácil. É dessa maneira que o apelo gráfico se torna ponto relevante no estudo das funções exponenciais, estejam elas aplicadas em quaisquer teorias ou para quaisquer finalidades, sendo, de maneira indubitável, um facilitador para o processo de aprendizagem.

2.1.2 O número irracional e e a função exponencial e^x

Vamos considerar a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ com $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Quando n aumenta indefinidamente, a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende muito lentamente para o número irracional $e = 2,7182818284...$, conhecido como número de Euler, número exponencial, número de Napier, número neperiano, que são algumas variantes de seu nome.

O número irracional e está intimamente relacionado com a história da função exponencial. "As origens do número e e da função exponencial e^x podem muito bem estar ligadas a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo"(MAOR, 2008, p. 13). Ainda segundo Maor (2008), o papel do e como uma base dos logaritmos naturais – tal como hoje é familiarmente conhecido – teve que esperar até o trabalho de Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII, que deu à função exponencial o papel central que ela desempenha no cálculo.

Uma função exponencial muito importante em Matemática é aquela cuja base é e. De fato, funções que envolvem potências de e (ou, funções de base neperiana) são muito utilizadas em Matemática Aplicada, pois servem para modelar situações de crescimento ou decrescimento contínuo. No entanto, muitos outros ramos do conhecimento também se beneficiam desse saber. Na Demografia[3], por exemplo, são utilizadas para calcular o tamanho de populações; em finanças, para calcular juros, montantes e prestações; em Arqueologia, para calcular a idade de fósseis e de artefatos; em Psicologia, para estudar problemas de aprendizagem; em saúde pública, para analisar a expansão de epidemias; na indústria, para estimar a confiabilidade de certos produtos, entre tantos outros exemplos.

Para mostrar que as funções exponenciais de base e, como $f(x) = be^{ax}$, surgem em questões naturais, tomemos o seguinte exemplo:

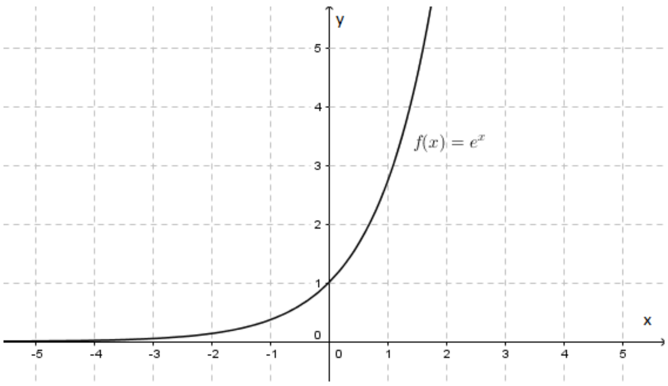
> Um investidor aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano. Se escrevermos, por simplicidade, $a = k/100$, por cada real aplicado, o investidor receberá, no final de um ano, $1 + a$ reais, de modo que o total a ser resgatado será $c_0(1 + a)$ reais. O acréscimo $c_0.a$ (juro) é uma espécie de aluguel do dinheiro. Sendo assim, raciocina o investidor: se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade do juro (aluguel) anual, logo receberei $c_0\left(1 + \frac{a}{2}\right)$ reais. Então reinvestirei esta soma por mais um semestre e, no final do ano, em vez de $c_0(1+a)$, vou receber $c_0(1+a)^2$, que é uma quantia maior. Pensando melhor, diz o investidor, posso resgatar e reinvestir meu capital mensalmente recebendo, no final de um ano, o total de $\left(1 + \frac{a}{12}\right)^{12}$. Como o número $a = k/100$ lhe é conhecido, o investidor, com auxílio da calculadora, verifica imediatamente que $\left(1 + \frac{a}{2}\right)^{12} < \left(1 + \frac{a}{12}\right)^{12}$. Animado com o resultado, nosso ambicioso investidor imagina que, resgatando e reaplicando seu dinheiro num número n cada vez maior de intervalos de tempo iguais, poderá aumentar ilimitadamente seu capital. Na verdade, fazendo o que imagina, no final do ano o investidor receberá o total acumulado igual a $c_0.lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = c_0.e^a$. Mas, infelizmente, se enganou ao acreditar que a sequência de termo geral $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ é ilimitada. Com efeito, todos esses termos são menores do que e^a. Seja como for, ao conceber esse processo imaginário de resgatar e reinvestir a cada instante seu capital, nosso investidor foi conduzido à noção de juros compostos, acumulados continuamente (LIMA, 2012, p. 225).

Levando-se em consideração toda sua evolução histórica, bem como as diversas aplicações que se utilizam de funções exponenciais de base e, não poderíamos nos abster

[3] Área da ciência geográfica que estuda a dinâmica populacional humana.

de utilizarmos um dos recursos mais atuais, ditado pela evolução tecnológica, para nos ajudar a visualizar e compreender melhor as características inerentes às funções do tipo $f(x) = e^x$. Dessa forma, através do software gratuito "GeoGebra"(utilizado em todas as construções gráficas desse trabalho), que permite ampla utilização no ato do estudo da Matemática em geral, apresentamos a figura 5, que representa simplificadamente o comportamento gráfico da função f supracitada.

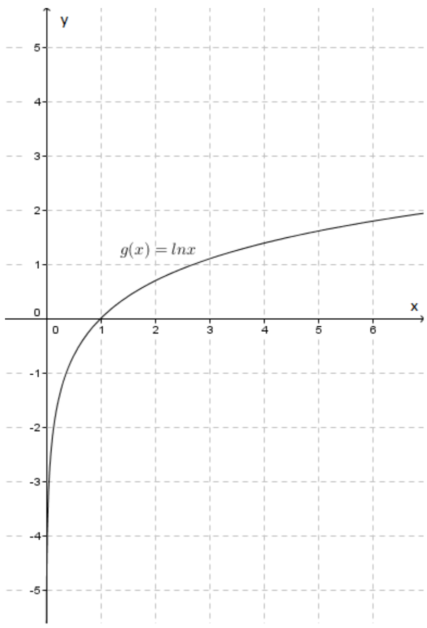
Figura 5 – Gráfico da Função Exponencial de base neperiana



Fonte: Dados da Pesquisa

Utilizando-se do mesmo recurso, apresentamos a figura 6, que representa o comportamento gráfico da função descrita por $g(x) = lnx$ (logaritmo natural de x), inversa à função $f(x) = e^x$ apresentada anteriormente. Trata-se de uma função logarítmica de base e (também representada por $g(x) = log_e x$), cujas características serão apresentadas na seção 2.3 .

Figura 6 – Gráfico da Função Logarítmica de base neperiana



Fonte: Dados da Pesquisa

2.2 Transformações importantes no gráfico da Função Exponencial

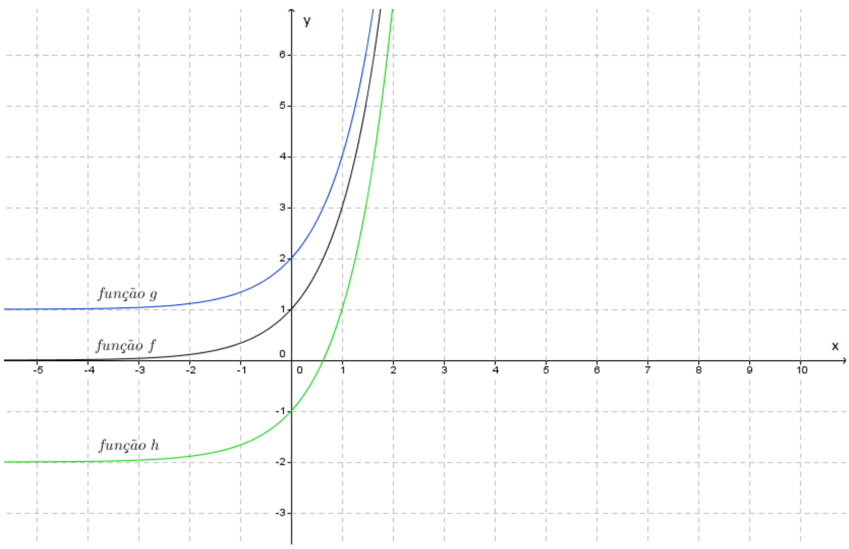
Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2008:

> É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes (BRASIL, 2008, p. 72).

Existem transformações gráficas muito úteis que podem auxiliar no estudo de diversas funções e, em especial, na função exponencial. São elas: translações verticais e horizontais, reflexões verticais e horizontais e as deformações verticais e horizontais. Com auxílio do *software* Geogebra, daremos exemplos das transformações supracitadas.

-Translação vertical: Na figura 7, temos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$. Somando-se 1 à lei de f, o gráfico desta função sofrerá uma translação vertical de uma unidade para cima (movimento vertical), o que implicará no surgimento da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) + 1$. Da mesma forma, se subtrairmos 2, o gráfico de f sofrerá uma translação vertical de duas unidades para baixo (movimento vertical), fazendo surgir a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - 2$.

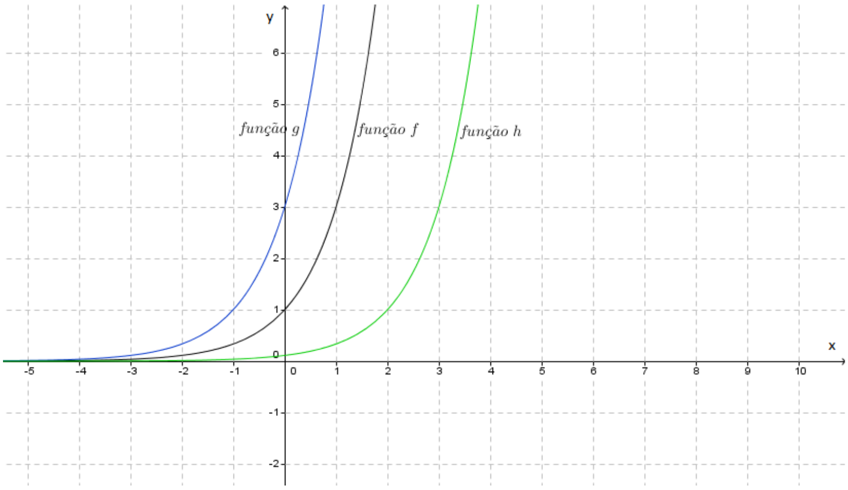
Figura 7 – Translação vertical do gráfico da Função Exponencial



Fonte: Dados da Pesquisa

-Translação horizontal: Na figura 8, temos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$. Somando-se 1 ao expoente x, o gráfico de f sofrerá uma translação horizontal de uma unidade para a esquerda (movimento horizontal), o que implicará o surgimento da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3^{x+1}$. Da mesma forma, se subtrairmos 2, o gráfico de f sofrerá uma translação horizontal de duas unidades para a direita (movimento horizontal), fazendo surgir a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3^{x-2}$.

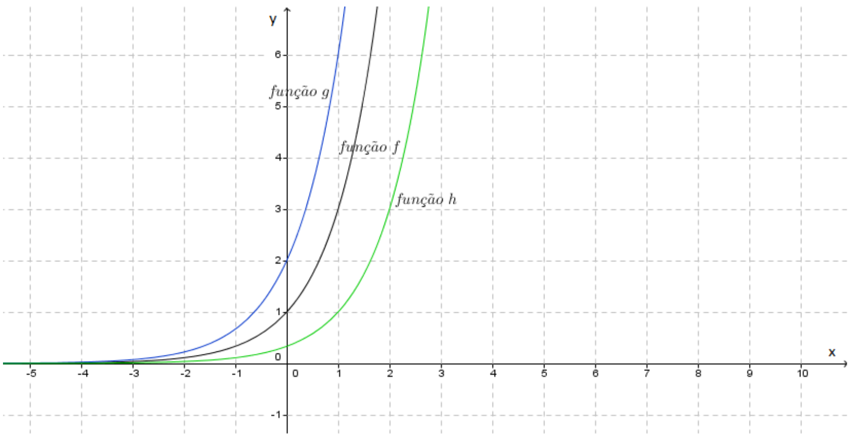
Figura 8 – Translação horizontal do gráfico da Função Exponencial



Fonte: Dados da Pesquisa

-Deformação ou dilatação Vertical: Na figura 9, temos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$. Multiplicando-se a lei de f por 2, o gráfico desta função sofrerá uma deformação vertical (esticamento vertical), dobrando os valores de f, o que implicará no surgimento da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2.f(x)$. Da mesma forma, se dividirmos a mesma lei por 3, o gráfico de f sofrerá uma deformação vertical (encolhimento vertical), dividindo os valores de f, fazendo surgir a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)/3$.

Figura 9 – Deformação Vertical do gráfico da Função Exponencial

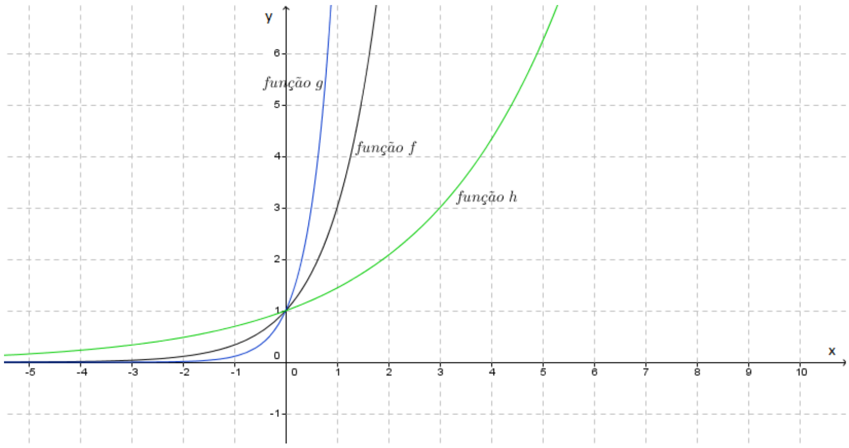


Fonte: Dados da Pesquisa

- Deformação ou dilatação horizontal: Na figura 10, temos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$. Multiplicando-se por 2 o valor do expoente x, o gráfico de f sofrerá uma deformação horizontal (esticamento horizontal) onde teremos metade do valor de x para o mesmo valor de $f(x)$, o que implicará o surgimento da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

definida por $g(x) = 3^{2x}$. Da mesma forma, se dividirmos por 3 o expoente x, o gráfico de f sofrerá uma deformação horizontal (encolhimento horizontal) onde teremos o triplo do valor de x para o mesmo valor de $f(x)$, fazendo surgir a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3^{\frac{x}{3}}$.

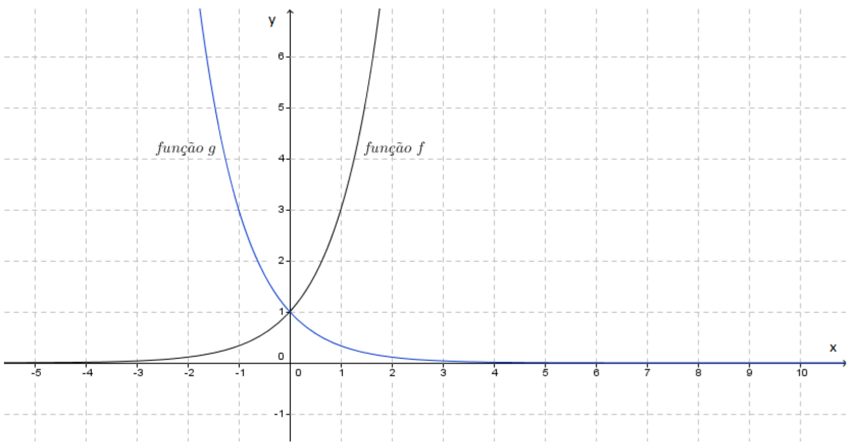
Figura 10 – Deformação horizontal do gráfico da Função Exponencial



Fonte: Dados da Pesquisa

- Reflexão em relação ao eixo Oy: Na figura 11, temos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ definida por $f(x) = 3^{x}$. Substituindo-se o valor de x por $-x$, o gráfico de f sofrerá uma reflexão em relação ao eixo Oy , o que implicará o surgimento da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3^{-x}$.

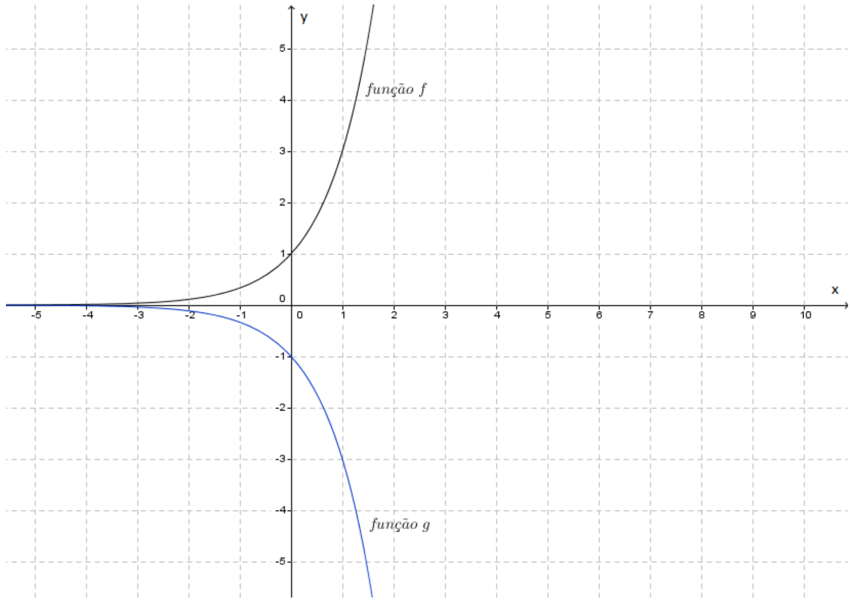
Figura 11 – Reflexão em relação ao eixo Oy



Fonte: Dados da Pesquisa

- Reflexão em relação ao eixo Ox: Na figura 12, temos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ definida por $f(x) = 3^{x}$. Multiplicando-se por -1 a função f, o gráfico de f sofrerá uma reflexão em relação ao eixo Ox , o que implicará o surgimento da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -3^{x}$.

Figura 12 – Reflexão em relação ao eixo Ox



Fonte: Dados da Pesquisa

Logo, ainda usando como exemplo a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$, podemos deduzir uma fórmula geral que deixa clara as possíveis transformações que o gráfico dessa função pode sofrer, servindo como um modelo ajustável a qualquer outra função exponencial em particular. A fórmula em questão será dada por $f(x) = a.3^{(bx+c)} + d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, onde as transformações gráficas ocorrem de tal maneira que ao variarmos o valor de a temos uma deformação vertical ou uma reflexão em relação ao eixo Ox, ao variarmos o valor de b temos uma deformação horizontal ou uma reflexão em relação ao eixo Oy, ao variarmos o valor de c temos uma translação horizontal e ao variarmos o valor d teremos uma translação vertical.

2.3 Função Logarítmica, a inversa da Função Exponencial

Devido aos excessivos procedimentos repetitivos apresentados de forma mecanizada, os logaritmos talvez correspondam a um dos tópicos mais artificialmente mistificados no Ensino Médio. Por isso recomendamos, na abordagem de logaritmos no Ensino Médio, que seja dado ênfase à ideia fundamental de que o *logaritmo* é o *expoente em uma exponenciação*, facilitando assim consideravelmente a compreensão das propriedades e características básicas das funções logarítmicas.

Chamamos ainda a atenção para o fato de que a propriedade algébrica fundamental dos logaritmos – transformar produtos em soma – está no centro de sua origem histórica. Observe que, sem o auxílio de calculadoras e computadores, com os quais estamos cada vez mais acostumados, efetuar uma multiplicação é muito mais trabalhoso que efetuar uma adição, principalmente no caso de números com muitos algarismos decimais. Por isso, uma ferramenta matemática que permitisse reduzir o trabalho de fazer uma multiplicação ao de uma adição era muito importante no passado.

Contudo, segundo Maor (2008), se os logaritmos perderam seu papel central na matemática computacional, a *função logarítmica* permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada, e ainda está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais (como veremos no capítulo 3). Ela aparece em uma variedade de aplicações que abrangem, por exemplo, a química, biologia, psicologia, arte, música, entre outros.

Como vimos, a principal característica da função denominada como exponencial é que sua parte variável encontra-se no expoente. Dessa forma, o conceito de função exponencial está intrinsecamente ligado e dependente do conceito de potência, o que o faz relacionado também ao conceito de logaritmos e, consequentemente, ao de função logarítmica, que defini-se como sua inversa[4].

Com o propósito de como saber se, para resolver um determinado problema, devemos usar o modelo de função logarítmica, neste momento, apresentamos uma definição formal para tal função, seguida de informações e propriedades que a caracterizam.

Definição 2.2 (Função Logarítmica)

Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), chamamos função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $log_a x$, chamado logaritmo de x na base a.

Em símbolos:

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto log_a x$$

Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, temos: $a^{log_a x} = x$ para todo $x > 0$ e $log_a(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x, ou seja, $y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Assim, temos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, tem a propriedade $f(x + y) = f(x).f(y)$, ou seja, $a^{x+y} = a^x.a^y$ (logo, transforma soma em produto). A sua inversa $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = log_a x$, tem a propriedade $g(x.y) = g(x) + g(y)$, ou seja, $log_a(x.y) = log_a x + log_a y$ (logo, transforma produto em soma).

De maneira geral, as funções logarítmicas mais usadas são aquelas cuja base a é maior do que 1. Entre a infinidade de valores que a base de um logaritmo pode assumir,

[4] Expressamente, diz-se que a função $g : Y \longrightarrow X$ é a inversa da função $f : X \longrightarrow Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g. Quando g é a inversa de f, tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

o que justifica a infinidade de sistemas de logaritmos possíveis, existem dois sistemas particularmente importantes:

i) **sistema de logaritmos decimais**: é o sistema da base 10, também chamado sistema de logaritmos vulgares ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês, 1556-1630), quem primeiro destacou a vantagem dos logaritmos da base 10, tendo publicado a primeira tábua (tabela) dos logaritmos de 1 a 1000 em 1617. Indicamos o logaritmo decimal pela notação $log_{10}x$ ou simplesmente $logx$.

ii) **sistema de logaritmos neperianos**: é o sistema de base e ($e = 2,71828...$ número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano vem de John Napier, matemático escocês (1550-1617), autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome natural se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e.

Como consequência da definição de função logarítmica, destacamos a seguir suas propriedades características.

Propriedades:

(1) a função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

(2) somente números positivos possuem logaritmo real.

(3) se $a > 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo.

(4) se $0 < a < 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo.

(5) a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente.

(6) ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente.

(7) a função logarítmica é bijetiva.

Considerações e(ou) demonstrações:

(1) Provemos, inicialmente, a implicação

$$a > 1 \;\Rightarrow\; (para\ todo\ x_2\ e\ x_1 \in \mathbb{R}_+^*,\;\; x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; log_a x_2 > log_a x_1)$$

De fato:

Quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_2 > x_1$ tem-se, por uma das consequências da definição de logaritmos dada por $a^{log_a b} = b$, que:

$$a^{log_a x_2} > a^{log_a x_1} \Rightarrow log_a x_2 > log_a x_1$$

Provemos agora a implicação

$$(para\ todo\ x_2\ e\ x_1 \in \mathbb{R}^*_+,\ \ log_a x_2 >\ log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1)\ \Rightarrow\ a > 1$$

Considerando

$log_a x_2 = y_2\ \Rightarrow\ x_2 = a^{y_2}$

$log_a x_1 = y_1\ \Rightarrow\ x_1 = a^{y_1}$ temos:

$y_2 > y_1\ \Rightarrow\ a^{y_2} > a^{y_1}$.

Pelo fato de a função exponencial ser crescente para base maior que 1, concluímos que $a > 1$.

A demostração de que a função logarítmica é decrescente se, e somente se, a base é positiva e menor que 1 é análoga à demonstração anterior.

(2) Isso se deve ao fato de que a função $x \mapsto a^x$ assume somente valores positivos.

(3) De fato, se $a > 1$:

$0 < x < 1\ \Rightarrow\ log_a x < log_a 1\ \Rightarrow\ log_a x < 0$

$x > 1\ \ \Rightarrow\ log_a x > log_a 1\ \Rightarrow\ log_a x > 0$

(4) De fato, se $0 < a < 1$:

$0 < x < 1\ \Rightarrow\ log_a x > log_a 1\ \Rightarrow\ log_a x > 0$

$x > 1\ \ \Rightarrow\ log_a x < log_a 1\ \Rightarrow\ log_a x < 0$

(5) Mais precisamente, tem-se, para $a > 1$, que:

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} log_a x = -\infty.$$

A primeira destas igualdades significa que se pode dar a $log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que x seja tomado suficientemente grande. A segunda quer dizer que, dado arbitrariamente $A > 0$, tem-se $log_a x < -A$ desde que x seja um número positivo suficientemente pequeno.

(6) Mais precisamente, $log_a x$ tende a $+\infty$ muito lentamente quando $x \rightarrow +\infty$. Com efeito, dado um número $M > 0$, tem-se, $log_a x > M \Longleftrightarrow x > a^M$. Assim, por exemplo, no caso da função logarítmica decimal $y = log_{10} x$, cada vez que multiplicamos a variável independente (x) por 10, somamos apenas 1 unidade ao valor da variável dependente (y). De forma mais geral, passos multiplicativos na variável independente de uma função logarítmica correspondem a passos aditivos na variável dependente.

(7) Isso se deve ao fato dela ser, ao mesmo tempo, injetiva (pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes) e sobrejetiva (pois, dado qualquer número real b, existe sempre um único número real positivo x tal que $log_a x = b$). Logo, podemos confirmar que a função logarítmica admite uma inversa pois há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, e o seu contradomínio e sua imagem são iguais.

2.3.1 Gráfico da Função Logarítmica

Reconhecer o gráfico da função logarítmica é de fundamental importância no trato com as grandezas físicas cuja medida é feita com o uso de logaritmos, como por exemplo a intensidade de som, a força de um terremoto, entre outras.

Com relação ao gráfico cartesiano da função logarítmica $f(x) = log_a x$, podemos dizer que:

1°) está todo à direita do eixo y $(x > 0)$;

2°) corta o eixo x no ponto de abscissa 1 $(log_a 1 = 0 \ \ para \ \ todo \ \ 0 < a \neq 1)$;

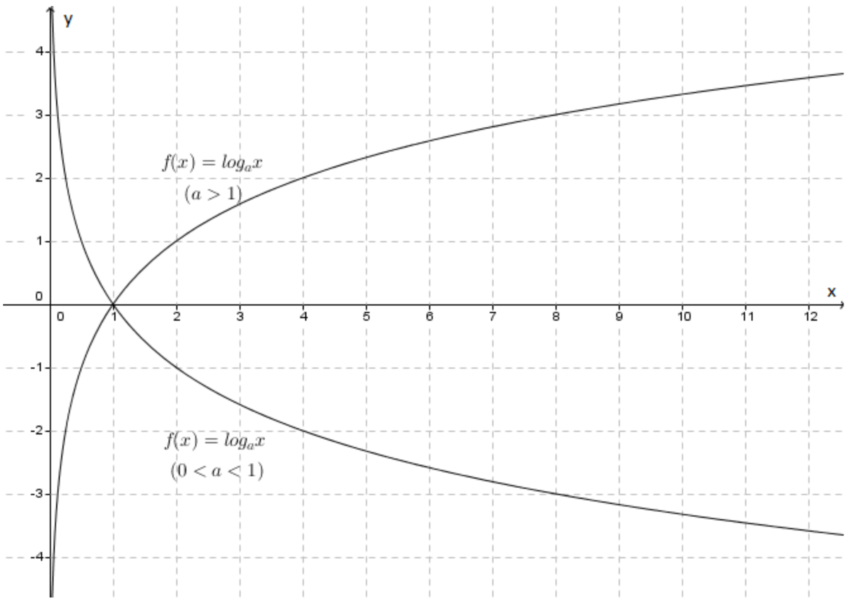
3°) se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente;

4°) toma os aspectos da figura 13;

5°) é simétrico em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função $g(x) = a^x$, logo toma os aspectos das figuras 14 e 15.

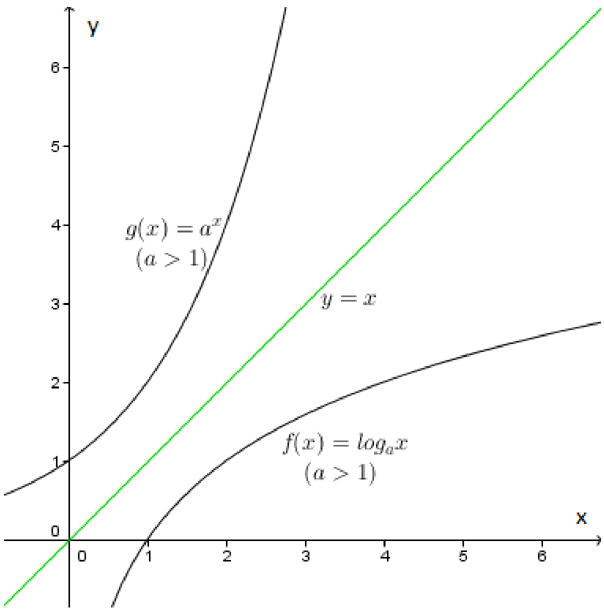
Assim, mais uma vez, visualizamos a importância da representação gráfica para uma melhor compreensão das relações entre as variáveis envolvidas.

Figura 13 – Gráfico da Função Logarítmica



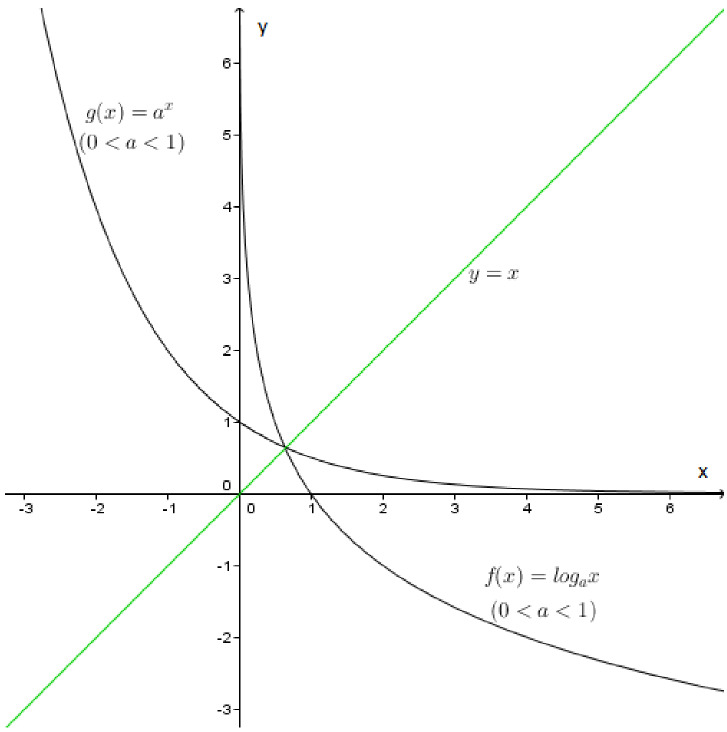
Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 14 – Simetria entre Função Exponencial e Função Logarítmica - I



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 15 – Simetria entre Função Exponencial e Função Logarítmica - II



Fonte: Dados da Pesquisa

Capítulo 3

Função Exponencial: Relações, Aplicações e Interdisciplinaridade

Os conteúdos básicos da disciplina Matemática, comumente estão organizados em quatro grupos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. O que não significa que tais conteúdos devam ser trabalhados de forma estanque, pelo contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles e as outras áreas do conhecimento.

A Matemática pode ser interpretada como uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e como instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. Como etapa final de uma educação de caráter geral, o Ensino Médio deve situar o educando como sujeito produtor de conhecimento, incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender buscando dar significado ao conteúdo dado, mediante a contextualização, evitando assim a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> A interdisciplinaridade deve ser compreendida a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência (BRASIL, 1999, p. 36).

Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não dissipa as disciplinas e não tem a pretensão de criar novos saberes, ao contrário, mantém sua individualidade para, através da articulação entre os conhecimentos de várias disciplinas, resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista.

Fica mais clara a importância da interdisciplinaridade quando se considera o fato comum de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, seja de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, ou ampliação.

Algumas disciplinas se identificam e aproximam, outras se diferenciam e distanciam, em vários aspectos. Nesta multiplicidade de interações e negações recíprocas, a relação entre as disciplinas tradicionais pode ir da simples comunicação de ideias até a integração mútua de conceitos, constatando assim a importância de que os alunos aprendam a olhar o mesmo objeto sob perspectivas diferentes.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006, p. 121).

Dessa forma, as funções, no contexto da matemática escolar com vistas às aplicações, ocupam lugar de destaque, pois lidam diretamente com aspectos importantes a serem desenvolvidos na escola média, que são: a natureza algébrica; as diferentes formas de representação; aplicação a problemas e situações da vida e de outras ciências; articulação com outros tópicos da própria Matemática.

Sem a pretensão de apresentar informações que esgotem ou encerram as pesquisas sobre as possíveis interconexões da própria matemática, que se caracterizam por sua complementaridade e convergência, destacamos a seguir alguns dos principais aspectos das possíveis relações entre as expressões exponenciais, os logaritmos e as progressões.

A partir de então, traremos uma amostra das aplicações diversas da função exponencial em diferentes áreas de conhecimento, apontando para o caráter multi e interdisciplinar que sua teoria e conexões permitem.

3.1 Relação entre Exponenciais, Logaritmos e Progressões

Ao longo da vida, estamos todo tempo rodeados de fenômenos da natureza e, se prestarmos atenção, nos surpreenderemos com sua regularidade. Um dos objetos de estudo da Matemática é justamente essa regularidade, à medida que se constata haver um padrão de comportamento comum a diferentes situações e fenômenos reais.

Dentre esses padrões transformados em representações numéricas, que são a expressão da Matemática, estão as **sequências numéricas**, que podem se apresentar por meio de leis de formação diferentes, sendo muitas delas tão familiares ao nosso raciocínio que intuitivamente as determinamos. Observe, por exemplo, as seguintes sequências: (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...), (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...), (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...), (2, 6, 18, 54, 162, ...). Você pode facilmente continuá-las de forma correta sem que nenhuma outra instrução lhe seja dada, sem que nenhuma lei seja expressa. Essas sequências recebem a denominação de **progressão aritmética**[1] (no caso das duas primeiras) e **progressão geométrica**[2] (as duas últimas).

Historicamente, os logaritmos – aqui já apresentados e descritos como o inverso de uma expressão exponencial – têm sua descoberta associada às descobertas das progressões aritméticas e geométricas, a qual se atribui ao matemático alemão Michael Stifel (1486 - 1567), muito embora se deva considerar que foi o escocês John Napier (1550 - 1617), matemático, físico e astrônomo, quem contribuiu para o avanço da matemática ao descobrir o uso dos logaritmos e suas propriedades (EVES, 2004).

Stifel, em 1544, escreveu o livro intitulado Arithmetica Integra (Aritmética Renovada) no qual observou que os termos de uma progressão geométrica de razão q, dada por $(q^0, q^1, q^2, \dots)$ correspondiam aos termos de uma progressão aritmética de razão 1 $(0, 1, 2, \dots)$, formada pelos expoentes, de tal maneira que a multiplicação de dois termos da progressão geométrica resultava em um termo cujo expoente representava a soma dos dois números correspondentes na progressão aritmética. Tais correspondências se constituem nas nomeadas relações de Stifel. Assim, por exemplo, $q^2 . \, q^5 = q^7$ e $2 + 5 = 7$.

Com intuito de ilustrar a visão de Napier dos logaritmos, considere a progressão geométrica $(3, 9, 27, ..., 6561)$ que pode ser expressa também por $(3^1, 3^2, \dots, 3^8)$. Os expoentes desta progressão geométrica formam a progressão aritmética $(1, 2, ..., 8)$. Note ainda que, pelas relações de Stifel temos $3^4 . \, 3^2 = 3^6$ e que $4 + 2 = 6$, por exemplo. Logo, os termos da progressão aritmética são os respectivos logaritmos da progressão geométrica; por exemplo, $log_3 6561 = log_3 3^8 = 8$. Assim, percebe-se que os estudos de Stifel permitiram a descoberta dos logaritmos por Napier.

De maneira análoga, os logaritmos são os respectivos valores que acompanham os termos de uma progressão aritmética, tornando as progressões aritméticas e geométricas um dos meios mais importantes para explicar e justificar o conceito de logaritmo. Esta relação existente entre progressões, logaritmos e exponenciais pode ser averiguada nos problemas a seguir.

Problema 1 Adaptado(LIMA, 2012) Se a sequência (a_n) é uma progressão aritmética, prove que a sequência $(b_n) = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica, onde e denota o número de Euler.

Demonstração: Sendo r a razão da progressão aritmética (a_n), basta notar que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1} - a_n} = e^r$$

[1] Progressão aritmética (PA) é uma sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r (razão) dada.

[2] Progressão geométrica (PG) é uma sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q (razão) dada.

Como o quociente entre um termo qualquer da sequência (b_n) e o seu antecessor é a constante e^r, segue por definição que (b_n) é uma progressão geométrica.

Problema 2 Adaptado(LIMA, 2012) Se a sequência (a_n) é uma progressão geométrica, prove que a sequência $(b_n) = loga_n$ é uma progressão aritmética.

Demonstração: Sendo q a razão da progressão geométrica (a_n), basta notar que

$$b_{n+1} - b_n = loga_{n+1} - loga_n = log\frac{a_{n+1}}{a_n} = logq$$

Como a diferença entre um termo qualquer da sequência (b_n) e o seu antecessor é a constante $logq$, segue por definição que (b_n) é uma progressão aritmética.

3.1.1 Caracterização da relação entre Funções Exponenciais e Progressões

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ba^x$, uma função tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1},\ f(x_2) = ba^{x_2},\ \ldots,\ f(x_n) = ba^{x_n},\ \ldots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}).a^h = f(x_n).a^h$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$,onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b.A^n$.

Segundo Lima (2012), esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial, conforme o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente), que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (LIMA, 2012, p. 205).*

Demonstração: Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, ..., nx$ é

> uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), ..., g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu (n + 1)-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (LIMA, 2012, p. 205).

Neste momento abordaremos, em particular, a relação existente entre *função exponencial* e as *progressões geométricas*, utilizando-se de conhecimentos algébricos/geométricos como recursos para a construção de argumentação.

1º) *Comparando as definições*

i) Dado um número real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se **função exponencial** da base a a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) Uma **progressão geométrica** (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada razão da PG. Conforme termo geral: $a_n = a_0.q^n$, com $n \in \mathbb{N}$ (com o primeiro termo sendo a_0).

As funções exponenciais do tipo $f(x) = b.a^x$ assemelham-se a uma progressão geométrica. Note que em $f(x) = b.a^x$ e $a_n = a_0.q^n$ temos que: $f(x) = a_n$; $b = a_0$; $a = q$; $x = n$.

Entretanto, deve-se atentar para o domínio das relações com que trabalhamos.

-Na função exponencial, o termo geral vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

-Na progressão geométrica, o termo geral vale para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que estamos considerando uma PG cujo primeiro termo é a_0.

Ou seja, quando o problema apresentado abranger o domínio $\mathbb{N}$, pode-se utilizar qualquer uma das relações. Quando a situação envolver o domínio $\mathbb{R}$, não se pode utilizar a progressão geométrica.

2º) *Comparando gráficos*

Tomemos o seguinte modelo de atividade: o valor de um automóvel daqui a t anos é dado pela lei $V = 20000.(0,9)^t$ (em reais). Calcule o valor desse automóvel daqui a 4 anos.

Resolução: aplicando-se o valor $t = 4$ na expressão exponencial dada, obtemos

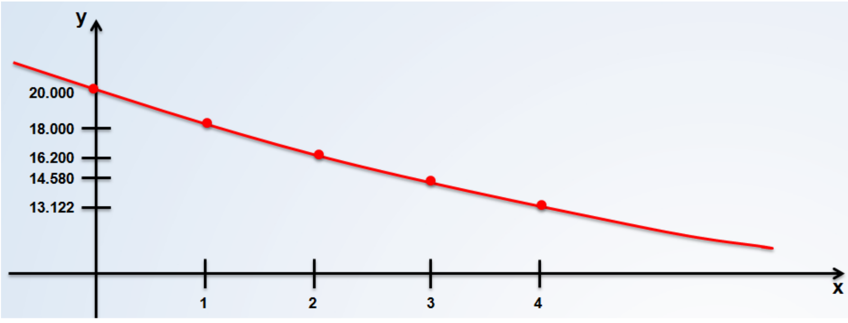
$$V = 20000.(0,9)^4$$

$$V = 20000.0,6561$$

$$V = 13122$$

Graficamente temos a figura 16:

Figura 16 – Representação gráfica da expressão $V = 20000.(0,9)^t$



Fonte: Dados da Pesquisa

Agora, digamos que o valor inicial do automóvel fosse 30000 reais. Entretanto, vamos analisar a situação usando um método diferente, a progressão geométrica.

Tempo (anos)	0	1	2	3
Valor (reais)	30000	27000	24300	21870

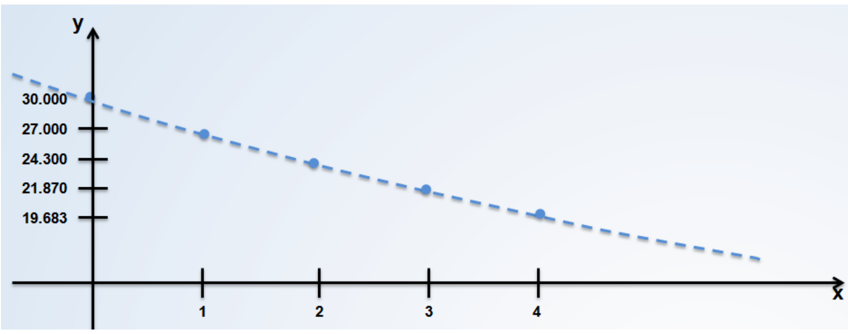
A tabela acima descreve uma situação em que o valor do automóvel, em função do tempo em anos após sua compra, forma uma PG decrescente $(30000, 27000, 24300, 21870, ...)$, em que $a_0 = 30000$ e $q = 0,9$.

Como o termo geral de uma PG é $a_n = a_0.q^n$, com $n \in \mathbb{N}$, na PG temos:

$$a_4 = 30000.(0,9)^4 \longrightarrow a_4 = 19683.$$

Construindo o gráfico da PG temos a figura 17:

Figura 17 – Representação gráfica da PG $a_n = 30000.(0,9)^n$



Fonte: Dados da Pesquisa

Considerando a fórmula $a_n = a_0.q^n$ de uma PG cujo primeiro termo é a_0 e cuja razão é q, percebemos que uma PG se assemelha a uma função exponencial $f(x) = a_0.q^x$, com $q \neq 1$, só que com uma restrição do domínio ao conjunto dos números naturais.

Comparando os gráficos feitos, fica evidente que ambos podem ser obtidos tanto pela função exponencial quanto pela progressão geométrica, evidenciando sua relação.

3.2 Aplicações de exponenciais e logaritmos em outras áreas do conhecimento

Achar as conexões entre conceitos e técnicas dentro de uma mesma disciplina não é tarefa tão difícil, posto que, historicamente, evoluem em linguagem e raciocínios que se complementam, se completam e convergem para determinadas conclusões. Entretanto, o encanto da matemática está justamente na possibilidade de se fazer híbrida no ponto em que se torna atravessadora de outras disciplinas e áreas profissionais. Sem dúvidas, como em outras disciplinas transversais, conceitos da matemática são aplicados como recursos e condicionantes em tantos outros conceitos de tantas outras abordagens, e esse caráter transdisciplinar[3] deve ser considerado se o objetivo é torná-la mais próxima e menos assustadora aos que precisam compreendê-la.

Entender que, apesar de isoladamente ensinada nas salas de aula, a matemática é linguagem tão comum quanto o próprio português, é passo básico para desmistificar a idéia de que ela só será aplicada às profissões caracterizadas como exatas. É preciso expandir os horizontes dessa afirmação que permeia o imaginário dos alunos e pode ser facilmente constatada em sala de aula. É preciso apresentar exemplos reais e aproximar os conceitos matemáticos da vida em comum, para que, não apenas crie-se um natural interesse em seu aprendizado como também possa proporcionar a despersonificação da matemática como 'bicho papão'.

Na intenção de que esse trabalho sirva de referência para professores e alunos que desejarem explorar este campo da álgebra matemática, apresentamos alguns exemplos de interações e aplicações de expressões ou funções exponenciais, bem como expressões ou funções logarítmicas, relacionadas às mais diversas áreas do conhecimento, abrangendo tanto as disciplinas escolares básicas quanto alguns ramos das ciências em geral, apontando para o caráter inter e transdisciplinar que esses conceitos assumem.

[3] A transdisciplinaridade é uma abordagem científica que visa a unidade do conhecimento. Desta forma, procura estimular uma nova compreensão da realidade articulando elementos que passam entre, além e através das disciplinas.

3.2.1 Matemática Financeira

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2008:

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial (BRASIL, 2008, p. 75).

Uma das noções mais utilizadas pelas pessoas no dia-a-dia é a de matemática financeira. O cálculo simples de uma porcentagem para definir o preço de um produto com desconto é uma das situações mais corriqueiras. Além disso, informações com dados em porcentagens costumam aparecer quase todos os dias em manchete de jornais e noticiários de rádio e televisão. A importância de saber usar as porcentagens é evidenciada pela integração da Matemática com outros temas, como saúde, meio ambiente, ética e cidadania, entre tantos outros.

Algumas situações comerciais, como lucro e prejuízo e diversas outras que fazem parte do dia-a-dia, como aumentos e descontos sucessivos, financiamentos para compra de bens, empréstimos e aplicações financeiras, exigem um conhecimento mais apurado das diversas implicações que abrangem o uso da matemática financeira.

Uma das noções de fundamental importância para resolver situações do cotidiano, como por exemplo, decidir por uma compra à vista ou a prazo, é a noção de juro. Os juros são a importância que uma pessoa (ou empresa) paga por usar uma quantia de dinheiro de outra pessoa durante um período de tempo. O processo de formação de juros é conhecido como regime de capitalização. Há dois regimes de capitalização, juros simples e juros compostos.

Pela estreita ligação que tem, podemos relacionar o sistema de juros simples a uma função afim, assim como o sistema de juros compostos a uma progressão geométrica e consequentemente, à uma função exponencial. Sendo o mais usado nas transações financeiras, os juros compostos se traduzem simplesmente como a capitalização de quantias que ocorre sempre em relação ao período anterior considerado.

Pela relação já mencionada com as funções exponenciais, o cálculo do montante (soma do capital principal mais os juros acumulados) proveniente dos juros compostos é feito através de uma expressão do tipo: $M = C.(1 + i)^n$, em que C é o valor do capital inicial aplicado durante n unidades de tempo à taxa i (em porcentagem) por unidade de tempo.

Exemplo de aplicação 1

Adaptado(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) Um trabalhador ganhava $R\$ \ 800,00$ por mês. Num período de 4 meses, a inflação mensal foi de 15%. Qual deve ser o novo salário do trabalhador para que ele mantenha seu poder aquisitivo, isto é, para que ele possa adquirir as mesmas coisas que adquiria antes?

Resolução

Sabendo que a taxa de inflação mencionada é aplicada mensalmente sempre em ralação ao valor anterior, devemos então usar a fórmula para o cálculo do montante (M) dos juros compostos, dada por $M = C.(1+i)^n$, onde no caso em questão, C (capital inicial) = 800 , i (taxa) = $15\% = \frac{15}{100} = 0,15$ e $n = 4$ meses.

Substituindo esses dados na fórmula:

$$M = 800.(1+0,15)^4 \longrightarrow M = 800.1,15^4 \longrightarrow M \cong 1399,21$$

Logo, o novo salário desse trabalhador deverá ser de $R\$ \ 1399,21$.

Exemplo de aplicação 2

(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) Uma pessoa aplicou, a juros compostos, $R\$ \ 10\,000,00$ à taxa de 2% ao mês, gerando um montante de $R\$ \ 10\,612,00$. Por quanto tempo esse capital foi aplicado? Use $log\,1,06 = 0,0258$ e $log\,1,02 = 0,0086$.

Resolução

Sabemos que o cálculo do montante (M) dos juros compostos é dado por $M = C.(1+i)^n$, onde no caso em questão, M (montante) = $10\,612,00$, C (capital inicial) = $10\,000$ e i (taxa) = $2\% = \frac{2}{100} = 0,02$.

Substituindo esses dados na fórmula:

$$10\,612 = 10\,000.(1+0,02)^n \longrightarrow 10\,612 = 10\,000.(1,02)^n$$
$$\frac{10\,612}{10\,000} = 1,02^n \longrightarrow 1,0612 = 1,02^n$$

Aplicando logaritmo decimal em cada membro da igualdade:

$$log\,1,0612 = log\,1,02^n$$

Usando a propriedade de logaritmos de potências:

$$log\,1,0612 = n.log\,1,02$$

Substituindo pelos valores dados no enunciado do problema, temos:

$$0,0258 = n.0,0086 \longrightarrow n = \frac{0,0258}{0,0086} \longrightarrow n = 3$$

Logo, o capital ficou aplicado pelo prazo de 3 meses.

3.2.2 O decaimento radioativo e o método de carbono-14

Em Arqueologia, o método usado para estimar a idade dos materiais encontrados, como fósseis ou vestígios de civilizações é chamado de datação radioativa. Por radioatividade, entende-se como a liberação de partículas de alta energia por um núcleo de um átomo que apresenta excesso de partículas ou de carga. Toda substância radioativa sofre um decaimento radioativo com o passar do tempo, o que diminui sua quantidade de átomos e consequentemente sua massa.

Para acompanhar esse decaimento, um parâmetro usado é designado de meia-vida do elemento, que é o tempo necessário para que a massa de uma substância radioativa se reduza à metade. O valor da meia-vida é sempre constante para um mesmo elemento químico radioativo. É possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial por meio de uma função do tipo exponencial: $M(t) = M_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}$, em que M_0 é a quantidade inicial de material radioativo, t é o tempo decorrido e p é o valor da meia-vida do material considerado.

O carbono-14 (C^{14}) é dos elementos mais utilizados para fazer a datação de objetos muito antigos, como por exemplo fósseis de seres vivos. Sabe-se que a meia-vida do C^{14} é de, aproximadamente, 5730 anos, ou seja, nesse tempo sua massa se reduz pela metade. Considerada curta, a meia-vida do C^{14} apenas pode ser usado para medir restos de organismos que viveram até 70 000 anos atrás. Além do carbono-14, utiliza-se também outros elementos como o potássio-40 com meia-vida de 1,25 bilhão de anos, o urânio-238 que tem meia-vida de 4,47 bilhões de anos, o tório-232 com meia-vida de 14 bilhões de anos, além de muitos outros elementos radioativos.

Exemplo de aplicação

Adaptado(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) Considerando-se $5\,500$ anos a meia-vida do isótopo radioativo do carbono (C^{14}), que percentual da massa original de C^{14} restará em uma amostra após $10\,000$ anos? (Dado: $M(t) = M_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}$, em que M_0 é a quantidade inicial de material radioativo, t é o tempo decorrido e p é o valor da meia-vida do material considerado.)

Resolução

Considere 100 a quantidade inicial de carbono radioativo. Essa quantidade decresce exponencialmente, segundo a função dada por: $M(t) = M_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}$, onde no caso em questão, $M_0 = 100$, $t = 10\,000$ anos, e $p = 5\,500$ anos.

Substituindo esses dados na fórmula:

$$M = 100.(0,5)^{\frac{10\,000}{5\,000}}$$

Portanto, a quantidade restante (M) após $10\,000$ anos será:

$$M = 100.(0,5)^{1,8182} = 28,36.$$

Como a quantidade inicial foi tomada como 100, então $28,36$ correspondem a $28,36\%$. Logo, em $10\,000$ anos restarão $28,36\%$ do carbono.

Observe que para o cálculo de $100.(0,5)^{1,8182}$, foi utilizada uma calculadora científica. Caso não haja esse recurso, os cálculos poderão ser feitos com o recurso da tabela dos logaritmos, bem como de algumas de suas propriedades. Veja:

$$100(0,5)^{1,8182} = A$$

$$logA = log\,100(0,5)^{1,8182}$$

$$logA = log\,100 + 1,8182\,.\,log\,0,5$$

$$logA = log\,100 + 1,8182\,.\,(log5 - log10)$$

$$logA = log\,100 + 1,8182\,.\,(-0,3010)$$

$$logA = 2 - 0,5472$$

$$logA = 1,4528$$

Procurando o número cujo logaritmo é $1,4528$, encontramos aproximadamente $28,3$ (bem próximo de $28,36$).

3.2.3 Medida do nível sonoro e a audição humana

Nos últimos anos, houve um aumento expressivo dos ruídos produzidos por automóveis, indústrias, entre tantos outros. A Física ajuda a explicar como as ondas do som são percebidas pelo homem em seus diferentes níveis sonoros. Foi necessário criar uma unidade de medida para a intensidade sonora, chamada decibéis (dB), nome dado em homenagem a Alexander Graham Bell (1847-1922), o inventor do telefone.

A intensidade sonora, ou 'volume do som', indica a potência transportada pela onda ao atingir uma determinada área, sendo representada pela letra I e expressa em W/m^2 (watts por metro quadrado). O valor mínimo de intensidade de som, abaixo da qual o ouvido humano é impossível escutar algo, é conhecido como *limiar de audibilidade*, vale em média $10^{-12}\,W/m^2$ e é habitualmente representado por I_0.

O cálculo do nível sonoro ou nível de intensidade (N), representado em decibéis (dB), é feito de acordo com a função: $N = 10.log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, que usa escala logarítmica, ou ainda por $10^{\frac{N}{10}} = \frac{I}{I_0}$, na forma exponencial. Sendo I a intensidade do som correspondente ao nível sonoro N e I_0 a constante que representa o nível do limiar de audibilidade.

Assim, através de medições e os consecutivos cálculos, dizemos que numa conversa em voz normal o nível sonoro é de aproximadamente 60 dB. Indistintamente para sons baixos (graves) ou altos (agudos), atingimos o limite da sensação dolorosa acima de 140 dB (como exemplo, jato decolando a 30 m). Estima-se que níveis aceitáveis para o dia são 55 dB e para a noite 45 dB. Para a saúde da audição humana, não devemos ficar expostos por mais de uma hora em ambientes com nível sonoro acima dos 110 dB, pois os danos causados são cumulativos e irreversíveis.

Exemplo de aplicação

Adaptado(JOAMIR, 2010) Atualmente, percebe-se um aumento considerável dos ruídos sonoros produzidos pelas mais diversas fontes, o que vem afetando continuamente a capacidade auditiva das pessoas. Por exemplo, o hábito cada vez mais comum, principalmente entre jovens, de ouvir música em tocadores de MP3 e celulares com o uso de fones de ouvido por longos períodos e volume alto já causa reflexos em consultórios e clínicas médicas. Por isso, apresentar informações sobre problemas que podem ocorrer em decorrência da exposição a altos níveis sonoros se torna cada vez mais necessário.

Sabendo-se que o nível sonoro de um ambiente, em decibéis (dB), pode ser calculado por meio da lei de weber-Fechner, que é dada por $N = 10.log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, em que I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m^2), qual é o nível sonoro da respiração normal de uma pessoa que tem intensidade de $10^{-11}\,W/m^2$? Sabendo que uma conversa em um ambiente fechado emite um nível sonoro de 45 dB, qual a intensidade sonora dessa conversa?

Resolução

Tomando propriedades das potências e dos logaritmos, quando necessárias:

Para a primeira pergunta, substituindo $I = 10^{-11}$ na expressão dada, temos

$$N = 10.log\left(\frac{10^{-11}}{10^{-12}}\right)$$
$$N = 10.log\,10^1 \longrightarrow N = 10\,dB$$

Da mesma forma, para a segunda pergunta, substituindo $N = 45\,dB$ na mesma expressão, temos

$$45 = 10.log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \longrightarrow log10^{45} = log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)^{10} \longrightarrow$$
$$10^{45} = \left(\frac{I}{10^{-12}}\right)^{10} \longrightarrow 10^{45}.10^{-120} = I^{10} \longrightarrow$$
$$I = (10^{-75})^{\frac{1}{10}} \longrightarrow I = 10^{-7,5} \longrightarrow 10^{-7,5}\,W/m^2$$

3.2.4 Os Terremotos e a Escala Richter

Sismo, ou terremoto, é um fenômeno de vibração brusca e passageira da superfície da Terra resultante de movimentos subterrâneos de placas rochosas, de atividade vulcânica ou de deslocamentos de gases no interior da Terra, principalmente metano. O movimento é causado pela liberação rápida de grandes quantidades de energia sob a forma de ondas sísmicas.

A partir da quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. Trata-se de uma escala logarítmica de base 10.

A magnitude (graus) de Richter é uma medida quantitativa do 'tamanho' de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e também com a energia liberada. De acordo com o grau de magnitude registrado, um terremoto pode acarretar as seguintes consequências (Quadro 1):

Quadro 1: Fonte(JOAMIR, 2010)

Magnitude (graus)	**Possíveis efeitos**
menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, mas são registrados por equipamentos apropriados.
3,0 a 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Pode derrubar objetos da mobília e trincar paredes.
6,0 a 8,9	Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.
9,0 ou maior	Tremores muito fortes, causa a destruição quase que total.

A amplitude é uma forma de medir a movimentação do solo e está diretamente associada ao tamanho das ondas registradas nos sismógrafos. A escala Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a $100km$ do epicentro (ponto da superfície do globo mais próximo do centro de abalo de um terremoto).

A energia liberada em um abalo sísmico é um fiel indicador do poder destrutivo de um terremoto. A relação entre a magnitude M (graus) de Richter e a energia liberada E é dada por $M = \frac{2}{3}.log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, ou ainda por $E = E_0.10^{\frac{3M}{2}}$. Sendo uma escala logarítmica de base 10, à medida que a magnitude aumenta, a amplitude fica 10 vezes maior. Como exemplo, um terremoto com magnitude 6 tem uma amplitude 10 vezes maior que um terremoto de magnitude 5.

Exemplo de aplicação

Adaptado(JOAMIR, 2010) Nos últimos anos, terremotos causaram consequências que foram vivenciadas pela população de diversos países. Em maio de 2008, por exemplo, um terremoto de 7,8 graus atingiu a província de Sichuan, no sudoeste da China, onde milhares de pessoas foram mortas ou feridas. Em abril de 2009, um terremoto com magnitude menor - 6,3 graus -, mas que nem por isso deixou de oferecer graves consequências, atingiu a região de Abruzzo, na Itália. Esse fenômeno natural ocasionou a morte de cerca de 300 pessoas, deixou 20 mil desabrigadas e destruiu cerca de 15 mil edificações, dentre elas algumas de valor artístico e histórico.

Diante disso, apesar do enorme progresso já realizado pelos cientistas no sentido de identificar as causas de terremotos e desenvolver aparelhos que informam sua magnitude e origem, o empenho tem sido em encontrar uma maneira de prevê-los, para que a população possa ser alertada e tomar medidas de segurança necessárias antes de sua ocorrência.

Sabendo-se que a magnitude y de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função $y = \frac{2}{3}.log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right)$, na qual x representa a energia liberada em quilowatts-hora (kWh), pelo terremoto, determine:

1°) a anergia liberada pelo terremoto ocorrido em Sichuan e pelo terremoto ocorrido na região de Abruzzo;

2°) a magnitude de um terremoto que libera $7.10^9 kWh$ de energia e suas possíveis consequências.

Resolução

1º) em Sichuan, substituindo $y = 7,8$ na função dada, temos:

$$\frac{2}{3}.log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right) = 7,8 \longrightarrow log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right) = 11,7 \longrightarrow$$
$$10^{11,7} = \frac{x}{7.10^{-3}} \longrightarrow x = 7.10^{8,7} \longrightarrow 7.10^{8,7}\, kWh$$

Já em Abruzzo, substituindo $y = 6,3$ na função dada, temos:

$$\frac{2}{3}log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right) = 6,3 \longrightarrow log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right) = 9,54 \longrightarrow$$
$$10^{9,45} = \frac{x}{7.10^{-3}} \longrightarrow x = 7.10^{6,45} \longrightarrow 7.10^{6,45}\, kWh$$

2º) substituindo $x = 7.10^9$ na mesma função, temos:

$$y = \frac{2}{3}log\left(\frac{7.10^9}{7.10^{-3}}\right) = \frac{2}{3}log10^{9-(-3)} = \frac{2}{3}.12 = 8 \longrightarrow 8\ graus$$

Com isso, as construções sofrem danos severos e podem acorrer grandes rachaduras no solo.

3.2.5 Crescimento populacional

Na ausência de fatores inibidores, o crescimento populacional pode ser descrito por meio de uma função exponencial. Nesse caso, tal expressão (função) pode ser utilizada para calcular o crescimento da população de qualquer espécie.

Por exemplo, sob certas condições o número $M(t)$ de bactérias de uma população no instante t é dado por $M(t) = M_0.e^{kt}$, em que e é o conhecido número de Euler (cujo valor aproximado é 2,7), k é uma constante que depende do número de bactérias, e M_0 é o número de bactérias da população no instante $t = 0$.

Exemplo de aplicação

(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) Segundo dados de uma pesquisa, a população de certa região do país vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, aproximadamente, segundo a relação $P(t) = P_0.2^{-0,25t}$. A constante P_0 é o valor da população inicial dessa região e $P(t)$ a população t anos depois. Determine quantos anos se passarão para que essa população fique reduzida à quarta parte da que era inicialmente.

Resolução

Como queremos que a população final seja a quarta parte da inicial, devemos fazer $P(t) = \frac{P_0}{4}$. Substituindo na relação dada, temos:

$$\frac{P_0}{4} = P_0.2^{-0,25t} \longrightarrow \frac{1}{4} = 2^{-\frac{1}{4}t}$$

Então: $2^{-2} = 2^{-\frac{1}{4}t} \longrightarrow -2 = -\frac{1}{4}.t \longrightarrow t = 8$

Assim, a população ficará reduzida à quarta parte após 8 anos.

3.2.6 Pressão atmosférica

Também conhecida como esfera de ar, a atmosfera é uma camada de ar que tem quilômetros de espessura e envolve todo o planeta Terra. Sabendo que pressão é a grandeza física que expressa uma força exercida por unidade de área, podemos definir a pressão atmosférica como a força por unidade de área exercida pelo ar contra uma superfície.

A pressão atmosférica é medida por meio de um equipamento conhecido como barômetro, utilizado, por exemplo por algumas indústrias, ou até mesmo automóveis, para medir a pressão, seja ela a pressão de ar dos pneus dos carros, a pressão do óleo do motor, etc. As unidades de medida utilizadas são: polegada ou milímetros de mercúrio (mmHg), quilopascal (kPa), atmosfera (atm), milibar (mbar) e hectopascal (hPa), sendo as três últimas, as mais utilizadas no meio científico.

Aumentando a força exercida pelo ar num determinado ponto, a pressão também aumentará nesse ponto. Logo, podemos deduzir que à medida que a altura h em relação ao nível do mar aumenta, a pressão atmosférica diminui. É conveniente saber que o peso normal do ar ao nível do mar é de $1kgf/cm^2$ (quilograma-força por centímetro quadrado) e ainda considera-se que a pressão diminui $1hPa$ (ou 1 $mbar$) a cada 8 metros que se sobe. Por exemplo, a 8840 metros, a pressão é de apenas $0,3kgf/cm^2$.

Como decorrência da Lei de Boyle, comprova-se que se p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar, então a pressão atmosférica a uma altitude h pode ser descrita pela função exponencial $p(h) = p_0.e^{-\alpha h}$, onde α é uma constante e e o número de Euler.

Exemplo de aplicação

Adaptado(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) A pressão atmosférica, ao nível do mar, é de $1\ atm$ (atmosfera). A cada quilômetro que se sobe acima desse nível, a pressão diminui 10%. Mostre que a função que melhor representa a pressão p, em $1\ atm$, em função da altura h, em km, medida a partir do nível do mar, é uma função do tipo exponencial de comportamento decrescente.

Resolução

Como a pressão atmosférica diminui 10% a cada quilômetro, temos que:

$$p_1 = p_0 - 10\%\ de\ p_0$$

$$p_1 = p_0 - 0,1p_0 \longrightarrow p_1 = 0,9$$

Podemos escrever que:

$$p_1 = 0,9.p_0$$

$$p_2 = 0,9.p_1 = 0,9.(0,9.p_0) = (0,9)^2.p_0$$

$$.....$$

$$.....$$

$$p_n = (0,9)^n.p_0$$

Portanto, podemos afirmar que a pressão atmosférica decresce exponencialmente, já que a base da potência $(0,9)^n$ é um número compreendido entre 0 e 1, o que caracteriza uma função do tipo exponencial decrescente.

3.2.7 O mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem

Nos mais diversos ramos da atividade humana atrelados ao mundo do trabalho, é possível verificar que, à medida que um trabalhador executa uma tarefa contínua e repetitivamente, sua eficácia de produção aumenta e o tempo de execução se reduz.

Podemos definir as *curvas de aprendizagem* como modelos exponenciais que relacionam a eficiência de um trabalhador de acordo com o seu tempo de experiência na execução de uma determinada tarefa. Elas podem ser utilizadas para medir custos futuros e níveis de produção, ou ainda para programar tarefas produtivas, reduzindo perdas decorrentes da inabilidade do trabalhador verificada nos primeiros ciclos de produção.

Entre os vários modelos matemáticos que podem representar esta dependência, está o modelo exponencial $P(t) = M - N.e^{-kt}$, onde $P(t)$ representa a eficiência do trabalhador (que pode ser, por exemplo, a quantidade de peças ou materiais que ele produz), t é o tempo de experiência que ele possui na tarefa (que pode ser dia, mês, semana, etc...), e é o número de Euler, e por fim M,N e k, constantes positivas que dependem da natureza da atividade envolvida.

Exemplo de aplicação

Adaptado(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função $f(d)$, cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão. Utilizando $f(d) = 100 - 100.e^{-0,2d}$, determine o dia para o qual a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia. (Dado: $e^{-2} = 0,13$)

Resolução

No dia em que o funcionário atingir a produção de 87 peças, teremos $f(d) = 87$.

Substituindo esse valor na expressão, temos:

$$87 = 100 - 100.e^{-0,2d} \longrightarrow 87 - 100 = -100.e^{-0,2d} \longrightarrow e^{-0,2d} = \frac{13}{100} \longrightarrow 0,13 = e^{-0,2d}$$

Dado que $e^{-2} = 0,13$, temos que:

$$0,13 = e^{-0,2d} \longrightarrow e^{-2} = e^{-0,2d} \longrightarrow -0,2d = -2 \longrightarrow d = 10\ dias.$$

3.2.8 Os Medicamentos

Todo medicamento é acompanhado por uma bula, que contém, entre outros tópicos, a composição, informações ao paciente, informações técnicas e posologia. Uma informação técnica importante é a meia-vida do medicamento, que indica o tempo em que o mesmo se reduz a 50$\%$ do que tinha no organismo do paciente, após a introdução do medicamento.

O tempo de meia-vida dos medicamentos possibilita uma estimativa da duração do efeito farmacológico, sendo assim um importante parâmetro para médicos e também para a indústria farmacêutica. Como exemplo, temos a amoxicilina, um conhecido antibiótico amplamente receitado por médicos no Brasil.

A bula da amoxicilina, como em qualquer medicamento, traz a informação de sua meia-vida, que é de aproximadamente 1,3 hora. O que significa que a cada período de 1 hora e 18 minutos, a quantidade desse medicamento no organismo se reduz a metade. A lei da função que representa a quantidade de amoxicilina no organismo está atrelada ao número de meias-vidas, e é expressa pela função $q(n) = \dfrac{k}{2^n}$, sendo $q(n)$ a quantidade de amoxicilina transcorridas n meias-vidas, e k uma constante, indicada pela posologia do medicamento.

Por exemplo, considerando que uma cápsula ingerida por um adulto contém 500 mg de amoxicilina, podemos inferir a função como $q(n) = \dfrac{500}{2^n}$ e determinar que, decorridas aproximadamente 8 horas da ingestão de uma cápsula, a concentração de amoxicilina no organismo é de apenas 7,81 mg. Comparando-se com a quantidade inicialmente ingerida, obtemos a informação que após 8 horas o medicamento se reduziu a 1,5$\%$ da quantidade ingerida inicialmente. Logo, determina-se que a ingestão de tal medicamento, em condições normais, deve ser feito a cada 8 horas, o que mostra a necessidade de o paciente seguir rigorosamente o intervalo de tempo prescrito.

Exemplo de aplicação

Adaptado(JOAMIR, 2010) Um paciente internado em um hospital recebe, ao meio-dia, uma injeção com $12mg$ (doze miligramas) de determinado remédio. A bula diz que o organismo elimina naturalmente metade da quantidade do remédio presente em cada período de 4 horas. Sendo assim, qual é a quantidade do remédio presente no organismo do paciente 12 horas após a aplicação? Que quantidade do remédio estará presente no organismo às 2 horas da tarde?

Resolução

A resposta da primeira pergunta é $1,5mg$, pois o enunciado diz que em 4 horas metade da quantidade do remédio é eliminada, logo metade também permanece no organismo. Para comprovar o resultado basta perceber que:

Quantidade inicial = $12mg$

4 horas depois = $6mg$

8 horas depois = $3mg$

12 horas depois = $1,5mg$

No caso da segunda pergunta, temos a tendência de responder $9mg$, que é a média entre $12mg$ (quantidade referente ao meio-dia) e $6mg$ (quantidade referente a 4 horas depois). Mas esta não é a resposta correta. Podemos construir a solução da seguinte maneira:

Quando uma grandeza c sofre uma diminuição de 50%, ou seja, fica reduzida à metade, seu novo valor será

$$c - \frac{50}{100}c = c - 0,5c = c.(1 - 0,5) = c.0,5.$$

Portanto, diminuir 50% significa *multiplicar* por $0,5$. Se uma nova diminuição de 50% acontecer, deve-se novamente *multiplicar* por $0,5$ e, consequentemente, a grandeza original c ficará multiplicada por $0,5^2$. E, assim, por diante.

Assim, após n períodos de tempo, a quantidade do remédio presente no organismo será igual à quantidade inicial ($12mg$) multiplicada por $0,5^n$. Como cada período de tempo tem 4 horas (logo $n = \frac{t}{4}$), a quantidade do remédio (q) presente no paciente após t horas, será dada pela função exponencial

$$q(t) = 12.(0,5)^{\frac{t}{4}}, \quad \text{pois} \quad q(0) = 12$$

Portanto, para obter a informação 2 horas após a aplicação, devemos fazer $t = 2$, logo

$$q(2) = 12.(0,5)^{\frac{2}{4}} = 12.(0,5)^{\frac{1}{2}} = 12.\sqrt{0,5} = 12.\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6.\sqrt{2} \cong 6 \,.\, 1,41 = 8,46.$$

Dessa forma, concluímos que a quantidade do remédio presente no paciente às 2 horas da tarde será $8,46mg$.

3.2.9 Magnitude Aparente Estelar

A magnitude aparente é uma escala usada para comparar o brilho das estrelas. Foi desenvolvida pelo astrônomo grego Hiparco, há mais de 2000 anos, e fornece uma forma de comparar quão brilhante um objeto parece em relação a outro, mas não quão brilhante ele é. Quanto maior for o brilho aparente do astro, menor será o valor da sua magnitude.

Hiparco criou uma escala para o brilho das estrelas de forma que as estrelas mais brilhantes tivessem uma magnitude de 1, as segundas mais brilhantes uma magnitude de 2 e assim por diante até à magnitude 6 que é a estrela menos brilhante que o olho humano consegue perceber.

Atualmente, através de equipamentos óticos, chegou-se a conclusão de que a cada vez que se soma, aproximadamente, 2,5 (cinco meios) à magnitude, o brilho é dividido por 10. De forma equivalente, temos que ao somar 1 à magnitude, o brilho é dividido por 2,5 (10 elevado a dois quintos). Este tipo de comportamento, em que as razões das grandezas são constantes, e não a sua diferença, caracteriza o uso de uma escala logarítmica.

Sob certas condições, podemos relacionar a magnitude estelar M de uma estrela com o seu brilho B, visto da Terra, pela função $M = -\frac{5}{2}.log\left(\frac{B}{B_0}\right)$, que equivale a $B = B_0.10^{\frac{-2M}{5}}$, em que B_0 é um nível padrão de brilho, indicado pela estrela *Vega*.

Exemplo de aplicação

Adaptado(JOAMIR, 2010) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de magnitude aparente da estrela. Já a magnitude absoluta da estrela é a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de 10 parsecs (1 parsec é aproximadamente 3.10^{13} km). As magnitudes aparente e absoluta de uma estrela são muito úteis para determinar sua distância ao planeta Terra.

Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M, sob certas condições, é dada aproximadamente pela fórmula $M = m + 5log_3(3d^{-0,48})$, em que d é a distância da estrela em parsecs. A estrela Rigel tem aproximadamente magnitude aparente $0,2$ e magnitude absoluta $-6,8$. Determine a distância, em quilômetros, de Rigel ao planeta Terra.

Resolução

Substituindo os valores dados na relação, temos:

$$-6,8 = 0,2 + 5log_3(3d^{-0,48}) \longrightarrow -\frac{7}{5} = log_3(3d^{-0,48}) \longrightarrow$$
$$3^{-\frac{7}{5}} = 3d^{-0,48} \longrightarrow 3^{-\frac{12}{5}} = d^{-\frac{12}{25}} \longrightarrow$$
$$\left(3^{-\frac{12}{5}}\right)^{-\frac{25}{12}} = \left(d^{-\frac{12}{5}}\right)^{-\frac{25}{12}} \longrightarrow d = 3^5$$

Logo, a distância de Rigel ao planeta Terra é de 3^5 parsecs ou $3^6.10^{13}$ km.

3.2.10 A lei do resfriamento de Newton

Uma das leis básicas da física e que possui vasta aplicação é a chamada *Lei do resfriamento de Newton*. Entre algumas aplicações, podemos citar a possibilidade de estimar a hora da morte de uma vítima, por exemplo, ou ainda determinar o tempo necessário de espera para que a temperatura do café esteja ideal para o consumo.

Essa lei estabelece que, quando um corpo é colocado em um ambiente mantido a temperatura constante, sua temperatura varia de modo a ser a mesma do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Ou seja, podemos dizer que quando um objeto estiver a uma temperatura mais alta do que a sua vizinhança, ele perderá calor para o ambiente e esfriará.

Como mencionado, pela ocorrência de um decréscimo proporcional, essa Lei pode ser traduzida matematicamente pela função exponencial $D(t) = D_0.e^{-\alpha t}$, em que D_0 é a diferença de temperatura no instante $t = 0$, $D(t)$ a diferença num instante t, α uma constante que depende do material de que é constituída a superfície do objeto e e o já conhecido número de Euler.

Exemplo de aplicação

(LIMA et al., 2010) O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou ás 23h e 30min e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8ºC. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1ºC. A temperatura do quarto era mantida constante a 20ºC. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é 36,5ºC.

Resolução

Segundo a lei de resfriamento, a diferença $T - 20$ entre a temperatua do corpo e a temperatura do ambiente é dada por uma função do tipo exponencial. Assim, podemos escrever a relação $T - 20 = b.a^t$, ou seja, $T = 20 + b.a^t$.

Adotando $t = 0$ como o instante em que a temperatura do corpo foi tomada pela primeira vez e medindo o tempo em horas, temos $T(0) = 34,8$ e $T(1) = 34,1$

Assim, temos $20 + b.a^0 = 34,8$, o que nos fornece $b = 14,8$.

Em seguida, $20 + 14,8.a^1 = 34,1$, de onde tiramos $a = \frac{14,1}{14,8}$. Portanto, temos $T = 20 + 14,8.\left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t$.

Para encontrar a instante da morte, devemos determinar t de modo que $T = 36,5$. Ou seja, devemos resolver $36,5 = 20 + 14,8.\left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t$.

Assim, temos:

$$16,5 = 14,8.\left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t$$
$$\frac{16,5}{14,8} = \left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t$$

Empregando logaritmos decimas em ambos os membros da igualdade

$$log\frac{16,5}{14,8} = log\left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t \longrightarrow log\frac{16,5}{14,8} = t.log\left(\frac{14,1}{14,8}\right) \longrightarrow$$
$$0,04722 = -0,02104.t \longrightarrow t \cong -2,24$$

O Sinal negativo indica que o instante em que a temperatura do corpo era de $36,5C$ é anterior ao momento da primeira medição. Assim, a morte ocorreu aproximadamente $2,24$ horas, ou seja, 2h e 14min antes das 23h e 30min. Isto é, o horário estimado para a morte é 21h e 16min.

3.2.11 Potencial Hidrogeniônico (pH)

Os alquimistas foram os 'químicos' da Idade Média e da Renascença e sabiam que determinadas substâncias, quando dissolvidas em água, formavam soluções com algumas características em comum: gosto azedo e, de um modo geral, capacidade de reagir com metais. Essas substâncias foram classificadas como ácidos.

Se um átomo possui número de elétrons diferente do número de prótons, ele chama-se íon. Sabe-se que as características ácidas das soluções devem-se à presença do íon hidrogênio, indicado por H^+ , em concentração mais elevada do que na água pura. Por exemplo, ao dissolvermos em água a substância chamada cloreto de hidrogênio, de fórmula HCl, forma-se o ácido clorídrico.

Os átomos de hidrogênio e cloro, formadores da molécula de HCl , separam-se e dão origem aos íons H^+ e Cl^-. Quanto maior a quantidade de íons H^+ num determinado volume de solução, maior será sua acidez. A concentração desses íons é expressa pela concentração molar, ou seja, pelo número de mols de H^+ em cada litro de solução e é indicada por $[H^+]$ (1 mol de $H^+ \approx 6,02.10^{23}$ íons H^+ = 602 sextilhões de íons H^+).

Como as concentrações são dadas por potências de 10 com expoente negativo (por exemplo, 10^{-3}, 10^{-8}, 10^{-14}), o trabalho com esses números traz alguma dificuldade matemática, e, por isso, criou-se a escala de pH, que se utiliza de logaritmos decimais. O termo pH (abreviatura de potencial hidrogeniônico) é uma maneira de expressar a concentração de íons de hidrogênio. Foi criado, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Perter Lauritz Sorensen (1868 - 1939), para simplificar seu trabalho no controle de qualidade de cervejas.

Soren adotou o termo pH para indicar o cologaritmo na base 10 da concentração de H^+. Então, usando linguagem matemática, temos: $pH = colog[H^+]$ ou $pH = -log[H^+]$ o que implica dizer que $[H^+] = 10^{-pH}$.

Exemplo de aplicação

Adaptado(LIMA et al., 2010) Para relacionar os conceitos de acidez e alcalinidade com sua vivência, você já deve ter percebido que ao beber, separadamente um pouco de água, de vinagre e de suco de caju sem açúcar têm-se sensações diferentes. A água não causa nenhum desconforto na degustação, o vinagre provoca um azedume, enquanto o suco de caju causa uma sensação adstringente ("amarra a boca"). Isso se deve à concentração de íons H^+ na solução. A acidez, a neutralidade ou a alcalinidade de uma solução são expressas pelo pH (potencial hidrogeniônico) da solução, definido por:

$$pH = -log[H^+]$$

em que $[H^+]$ é a concentração de íons hidrogênio H^+, em mol/L. Assim, o valor do pH aumenta à medida que a concentração de íons hidrogênio decresce. Quanto menor o pH, mais ácida é a solução. O valor 7 do pH indica que a solução é neutra (nem ácida, nem alcalina); um pH abaixo de 7 indica acidez; e acima de 7, alcalinidade. Por exemplo, o pH da água é 7, do vinagre é menor que 7 e do suco de caju é maior que 7.

Considere as seguintes soluções ácidas: o suco de limão, cujo pH é 2, e o suco de tomate, cujo pH é 4. Qual é a concentração de íons H^+, em mol/L, no suco de limão? A concentração de íons H^+ no suco de limão equivale a quantas vezes essa concentração no suco de tomate?

Resolução

Indicando por x e y as concentrações de íons H^+, em mol/L, nos sucos de limão e tomate, respectivamente, e utilizando a expressão dada $pH = -log[H^+]$, temos que:

$$2 = -log\, x \longrightarrow -2 = log\, x \longrightarrow x = 10^{-2}$$

e

$$4 = -log\, y \longrightarrow -4 = log\, y \longrightarrow y = 10^{-4}$$

Assim, concluimos que:

A concentração de íons H^+ no suco de limão é $10^{-2}\ mol/L$

E a concentração de íons H^+ em mol/L no suco de limão equivale a 100 vezes essa concentração no suco de tomate, pois: $10^{-4}.100 = 10^{-4}.10^2 = 10^{-2}$.

Capítulo 4

Propostas de atividades para o ensino da Função Exponencial no Ensino Médio

O maior desafio da educação básica atual é promover as condições para que haja uma convergência de toda a comunidade escolar em torno de um projeto pedagógico que integre, não só as disciplinas, mas todas as áreas de conhecimento. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas na atividade profissional das diversas áreas do conhecimento.

Não basta revermos a forma ou a metodologia de ensino se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação de forma fragmentada, pois nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Os conteúdos mínimos da Base Nacional Comum do currículo de Matemática, bem como sua parte flexível direcionada para as necessidades e interesses da escola e da comunidade em que ela está inserida, devem compor uma série de temas ou tópicos escolhidos a partir de critérios que visem o desenvolvimento das atitudes e habilidades necessárias para a formação do aluno.

Dessa forma, segundo Brasil (1999), o critério central a ser explorado é o da contextualização e da interdisciplinaridade, através do qual seja possível estabelecer conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, e ainda destacar sua relevância cultural, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Ainda segundo Brasil (1999), aprender Matemática no Ensino Médio deve ser muito mais do que arquivar resultados dessa ciência. A obtenção de tal conhecimento deve estar atrelada ao domínio de um saber fazer e pensar matemático, passando por um processo lento, vinculado à resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões e a capacidade de argumentação. Esses elementos são fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e à interpretação da realidade das outras áreas do conhecimento.

Alguns dos objetivos gerais pretendidos no ensino de Matemática e das demais ciências da natureza, no nível médio, e que tem por finalidade uma aprendizagem real e significativa, são levar o aluno a:

> - Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções.
>
> - Procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema.
>
> - Elaborar estratégias de enfrentamento das questões.
>
> - Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações, interpolações e interpretações.
>
> - Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos socioeconômicos, científicos ou cotidianos.
>
> - Articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar.
>
> - Fazer uso dos conhecimentos da Física, da Química e da Biologia para explicar o mundo natural e para planejar, executar e avaliar intervenções práticas.
>
> - Utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais.
>
> - Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio.
>
> - Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolveram por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.
>
> - Entender a relação entre o desenvolvimento de Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuser e se propõe solucionar.
>
> - Entender o impacto das tecnologias associadas às Ciências Naturais, na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social (BRASIL, 1999, p. 216-217).

Com a mesma perspectiva, alguns dos objetivos específicos do Ensino da Matemática são de levar o aluno a:

> - Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe

> permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade.
>
> - Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.
>
> - Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.
>
> - Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.
>
> - Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo.
>
> - Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
>
> - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
>
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
>
> - Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade (BRASIL, 1999, p. 254).

Assim, a articulação das várias áreas do conhecimento e das disciplinas requer que seus conteúdos formativos tenham uma dose de integração, o que ratifica a importância de uma abordagem inicial dos conteúdos que utilize um caráter contextual e interdisciplinar.

Nesse âmbito, as funções exponenciais têm papel de destaque e devemos estar atentos ao fato de que o ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. O aluno precisa adquirir uma intimidade com a linguagem algébrica utilizada pelas ciências e necessária para expressar a relação entre grandezas, principal característica de uma função, o que permitirá várias conexões dentro e fora da própria matemática.

Dessa forma, aproveitando-se do fato de que são diversas as situações reais em que as funções são requisitadas para tomada de decisões no cotidiano escolar e profissional, seu ensino deve ser apresentado de maneira articuladora desde a introdução de seu conceito e, sobretudo em sua aplicabilidade, munindo-se dessa riqueza transdisciplinar que atravessa as funções. Isso permitirá que o ensino se estruture permeado de exemplos de situações contextualizadas, descrevendo-as algébrica e graficamente.

Diante disso e de todas as concepções destacadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, sugerimos algumas atividades selecionadas que demonstram as mais variadas aplicações entre funções exponenciais, bem como funções logarítmicas, e situações reais que permeiam os estudos de diversas áreas do conhecimento.

A sequência de atividades didáticas aqui sugerida – e seus respectivos aspectos – servirão como complemento importante e necessário no ato do estudo das características e comportamentos das funções exponenciais se o que se visa é explicitar o caráter interdisciplinar dessa temática. É válido ressaltar que as atividades a seguir são aqui expostas como exemplos de um caminho a se seguir, um caminho que dá aos professores e alunos a oportunidade de investigar e explorar situações-problemas de maneira integrada e contextualizada, mas que não se esgota nas sugestões desse trabalho.

Trata-se de exemplos de exercícios que podem ser aplicados em situações específicas do processo de ensino - incluindo a utilização de *softwares* dedicados ao estudo da Matemática - e que trazem, em sua essência, temáticas de áreas do conhecimento diferentes. A cada atividade serão apresentadas as articulações possíveis de se estabelecer em seu contexto, relevando inclusive as habilidades que através delas são implicitamente estimuladas no aluno no processo cognitivo de ensino-aprendizagem.

4.1 Atividade 1

Aspectos da atividade

Essa atividade relaciona conceitos da Função Exponencial à resolução de um problema de juro composto na Matemática Financeira.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Reconhecer e interpretar informações relativas ao problema;

- Formalizar a lei que descreve um determinado fenômeno;

- Manipular equações e inequações inerentes ao problema;

- Identificar e representar graficamente as variáveis em estudo;

- Montar e representar graficamente as tabelas;

- Relacionar e classificar a curva em estudo com as funções já estudadas;

- Identificar situações de crescimento e decrescimento.

Descrição da atividade

Adaptado(PAIVA, 2002) Em Matemática Financeira, diz-se que juros compostos se traduzem simplesmente como a capitalização de quantias que ocorre sempre em relação ao período anterior considerado, o que justifica e expressão 'juro sobre juro' para os juros compostos. Um capital de 10 mil reais foi depositado por uma pessoa em um banco que aplica uma taxa de juros compostos de 30$\%$ ao ano. Baseado nas informações descritas, responda:

a) Escreva a lei de formação que relaciona o valor do montante (M) e o tempo (t) em anos.

b) Verifique se a lei de formação escrita no item $a)$ representa uma função. Em caso afirmativo, indique qual variável é dependente e qual é independente.

c) Em caso afirmativo para o item $b)$, classifique a função como afim, quadrática ou exponencial. Justifique sua resposta.

d) Determine em quanto tempo o montante atingirá R$16900,00.

e) Durante quanto tempo o capital deverá ficar aplicado para que o montante supere R$16900,00 ?

f) Qual o montante acumulado a receber no final do 1º, 2º, 3º, 4º e 5º ano

g) Construa uma tabela que relaciona os valores encontrados no item $f)$, incluindo aqui o montante para t = 0.

h) Plote no sistema cartesiano ortogonal os dados da tabela construída no item $g)$, indicando a variável independente no eixo horizontal e a variável dependente no eixo vertical, e una os pontos.

i) Indique se a curva obtida no item $h)$ apresenta comportamento crescente ou decrescente. Justifique sua resposta.

4.2 Atividade 2

Aspectos da atividade

Essa atividade relaciona conceitos da Função Exponencial à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Química, Arqueologia e Antropologia.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Valorizar habilidades como leitura e interpretação;

- Reconhecer e interpretar informações relativas a problemas, construindo conjecturas;

- Utilizar conceitos de função exponencial e função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento;

- Identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema.

Descrição da atividade

Adaptado(IEZZI et al., 2013) Essa atividade se baseia no texto abaixo, que deverá ser previamente apresentado.

Texto: Datando com o carbono-14

"A datação por carbono-14 é um método usado pelos cientistas, principalmente arqueólogos, antropólogos e químicos, para determinar a idade aproximada dos mais diversos artefatos (ossos, manuscritos antigos, tecidos vegetais, etc.).

Os especialistas estimam que esse método funciona bem para datações de objetos que tenham entre 100 e 70 000 anos de idade aproximadamente.

Vamos dar uma ideia de como isso funciona. O carbono-14 é radioativo e se desintegra produzindo nitrogênio-14. Sua meia-vida é de 5730 anos, isto é, a cada 5730 anos restará apenas metade dos átomos de carbono-14 (indicaremos por C-14). Os seres vivos recebem o C-14 através de alimentos e água e mantêm um nível constante deste elemento no corpo enquanto permanecem com vida. Quando morrem, o C-14 que se desintegra não é mais substituído, de modo que o nível de C-14 diminui pela metade a cada 5730 anos até ser praticamente nulo. Através de uma moderna técnica de medição é possível calcular o nível de C-14 em uma amostra e, através dela, podemos estimar o tempo necessário para que o nível de C-14 existente no corpo antes de sua morte pudesse chegar a esse nível medido.

Essa técnica valeu a Willard Frank Libby (1908 - 1980) o Prêmio Nobel de Química em 1960".

Com base no texto anterior e utilizando-se da função exponencial $n(x) = \dfrac{n_0}{2^x}$, em que x indica a quantidade de meias-vidas, n_0 o número de átomos correspondente à atividade inicial e $n(x)$ o número de átomos em atividade após x meias-vidas, resolva os seguintes problemas:

a) Em um pedaço de carvão vegetal, encontrado em uma cova, verificou-se que a taxa de decomposição do C-14 é 1/8 da taxa de amostra viva com o mesmo tamanho desse carvão. Qual é a sua idade?

b) Deseja-se estimar a idade de um material orgânico por datação do C-14. Medições feitas em uma amostra indicam que a quantidade de átomos radioativos de C-14 é 60$\%$ da quantidade de átomos radioativos de uma amostra viva do mesmo tamanho desse material. Faça uma estimativa da idade dessa amostra colhida, use as aproximações log2=0,301 e log3=0,4771.

c) Sabendo que 20$\%$ de uma substância radioativa decai em 10 anos, qual é a meia-vida dessa substância? Use a aproximação log2=0,301.

d) Para responder esta questão, o texto abaixo deverá ser lido previamente.

Texto: Os Manuscritos do Mar Morto

"Conta-se que, me 1947, um pastor chamado Mohamed Adh-Dhib descobriu, casualmente, nas estreitas Cavernas de Qumran, próximo ao Mar Morto (na região fronteiriça entre Israel e Jordânia), um conjunto de rolos e pergaminhos de papiro, que viriam a ser conhecidos como os *Manuscritos do Mar Morto*. A coleção de manuscritos é extensa, tendo sido encontrados fragmentos de quase todos os livros da Bíblia Hebraica (correspondentes ao Antigo Testamento). Atualmente, estão guardados no Museu do Livro, em Jerusalém - Israel.

Em 1948, uma vez provada a autenticidade dos pergaminhos, tornou-se fundamental descobrir sua data de confecção, a partir do método do carbono-14. O químico Libby, citado no texto anterior, ficou encarregado de realizar essas medições. Ele constatou que atividade do carbono-14 nos manuscritos era de aproximadamente 11 $dpm.g^{-1}$ (desintegrações por minuto por grama) ".

Sabendo que a atividade radioativa do C-14 no tecido vivo é de 14 $dpm.g^{-1}$, determine a idade aproximada dos Manuscritos do Mar Morto. Use as aproximações $ln11 = 2,3978$, $ln14 = 2,6391$ e $ln2 = 2,6931$, e opcionalmente uma calculadora para obtenção de valores com várias casas decimais.

4.3 Atividade 3

Aspectos da atividade

Essa atividade identifica conceitos da Função Exponencial à resolução de um problema relacionado, ao mesmo tempo, à dois tópicos da própria disciplina Matemática, que são: a Matemática Financeira e as Progressões Geométricas.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Reconhecer e interpretar informações relativas ao problema;

- Formalizar a lei que descreve um determinado fenômeno;

- Manipular equações inerentes ao problema;

- Identificar a estreita relação entre funções do tipo exponenciais e as características de uma progressão geométrica;

- Identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema;

- Identificar e representar graficamente as variáveis em estudo.

Descrição da atividade

Adaptado(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) Um investidor interessado em obras de arte, ao visitar uma exposição, decide comprar uma das obras que está a venda, por R$8 000,00. Ele espera que seu investimento sofra uma valorização de 10$\%$ ao ano. Baseado nas informações descritas, responda:

a) Escreva a lei de formação que relaciona o valor da obra adquirida (V) e o tempo (t) em anos.

b) Verifique se a lei de formação escrita no item $a)$ representa uma função. Em caso afirmativo, classifique a função em questão e indique qual variável é dependente e qual é independente.

c) Calcule o valor da obra, estimado pelo investidor, no final do 1º, 2º, 3º, 4º e 5º ano.

d) Identifique se a sequência formada pelos valores encontrados no item $c)$, pode ser classificada como uma progressão aritmética ou progressão geométrica, e escreva a fórmula do termo geral da progressão identificada. Justifique sua resposta.

e) Relacione a lei de formação escrita no item $a)$ com a fórmula do termo geral da progressão identificada no item $d)$. Escreva o nome da função em que ambas podem servir de exemplo. Justifique sua resposta.

f) Seis anos após a compra, qual será o valor da obra?

g) Em quanto tempo, aproximadamente, a obra dobrará de valor? (use as aproximações log2=0,301 e log1,1=0,041).

h) Construa e compare os gráficos que podem ser obtidos utilizando-se: a lei de formação descrita no item $a)$, e a fórmula do termo geral da progressão descrita no item $d)$.

4.4 Atividade 4

Aspectos da atividade

Nessa atividade, foi explorado o conceito de Função Exponencial dando ênfase à resolução de um problema que envolve as Ciências Biológicas.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Reconhecer e interpretar informações relativas ao problema;

- Manipular equações inerentes ao problema;

- Reconhecer e explorar os possíveis coeficientes de uma função exponencial;

- Identificar e representar graficamente as variáveis em estudo;

- Aprender a fazer tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica;

- Relacionar e classificar a curva em estudo com as funções já estudadas;

- Identificar a ocorrência, ou não, de grandezas proporcionais;

- Identificar situações de crescimento e decrescimento.

Descrição da atividade

Adaptado(IEZZI et al., 2013) Um dos perigos na alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar ao óbito. Entre eles, podemos destacar a Salmonella e as linhagens de Escherichia coli. Atitudes simples, como lavar bem as mãos e os alimentos consumidos in natura, como frutas e verduras, armazenar os alimentos em locais apropriados, entre outros, ajudam a prevenir a contaminação por microrganismos.

Uma maionese mal conservada causou mal-estar nos frequentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei $n(t) = 200.2^{at}$, em que $n(t)$ é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese t horas após o início do almoço e a é uma constante real. Baseado nas informações descritas, responda:

a) Determine o número de bactérias no instante em que foi servido o almoço.

b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 800, determine o valor da constante a.

c) Determine o número de bactérias após 12 horas da realização do almoço. Faça o mesmo para 15 horas após o almoço.

d) Identifique a variável dependente e independente na lei dada, que descreve o crescimento das bactérias.

e) Utilizando-se da constante encontrada no item $b)$ e de uma calculadora científica, se necessário, construa uma tabela que relaciona o número de bactérias encontradas após t horas do início do almoço, para t igual a: 0, 3, 6, 9, 12 e 15 horas.

f) Plote no sistema cartesiano ortogonal os dados da tabela construída no item $e)$, indicando a variável independente no eixo horizontal e a variável dependente no eixo vertical, e una os pontos.

g) A curva obtida no item $f)$ indica o comportamento de uma função afim, quadrática ou exponencial. Justifique sua resposta.

h) O gráfico é uma função crescente ou decrescente? Justifique.

i) E as grandezas envolvidas, podem ser classificadas como proporcionais? Justifique.

4.5 Atividade 5

Aspectos da atividade

Nessa atividade, foi explorado o conceito de Função Exponencial dando ênfase à resolução de um problema intimamente relacionado à Física.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Reconhecer e interpretar informações relativas ao problema;

- Manipular equações inerentes ao problema;

- Reconhecer e explorar os possíveis coeficientes de uma função exponencial;

- Classificar a lei de formação em estudo com as funções já estudadas;

- Utilizar conceitos de função exponencial e função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento;

- Identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema;

- Identificar situações de crescimento e decrescimento.

Descrição da atividade

Adaptado(BORDEAUX; ANTUNES; RUBINSTEIN, 2008) "A lei do resfriamento de Newton estabelece que, quando um corpo é colocado em um ambiente mantido a temperatura constante, sua temperatura varia de modo a ser a mesma do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente."

De posse dessa informação, segue um exemplo aplicado à lei do resfriamento de Newton.

O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h30min, o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura que descreve o resfriamento do corpo é dada por $D(t) = D_0.2^{-2\alpha t}$, onde t é o tempo em horas; D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante $t = 0$; $D(t)$ é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer; α é uma constante positiva.

Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	Hora	**Temperatura do corpo(°C)**	**Temperatura do quarto(°C)**	**Diferença de temperatura (°C)**
t = ?	Morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0	22h 30min	32,5	16,5	D(0) = D_0 = 16
t = 1	23h 30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Considerando os valores aproximados $log_2 5 = 2,3\ e\ log_2 3 = 1,6$, determine:

a) a constante α;

b) a hora em que a pessoa morreu.

c) utilizando-se da constante encontrada no item $a)$ e o valor D_0 já conhecido, reescreva a função que relaciona a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer.

d) a função descrita no item $c)$ é uma função exponencial? Justifique.

e) sobre o gráfico que descreve tal função, podemos afirmar que ele apresenta comportamento crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

4.6 Atividade 6

Aspectos da atividade

Essa atividade relaciona conceitos das Funções Exponencial e Logarítmica, à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Química, Farmacologia, Geologia e Agronomia.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Valorizar habilidades como leitura e interpretação;

- Reconhecer e interpretar informações relativas a problemas, construindo conjecturas;

- Utilizar conceitos de função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento;

- Identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema.

Descrição da atividade

Adaptado(JOAMIR, 2010) Essa atividade se baseia no texto abaixo, que deverá ser previamente apresentado.

Texto: A aplicabilidade do pH

"O pH, ou potencial hidrogeniônico, permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons hidrogênio, em mol/L.

Em 1909, com base em diversos estudos realizados em físico-química na segunda metade do século XIX e início do XX, o bioquímico dinamarquês Soren P. Sorensen (1868 - 1939) estabeleceu uma maneira para expressar o pH de uma substância utilizando o logaritmo negativo da sua concentração de íons hidrogênio ($[H^+]$), ou seja, $pH = -log[H^+]$.

A partir desse conceito, da obtenção experimental do produto iônico da água ($[H^+][OH^-]$), que corresponde a 1.10^{-14} a 25°C, e do pOH, determinado por meio do logaritmo negativo da concentração de íons hidroxila ($[OH^-]$) em mol/L, ou seja, $pOH = -log[OH^-]$, foi obtida a relação pH + pOH = 14, e desenvolveu-se uma escala de 0 a 14, por meio da qual uma solução aquosa a 25°C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica.

solução ácida: pH < 7 solução neutra: pH = 7 solução básica: pH > 7

A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Assim, o pH adquiriu importância no segmento industrial, permanecendo até os dias atuais, nos quais estudos envolvendo pH não são mais exclusividade dos químicos, sendo realizados também por profissionais de diversas áreas, como farmacêuticos, geólogos e agrônomos ".

Com base no texto anterior, analise a seguinte situação: um agrônomo ao verificar as condições do solo para o início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que quando representado por um valor entre 6 e 7 tende a ser mais fértil.

a) Em uma propriedade rural, a produtividade máxima da feijão foi obtida com o pH

6,4 do solo. Determine a concentração de íons hidrogênio apresentada nesse solo.

b) Considerando o pH, a 25°C, das substâncias a seguir, classifique-as em ácidas, básicas ou neutras.

i) leite da magnésia: 10 < pH < 11

ii) suco de limão: 2 < pH < 3

iii) leite: 6 < pH < 7

iv) água pura: pH = 7

v) sangue: 7 < pH < 8

c) Considerando $[H^+][OH^-] = 1.10^{-14}$ e utilizando as fórmulas $pH = -log[H^+]$ e $pOH = -log[OH^-]$, obtenha a relação pH + pOH = 14.

4.7 Atividade 7

Aspectos da atividade

Essa atividade relaciona conceitos das Funções Exponencial e Logarítmica, à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Geografia e Economia.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Valorizar habilidades como leitura e interpretação;

- Reconhecer e interpretar informações relativas a problemas, construindo conjecturas;

- Utilizar conceitos de função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento;

- Identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema.

Descrição da atividade

Adaptado(JOAMIR, 2010) Essa atividade se baseia no texto abaixo, que deverá ser previamente apresentado.

Texto: A importância do IDH

O índice de Desenvolvimento Humano (IDH) foi elaborado em 1990 pelo economista paquistanês Mahbub ul Haq, com a colaboração do economista indiano Amartya Sen. Esse índice, que leva em conta não apenas a dimensão econômica, mas também a longevidade e a educação da população, é utilizado pela Organização das Nações Unidas (ONU), em seu relatório anual de desenvolvimento humano, para avaliar a situação das nações do mundo.

Assim, o IDH de um país é determinado a partir de três indicadores:

i) índice da esperança de vida, que está relacionado à longevidade da população;

ii) índice do grau de instrução, que visa a retratar a educação da população;

iii) índice do PIB, referente à economia.

Para que a dimensão econômica de cada país posse ser expressa de maneira equivalente na determinação do IDH, é necessário eliminar as diferenças de custo de vida entre o países. Desse modo, o PIB per capita de cada país é ajustado por meio de um índice denominado PPC - Paridade do Poder de Compra -, levando em conta o câmbio de cada moeda nacional. A partir do valor x obtido (em dólares), o índice do PIB é calculado da seguinte maneira.

$$\text{Índice do PIB} = \frac{logx - 2}{2,602}$$

Com base no texto anterior, analise a seguinte situação: em 2005, a Islândia apresentou um PIB per capita, ajustado por meio do PPC, de 36510 dólares, o que resultou em um índice do PIB igual a 0,985. Esse índice, bem como os outros dois levados em conta na determinação do IDH, proporcionou ao país o maior IDH do mundo naquele ano.

a) Sabendo que o índice do PIB do Brasil em 2005 foi 0,740 , qual o PIB per capita aproximado do país naquele ano? Considere $10^{0,92548} = 8,423256$.

b) Quando o índice do PIB de um país corresponde a um valor entre 0,8 e 0,9 , entre que valores monetários o seu PIB per capita está compreendido? Considere $10^{0,3418} = 2,196848$ e $10^{0,0816} = 1,206702$.

c) Em sua opinião, qual das três dimensões utilizadas no cálculo do IDH (economia, longevidade e educação) melhor representa a qualidade de vida da população de um país? Justifique.

d) Você acredita que o IDH de um país realmente corresponde à qualidade de vida que ele representa? Justifique.

4.8 Atividade 8

Aspectos da atividade

Essa atividade relaciona conceitos da Função Exponencial com a resolução de um problema de aplicação que envolve outra área do conhecimento como a Psicologia.

Objetivos da atividade

A atividade tem por objetivos fazer com que os alunos consigam:

- Reconhecer e interpretar informações relativas a problemas, construindo conjecturas;

- Utilizar conceitos de função exponencial para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento;

- Identificar a necessidade do uso de potenciação na resolução de equações inerentes ao problema;

- Identificar a necessidade de realizar cálculos envolvendo porcentagem na resolução de problemas de aplicação.

Descrição da atividade

Adaptado(IEZZI et al., 2013) "Curva de Aprendizagem é uma conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo."

De posse dessa informação, segue um exemplo aplicado à Curva de Aprendizagem:

Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após t semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar p unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona p e t é: $p(t) = 55 - 30.e^{-0,2t}$. Baseado nas informações descritas, responda:

a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?

b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use a aproximação $e^{0,2} = 1,2$.

c) Estima-se que a produtividade de um funcionário com duas semanas de experiência aumente quantos por cento se comparada com o dia em que foi contratado?

d) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?

De maneira geral todas as atividades aqui expostas são exercícios a serem aplicados no contexto da disciplina da matemática, mas, por seu conteúdo, podem ser contextualizadas com outras disciplinas trabalhando-se de maneira multidisciplinar. Pode parecer singela a articulação, mas ao inserir uma temática que é conhecida como sendo parte integrante e específica de uma ciência à outras ciências, o que se faz é reforçar a ideia de que seu ensino não pode basear-se apenas em um objetivo isolado e, muitas vezes sem sentido para o aluno, mas num processo de aprendizagem que dê aos seus conceitos uma significação articuladora e, portanto necessária ao próprio caminhar escolar e, porque não, profissional que o aluno visa.

Naturalmente, a intenção dos exemplos aqui expostos não é esgotar as possibilidades de atividades possíveis à interdisciplinaridade das funções exponenciais, mas apontar para um caminho que trilhe, na própria concepção de aprendizado conotada pelo aluno, esse caráter transversal. Acreditamos que quando atividades englobam explicitamente temáticas de áreas de conhecimento diferentes, as conexões entre abordagens distintas começam a fazer sentido de forma tão natural quanto inerentes, e junto ao "fazer sentido", começam também a despertar o interesse por novas descobertas e conexões.

Considerações Finais

Por se tratar de um dos tópicos matemáticos com a maior gama de aplicações em problemas naturais e com uma diversa possibilidade de articulação entre as disciplinas gerais do ensino médio, a função exponencial ganha relevo em seus principais aspectos do processo de ensino quando se pensa em interdisciplinaridade. De fato, o processo de educação no Brasil tem sido orientado para que haja uma evolução, do rigor da aplicação de métodos isolados à flexibilidade do diálogo entre as disciplinas diversas. E isso é facilmente constatado nos volumes dos Parâmetros Curriculares Nacionais ao longo dos últimos anos.

Não basta apenas lançar as ideias ou as técnicas, é preciso articulá-las de uma maneira que crie visivelmente um campo funcional entre elas e a praticidade da vida diária. Claro que quando se fala da matemática temos dois lados a se considerar nessa dita 'vida diária', uma que diz respeito às atividades corriqueiras de nosso dia a dia e outra que diz daquelas que se incluem dentro do campo profissional e suas especificidades. A questão é que não é pouco comum, entre a comunidade discente, a dificuldade de ver as relações entre o ensino da matemática e sua aplicabilidade prática, noção que talvez seja mesmo reforçada por uma metodologia que é, muitas vezes, apenas focada na apresentação e cobrança de um conteúdo isolado.

Ora, nosso cérebro é composto de conexões! É sabido, pelas diversas ciências humanas e da saúde que o processo cognitivo, ou seja, de elaboração de um conhecimento, perpassa antes o campo da percepção. Perceber não é apenas notar ou ver. O processo da percepção é de caráter construtivo: algo acontece no campo exterior, esse algo é captado pelos sentidos humanos , analisado paulatinamente e concebido numa representação interna na forma de uma hipótese. É através da percepção que a informação é processada e que se consegue formar a ideia daquele objeto ou fato, o que significa observar diferentes qualidades com base nas características deles e uni-las por intermédio da percepção para determinar o que são e suas articulações com o mundo real e prático.

Nesse sentido, quanto maior a oferta de características articuladoras, maior será a percepção da aplicabilidade de um conceito ou técnica e mais fácil será o processo de aprendizagem dele. Com essa hipótese é que trabalhamos a função exponencial dentro do campo da interdisciplinaridade. Não basta o conhecimento matemático restrito à informação de forma fragmentada, pois como já dito aqui, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras. É preciso criar meios facilitadores para que o conhecimento seja adquirido de maneira tão natural quanto possível for e seja visto como parte do próprio viver diário, e não apenas como um requisito para ser aprovado no ano letivo.

Como vimos, hoje um dos maiores desafios da educação básica é promover as condições para que haja uma convergência de toda a comunidade escolar em torno de um projeto pedagógico integrado. Dentro de suas possibilidades, que articulam a física, a química, a geografia e interfere em estudos de tantas outras áreas do conhecimento e é aplicada em tantas outras profissões das mais diferentes ciências, a função exponencial dá ao professor um rico instrumento de articulação e interdisciplinaridade.

A obtenção do conhecimento das funções exponenciais – e suas variações – deve, portanto atrelar-se não apenas no saber fazer, mas no pensar matemático. Deve estimular a capacidade de argumentação, de elaborar hipóteses e relações, de revolver problemas de diversos tipos e buscar certa regularidade entendendo-a como flexível – muito embora às vezes padronizada. Esses elementos são fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e, sem dúvidas, colaboram para o desenvolvimento de outras habilidades essenciais ao indivíduo ao longo de sua vida.

Nesse sentido, o presente trabalho sugere uma nova intervenção, no que tange ao estudo das funções exponenciais, com o propósito de que sirva aos objetivos pretendidos no estudo da matemática, assim como os objetivos do estudo das outras disciplinas comuns ao educando no nível médio de ensino, podendo ser utilizado, por exemplo, em pesquisas que ajudem a dar suporte ao desenvolvimento de projetos de carácter interdisciplinar, desenvolvidos com a participação de toda a comunidade escolar.

Que fique essa ideia como prevalecendo aqui: não basta apenas somar conceitos e regras, não basta dividir o conhecimento, ele deve ser multiplicado, integrado, elevado à potência inerente ao próprio ser humano, àquela de superar seus limites, transpor obstáculos e explorar todas as possibilidades ao seu redor.

Que a precisão da matemática não seja estanque, mas se constitua elemento facilitador para a vida que nos convida todos os dias a sermos mais que o que acreditamos ser.

Referências

BORDEAUX, A. L.; ANTUNES, C.; RUBINSTEIN, C. *Multicurso Ensino Médio: Matemática, segunda série*. 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2008. Citado 8 vezes nas páginas 49, 50, 51, 56, 57, 58, 72 e 74.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 21.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino fundamental*. Brasília, DF, 1998. Citado na página 12.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília, DF, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 42, 65, 66 e 67.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília, DF, 2002. Citado na página 12.

BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF, 2006. Citado na página 43.

BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 49.

CORREIA, J. M. T. *A Evolução do Conceito da Função na Segunda Metade do Século XVIII*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Lisboa, 1999. Citado na página 18.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 13, 16, 17 e 44.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 70, 73 e 79.

JOAMIR. *Novo olhar matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 53, 54, 59, 61, 76 e 77.

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 13, 30, 44, 45 e 46.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 64.

MAOR, E. *e: A História de um Número*. Rio de Janeiro: Record, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 36.

PAIVA, M. *Matemática: conceitos, linguagem e aplicações*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2002. Citado na página 68.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. Citado na página 19.

SÁ, P. F.; SOUZA, G. S.; SILVA, I. D. B. A construção do conceito de função: Alguns dados históricos. *Traços (UNAMA)*, v. 6, n. 11, p. 123–140, 2003. Citado na página 17.

VÁZQUEZ, S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función através de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 4, n. 16, p. 141–151, 2008. Citado na página 15.

APÊNDICE A

Potências de expoente inteiro, racional e real

Procuremos agora atribuir um significado à potência a^n, quando n é um número inteiro (que pode ser negativo ou zero). Isto deve ser feito de modo que seja mantida a regra fundamental $a^m.a^n = a^{m+n}$.

Em primeiro lugar, qual deve ser o valor de a^0 ? Como a igualdade $a^0.a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, teremos $a^0.a = a$. Logo, a única definição possível é $a^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, logo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Dessa forma, se quisermos estender o conceito de potência do número real $a > 0$ para admitir expoentes inteiros quaisquer e ainda preservar a igualdade $a^m.a^n = a^{m+n}$, a única definição possível consiste em pôr $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental

$$f(m + n) = f(m).f(n),$$

é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Em particular, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{-n} < 1 < a^n$ e, para $0 < a < 1$, tem-se $a^n < 1 < a^n$, pois $-n < 0 < n$ e $a^0 = 1$.

De $a^m.a^n = a^{m+n}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$ ainda quando $m, n \in \mathbb{Z}$.

Prosseguindo, vejamos que sentido pode ser dado à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), de modo que continue válida a regra $a^r.a^s = a^{r+s}$, onde s é também um número racional. Desta igualdade resulta, que se deve ter, para $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\ldots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto, a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, consiste em pôr

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Depois de dar esta definição, há alguns detalhes que devem ser examinados. Em primeir lugar, como se tem $m/n = mp/np$ para todo $p \in \mathbb{N}$, é preciso mostrar que $a^{m/n} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ a fim de que a definição não seja ambígua. Em segundo lugar, deve-se mostrar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r.a^s = a^{r+s}$ para $r,\ s \in \mathbb{Q}$. E finalmente, cumpre provar que a função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Dado $a > 0$, a função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetiva. Noutras palavras, fixado $a > 0$, nem todo número real positivo é da forma a^r com r racional. Isto fica evidente se observarmos que, como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, o mesmo deve ocorrer com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, porém $\mathbb{R}^+$ não é enumerável. De um modo mais elementar, este fato pode ser ilustrado mediante um exemplo. Tomemos $a = 10$ e indaguemos se existe algum número racional $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$ ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde $m,n \in \mathbb{N}$. É claro que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, 10^m se escreve como 1 seguido de m zeros enquanto 11^n não pode ter esta forma. Logo, o número real positivo 11 não pertence à imagem da função $r \mapsto 10^r$, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^+$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda parte em $\mathbb{R}^+$, desde que seja $a \neq 1$. Noutras palavras, $\{a^r; r \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{R}^+$. Este é o conteúdo do lema abaixo.

Lema: Fixado o número real positivo a $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \tfrac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$\tfrac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1,\, a^{1/n},\, a^{2/n},\, \cdots,\, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset \left[1, a^M\right]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{m/n}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.