UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

UM ESTUDO DE PROBABILIDADE POR MEIO DO JOGO DE PALITINHOS COM APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Pedro Nivaldo Gomes Lima

Orientadora: Prof. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão

Feira de Santana
Agosto de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UM ESTUDO DE PROBABILIDADE POR MEIO DO JOGO DE PALITINHO COM APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Pedro Nivaldo Gomes Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientadora: Prof. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão

Feira de Santana
21 de Agosto de 2015

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Lima, Pedro Nivaldo Gomes
L71e Um estudo de probabilidade por meio do jogo de palitinho com aplicações para o Ensino Médio / Pedro Nivaldo Gomes Lima. – Feira de Santana, 2015.
62 f. : il.

Orientadora: Ana Carla Percontini da Paixão.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Probabilidade (Matemática) – Ensino Médio. 2. Jogo de palitinho – Probabilidade - Aplicações. I. Paixão, Ana Carla Percontini da, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 519.2

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Pedro Nivaldo Gomes Lima do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte e um dias dias do mês de agosto de dois mil e quinze às 9:00 horas no Auditório PPGM - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Um Estudo de Probabilidade por meio do Jogo de Palitinhos com Aplicações no Ensino Médio"**, do discente **Pedro Nivaldo Gomes Lima**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Ana Carla Percontini da Paixão (Orientadora, UEFS), Eleazar Gerardo Madriz Lozada (UFRB) e Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 21 de agosto de 2015.

Ana Carla Percontini da Paixão
Profa. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão (UEFS)
Orientador

Eleazar
Prof. Dr. Eleazar Gerardo Madriz Lozada (UFRB)

Haroldo
Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Dedico este trabalho a minha Família. Em especial a minha mãe Neusa, minha esposa Iara, minha irmã Neuma, minha madrinha Nivalda, meu sobrinho Artur, ao meu filho Pedro Gabriel e aos outros filhos que estão por vir.

"Vemos que a teoria da probabilidade é no fundo somente o senso comum reduzido ao cálculo; ela nos faz apreciar com exatidão o que mentes pensantes percebem como que por instinto, muitas vezes sem se dar conta disso. As mais importantes questões da vida são, em sua grande maioria, apenas problemas de probabilidade."

Pierre Simon - Marquês de Laplace

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que permitiu que tudo acontecesse em minha vida e que, sem a menor dúvida, é o maior de todos os mestres e o criador do universo. Obrigado senhor.

Aos meus pais Amando e Neusa, que sempre acreditaram em minha capacidade e que me mostraram a importância do estudo e a necessidade de sempre fazer o melhor dentro de minhas possibilidades. Muito obrigado pelo amor incondicional!

Obrigado aos meus familiares, em especial minha avó Regina Dias e meu avô Nivaldo Gomes, que se queixaram da minha ausência, mas sempre entenderam minha dedicação ao mestrado.

À minha esposa, Iara Vieira Gomes, companheira, amiga, amor e fonte de inspiração, que me apoia em todos os momentos e comemora cada etapa vencida.

Ao Meu filho, Pedro Gabriel, que nem sei se soube entender minha ausência em tantos momentos, mas que é um pedaço de mim.

À família da minha esposa, que também é minha família, que sempre me apoiou. Em especial a minha cunhada Sônia Vieira, a meu sogro Joaquim Vieira e minha sogra Terezinha Vieira.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática pelas excelentes aulas, amizade e contribuição com nosso desenvolvimento e enriquecimento dos nossos conhecimentos, em especial ao professor Haroldo Benatti e, principalmente, à professora Ana Carla Percontini da Paixão, pela paciência, sabedoria e disponibilidade para me orientar.

A todos o colegas do curso pelo ambiente de estudo e amizade, em especial aos amigos Fernando, Amarildo e, principalmente, a meu amigo irmão José William.

Aos meus amigos de longa data, pelo incentivo e disponibilidade para ajudar no que foi necessário, em especial a Edelvito Nascimento, Alexsandro Leite, Samuel Silva e Reinaldo Almeida.

Finalmente, à Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), ao Departamento de Ciências Exatas, a Área de Matemática, a Coordenação do Curso e ao apoio financeiro da CAPES .

Resumo

O Jogo de Palitinhos é um jogo com número ilimitado de jogadores, em que cada um deles possui de zero a três palitinhos e arrisca um palpite. O ganhador é aquele que acerta a soma dos palitinhos de todos os jogadores. Faremos uso deste jogo para estudar experimentos aleatórios, aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Estudaremos diversos conceitos de probabilidade utilizando o princípio do Jogo de Palitinhos e faremos uma análise do jogo como uma variável aleatória. Demonstraremos que para infinitos jogos a razão da soma dos resultados pela quantidade de jogos converge para a esperança matemática por meio das Leis dos Grandes Números. Verificaremos que o aumento do número de jogos produz uma curva no gráfico da soma dos palpites, que se aproxima de uma Gaussiana, com isso faremos uma aplicação do Teorema Central do Limite no Jogo de Palitinhos. Por fim, proporemos algumas aplicações do nosso estudo para o ensino médio.

Abstract

The Little Sticks Game is a game with unlimited number of players, where each one has zero to three chapstuks and make a guess. The winner is the one who hits sticks sum of all players. We will use this game to study random experiments, those who repeated under same conditions, produce results that can not be predicted with certainty. We will study several concepts of probability using the principle of we will make the game's and analysis as a random variable. We will demonstrate that for infinite games, the ratio of the sum of the results by the amount of games converges to the mathematical expectation through the Laws of Large Numbers. We'le find that the increase in the number of players makes a curve in the graph of guesses, which approaches a Gaussian; we will make an application of the Central Limit Theorem in the Little Sticks Game. Finally, we will propose some applications of our study for high school.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Há registros de que, no Egito, por volta de 3500 a. C.[10], já se jogava, usando dados feitos de ossos. Os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados, cartas, além de um jogo conhecido como Morra. Neste jogo, os jogadores erguiam a mão direita, mantendo o punho fechado, e cada um tentava adivinhar a soma total de dedos a serem abertos.

O Jogo de Palitinhos, que é uma modalidade brasileira do jogo de Morra, é jogado com número ilimitado de jogadores, em que cada um deles possui de zero a três palitinhos e arrisca um palpite. O ganhador é aquele que acerta a soma dos palitinhos de todos os participantes.

Temos como objetivo neste trabalho fazer um estudo simplificado da probabilidade por meio do uso do Jogo de Palitinhos. Faremos simulações de jogos para exemplificar nosso estudo no intuito de uma melhor compreensão. Estudaremos estratégias para os Jogos de Palitinhos com jogadores ideais, ou seja, as possíveis quantidades de palitinhos de cada jogador (0, 1, 2 ou 3) têm probabilidades iguais de ocorrência a cada jogo.

A probabilidade é um conteúdo da Matemática de grande importância, pois nos auxilia no entendimento de situações incertas do cotidiano, resultados imprevisíveis dentro de variedade de possibilidades diferentes.

A teoria da Probabilidade apareceu como ramo da Matemática, com a análise dos jogos de azar, por volta do século XV. Vários matemáticos deram contribuições importantes para o seu desenvolvimento [5].

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [6], o ensino da probabilidade, deve ser iniciado no ensino fundamental para que o aluno possa observar a chance ou possibilidade de ocorrência de um determinado resultado e com que frequência ele ocorre. É importante que o aluno fique capacitado a observar, registrar e analisar dados obtidos para um experimento.

Além do mais, consta também nos Parâmetros Curriculares Nacionais [6] que um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que ele provoca no aluno que gera interesse e prazer. Sendo assim, por meio do Jogo de Palitinhos o estudo da Probabilidade pode tornar-se mais efetivo, prazeroso e divertido.

Neste trabalho veremos, o que é, e de onde veio o Jogo de Palitinhos. Além disso, apresentaremos um pouco da história da probabilidade, desde o seu surgimento até os principais nomes que fizeram parte dessa história e suas contribuições.

Faremos uma abordagem probabilística na qual trataremos de espaço de probabilidade, variáveis aleatórias discretas, vetores aleatórios discretos e independência de variáveis aleatórias discretas usando o Jogo de Palitinhos.

Na continuação, demonstraremos usando a Lei dos Grandes Números, que, para infinitos jogos a razão da soma dos resultados pela quantidade de jogos converge para a esperança matemática. E, pela necessidade de tornar o estudo mais completo, veremos a esperança matemática e o Lema de Borel-Cantelli.

Verificaremos que o aumento do número de jogos produz uma curva no gráfico da soma dos palpites, que se aproxima de uma Gaussiana. Assim, podemos interpretá-la como uma distribuição normal, permitindo estudar o comportamento assintótico do Jogo de Palitinhos por meio do Teorema Central do Limite.

Por fim, proporemos algumas atividades voltadas para o ensino médio e relacionadas com a abordagem desenvolvida neste trabalho, faremos as atividades com exemplos práticos sobre o Jogo de Palitinhos em nível dos livros didáticos do ensino médio.

Capítulo 2

O Jogo de Palitinhos

Neste capítulo, apresentamos a história do Jogo de Palitinhos e o que é o Jogo de Palitinhos.

2.1 A história do Jogo de Palitinhos

Por volta do século IV d.C. Em Roma, há relatos que existia um jogo chamado Morra (pronuncia-se "Mórra"). Um jogo de adivinhação, em que dois adversários tentavam adivinhar a soma total de dedos a serem abertos simultaneamente pelos dois. Então, honesto era aquele *quicum in tenebris mices*, isto é, com quem se pudesse jogar Morra no escuro [13].

O jogo fazia parte do divertimento romano. Neste jogo, os adversários erguiam a mão direita, mantendo o punho fechado, e cada um tentava adivinhar a soma total de dedos a serem abertos. Em seguida, todos os participantes abaixavam simultaneamente as mãos direitas, esticando quantos dedos lhes aprouvessem. Um ponto era assinalado a favor do participante que acertasse a soma dos dedos abertos, e esse era marcado com os dedos da mão esquerda do vencedor, um para cada ponto conquistado.

Há uma variedade principal do jogo, que consiste em abrir e fechar os dedos sobre uma mesa, e cada jogador, um de cada vez, atento à mão do parceiro, grita a quantidade de dedos aberta por ele. Nesta modalidade, a mesa desempenha papel decisivo, pois o som causado pelo impacto dos dedos abertos contra a mesa é utilizado como auxiliar da visão.

No entanto, ao que tudo indica, a Morra é de origem grega [1]. Há relatos gregos anteriores aos relatos romanos de um jogo que é jogado por dois parceiros ao redor de uma mesa, em geral sentados. Os dois erguem as mãos direitas e baixam-nas rapidamente sobre a, gritando cada um, ao abaixar o braço, a soma prevista dos dedos abertos. O total a ser gritado pode variar entre 2 (dois) e 10 (dez), indicando que cada parceiro deve abrir no mínimo 1 (um) dedo e, no máximo, evidentemente, 5 (cinco).

Afim de comprovar a origem grega do jogo , existem figuras reproduzidas por Falkener

[2] em sua obra *Games ancient and oriental* (1892) e vários monumentos que o representam, como um vaso pintado existente no Museu de Berlim e outro da Coleção Lambert de Paris. Está também representada em uma das famosas pinturas em estuque da Farnesina de Roma. A designação Morra na Grécia é desconhecida, provavelmente por serem usadas as palavras equivalentes *lachmos*, *kleros dia daktylon*, que logo entre os latinos seria chamada de Micatio.

O jogo de Morra ou Micatio, seria usado até para decidir pequenas questões nos mercados, uso que chegou a ser proibido em decreto do século IV d.C. por um prefeito de Roma [2].

Santo Agostinho, no século IV d.C , deve tê-lo encontrado já na região acima da Gália Cisalpina, onde estavam os germanos que foi catequizar. É dele a frase, *"Porro cum quo micas in tenebris ei liberum est, si velit, fallere"* (com certeza, aquele com quem jogas Morra no escuro, ainda que avisado, podes enganar) [1].

O jogo de Morra foi levado ao sul da Império Romano pelos gregos . Com a expansão do Império Romano este jogo foi levado à Ásia Menor, onde estão árabes e judeus, mais tarde chegou aqui no Brasil, através dos imigrantes. A Morra teria aportado aqui no Brasil com os italianos que imigraram para São Paulo.

Em 1530 alguns marinheiros italianos vieram para o Brasil numa expedição de Pero Lopes. Mas foi em 1836, que aconteceu o início da imigração oficial dos italianos para o Brasil. Eles se fixaram em Santa Catarina, às margens do Rio Tijucas. Eram agricultores e ficaram conhecidos no Brasil como *piamonteses* [13].

O avanço da Morra para o Jogo de Palitinho teria ocorrido no Brasil pois, no Dicionário do Folclore, Câmara Cascudo encerra-o dizendo que, "há uma modalidade brasileira, a Morra, jogada com paus de fósforo. É um jogo com palitos de fósforos, com que decidem por todo o Brasil quem pagará despesa cordial no bar. Jogam vários companheiros com um número ímpar de pauzinhos, três, comumente, para cada um. Cada jogador oculta na palma da mão um número de palitos somente por ele conhecido. Cada concorrente proclama um número que será a soma de todos os palitos escondidos pelos adversários. Abertas as mãos, verifica-se quem acertou com o resultado real. Este ganhou a partida".

Outro fato que confirma que o Jogo de Palitinhos é uma modalidade genuinamente brasileira, é que na Cidade de Nova Iorque, Estados Unidos da América, onde é muito grande a colônia italiana, a Morra é conhecida, assim como, a "Morra chinesa", mas o jogo de palitinhos não é [2].

"Morra chinesa"é uma variedade muito jogada na Itália ainda hoje pelas crianças, pois pode ser jogada por meninos e meninas em lugares onde se exige silêncio. Consiste em formar "desenhos"com a mão e os dedos da mão, do seguinte modo: o punho fechado é a pedra, o anular e o médio abertos e o restante fechado é a tesoura e todos os dedos da mão abertos, o papel [2].

A hierarquia do jogo é a seguinte: a tesoura ganha do papel, porque corta o papel, mas perde da pedra, porque contra ela fica cega; o papel ganha da pedra, porque a envolve, mas perde da tesoura, porque é cortado por ela; a pedra ganha da tesoura, porque a cega, mas perde do papel, porque é envolvida por ele.

Há ainda a "morra muda", que é, nada mais nada menos, que o nosso "par-ou-ímpar", muitíssimo usado para resolver pequenas questões.

o jogo de palitinhos enquadra-se entre os jogos de divulgação antecipada, dentre eles o remotíssimo "jogo da zara", com dados.

2.2 O que é o Jogo de Palitinhos

Trata-se de um jogo de adivinhação em que cada jogador joga com três palitinhos. Os jogadores colocam as mãos para trás, escolhendo uma quantidade de palitos (zero, um, dois ou três), colocam a mão direita para a frente e a mão esquerda permanece atrás [1]. Os palitos em jogo são os que se encontram na mão direita. A seguir, cada um dos jogadores dá o seu palpite, dizendo qual o total dos palitos que estão em jogo, ou seja, quantos palitos, ao todo, existem nas mãos direitas dos jogadores. Os palpites não podem ser repetidos. Ganha aquele que acertar o número exato de palitos em jogo [13].

O Jogo pode ser com número ilimitado de adversários. Mas, um número muito grande de jogadores fará o jogo ficar lento. Normalmente, este número varia entre dois e cinco. Raramente além de cinco, porque se forem por exemplo seis, serão dois jogos de três, disputando depois os dois vencedores. Vejamos um exemplo com quatro jogadores: A, B, C e D. No primeiro jogo normalmente não se disputa nada, serve apenas para ver quem vai começar o próximo jogo, que passará a valer. Digamos que foi o jogador B o ganhador da primeira rodada, portanto ele será o último a dar seu palpite na segunda rodada.

Todos os disputantes procuram ocultar as mãos na algibeira ou atrás. Cada um escolhe uma quantidade que varia de zero a três palitinhos e coloca na mão direita. Todos colocam as mãos direitas fechadas na frente, uma ao lado da outra, geralmente com as unhas voltada para baixo. Então C dirá um número, a seguir D, depois A, e por último B. Aquele que ficou por último levará mais tempo para dizer porque tentará predizer conforme foram os números ditos pelos outros jogadores. Após darem os palpites, abrem então a mão e contam as quantidades de palitos. Pode ser que um acerte. Caso ninguém acerte, recomeça o jogo. Agora, o primeiro a dizer será o B, depois C, D e A. A ocorrência de um dos palpites revela o ganhador e ele sairá do jogo. Os demais irão jogando até que fique o perdedor.

Capítulo 3

Abordagem Probabilística Usando o Jogo de Palitinhos

Neste capítulo apresentaremos um breve resumo da origem da Probabilidade, o espaço de Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Vetores Aleatórios, sempre com o uso do jogo de palitinhos.

3.1 Origem da Probabilidade

Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de ossos. O que nos faz acreditar que há milhares de anos jogos de azar têm sido parte de nossa civilização. E desde estas épocas a humanidade tem lidado com a incerteza na tentativa de obter vantagens em disputas e evitar perdas advindas de fatores imprevisíveis [10].

A palavra "azar"deriva de *al zahr*, que significa "dado"em árabe. Os dados de 6 faces surgiram por volta 3000 a.C e foram encontrados no norte do Iraque. Foram trazidos para o Ocidente durante as Cruzadas [10].

Pelo que vimos, o jogo de Mórra do qual deriva o Jogo de Palitinhos, data pelo menos do século IV d.C. O que nos leva a pensar que o Jogo de Palitinhos pode ter sido um precursor da Probabilidade [13].

Já se usavam conceitos de probabilidade em levantamentos de dados estatísticos para censos populacionais e avaliação de produções agrícolas na Europa a partir do século 11; apólices de seguros navais baseados em conceitos de risco foram emitidos na Itália e Holanda já no século 14 [4].

Antes de meados do século 17, além de considerações filosóficas sobre causalidade e acaso, várias investigações de problemas relativos a jogos de azar, ou, mais geralmente, a eventos sujeitos ao acaso, foram realizadas de forma esparsa.

Afinal, qual é o poder de um jogador? Até que ponto pode uma pessoa determinar ou prever o resultado de um jogo? Há fórmulas matemáticas para analisar as estratégias possíveis?

Sendo assim, a aplicação sistemática de análise matemática e o estabelecimento de regras gerais para a solução de tais problemas, que originou uma teoria matemática de probabilidade, entendida como uma medida da chance de ocorrência de um evento sujeito ao acaso, teve início somente em 1654 com os resultados obtidos por dois franceses, Blaise Pascal e Pierre de Fermat [10].

A probabilidade é uma medida que quantifica a incerteza de um determinado fato ou evento futuro ocorrer.

No entanto, Girolamo Cardano (1501-1576) merece figurar por vários motivos, na companhia dos grandes matemáticos de todos os tempos. Um dos "pecados" atribuídos a Cardano foi o vício do jogo. A obra matemática mais conhecida de Cardano é a *Ars magma (A arte maior)*, onde aparecem impressas pela primeira vez as soluções gerais das equações cúbicas e quárticas. Mas ironicamente, como quase tudo em sua vida, um manual do jogador, intitulado *Líber de luto aleae* (*O livro dos jogos de azar*), que ele sequer considerava digno da publicação, pode ter sido sua contribuição maior à matemática. No entanto, apesar de ter sido escrito possivelmente em 1526, seu tratado ficou desconhecido até sua publicação, que ocorreu somente em 1663. Cálculos de probabilidades foram também realizados por Niccolo Tartaglia (1499 - 1557) em seu trabalho geral sobre números e medidas publicado em Veneza em 1556 [7].

Somente cerca de cem anos depois de Girolamo Cardano, seria dado o passo seguinte (e decisivo) para a criação dessa área da matemática. O cenário agora era a França, onde o requintado nobre francês Antoine Gabaud, o Chevalier de Méré, como Cardano um inveterado jogador, estava às faltas com problemas como: Dois jogadores de igual habilidade resolvem interromper o jogo antes do término. Sendo conhecido o número de pontos de cada um até essa altura, em que proporção devem ser divididas as apostas? Apesar de possuir várias ideias aritméticas sobre o assunto, fruto de sua experiência e perspicácia, Gambaud decidiu recorrer ao grande matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) [7].

Pascal se entusiasmou tanto com as questões que até iniciou correspondência a respeito com seu conterrâneo Pierre de Fermat, resultando desse episódio as bases da moderna Teoria das Probabilidades. Pascal conseguiu correlacionar o estudo da Probabilidade com o triângulo aritmético (já conhecido a mais de 600 anos), ficando conhecido posteriormente como triângulo de Pascal em virtude do mesmo ter inserido neste novas propriedades [10].

A Probabilidade pertence ao campo da Matemática, no qual a maioria dos fenômenos estudados são de natureza aleatória ou probabilística. O cálculo das probabilidades é associado ao estudo de experimentos aleatório ou não determinístico. Se um dado é lançado ao ar, é certo que cairá, mas não é certo que número aparecerá na face de cima [10].

3.2 Espaço de Probabilidade

Nesta seção apresentaremos um Espaço de Probabilidade, ou Modelo Probabilístico, ou ainda Modelo Estatístico, que é uma abstração matemática. É uma idealização que busca representar os fenômenos aleatórios.

3.2.1 Definições Básicas

Experimento Determinístico é o experimento que quando repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos. No caso dos jogos, são aqueles que seguem padrões e encontrando o padrão se ganha sempre.

Experimento Aleatório é todo experimento que, quando repetido sob as mesmas condições várias vezes, produz resultados imprevisíveis. É o caso do Jogo de Palitinhos, que antes de se iniciarem as jogadas, não é possível saber com exatidão qual é o resultado. Nosso estudo terá apenas o Jogo de Palitinhos como experimento aleatório, assumiremos que esse jogo sempre será jogado por jogadores ideais.

Definição 3.1. Espaço Amostral Ω é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Quanto menor o número de jogadores mais simples será o jogo. Entretanto, quando se aumenta a quantidade de jogadores o jogo fica mais complexo, e as teorias tornam-se menos satisfatórias. Vamos simular o Jogo de Palitinhos analisando o jogo mais simples, ou seja, com dois jogadores. Observando que a soma dos palitinhos poderá variar de zero a seis, já que cada jogador pode variar sua jogada utilizando de zero a três palitos. Sendo assim, teremos os seguintes resultados possíveis, que definem o espaço amostral

Ω_2 = {(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)}.

Ou seja, podemos escrever

$$\Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2);\ 0 \leq \omega_1 \leq 3 \text{ e } 0 \leq \omega_2 \leq 3\}$$

O espaço amostral acima é para dois jogadores, isto é, ele é o produto cartesiano dos conjuntos {0, 1, 2, 3} x {0, 1, 2, 3}, onde a primeira coordenada representa a quantidade de palitinhos na mão direita do primeiro jogador e a segunda coordenada representa a quantidade de palitinhos na mão direita do segundo jogador.

Podemos generalizar este espaço amostral para k jogadores como

$$\Omega_k = \Omega_1 \text{ x } ...\text{x } \Omega_i,$$

onde cada $\Omega_i = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ onde $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Quando um jogo com k jogadores é jogado n vezes, teremos um espaço amostral para os n jogos igual ao produto cartesiano do espaço amostral deste jogo por ele mesmo n vezes. Logo,

$$\Omega_k^n = \Omega_k \text{ x } \Omega_k^{n-1}$$

Exemplo 3.2. Um jogo com dois jogadores jogado 5 vezes, teremos o seguinte espaço amostral

$$\Omega_2^5 = \Omega_2 \text{ x } \Omega_2^4.$$

Só que, $\Omega_2^4 = \Omega_2 \text{ x } \Omega_2^3$, no entanto $\Omega_2^3 = \Omega_2 \text{ x } \Omega_2^2$ e por fim $\Omega_2^2 = \Omega_2 \text{ x } \Omega_2$, portanto

$$\Omega_2^5 = \Omega_2 \text{ x } \Omega_2 \text{ x } \Omega_2 \text{ x } \Omega_2 \text{ x } \Omega_2.$$

Exemplo 3.3. Para um jogo com dois jogadores, jogado infinita vezes, teremos neste caso

$$\Omega_2^\infty = \Omega_2 \text{ x}\Omega_2 \text{ x...}$$

Definição 3.4. Evento A é todo subconjunto do espaço amostral, isto é, $A \subset \Omega$. Qualquer subconjunto A ao qual atribuímos uma probabilidade, é dito um evento aleatório. Como $\varnothing \subset \Omega$ e $\Omega \subset \Omega$ os conjuntos $\varnothing$ e Ω são eventos aleatórios. O conjunto vazio $\varnothing$ é denominado evento impossível e o conjunto Ω é denominado evento certo. Se $\omega \subseteq \Omega$ o evento $\{\omega \in \Omega\}$ é dito elementar (ou simples).

Exemplo 3.5. Dado um Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores o evento em que os jogadores têm o mesmo número de palitinhos será

$$B = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$$

Dizemos que o evento A ocorre se a realização ω é tal que $\omega \in A$. Vamos traduzir algumas operações sobre conjuntos para a linguagem de eventos.

A união $A \cup B$, que é dada por $\{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$, é o conjunto de todos os $\omega \in \Omega$ tais que ω pertence a A ou ω pertence a B, ou seja, é o conjunto das realizações ω tais que algum dos eventos A ou B ocorrem, portanto A $\cup$ B é o evento "A ou B".

Analogamente, a interseção $A \cap B$, que é dada por $\{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$, é o conjunto das realizações ω tais que ambos os eventos A e B ocorrem, portanto $A \cap B$ é o evento "A e B".

Denotamos por A^c o complementar do conjunto A, dado por $A^c = \{\omega \in \Omega\text{: } \omega \notin A\}$, ou seja, o conjunto das realizações ω para as quais o evento A não ocorre, portanto A^c é o evento "não A".

Considere o espaço amostral para um Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, para dois jogos distintos e sejam A_1 e A_2 eventos definidos em Ω_2 para o primeiro e segundo jogo respectivamente.

Dados A_1 e A_2 eventos contidos em Ω_2, então ao observarmos um evento $B \in \Omega_2^2$ onde $B = \{A_1, A_2\}$ ocorrendo o resultado $A_1 \in B$, dizemos que "o evento B aconteceu". No entanto, para que B aconteça totalmente é necessário que A_2 também aconteça.

Exemplo 3.6. Consideremos o experimento no qual o Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores repetidas vezes um após outro é observando o resultado dos jogos.

Neste caso teremos o espaço amostral do Exemplo 3.3. Consideremos ainda o evento A em que os dois jogadores estão com todos os palitinhos na mão direita,

$$A = \{(3,3)\}, \text{ onde } A \subset \Omega_2.$$

Então o evento $A_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2...); \omega_i = (3,3)\}$, ou seja, o resultado do i-ésimo jogo os jogadores têm todos os palitinhos na mão direita. Seja B_n o evento definido por

$$B_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

Note que um elemento ω pertence a B_n, se, e somente se, este elemento ω pertence a pelo menos um dos eventos A_i (para $i = 1, 2, ..., n$). Portanto, dizer que B_n acontece é equivalente a dizer que pelo menos um dos eventos A_i ($i = 1, 2, ..., n$) acontece. Outra maneira de descrever o evento B_n seria como o conjunto dos resultados para os quais houve pelo menos um resultado onde os jogadores estavam com todos os palitinhos na mão direita.

Para infinitos jogos B_∞ é uma união infinita de eventos $A_1 \cup A_2 \cup ....$ O evento B_∞ pode ser descrito como o evento para o qual, no experimento de jogar o Jogo de Palitinhos com dois jogadores, em algum momento ocorre o evento A. Portanto,

$$B_\infty = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1} \cup .... = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Exemplo 3.7. Consideraremos também a interseções infinitas de eventos. Logo,

$$C_\infty = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+1} \cap .... = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$$

onde A_i são os mesmos eventos do Exemplo 3.6. Então um elemento ω pertence ao evento C_n se, e somente se, ele pertence a todos os eventos A_i, para $i = 1, ..., n$, ou seja, o evento C_n pode ser descrito como evento no qual todos os n Jogos de Palitinhos jogado por dois jogadores tiveram resultado o evento onde eles tinham todos os palitinhos na mão direita. Observe ainda que este evento C_∞ é uma interseção infinita $A_1 \cap A_2 \cap ....$ O evento C_∞ acontece se, e somente se, ao jogar o Jogo de Palitinhos com dois jogadores infinitas vezes o resultado é invariavelmente o evento A.

Definição 3.8. Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos, incompatíveis ou disjuntos se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, se a intersecção entre eles é vazia.

No jogo de dados (com um dado apenas), o participante não precisa se "preocupar muito"em fazer previsões sobre o jogo e sim ter sorte. Diferentemente, no Jogo de Palitinhos observamos que a frequência relativa não é igual para todo evento.

Observando o espaço amostral do Jogo de Palitinhos para dois jogadores, temos:

A frequência relativa da soma ser zero é $1/16$, ou seja, ambos participantes apresentam a mão sem palitos.

Já para o caso da soma ser igual a um, a frequência relativa será $2/16$, neste caso, um dos jogadores terá um palito na mão e o outro nenhum.

Para a soma ser igual a dois, a frequência relativa será $3/16$, neste caso, um dos jogadores terá dois palitos e o outro nenhum, ou ambos terão um palito.

Para a soma ser igual a três, a frequência relativa será $4/16$, neste caso, um dos jogadores terá três palitos e o outro nenhum, ou um terá dois palitos e o outro um palito.

Para a soma ser igual a quatro, a frequência relativa será $3/16$, neste caso um dos jogadores terá três palitos e o outro um, ou ambos terão dois palito.

Para soma ser igual a cinco, a frequência relativa será $2/16$, neste caso, um dos jogadores terá três palitos na mão e o outro terá dois.

E a última hipótese é de a soma ser igual a seis, a frequência relativa será $1/16$, ou seja, a única forma de obter tal resultado será ambos participantes apresentarem a mão com três (todos os) palitos.

3.2.2 Espaço de Probabilidade

Gerolamo Cardano, no livro *Liber de Ludo Aleae (Livro de Jogos de Azar)*, a palavra *aleae* refere-se a jogos de dados e tem a mesma raiz de *aleatorius* que significa eventos sujeitos ao acaso, dependentes de fatores incertos. Este parece ter sido o primeiro trabalho a desenvolver princípios estatísticos da probabilidade. Cardano define a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados [7].

Num modelo probabilístico o espaço amostral é um conjunto finito Ω e a medida de probabilidade é proporcional à quantidade de resultados que fazem parte de um dado evento, ou seja,

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ denota a cardinalidade do conjunto $B \subset \Omega$, isto é, a quantidade de elementos que pertencem a B.

Exemplo 3.9. Qual a probabilidade de ocorrer um evento onde o número de palitinhos é igual, num jogo com dois jogadores?

Dado o Espaço amostral,

$$\Omega_2 = \{(0{,}0),\ (0{,}1),\ (0{,}2),\ (0{,}3),\ (1{,}0),\ (1{,}1),\ (1{,}2),\ (1{,}3),\ (2{,}0),\ (2{,}1),\ (2{,}2),\ (2{,}3),\ (3{,}0),\ (3{,}1),\ (3{,}2),\ (3{,}3)\},$$

onde

$$\#\Omega = 16.$$

Sendo o evento,

$$B=\{(0{,}0),\ (1{,}1),\ (2{,}2),\ (3{,}3)\},$$

onde

$$\#B = 4.$$

Portanto,

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = 0{,}25 = 25\%.$$

Quando o espaço amostral Ω é um conjunto finito ou enumerável, é natural tomar a classe de eventos aleatórios $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, onde $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de Ω, dado por $\mathcal{P}(\Omega) =\{A : A \subseteq\Omega\}$, chamado o conjunto das partes.

Porém há casos em que Ω não é enumerável, e não é possível construir um modelo probabilístico em toda essa classe $\mathcal{P}(\Omega)$. Em todo caso, faremos algumas suposições naturais sobre a classe $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ de eventos aleatórios. Mais precisamente, vamos assumir que $\mathcal{F}$ satisfaz as seguintes propriedades:

Definição 3.10. Propriedades de $\mathcal{F}$,

$(F1)$ $\Omega\in\mathcal{F}$;

$(F2)$ Para todo $A\in\mathcal{F}$, tem-se que $A^c\in\mathcal{F}$;

$(F3)$ Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \in\mathcal{F}$, então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{F}$.

Chamaremos de σ-álgebra a uma classe de subconjuntos de Ω satisfazendo as três propriedades acima.

Definição 3.11. Seja Ω um espaço amostral e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra para um dado experimento. Uma probabilidade em Ω é uma função P que associa a cada evento $A\in\mathcal{F}$ um número real $P(A)$. Uma probabilidade P é uma aplicação P: $A\longrightarrow[0,1]$ satisfazendo os seguintes axiomas:

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \ \forall A \subset \Omega$

(2) $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$;

(3) Se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que i$\neq$j, então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proposição 3.12. *Se A e B forem dois eventos quaisquer, então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração. Sabendo que $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]$, então pelo Axioma 3, $P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B)$, pois os conjuntos $A - B$ e B são mutuamente exclusivos. Como $A - B$ é o conjuntos dos elementos que pertence só a A, então o conjunto $A - B = A - (A \cap B)$, portanto $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, dai resulta $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. □

Proposição 3.13. *Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$*

Demonstração. Como $A \subset B$ então $B = A \cup (B - A)$ logo $B = A \cup A^c$ e $A \cap A^c = \varnothing$, ou seja, mutuamente exclusivos. Logo, pela Proposição 3.12, $P(B) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$, pelo Axioma 2, $P(A \cap A^c) = P(\varnothing) = 0$, pelo Axioma 1, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ logo $P(B) - P(A) \geq 0$ já que $A \subset B$, então $P(A) \leqslant P(B)$. □

Proposição 3.14. *Se A^c é o evento complementar de A, então*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Demonstração. Pelo Axioma 2, temos que, $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c)$. Como $A \cap A^c = \varnothing$, pelo Axioma 3 temos que, $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, logo, $P(\Omega) = P(A) + P(A^c) \Longrightarrow P(A) + P(A^c) = 1$, somando $-P(A)$ em ambos os lados da igualdade, segue que $P(A^c) = 1 - P(A)$. □

Exemplo 3.15. Em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores qual a probabilidade de ocorrer um evento onde a quantidade de palitinhos é diferente?

Já vimos que a probabilidade do evento B em que a quantidade de palitinhos nas mãos de dois jogadores é igual, é de 25%.

$$\text{Seja } B = \{(0{,}0),\ (1{,}1),\ (2{,}2),\ (3{,}3)\}.$$

O evento em que os jogadores têm quantidades deferentes de palitinhos, é o complementar B^c dado por

$$B^c = \{(0{,}1),\ (0{,}2),\ (0{,}3),\ (1{,}0),\ (1{,}2),\ (1{,}3),\ (2{,}0),\ (2{,}1),\ (2{,}3),\ (3{,}0),\ (3{,}1),\ (3{,}2)\}.$$

Portanto,

$$P(B^c) = 1 - P(B) \Longrightarrow P(B^c) = 1 - 0,25 \Longrightarrow P(B^c) = 0,75, \text{ ou seja, } 75\%.$$

Definição 3.16. Um espaço de probabilidade qualquer é um trio $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$, onde:

(i) Ω é um conjunto não-vazio;

(ii) $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω;

(iii) P é uma probabilidade definida em $\mathcal{F}$.

3.2.3 Independência

Se dois eventos possíveis, A e B, forem independentes, a probabilidade de que A e B ocorram é igual ao produto de suas probabilidades individuais, ou seja, dois eventos aleatórios são independentes quando a ocorrência de um deles não aumenta nem diminui a chance relativa de que ocorra o outro.

Definição 3.17. Dizemos que dois eventos A e B são independentes quando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definição 3.18. Uma coleção $\{A_i\}_{i \in I}$ é independente par a par se para todo $i \neq j$, A_i e A_j são eventos independentes.

Definição 3.19. Uma sequência finita de eventos A_1, A_2,..., A_n, com $n \geq 1$, é mutuamente independente se para todo $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$

$$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

E uma coleção de eventos $\{A_i\}_{i \in I}$ é mutuamente independente se para todo $J \subseteq I$ finito, $\{A_i\}_{i \in J}$ é mutuamente independente.

No Jogo de Palitinho, com jogadores ideais, a ocorrência de um determinado evento num experimento (jogo) não influência em nada o próximo experimento. Por isso, de jogo para jogo os eventos são totalmente independentes.

Exemplo 3.20. Para dois Jogos de Palitinhos com dois jogadores, qual a probabilidade do evento em que a quantidade de palitinhos é igual nas mão de ambos os jogadores?

Sendo B o evento em que a quantidade de palitinhos é igual nas mão de ambos os jogadores, temos

$$B = \{(B_1, B_2);\ B_1 = B_2 \text{ com } 0 \leq B_1 \leq 3,\ 0 \leq B_2 \leq 3\}.$$

Considerando o espaço amostral do Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores e a ocorrência do evento B em dois Jogos distintos. B_1 e B_2 tem probabilidade igual a $1/4$ cada, visto no Exemplo 3.9, de ocorrer o evento onde a quantidade de palitinhos, nas mãos dos jogadores, são iguais. Sendo assim,

$$P(B_1 \cap \mathrm{B}_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Usamos acima a hipótese de haver números iguais e diferentes de palitinhos em cada jogo.

Exemplo 3.21. Para n Jogos de Palitinhos com dois jogadores, qual a probabilidade do eventos em que a quantidade de palitinhos é igual nas mãos de ambos os jogadores?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular a probabilidade do evento $B_1 \cap ... \cap B_n$. Como esses eventos são independentes, temos que

$$P(B_1 \cap ... \cap B_n) = P(B_1)...P(B_n) = \frac{1}{4}...\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Em um Jogo de Palitinhos, com jogadores, a probabilidade de ocorrer o evento em que a quantidade de palitinhos é diferente não influencia no próximo jogo. Além do mais, os eventos complementares também são independentes.

Proposição 3.22. *Se A e B são dois eventos independentes então os seus complementares também são.*

Demonstração. $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = -P(A)[1 - P(B)] + 1 - P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A)^c P(B)^c$. □

Observação 3.23. A Proposição acima se estende para uma família de eventos [12].

Exemplo 3.24. Para cinco Jogos de Palitinhos com dois jogadores, qual a probabilidade de em pelo menos um, ocorrer o evento B? E para n jogos?

Já vimos, no Exemplo 3.15, que num Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, a probabilidade de ocorrer o evento B^c, é de $3/4$. Calcularemos a probabilidade de ocorrer o evento B^c em cinco jogos.

$$P(B_1^c \cap ... \cap B_5^c) = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}2373046875.$$

Portanto pela Proposição 3.14, temos que a probabilidade de em pelo menos um dos cinco jogos ocorrer o evento em que a quantidade de palitinhos nas mãos dos jogadores é diferente, é dada por

$$P[(B_1^c \cap ... \cap B_5^c)^c] = 1 - 0,2373046875 = 0,7626953125,$$

ou seja, 76,26953125%.

Para n jogos, temos

$$P(B_1^c \cap ... \cap B_n^c) = P(B_1^c)...P(B_n^c)$$

assim,

$$P(B_1^c \cap ... \cap B_n^c) = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}... = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Portanto,

$$P[(B_1^c \cap ... \cap B_n^c)^c] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

3.3 Variáveis Aleatórias

Na ocorrência de um fenômeno aleatório, muitas vezes estamos interessados em uma ou mais quantidades, que são dadas em função do resultado do fenômeno. A essas quantidades damos o nome de variáveis aleatórias. Informalmente, uma variável aleatória é um característico numérico do experimento.

Variáveis aleatórias é um conceito central em Teoria da Probabilidade. Muitas vezes a abordagem de um problema probabilístico envolve a definição de um espaço amostral muito grande. No entanto, nem sempre estamos interessados em estudar com todo o detalhe a estrutura probabilística do espaço amostral. Grande parte das vezes concentramos a nossa atenção no estudo da probabilidade de que alguns característicos numéricos do experimento em questão assumam um certo valor. Variáveis aleatórias são, simplesmente, funções definidas no espaço amostral e tomando valores no conjunto dos números reais.

Definição 3.25. Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ é uma função real definida no espaço Ω tal que o conjunto $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega\text{: } X(\omega) \leq x\}$ é evento aleatório para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma variável aleatória se $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Daqui para frente denotaremos por $[X \leq x]$ o evento $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$.

Consideremos o experimento aleatório que consiste no Jogo de Palitinhos, jogado por dois jogadores, jogado n vezes.

Assim definiremos as seguintes variáveis aleatórias,

$$X_n(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2;\ n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que X_n é a variável aleatória que associa a cada jogo $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_2$ a soma $\omega_1 + \omega_2$ de suas coordenadas. Ou seja, $X_n(0, 1) = 1$ significa que, em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores, a soma dos palitinhos é 1 no n-ésimo jogo, $X_n(2, 1) = 3$ significa que, em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores, a soma dos palitinhos é 3 no n-ésimo jogo.

Generalizando para o Jogo de Palitinhos, jogado por k jogadores n vezes. Assim definiremos a seguinte variável aleatória.

$$X_n(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k) = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_k;\ n \in \mathbb{N}^*$$

como k é o número de jogadores, então $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$. Além do mais, $\omega_k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, já que cada ω_k representa a quantidade de palitinhos de um jogador.

Assim, X_n é a variável aleatória que associa a cada jogo $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k) \in \Omega_k$ a soma $\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_k$ de suas coordenadas. Ou seja, $X_n(1,1) = 2$ significa que, em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores, a soma dos palitinhos é 2 no n-ésimo jogo, $X_n(1,1,2) = 4$ significa que, em um Jogo de Palitinhos com três jogadores, a soma dos palitinhos é 4 no n-ésimo jogo.

Para o Jogo de Palitinhos com dois jogadores, teremos a seguinte variável aleatória,

$$\begin{aligned}
X(0,0) &= 0 \\
X(0,1) &= X(1,0) = 1 \\
X(0,2) &= X(1,1) = X(2,0) = 2 \\
X(0,3) &= X(1,2) = X(2,1) = X(3,0) = 3 \\
X(1,3) &= X(2,2) = X(3,1) = 4 \\
X(2,3) &= X(3,2) = 5 \\
X(3,3) &= 6
\end{aligned}$$

Observe que o conjunto imagem são as somas dadas pelas variáveis aleatórias, portanto o conjunto imagem é $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Existem dois tipos de variáveis aleatórias, as discretas e as contínuas. No nosso trabalho trataremos apenas com variáveis aleatórias discretas.

Definição 3.26. A variável aleatória X é **discreta** se toma um número finito ou enumerável de valores, i.e., existe um conjunto finito ou enumerável $\{x_1,\ x_2,\ ...\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2,\ ...\}$, $\forall\ \omega \in \Omega$.

A função $p(x_i)$ definida por $p(x_i) = p(X = x_i)$, $i = 1,\ 2,\ 3,...$, é chamada de *função de probabilidade* (ou função de frequência) de X.

Note que, se X é discreta assumindo valores em $\{x_1, x_2,\ ...\}$, então temos que

$$P(X \in \{x_1, x_2, ...\}) = 1 \text{ e } P(X \notin \{x_1, x_2, ...\}) = 0,$$

no tratamento de variáveis aleatórias discretas, tudo pode ser feito em termos de somatórios,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

$$P(X \in \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}) = 1$$

Sendo assim, a probabilidade da variável aleatória é dada por:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(0,0) = \frac{1}{16}\\
P(X=1) &= P[(0,1)\cup(1,0)] = \frac{2}{16}\\
P(X=2) &= P[(0,2)\cup(1,1)\cup(2,0)] = \frac{3}{16}\\
P(X=3) &= P[(0,3)\cup(1,2)\cup(2,1)\cup(3,0)] = \frac{4}{16}\\
P(X=4) &= P[(1,3)\cup(2,2)\cup(3,1)] = \frac{3}{16}\\
P(X=5) &= P[(2,3)\cup(3,2)] = \frac{2}{16}\\
P(X=6) &= P(3,3) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Definição 3.27. Dado $A \subseteq \Omega$, definimos função indicadora de um conjunto A como

$$\mathcal{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A,\\ 0, & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Exemplo 3.28. Considerando $\mathcal{I}_A(x) = \mathcal{X}_A(x)$ e A sendo um subconjunto de Ω_2 onde $A = \{(0,1),(1,0),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),(2,3),(3,2),\}$.

Portanto, num Jogo de Palitinhos com dois jogadores se ocorrer um número ímpar na soma dos palitinhos está em A, se ocorrer um número par esta fora de A, logo

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer um número ímpar} \quad x \in A,\\ 0, & \text{se ocorrer um número par} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Portanto, $\mathcal{X}$ é variável aleatória.

Observação 3.29. Dado um espaço de probabilidade $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ e uma variável aleatória X, definimos o espaço de probabilidade induzido por X como $(\mathbb{R},\, \mathcal{B},\, P_X)$, onde

$$P_X(B) = P(\omega : X(\omega) \in B),\ B \in \mathcal{B}.$$

Quando introduzimos variáveis aleatórias, estamos interessados mais no característico numérico. Em vez de subconjuntos de Ω tomaremos valores em $\mathbb{R}$, isto é, no conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Consideremos a σ-álgebra de Borel na reta $\mathbb{R}$, denotada por $\mathcal{B}$, que é a menor σ-álgebra que contém todos os intervalos da reta. Os conjuntos $B \subset \mathbb{R}$ tais que $B \in \mathcal{B}$ são chamados Borelianos. A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é muito menor que a σ-álgebra das partes dos reais, e daqui em diante, sempre que aparecer $B \subset \mathbb{R}$, deve-se entender $B \in \mathcal{B}$. Ou seja, o espaço amostral é o conjunto dos números reais, os eventos aleatórios são os conjuntos Borelianos, e a probabilidade é aquela induzida por X. Chamaremos de lei da variável aleatória X a probabilidade P_X em $\mathbb{R}$ induzida por X.

3.3.1 Função de Distribuição

Analisando a distribuição de probabilidade da variável aleatória podemos determinar sua função de distribuição. Esta é uma característica fundamental da variável aleatória.

Definição 3.30. A Distribuição de Probabilidade é o conjunto de todos o valores que podem ser assumidos por uma variável aleatória.

A distribuição de probabilidades associa uma probabilidade a cada resultado numérico de um experimento, ou seja, dá a probabilidade de cada valor de uma variável aleatória. Para os valores das variáveis aleatórias do Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, teremos

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{1}{16}\\
P(X=1) &= \frac{2}{16}\\
P(X=2) &= \frac{3}{16}\\
P(X=3) &= \frac{4}{16}\\
P(X=4) &= \frac{3}{16}\\
P(X=5) &= \frac{2}{16}\\
P(X=6) &= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

Definição 3.31. A função de distribuição ou função de distribuição acumulada da variável aleatória X, denotada por F_X, é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 3.32. *(Propriedades da Função de Distribuição). Se X é uma variável aleatória, sua função de distribuição F_X satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) F_X é não decrescente, i. é, $x \leq y \Longrightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$

(ii) F_X é contínua à direita, i. é, $x_n \downarrow x \Longrightarrow F_X(x_n) \longrightarrow F_X(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Demonstração. [16] □

Em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores o valor da soma máxima dos palitinhos é igual a seis, isto é, $X \leq 6$, assim temos

$$
\begin{aligned}
F(0) &= P(X \leq 0) = \frac{1}{16} \\
F(1) &= P(X \leq 1) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16} \\
F(2) &= P(X \leq 2) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} \\
F(3) &= P(X \leq 3) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16} \\
F(4) &= P(X \leq 4) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \\
F(5) &= P(X \leq 5) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{15}{16} \\
F(6) &= P(X \leq 6) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1
\end{aligned}
$$

Para o Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, temos

$$
F_X(x) = \begin{cases}
0, & \text{se} \quad x < 0, \\
\frac{1}{16}, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \\
\frac{3}{16}, & \text{se} \quad 1 \leq x < 2, \\
\frac{6}{16}, & \text{se} \quad 2 \leq x < 3, \\
\frac{10}{16}, & \text{se} \quad 3 \leq x < 4, \\
\frac{13}{16}, & \text{se} \quad 4 \leq x < 5, \\
\frac{15}{16}, & \text{se} \quad 5 \leq x < 6, \\
1, & \text{se} \quad 6 \leq x.
\end{cases}
$$

3.3.2 Vetores Aleatórios

Nesta subsecção vamos apresentar as principais propriedades dos vetores aleatórios que nos interessa para o continuação do nosso estudo. Faremos a combinação de muitas variáveis aleatórias dentro do Jogo de Palitinhos e considerando o comportamento estatístico conjunto.

Imagine que queremos duas variáveis aleatórias. A forma mais natural seria jogar duas vezes o Jogo de Palitinhos com dois jogadores e considerar o par $Y = (X_1, X_2)$. Uma outra forma de fazê-lo seria, por exemplo, jogar apenas uma vez e copiar o resultado, ou seja, $Y = (X_1, X_1)$.

Em ambos os casos, produziu-se um par de variáveis aleatórias. Entretanto, o comportamento conjunto dessas variáveis aleatórias é bem diferente nos dois casos.

Definição 3.33. Um vetor aleatório $Y_n = (X_1, X_2..., X_n)$ é uma função $Y_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que cada coordenada X_i é uma variável aleatória.

Lembrando que, em notação vetorial, se $x \in \mathbb{R}^n$ então, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Observação 3.34. Como na reta, a σ-álgebra de Borel no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{B}^n$, é a menor σ-álgebra que contém todos os octantes $\{x \in \mathbb{R}^n : x \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}^n$. Dado um espaço de probabilidade $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ e um vetor aleatório Y, definimos o espaço de probabilidade induzido por Y como $(\mathbb{R}^n,\ \mathcal{B}^n,\ P_Y)$, onde

$$P_Y(B) = P(\omega : Y(\omega) \in B),\ B \in \mathcal{B}^n.$$

Ou seja, espaço amostral é o conjunto dos vetores n-dimensionais, os eventos aleatórios são os conjuntos Borelianos, e a probabilidade é aquela induzida por Y. Chamaremos de lei do vetor aleatório Y a probabilidade P_Y em $\mathbb{R}^n$ induzida por Y.

Assim como as variáveis aleatórias os vetores aleatórios são de dois tipos: Os vetores aleatórios discretos e os vetores aleatórios contínuos. Como para o nosso estudo só interessa os discretos não estudaremos os contínuos.

Definição 3.35. Dizemos que um vetor aleatório Y_n, sua função de distribuição F_Y e sua lei P_Y são **discretos** se existem $\{X_1,\ X_2,\ X_3,...\}$ tais que $P(Y \in \{X_1,\ X_2,\ X_3,...\})= 1$. Neste caso, a função de probabilidade de Y é dada por

$$P_Y(X) = P(Y = X).$$

Um vetor aleatório Y_n é discreto se, e somente se, suas coordenadas X_1, X_2...,X_n são discretas.

Exemplo 3.36. Para o Jogo de Palitinhos qualquer conjunto de variáveis aleatórias, já definida, constitui um vetor aleatório discreto. Portanto,

$$P(Y \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\})= 1$$

Observe que $F(6) = P(X \leq 6) = 1$.

Exemplo 3.37. Considere cinco jogos consecutivos do Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores. Definimos este espaço amostral por Ω_2^5 visto no Exemplo 3.2. Já vimos que X_i é a variável aleatória que associa a cada par $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_2$ o valor da soma das coordenadas $\omega_1 + \omega_2$. Em outras palavras, $X_1(2,\ 2) = 4$ se o resultado da soma dos palitinhos do primeiro jogo for igual a quatro. Se $X_2(3,\ 2) = 5$ a soma dos palitos do segundo jogo é igual a cinco. Se $X_3(0,\ 0) = 0$ a soma dos palitos do terceiro jogo é igual a zero. Se $X_4(2,\ 3) = 5$ a soma dos palitos do quarto jogo é igual a cinco. Se $X_5(1{,}2) = 3$ a soma dos palitos do quinto jogo é igual a três. Portanto, o conjunto que represente os resultados destes cinco jogos consecutivos é um vetor aleatório $Y_5 = (4,\ 5,\ 0,\ 5,\ 3)$.

3.3.3 Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Sejam X_1, X_2, ..., X_i, $i \geqslant 1$, variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade (Ω, $\mathcal{F}$, P), de modo que Y_n = (X_1, X_2, ..., X_i), i = 1, 2, 3, ..., n, é um vetor aleatório em (Ω, $\mathcal{F}$, P). Informalmente as X_i são independentes se, e somente se, quaisquer eventos determinados por qualquer grupo de variáveis aleatórias distintas são independentes.

Definição 3.38. As variáveis aleatórias X_1, X_2, ..., X_i são mutuamente independentes se para quaisquer eventos borelianos B_1, ..., B_n

$$P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

Dada uma família de variáveis aleatórias independentes, qualquer subfamília é também formada por variáveis aleatórias independentes [12].

Vamos considerar uma família de variáveis aleatórias que, além de serem independentes, têm a mesma distribuição, o que chamamos de independentes e identicamente distribuídas, ou simplesmente i.i.d.

Considerando o que já vimos, onde Y_n e o vetor aleatório que representa o resultado de n jogos de palitinhos consecutivos, jogado por k Jogadores, em que $Y_n = \{X_1$, X_2, X_3, ..., $X_n\}$, as variáveis aleatórias X_i são independentes. Então, a probabilidade de ocorrer o vetor Y_n é dada por $P(Y_n)$=$P(X_1)P(X_2)...P(X_n)$.

A probabilidade de ocorrer qualquer valor na soma dos palitinhos no primeiro jogo, não influência o resultado no segundo jogo jogado por jogadores ideais, nem nos jogos seguintes.

Outra observação é que X_n tem a mesma distribuição de X_1, X_2..., pois trata-se de uma sequência de repetição do mesmo experimento. Portanto podemos dizer que o vetor Y_n é composto de variáveis aleatórias identicamente distribuídas.

Exemplo 3.39. Vamos calcular a probabilidade de ocorrência do vetor Y_5 = (4, 5, 0, 5, 3) visto acima. Sabendo que $X_1 = 4$, $X_2 = 5$, $X_3 = 0$, $X_4 = 5$, $X_5 = 3$, ou seja, no primeiro a soma dos palitinhos é igual a quatro, no segundo a soma é igual a cinco, e assim por diante. Pela distribuição de probabilidade do Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, temos que $P(X_1 = 4) = \frac{3}{16}$, $P(X_2 = 5) = P(X_4 = 5) = \frac{2}{16}$, $P(X_3 = 0) = \frac{1}{16}$, e $P(X_5 = 3) = \frac{4}{16}$. Então,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_5) = \mathrm{P}(4, 5, 0, 5, 3) = \frac{3}{16}.\frac{2}{16}.\frac{1}{16}.\frac{2}{16}.\frac{4}{16} = \frac{24}{1048576} = 0{,}0023\%$$

Se fossemos calcular a probabilidade da não ocorrência de Y_5, bastava calcular a probabilidade complementar.

Capítulo 4

As Leis dos Grandes Números e o Jogo de Palitinhos

Este capítulo tem como objetivo aplicar as Leis dos Grandes Números no Jogo de Palitinhos, no entanto, faremos um breve estudo de esperança matemática e do Lema de Borel-Cantelli, pois serão indispensáveis para tais aplicações.

4.1 Esperança Matemática

O desenvolvimento da Probabilidade tem um grande impulso 1657, Christiaan Huygens (1629 - 1695) faz a primeira publicação em Teoria de Probabilidade, foi um pequeno livro intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae.* Huygens talvez tenha sido o primeiro a perceber claramente o surgimento de uma importante teoria matemática quando, justificando sua publicação de Ludo Aleae a van Schooten, escreveu que "... não estamos tratando apenas com jogos mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda como interessante". Ele foi o primeiro a usar o conceito de Esperança Matemática. Huygens era de uma importante família holandesa e desde cedo teve acesso aos mais importantes grupos científicos de sua época. Seu pai foi amigo de René Descartes, que teve grande influência na educação matemática do jovem Huygens [10].

Esperança matemática de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de ocorrência em um experimento, multiplicado pelo seu valor. Nesta seção introduziremos a esperança de uma variável aleatória discreta.

Definição 4.1. Dada uma variável aleatória discreta x_i com função de probabilidade $p(x_i)$. Definimos a esperança matemática para o caso discreto por

$$EX = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

EX é a média ponderada onde os pesos são as probabilidades $p(x_i)$, ou seja, EX é uma média dos valores possíveis de X, ponderada conforme a distribuição de X. A esperança de X é também a chamada valor esperado de X.

Uma possível explicação intuitiva desta definição reside na interpretação de probabilidade como limite de frequências relativas: interpretando X novamente como um característico numérico do resultado de um experimento, suponhamos que vamos repetir (pelo monos conceitualmente) o experimento n vezes, independentemente, e observar os valores desse característico numérico. Nesses n experimentos, se n é grande, as observações tomarão o valor x_i com frequência relativa de aproximadamente $p(x_i)$, para todo i, isto é, x_i aparecerá mais ou menos $np(x_i)$ vezes nas n observações. Portanto, o valor médio observado nesses n ensaios do experimento é a média aritmética dos n valores observados, e será aproximadamente igual a

$$EX = \frac{1}{n}\sum_i [x_i np(x_i)] = \sum_i x_i p(x_i),$$

e o valor médio em n ensaios do experimento convergirá par EX quando n tende para o infinito. Portanto, podemos dizer que esperamos obter a longo prazo um valor médio EX.

Definição 4.2. Se X é uma variável aleatória discreta, diremos que X integrável se EX é finita.

Exemplo 4.3. Vamos determinar a esperança matemática para o Jogo de Palitinhos com dois jogadores baseado na distribuição de probabilidades deste jogo.

$$EX = 0.\frac{1}{16} + 1.\frac{2}{16} + 2.\frac{3}{16} + 3.\frac{4}{16} + 4.\frac{3}{16} + 5.\frac{2}{16} + 6.\frac{1}{16} = 3$$

A esperança de X pode ser pensada como o centro de massa da variável aleatória X. No caso do Jogo de Palitinhos para dois jogadores, esse centro de massa será três, visto pela distribuição de probabilidade que este valor tem maior probabilidade de ocorrer entre todos os valores possíveis para a variáveis aleatórias. Portanto, em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores o valor esperado para a soma dos palitinhos será três.

4.1.1 Momentos

Seja X uma variável aleatória e $d \in \mathbb{N}^*$. Definimos o momento de ordem d, ou o d-ésimo momento da variável aleatória X como EX^d. Se X é integrável, definimos o d-ésimo momento central por $E(X - EX)^d$. O momento absoluto de ordem d é definido como $E\,|X|^d$.

É claro que o primeiro momento é a esperança e o primeiro momento central é nulo, isto é, $E(X - EX)$=0. O Segundo momento central é chamando *variância de X.*

Definição 4.4. Seja X uma variável aleatória integrável. Define-se a variância da variável aleatória X, denotada por $VarX$ ou σ^2, como

$$VarX = E(X - EX)^2.$$

Definição 4.5. Se X_1, X_2, ..., X_n variáveis aleatórias independentes e integráveis, então

$$Var(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} VarX_i$$

Exemplo 4.6. Vamos determinar a variância de um vetor aleatório formado por dezesseis resultados de Jogos de Palitinhos jogado por dois jogadores. Usaremos a distribuição de probabilidades e a esperança matemática já calculada. Sendo assim, esses jogos terão como resultados a distribuição de probabilidades, ou seja, em um jogo a soma é zero, em dois jogos a soma é um, em três jogos a soma é dois, em quatro jogos a soma é três, em três jogos a soma é quatro, em dois jogos a soma é cinco e em um jogo a soma é seis. Então

$$\begin{aligned} VarY &= \frac{(0-3)^2 + 2.(1-3)^2 + 3.(2-3)^2 + 4.(3-3)^2 + 3.(4-3)^2 + 2.(5-3)^2 + (6-3)^2}{16} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Portanto, em um Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, quanto mais a variância de um vetor aleatório se aproximar de 2,5, significa que este conjunto de valores se aproxima de sua distribuição de probabilidade.

A variância é definida como uma soma de quadrados, tendo assim uma medida cuja unidade é quadrática. Para uniformizá-la, voltar a unidade da variável aleatória temos que tirar a raiz quadrada da variância, ou seja, calcular o desvio padrão.

Definição 4.7. O desvio-padrão $\sigma(X)$ é dado pela raiz quadrada da variância

$$\sigma(X) = \sqrt{VarX},$$

e mede a dispersão de X em torno de sua média. O desvio padrão tem a mesma unidade de medida de X.

Exemplo 4.8. Determinaremos o desvio padrão para o vetor aleatório visto acima. Como o desvio padrão é dado pela raiz quadrada da variância, então

$$\sigma = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Os cálculos da variância e do desvio padrão são chamados de medidas de dispersão em relação à esperança matemática e é dado por um número não negativo. Então quando a variância (e consequentemente o desvio padrão) aumenta temos conjuntos de valores mais heterogêneos e quando vai a zero temos conjuntos de valores mais homogêneos.

4.1.2 Desigualdades Básicas

No final do século 19, o russo Pafnuty L'vovich Chebyshev (1821 - 1884) fundou a denominada escola de São Petersburgo que produziu grandes matemáticos russos com contribuições fundamentais à Teoria de Probabilidade. Chebyshev foi o primeiro a raciocinar sistematicamente em termos de variáveis aleatórias e seus momentos. Usando esses conceitos, Chebyshev estabeleceu uma simples desigualdade que permitiu uma prova trivial da Lei Fraca dos Grandes Números. O conceito de momentos foi utilizado por ele e, em seguida, por seu aluno Andrei Andreiwich Markov (1856 - 1922) para dar uma prova rigorosa do Teorema Central do Limite. Markov fez estudos sobre dependência de variáveis aleatórias analisando as hoje denominadas Cadeias de Markov em tempo discreto [10].

Nesta subsecção trataremos de três desigualdades que serão necessárias na demonstração da Lei dos Grandes Números. A Desigualdade Básica de Chebyshev, a Desigualdade de Markov e a Desigualdade Clássica de Chebyshev.

Proposição 4.9. *(Desigualdade Básica de Chebyshev). Seja X uma variável aleatória não-negativa e seja $\lambda>0$ uma constante. Então*

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{EX}{\lambda}$$

Demonstração. Tomando $Z = \lambda \mathcal{I}_{X \geq \lambda}$. Temos que $Z \leq X$. Logo, pela monotonicidade da esperança [16]

$$\begin{gathered} EX \geq EZ = \lambda P(X \geq \lambda) \\ EX \geq \lambda P(X \geq \lambda) \\ P(X \geq \lambda) \leq \frac{EX}{\lambda} \end{gathered}$$

□

Proposição 4.10. *(Desigualdade de Markov). Seja X uma variável aleatória qualquer e seja $\lambda>0$ uma constante. Então para todo $t > 0$,*

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E|X|^t}{\lambda^t}$$

Demonstração. Seja $Z = |X|^t$. Como $t > 0$, então

$$P(|X| \geq \lambda) = P(|X|^t \geq \lambda^t) = P(Z \geq \lambda^t),$$

usando a desigualdade básica com Z e λ^t

$$P(Z \geq \lambda^t) \leq \frac{EZ}{\lambda^t} = \frac{E|X|^t}{\lambda^t}$$

□

Proposição 4.11. *(Desigualdade Clássica de Chebyshev). Seja X uma variável aleatória integrável e seja $\lambda > 0$ uma constante. Então*

$$P(|X - EX| \geq \lambda) \leq \frac{VarX}{\lambda^2}$$

Demonstração. Tomando $Z = (X - EX)^2$, temos $EZ = VarX$. Então

$$P(|X - EX| \geq \lambda) = P(Z \geq \lambda^2),$$

aplicando a desigualdade básica, temos

$$P(Z \geq \lambda^2) \leq \frac{EZ}{\lambda^2} = \frac{VarX}{\lambda^2}$$

□

4.2 Lei Fraca dos Grandes Números para o Jogo de Palitinhos

A Lei fraca dos grandes números foi provada inicialmente por um dos grandes matemáticos da família Bernoulli, James Bernoulli, em seu livro *Ars Conjectandi* publicado em 1713 [10]. No entanto a prova dada por ele foi muito difícil, pois não se conhecia a desigualdade de Chebyshev, que vimos anteriormente. Com a desigualdade clássica de Chebyshev, que é uma generalização da desigualdade de Markov, demostraremos de uma forma mais simples e mais geral a Lei Fraca dos Grandes Números.

A ideia por traz das Leis dos Grandes Números é bastante intuitiva e de grande importância. Antes de enunciar e demostrar essas leis, vamos analisar as ideias intuitivas delas.

Nosso experimento será o seguinte: observaremos o jogo de palitinhos, com dois jogadores, jogado infinitas vezes independentemente. Teremos como espaço amostral Ω_2^∞, visto no Exemplo 3.3, para infinitos jogos. A probabilidade da variável aleatória assumir qualquer um dos valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 foi visto na distribuição de probabilidade deste jogo. Além disso, todos os jogos são independentes gerando variáveis aleatórias independentes, com mesma distribuição de probabilidade pois é uma sequência de repetições do mesmo experimento.

Observando os n jogos iremos montar com os resultados desses um vetor aleatório $Y_n = (X_1, X_2, ..., X_n)$. Em seguida somaremos todos os valores deste vetor e chamaremos esta soma de S_n. Se o resultado dos jogos foram $X_1 = 3$, $X_2 = 1$, $X_3 = 4$, $X_4 = 4$, $X_5 = 5$... então teremos o vetor $Y_5 = (3, 1, 4, 4, 5)$. Portanto, $S_1 = 3$, $S_2 = 4$, $S_3 = 8$, $S_4 = 12$, $S_5 = 17$.

Observe que S_n é a soma de todas as coordenadas do vetor Y_n, onde n é a quantidade de jogos. Desta forma, é natural perguntarmos:

Se observarmos infinitos jogos, qual será o limite de $\frac{S_n}{n}$?

Pela distribuição de probabilidade, como, a mesma frequência que ocorre um resultado igual a seis ocorre um igual a zero, a mesma frequência que ocorre um resultado igual a dois ocorre um igual a quatro, esperamos que seja verdadeira a afirmação

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n} = EX$$

onde EX é a esperança matemática. Lembrando que como os jogos tem a mesma distribuição, então $EX_1 = EX_i$, $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$. Ou seja,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \longrightarrow 3$$

Para o Jogo de Palitinhos com dois jogadores a razão da soma dos resultados pela quantidade de jogos muito provavelmente dará três.

Se X_1, X_2, ..., X_n compõem uma sequência de n variáveis aleatórias i.i.d., com esperança comum $EX_n = 3$, a Lei dos Grandes Números afirma que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n} \longrightarrow EX_n = 3$$

Quando n tende a infinito $\dfrac{S_n}{n}$ converge à esperança. Nesta secção trataremos da Lei Fraca dos Grandes Números cuja convergência será do tipo **convergência em probabilidade**.

Definição 4.12. Sejam X, X_1, X_2, ..., X_n variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade (Ω, $\mathcal{F}$, P). Então X_n converge para X **em probabilidade**, denota-se $X_n \xrightarrow{P} X$, se para todo $\epsilon > 0$

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon\ ) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

Intuitivamente esta convergência diz que para n muito grande a probabilidade de que X_n e X sejam bem próximos é bastante alta.

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias integráveis em (Ω, $\mathcal{F}$, P) e sejam S_1, S_2, ..., S_n as somas parciais, definidas por $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + ... + \mathrm{X}_n$. Observe que S_1, S_2, ..., S_n também são variáveis aleatórias em (Ω, $\mathcal{F}$, P). Dizemos que uma sequência de variáveis aleatória X_1, X_2, ..., X_n satisfazem a Lei Fraca dos Grandes Números se

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

ou, equivalentemente, se

$$P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n - (EX_1 + ... + EX_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{P} 0, \forall\ \varepsilon > 0.$$

ou, ainda,

$$P\left(\left|\frac{(X_1 - EX_1) + ... + (X_n - E(X_n))}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{P} 0, \forall\, \varepsilon > 0$$

A Lei dos Grandes Números aplicada a uma sequência de variáveis aleatórias pode ser interpretada como a média aritmética dos primeiros n observados aproximando-se da média, quando n tende ao infinito. No caso do Jogo de Palitinhos, a variável aleatória X_1 tem a mesma distribuição de X_n, ou seja, quando n tende ao infinito S_n/n é aproximadamente igual a $E(S_n)/n$, portanto no caso do Jogo de Palitinhos para dois jogadores, é igual a três.

Se as variáveis aleatórias X$_n$ têm a mesma média finita μ, então elas satisfazem a Lei Fraca dos Grandes Números se, e somente se, $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$. No Jogo de Palitinhos isso vale pois neste caso $\dfrac{E(S_n)}{n} = \mu$ e $\dfrac{S_n}{n}$ - $\mu \xrightarrow{P} 0$ se, e somente se, $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$.

Teorema 4.13. *(Lei Fraca dos Grandes Números de Chebyshev). Sejam X_1,X_2,... variáveis aleatórias independentes duas a duas com variâncias finitas e uniformemente limitadas, isto é, existe c finito, tal que $VarX_n \leq c$, para todo n. Então X_1, X_2,... satisfaz a Lei Fraca dos Grandes Números:*

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

Demonstração. Precisamos mostrar que para $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\frac{|S_n - ES_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

ou, equivalentemente,

$$P(|\ S_n - ES_n\ | \geq \varepsilon n) \xrightarrow{P} 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

usando a Desigualdade Clássica de Chebyshev, observe que

$$P(|S_n - ES_n\ | \geq \varepsilon n) \leq \frac{VarS_n}{(\varepsilon n)^2}.$$

Como as variáveis aleatórias são independentes duas a duas, temos que

$$VarS_n = Var(X_1 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} VarX_i \leq nc,$$

então,

$$\frac{VarS_n}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{nc}{\varepsilon^2 n^2}.$$

Portanto,

$$P(|\ S_n - ES_n\ | \geq \varepsilon n) \leq \frac{VarS_n}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n} \longrightarrow 0$$

□

Vimos anteriormente que a variância do Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores para dezesseis jogos foi igual a 2,5. No entanto, se a dispersão for maior que 2,5 a variância será finita. Observe que para infinitos jogos, se os resultados seguirem a distribuição de probabilidade, isto é, dos dezesseis jogos um obtiver como resultado o número zero, dois obtiverem como resultado o número um, três obtiverem como resultado o número dois, quatro obtiverem como resultado o número três, três obtiverem como resultado o número quatro, dois obtiverem como resultado o número cinco e um obtiver como resultado o número seis, então teremos sempre a variância igual a 2,5. Contudo, podemos afirmar que no Jogo de Palitinhos com dois jogadores, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 3$$

4.3 Lei Forte dos Grandes Números para o Jogo de Palitinhos

Na secção sobre a Lei Fraca dos Grandes Números mostramos que no Jogo de Palitinhos com dois jogadores, a razão da soma dos resultados pela quantidade de jogos converge **em probabilidade** para a esperança matemática.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 3.$$

Considere o vetor aleatório Y_n visto na secção 4.2. Alem disso, em um Jogo de Palitinhos com dois jogadores, a probabilidade de ocorrer dois é igual a de ocorrer quatro. Calculando a razão entre a soma do resultado $X_1 = 2$, com o resultado $X_2 = 4$ pela quantidade de jogos, neste caso dois, obtemos a esperança. Como a probabilidade de ocorrer zero ou seis é a mesma, então a soma desses resultados dividido por dois também dá a esperança. Assim, uma sequência infinita formada por resultados de jogos, provavelmente terá a mesma quantidade de zero e seis, a mesma quantidade de dois e quatro, a mesma quantidade de um e cinco e uma quantidade maior de três. No entanto, como esta sequência é aleatória então não existe uma forma certa de ocorrência. Então, não é uma certeza absoluta de ocorrer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 3$$

Entretanto, esperamos que dado um erro ε, para n muito grande, a probabilidade

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 3\right| > \varepsilon\right)$$

deve ser pequena. Na verdade, exponencialmente pequena ou nem existir. Como temos essa quase certeza de que isso ocorre então provaremos a Lei Forte dos Grandes Números que difere da Lei Fraca, exatamente por ser outro tipo de convergência chamada de **quase certamente** (q.c).

Definição 4.14. Sejam X, X_1, X_2,... variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Então X_n converge para X *quase certamente* se $P(X_n \longrightarrow X) = 1$ quando $n \longrightarrow \infty$, ou seja, se o evento $\mathrm{A}_0 = \{\omega : X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}$ é de probabilidade 1.

Notação. $X_n \xrightarrow{q.c} X$.

Observe que convergência quase certa é convergência pontual com probabilidade 1. Em outras palavras, é dizer que $X_n(\omega)$ converge para $X(\omega)$ para "quase todo"ω, ou seja, dado $\omega \in \Omega$ como um resultado possível de um experimento, a sequência X_n de característicos numéricos de ω converge para $X(\omega)$ para quase todo resultado do experimento.

A convergência em probabilidade afirma que para valores grandes de n as variáveis X_n e X são aproximadamente iguais com probabilidade bem alta. Convergência em probabilidade é mais fraca que convergência quase certa, já que

$$\text{convergência q.c} \Rightarrow \text{convergência em probabilidade [12]}$$

$$\text{convergência em probabilidade} \not\Rightarrow \text{convergência q.c [12]}$$

Proposição 4.15. *Se $X_n \xrightarrow{q.c} X$, então $X_n \xrightarrow{P} X$.*

Demonstração. Suponha que $X_n \xrightarrow{q.c} X$ e seja $\varepsilon > 0$ fixo. Precisamos provar que

$$(P|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{q.c} 0$$

Seja $A_0 = \{\omega\text{: } X_n(\omega) \xrightarrow{q.c} X(\omega)\}$. Como $X_n \xrightarrow{q.c} X$, então $P(A_0) = 1$. para $\omega \in A_0$, $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ para todo n suficientemente grande. Seja A_n o evento "para todo $t \geq n$, $\mid X_n - X \mid < \varepsilon$", temos

$$A_n = \cap_{t=n}^{\infty}(\mid X_n - X \mid < \varepsilon)$$

Se $\omega \in A_0$, então $\omega \in A_n$ para algum n. Mas $A_n \subset A_{n+1}$, logo

$$A_0 \subset \cup_{n\geq 1} A_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n,$$

portanto,

$$1 = P(A_0) \leqslant P(\cup_{n\geq 1} A_n)$$

e, por continuidade de probabilidade [12], $P(A_n) \uparrow 1$.

Mas $A_n \subset (\mid X_n - X \mid < \varepsilon)$ [12], logo $P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) \xrightarrow{q.c} 1$ e $P(\mid X_n - X \mid \geqslant \varepsilon) = 1$ - $P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) \xrightarrow{q.c} 0$

□

Considere Ω_2^∞ o espaço amostral apropriado para modelar sucessivos (infinitos!) Jogos de Palitinhos jogados por dois jogadores. A seguir provaremos a Lei Forte dos Grandes Números para este caso. Em termos intuitivos, iremos somar todos os resultados dos infinitos jogo independentes, e dividir esta soma pela quantidade de jogos e veremos que **quase certamente** esta razão é igual a três, que é a esperança matemática. É isto que provaremos matematicamente.

Definição 4.16. Dizemos que uma sequência de variáveis aleatória X_1, X_2, X_3,... satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números se

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n - ES_n}{n} = 0\right) = 1,$$

ou seja, se

$$\frac{X_1 + ... + X_n - (EX_1 + ... + EX_n)}{n} \xrightarrow{q.c} 0,$$

ou, equivalentemente

$$\frac{(X_1 - EX_1) + ... + (X_n - EX_n)}{n} \xrightarrow{q.c} 0.$$

Teorema 4.17. *(Lei dos Grandes Números de Cantelli, 1917). Sejam X_1, X_2, X_3,... variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com quarto momento finito e esperança EX. Então (X_1, X_2, X_3,...) satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números:*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c} EX$$

Demonstração. Vamos supor uma sequência $W_n = X_n - EX$. Então as variáveis aleatórias W_n são independentes e identicamente distribuídas e $EW_n = 0$. Portanto, se

$$\frac{W_1 + W_2 + ... + W_n}{n} \xrightarrow{q.c} 0,$$

então

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{q.c} EX.$$

Pelo Teorema Multinomial

$$S_n^4 = (W_1 + W_2 + ... + W_n)^4 = \sum_{i,j,k,l} W_iW_jW_kW_l = \sum_i W_i^4 + \frac{4!}{2!2!}\sum_{i<j} W_i^2\, W_j^2 + \frac{4!}{3!}\sum_{i\neq k} W_i^3 W_k + \frac{4!}{2!}\sum_{(j<k)(i\neq j),k} W_i^2 W_j W_k + 4!\sum_{i<j<k<l} W_iW_jW_kW_l.$$

Por independência de variável aleatória, temos que

$$ES_n^4 = \sum_i EW_i^4 + 6\sum_{i<j} E(W_i^2\, W_j^2) + \sum_k \left(4\sum W_i^3 + 12\sum W_i^2 W_j + 24\sum W_i\, W_j W_l\right) EW_k$$

como assumimos que $EW_k = 0$, obtemos

$$\sum_k [\ 4 \sum W_i^3 + 12 \sum W_i^2 W_j + 24 \sum W_i\ W_j W_l]\ EW_k = 0.$$

Portanto,

$$ES_n^4 = \sum_i EW_i^4 + 6 \sum_{i<j} E[W_i^2 W_j^2] = nEW_1^4 + 6\ C_{n,2} E(W_1^2\ W_2^2).$$

Observe que

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n.(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{n^2-n}{2},$$

então

$$nEW_1^4 + 6\ C_{n,2}\ E(W_1^2\ W_2^2) = nEW_1^4 + 3(n^2-n)E(W_1^2\ W_2^2).$$

Além disso, como as W_i têm a mesma distribuição, obtemos

$$\begin{aligned} nEW_1^4 + 3(n^2-n)E(W_1^2 W_2^2) &\leq nEW_1^4 + 3(n^2-n)\ \sqrt{EW_1^4}\ \sqrt{EW_2^4} \\ &= nEW_1^4 + 3(n^2-n)EW_1^4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$nEW_1^4 + 3(n^2-n)EW_1^4 = nEW_1^4 + 3n^2 EW_1^4 - 3nEW_1^4 = 3n^2 EW_1^4 - 2nEW_1^4$$

Além disso, temos

$$3n^2 EW_1^4 - 2nEW_1^4 \leq 3n^2 EW_1^4$$

Pela Desigualdade de Markov

$$P(|\tfrac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) = P(|S_n| \geq \varepsilon n) \leq \frac{ES_n^4}{\epsilon^4 n^4}.$$

Já vimos que $ES_n^4 \leq 3n^2\ EW_1^4$, então

$$\mathrm{P}(|S_n| \geq \varepsilon n) \leq \frac{ES_n^4}{\epsilon^4 n^4} \leq \frac{3EW_1^4}{\epsilon^4 n^2}.$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli [12] segue que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c} 0.$$

Mas

$$\frac{W_1 + W_2 + ... + W_n}{n} \xrightarrow{q.c} 0.$$

Então

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{q.c} EX.$$

$\square$

Para o Jogo de Palitinhos, temos

$$\frac{(X_1 - 3) + (X_2 - 3) + ... + (X_n - 3)}{n} \xrightarrow{q.c} 0.$$

Portanto,

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{q.c} 3.$$

Donde

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = 3$$

Logo, para infinitos Jogos de Palitinhos jogado por dois jogadores, a razão da soma dos resultados pela quantidade de jogos converge, quase certamente, para a esperança matemática.

Capítulo 5

Aplicações do Teorema Central do Limite no Jogo de Palitinhos

Trabalhando na linha dos resultados de Cardano, Galileo Galilei (1564 - 1642) identifica no comportamento dos erros, em observações astronômicas, características que mais tarde serão descritas pela distribuição normal, tais como a aglomeração simétrica em torno do resultado verdadeiro e de que a probabilidade do erro decresce com seu tamanho [17].

Neste capítulo veremos a distribuição normal e algumas aplicações do Teorema Central do Limite no Jogo de Palitinhos.

5.1 Distribuição Normal

A história da Distribuição Normal é bastante longa e está ligada à história da descoberta das probabilidades em matemática, surgiu para resolver questões de apostas de jogos de azar por volta do século XVII. Abraham de Moivre foi o responsável mais direto pela curva normal, dando sequência aos trabalhos de Jacob Bernoulli e Nicolaus Bernoulli [10].

Para Moivre grandes erros são mais raros que erros pequenos. Assim, quanto menores os erros, mais frequentes eles serão e quanto maiores, menos frequentes. Dessa forma, os erros se distribuem equitativamente em torno da média, formando uma curva simétrica e com pico na média. Moivre chamou essa curva de normal, porque a média dela representa a norma, o que se desvia da média é considerado erro, por isso a equivalência entre desvio e erro. Por fim, devido ao formato dessa curva, Moivre calculou uma medida de dispersão em torno da média, medida esta que hoje é conhecida por desvio padrão [10].

No entanto, foi Pierre Simon, Marquês de Laplace, que a partir de suas observações de que erros de medição tendem a ser normalmente distribuídos, que propôs e demonstrou com rigor o Teorema Central do Limite. A aplicação deste teorema mostra que os erros de medição possuem praticamente uma distribuição normal [17].

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) estabeleceu a relação da distribuição de erros de medidas com a curva normal. Gauss usa a curva normal para modelar erros em observação astronômicas, e por isso é frequentemente chamada de Distribuição Gaussiana ou Curva de Gauss [10].

De forma geral, a Distribuição Normal é completamente determinada por dois parâmetros, média e desvio padrão. Ela é simétrica em relação à média e o valores de média, moda e mediana são iguais. A área total sob ela é igual a 1, como metade distribuída para esquerda da média, e a outra metade na sua direita.

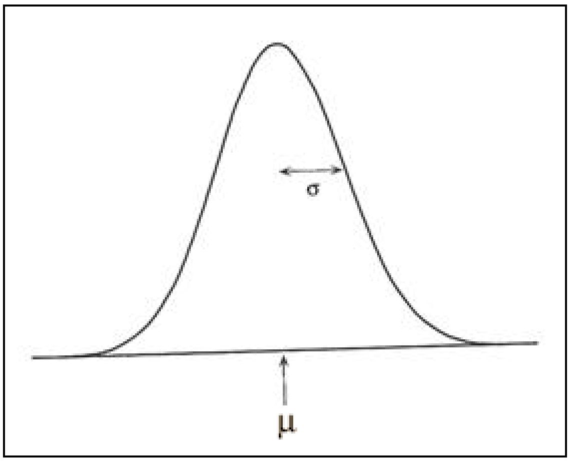

Figura 5.1: Gaussiana

Observemos que a Gaussiana apresenta uma área central em torno da média, onde se localizam os pontos de maior frequência e também possui áreas menores progressivamente mais próximas de ambas as extremidades. A equação da curva, que se ajusta ao gráfico da figura 5.1, é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in \mathbb{R}$$

onde μ é a média e σ é o desvio-padrão.

A probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor entre um determinado intervalo $[a, b]$ é dada pela área sob a curva entre os pontos a e b. Para calcular esta área sob a curva normal teremos que integrar a função distribuição de probabilidade entre os pontos a e b, ou seja, temos de calcular

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx, \; x \in \mathbb{R}$$

A distribuição $\mathcal{N} = \mathcal{N}(0, 1)$ é chamada normal padrão. Denotamos por Φ a função de distribuição acumulada de uma normal padrão $\mathcal{N}$, que é definida por

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \; x \in \mathbb{R}$$

A distribuição normal padrão não é nada mais que a distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Se desejarmos calcular para outros valores de média e desvio-padrão teríamos, teoricamente, de calcular a integral da distribuição normal. No entanto como seria muito trabalhoso, recorremos a uma transformação, calculando o escore padronizado, chamado de valor normal padronizado, denotamos por z e dado por

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

em que X é a variável aleatória, μ é a média e σ é o desvio-padrão.

Em seguida, basta utilizar uma tabela de distribuição normal padronizada e calcular o valor desejado.

5.2 Aplicações do Teorema Central do Limite no Jogo de Palitinhos

Abraham de Moivre, demonstrou a primeira versão do Teorema Central do Limite, em 1733, para o caso especial de variáveis aleatórias de Bernoulli com $p = 1/2$. O teorema foi estendido em seguida por Laplace para o caso de p arbitrário. Laplace também descobriu uma forma mais geral do Teorema Central do Limite. Entretanto, sua demonstração não era completamente rigorosa. A primeira demonstração verdadeiramente rigorosa para o Teorema Central do Limite foi apresentada pelo matemático russo Lyapunov entre 1901 e 1902 [10].

O Teorema Central do Limite, nos dias de hoje, é utilizado no estudo da normal como distribuição de erros, pois em muitas situações reais é possível interpretar o erro de uma observação como resultante de muitos erros pequenos e independentes. Há também muitas situações em que se pode justificar o uso da normal por meio do uso do Teorema Central do Limite, embora não necessariamente sejam caso sujeitos de erros de observações.

O Teorema Central do Limite trata da convergência em distribuição das somas parciais normalizadas

$$Z = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{VarS_n}},$$

em que a distribuição da soma parcial S_n pode ser aproximada por uma normal com mesma média e variância de S_n

$$S_n \cong \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Sendo $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ esperamos, pelo que foi visto nas Leis dos Grandes Números, que

$$\frac{S_n}{n} \cong \mu.$$

Como vimos, todas as coisas deviam ser como a média, então se algo desvia dessa média é considerado erro; Então, se esse erro (desvio da média) acontece, quais valores ele pode assumir? Pela desigualdade de Chebyshev, esses desvios não podem ser muito maiores do que o desvio-padrão. Contudo, seu comportamento nessa escala possui forte regularidade estatística, e sua distribuição se aproxima de uma normal padrão.

Teorema 5.1. *(Teorema Central do Limite) Seja X_1, X_2... uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d, cada uma com média μ e variância σ^2. Então, a distribuição de*

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tende à distribuição normal padrão quando $n \to \infty$, isto é, para $-\infty < t < \infty$,

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx, \text{ quando } n \to \infty$$

Demonstração. [12] □

Em geral, a solução de problemas numéricos envolvendo a distribuição normal inclui a consulta de uma tabela de valores de Z com os valores apropriados. Na Tabela 1, no Apêndice, exibimos os valores de $Z = 0,00; 0,01; 0,02; ...; 3,49$.

No caso do Jogo de Palitinhos, o Teorema Central do Limite diz que a soma das suas variáveis aleatórias tem uma distribuição que é aproximadamente normal.

Exemplo 5.2. Em dois Jogos de Palitinhos jogado por dois jogadores, qual a probabilidade aproximada de que a soma dos resultados seja maior ou igual a nove?

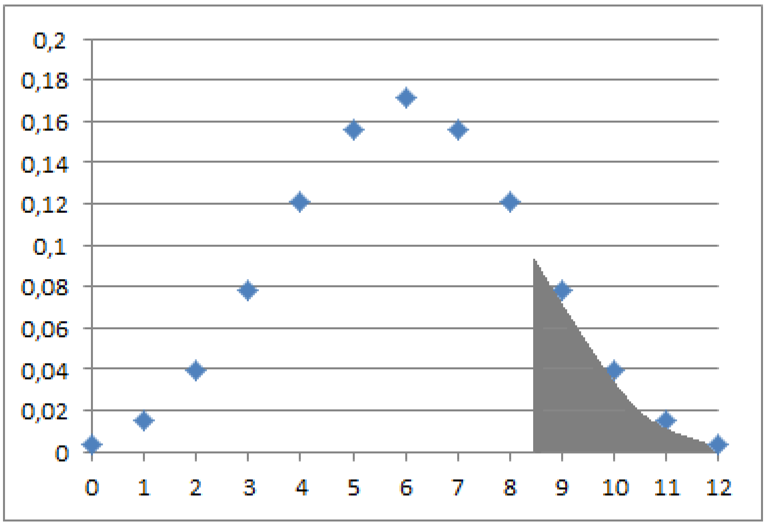

Figura 5.2: Gráfico da probabilidade S_2 para o Jogo de Palitinhos com dois jogadores.

Como já vimos, para cada jogo com dois jogadores temos

$$\mu = 3 \text{ e } Var = \frac{5}{2},$$

então calcularemos a área colorida da Figura 5.2, para dois jogos ($n = 2$) temos

$$n\mu = 2.3 = 6 \text{ e } nVar = 2.\frac{5}{2} = 5$$

logo, consideraremos $S_2 \geq 8,5$ para uma aproximação um pouco mais precisa

$$Z < \frac{8,5-6}{\sqrt{5}} \Longrightarrow Z < 1,118$$

com o auxilio da tabela dos valores de Z, temos

$$P(S_2 \geq 9) \cong 1 - 0,8686 \cong 0,1314$$

Se compararmos essa probabilidade com a calculada no gráfico, observaremos que o desvio é grande, ele diminui se aumentarmos a quantidade de jogos.

Exemplo 5.3. Em três Jogos de Palitinhos jogado por dois jogadores, qual a probabilidade aproximada de que a soma dos resultados esteja entre 7 e 11?

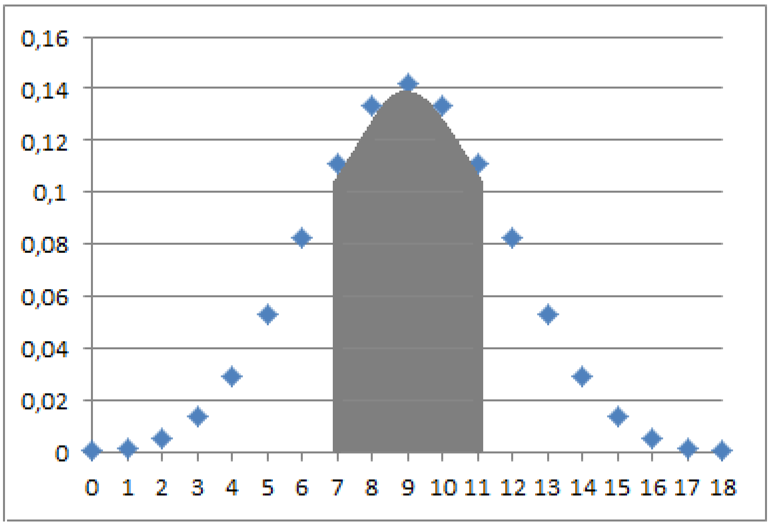

Figura 5.3: Gráfico da probabilidade S_3 para o Jogo de Palitinhos com dois jogadores.

Como já vimos, para cada jogo com dois jogadores temos

$$\mu = 3 \text{ e } Var = \frac{5}{2},$$

então calcularemos a área colorida da Figura 5.3, para três jogos ($n = 3$) temos

$$n\mu = 3.3 = 9 \text{ e } nVar = 3.\frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

logo, para $7 \leq S_3 \leq 11$ temos

$$\frac{7-9}{\sqrt{\frac{15}{2}}} \leq Z \leq \frac{11-9}{\sqrt{\frac{15}{2}}} \Longrightarrow -0,73 \leq Z \leq 0,73$$

com o auxilio da tabela dos valores de Z, temos

$$0,2327 \leq P(7 \leq S_3 \leq 11) \leq 0,7673$$

portanto

$$P(7 \leq S_{10} \leq 11) \cong 0,5346$$

Exemplo 5.4. Em dez Jogos de Palitinhos jogado por dois jogadores, qual a probabilidade aproximada de que a soma dos resultados esteja entre 25 e 35?

Como já vimos, para cada jogo com dois jogadores temos

$$\mu = 3 \text{ e } Var = \frac{5}{2},$$

então, para dez jogos ($n = 10$) temos

$$n\mu = 10.3 = 30 \text{ e } nVar = 10.\frac{5}{2} = 25$$

logo, para $25 \leq S_{10} \leq 30$ temos

$$\frac{25-30}{\sqrt{25}} \leq Z \leq \frac{35-30}{\sqrt{25}} \Longrightarrow -1 \leq Z \leq 1$$

com o auxilio da tabela dos valores de Z, temos

$$0,1587 \leq P(25 \leq S_{10} \leq 30) \leq 0,8413$$

portanto

$$P(25 \leq S_{10} \leq 30) \cong 0,6826$$

Quando aumentamos o número de jogadores num Jogo de Palitinhos, o gráfico dos possíveis palpites, em relação a sua probabilidade de ocorrência, também toma a forma de uma Gaussiana, assim o Teorema Central do Limite se aplica ao Jogo de Palitinhos independente da quantidade de jogadores.

Capítulo 6

Algumas Aplicações do Nosso Estudo Para o Ensino Médio

Para garantir a vitória ou, pelo menos, para ter mais chances de vencer, independentemente de como o adversário venha a comportar-se, um jogador tem que traçar estratégias e, para isso, é necessário uma análise do jogo. Se considerarmos que ensinar Matemática seja desenvolver a criatividade, o raciocínio lógico, o pensamento independente e a capacidade de resolver problemas manejando situações reais, então traçar as estratégias em um jogo se encaixa perfeitamente dentro deste ensino. Quando uma estratégia é bem planejada, o jogador consegue ter mais controle sobre o jogo e prever, até certo ponto, o resultado final. Ou seja, se torna mais fácil definir um comportamento racional.

Neste capítulo veremos como trabalhar Probabilidade por meio do uso do Jogo de Palitinhos no Ensino Médio, utilizando as teorias dos capítulos III e IV, através de atividades a serem desenvolvidas na sala de aula.

6.1 Atividade I

Esta atividade é interessante para trabalhar os conceitos iniciais pois os alunos terão a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada; refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre elementos do jogo e a Probabilidade.

Primeiro, vamos definir o Jogo de Palitinhos como um jogo com número ilimitado de jogadores, em que cada um deles possui de zero a três palitinhos e arrisca um palpite. O ganhador é aquele que acerta a soma dos palitinhos de todos os jogadores. Logo após é necessário deixar claro que o Jogo de Palitinhos é um experimento aleatório, pois não é possível determinar o vencedor. Afinal, você sabe quantos palitos está trazendo na mão, mas não sabe quantos palitos seu oponente trás consigo, e sendo assim não tem como determinar a soma exata, o que o jogador faz é apresentar apenas uma estimativa ou previsão de resultado.

Após, deixar claro o experimento aleatório que é o Jogo de Palitinhos, vamos trabalhar o espaço amostral desse jogo.

Sendo assim, vamos levantar a seguinte questão: qual o espaço amostral para um Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores?

O professor pode motivar um pouco a discussão do seguinte modo: como há sete possibilidades diferente para a soma dos palitinhos (ou seja, 0, 1 , 2, 3 ,4 ,5 e 6), se um jogador pedir todos os valores pares e o outro jogador todos os valores ímpares, qual levará vantagem?

Intuitivamente, vai parecer que o que pediu os pares vai levar vantagem. Afinal são quatro numéricos pares entre os sete, enquanto o que pediu os impares ficaria apenas com três dos sete resultados prováveis.

Contudo, o espaço amostral é o conjunto de todas as possibilidades de resultados para um jogo, então,

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Contando as possibilidades de dar os pares, veremos que serão oito das dezesseis, assim como há oito possibilidades para dar os ímpares, o que seria justo.

Após ter trabalhado espaço amostral, daremos a definição de evento como um subconjunto qualquer do espaço amostral. Como no ensino médio não se trabalham os conceitos de variáveis aleatórias, usaremos apenas parte desses conceitos dentro dos eventos.

Em seguida, a questão que deve ser colocada é: qual o evento, num Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, onde a soma dos palitinhos é igual a dois? e igual a três?

Chamando de evento A, o subconjunto de Ω, onde a soma de palitinhos é igual a dois, e de evento B o subconjunto de Ω quando a soma for igual a três, temos

$$\text{A} = \{x \in \Omega |\ x \text{ é os pares ordenados que a soma das coordenadas é igual a dois}\}$$

$$\text{B} = \{x \in \Omega |\ x \text{ é os pares ordenados que a soma das coordenadas é igual a três}\}$$

ou seja,

$$A = \{(0,2), (1,1), (2,0)\} \text{ e } B = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$$

Ainda dá para estender um pouco mais e falar sobre eventos complementares, perguntando, por exemplo, sobre as possibilidades de, num Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, não resultar em três ou num número maior que quatro.

6.2 Atividade II

Nesta atividade trataremos da definição de Probabilidade e de Frequência Relativa.

A questão que motivaria esta atividade seria: qual a probabilidade de, num Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores, ocorrer um evento em que ambos os jogadores têm o mesmo número de palitinhos? E qual a probabilidade da soma dos palitinhos ser igual a cinco?

Temos o seguinte espaço amostral,

$\Omega = \{(0{,}0), (0{,}1), (0{,}2), (0{,}3), (1{,}0), (1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (2{,}0), (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), (3{,}0), (3{,}1), (3{,}2), (3{,}3)\}$.

Chamando de A o evento em que ambos o jogadores têm o mesmo número de palitinhos, temos

$$\text{A} = \{x \in \Omega |\ x \text{ é os pares ordenados que as coordenadas são iguais}\}$$

ou seja,

$$A = \{(0{,}0), (1{,}1), (2{,}2), (3{,}3)\}$$

A probabilidade é dada pela razão entre a cardinalidade do evento pela cardinalidade do espaço amostral. Portanto, temos

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{16} = 0{,}25 = 25\%$$

Chamando de B o evento em que a soma dos palitinhos é igual a cinco, temos

$$B = \{(2{,}3), (3{,}2)\}$$

Então,

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{16} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

Agora, outra pergunta interessante para ver se o aluno compreendeu bem a definição de probabilidade e a frequência relativa, seria:

Supondo que você esteja disputando um Jogo de Palitinhos com mais dois jogadores. Você começará o jogo. Então, qual a melhor estratégia para aumentar suas chances de vitória?

Obviamente, você sabe a quantidade de palitinhos que tem na sua mão direita. Então, você precisará tentar descobrir a soma de palitinhos de seus dois adversários. Assim, sua análise deverá ser realizada com base na frequência relativa de um Jogo de Palitinhos jogado por dois jogadores. Sendo assim, temos:

A frequência relativa da soma dos palitinhos ser zero será de 1/16, ou seja, a única forma seria ambos participantes apresentarem a mão sem palitos.

Já para o caso da soma ser igual a um, a frequência relativa será de 2/16, sendo que neste caso, um dos jogadores terá um palito na mão e o outro terá zero.

Para a soma ser igual a dois, a frequência relativa será de 3/16, sendo que, neste caso, um dos jogadores terá dois palitos e o outro, nenhum; ou ambos terão um palito cada.

Para soma ser igual a três, a frequência relativa será de 4/16, sendo que, neste caso, um dos jogadores terá três palitos e o outro nenhum; ou um terá dois palitos e o outro, um.

Para soma ser igual a quatro, a frequência relativa será de 3/16, sendo que, neste caso, um dos jogadores terá três palitos e o outro um; ou ambos terão dois.

Para soma ser igual a cinco, a frequência relativa será de 2/16, sendo que, neste caso, um dos jogadores terá três palitos na mão e o outro, dois.

Para a soma ser igual a seis a frequência relativa será de 1/16, ou seja, a única forma de obter tal resultado será ambos participantes apresentarem a mão com três (todos) palitos.

Sendo assim, existe uma maior probabilidade de ocorrer a soma igual a três nos palitinhos entre dois jogadores. Então, basta o jogador escolher a quantidade resultante da soma entre o que ele tem na mão e o número três (resultado hipotético da soma dos palitinhos de seus dois adversários). Ou seja, se tiver dois palitos, escolher cinco, se tiver três, escolher seis, se tiver um, escolher quatro e, se tiver lona, escolher três.

Com essa estratégia, o jogador que começa o jogo tem 25% de chance de ganhar. Só para ver a diferença, observe: se o jogador que começar tiver um palitinho e escolher sete, ele só ganha se os outros dois tiverem todos os palitinhos (seis). Só há a probabilidade de 6,25% de isso ocorrer.

6.3 Atividade III

Nesta atividade veremos a adição de probabilidades. Com isto, usaremos o teorema da adição de probabilidades e eventos mutuamente exclusivos.

A questão a ser levantada é: qual a probabilidade de, num Jogo de Palitinhos com dois jogadores, a soma dos palitinhos ser maior que quatro ou ser um número ímpar?

Como se trata de um único jogo, os eventos são dependentes, já que a ocorrência de um impede (ou não) a ocorrência do outro. Observamos também que os eventos não são mutuamente exclusivos, já que existe uma intersecção entre eles.

Como já vimos na Atividade I, a probabilidade de dar um número ímpar é a mesma de ocorrer um número par: 50%. As possibilidades de dar um número maior que quatro (ou seja, cinco ou seis) são três, isto é, (2,3), (3,2) ou (3,3). No entanto, o número cinco é ímpar e maior que quatro (e as possibilidades de dar cinco são duas de dezesseis, como já vimos na Atividade II). Consideramos o evento A sendo o de ocorrência de um número ímpar e o evento B o de ocorrência de um número maior que quatro. Então,

$$\mathrm{P(A{\cup}B) = P(A){+}P(B) - P(A{\cap}B)} = \frac{8}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{9}{16} = 0{,}5625 = 56{,}25\%$$

6.4 Atividade IV

Nesta atividade veremos a multiplicação de probabilidades. Para isto, veremos eventos independentes.

Começaremos com a seguinte questão: num Jogo de Palitinhos com dois jogadores, um jogador começa quatro jogos seguidos, com os seguintes palpites: dois no primeiro, seis no segundo, zero no terceiro e três no quarto. Qual a probabilidade dele ganhar os dois primeiros, perder o terceiro e empatar o quarto?

A primeira coisa a observar é que os eventos são independentes, pois a probabilidade de ocorrência de um deles independe da ocorrência do outro. Além do mais, vão ser em jogos diferentes.

No entanto, precisaremos entender um pouco mais do Jogo de Palitinhos. Observe que o jogo é muito mais dinâmico do que um jogo de dados ou lançamento de moedas.

Quando o primeiro jogador pede dois, ele poderá ter dois palitinhos, um palitinho ou nenhum palitinho na mão direita. O jogo terá doze possibilidades de resultado, então o novo espaço amostral será: Ω' = (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3). Observe que ele terá uma chance em quatro de acertar. Pois, se não tiver nenhum palito, só poderão ocorrer os quatro eventos iniciais (0,0), (0,1), (0,2), (0,3); se ele tiver um palito, os quatro eventos do meio (1,0), (1,1), (1,2), (1,3) e, se ele tiver dois, os quatro eventos restantes (2,0), (2,1), (2,2), (2,3). Portanto ele terá 25% de chance de ganhar o primeiro jogo.

A probabilidade de ganhar o segundo jogo, também será de 25%. Quando o primeiro jogador pede seis, ele só pode ter três palitinhos na mão direita. O jogo terá quatro possibilidades de resultado então o novo espaço amostral será: Ω" = (3,0), (3,1), (3,2), (3,3). Pois, como ele tem três palitinhos na mão direita, ele só ganha se seu oponente também tiver três. Então, ele tem uma chance em quatro de acertar.

A probabilidade de perder o terceiro jogo, será de 75%. Quando o primeiro jogador pede zero, ele não pode ter palitinhos na mão direita. O jogo terá quatro possibilidades de resultado, então o novo espaço amostral será: Ω”’: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3). Como ele não tem palitinhos na mão direita, ele só ganha se seu oponente também não tiver nenhum palitinho na mão direita. Portanto, ele tem uma chance em quatro de acertar e, fatalmente, três em quatro de perder.

Quando o primeiro jogador pede três, ele poderá ter três, dois, um ou nenhum palitinho na mão direita. Sendo assim, pode ocorrer todas as dezesseis possibilidades, então o novo espaço amostral será o mesmo: $\Omega =$ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3). Observe que, independentemente da quantidade de palitinhos que ele tiver, haverá quatro possibilidades de ocorrência, sendo que, em uma das quatro, ele acertará. Seu oponente terá três opções para dar seu palpite, pois, independente da sua quantidade de palitinhos, também terá quatro possibilidades de ocorrência. Uma delas é o três, já escolhido. Portanto, é 25% para um, 25% para o outro e 50% para nenhum dos dois, ou seja, de dar empate.

Portanto, a probabilidade de ele ganhar os dois primeiros, perder o terceiro e empatar o quarto, será

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{128} = 0{,}0234375 = 2{,}34375\%$$

Observe que, sendo o primeiro a jogar, a probabilidade de ganhar é de 25%. O que varia, a depender do seu palpite, é a probabilidade dele perder ou empatar.

Capítulo 7

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para o estudo ou o ensino de probabilidade por meio do uso do Jogo de Palitinhos. Foi possível efetuar um estudo cuidadoso na Teoria da Probabilidade, abordando as definições e as propriedades a ela inerentes. Além do mais, entendemos que o estudo da Probabilidade é muito importante, não só para a Matemática, mas para o cotidiano de todos. Procuramos elaborar uma proposta de ensino que pudesse ser uma maneira eficaz e prazerosa para se abordar o tema das probabilidades.

Em nossa proposta, buscamos fazer uma associação estreita da teoria com a prática, para que os estudantes pudessem ter uma noção mais substancial do que queríamos passar a eles. Observando que seu poder sobre o jogo pode aumentar ou diminuir quando ele iniciar o jogo, ou seja, quando ele der o primeiro palpite, ele compreenderá não só o que é Probabilidade, mas também que ela não é apenas obra do acaso, como no jogo de dados, por exemplo. Tudo isso de forma concreta, vendo os porquês de cada jogada e se divertindo com o jogo.

Além do mais, buscamos trabalhar com os contextos históricos para mostrar de onde veio tal estudo. Até porque a origem da Probabilidade está ligada a análise de jogos de azar. Os primeiros estudos sobre a Probabilidade foram realizados por Girolamo Cardano, buscado explicar, em sua obra *Liber de Ludo Aleae*, de que forma o jogador deveria jogar para ter mais chance de ganhar. Neste caso, ao estudar Probabilidade por meio do jogo, voltaremos à essência do estudo da Probabilidade.

Outro dado importante do nosso estudo é que nos concentramos a maior parte da nossa abordagem no Jogo de Palitinhos para apenas dois jogadores ideais, já que o espaço amostral envolvido é relativamente pequeno. E, nessas condições, um jogador tem ao seu alcance uma estratégia que, se escolhida, lhe garantirá a vitória ou, pelo menos, lhe da rá mais chances de vencer, já que as teorias são mais satisfatórias.

Foi enriquecedor, neste trabalho, buscar, a partir da teoria desenvolvida, aplicações para o Ensino Médio. Assim, desenvolvemos atividades, em Probabilidade, usando o Jogo de Palitinhos.

Contudo, o desenvolvimento na íntegra de algo totalmente novo e completo requer mais tempo para dar um tratamento muito mais aprofundado do que foi possível neste trabalho. Mas o terminamos com o sentimento de que atingimos nosso objetivo, fazendo uma singela contribuição para o ensino de Matemática, ampliando as possibilidades de abordagem do conteúdo de Probabilidade.

7.1 Trabalhos Futuros

• Aplicar o Princípio dos Grandes Desvios ao Jogo de Palitinhos.

• Demonstrar a Lei Forte dos Grandes Números, para o Jogo de Palitinhos, como consequência do Princípio dos Grandes Desvios e do Lema de Borel Cantelli.

• Provar, rigorosamente, o Teorema Central do Limite por meio do Jogo de Palitinhos.

Apêndice

Tabela 1: $Z = x + y$, onde x são os valores das linhas e y os das colunas.

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Referências Bibliográficas

[1] ALVARENGA, M. C. M. *Jogo de Palitinhos tradicional ou Porrinha*. Disponível em: <http://www.jogos.antigos.nom.br/jporrinha.asp>. Acesso em: 15 fev. 2015.

[2] ARAÚJO, A. M. *Palitinho*. Jangada Brasil, Rio de Janeiro, Ano 5, n. 55, mar. 2003. Disponível em: <http://www.jangadabrasil.com.br/março55/especial.htm>. Acesso em: 13 fev. 2015.

[3] BECOZA, J. *Três, dois, um ou lona: ave, porrinha!*. 2009. Disponível em: <http://oglobo.globo.com/blogs/juarez/posts/2009/06/30/tres-dois-um-ou-lona-ave-porrinha-200596>. Acesso em: 15 fev. 2015.

[4] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. A *Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[5] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A History of Mathematics*, 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

[6] BRASIL. Ministério da Educação - Secretaria da Educação Fundamental. *PCN's: parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[7] DOMINGUES, H. H. *Cardano: o intelectual jogador e Pascal e a teoria das probabilidades*. In: HAZZAN. S. Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993, p. 56-57.

[8] FERNANDEZ, P. J. *Introdução à Teoria das Probabilidades*, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[9] FRANCO, T.; HILÁRIO, M.; SILVA, P. *Introdução à Probabilidade só com moedinhas*, Segundo Colóquio de Matemática da Região Nordeste, SBM, 2012.

[10] GADELHA A. *Teoria de Probabilidade I: Notas de Aula*, DME/IM/UFRJ, 2014.

[11] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. *Matemática: Uma nova abordagem*, vol. 2: versão trigonometria. São Paulo: FTD. 2000. p. 230-264.

[12] JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário.* Projeto Euclides, 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[13] MORETZSOHN, J. E. R. *Porrinha: Um esboço de pesquisa.* Jangada Brasil, Rio de Janeiro, ano 3, n. 37, set. 2001. Disponível em: <http://www.jangadabrasil.com.br/setembro37/especial22.htm>. Acesso em: 13 fev. 2015.

[14] MORGADO, A. C. O. *Probabilidade.* In: LIMA, E. L. (Org.). A matemática do ensino médio. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM 2006. 308 p. Coleção do Professor de Matemática.

[15] PAIVA, M. *Matemática: Paiva*, vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, p. 181-187.

[16] ROLLA, L. T. *Introdução à Probabilidade: Notas de Aula*, IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[17] ROSS, S. M. *Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações*, 8. ed. São Paulo: Bookman, 2010.

[18] TEIXEIRA. A. *Notas de aula: Probabilidade I.* Documento digital. Disponível em: <http:w3.impa.br/augusto/notas-prob>. Acesso em: 10 mar. 2015