

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPE  
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

A MATEMÁTICA NA NATUREZA

Claudio Eduardo Pupim

DOURADOS - MS

2013

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPE  
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

## A MATEMÁTICA NA NATUREZA

Claudio Eduardo Pupim

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Mestre em Matemática, tendo como orientadora a Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maristela Missio.

DOURADOS - MS

2013

P985m Pupim, Cláudio Eduardo

A matemática na natureza/ Cláudio Eduardo Pupim.  
Dourados, MS: UEMS, 2013.  
47p. ; 30cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em  
Matemática) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul,  
2013.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Maristela Missio.

1.Espiral logaritmica 2. Ensino 3. Matemática (Ensino  
Fundamental e Médio). I. Título.

CDD 20.ed. 512.922

## FICHA DE APROVAÇÃO

Claudio Eduardo Pupim

Título do Trabalho: A MATEMÁTICA NA NATUREZA

Este trabalho de conclusão de curso – TCC do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Sociedade Brasileira de Matemática em parceria com a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul foi avaliado e aprovado, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maristela Missio – UEMS  
Orientadora – Presidente da Banca

---

Msc. Rildo Pinheiro do Nascimento - UEMS  
Membro da Banca

---

Prof. Dr. Jair da Silva - UFMS  
Membro da Banca

Dourados - MS, 08 de março de 2013.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me iluminado nesta caminhada, me concedendo muita saúde para batalhar por todos os meus objetivos.

A minha esposa Jeanne Giselle Gomes Silva Pupim por estar sempre ao meu lado nesta nova fase de vida superando os momentos turbulentos, incentivando, contribuindo, apoiando e respeitando o meu tempo de estudo.

Aos meus pais Zélio e Adélia que, com dedicação, amor e respeito me concederam educação, por me colocarem diante de suas orações para conquistar mais uma vitória.

Aos meus irmãos Ivan, Marcelo e Deise que estavam presentes sempre nos momentos de necessidade. Enfim, a todos os meus familiares que sempre torceram por min.

A minha orientadora Maristela Missio por ter me aceitado como seu orientando. Uma profissional dedicada, apaixonada pelo que faz, fazendo as orientações necessárias e suficientes para chegar a um bom resultado.

A equipe de Docentes da UEMS que, durante a minha pós-graduação forneceram seus conhecimentos adquiridos em uma longa trajetória de estudos em suas vidas profissionais e de forma direta colaboraram para a realização deste Trabalho.

Aos colegas da sala, pelo carinho nos momentos de dificuldades e pela disponibilidade de cada um ajudar o outro nos momentos que mais precisamos.

A equipe do PROFMAT pela oportunidade de fazermos um mestrado parcialmente dentro de nossas residências, pois os encontros foram apenas um dia semanal.



“A mente que se abre a uma nova idéia jamais  
voltará ao seu tamanho original.”

*Albert Einstein*

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo da espiral logarítmica (*spira mirabilis*), que pode ser visualizada na natureza, tanto na fauna como na flora. Também conhecida como espiral equiangular, é uma curva repleta de propriedades matemáticas, gerada por uma trajetória em que o ângulo formado com a reta tangente é sempre constante. Com o objetivo de mostrar ao aluno que é possível trabalhar os conteúdos matemáticos elaborados cientificamente de forma agradável e prazerosa, apresentamos as propriedades da espiral, sua equação; comportamento geométrico; aplicação na natureza; etc., utilizando conceitos e propriedades das funções exponenciais e logarítmicas; progressões aritméticas e geométricas; da trigonometria; geometria; etc., ministrados nas séries finais ensino fundamental e no médio. A metodologia aplicada na sua elaboração foi a pesquisa bibliográfica constituída de livros e publicações diversas colocados a disposição em sites da internet. Conhecer as propriedades e a beleza da espiral logarítmica é importante para motivar o interesse dos alunos pelos estudos matemáticos e consequentemente a aprendizagem.

**Palavras-Chave:** Espiral; logaritmo; natureza.



## **ABSTRACT**

In this assignment we present a study about logarithmic spiral (spiral mirabilis), that can be viewed in nature, as in fauna as in flora. It is also known as equiangular spiral, it is a curve full of math proprieties, created by a trajectory where the angle formed with de tangent route is always constant. With the objective to show to the students that it is possible to work with math subjects elaborated scientifically in a lovely and pleasure way, we present the proprieties of the spiral, its equation, geometric behavior, application in nature, etc.; using conceptions and proprieties from exponential and logarithmic functions; arithmetic and geometric progressions; trigonometry; geometric; etc., all of them taught in the final series of Elementary School and High School, too. The methodology used in its elaboration was the bibliography search composed by a vary of books and publishers found on the internet. Knowing the proprieties and the beauty of the logarithmic spiral is too relevant to motivate the interest of the students by the math studies and, consequently, the learning.

**Key Words:** Spiral; Logarithm; Nature.

## SUMÁRIO

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | Introdução.....  | 11 |
| 1.1   | Objetivos.....   | 12 |
| 1.2   | Público alvo.....  | 12 |
| 1.3   | Pré-requisitos.....  | 12 |
| 1.3.1 | Função exponencial.....  | 13 |
| 1.3.2 | Função logarítmica.....  | 15 |
| 1.3.3 | Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.....                     | 17 |
| 1.3.4 | Coordenadas polares.....   | 22 |
| 2     | Espirais Logarítmicas.....   | 23 |
| 2.1   | Um pouco da história das espirais.....                                 | 23 |
| 2.2   | Equações que descrevem as espirais logarítmicas.....                   | 25 |
| 2.2.1 | Caracterização geométrica da espiral de Arquimedes.....                | 26 |
| 2.2.2 | Caracterização geométrica da espiral logarítmica.....                  | 26 |
| 2.3   | A construção das espirais.....   | 31 |
| 2.3.1 | Usando o retângulo de ouro.....  | 32 |
| 2.3.2 | Usando o triângulo de ouro.....  | 34 |
| 3     | A Beleza da Natureza e as Espirais Logarítmicas.....                   | 36 |
| 3.1   | A espiral logarítmica vista na natureza.....                           | 36 |
| 3.2   | O mergulho certo do Falcão.....  | 37 |
| 3.3   | A Espiral na Biologia.....   | 37 |
| 3.4   | A espiral nos planetas.....  | 38 |
| 4     | Aplicações do contexto de espirais no ensino básico.....               | 40 |
| 4.1   | Construção da espiral áurea a partir da justaposição de quadrados..... | 40 |
| 4.2   | Relações áureas em objetos que têm a forma retangular.....             | 42 |
| 4.3   | Relações áureas em Biologia: Número de pétalas de flores.....          | 43 |
| 4.4   | Jogo de Contagem “Fibonacci Nim”.....                                  | 44 |
| 5     | Considerações Finais.....  | 46 |
| 6     | Referências Bibliográficas.....  | 47 |

## 1 INTRODUÇÃO

Um instrumento para tornar a matemática mais interessante é fazer o aluno perceber e apreciar sua beleza na natureza. A matemática está presente através das espirais: nas flores; frutas; disposição das folhas nas arvores; nas conchas; nos chifres dos animais; na cóclea do ouvido; nos furacões; na trajetória dos falcões e insetos; etc. Espiral é uma linha curva plana que gira em torno de um ponto central chamado pólo, dele se afastando ou se aproximando segundo uma determinada lei. As espirais mais conhecidas são: espiral de Arquimedes, logarítmica, de Fibonacci ou espiral de ouro, de Fermat, hiperbólica, de Lituus e clotóide.

A espiral logarítmica tem a propriedade de manter constante o ângulo em que o raio vetor corta a curva. Untley (1985) dizia que a espiral não possui fim, ou seja, ela pode crescer para fora ou para dentro indefinidamente, sem alterar seu formato.

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre as espirais logarítmicas enfocando sua história, propriedades, equações e aplicações relacionadas com a natureza.

Este Trabalho de Conclusão de Curso está organizado da seguinte forma:

No primeiro Capítulo explicitamos os conceitos e propriedades básicas dos conteúdos matemáticos necessários para uma compreensão satisfatória das espirais logarítmicas.

No segundo Capítulo apresentamos a história das espirais, suas propriedades e sua caracterização através das funções exponenciais, logarítmicas, progressões aritméticas e geométricas e da trigonometria básica. Apresentamos, também, sua construção com régua e compasso usando o retângulo e o triângulo de ouro.

No terceiro Capítulo abordamos a beleza e a caracterização das espirais encontradas na natureza, enfatizando a trajetória descrita por um falcão peregrino ao atacar sua presa, a espiral na Concha de *Nautilus* e a espiral nos planetas.

E por fim, no quarto capítulo destacamos algumas atividades possíveis a serem realizadas com alunos do ensino básico envolvendo aplicações sobre espirais no cotidiano.

## 1.1 OBJETIVOS

- 1- Apresentar um estudo sobre as espirais logarítmicas enfocando sua história, propriedades, equações e aplicações relacionadas com a natureza.
- 2- Relacionar as propriedades da espiral com os conteúdos matemáticos (funções, progressões aritméticas e geométricas, trigonometria, geometria, etc.) ministrados nas séries finais ensino fundamental e no médio, a fim de mostrar ao aluno que é possível trabalhar os conteúdos elaborados cientificamente de forma agradável e prazerosa.
- 3- Desenvolver a equação da espiral com base num importante teorema que relaciona a função exponencial com as progressões aritméticas e geometrias.
- 4- Construir a espiral utilizando régua e compasso.
- 5- Mostrar que a matemática possui aplicações práticas importantes na natureza.

## 1.2 PÚBLICO ALVO

Em diversas áreas das ciências pode-se perceber a presença da espiral logarítmica, a qual é dotada de uma gama de propriedades matemáticas presentes em conteúdos como: funções exponenciais e logarítmicas; progressões aritméticas e geométricas; trigonometria; etc. Dessa forma, o público alvo para este trabalho é o estudante das séries finais do ensino fundamental com atividades de geometria e estudantes do ensino médio, no primeiro ano com os conceitos de funções e progressões, seguindo no segundo ano com os conceitos de trigonometria.

## 1.3 PRÉ-REQUISITOS

Neste projeto os alunos necessitarão de alguns conhecimentos prévios como: o de função exponencial, pois a espiral tem sua equação representada na forma exponencial; o de função logarítmica, pois a equação da espiral é determinada através da inversão de uma expressão logarítmica; o de progressões aritméticas e geométricas, pois aumentando o ângulo da espiral aritmeticamente percebe-se um aumento geométrico da distância da espiral em relação ao pólo e, para finalizar, o de

coordenadas polares para transformar um ponto, um ângulo e um pólo em um sistema de coordenadas.

Nas seções seguintes desenvolveremos alguns tópicos importantes dos pré-requisitos acima citados, com base em Lima, (2009) e Lima et al., (2006).

### 1.3.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

**Definição 1:** Seja  $a$  um número real positivo e diferente de 1. A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , indicada pela expressão  $f(x) = a^x$ , é chamada de exponencial se satisfazer as seguintes propriedades para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ :

- i)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- ii)  $a^0 = 1$
- iii)  $x < y \rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$
- iv)  $x < y \rightarrow a^x > a^y$  quando  $0 < a < 1$

Note que, se uma função tem a propriedade i), ou seja,  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ , então  $f$  não pode assumir o valor 0, a menos que  $f$  seja identicamente nula.

De fato, suponha que exista  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) = 0$ .

Assim, para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos,

$$f(x) = f(x + (x_0 - x_0)) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

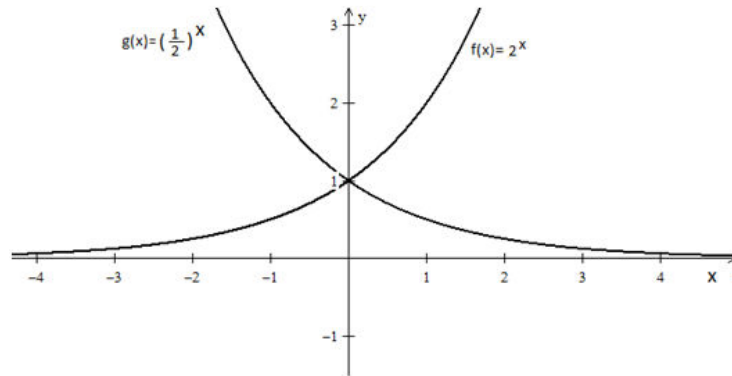
Logo, como  $f(x) = 0$  para qualquer  $x$  real temos que  $f$  é identicamente nula.

Vejam que, se  $f$  tem a propriedade i) e não é identicamente nula então,  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . De fato,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0,$$

pois se descarta a possibilidade de ser zero.

Pela propriedade iii) percebe-se que  $f$  é crescente se  $a > 1$  e que  $f$  é decrescente se  $0 < a < 1$ , conforme exemplo na Figura 1.



**Figura 1:** Funções  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

**Lema1:** Fixado o número real  $a \neq 1$ , em todo intervalo de  $\mathbb{R}^+$  existe alguma potência de  $a^r$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ .

**Demonstração:** Dados  $0 < p < q$  devemos achar  $r \in \mathbb{Q}$  tal que a potência  $a^r$  pertença ao intervalo  $[p, q]$ , isto é,  $p \leq a^r \leq q$ . Suponha que  $a$  e  $p$  são números maiores do que 1, os outros casos podem ser analisados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais  $M$  e  $n$  tais que,

$$p < q < a^r \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{q-p}{a^M}\right)^n$$

Assim,

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{q-p}{a^M}$$

Subtraindo 1 dos membros das desigualdades e depois multiplicando por  $a^M$ , tem-se

$$0 < a^M \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) < q - p$$

Fazendo  $m \leq M$  tem-se

$$0 < a^{\frac{m}{n}} \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) < q - p$$

$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < q - p$$

Assim, as potências  $a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^M$  são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento  $q - p$  do intervalo  $[p, q]$ . Como  $[p, q] \subset [1, a^M]$ , existe pelo menos um desses extremos,  $a^{\frac{m}{n}}$ , que está contido no intervalo  $[p, q]$ .

A função exponencial é contínua.

Vamos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ . Para isso, usaremos a equivalência,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^x - a^{x_0} = 0.$$

Seja  $x = x_0 + h$ , então  $h = x - x_0$ , assim,  $|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0+h} - a^{x_0}|$

$$= |a^{x_0}(a^h - 1)|$$

$$= a^{x_0}|(a^h - 1)|.$$

Tomando  $h$  suficientemente pequeno temos que  $a^h$  se aproxima do valor 1. Como  $a^{x_0}$  é constante podemos atribuir o produto  $a^{x_0}|a^h - 1|$  tão pequeno quanto precisarmos, assim

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x - a^{x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

### 1.3.2 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

**Definição 2:** Seja  $a$  um número real positivo e diferente de 1. A função  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , indicada pela expressão  $f(x) = \log_a x$ , é chamada de logarítmica se satisfazer as seguintes propriedades para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^+$ :

- i)  $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$
- ii)  $\log_a 1 = 0$
- iii)  $x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$  quando  $a > 1$
- iv)  $x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$  quando  $0 < a < 1$
- v) A função  $f$  é monótona injetiva, isto é, se  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .

Como  $\log_a x$  é uma função crescente de  $x$  quando  $a > 1$ , e como  $\log_a 1 = 0$ , segue-se que, para  $a > 1$ , os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo. Ao contrário, se  $0 < a < 1$  então  $\log_a x$  é positivo quando  $0 < x < 1$  e negativo quando  $x > 1$ . A Figura 2 mostra os gráficos das funções  $f(x) = \log_2 x$  e  $g(x) = \log_{1/2} x$ .

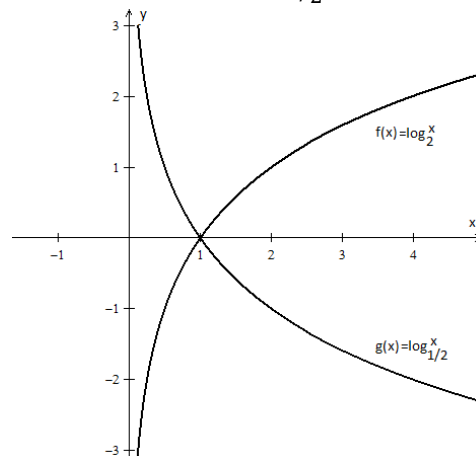
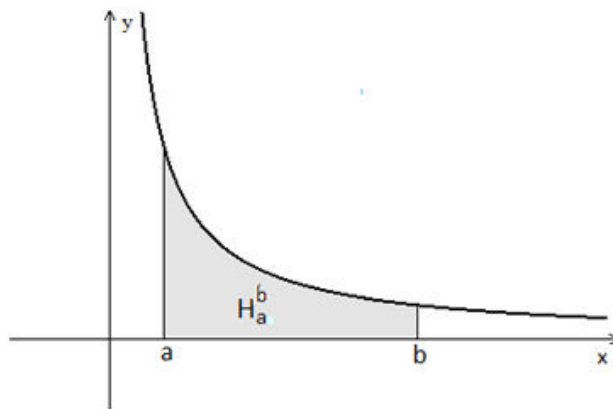


Figura 2: Funções  $f(x) = \log_a x$  e  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

O logaritmo na base  $e$  é denominado logaritmo natural. Alguns autores costumam chamar de logaritmo neperiano fazendo referência a Napier, embora que os logaritmos trabalhados por eles tenham valores diferentes.

**Definição 3:** O conjunto  $H_a^b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , dos pontos  $(x, y)$  do plano tais que  $a < x < b$  e  $0 \leq y \leq 1/x$  chama-se uma faixa de hipérbole.

$H_a^b$  é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , ao sul pelo eixo das abcissas e ao norte pela hipérbole  $H$ , conforme representado na Figura 4.



**Figura 3: Representação da faixa de hipérbole  $H_a^b$ .**

Na notação da teoria de conjunto a faixa da hipérbole é dada por:

$$H_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1/x\}$$

**Definição 4:** Definimos como logaritmo natural a área da faixa de uma hipérbole, sempre que  $x > 0$ , denotamos por  $\ln x$ .

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x),$$

Onde, convencionamos tomar a  $\text{Área}(H_1^x) < 0$ , sempre que  $0 < x < 1$ .

Decorre da Definição 4 que:

- Se  $x = 1$ , então  $H_1^x$  se torna um segmento, e não uma área

$$\ln 1 = \text{Área}(H_1^1) = 0.$$

- Se  $x > 1$ , então a área é maior que zero

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x) > 0.$$

- Se  $0 < x < 1$ , então a área é adotada com o sinal negativo

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x) < 0.$$



Definimos, então, uma função real a cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  faz corresponder seu logaritmo natural  $\ln x$ .

$$\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

### 1.3.3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

**Definição 5:** Progressão Aritmética, ou simplesmente PA, é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado a uma constante  $r$ , denominada razão da PA.

Seja  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  uma progressão aritmética de razão  $r$ .

$$a_1,$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r$$

Supondo que para algum  $k$  a expressão  $a_k = a_1 + (k - 1)r$ , mostremos que é válida para  $(k + 1)$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + r = a_1 + (k - 1)r + r \\ &= a_1 + kr - r + r = a_1 + kr + r - r \\ &= a_1 + (k + 1)r - r \\ &= a_1 + ((k + 1) - 1)r \end{aligned}$$

Portanto, o termo geral da sequência será para qualquer número natural  $n$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Vejamos que a soma de  $n$  termos é dada pela expressão:  $S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$ .

Note que  $S_1 = a_1 = (a_1 + a_1) \frac{1}{2}$ . Supondo que para algum  $k$  natural a expressão

$S_k = (a_1 + a_k) \frac{k}{2}$  é verdadeira, mostremos que é também válida para  $(k + 1)$ .

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = (a_1 + a_k) \frac{k}{2} + a_{k+1} = a_1 \frac{k}{2} + a_k \frac{k}{2} + a_1 + kr \\ &= a_1 \frac{k}{2} + a_k \frac{k}{2} + a_1 + \frac{kr}{2} + \frac{kr}{2} = \left( a_1 \frac{k}{2} + \frac{kr}{2} \right) + a_k \frac{k}{2} + a_1 + \frac{kr}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(a_2 \frac{k}{2} + a_k \frac{k}{2}\right) + a_1 + \frac{kr}{2} = (a_2 + a_k) \frac{k}{2} + a_1 + \frac{kr}{2} = (a_1 + a_{k+1}) \frac{k}{2} + \frac{2}{2} a_1 + \\
&= (a_1 + a_{k+1}) \frac{k}{2} + \frac{a_1 + a_1 + kr}{2} = (a_1 + a_{k+1}) \frac{k}{2} + \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} \\
&= (a_1 + a_{k+1}) \frac{(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Portanto a expressão é válida para qualquer número natural.

**Definição 6:** Progressão Geométrica (PG) é uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Onde,  $a$  e  $q$  são números reais dados.

Assim, podemos dizer que PG é uma sequência tal que o quociente entre cada termo e o seu anterior, a partir do segundo, é uma constante denominada  $q$ . Ou ainda, dizer também que uma PG é toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante não nula, denominada razão e simbolizada por  $q$ .

Para demonstrarmos a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, considere a PG finita de  $n$  termos. Seja  $S_n$  a soma dos  $n$  termos desta PG:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \quad (1.2)$$

ou ainda,

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad (1.3)$$

Sabemos que se multiplicarmos ambos os membros de uma igualdade por uma constante, esta igualdade continuará válida. Vamos multiplicar a igualdade (1.3) por uma constante de valor conveniente  $q$ :

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (1.4)$$

Observando as relações (1.3) e (1.4), notamos que a parcela  $a_1$  só aparece em (1.3) e a parcela  $a_1q^n$  só aparece em (1.4). As demais parcelas são comuns entre as duas relações. Para que estas parcelas sejam eliminadas, subtraímos (1.3) de (1.4):

$$\begin{aligned} S_nq - S_n &= a_1q^n - a_1 \\ S_n(q - 1) &= a_1q^n - a_1 \\ S_n &= \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \text{ onde, } q \neq 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Podemos demonstrar (1.5) aplicando o princípio da indução finita.

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} = \frac{(a_1q^{n-1})q - a_1}{q - 1} = \frac{a_nq - a_1}{q - 1} \quad (1.6)$$

Que é a fórmula para a soma dos  $n$  termos de uma PG finita em função de  $a_1$ ,  $a_n$  e  $q$ .

Podemos ainda transformar (1.6) para que esta esteja em função de  $a_1$ ,  $n$  e  $q$ , abemos que:

$$a_n = a_1q^{n-1} \quad (1.7)$$

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q - 1} = \frac{(a_1q^{n-1})q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (1.8)$$

Sabe-se que a equação para determinar a soma dos termos de uma PG. finita é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (1.9)$$

Se tivermos uma PG infinita na forma  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , podemos demonstrar a fórmula da soma dos termos desta PG a partir de (1.9):

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1} \quad (1.10)$$

Notem que  $a_1$  e  $q$  são constantes, de modo que  $a_1/q - 1$  também é uma constante. No entanto,  $q^n$  é variável, devido à  $n$ . Logo, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad , \quad \text{onde } -1 < q < 1 \quad (1.11)$$

Se temos uma PG de infinitos termos  $n$ , podemos aplicar (1.11) em (1.10), obtendo:

$$S_n = \frac{a_1q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1} = 0 + \frac{a_1}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad (1.12)$$

A condição  $-1 < q < 1$  é necessária para a convergência da sequência, mas se  $a_1 = 0$ , esta condição se torna desnecessária.

Mas, se  $a_1 \neq 0$  e  $q < -1$  ou  $q > 1$ , a sequência  $(S_1, S_2, S_3, \dots)$  não converge e se torna impossível calcular a soma dos termos desta PG.

**Teorema 1:** Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva tal que, para  $x, h \in \mathbb{R}$  quaisquer, o acréscimo relativo  $\frac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)}$  dependa apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = g(0)$  e  $a = \frac{g(1)}{g(0)}$ , tem-se  $g(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que  $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$  independe de  $x$ . Substituindo, se necessário,  $g(x)$  por  $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ , onde  $b = g(0)$ ,  $f$  continua sendo monótona injetiva, com  $\frac{f(x+h)}{f(x)}$  independente de  $x$  e, agora, com  $f(0) = 1$ . Então, pondo  $x = 0$   $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ , obtemos  $\varphi(h) = f(h)$  para todo  $h \in \mathbb{R}$ . Vemos assim que a função monótona injetiva  $f$  cumpre  $f(x+h) = f(x).f(h)$ , ou seja,  $f(x+y) = f(x).f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Segue-se então que  $f(x) = a^x$ , logo  $g(x) = bf(x) = ba^x$ , como queríamos demonstrar.

**Teorema 2:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = b \cdot a^x$ , uma função do tipo exponencial. Toda função do tipo exponencial transforma uma progressão aritmética de razão  $r$  em uma progressão geométrica de razão  $a^r$ .

**Demonstração:** Seja  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ , é uma progressão aritmética de razão  $r$ , isto é,  $x_{n+1} = x_n + r$ , então os valores

$$f(x_1) = b \cdot a^{x_1}; f(x_2) = b \cdot a^{x_2}; \dots; f(x_n) = b \cdot a^{x_n} \dots$$

formam uma sequência de termos exponenciais.

$$\text{Note que } f(x_{k+1}) = b \cdot a^{x_{k+1}} = b \cdot a^{x_k+r} = b \cdot a^{x_k} \cdot a^r = (b \cdot a^{x_k}) \cdot a^r = f(x_k) \cdot a^r$$

Como para qualquer natural  $k$  tem-se  $f(x_{k+1}) = f(x_k) \cdot a^r$ , a sequência  $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots)$ , é denominada progressão geométrica com razão  $a^r$ .

**Teorema 3:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  numa progressão geométrica  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n = f(x_n), \dots$ . Se pusermos  $b = f(0)$  e  $a = \frac{f(1)}{f(0)}$  teremos  $f(x) = b \cdot a^x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Seja  $b = f(0)$ . A função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = \frac{f(x)}{b}$ , é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se  $g(0) = 1$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  qualquer, a sequência  $x, 0, -x$  é uma progressão aritmética de razão  $x$ , logo  $g(x), g(0), g(-x)$  é uma progressão geométrica de razão  $g(-x)$ . Segue-se que  $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$ . Sejam agora  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . A sequência  $0, x, 2x, 3x, \dots, nx$  é uma progressão aritmética, logo  $1, g(x), g(2x), g(3x), \dots, g(nx)$  é uma progressão geométrica, cuja razão evidente é  $g(x)$ . Então seu  $(n+1)$ -ésimo termo é  $g(nx) = g(x)^n$ . Se  $-n$  é um inteiro negativo então  $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$ . Portanto, vale  $g(nx) = g(x)^n$  para quaisquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto, segue-se do Teorema 1 que, pondo  $a = g(1) = \frac{f(1)}{b}$ , tem-se  $g(x) = a^x$ , ou seja,  $f(x) = b \cdot a^x$ .

### 1.3.4 COORDENADAS POLARES

Escolha um plano sem qualquer tipo de coordenadas. Considere um ponto  $O$  e uma semi-reta  $\overrightarrow{OA}$ . Seja  $P$  um ponto distinto de  $O$ ,  $\rho$  a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  a medida do ângulo da semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  para a semi-reta  $\overrightarrow{OP}$ .

Logo, o ponto  $P$  tem sua posição bem definida através do ponto  $O$ , à distância  $\rho$  e o ângulo  $\theta$ .

**Definição 8:** Um sistema de coordenadas polares no plano consiste de um ponto  $O$ , denominado pólo, de uma semi-reta  $\overrightarrow{OA}$ , com origem em  $O$ , denominada eixo polar, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de  $O$  a um ponto qualquer do plano.

Dado um ponto  $P$  do plano, suas coordenadas nesse sistema são dois valores  $\rho$  e  $\theta$ , sendo  $\rho$  a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  a medida do ângulo do eixo polar para a semi-reta  $\overrightarrow{OP}$ . Escrevemos um ponto qualquer  $P$  como  $P = (\rho, \theta)$ .

#### 1.3.4.1 Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Seja  $P \neq O$  um ponto do plano com  $P = (\rho, \theta)$ , no sistema polar  $O\rho\theta$  e  $P = (x, y)$  no sistema cartesiano  $OXY$ .

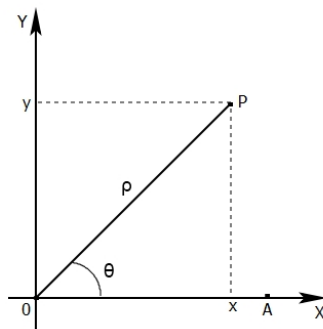


Figura 4: Gráfico de um ponto  $P$  no sistema cartesiano  $OXY$  e no sistema polar  $O\rho\theta$ .

Observando a Figura 4 e utilizando as razões trigonométricas  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  e  $\tan \theta$ ,

$$\text{tem-se: } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} .$$

E mais, usando o Teorema de Pitágoras, obtemos  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 2 ESPIRAIS LOGARÍTMICAS

### 2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS ESPIRAIS

A família Bernoulli, em 1583, para escapar de uma perseguição católica fixou residência na Basileia. Os mais jovens se sentiram atraídos pela ciência e dominaram o estudo da matemática durante boa parte dos séculos XVII e XVIII.

O primeiro Bernoulli a se destacar foi Jakob. Nascido em 1654, recebeu um grau de filosofia em 1671 pela Universidade de Basileia na qual exerceu o cargo de professor de 1683 até a sua morte em 1705.

Entre muitos estudos realizados por Jakob, duas curvas tiveram lugares especiais: a cicloide e a espiral logarítmica.

A cicloide é uma curva gerada por um ponto de uma circunferência que gira sem deslizar sobre uma reta como mostra a figura abaixo.

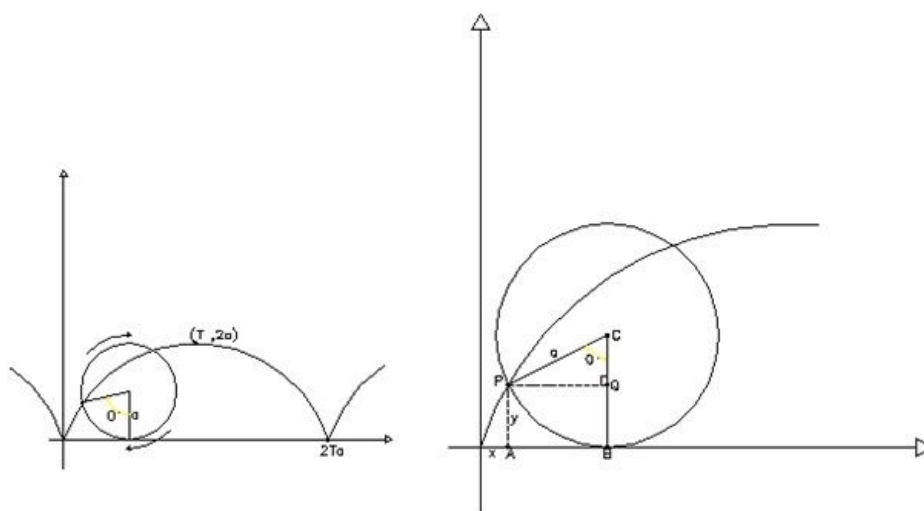
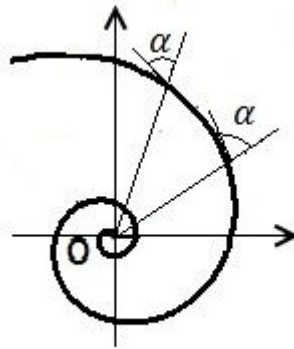


Figura 5: Cicloide – curva traçada por um ponto da circunferência quando o círculo rola por uma reta. Fonte: [www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/projetos2/.../cicloide.htm](http://www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/projetos2/.../cicloide.htm)

A espiral logarítmica é uma curva gerada por uma trajetória em que o ângulo formado com a reta tangente é sempre constante.



**Figura 6: Espiral Logarítmica.**

A curva logarítmica era a favorita de Jakob Bernoulli, chamada *spira mirabilis*, ela exerce um fascínio muito grande entre os cientistas, artistas e naturalistas.

Sua forma graciosa ocorre com maior frequência na natureza do que qualquer outra curva, às vezes com tamanha precisão como é o caso da concha do náutilo, das ondas do mar, nos chifres de alguns animais, em algumas plantas, etc. Veja a Figura 7, extraída de <http://matheusmathica.blogspot.com.br>.



**Figura 7: A espiral logarítmica encontrada na natureza.**

A espiral logarítmica possui características matemáticas que a tornam única entre as curvas planas.



- Cada linha reta que atravessa o centro da espiral possui o mesmo ângulo, por isso essa espiral também é conhecida como espiral equiangular, isso faz com que a espiral tenha características perfeitas de um círculo.
- Ao percorrer a espiral por arcos iguais, a distância ao pólo aumenta através de uma mesma taxa, isto é, seu raio aumenta em uma progressão geométrica.
- Quando percorrida a espiral de fora para dentro, a partir de qualquer ponto fixo  $P$ , teremos que descrever infinitas voltas até chegar no pólo, porém a distância percorrida será finita.
- Quando percorrida a espiral de dentro para fora, a partir de qualquer ponto fixo  $P$ , fazendo com que o ângulo tenda para o infinito teremos a distância ao pólo aumentando infinitamente.

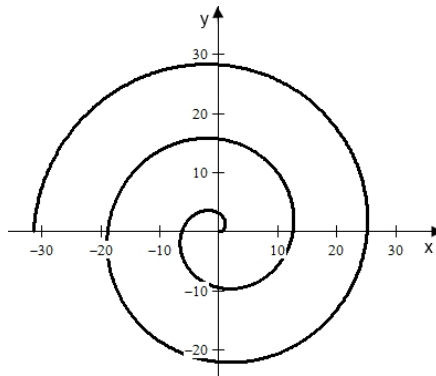
## 2.2 EQUAÇÕES QUE DESCREVEM AS ESPIRAIS LOGARÍTMICAS

Uma espiral é uma curva transcendente, pois não possui uma equação cartesiana polinomial com coeficientes reais, ou seja, a sua equação em coordenadas retangulares só é possível se envolver funções transcendentais de  $x$  e  $y$ . Desta forma, para localizar um ponto de uma curva transcendente, em particular de uma espiral, é mais simples utilizar o sistema de coordenadas polares.

Consideremos um sistema de coordenadas polares  $O\rho\theta$ , em que dado um ponto  $P = (\rho, \theta)$ ,  $\rho$  representará a distância do pólo  $O$  ao ponto  $P$  e  $\theta$  o ângulo formado entre o eixo polar e o segmento  $\overline{OP}$ .

**Definição 9:** Um ponto  $P = (\rho, \theta)$  pertence à espiral de Arquimedes se suas coordenadas polares  $\rho$  e  $\theta$  satisfazem a equação:

$$\rho = a\theta \quad (2.1)$$



**Figura 8: Espiral de Arquimedes com  $\rho = 2\theta$ .**

### 2.2.1 CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DA ESPIRAL DE ARQUIMEDES.

Em uma espiral, três pontos  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$ ,  $P_2 = (\rho_2, \theta_2)$  e  $P_3 = (\rho_3, \theta_3)$  são chamados consecutivos se existe um ângulo  $\alpha$ , tal que  $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$  e  $\theta_3 = \theta_2 + \alpha$ .

**Definição 10:** Se três pontos  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$ ,  $P_2 = (\rho_2, \theta_2)$  e  $P_3 = (\rho_3, \theta_3)$  são pontos consecutivos de uma espiral arquimediana, então o raio  $\rho_2$  é a média aritmética dos raios adjacentes  $\rho_1$  e  $\rho_3$ , isto é:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 + \rho_3}{2}$$

**Definição 11:** Espiral logarítmica plana de centro no ponto  $A$  é o lugar geométrico de todos os pontos  $P = (\rho, \theta)$  que obedecem a equação;

$$\rho = b \cdot e^{a\theta}, \quad (2.2)$$

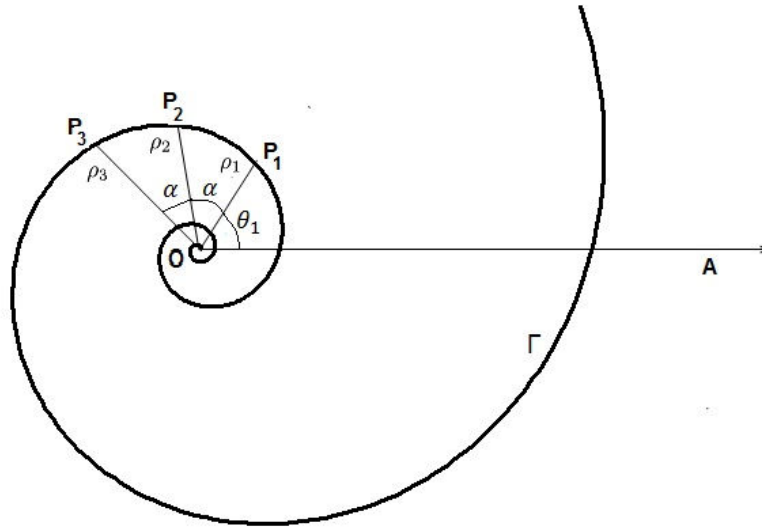
onde,  $\theta$  varia nos reais,  $a$  e  $b$  são constantes não negativas em que  $b$  representa o fator de escala e  $a$  o fator de crescimento.

### 2.2.2 CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DA ESPIRAL LOGARÍTMICA.

**Definição 12:** Três pontos  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$ ,  $P_2 = (\rho_2, \theta_2)$  e  $P_3 = (\rho_3, \theta_3)$  são pontos consecutivos de uma espiral logarítmica se, e somente se, o logaritmo natural do

raio  $\rho_2$  é a média aritmética dos logaritmos naturais dos raios adjacentes  $\rho_1$  e  $\rho_3$ , isto é:

$$\ln \rho_2 = \frac{\ln \rho_1 + \ln \rho_3}{2} \quad (2.3)$$



**Figura 9: Espiral logarítmica, onde  $a = b = 0,25$ .**

Usando as propriedades dos logaritmos na equação (2.1) tem-se:

$$\ln \rho_2 = (\ln \rho_1 + \ln \rho_3)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

$$\ln \rho_2 = (\ln(\rho_1 \cdot \rho_3))^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

$$\ln \rho_2 = \ln \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_3} \quad (2.6)$$

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_3} \quad (2.7)$$

Na equação (2.5) percebe-se que o raio  $\rho_2$  é igual a média geométrica dos raios adjacentes  $\rho_1$  e  $\rho_3$ .

Se  $P = (\rho, \theta)$  pertence a espiral logarítmica  $\Gamma$ , então existe uma espiral arquimediana associada ao ponto  $P' = (\ln \rho, \theta)$ . Assim, existe uma constante real  $a > 0$ , tal que:

$$P = (\rho, \theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \ln \rho = a\theta \quad (2.8)$$

Isto é, a equação da espiral logarítmica se descreve segundo a função exponencial:

$$\rho = e^{a\theta}, \rho > 0 \text{ e } a \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

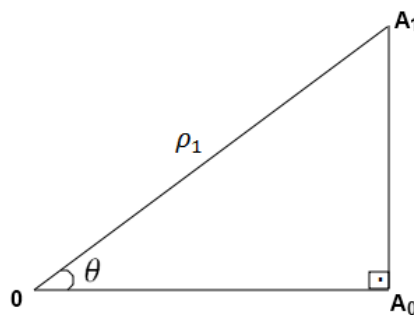
Note que a constante  $a \in \mathbb{R}$  representa a taxa de crescimento da espiral.

- Se  $\theta > 0$  temos uma espiral girando no sentido anti-horário em que o raio  $\rho$  aumenta com as variações angulares.

- Se  $\theta < 0$  temos uma espiral girando no sentido horário em que o raio  $\rho$  diminui com as variações angulares.

Outra forma de deduzirmos a equação de uma espiral logarítmica é, com base no Teorema 3 da seção 1.7, utilizando a construção de triângulos retângulos sucessivos com o mesmo ângulo  $\theta$  no pólo.

- Se a inclinação for nula temos que a distância ao pólo será  $\rho_0 = \overline{OA_0}$ .
- Se  $OA_0A_1$  é um triângulo retângulo como mostra a Figura 10,  $\theta$  é a inclinação constante a ser acrescentada em todo triângulo e  $\rho_1$  é a distância do pólo  $O$  ao vértice  $A_1$ .



**Figura 10: Triângulo Retângulo  $OA_0A_1$**

Note que pela trigonometria básica em um triângulo retângulo tem-se:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{OA_0}}{\rho_1} \\ \rho_1 &= \frac{\overline{OA_0}}{\cos \theta} \\ \rho_1 &= \overline{OA_0} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ \rho_1 &= \rho_0 \cdot \frac{1}{\cos \theta}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Seja  $OA_1A_2$  o triângulo retângulo obtido pela variação de  $\theta$  a partir do triângulo  $OA_0A_1$ . Note que a distância  $\rho_2 = \overline{OA_2}$  será obtida pela aplicação da razão trigonométrica  $\cos \theta$ , assim:

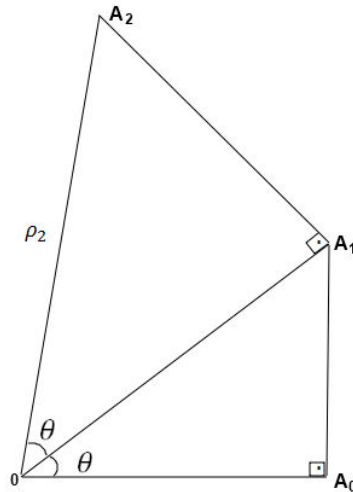


Figura 11: Triângulos Retângulos  $OA_0A_1$  e  $OA_1A_2$ .

$$\cos \theta = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{\cos \theta}$$

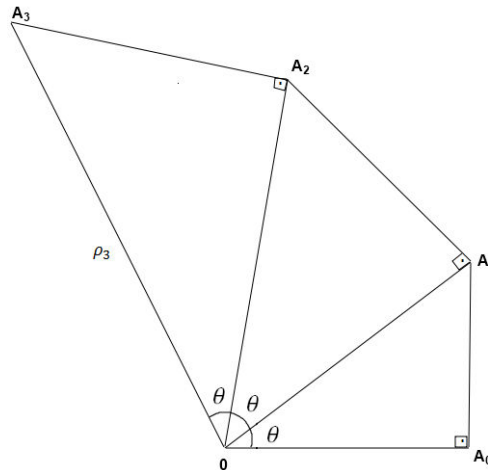
$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad (2.11)$$

Aplicando a equação (2.10) em (2.11) temos:

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \quad (2.12)$$

Seja  $OA_2A_3$  o triângulo retângulo obtido pela variação de  $\theta$  a partir do triângulo  $OA_1A_2$ . Note que a distância  $\rho_3 = \overline{OA_3}$  será obtida pela aplicação da razão trigonométrica  $\cos \theta$ , portanto:



**Figura 12: Triângulos Retângulos  $OA_0A_1$  ;  $OA_1A_2$  e  $OA_2A_3$ .**

$$\cos \theta = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_3}}$$

$$\cos \theta = \frac{\rho_2}{\rho_3}$$

$$\rho_3 = \frac{\rho_2}{\cos \theta}$$

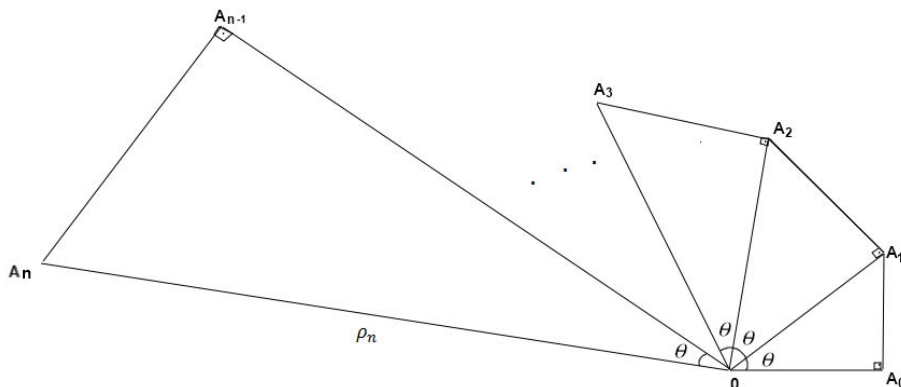
$$\rho_3 = \rho_2 \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad (2.13)$$

Aplicando a equação (2.12) em (2.13) temos:

$$\rho_3 = \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\rho_3 = \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^3 \quad (2.14)$$

De forma geral, tem-se que ao considerar o triângulo  $OA_{n-1}A_n$  obtido através de  $n$  variações angulares de medida  $\theta$  a partir da distância inicial  $\rho_0 = \overline{OA_0}$ , a distância  $\rho_n = \overline{OA_n}$  será determinada através de  $n$  aplicações da razão trigonométrica  $\cos \theta$ , ou seja:



**Figura 13: Sequência de Triângulos Retângulos  $OA_0A_1$ .**

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{OA_{n-1}}}{\overline{OA_n}} \\ \cos \theta &= \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \\ \rho_n &= \frac{\rho_{n-1}}{\cos \theta} \\ \rho_n &= \rho_{n-1} \cdot \frac{1}{\cos \theta}\end{aligned}$$

Aplicando  $(n - 1)$  vezes o processo regressivo sobre a distância  $\rho$  teremos:

$$\rho_n = \rho_0 \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdots \frac{1}{\cos \theta} = \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^n \quad (2.15)$$

Considere a função  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $\rho_i = \text{distância do pólo } O \text{ ao vértice } A_i$ . Note que a função  $\rho_i$  é crescente, pois dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , onde  $x < y$  tem-se  $\rho_x < \rho_y$ . Tomando uma progressão aritmética  $(0, \theta, 2\theta, 3\theta, \dots, n\theta, \dots)$  como sendo as variações angulares, desde o segmento inicial  $\overline{OA_0}$  ao  $\overline{OA_i}$ , a função  $\rho_i$  calcula a distância do pólo  $O$  ao respectivo vértice  $A_i$ , assim a nova sequência  $(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n, \dots)$  representada por

$$\left( \rho_0, \rho_0 \cdot \frac{1}{\cos \theta}, \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2, \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^3, \dots, \rho_0 \cdot \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^n, \dots \right),$$

é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{\cos \theta}$ . Note que a expressão  $\frac{1}{\cos \theta}$  nada mais é que

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{b \cdot \frac{1}{\cos \theta}}{b} = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Assim, definindo  $b = \rho_0$  e  $a = \frac{\rho_1}{\rho_0}$ , temos pelo Teorema 3 que a função  $\rho_i$  é uma função exponencial dada pela expressão  $\rho_i = b \cdot a^i$ .

### 2.3 A CONSTRUÇÃO DAS ESPIRAIS

Nesta seção construiremos a espiral logarítmica utilizando o retângulo de ouro e o triângulo de ouro.

### 2.3.1 USANDO O RETÂNGULO DE OURO

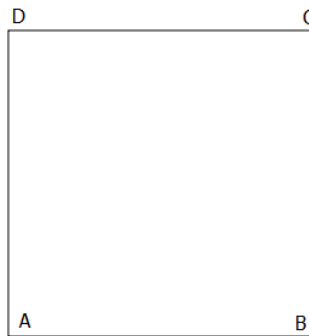
Em 1509, o matemático italiano Luca Pacioli, um grande matemático de Leonardo da Vinci, publicou *Divina Proportione*, um trabalho sobre o número de ouro ou proporção Áurea. Este número é simbolizado por  $\phi$ .

**Definição 13:** O retângulo em que a razão entre os seus lados é igual ao número  $\phi$ , é chamado de retângulo de ouro.

$$\frac{\text{lado maior}}{\text{lado menor}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

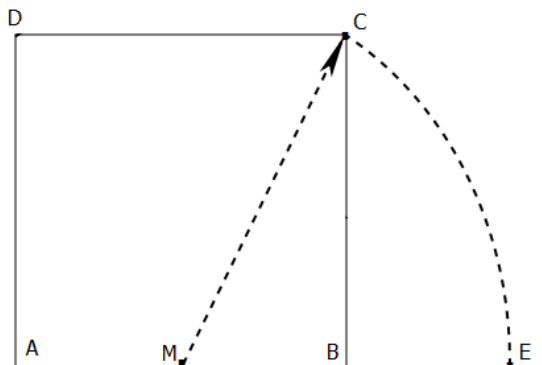
Vejamos como obter esse retângulo de ouro usando apenas régua e compasso.

Primeiramente começamos com a construção de um quadrado de lado medindo 1.



**Figura 14: Quadrado ABCD.**

Obtemos o ponto médio  $M$  do lado  $\overline{AB}$ . Utilizando o compasso, traça-se uma circunferência centrada em  $M$  com raio medindo  $\overline{MC}$  até encontrar a reta passando por  $\overline{AB}$  no ponto  $E$ .



**Figura 15: Construção do segmento  $\overline{ME}$ .**



Note, pelo Teorema de Pitágoras, que o segmento  $\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$$\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{MC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$

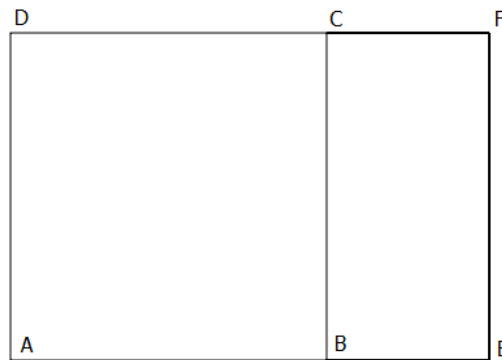
$$\overline{MC}^2 = \frac{1}{4} + 1$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Construindo o retângulo  $AEFD$  percebe-se que a razão entre seus lados é igual ao número  $\phi$ .

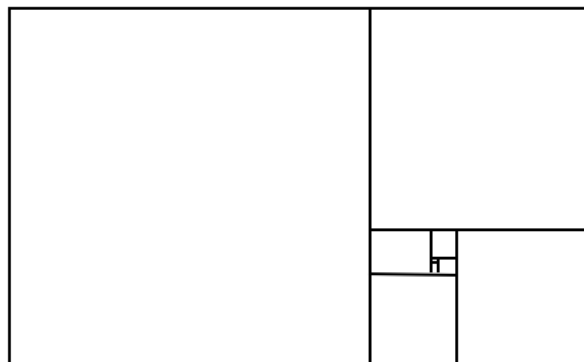
$$\frac{\text{lado maior}}{\text{lado menor}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM} + \overline{ME}}{\overline{EF}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Logo, o retângulo  $AEFD$ , ilustrado na Figura 16, é chamado retângulo de ouro.



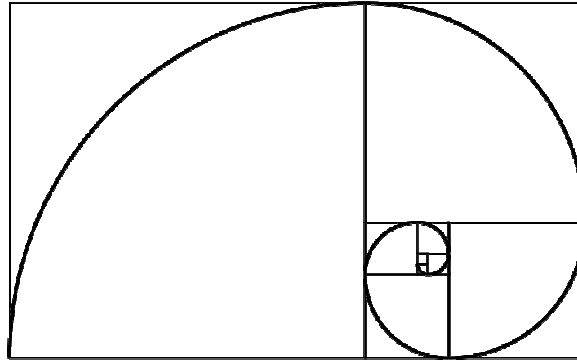
**Figura 16: Retângulo  $AEFD$ .**

Tendo um retângulo de ouro é possível dividir em um quadrado e num retângulo semelhante ao inicial, ou seja, em um retângulo de ouro de lados menores.



**Figura 17: Infinitos retângulos de Ouro.**

Repetindo esse procedimento de construção nos retângulos de ouro, obtemos uma figura chamada de espiral logarítmica, também conhecida por espiral áurea, e o ponto de convergência chama-se Olho de Deus.



**Figura 18: Espiral logarítmica.**

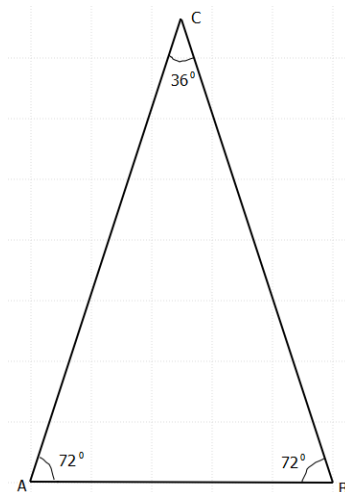
### 2.3.2 USANDO O TRIÂNGULO DE OURO

**Definição 14:** O triângulo de ouro é um triângulo isósceles que possui os ângulos da base medindo  $72^\circ$  e o outro ângulo, no vértice superior, de medida  $36^\circ$ . A razão entre um dos lados congruentes com a base é igual ao número  $\phi$ .

$$\frac{\text{Lado congruente}}{\text{Lado base}} = \phi$$

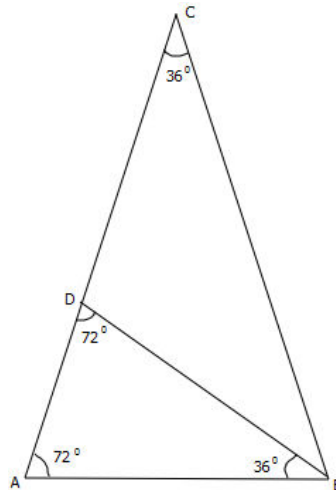
Para obter a espiral logarítmica utilizando o triângulo de ouro, realize as seguintes etapas:

- 1- Construa um triângulo isósceles  $ABC$ .



**Figura 19: Triângulo  $ABC$ .**

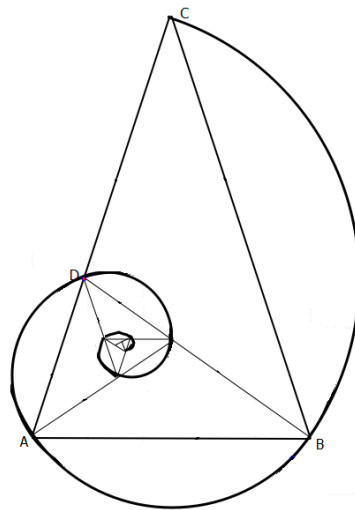
- 2- Trace a bissetriz de um dos vértices da base.



**Figura 20: Construção do segmento  $\overline{BD}$**

Note que o novo triângulo é semelhante ao triângulo de ouro, ou seja, o triângulo  $ABD$  também é um triângulo de ouro.

- 3- Usando esse artifício de bissecção de ângulos sucessivamente nos triângulos isósceles obtemos a espiral-logarítmica, conforme mostrado na Figura 21.



**Figura 21: Espiral logarítmica.**

Outra forma de construção geométrica, usando régua e compasso, para a espiral logarítmica é usando a circunferência, como pode ser encontrado em Tavares (2006, pg 66). Além de régua e compasso, podemos utilizar softwares de geometria dinâmica. Esses softwares, além de prender mais a atenção dos alunos, permitem um nível de precisão elevado e facilitam a exploração situações difíceis, mas não impossíveis, de serem comprovadas utilizando apenas régua e compasso. Destacamos os softwares livres: winplot, GeoGebra, Cabri Géomètre II, entre outros.

### 3 A BELEZA DA NATUREZA E AS ESPIRAIS LOGARÍTMICAS

#### 3.1 A ESPIRAL LOGARÍTMICA VISTA NA NATUREZA

A espiral logarítmica tem a propriedade de manter a forma em qualquer escala, mesmo com o espaço compreendido entre sucessivas voltas aumentando sempre. Outro fato é que o ângulo formado entre linhas radiais e tangentes a ela é sempre o mesmo, em todos os pontos. Essa curva fascina os matemáticos desde o século XVII quando Jacob Bernoulli se dedicou a um estudo de várias curvas planas.

O mais intrigante é que, esta forma de espiral é muito abundante na natureza. Por exemplo, as espirais logarítmicas podem igualmente descrever as trilhas de partículas sub-atômicas, em uma câmara de bolhas, no arranjo de sementes de girassol ou na configuração da couve-flor, aparece em ciclones, galáxias e seres vivos. Uma ave de rapina aproximando-se da presa ou um inseto voando para colidir com uma lâmpada descrevem espirais logarítmicas. Os insetos evoluíram um mecanismo que os leva a buscar manter um ângulo constante com a principal fonte de luz da vizinhança durante o voo.



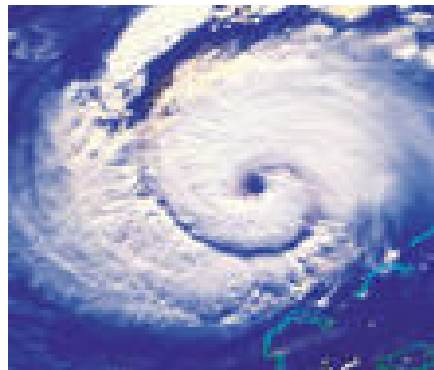
**Figura 22: Espiral logarítmica na folha de samambaia, fonte: <http://www.flickr.com>.**



**Figura 23 Espiral logarítmica na pinha, fonte: <http://www.flickr.com>.**



**Figura 24: Espiral logarítmica no girassol, fonte : <http://www.quo.es>**



**Figura 25: Espiral logarítmica, fonte : <http://www.quo.es>**

A espiral logarítmica ocorre com maior frequência na natureza do que qualquer outra curva. Vejamos algumas dessas na natureza.

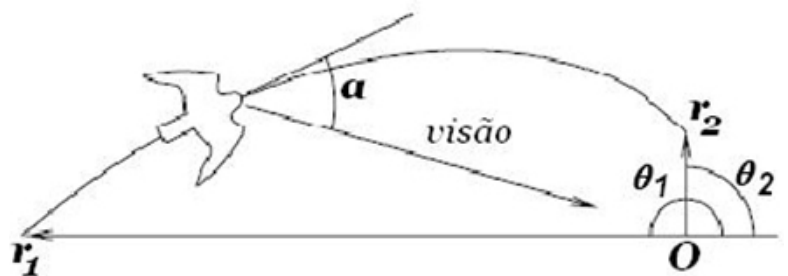
### 3.2 O MERGULHO CERTEIRO DO FALCÃO

Os falcões peregrinos voam a grandes altitudes e conseguem localizar presas pequenas como passarinhos a um quilômetro e meio de distância. Mas, para tirar o máximo proveito de sua acuidade visual e manter a presa em foco exige que sua cabeça faça um ângulo de 40 graus com a direção da presa. Por outro lado, por questões aerodinâmicas, para obter máxima velocidade de vôo, o falcão deve manter corpo e cabeça alinhados e voar sempre para frente.

Ao mergulhar sobre uma presa, um falcão peregrino não utiliza o caminho mais curto, que seria uma linha reta. Em vez disso faz seu trajeto ao longo de uma espiral logarítmica. Assim, a medida que vai circundando a presa vai se aproximando da mesma. A trajetória resultante é uma espiral que faz sempre o mesmo ângulo com a direção que aponta para o centro.



**Figura 26: Falcão Peregrino, fonte:**  
<http://g.cdn.mersap.com>



**Figura 27: Trajetória desenvolvida por um ataque de um falcão peregrino à presa, fonte**  
<http://matheusmathica.blogspot.com.br>.

### 3.3 A ESPIRAL NA BIOLOGIA.

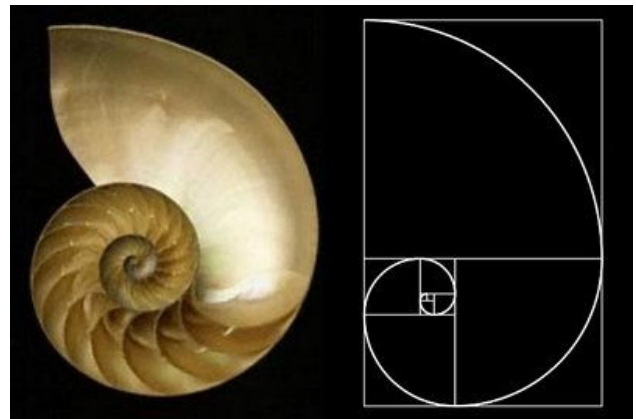
Em biologia são frequentes as estruturas aproximadamente iguais à espiral logarítmica. Por exemplo, as teias de aranhas e as conchas de moluscos. A razão é a seguinte: começa com uma figura irregular  $F_0$ . Se aumenta  $F_0$  em um certo fator

para obter  $F_1$ , e se põe  $F_1$  junto a  $F_0$ , de forma que se toquem dois lados. Se aumenta  $F_1$  no mesmo fator para obter  $F_2$ , e se põe junto a  $F_1$ , como antes. Repetindo este processo se gera aproximadamente uma espiral logarítmica cujo grau está determinado pelo fator de expansão e o ângulo com que as figuras são postas uma ao lado de outra (WIKIPEDIA).

A espiral de contorno das conchas revela um padrão acumulativo de crescimento, em cada fase de crescimento, caracterizada por uma espiral, a nova espiral está muito próxima de um quadrado de razão áurea, maior do que a anterior, como podemos observar nas Figuras 28 e 29.



**Figura 28: Radiografia da concha de *Nautilus*, mostrando a espiral logarítmica.**



**Figura 29: Concha de *Nautilus*, retirada de <http://blog.educastur.es>**

### 3.4 A ESPIRAL NOS PLANETAS

Nos fenômenos naturais e também nos planetas há a presença da espiral logarítmica. Observe a Figura 30 do tufão Rammasun e de uma galáxia, para não mencionar os ambientes físicos diferentes que controlam suas formações e desenvolvimentos. Cada um dos braços exibe a forma de uma curva matemática simples e bonita conhecida como uma espiral logarítmica, uma espiral cuja separação cresce de maneira geométrica, com distância crescente do centro.



**Figura 30: Espiral nos planetas. Crédito de imagem: M101 - NASA, ESA, CFHT, NOAO; Tufão Rammasun - MODIS, NASA Comparação: Lawrence Anderson-Huang (Ritter Obs astrofísico., Univ. Toledo)**

A beleza fascinante da espiral logarítmica está presente em muitos aspetos da natureza, mas pode ser observada também no corpo humano na arte e na arquitetura.

## 4 APLICAÇÕES DO CONTEXTO DE ESPIRAIS NO ENSINO BÁSICO

Neste capítulo, descrevemos algumas propostas de atividades possíveis a serem realizadas com alunos do ensino básico envolvendo aplicações sobre espirais no cotidiano. Todas as atividades foram retiradas na íntegra de Queiroz, (2007).

### 4.1 CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL ÁUREA A PARTIR DA JUSTAPOSIÇÃO DE QUADRADOS

*Objetivo pedagógico:*

- Tratar de um assunto normalmente não desenvolvido no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio.
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos.
- Após realizar o estudo de sistemas de unidades de medidas de comprimento, cada grupo irá construir quadrados cujas medidas dos lados correspondam a números da Sequência de Fibonacci.
- Observar que quando os quadrados são justapostos em ordem crescente da medida de seus lados, eles vão formando retângulos áureos.
- Estudar razões proporções, utilizando tais conceitos para obter razões áureas dentre as dimensões dos retângulos formados pela justaposição dos quadrados.
- Observar que utilizando um compasso para traçar um quarto de círculo nos quadrados justapostos obtemos uma espiral como a do Nautilus.
- Mostrar que a Matemática está relacionada com a Biologia através da Espiral Áurea uma vez que esta apresenta as mesmas propriedades da espiral do Nautilus Marinho.
- Encorajar o docente a apreciar a beleza matemática na natureza, na ciência e na Biologia.
- Mostrar que a Matemática possui aplicações práticas importantes na natureza e que tais relações são ignoradas por muitos docentes.
- Mostrar que a Matemática desenvolvida neste tópico pode ser tratada até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.



- Mostrar que é possível trabalhar o conhecimento elaborado cientificamente de forma agradável e prazerosa.
- Mostrar que a Matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideias, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.
- Despertar a atitude positiva em relação à matemática, valorizando sua utilidade, sua lógica e sua beleza.
- Articular o eixo Números, Operações e Álgebra com os eixos Medidas e Geometrias.

*Material necessário:*

Papel sulfite, régua, lápis, borracha, compasso, xérox dos textos “O Retângulo áureo” item 2.4 e “A sequência de Fibonacci e a espiral”, item 3.6 do trabalho de Rosania Maria Queiroz sobre Razão Áurea, disponível no link <<http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>>.

*Encaminhamento Metodológico:*

Após ler os textos “O Retângulo áureo” e “A sequência de Fibonacci e a espiral” em sala de aula, será realizada uma discussão geral sobre o assunto, destacando que o novo símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática é a Espiral Áurea e que este símbolo aparece nas capas das Revistas do Professor de Matemática (RPM) a partir do número 20. O professor poderá utilizar a TV pen-drive para mostrar aos alunos imagens da Espiral Áurea e do Nautilus Marinho. Na Web conhecemos uma página no endereço [www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm](http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm) que oferece informações sobre a construção da Espiral Áurea. Após discutir o assunto, os alunos formarão pequenos grupos (mínimo 4, máximo 6 pessoas).

Utilizando papel sulfite, os alunos vão construir sete quadrados de modo que as medidas dos lados correspondam aos sete primeiros números da sequência de Fibonacci. Em ordem crescente de tamanho dos lados, o quadrado cujo lado é o segundo número da sequência de Fibonacci abaixo do primeiro, o quadrado cujo lado é o terceiro número da sequência de Fibonacci à direita dos anteriores, e assim sucessivamente, dando a ideia de movimento em espiral. Após construir os

quadrados, coloca-se a ponta seca do compasso no vértice do lado direito comum aos dois quadrados menores, traçando um quarto de círculo em cada um desses quadrados. Dando continuidade, traçar um quarto de círculo nos demais quadrados para formar a Espiral Áurea, como mostram as Figuras 17 e 18 da seção 2.3.1.

## 4.2 RELAÇÕES ÁUREAS EM OBJETOS QUE TÊM A FORMA RETANGULAR

### *Material necessário:*

Objetos do cotidiano que possuem a forma retangular, régua, calculadora, caneta, lápis, borracha, xérox do texto “O Retângulo Áureo”, item 2.4 do trabalho sobre Razão Áurea de Rosania Maria Queiroz, disponível no link <http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>, e xerox da tabela com o nome dos objetos que serão medidos.

### *Encaminhamento Metodológico:*

Após leitura do texto “O Retângulo Áureo”, será realizada uma discussão geral sobre o assunto. O professor poderá utilizar a tv pen-drive para mostrar aos alunos imagens do retângulo áureo e da construção geométrica deste retângulo que podem ser encontradas no mesmo link. Após a discussão sobre o assunto, os alunos formarão pequenos grupos (mínimo 4, máximo 6 pessoas).

Após a formação dos grupos, utilizando a régua, cada equipe irá medir o comprimento e a largura de objetos que possuem a forma retangular e registrá-las numa folha de papel. O professor poderá sugerir os objetos que serão medidos ou deixar a escolha livre para cada grupo. Após medir o comprimento e a largura, calcular a razão entre essas dimensões de cada objeto, as quais também serão registradas. Concluído o cálculo das razões, cada equipe verificará qual objeto possui a razão entre suas dimensões mais próxima da razão áurea. Dando sequência ao trabalho, cada equipe apresentará aos demais colegas o resultado do seu trabalho. Concluídas as apresentações o professor poderá falar do valor estético no formato retangular de objetos, visto que muitos deles apresentam a razão entre suas dimensões bem próximo à razão áurea.

Apresentamos algumas sugestões, porém, a tabela poderá ser preenchida com o nome de outros objetos escolhidos pelo professor ou pelos alunos.

| Objeto                      | Comprimento (a) | Largura (b) | Razão a/b |
|-----------------------------|-----------------|-------------|-----------|
| Carteira de Identidade      |                 |             |           |
| Carteira de motorista       |                 |             |           |
| Cartão de Banco             |                 |             |           |
| Cartão do CPF               |                 |             |           |
| Capa do livro de matemática |                 |             |           |
| Capa de um caderno          |                 |             |           |
| Escrivaninha do aluno       |                 |             |           |
| Capa da agenda do aluno     |                 |             |           |
| Monitor do computador       |                 |             |           |
| Tela do aparelho de TV      |                 |             |           |
| Porta da geladeira          |                 |             |           |
| Bandeira de um time         |                 |             |           |

### 4.3 RELAÇÕES ÁUREAS EM BIOLOGIA: NÚMERO DE PÉTALAS DE FLORES

#### *Material necessário:*

Exemplares de flores ou imagem de flores, nas quais seja possível contar o número de pétalas, xérox do texto “Razão áurea e Fibonacci”, item 3.5 do trabalho sobre Razão Áurea de Rosania Maria Queiroz, disponível em <http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>,

#### *Encaminhamento Metodológico:*

Após leitura do texto “Razão áurea e Fibonacci” em sala de aula será realizada uma discussão geral sobre o assunto. O professor poderá orientar os alunos a acessar páginas na Internet onde é possível visualizar imagens de diferentes flores, sendo possível contar o número de pétalas em muitas delas.

Os alunos formarão pequenos grupos (mínimo 4, máximo 6 elementos). Este é um trabalho de pesquisa que pode ser desenvolvido fora do ambiente escolar, evitando desta forma a destruição do Meio Ambiente. Pode-se determinar o número mínimo de flores que cada equipe deverá observar e contar o número de pétalas. Após o trabalho de pesquisa de campo, cada equipe poderá apresentar aos demais colegas o resultado da sua pesquisa. O professor poderá aproveitar o momento para mostrar aos alunos que muitas flores da natureza possuem o número de pétalas correspondente a números da sequência de Fibonacci. Poderá também, trabalhar a importância de preservar o Meio Ambiente.

Na tabela abaixo algumas sugestões, o professor poderá sugerir outras espécies de flores ou ainda deixar em aberto para que os alunos escolham as flores que eles querem observar.

| Flor      | Nº de Pétalas |
|-----------|---------------|
| Íris      |               |
| Primavera |               |
| Tasneira  |               |
| Margarida |               |

#### 4.4 JOGO DE CONTAGEM “FIBONACCI NIM”

*Material necessário:*

Uma pilha de fichas confeccionadas em cartolina ou outro material semelhante. Essas fichas poderão ter o formato de retângulos áureos; xérox do texto “Razão áurea e Fibonacci”, item 3.5 do trabalho de Rosania Maria Queiroz disponível no link <http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>.

*Encaminhamento Metodológico:*

Após leitura do texto “Razão áurea e Fibonacci”, o professor realizará uma discussão geral sobre o assunto. Após a compreensão da Sequência de Fibonacci, o professor poderá propor aos alunos um jogo de contagem e remoção de fichas com o nome de **Fibonacci Nim**, inventado por Robert E. Gaskell. Inicialmente os alunos formarão duplas. Uma vez formadas as duplas, o jogo começa com uma pilha de  $n$  fichas. Os jogadores, por sua vez, vão removendo as fichas seguindo um conjunto de regras.

*Regras do jogo:*

O primeiro jogador não pode tirar toda a pilha de fichas, mas depois disso, ambos podem remover todas as que restam se as regras seguintes o permitirem: pelo menos uma ficha deve ser retirada em cada jogada, mas nenhum jogador deve remover mais do que o dobro de fichas que o seu adversário levou na sua última

jogada. Por exemplo, se um jogador remover três fichas, o jogador seguinte poderá retirar no máximo seis fichas.

*Quem ganha?*

O jogador que retirar a última ficha vence o jogo.

*Relação que existe entre o jogo e os números de Fibonacci*

Neste jogo, se o número de fichas for um número de Fibonacci, o segundo jogador vence a partida. Se o número de fichas não for um número de Fibonacci, o primeiro jogador poderá vencer.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho aprofundamos nossos conhecimentos sobre *espirais logarítmicas*. O estudo nos possibilitou conhecer uma nova concepção a respeito do tema, onde através das espirais, de forma agradável, vários conteúdos do ensino básico da matemática são expostos em forma de aplicações.

Muitos educadores questionam a aplicabilidade da matemática, trabalhada no ensino básico, no cotidiano do aluno. Mas, acreditamos que estes questionamentos são reflexos da falta de conhecimento mais aprofundado pelos educadores matemáticos. Estes se limitam às definições tradicionais e suas propriedades para solucionar equações, sem dar uma interpretação que vislumbre no aluno o interesse por descobertas de aplicações como é o caso das espirais logarítmicas.

Com o estudo aprofundado que realizamos, para este trabalho, sobre o tema das espirais logarítmicas podemos confirmar as palavras de Jacob Bernoulli (1654-1705), que chamou a esta curva de *spira mirabilis* (em latim, espiral maravilhosa). Esta curva aparece na natureza com grande frequência e perfeição fazendo com que as pessoas a observem como uma aplicação direta da matemática na vida.

As construções geométricas são simples e intuitivas, o que também é um ponto positivo para a sua inclusão na aprendizagem diversificada e discrepante.

As atividades propostas demonstram o quanto este tema está relacionado no dia a dia das pessoas desde uma aula de geometria com as construções da espiral por justaposição, ou até mesmo no jardim de nossas casas contando pétalas de flores ou observando o girassol.

Enfim, o trabalho sobre espirais faz com que o professor, cada vez mais, tenha suporte sobre aplicações da matemática na vida do aluno mesmo com conteúdos que pareçam abstratos.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASTRONOMIA ONLINE, Núcleo de Astronomia. Centro Ciência Viva do Algarve. Disponível em: <[http://www.ccvalg.pt/astronomia/galaxias/galaxias\\_espirais.htm](http://www.ccvalg.pt/astronomia/galaxias/galaxias_espirais.htm)>. Acesso em: 12/02/2013.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção – Um Ensaio sobre a Beleza na matemática**. Editora da Universidade de Brasília. Brasília, 1985.

WIKIPEDIA. **Espiral Logarítmica**. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral\\_logar%C3%ADtmica](http://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_logar%C3%ADtmica)> Acesso em: 05/02/2013.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 4. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. **A Matemática do Ensino Médio**. 1. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. **A Matemática do Ensino Médio**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

QUEIROZ, R. M. **Propostas de Atividades. Razão Áurea: A Beleza de uma Razão Surpreendente**. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2007. Disponível em: <<http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razaoaurea.pdf>>. Acesso em: 04/02/2013.

QUEIROZ, R. M. **Razão Áurea**. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2007. Disponível em: <<http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>>. Acesso em: 04/02/2013.

TAVARES, D. dos S. **As Espirais na Obra de Francisco Gomes Teixeira**. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro. Portugal, 2006.