PATRICIO DO CARMO DE SOUZA

UMA INVESTIGAÇÃO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

PATRICIO DO CARMO DE SOUZA

UMA INVESTIGAÇÃO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Paulo Sérgio Dias da Silva

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

PATRICIO DO CARMO DE SOUZA

UMA INVESTIGAÇÃO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 13 de Agosto de 2015.

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Prof. Mikhail Petrovich Vishneuskii
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre
D.Sc. - UFF

Prof. Paulo Sérgio Dias da Silva
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho à minha maior incentivadora: minha mãe.

Agradecimentos

À Deus, por permitir que eu concluísse esse trabalho, conduzindo meus passos e acalmando o meu ser em meio a tantas incertezas.

Aos meus pais Dirceu e Marta, pela boa educação que me propiciaram.

Em especial, agradeço à minha mãe Marta, mulher de fibra, que mesmo nas adversidades da vida sempre me apoiou, incentivando-me a seguir em frente. Sem o seu apoio e o seu amor não chegaria até aqui. Obrigado minha mãe, por tudo e por ser um exemplo em minha vida. Te amo eternamente!

Ao meu orientador, professor Paulo Dias, pela atenção e pelo apoio irrestrito.

Aos professores da banca examinadora, pela participação.

A todos os meus amigos, em especial, a Silvana que conheci na Universidade, e que sempre esteve ao meu lado.

Ao Suzimar e a Marilane, pela força e carinho e pelo exemplo de garra e luta.

À Antônia de Campos dos Goytacazes, pela amizade verdadeira.

Aos meus novos amigos da turma de Mestrado do Profmat, todos tiveram sua parcela de contribuição, tornando menos árdua essa jornada de 2 anos.

Ao meu amigo Anderson do Rio de Janeiro, que fez parte desse grupo, mas que por motivos profissionais se desligou do programa. Seu potencial é enorme. A sociedade precisa de pessoas como você.

Ao meu amigo Dr. Vitor Mussi Ramos a quem sou eternamente grato.

Aos meus irmãos Junior e Rodrigo, meus sobrinhos Gabriel e Maria Fernanda que tanto amo e à minha cunhada, Leaine.

Aos meu familiares que tanto amo, primos, primas, tios, tias, avôs e avós, aos que se foram, mas sei que estão enviando preces em meu favor.

Às minhas tias Maria Helena e Luzia, pela força de sempre.

À minha Tia Carminha, quem me alfabetizou com toda a sua dedicação.

À minha querida professora Tininha que contribuiu para que eu me tornasse um professor; aquele garoto aflito que estudou para passar no Vestibular encontrou o apoio e a confiança necessários para trilhar o caminho do sucesso. Você é um exemplo de professora! Minha base matemática começa em ti. Obrigado! Jamais vou esquecer!

Aos meus colegas e amigos da Escola Municipal Dr. Luiz Sobral de Campos dos Goytacazes, aprendi muito com todos vocês, não vou citar nomes, seria injusto! Foram 11 anos que vivi e que me moldaram profissional e pessoalmente. As conversas informais durante o recreio vou guardar pra sempre. Vocês fazem parte da minha história!

Aos meus colegas e amigos da Escola Estadual Nilo Peçanha de Campos dos Goytcazes, foram 5 anos de muito aprendizado e de boas lembranças onde fiz muitos amigos.

Não posso deixar de agradecer à minha amiga Lúcia Helena, e às minhas amigas do Curso GESTAR II, em especial a professora Beth! Esse foi mais um momento da minha carreira, que me fez refletir sobre a capacitação profissional: ela é contínua.

Tenho que agradecer também a todos os meus alunos de todas as escolas por onde passei. Eles são a principal razão para eu prosseguir com o meu trabalho. Ver o crescimento deles não tem preço.

Ao Instituto Federal Fluminense *Campus* Bom Jesus e aos meus amigos que ali conheci, pessoas incríveis que estiveram prontas para ajudar.

Aos amigos Cassiana e Horácio, pelas contribuições que enriqueceram esse trabalho.

Aos meus alunos/amigos do *Campus* Bom Jesus, obrigado pelo carinho e por eu ser um privilegiado em tê-los não só como alunos. Em especial, aos alunos da turma 3º APA que fizeram parte dessa pesquisa, e que sem eles nada disso seria possível.

À CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

E aos idealizadores do Profmat.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

(Galileu Galilei)

Resumo

Este trabalho propõe uma investigação a respeito de como uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra contribui para a inserção de vetores no currículo de Matemática do Ensino Médio e se a mesma favorece a utilização dos vetores, por parte do alunos, na resolução de problemas. Conforme se percebeu, documentos oficiais da Educação vêm mostrando a importância da inserção do conteúdo de vetores no Ensino Médio. Partiu-se da hipótese de que vetores são vistos apenas na disciplina de Física e que apesar dos avanços nos últimos anos das novas tecnologias, ainda o uso das Tecnologias Digitais (TD) é incipiente nas salas de aula. A pesquisa foi realizada com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede federal na cidade de Bom Jesus do Itabapoana, RJ. Buscou-se uma fundamentação teórica baseada nas produções de autores como Borba, D'Ambrósio, Fiorentini, Lima e Ponte, o estudo valendo-se da abordagem qualitativa. Para atingir os objetivos propostos, os alunos responderam a um questionário inicial quanto ao uso da tecnologia, resolveram um conjunto de questões que abordam situações que envolvem conceitos da Física e da Matemática, participaram de aulas no Laboratório de Informática utilizando o GeoGebra, além de resolverem questões na sala de aula; por fim, resolveram as questões iniciais utilizando os vetores e responderam a um questionário simples sobre os principais objetivos dessa pesquisa. Os resultados mostraram que o *software* contribui para a aprendizagem, facilitando o processo de investigação matemática e que vetores como ferramenta, auxiliam na resolução de certos problemas.

Palavras-chaves: Investigação, Vetores, Ensino Médio, GeoGebra.

Abstract

This paper proposes an investigation as how a didactic sequence using the *software* GeoGebra contributes to vector insertion in the Middle School Math curriculum and whether it favors the use of vectors by the students in solving problem. As noted, official documents of Education have shown the importance of vectors of content insertion in high school. He started from the hypothesis that vectors are seen only in the discipline of Physics and that despite progress in recent years new technologies, even the use of Digital Technologies (DT's) is incipient in classrooms. The survey was conducted with students of the third year of High School from a public school of federal network in Bom Jesus do Itabapoana/RJ. For this research, we sought a theoretical foundation based on the authors like Borba, D'Ambrosio, Fiorentini, Lima and Ponte, the study drew on the qualitative approach. To achieve the proposed objectives, students answered an initial questionnaire about the use of technology, resolved a number of issues that address situations involving concepts of physics and mathematics, attended classes in Computer Lab using GeoGebra, and resolve issues in the classroom; finally solved the initial issues using the vectors and answered a simple questionnaire on the main objectives of this research. The results showed that the *software* contributes to facilitating the learning process and vectors mathematical research as a tool, to help solving certain problems.

Key-words: Investigation, Vectors, Middle School and Geogebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de Quadros

Lista de abreviaturas e siglas

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAP UFRJ	Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro
CIED	Centros de Informática Educacional
CMRJ	Colégio Militar do Rio de Janeiro
CNPQ	Conselho Nacional de Pesquisa
Educom	Computadores na Educação
GD	Geometria Dinâmica
NTE	Núcleos de Tecnologia Educacional
OCEM	Orientações Curriculares do Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
Profmat	Mestrado Profissional em Matemática
PROINFO	Programa Nacional de Informática na Educação
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
Seed	Secretaria de Educação à Distância
TD	Tecnologias Digitais
TI	Tecnologias Informáticas
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UNESP	Universidade Estadual Paulista

Lista de símbolos

$\equiv$	Equipolente
$\in$	Pertence
$\not\equiv$	Não equipolente
$\parallel$	Paralelo
$<$	Menor que
λ	Letra grega lâmbda
α	Letra grega alfa
β	Letra grega beta
μ	Letra grega mi
θ	Letra grega teta
π	Letra grega pi
$\mathbb{R}$	Conjunto dos número reais
$\varnothing$	Conjunto vazio
$\cap$	Interseção

Sumário

Introdução

O conceito de vetor no Ensino Fundamental e, principalmente, no Ensino Médio é visto apenas em Física. Isso gera uma impressão de que este ente tão importante é um objeto exclusivo dessa disciplina, é inegável o seu papel neste contexto. No entanto, vetor é um objeto matemático, por isso ele pode ser inserido no currículo de Matemática, considerando os aspectos geométrico e algébrico com suas características e propriedades específicas. Vetores são ferramentas que simplificam cálculos na resolução de problemas e demonstrações de resultados importantes. Eles aparecem em áreas como a Geometria Analítica, a Álgebra Linear e o Cálculo, estão associados aos números complexos e suas operações. E como apontam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM):

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física.(OCEM, 2006, p. 77)

Lima (2001) ao analisar 36 volumes que compõem 12 coleções de livros didáticos de Matemática utilizados nas escolas brasileiras no Ensino Médio da época, percebeu que em nenhuma coleção os autores faziam referência ao uso dos vetores. Para essas análises, eles levaram em consideração a conceituação, a manipulação e a aplicação. Avaliou a organização e a utilização efetiva dos conhecimentos adquiridos, chegando a conclusão de que todas as coleções omitiram o conceito de vetor. Segundo o autor, a ausência de vetores é algo grave no Ensino Médio, tanto do ponto de vista teórico quanto do prático.

Conforme se percebeu, documentos oficiais da Educação vem mostrando a importância da inserção do conteúdo de vetores no Ensino Médio. Entretanto, esta deve ser planejada de forma a possibilitar a aprendizagem do aluno e que o uso das Tenologias Digitais (TD), aqui representado pelo *software* GeoGebra, pode ser um dos caminhos capazes de promovê-la, já que se vive em uma sociedade cujas mudanças se processam de maneira rápida, devido ao avanço da Informática. As pessoas estão conectadas pelos seus telefones celulares, *tablets* ou pelos computadores, executando muitas tarefas que antes não eram possíveis, graças à internet que vem se popularizando em grande velocidade. A escola como instituição que faz parte da sociedade, pode se adaptar a essa nova perspectiva, revendo suas práticas; o professor como mediador desse processo, deve utilizar recursos que estimulem a aprendizagem do aluno; o educando no contexto atual, já não pode ser um mero repositório de informações, um agente passivo na relação ensino e aprendizagem, cabendo à escola e aos professores repensarem suas práticas, incorporando novas metodologias para acompanharem essas mudanças. Dessa forma, o Ensino de Matemática necessita sofrer essas transformações. Acredita-se que o uso dos *softwares* matemáticos e de geometria dinâmica possa favorecer esse processo auxiliando o professor na abordagem de conteúdos tradicionalmente expostos, de uma forma mais atraente e interativa no âmbito escolar.

O currículo em Matemática deve refletir a atual realidade, que se caracteriza por um dinamismo e criatividade, propiciado pelo uso das TD's , contemplando a resolução de problemas, favorecendo o raciocínio do aluno e não a simples memorização de fórmulas e conceitos. Ele deve permitir a inserção de conteúdos novos e que sejam relevantes do ponto de vista teórico e prático.

Pesquisas atuais em Educação Matemática dão importância ao uso das tecnologias na sala de aula, na formação dos professores e no currículo. Portanto, a mudança que se exige na Educação, em especial a Matemática, é aquela que envolve esses elementos. De acordo com D'Ambrósio:

> Estamos entrando na era do que se costuma chamar a "sociedade do conhecimento". A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização de tecnologia e educação.(DAMBRóSIO, 2012, p. 74)

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 46) "as TICs permitem aos estudantes não apenas estudar temas tradicionais de maneira nova, mas também explorar temas novos, como por exemplo, a geometria fractal."

Para esta pesquisa, buscou-se uma fundamentação teórica baseada nas produções de autores como Borba, Elon, D'Ambrósio, Fiorentinni, Ponte e outros pesquisadores em Matemática e Educação Matemática que têm como objetivos de estudos as Investigações Matemáticas e as Tecnologias no Ensino de Matemática.

Para uma abordagem a respeito do Ensino de Vetores, realizou-se um levantamento bibliográfico sobre o tema na biblioteca digital do Profmat[1], alguns livros de Matemática do Ensino Médio da Coleção do Professor de Matemática da SBM e artigos correlatos. Assim, percebeu-se que a literatura aponta para a importância de trabalhar o conteúdo de vetores no Ensino Médio em Matemática, de forma a inserí-lo no currículo.

[1] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

O trabalho teórico de Chagas (2014) procurou mostrar argumentos que justificam o Ensino de Vetores e as vantagens na sua utilização, além de apresentar o Geogebra como recurso para dinamizar as aulas. O trabalho ressalta a importância de vetores na Física, na Álgebra Linear do Ensino Médio, nos números complexos, na Geometria Analítica, na demonstrações da Geometria Plana e na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Além de propor um conjunto de atividades que podem ser utilizadas em turmas do 1º ano com o uso do GeoGebra. A sequência didática sugerida pelo autor engloba os conceitos iniciais de vetores, as operações de adição e multiplicação por escalar e ângulo entre vetores.

A pesquisa de Lemos (2014) apresenta uma sequência didática explorando os vetores no 9 º ano do Ensino Fundamental. O trabalho sugere a aplicação de atividades que tratam de vetores desde a definição, passando pelas operações entre vetores, e culminando no produto escalar e na projeção de um vetor sobre os eixos coordenados. A proposta foi parcialmente aplicada no Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ) local em que a autora atua como professora de Matemática e demonstra uma intenção de mudança no currículo de Matemática, ao introduzir vetores já no Ensino Fundamental.

Destaca-se ainda, um artigo que trata da inserção dos vetores no currículo no Colégio de Aplicação da UFRJ (CAP UFRJ)[2], um trabalho realizado por Assemany et al. (2013) através do Projeto Fundão[3] em que apresentam uma proposta de reformulação do currículo. Eles descrevem os tópicos abordados nos três anos do Ensino Médio, em especial no primeiro ano; nessa reestruturação tratam a Geometria Analítica com uma roupagem vetorial. Esse estudo contribuiu para a pesquisa de Transição do Ensino Médio para o Superior, mostrando que alunos do CAP UFRJ tiveram bons desempenhos na disciplina de Cálculo I.

A revisão bibliográfica realizada aponta a necessidade de inserção do conteúdo de vetores na Educação Básica, além de indicar as TD como um caminho para que tal inserção aconteça por meio do GeoGebra como auxiliar nesse processo. Os trabalhos mostram que vetores são um importante instrumento na resolução de problemas e simplificações de cálculos e que, portanto, devem fazer parte do currículo.

Diante do exposto, busca-se nesta pesquisa, responder a seguinte questão: Como favorecer a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio acerca do conteúdo de vetores com apoio das Tecnologias Digitais?

Este trabalho tem dois objetivos principais:

- Inserir vetores no currículo de Matemática por meio de uma sequência didática com o uso do GeoGebra;
- Investigar se a essa sequência contribui para que os alunos utilizem os vetores como ferramenta na resolução de problemas.

[2] O Colégio de Aplicação é uma unidade de Ensino Fundamental e Médio da UFRJ
[3] Projeto de Extensão Universitária da UFRJ

Os objetivos gerais acima expostos, por serem densos, desdobram-se em outros objetivos específicos:

- Construir e aplicar uma sequência didática para o ensino de vetores;
- Identificar as potencialidades dos alunos quanto ao uso do *software* na aprendizagem de vetores;
- Oferecer um material de apoio para professores e alunos.

A estrutura da dissertação foi pensada da seguinte forma: o primeiro e o segundo capítulos tratam do referencial teórico que norteiam a pesquisa, o primeiro aborda as TD na sala de aula e apresenta o Geogebra com suas vantagens; o segundo capítulo refere-se à teoria de vetores para o Ensino Médio; os dois primeiros capítulos são o aporte teórico deste trabalho; o terceiro capítulo exibe o contexto da pesquisa, caracterizando a escola, a turma e os sujeitos da pesquisa; o quarto capítulo apresenta a metodologia de pesquisa, de caráter qualitativo, e a sequência didática contendo as análises do material aplicado neste estudo e por último são feitas as considerações finais com as consequências e apontamentos.

Capítulo 1

Tecnologias digitais e investigação matemática

Este capítulo expõe alguns aspectos históricos sobre a Informática na Educação no Brasil. Trata de forma breve da investigação matemática, caracteriza as 4 fases das tecnologias digitais segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014) e apresenta o *software* GeoGebra com algumas de suas funções, em especial, aquelas que são necessárias para a realização das atividades propostas pela pesquisa.

1.1 Informática na Educação

Os computadores começaram a ocupar espaço no trabalho no final dos anos 80 e início dos anos 90. No Brasil, em 1981, ocorreu o I Seminário Nacional de Informática Educativa com a participação de diversos educadores do Brasil. A partir daí surgiram vários projetos tais como: Educom[1], Formar[2]. Dessa iniciativa criaram os Centros de Informática Educacional (CIEDs) em 17 estados brasileiros. Dando continuidade às iniciativas anteriores, em 1989 nasceu o Programa Nacional de Informática Educativa como o objetivo de criar laboratórios e centros para a capacitação de professores. Todas essas experiências foram base para o Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO) lançado pela Seed[3] em 1997. Seu objetivo foi o de estimular o uso pedagógico da informática na rede pública contribuindo com a introdução de tecnologia informática nas escolas de nível fundamental e médio de todo o país. Na época foram equipadas 2000 escolas e se investiu na formação de 24 mil professores por meio dos Núcleos de Tecnologia Educacional (NTE) em vários estados do país. (BORBA; PENTEADO, 2003)

Assim, pode-se afirmar que na área de Informática educativa houve forte investimento

[1] Educom (Computadores na Educação),lançado pelo MEC e pela secretaria especial de Informática em 1983.
[2] Foi uma iniciativa dentro do Educom criado com o intuito de formar recursos humanos para o trabalho na área de informática educativa. Formar I - 1987 e Formar II - 1989.
[3] Secretaria de Educação a Distância/MEC)

por parte dos governantes. E isso se reflete até os dias de hoje. É claro que sempre haverá uma preocupação com esses investimentos, pois estão ligados à política, já que podem continuar ou não a serem mantidos de acordo com o governo vigente.

1.1.1 Educação Matemática e investigação

Experiências em Educação Matemática mostram como o uso de tecnologia e a investigação matemática têm sido explorados por parte dos pesquisadores nessa área.

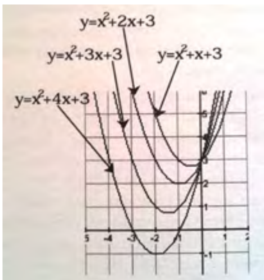
A exemplo disso, Borba em 1999, em sua turma do curso de Biologia na disciplina de Matemática Aplicada na Universidade Estadual Paulista(UNESP) promoveu um estudo no qual os seus alunos utilizaram calculadoras gráficas[4] em uma de suas atividades de pesquisa para investigar como os diferentes coeficientes de polinômios do tipo $y = ax^2 + bx + c$ influenciam os gráficos de funções quando alterados.

De acordo com Borba e Penteado (2003), ao utilizarem a calculadora gráfica os alunos geraram conjecturas por escrito e oralmente e as debateram. E que conjecturas surgem em uma aula de investigação matemática:

> Ao utilizar a tecnologia de uma forma que estimule a formulação de conjecturas e a coordenação de diversas representações de um conceito, é possível que novos aspectos de um tema tão "estável"como funções quadráticas, apareçam em uma sala de aula de não especialistas em matemática. (BORBA; PENTEADO, 2003)

Ainda, segundo (BORBA; PENTEADO, 2003), em 1999, como exemplo desse trabalho, um grupo ao explorar esse tipo de atividade formulou discussões sobre como o vértice do gráfico da função se altera quando o coeficiente "b"varia. A figura 1 que representa a variação de polinômios do tipo $y = x^2 + bx + 3$ ilustra esse fato:

Figura 1 – $y = x^2 + bx + 3$



Fonte:Borba e Penteado (2003, p. 39)

[4] Computadores portáteis com programas que permitem o trabalho com Geometria, Cálculo Diferencial, Estatística, função, entre outros, que possibilitam o traçado de gráficos de funções tais como $y = cos(x)$.

Neste estudo Borba e Penteado (2003, p. 39) afirmam que vários grupos chegaram, por tentativa e erro que, "a variação do coeficiente "b"provoca um movimento do vértice da parábola que é descrito por uma outra parábola."

Ao fazer investigação matemática com o uso de tecnologias, problemas matemáticos podem levar a discussão de novos elementos; o papel do professor é fundamental ao conduzir o processo por meio do levantamento de questões, verificação, validação e justificativas acerca do problema tratado.

Essa ideia é corroborada por Borba e Penteando ao afirmarem que:

> Neste exemplo, deve ser destacada a dinâmica de como um problema pode remeter a outro, bem como a possibilidade de gerar conjecturas e ideias matemáticas a partir da interação entre professores, alunos e tecnologia. A experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional, e permitindo uma nova ordem, investigação e, então, a teorização. (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 41)

Que coaduna com Ponte:

> A realização de investigações proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmo extramatemáticos. O professor precisa estar atento a tais oportunidades e, mesmo que não seja possível explorar cabalmente essas conexões, deve estimular os alunos a refletir sobre elas. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 51)

Documentos oficiais de Educação indicam que é preciso utilizar métodos de ensino que privilegiem o pensamento e o raciocínio do aluno em situações diferentes da tradicional, como é o caso das investigações matemáticas.

As OCEM apontam que:

> partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento.(OCEM, 2006, p. 70)

Já os PCNEM, preconizam que:

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação

> e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes.(PCNEM, 2001, p. 52)

Do exposto, nota-se que o currículo de matemática pode contemplar ações de cunho investigativo no programa de ensino desta disciplina; e que essa perspectiva aparece em cenários de exploração de problemas que conduzem os alunos a criarem suas próprias conjecturas ao passo que observam o que está acontecendo em uma atividade de investigação, auxiliada pelo uso das tecnologias. O processo de investigar não se restringe apenas aos pesquisadores matemáticos. Nesse sentido, para Ponte, Brocardo e Oliveira:

> Em contexto de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas difíceis.(PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 9)

1.1.2 Momentos de uma investigação

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) indicam que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro momento envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último, diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Cada um deles pode incluir diversas atividades como mostra o quadro1.1 a seguir.

Quadro 1.1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática; explorar a situação problemática; formular conjecturas
Conjecturas	Organizar dados; formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes; refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura; avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte:Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 21)

1.1.3 Fases de uma aula investigativa

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) ainda destacam que aulas investigativas desenvolvem-se em três fases:

1 **Introdução da tarefa**

O professor apresenta a proposta aos alunos, que é fornecida de forma escrita. O aluno não está diante de uma problema ou exercício bem delimitado, ele precisa formular suas próprias questões baseado no que lhe foi proposto.

2 **Realização da investigação**

No desenvolvimento da proposta, individual ou aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, o professor deixa os alunos um pouco mais livres, prestando apoio quando necessário. De acordo com o quadro 1.1, no processo de investigação os alunos formulam conjecturas, testando-as, reformulando-as e avaliam os resultados.

3 **Discussão dos resultados**

Por fim, ocorre a discussão dos resultados, momento em que os alunos comunicam com os demais o que realizaram. Essa fase é importante, pois representa um momento de reflexão do trabalho investigativo, na qual o professor deve proporcionar o questionamento e a sistematização dos resultados.

1.1.4 O papel do professor

A industrialização já mostrou que homens são substituídos por máquinas com a finalidade de otimizar a produção (produzir mais em menos tempo), pois se vive em uma Economia capitalista que visa a obtenção do lucro como objetivo precípuo. Com a modernização nos processos de automação industrial com o advento da Informática , isso se tornou evidente. Uma das preocupações era a de que o computador substituiria o professor no âmbito escolar, mas isso não ocorreu e, ao contrário do que se pensava, o professor tem papel de destaque quando faz uso dele.

Borba e Penteado (2003, p. 55) enfatizam que no final da década de 70, quando se começou a discussão sobre o uso da tecnologia informática na educação, o temor passou a ser maior com a utilização de computadores mais eficientes. Em se tratando de Educação, com a introdução dos computadores nas escolas implementado por programas de governo, no caso das escolas públicas, e por meio de empresas, nas escola privadas, esse temor passou também para os professores.

Ainda discutem a postura do professor em relação à sua prática e o seu papel frente a essas mudanças, quando afirmam que alguns professores caminham numa zona de conforto [5]. Já outros caminham para uma zona de risco [6].

Acredita-se que mesmo que as escolas estejam equipadas com computadores, problemas de ordem técnica podem vir a ocorrer, mas não devem ser um empecilho para que aulas investigativas nesse ambiente fluam bem. Além disso, o professor que está nessa zona de risco se depara com situações de imprevisibilidade, tal como uma conjectura feita por um aluno de forma inesperada.

Como exemplo de uma situação imprevisível, Borba e Penteado (2003, p. 58) citam o caso da construção do gráfico da tangente num *software*, no qual o resultado esperado não é o mesmo que acontece em matemática, na ocasião um grupo de alunos ao explorar tal situação se depara com uma imagem que não corresponde à realidade, nos valores de x para os quais a tangente não é definida, as assíntotas estavam conectadas aos pontos do gráfico, isso ocorreu devido à configuração do programa que trabalha com valores discretos assim conecta os pontos.

Assim, entende-se que o professor quando assume uma postura investigativa ao adentrar numa zona de risco tem que estar aberto aos questionamentos que surgem, sejam eles do conhecimento matemático ou informático, exigindo do profissional uma constante busca e atualização.

Ainda segundo os autores:

> observamos o fato de que lançar mão do uso da tecnologia informática não significa necessariamente abandonar as outras tecnologias. É preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual mídia mais adequada para atender o nosso propósito. (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 64)

E de acordo com Fiorentini e Lorenzato:

> Parece haver uma crença, entre alguns responsáveis pelas políticas educacionais, de que as novas tecnologias são uma panaceia para solucionar os males da educação atual. Essa é mais uma razão pela qual a comunidade de EM deve investigar seriamente a implementação e utilização das TICs, pois, se, de um lado, pode ser considerado relativamente simples equipar as escolas com essas tecnologias, de outro, isso exige profissionais que saibam utilizá-las com eficácia na prática escolar. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 46)

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) o papel do professor em uma aula de investigação representa um desafio, já que a interação que se estabelece com o aluno é diferente do que ocorre em outros tipos de aula. Ele precisa criar um ambiente propício ao trabalho de investigação, escolher questões de forma cuidadosa que instiguem os seus alunos, procurar

[5] conforto no sentido de pouco movimento, onde quase tudo é conhecido previsível e controlado

[6] risco, pois é preciso avaliar constantemente as ações propostas

compreender o pensamento dos alunos, fazendo perguntas e pedindo explicações, avaliar o progresso dos alunos.

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. Com esse duplo objetivo em vista, o professor deve procurar interagir com os alunos tendo em conta as necessidades particulares de cada um e sem perder de vista os aspectos mais gerais de gestão da situação didática. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 47)

Assim, nota-se que o uso das tecnologias para explorar situações matemáticas podem levar o aluno a discussões de novos elementos, a formular conjecturas, sendo o papel do professor fundamental ao conduzir o processo por meio do levantamento de questões, verificação e justificativas acerca do problema tratado.

1.2 Tecnologias Digitais

Esta seção apresenta as quatro fases das tenologias digitais descritas por Borba, Silva e Gadanidis (2014) no livro Fases das tecnologias digitais em Educação.

Na **primeira fase**, nos anos 1980, já era discutido o uso das calculadoras simples, científicas e de computadores. Expressões como tecnologias informáticas (TI) ou tecnologias computacionais passaram a ser utilizadas. Para eles, a predominância nessa fase é o uso do *software* LOGO[7].

A **segunda fase** foi iniciada na 1ª metade dos anos 1990 com a popularização dos computadores pessoais. *Softwares* educacionais foram produzidos por empresas, governos e pesquisadores. Destaca-se o uso dos *softwares* de múltiplas representações tais como *WinPlot*, *Fun* e *Graphmatica* e os *softwares* de geometria dinâmica (GD). O *software Maple* também merece destaque. Todos esses programas se caracterizam pela natureza dinâmica, visual e experimental.

A **terceira fase** teve início por volta de 1999 com a chegada da internet. Surge então a expressão Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), pois a internet começa a ser utilizada como fonte de informações e como meio de comunicação através de *email*, *chats* e fóruns.

A **quarta fase** teve início em meados de 2004 com o advento da internet rápida. Portanto, configura-se a fase atual onde o uso do termo "Tecnologias Digitais"(TD) vem se tornando comum. É caracterizada pelo uso do GeoGebra, pelos modos diversos de comunicação,

[7] É uma linguagem de programação voltada para o ambiente educacional. Para maiores detalhes acesse:http://algol.dcc.ufla.br/ bruno/wxlogo/docs/oquee.html

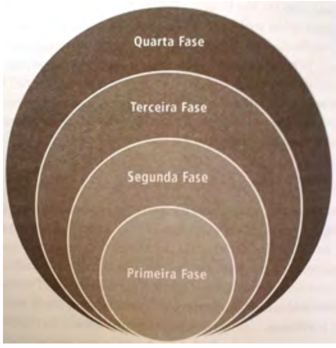
pelo uso dos vídeos na internet, principalmente no YouTube, pelas tecnologias móveis e portáteis (como os tablets, e smartphones), pelas redes sociais, entre outros.

Segundo Borba, Silva e Gadanidis:

> é importante destacarmos, que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior. Há certa "sobreposição"entre as fases, elas vão se integrando. Ou seja, muito dos aspectos que surgiram nas três primeiras fases são ainda fundamentais dentro da quarta fase.(BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 37)

A figura 2 a seguir ilustra a relação entre essas fases.

Figura 2 – Fases do desenvolvimento tecnológico em educação matemática



Fonte:Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 38)

1.3 GeoGebra

Diante de tantas transformações oriundas da sociedade do conhecimento, pode-se afirmar que empregar as TD como recursos didáticos vem cada vez mais auxiliar o professor e o educando no processo de ensino e aprendizagem.

Dentre os vários *softwares* de Matemática existentes hoje, pode-se utilizar o GeoGebra[8] como ferramenta potencializadora dessa relação. Trata-se de um *software* educativo livre, de matemática dinâmica, que permite trabalhar a geometria, a álgebra, o cálculo e a estatística. Desenvolvido por Markus Horenwarter, da Universidade de Salzburg.

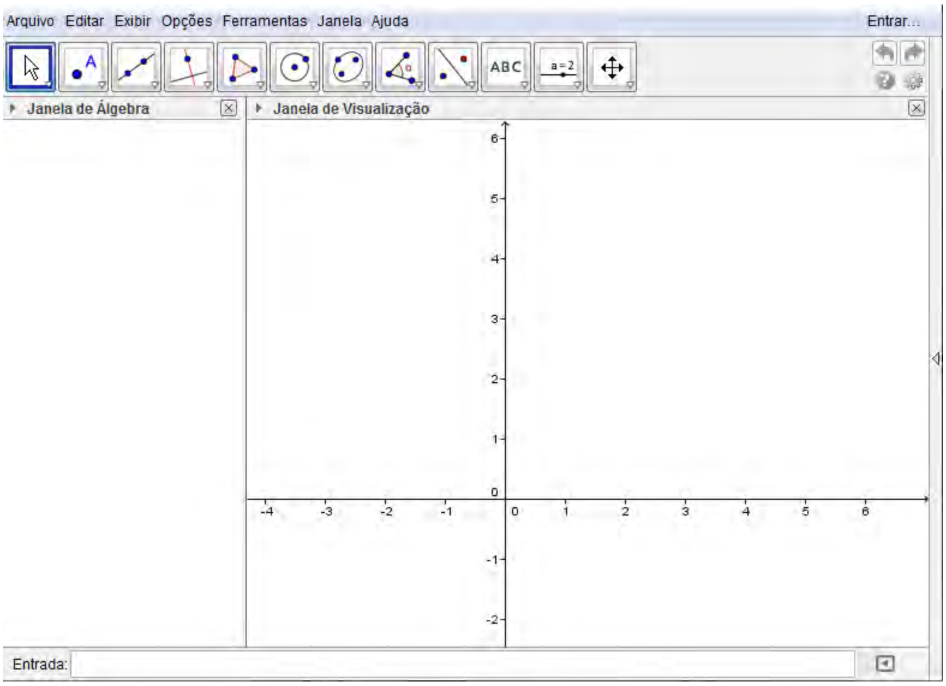
O programa possui várias ferramentas que podem ser exploradas para a construção de figuras geométricas; fórmulas de funções e equações podem ser digitadas no de campo de entrada, com isso, gráficos e curvas são plotados na janela de visualização onde o aluno pode, com o auxílio do professor, através de atividades pré-elaboradas investigar padrões e peculiaridades a respeito de diversos temas ao manipular os objetos na tela do computador. A manipulação dos objetos de forma dinâmica é uma característica dos *softwares* voltados para a Matemática, em especial o GeoGebra, que transforma a relação professor-aluno no ambiente escolar. Dessa forma, o educando torna-se agente ativo no processo de construção do conhecimento e o professor um mediador desse processo.

1.3.1 Tela Inicial

A interface do programa é constituída de uma Janela Inicial que é dividida em uma Janela de Visualização (Janela de Geometria), uma Janela da Álgebra e um Campo de Entrada, como mostra a figura 3.

[8] Disponível em www.geogebra.org.br

Figura 3 – Tela inicial do GeoGebra



A Janela de Visualização (à direita) mostra graficamente pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, retas, seções cônicas, entre outros objetos. Quando o *mouse* se desloca sobre um objeto aparece sua descrição. A Janela de Visualização é a área de trabalho do programa.

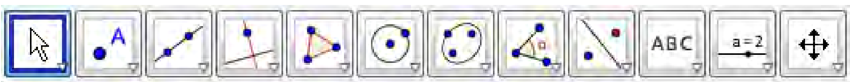
Valores, coordenadas e equações de objetos livres e dependentes são mostrados na Janela de Álgebra (à esquerda). Os objetos livres não dependem de nenhum outro objeto e podem ser mudados diretamente.

O Campo de Entrada (na parte inferior de tela inicial) é usado, por exemplo, para escrever diretamente coordenadas dos pontos a serem representados na tela, equações, comandos e funções. Os objetos que estiverem relacionados a algum comando digitado no Campo de Entrada serão mostrados na área de trabalho após digitar o comando e pressionar a tecla *Enter*.

Uma característica peculiar do GeoGebra reside no fato de se poder manipular os objetos na Janela de Visualização e observar as alterações simultâneas que ocorrem na Janela de Álgebra, ou vice-versa, mostrando assim a sua flexibilidade na manipulação dos objetos.

1.3.2 A barra de ferramentas

Figura 4 – Barra de ferramentas



A barra de ferramentas da versão 4.4 do GeoGebra é composta de 12 ícones (ferramentas necessárias às construções), cada um deles indicado por um quadradinho com uma figura, contendo outros sub-ícones relacionados com a função inicial. A figura 4 mostra a barra de ferramentas.

1.3.3 Ícones mais utilizados

Nesta seção encontram-se os ícones mais utilizados nas aulas durante a pesquisa. Esses ícones foram explorados no primeiro contato com a turma e durante todo o processo. Eles se localizam em cada janela da Barra de ferramentas. Para acessá-los basta clicar sobre o "quadradinho"que o representa e posicionar o cursor em uma "setinha"no canto inferior direito de cada ícone, clicando sobre o ícone desejado.

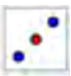
Janela 1

 Mover: seleciona, move ou manipula os objetos. Quando se altera as propriedades de algum objeto deve-se selecioná-lo utilizando essa ferramenta.

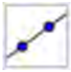
Janela 2

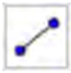
Novo Ponto: cria um ponto em qualquer posição da Janela de Visualização.

 Interseção de Dois Objetos : cria um ponto que é a interseção de dois objetos, clicando sucessivamente em cada objeto.

 Ponto Médio ou Centro: cria um ponto médio entre dois pontos ou o centro de uma circunferência ou de uma elipse ou hipérbole.

Janela 3

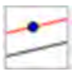
 Reta definida por dois pontos: cria dois pontos e a reta que passa por esses dois pontos, ou se os pontos já existirem, basta clicar sobre eles para que a reta seja criada.

 Segmento Definido por Dois Pontos: cria dois pontos e um segmento que une esses dois pontos, ou se os pontos já existirem, basta clicar sobre eles para que seja criado o segmento.

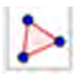
 Vetor Definido por Dois Pontos: cria dois pontos e vetor que os une, ou se os pontos já existirem, basta clicar sobre eles para criar o vetor.

 Vetor a partir de um Ponto: cria um vetor paralelo a um vetor dado, a partir de um ponto existente.

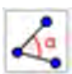
Janela 4

 Reta Paralela: cria uma reta paralela a um segmento, a uma reta, a um vetor, a um eixo ou a um lado de um polígono, clicando sobre o objeto (que dá a direção da reta) e um ponto.

Janela 5

 Polígono: cria pontos que formam um polígono desejado, ou se os pontos já existirem, basta clicar sobre eles, finalizando com um clique no primeiro ponto escolhido.

Janela 8

 Ângulo: cria três pontos e o ângulo definido por eles, ou se os pontos já existirem basta clicar sobre os pontos, o segundo ponto clicado naturalmente será o vértice do ângulo. Pode ser feito no sentido horário (menor ângulo) e anti-horário (maior ângulo).

Distância, comprimento ou perímetro: mostra na Janela de Visualização ou na Janela de Álgebra o comprimento ou o perímetro de um objeto, ou a distância entre dois pontos, basta clicar sobre o objeto ou sobre os pontos.

Janela 12

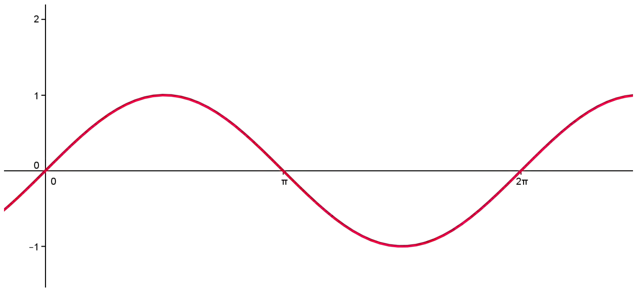
 Exibir/Esconder Objeto: oculta os objetos, para isso clica-se nos objetos, que ficaram marcados, em seguida aperte a tecla ESC. Para exibir basta clicar no ícone novamente.

 Exibir/Esconder Rótulo: oculta os rótulos dos objetos, para isso clica-se nos objetos que se quer esconder o rótulo. Da mesma forma quando se quer exibí-los.

1.3.4 O Campo de Entrada

É possível também utilizar o Campo de Entrada para gerar objetos na Área de Visualização, sem necessariamente utilizar os ícones da Barra de Ferramentas. Bastando, para isso, conhecer os comandos que geram esses objetos. Por exemplo, para criar um ponto A, digita-se no Campo de Entrada o par ordenado que o representa e o programa cria o ponto A com as coordenadas solicitadas. No entanto, para criar um vetor de coordenadas desejadas, digita-se $u = (x, y)$, onde (x, y) são as coordenadas do vetor $\vec{u}$ que se quer criar. Assim, o programa cria o vetor $\vec{u}$ com essas coordenadas. Dessa forma, deve-se saber quais comandos o *software* gera na tela do computador. Com a utilização frequente do programa, de acordo com a necessidade do usuário, pode-se utilizar comandos que equivalem a algumas funções dos ícones da Barra de Ferramentas. Para que o programa gere o gráfico de uma função matemática deve-se digitar no Campo de Entrada o comando associado à lei que representa essa função. A figura 5 mostra a função seno na Janela de Visualização, bastando para isso digitar o comando $y = sin(x)$ no Campo de Entrada do GeoGebra.

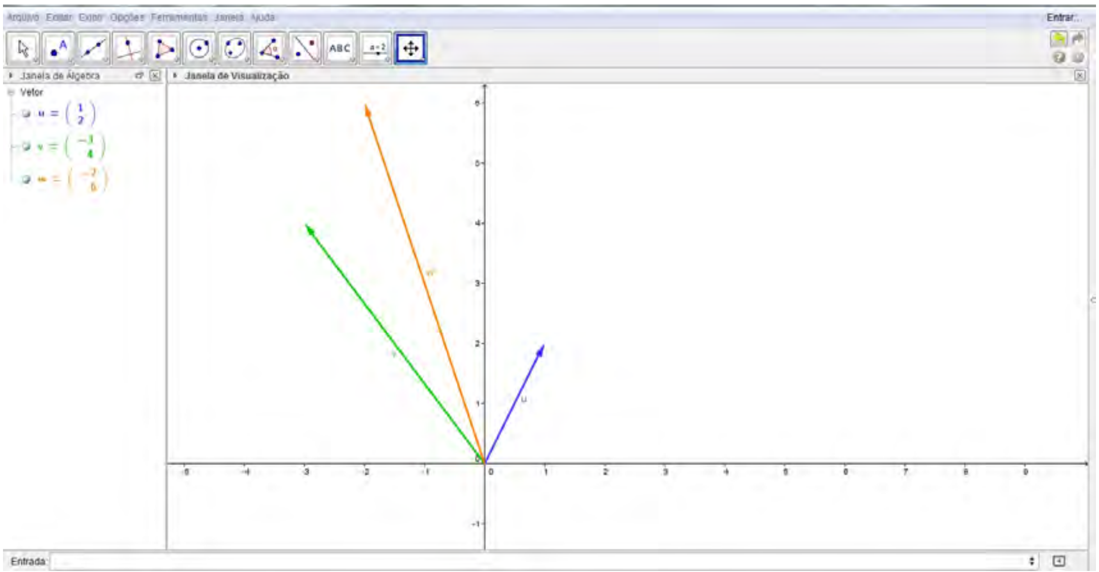
Figura 5 – Função seno



Fonte:Elaboração própria

Caso seja necessário determinar o vetor soma dos vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, basta criar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, em seguida digitar $u + v$ no Campo de Entrada. A figura 6 ilustra esse fato.

Figura 6 – Exemplo do vetor soma



Fonte: Elaboração própria

Capítulo 2

Vetores

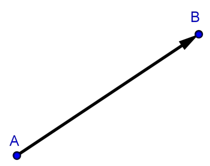
Este capítulo apresenta a teoria de vetores no plano e serve como referencial teórico matemático para a pesquisa e para os professores interessados em aplicar a sequência didática proposta nesse trabalho. A principal referência é o livro "Geometria Analítica", Coleção Profmat, dos autores Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhayalla Crissaff.

Para iniciar o estudo de vetores, admite-se que o leitor saiba o que é um segmento de reta, o comprimento do segmento de reta, coordenada e distância na reta, um sistema de eixos ortogonais OXY e as coordenadas no plano; tenha conhecimento dos axiomas e dos principais resultados de Geometria Euclidiana Plana, o Teorema de Pitágoras, a Lei dos Cossenos e os casos de congruência de triângulos.

2.0.5 Segmentos orientados equipolentes

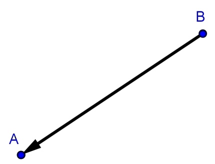
Denomina-se segmento orientado AB, de origem A e extremidade B, aquele em que se estabelece um sentido de percurso de A para B. Geometricamente é indicado por uma seta, como mostra a figura 7. Designa-se por BA o mesmo segmento tomado no sentido oposto, como mostra a figura 8. Um segmento é dito nulo quando a origem coincide com a extremidade.

Figura 7 – Segmento orientado AB



Fonte: Elaboração própria

Figura 8 – Segmento orientado BA



Fonte: Elaboração própria

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013), em 1832 Giusto Bellavitis publicou um trabalho sobre o conceito de equipolência que originou a definição de vetor e foi formalizada em 1844 por Hermann Grassmann.

Definição 2.1 *Diz-se que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, e se escreve $AB \equiv CD$, quando satisfazem as três propriedades:*

(a) têm o mesmo comprimento;

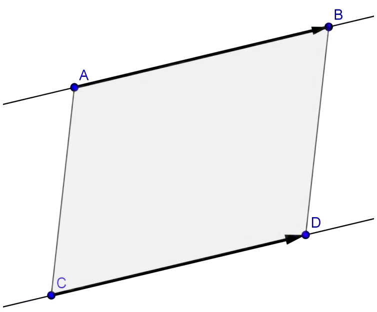
(b) são paralelos ou colineares;

(c) têm o mesmo sentido.

Se os segmentos AB e CD estão sobre uma mesma reta, basta que tenham o mesmo sentido e o mesmo comprimento para que sejam equipolentes, mas se os segmentos são paralelos e de igual comprimento, AB e CD têm o mesmo sentido quando ABDC é um paralelogramo.

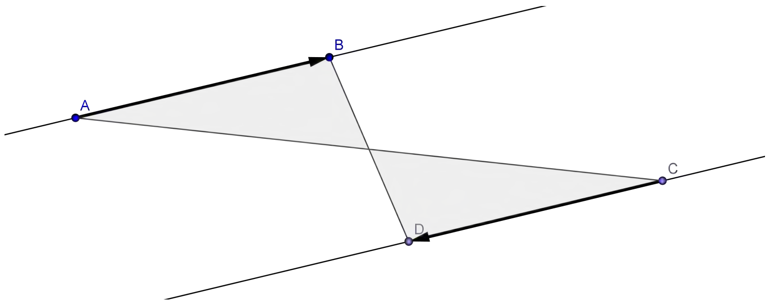
Logo, na figura 9, $AB \equiv CD$, porque ABDC é um paralelogramo e, na figura 10, $AB \not\equiv CD$, pois ABDC não é um paralelogramo.

Figura 9 – AB e CD são equipolentes



Fonte: Elaboração própria

Figura 10 – AB e CD não são equipolentes



Fonte: Elaboração própria

A seguinte proposição fornece um critério para verificar quando dois segmentos são equipolentes.

Proposição 2.1 *$AB \equiv CD \iff$ ponto médio de AD = ponto médio de BC.*

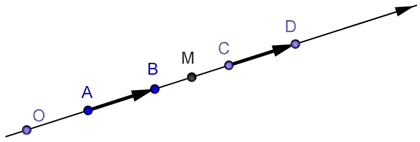
Demonstração

Se $AB \parallel CD$, a equivalência é verdadeira, pois neste caso ABDC é um paralelogramo e portanto, suas diagonais AD e BC cortam-se ao meio. Se AB e CD são colineares, seja r a reta que os contém provida de uma origem e um sentido de percurso escolhido de modo que B esteja à direita de A, na figura 11. Sejam a, b, c, e d as coordenadas de A, B, C e D na reta r em relação a uma unidade de medida.

[$\Rightarrow$] Se AB $\equiv$ CD, temos $a < b$ e $c < d$, pois AB e CD têm o mesmo sentido, e $b - a$, porque$|AB| = |CD|$. Logo, $b - a = d - c \Longleftrightarrow a + d = b + c \Longleftrightarrow \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c}{2} \Longleftrightarrow$ ponto médio de AD = ponto médio de BC.

[$\Leftarrow$] Se ponto médio de AD = $\dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c}{2}$ = ponto médio de BC, temos: $a + d = b + c$ $\Longleftrightarrow b - a = d - c$. Como $b - a$ e $d - c$ têm o mesmo sinal e módulos iguais, os segmentos colineares AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Portanto, AB $\equiv$ CD.

Figura 11 – A, B, C e D colineares e AB $\equiv$ CD



Fonte: Elaboração própria

Proposição 2.2 *Dados os pontos A, B e C, existe um único ponto D tal que AB $\equiv$ CD.*

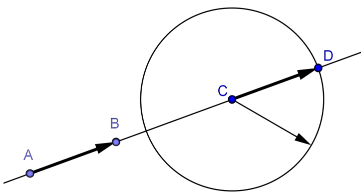
Demonstração

Tem-se dois casos, conforme A, B, e C sejam ou não colineares.

(a) **A, B e C colineares**. O círculo de Centro C e raio |AB| intersecta a reta que contém os pontos A, B, e C em exatamente dois pontos, mas apenas um deles, D é tal que AB e CD têm o mesmo sentido, como se pode ver na figura 12.

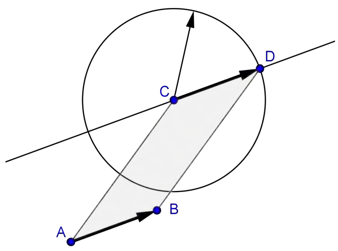
(b) **A, B e C não colineares**. Seja r a reta que passa por C e é paralela à reta que contém A e B. O círculo de centro C e raio |AB| intesecta a reta r em exatamente dois pontos, mas só um, D na figura 13, é tal que ABDC é um paralelogramo. Ou seja, AB $\equiv$ CD.

Figura 12 – A, B e C colineares



Fonte: Elaboração própria

Figura 13 – A, B e C não colineares



Fonte: Elaboração própria

Considerando um sistema de eixos ortogonais OXY no plano e os segmentos equipolentes AB e CD cujas extremidades são A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2), e D = (d_1, d_2) caracterizamos, em termos de coordenadas, os segmentos equipolentes AB e CD de acordo com a proposição:

Proposição 2.3 $AB \equiv CD \Longleftrightarrow b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \ e \ b_2 - a_2 = d_2 - c_2$

Demonstração

Pela proposição 2.1,

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\Longleftrightarrow \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow (a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &\Longleftrightarrow a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \ e \ a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\ &\Longleftrightarrow b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \ e \ b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.1 *Dados A = (2,2), B = (3,-2) e C = (-2,0) determine as coordenadas do ponto D = (x,y) de modo que AB ≡ CD.*

Solução

Pela proposição 2.3, temos

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\Longleftrightarrow 3 - 2 = x - (-2) \ e \ -2 - 2 = y - 0 \\ &\Longleftrightarrow x = -1 \ e \ y = -4 \\ &\Longleftrightarrow D = (-1, -4). \end{aligned}$$

A relação de equipolência é uma relação de equivalência[1] no conjunto de todos os segmentos orientados, isto é:

- reflexiva: AB ≡ AB;
- simétrica: AB ≡ CD ⟹ CD ≡ AB;
- transitiva: AB ≡ CD e CD ≡ EF ⟹ AB ≡ EF.

[1] Uma relação de equivalência ∼ entre os elementos de um conjunto A é uma relação tal que, para todos a, b, c ∈ A, valem as seguintes propriedades: reflexiva a ∼ a; simétrica: a ∼ b⟺ b ∼ a e transitiva: se a ∼ b e b ∼ c, então a ∼ c.

2.0.6 Vetores no plano

A palavra vetor vem do latim *vehere* que significa transportar. Por isso diz-se que vetor é um elemento transportador[2]. O vetor $\overrightarrow{AB}$ transporta o que está em A para B. Segundo Venturi (200−) o conceito de vetor surgiu no século XVI com o holandês, engenheiro mecânico, *Simon Stevin*; na sua obra *Estática e Hidrostática* ele apresentou um problema sobre decomposição de forças. Já no século XVIII, *Gaspar Wessel*, matemático dinamarquês, apresentou em sua obra *Ensaio Sobre a Representação da Direção* vetores como "linhas dirigidas". E, no século XIX, a teoria de vetores foi formalizada com os trabalhos do alemão *Hermann Grassmann*, do irlandês *William Hamilton* e do físico norte-americano *Josiah Gibbs*.

Definição 2.2 *Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Ver figura 14.*

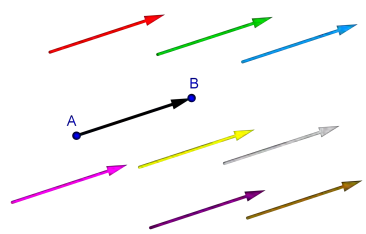
Pode-se visualizar um representante de um vetor em cada ponto do plano, já que todos os representantes do vetor são segmentos equipolentes entre si. Pela proposição 1.2, dado um vetor $\vec{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\vec{v}$.

Observação 2.1 *(a) O vetor que representa um ponto qualquer do plano, indicado por $\vec{0}$, representa o vetor nulo ou vetor zero;*

(b) A equipolência $AB \equiv CD$ é o mesmo que a igualdade $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

(c) Diz-se que os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se os segmentos orientados que os representam são paralelos ou colineares. Então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, por terem mesma direção, são ditos colineares, pois podem ser representados na mesma reta.

Figura 14 – Vetor



Fonte: Elaboração própria

[2] Ver página 42 e 43

Em relação a um sistema de coordenadas pode-se estabelecer as coordenadas de um vetor pela definição a seguir.

Definição 2.3 *Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, e se escreve $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.*

Note que se AB ≡ CD, pela proposição 2.3, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Exemplo 2.2 *Sejam os pontos A = (1,2), B = (3,1) e C = (4,0). Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.*

Solução

Temos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$. Além disso, se $D = (d_1, d_2)$ segue que

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\
&\iff (2, -1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\
&\iff 2 = d_1 - 4 \ e \ -1 = d_2 - 0 \\
&\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \ e \ d_2 = -1 + 0 = -1.
\end{aligned}$$

$$Portanto, D = (6, -1).$$

Proposição 2.4 *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais do plano. Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\vec{v}$.*

Demonstração

Seja $\vec{v}$ um vetor tal que AB é um dos seus representantes, pela proposição 2.2 existe um único ponto P tal que $\vec{v} = AB \equiv OP$. Assim se $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $P = (x, y)$: $AB \equiv OP \iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, y - 0)$. C.q.d.

Exemplo 2.3 *Dados os pontos A = (-1,2) e B = (4,1), determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.*

Solução

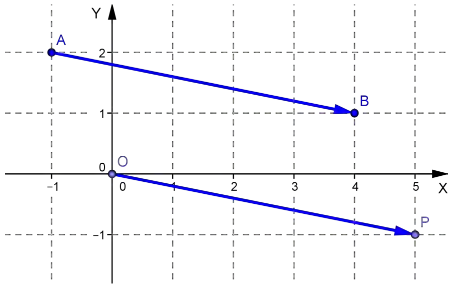
Pela proposição 2.4, $P = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1)$.Figura 15.

Pela proposição 2.4 pode-se identificar vetores do plano com pares ordenados de números reais em $\mathbb{R}^2$ assim como se faz com pontos do plano.

2.0.7 Operações com vetores

Define-se duas operações no conjunto dos vetores: a adição de vetores e a multiplicação de um número real (um escalar) por um vetor.

Figura 15 – AB ≡ CD



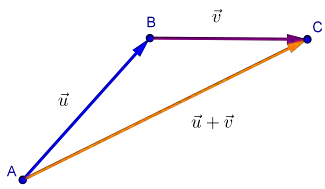
Fonte: Elaboração própria

2.0.8 Adição de vetores

Do ponto de vista geométrico a adição de vetores pode ser definida de duas maneiras, utilizando as conhecidas "regra do polígono"e a "regra do paralelogramo", a primeira maneira pode ser utilizada mesmo que os vetores sejam colineares, a segunda maneira não pode ser usada se os vetores forem colineares, pois não formam um paralelogramo.

Definição 2.4 *A adição de vetores é a operação que a cada par de vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ associa o vetor $\overrightarrow{AC}$, designado por $\vec{u} + \vec{v}$ e chamado soma de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Ver figura 16.*

Figura 16 – Soma de vetores

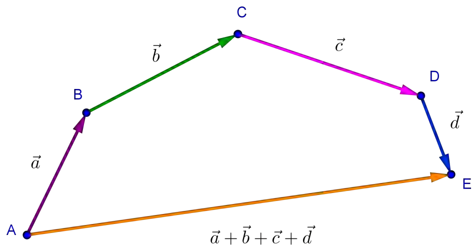


Fonte: Elaboração própria

Geometricamente, pode-se somar n vetores utilizando a "regra do polígono"que consiste em considerar sequencialmente os representantes dos n vetores de modo que a origem de cada vetor coincida com a extremidade do vetor que o antecede, o vetor soma é o vetor que fecha o polígono. Assim se quiser obter a soma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, escolhe-se, por exemplo, primeiro o vetor $\vec{a}$ em um ponto qualquer do plano e em seguida faz-se coincidir a origem do vetor $\vec{b}$ na extremidade do vetor $\vec{a}$, a origem do vetor $\vec{c}$ na extremidade do vetor $\vec{b}$ e por fim a origem do vetor $\vec{d}$ na extremidade do vetor $\vec{c}$, o vetor soma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ será o vetor que tem origem na origem do vetor $\vec{a}$ e extremidade na extremidade do vetor $\vec{d}$, vetor que fecha o polígono. Ver figura 17.

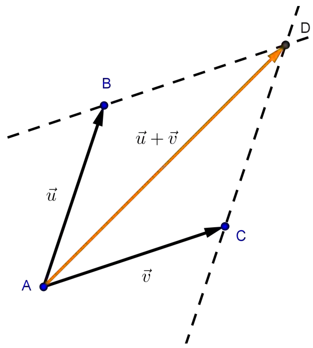
Pode-se somar dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano utilizando a "regra do paralelogramo"que consiste em colocar as origens dos representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em um mesmo ponto do plano, traçar, das extremidades dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, retas paralelas a esses vetores formando um paralelogramo, o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor que fica na diagonal do paralelogramo construído, que tem origem na origem de $\vec{u}$, como mostra a figura 18.

Figura 17 – Regra do polígono



Fonte: Elaboração própria

Figura 18 – Regra do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria

Em relação a um sistema de eixos ortogonais, a soma de vetores é dada pela soma das coordenadas das suas parcelas.

Proposição 2.5 *Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores do plano expresso em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. Então, $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Ver figura 19.*

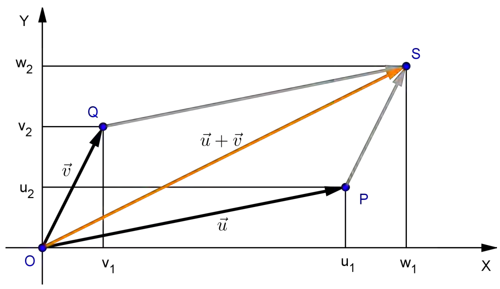
Demonstração

Sejam os pontos $P = (u_1, u_2)$ *e* $Q = (v_1, v_2)$ *tais que* $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ *e seja* $S = (w_1, w_2)$ *o ponto tal que* $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$.

Pela proposição 2.3, obtemos: $(v_1 - 0, v_2 - 0) = (w_1 - u_1, w_2 - u_2)$. Logo, $S = (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ e portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Figura 19 – Adição de vetores em coordenadas

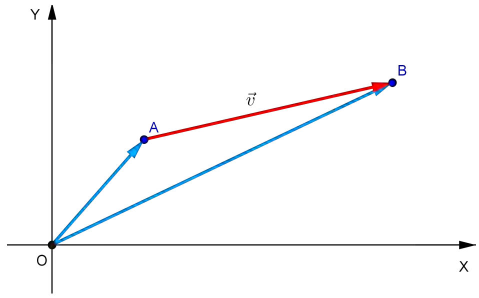


Fonte: Elaboração própria

Geometricamente, pode-se analisar um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no plano como um elemento transportador. Considera-se um sistema de eixos ortogonais OXY de origem O e os vetores $\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ [*], pela proposição 2.4, $\overrightarrow{OA} = A$ e $\overrightarrow{OB} = B$, então se pode reescrever a igualdade [*] assim: $B = A + \overrightarrow{AB}$, que justifica o vetor $\overrightarrow{AB}$ como elemento transportador. Transporta o ponto A para o ponto B. Como abuso de notação pode-se utilizar $\vec{v} = B - A$, pois os pontos do plano já foram identificados com vetores na origem. Ver figura 20.

Figura 20 – Vetor v como elemento transportador



Fonte: Elaboração própria

2.0.9 Multiplicação de um escalar por um vetor

A multiplicação de um número real λ por um vetor $\vec{v}$ é a operação que associa a cada vetor $\vec{v}$ e a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o vetor $\lambda\vec{v}$, chamado produto do escalar λ pelo vetor $\vec{v}$.

Definição 2.5 *O produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, representado pelo segmento orientado AC, tal que:*

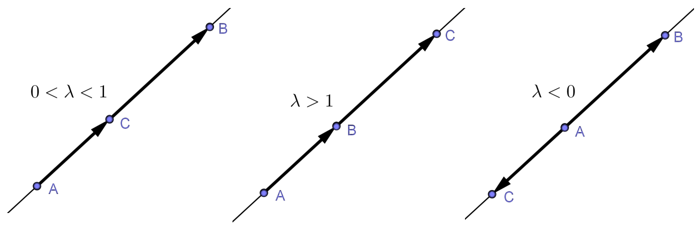
(a) A, B e C são colineares;

(b) d(A,C) = $|\lambda|$d(A,B)

(c) C = A se $\lambda = 0$;

(d) os segmentos AC e AB têm igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$. Ver figura 21.

Figura 21 – Valores diferentes de λ



Fonte: Elaboração própria

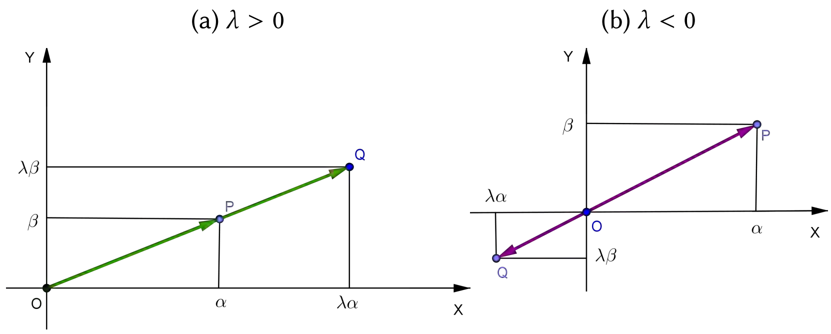
Proposição 2.6 *Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (\alpha, \beta)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então: $\lambda\vec{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.*

Demonstração

Com efeito, seja OP o segmento orientado, de origem O, equipolente a AB. As coordenadas do ponto P são (α, β). Seja Q = $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ Os segmentos OP e OQ têm a mesma inclinação $\frac{\beta}{\alpha}$, portanto O, P e Q, são colineares. Além disso, $d(O, Q) = |\lambda|\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2} = |\lambda| d(O, P)$.

E finalmente, OP e OQ têm o mesmo sentido ou sentidos opostos, conforme $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Segue-se que $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$. Como queríamos demonstrar. Ver figura 22.

Figura 22 – Valores diferentes de lambda



Fonte: Elaboração própria

Observação 2.2 *(a) Se $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ então o produto $\lambda\overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{0}$;*

(b) Não confunda o número 0 (zero) com o vetor $\overrightarrow{0}$ (vetor nulo);

(c) Dado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $-\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}$ é chamado o simétrico ou oposto de $\overrightarrow{v}$. Se $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então $-\overrightarrow{v} = (-\alpha, -\beta)$. Evidentemente, $-\overrightarrow{v} = (-1)\overrightarrow{v}$.

Proposição 2.7 *Um ponto P pertence à reta r que passa pelos pontos A e B se e somente se $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração

Pela definição da multiplicação de $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence à reta r.

Reciprocamente, seja P um ponto pertencente à reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A, P)}{d(A, B)}$.

Se o sentido de percurso de A para P coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A, P) = \mu d(A, B)$.

Se o sentido de percurso de A para P for oposto aos sentido de percurso de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem A oposto à semirreta de origem A que passa por B tal que $d(A, P) = \mu d(A, B)$.

Exemplo 2.4 *Sejam* $\vec{u} = (3, -1)$ *e* $\vec{v} = (1, 2)$, *determine* $\vec{w} = (-2)\vec{u} + \vec{v}$.

Solução

$$\vec{w} = (-2)\vec{u} + \vec{v} = (-2)(3, -1) + (1, 2) = (-6, 2) + (1, 2) = (-6 + 1, 2 + 2) = (5, 4).$$

Exemplo 2.5 *Sejam* $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$ *pontos distinos do plano. Determinar o ponto médio do segmento AB.*

Solução

Deve-se determinar o ponto $M = (x, y)$ que divide o segmento AB em dois segmentos de igual comprimento, isto é, AM ≡ MB, ou ainda, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Logo,

$$\begin{aligned} M - A = B - M &\iff 2M = A + B \\ &\iff M = \frac{A + B}{2} \end{aligned}$$

Portanto, M = $\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$ é o ponto médio do segmento AB .

Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação de um número real por um vetor possuem propriedades similares às propriedades dos números reais, por isso que ao escrevemos um vetor por meio de suas coordenadas as verificamos mais facilmente. Essas propriedades são válidas para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do plano e quaisquer números reais λ e μ.

Adição

(i) **comutatividade**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(ii) **associatividade**: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;

(iii) **elemento neutro**: o vetor $\vec{0}$ é tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$;

(iv) **inverso aditivo**: para cada vetor $\vec{u}$ existe um único vetor, o inverso simétrico aditivo de $\vec{u}$, designado por $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + -\vec{u} = \vec{0}$.

Multiplicação de um escalar por um vetor

(v) **associatividade**: $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$;

(vi) **elemento neutro**: o número $1 \in \mathbb{R}$ é tal que $1\vec{u} = \vec{u}$;

(vii) **distributividade em relação a um escalar**: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;

(viii) **distributividade em relação a um vetor**: $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

Essas propriedades são verificadas facilmente utilizando coordenadas ou argumentos geométricos. Vejamos como é feita essa verificação no caso da propriedade i:

Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ as coordenadas dos vetores.

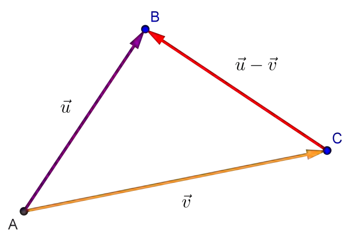
$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (a, b) + (c, d) \\
&= (a + c, b + d) \\
&= (c + a, d + b) \ (\textit{propriedade comutativa dos números reais}) \\
&= (c, d) + (a, b) \\
&= \vec{v} + \vec{u}
\end{aligned}$$

De maneira análoga, verifica-se as outras propriedades.

Observação 2.3 *(a) O vetor diferença $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ então: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = B - A + A - C = B - C = \overrightarrow{CB}$. Ver figura 23.*

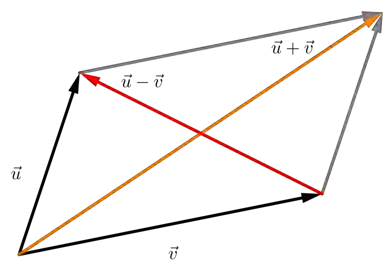
(b) As diagonais do paralelogramo construído sobre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representam o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ e o vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$. Ver figura 24

Figura 23 – Vetor diferença



Fonte: Elaboração própria

Figura 24 – Diagonais do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria

Os exemplos a seguir mostram alguns resultados de geometria plana com o uso de vetores.

Exemplo 2.6 *Dados os pontos A = (-1,2), B = (3,-1) e C = (-2,4), determinar D = (x,y) de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.*

Solução

$\overrightarrow{CD} = D - C = (x, y) - (-2, 4) = (x + 2, y - 4)$ e $\overrightarrow{AB} = (3, -1) - (-1, 2) = (4, -3)$, como $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, temos que:

$$\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 4 = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Sistema cuja solução é x = 0 e y = $\frac{5}{2}$. Logo, D = $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Exemplo 2.7 *Verifique que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.*

Solução

Seja ABCD um quadrilátero e sejam X, Y, Z e W os pontos médios de DA, AB, BC e CD, respectivamente. Basta verificar que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YZ}$.

$$X = \frac{A + D}{2} \tag{2.1}$$
$$W = \frac{D + C}{2} \tag{2.2}$$
$$Y = \frac{A + B}{2} \tag{2.3}$$
$$Z = \frac{B + C}{2} \tag{2.4}$$

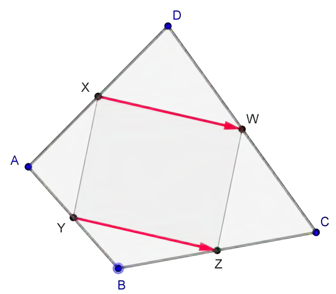
Subtraindo, membro a membro, (2.1) de (2.2) e (2.3) de (2.4), obtemos:

$W - X = \dfrac{D + C}{2} - \dfrac{A + D}{2} = \dfrac{C - A}{2}$, e

$Z - Y = \dfrac{B + C}{2} - \dfrac{A + B}{2} = \dfrac{C - A}{2}$.

Portanto, $\overrightarrow{XW} = \dfrac{C - A}{2} = \overrightarrow{YZ}$.

Figura 25 – Exemplo 2.7



Fonte: Elaboração própria

Exemplo 2.8 *O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.*

Solução

Seja ABC um triângulo e M e N os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. $M = \dfrac{A+B}{2}$ e $N = \dfrac{A+C}{2}$, logo, $N - M = \dfrac{A+C}{2} - \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{C-B}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. O que mostra que o MN é paralelo à BC e MN é a metade de BC.

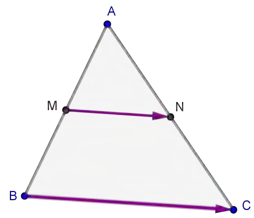


Figura 26 – Exemplo 2.8
Fonte: Elaboração própria

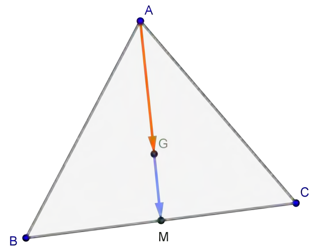
Exemplo 2.9 *Sabendo-se que o ponto de interseção de duas medianas de um triângulo ABC divide cada uma delas na razão 2:1, mostre que esse ponto (baricentro G) é dado por* $\dfrac{A+B+C}{3}$.

Solução

Seja G o baricentgro do triângulo ABC e AM a mediana relativa ao lado BC como mostra a figura 27 . Como G divide AM na razão 2:1, $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, assim temos:

$$\begin{aligned}
G - A &= 2(M - G) \Longrightarrow \\
G &= A + 2M - 2G \Longrightarrow \\
3G &= A + 2M \Longrightarrow \\
3G &= A + 2\frac{B+C}{2} \Longrightarrow \\
3G &= A + B + C \Longrightarrow \\
G &= \frac{A+B+C}{3}
\end{aligned}$$

Figura 27 – Exemplo 2.9



Fonte: Elaboração própria

Definição 2.6 *(a) O vetor $\vec{v}$ é múltiplo do vetor $\vec{u}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.*

(b) O vetor $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$ quando existem números reais λ_1, λ_2, ..., λ_n tais que $\vec{v} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n}$.

Observação 2.4 *(a) O vetor nulo $\vec{0}$ é múltiplo de qualquer vetor $\vec{u}$, uma vez que $\vec{0} = 0\vec{u}$.*

(b) Um vetor não nulo não é múltiplo do vetor nulo, pois $\lambda\vec{0} = \vec{0}, \forall \in \mathbb{R}$.

(c) Se A, B e C são pontos distintos do plano, pela Proposição 2.7, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ é múltiplo de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ se e somente se, A, B e C são colineares. Dizemos então que dois vetores não nulos são colineares quando um deles é múltiplo do outro.

(d) Se um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é múltiplo de $\vec{u}$, então $\vec{u}$ também é múltiplo de $\vec{v}$. De fato, se $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u} \neq \vec{0}$, temos que $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$. Logo $\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$.

2.0.10 Condição de paralelismo de dois vetores

Dois vetores paralelos têm suas representações geométricas, a partir da origem O de um sistema de eixos ortogonais OXY, situadas sobre a mesma reta, portanto, são colineares, logo, pela observação anterior, são múltiplos. Daí, pode-se por meio da proposição a seguir, utilizar um critério para determinar quando dois vetores são paralelos ou múltiplos um do outro. O que equivale a condição de alinhamento de três pontos.

Proposição 2.8 *Um dos vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ é múltiplo do outro se e só se $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$.*

Demonstração

Seja $\vec{v} = (a', b')$ múltiplo de $\vec{u} = (a, b)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u} \Longleftrightarrow (a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda \text{a}, \lambda \text{b}) \Longleftrightarrow a' = \lambda \text{a}$ e $b' = \lambda \text{b} \Longleftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$.

Observação 2.5 *Note que a demonstração acima não foi dividida em casos, pois se a = 0, então $a^{'}$ = 0, ou seja, se a componente de um vetor é nulo, a componente correspondente do outro vetor também o será.*

Exemplo 2.10 *Os vetores $\vec{v} = (2,3)$ e $\vec{u} = (6,9)$ são paralelos pois, $\dfrac{6}{2} = \dfrac{9}{3}$. Ou seja, $\vec{u} = 3\vec{v}$.*

Exemplo 2.11 *Verifique se os pontos A = (-2,3), B = (1,2) e C = (10,-1) são colineares.*

Solução

Pela Observação 2.4 e pela Proposição 2.8, os pontos A, B e C são colineares se e somente se os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são mútiplos. $\overrightarrow{AC} = C - A = (10,-1) - (-2,3) = (12,-4)$ e $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2) - (-2,3) = (3,-1)$, como $\dfrac{12}{-4} = \dfrac{3}{-1}$, então, os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são múltiplos, logo, A, B e C são colineares.

Em Álgebra Linear diz-se que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes (LD) quando são múltiplos um do outro, caso contrário são ditos linearmente independentes (LI).

2.0.11 Produto interno

A operação entre vetores que associa a cada par de vetores um número real é denominada produto interno ou produto escalar. Segundo Delgado, Frensel e Crissaf (2013) o produto interno surgiu formalmente no livro *Vector Analysis* (1901) de Edwin B. Wilson. Mas a sua notação é devida ao físico Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) que o considerava como produto direto. Pode-se definir o produto interno de duas maneiras. A primeira em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais e a outra, geometricamente. Primeiramente utilizaremos o produto interno usual em termos de coordenadas e depois o faremos, geometricamente.

Definição 2.7 *A norma ou módulo de um vetor $\vec{v}$ é o número $|\vec{v}|$ dado pelo comprimento de um segmento que representa $\vec{v}$.*

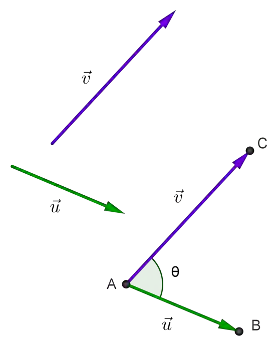
Observação 2.6 *(a) Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ então $|\vec{v}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$;*

(b) Se $\vec{v}$ é um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $|\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$. Pela Proposição 1.6, se $\vec{v} = (x,y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda\vec{v} = (\lambda x, \lambda y)$ e portanto, $|\lambda\vec{v}| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{(\lambda)^2(x^2+y^2)} = \sqrt{(\lambda)^2}\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda||\vec{v}|$;

(c) O versor de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário $\vec{u} = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, também denominado vetor normalizado do vetor $\vec{v}$, com a mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

Definição 2.8 *O ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o menor ângulo entre os segmentos representantes AB e AC de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente. Designamos por $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ a medida entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Figura 28.*

Figura 28 – Ângulo entre dois vetores



Fonte: Elaboração própria

Definição 2.9 *Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores do plano expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. O produto interno usual*[3] *de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real dado por: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$.*

O produto interno também é indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Pode-se facilmente verificar as propriedades a seguir:

Proposição 2.9 *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores arbitrários do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = |\vec{u}|^2 \geq 0$;

(b) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$;

(c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;

(d) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;

(e) $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$;

(f) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.

Faremos a demonstração do item (d) e (e):

Demonstração

[3] A partir desse ponto, utilizaremos a expressão "produto interno"e não "produto interno usual", por questão de simplificação de escrita.

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{w} = (w_1, w_2)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d):

$$\begin{aligned}\langle \lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle &= (\lambda u_1)v_1 + (\lambda u_2)v_2\\ &= \lambda(u_1v_1) + \lambda(u_2v_2)\\ &= \lambda(u_1v_1 + u_2v_2)\\ &= \lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\end{aligned}$$

(e):

$$\begin{aligned}\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v}\rangle &= (u_1 + w_1)v_1 + (u_2 + w_2)v_2\\ &= u_1v_1 + w_1v_1 + u_2v_2 + w_2v_2\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + w_1v_1 + w_2v_2\\ &= \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{w}, \vec{v}\rangle\end{aligned}$$

Pela proposição Proposição 2.9, item (a) $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}$, pois $|\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle \Longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}$.

Definição 2.10 *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares (ou ortogonais), e indicamos $\vec{u} \perp \vec{v}$ quando $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ ou $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.*

Proposição 2.10 *Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ então $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.*

Demonstração

Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{v} = \vec{0}$ é imediato o resultado da proposição. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, então existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, com $\lambda > 0$ e $\theta = 0$ ou $\lambda < 0$ e $\theta = \pi$, em ambos os casos: $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}||\lambda\vec{u}| = \lambda|\vec{u}|^2$ (I). E, além disso:

(II)

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle &= \langle \vec{u}, \lambda\vec{u}\rangle\\ &= \lambda\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle\\ &= \lambda|\vec{u}|^2\end{aligned}$$

De (I) e (II) conclui-se o resultado da proposição. Isto é, $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.

Análise do caso geral em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos e não-paralelos:

sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ como mostra a figura 29.

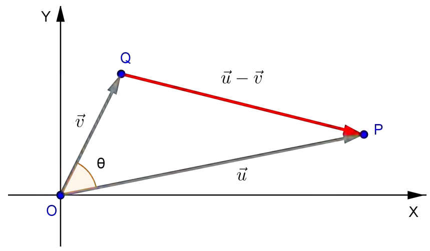
(III)

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{QP}|^2 &= \langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} \rangle \\
&= \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
&= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle
\end{aligned}$$

Mas $|\overrightarrow{QP}|$ é o lado do triângulo OPQ, que é oposto ao ângulo θ, logo, pela Lei dos Cossenos: $|\overrightarrow{QP}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ (IV). Então de (III) e (IV), segue que:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta &\implies -2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \\
&\implies \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta
\end{aligned}$$

Figura 29 – Ângulo entre os vetores



Fonte: Elaboração própria

Assim, para determinar o ângulo entre os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ utiliza-se a fórmula: $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. O que implica imediatamente o teste de perpendicularidade de dois vetores, por meio da proposição a seguir:

Proposição 2.11 *Dois vetores são perpendiculares se e só se seu produto interno é zero:* $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Demonstração

Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e, também $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, então: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90^\circ$.

Exemplo 2.12 *Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que os vetores $\vec{u} = (a+1, 2)$ e $\vec{v} = (-3, 1)$ sejam perpendiculares.*

Solução Temos que:

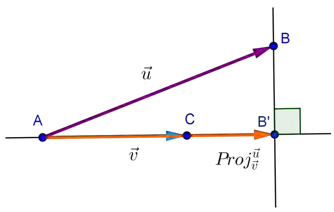
$$\begin{aligned}\vec{u} \perp \vec{v} &\iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ &\iff (a+1)\cdot(-3) + 2\cdot 1 = 0 \\ &\iff -3a - 3 + 2 = 0 \\ &\iff a = \frac{-1}{3}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.13 *Qual é o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (3,1)$ e $\vec{v} = (1,2)$?*

Solução O produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3\cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 + 2 = 5$, $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ e $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é calculado por: $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Daí, $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

Definição 2.11 *Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ vetores representados por segmentos orientados com a mesma origem. Seja B' o pé da perpendicular baixada do ponto B sobre a reta que contém os pontos A e C. A projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ é o vetor $Proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \overrightarrow{AB'}$. Figura 30.*

Figura 30 – Projeção ortogonal de um vetor



Fonte: Elaboração própria

Para determinar a projeção ortogonal de um vetor $\vec{u}$ na direção de um vetor $\vec{v}$ utiliza-se a proposição a seguir que pode se verificada utilizando a Proposição 2.11, pois o vetor $\overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{AC}$, como mostra a figura 30.

Proposição 2.12 *A projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é definida da seguinte maneira: $Proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$.*

Exemplo 2.14 *Determine a projeção ortogonal do vetor $\vec{u} = (3,2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (2,2)$.*

Solução

$$Proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{3\cdot 2 + 2\cdot 2}{2^2 + 2^2}(2,2) = \frac{10}{8}(2,2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Foi mencionado que o produto interno entre dois vetores está ligado ao ângulo e também a noção de projeção. Além disso, como exemplo de aplicação na Física o produto interno aparece no cálculo do trabalho realizado por um força F ao deslocar uma partícula ao longo do segmento retilíneo.

Observação 2.7 *Pela fórmula da Proposição 2.10:*

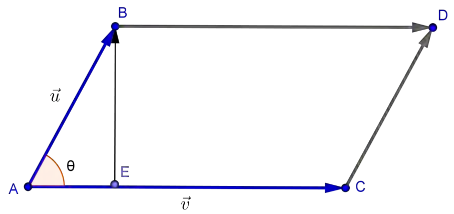
(a) se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$*, então* θ *é um ângulo agudo;*

(b) se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0$*, então* θ *é um ângulo obtuso;*

(c) se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$*, então* θ *é um ângulo reto;*

2.0.12 Área de paralelogramos e triângulos

Figura 31 – Paralelogramo ABDC



Fonte: Elaboração própria

Considere o paralelogramo P da figura 31, formado a partir dos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. A área de P é dada por: $A_P = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{EB}|$. Note que $|\overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{AB}| \operatorname{sen}\theta$ e portanto, $A_P = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \operatorname{sen}\theta$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
(A_P)^2 &= (|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \operatorname{sen}\theta)^2 \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta)^2 \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2
\end{aligned}
$$

.

Portanto, $A_P = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}$.

Utilizando coordenadas, se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
A_P &= \sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}\\
&= \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2acbd-b^2d^2}\\
&= \sqrt{a^2d^2-2acbd+b^2c^2}\\
&= \sqrt{(ad-bc)^2}\\
&= |ad-bc|
\end{aligned}
$$

Ou, equivalentemente, $A_P = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$.

Assim, a área T de um triângulo ABC é dada por: $A_T = \dfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$.

Exemplo 2.15 *Determine a área do paralelogramo ABDC e do triângulo ABC, sendo* $A = (2,1),\ B = (4,3),\ C = (5,-2)$ *e* $D = (7,0)$.

Solução

Como $\overrightarrow{AB} = (2,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (3,-3)$, temos:

Área(ABDC) = $\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |-6-6| = 12$. Portanto, área(ABC) = $\dfrac{1}{2}12 = 6$.

2.0.13 Equação da reta

A relação entre geometria e álgebra se dá através da geometria analítica ao tratar um problema geométrico utilizando recursos algébricos ou interpretar geometricamente questões algébricas. Assim, escolhido um sistema de coordenadas no plano, um conjunto de pontos pode ser descrito por uma equação e vice-versa. As equações da reta na forma paramétrica, cartesiana e afim serão apresentadas. Analisar-se-á o paralelismo, perpendicularismo e o ângulo entre duas retas.

2.0.14 Equação paramétrica

Considere uma reta r que passa pelos pontos $A = (a,b)$ e $B = (a^{'},b^{'})$ e $P = (x,y)$ um ponto do plano. Pela proposição 2.7, $P \in r \iff \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Isto é:

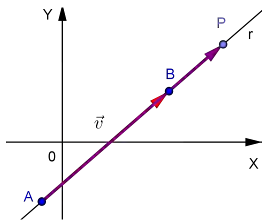
$$
\begin{aligned}
P \in r &= P - A = t\overrightarrow{AB}\\
&= P = A + t\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}
$$

Utilizando as coordenadas de A, B e P, temos:

$(x,y) = (a,b) + t(a' - a, b' - b)$ Então, a equação da reta é dada por:

$$r : \begin{cases} x &= a + t(a' - a) \\ y &= b + t(b' - b),\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Figura 32 – Reta r que passa por AB



Fonte: Elaboração própria

Cada ponto $P \in r$ é atingido ao variar o parâmetro t sendo $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (a' - a, b' - b) = (v_1, v_2)$ é um vetor paralelo à reta r. Ver figura 32. A equação da reta r, r: $P = A + t\vec{v}$ é dita a equação paramétrica da reta r. Assim, pode-se determinar uma reta que passa por um ponto $A = (a', b')$ e um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2) \| r$ pelas equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x &= a + tv_1 \\ y &= b + tv_2,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplo 2.16 *Obter a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos* $A = (1,1)$ *e* $B = (-3,2)$.

Solução

Seja $P = (x,y), t \in \mathbb{R}\ e\ \vec{v} = (-4,1),\ P \in r \iff \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \iff (x,y) = (1,1) + t(-4,1) \iff (x,y) = (1-4t, 1+t)$. Portanto, as equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x &= 1 - 4t \\ y &= 1 + t \end{cases}$$

2.0.15 Equação cartesiana

Uma aplicação do produto interno, utilizando a propriedade 2.11 é a determinação da equação da reta na forma cartesiana.

Definição 2.12 *Um vetor* $\vec{n} \neq \vec{0}$ *é normal ou perpendicular à uma reta r se* $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$, *quaisquer que sejam os pontos* $A,\ B \in r$.

Seja r uma reta que passa por $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{n} = (a, b)$ um vetor normal à r. Então:

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in r &\iff \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \\
&\iff \langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle = 0 \\
&\iff \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\
&\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
&\iff ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \\
&\iff ax + by = ax_0 + by_0 \\
&\iff ax + by = c, onde\ c = ax_0 + by_0
\end{aligned}$$

Assim, a equação cartesiana da reta r é r: ax + by = c.

Exemplo 2.17 *Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto $A = (-2, 3)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = (1, 1)$.*

Solução

Como $\vec{n} \perp r$, deve-se ter $r : x + y = c$. Como $A = (-2, 3) \in r$, $c = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (3) = -2 + 3 = 1$. Portanto, a equação reta é $r : x + y = 1$.

Observação 2.8 *O vetor $\vec{v} = (-b, a)$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ normal à reta r: ax + by = c, portanto, paralelo a r.*

2.0.16 Equação afim ou reduzida

A partir da equação cartesiana da reta obtém-se a equação da reta na forma reduzida.

Seja $r : ax + by = c$, onde $\vec{n} = (a, b) \perp r$.

(a): Se $b = 0$, um ponto $(x, y) \in r \iff x = \frac{c}{a}(a \neq 0)$. Seja $\frac{c}{a} = d$, então $r : x = d$ é uma reta vertical.

(b): Se $a = 0$, um ponto $(x, y) \in r \iff y = \frac{c}{b}(b \neq 0)$. Seja $\frac{b}{a} = e$, então $r : x = e$ é uma reta horizontal.

(c): Se $b \neq 0$, um ponto $(x, y) \in r \iff by = -ax + c \iff y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$. Se $m = \frac{-a}{b}$ e $n = \frac{c}{b}$. Então, a equação afim ou reduzida da reta r é: $y = mx + n$.

Assim, toda reta não vertical é representada por uma equação da forma $y = mx + n$, sendo:

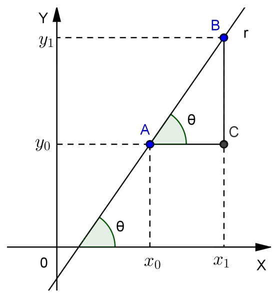
- O número n, a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo OY.

- O número m, chamado inclinação ou coeficiente angular da reta r, a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1, y_0 = mx_0 + n$ e $y_1 = mx_1 + n$, então:
$\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{(mx_1 + n) - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \dfrac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m.$

A figura 33 ilustra o caso em que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Além disso, a função $y = mx + n$ é: crescente se $m > 0$ e decrescente se $m < 0$. Se θ é o ângulo que a reta r: $y = mx + n$ faz com o semieixo OX positivo, então, $\operatorname{tg}\theta = m$; ou seja, o coeficiente angular de uma reta é numericamente igual à tangente do ângulo entre a reta e o sentido positivo do eixo das abscissas (isto ocorre quando as escalas dos eixos x e y são as mesmas). Para $\theta = 90^\circ$, quando a reta é vertical, a tangente não é definida.

A reta que passa por $A = (x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m conhecido é dada pela equação: $y - y_0 = m(x - x_0)$, chamada equação ponto-coeficiente angular.

Figura 33 – Reta não vertical



Fonte: Elaboração própria

Exemplo 2.18 *Escreva a equação da reta que passa pelo ponto* $(1, 4)$ *e tem coeficiente angular igual a* 3.

Solução Usando a equação ponto-coeficiente angular: $y - y_0 = m(x - x_0)$ tem-se: $y - 4 = 3(x - 1) \Longrightarrow y - 4 = 3x - 3 \Longrightarrow y = 3x + 1$.

2.0.17 Paralelismo e perpendicularismo entre retas

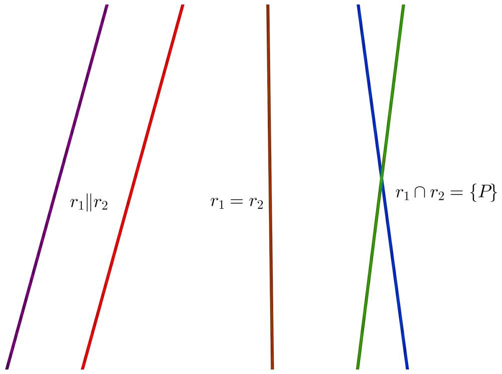
No plano duas retas r_1 e r_2 podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra), ou seja, as retas podem ser:

(a) paralelas: quando não se intersectam, isto é, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$;

(b) coincidentes: quando são iguais, isto é, $r_1 = r_2$

(c) concorrentes: quando se intersectam em um ponto, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$.

Figura 34 – Posições relativas de duas retas



Fonte: Elaboração própria

Utilizando as equações **reduzidas** de $r_1 : mx + n$ e $r_2 : m^{'}x + n^{'}$ pode-se verificar cada situação da seguinte forma:

(a) paralelas: $r_1 \cap r_2 = \varnothing \iff m = m^{'}\ e\ n \neq n^{'}$

(b) coincidentes: $r_1 = r_2 \iff m = m^{'}\ e\ n = n^{'}$

(c) concorrentes: $r_1 \cap r_2 = \{P\} \iff m \neq m^{'}$.

Ou pode-se utilizar as equações **cartesianas** de $r_1 : ax + by = c\ e\ r_2 : a^{'}x + b^{'}y = c^{'}$, analisando os vetores normais e os coeficientes $c^{'}\ e\ c$. Se os vetores normais $(a^{'}, b^{'})\ e\ (a, b)$ forem múltiplos as retas serão paralelas ou coincidentes, assim temos:

(a) paralelas: $r_1 \cap r_2 = \varnothing \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ tal que $(a^{'}, b^{'}) = \lambda(a, b)\ e\ c^{'} \neq \lambda c$;

(b) coincidentes: $r_1 = r_2 \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ tal que $(a^{'}, b^{'}) = \lambda(a, b)\ e\ c^{'} = \lambda c$

(c) concorrentes: $r_1 \cap r_2 = \{P\} \iff$ não existe $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ tal que $(a^{'}, b^{'}) = \lambda(a, b)$.

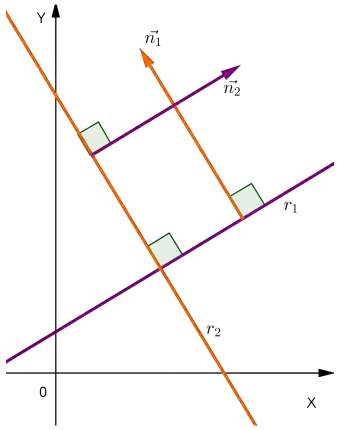
Exemplo 2.19 *Determine a equação da reta r_2 paralela à reta $r_1 : 2x + y = 1$ que passa pelo ponto $A = (3, -1)$.*

Solução

Escrevendo r_2 na forma cartesiana temos que $r_2 : 2x + y = c$, pois como $r_2 \| r_1$, pelo item (a) podemos considerar $(a^{'}, b^{'}) = 1(2, 1) = (2, 1)$ com $c^{'} \neq 1$. Como $(3, -1) \in r_2$ temos: $c^{'} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 6 - 1 = 5$. Logo, a equação da reta r_2 é: $2x + y = 5$.

Duas retas $r_1\ e\ r_2$ são perpendiculares quando formam um ângulo de $90°$ e indicamos $r_1 \perp r_2$, note que os vetores normais das retas também são perpendiculares. Ver figura 35.

Figura 35 – Retas perpendiculares



Fonte: Elaboração própria

Proposição 2.13 *As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a^{'}x + b^{'}y = c^{'}$ são perpendiculares se e somente se seus vetores normais $\overrightarrow{n_1} = (a, b)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a^{'}, b^{'})$ são perpendiculares, ou seja, $aa^{'} + bb^{'} = 0$*

Demonstração

De fato, as retas r_1 *e* r_2 são perpendiculares se se somente se $\angle(r_1, r_2) = \dfrac{\pi}{2} \iff \cos\angle(r_1, r_2) = 0 \iff \langle r_1, r_2\rangle = 0$, com os vetores v_1 *e* v_2 paralelos às retas r_1 *e* r_2, respectivamente. Como $n_1 = (a, b) \perp r_1$ *e* $n_2 = (a', b') \perp r_2$, temos que, pela observação 2.8, que $v_1 = (-b, a)||r_1$ *e* $v_2 = (-b', a')||r_2$. Então, $r_1 \perp r_2 \iff \langle v_1, v_2\rangle = (-b)(b) + aa' = aa' + bb' = 0$ ou seja, $\langle n_1, n_2\rangle = aa' + bb' = 0$.

Exemplo 2.20 *Encontre a equação cartesiana da reta r_2 que passa pelo ponto $(-4, 2)$ e é perpendicular à reta $r_1 : 3x - y = 5$.*

Solução

Pela proposição 2.13, $r_2 \perp r_1 \iff n_1 \perp n_2$, considere $n_2 = (1, 3) \perp (3, -1)$, então $r_2 : x + 3y = c$, como $(-4, 2) \in r_2$, $c = -4 + 3 \cdot 2 = -4 + 6 = 2$. Portanto, $r_2 : x + 3y = 2$.

A partir da proposição anterior, pode-se estabelecer uma condição de perpendicularismo entre duas retas não verticais e não horizontais, como diz a proposição a seguir.

Proposição 2.14 *Sejam $r_1 : y = mx + n$ e $r_2 : y = m'x + n'$ duas retas tais que $m \neq 0$ e $m' \neq 0$. Então, $r_1 \perp r_2$ se e somente se $mm' = -1$.*

Demonstração

Como $r_1 : mx - y = -n$ e $r_2 : m'x - y = n'$ temos, pela Proposição 1.13, que $r_1 \perp r_2 \iff n_1 = (m, -1) \perp n_2 = (m', -1)$. Logo, $r_1 \perp r_2 \iff \langle n1, n_2\rangle = 0 \iff mm' = 1$.

2.0.18 Ângulo entre duas retas

Definição 2.13 *O ângulo $\angle(r_1, r_2)$ entre duas retas r_1 e r_2 se define da seguinte maneira:*

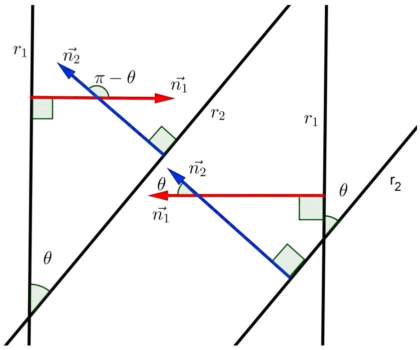
- *se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, $\angle(r_1, r_2) = 0$;*
- *se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \cap\ r_2 = \{P\}$, $\angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas.*

Em particular, $0 \leq \angle(r_1, r_2) \leq \dfrac{\pi}{2}$. A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam n_1 *e* n_2 os vetores normais às retas concorrentes r_1 *e* r_2, respectivamente. Então, como $\angle(r_1, r2) = \angle(n_1, n_2)$ ou $\angle(r_1, r2) = \pi - \angle(n_1, n_2)$; com $0 < \angle(r_1, r_2) < \dfrac{\pi}{2}$. Ver figura 36.

Temos que: $\cos \angle(r_1, r_2) = |\cos \angle(n_1, n_2)| = \dfrac{|\langle n_1, n_2\rangle|}{|n_1||n_2|}$.

Figura 36 – Ângulo entre as retas



Fonte: Elaboração própria

Exemplo 2.21 *Determine o ângulo entre as retas $r_1 : 2x + y = 7$ e $r_2 : 2x + 6y = 9$.*

Solução

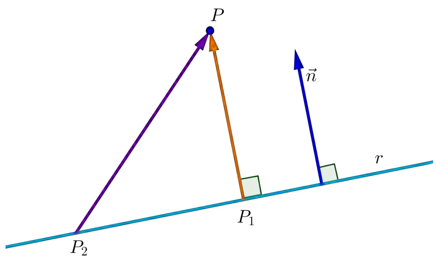
$n_1 = (2, 1)$ *e* $n_2 = (2, 6)$, $\cos\theta = \dfrac{|\langle n_1, n_2\rangle|}{|n_1||n_2|} = \left|\dfrac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 6^2}}\right| = \dfrac{10}{\sqrt{5}\sqrt{40}} = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = 45^\circ$.

2.0.19 Distância de um ponto a uma reta

Dados um ponto P e uma reta r do plano, a distância d do ponto P à reta r é igual à distância de P até P_1 (projeção ortogonal de P sobre r). Calcula-se essa distância d pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1 *Sejam $r : ax+by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano. Então, a distância d de P a r é dada por:* $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Figura 37 – Distância de um ponto à reta



Fonte: Elaboração própria

Demonstração

Seja P_1 a projeção ortogonal de P sobre r, $P_2 = (x_2, y_2)$ um ponto da reta r, $\vec{n} = (a, b)$ o vetor normal à r e d a distância de P até r, conforme mostra a figura 37, a distância d é dada por:

$d = d(P, r) = d(P, P_1) = |P_1P|$; onde $\overrightarrow{P_1P} = Proj_{\vec{n}}^{\overrightarrow{P_2P}}$, então:

$$\begin{aligned} d = |P_1P| &= \left|Proj_{\vec{n}}^{\overrightarrow{P_2P}}\right| \\ &= \left|\frac{\langle \overrightarrow{P_2P}, \vec{n}\rangle |\vec{n}|}{|\vec{n}|^2}\right| \\ &= \left|\frac{\langle \overrightarrow{P_2P}, \vec{n}\rangle}{|\vec{n}|}\right| \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{P_2P} = (x_0 - x_2, y_0 - y_2)$ e $\vec{n} = (a, b)$ teremos:

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{(x_0 - x_2, y_0 - y_2) \cdot (a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \\ &= \left|\frac{a(x_0 - x_2) + b(y_0 - y_2)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \\ &= \left|\frac{ax_0 + by_0 - ax_2 - by_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|, \end{aligned}$$

mas, $ax_2 + by_2 = c$, pois $P \in r$. Portanto: $d = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.

Exemplo 2.22 *Determine a distância de $A = (1, 1)$ à reta $r : 4x + 3y = -13$.*

Solução

$$d = \left|\frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 13}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right| = \left|\frac{4 + 3 + 13}{5}\right| = \frac{20}{5} = 4.$$

Capítulo 3

Contexto da pesquisa

3.1 O IFF

A Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica cobre todo os estados brasileiros oferecendo acesso à educação de qualidade a quem necessita investir na sua formação profissional nas diferentes modalidades de ensino. Em 1909, o então presidente da época Nilo Peçanha, criou 19 escolas de Aprendizes e Artífices que deram origem aos Centros federais de educação profissional e tecnológica (Cefets). O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFF) é um dos 38 institutos criados segundo a Lei 11892/08 de 29 de dezembro de 2008, como parte do projeto de expansão da rede federal.

São 13 *campi*: Campos-Centro, Guarus, São João da Barra, Rio Paraíba do Sul/Upea, Macaé e Quissamã, no Norte do Estado do Rio de Janeiro; Itaperuna, Bom Jesus do Itabapoana, Cambuci e Santo Antônio de Pádua, no Noroeste Fluminense; Cabo Frio na Região dos Lagos; Itaboraí e Maricá, na Região Metropolitana.

3.2 O Campus Bom Jesus

Figura 38 – Campus Bom Jesus

Fonte:http://portal.iff.edu.br/campus/bom-jesus. Acessado em:10/03/15

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Bom Jesus fica localizado na cidade de Bom Jesus do Itabapoana (Noroeste do Estado do Rio de Janeiro). A figura 38 mostra a imagem da entrada do Campus.

Em 1970, iniciou suas atividades como Colégio Técnico Agrícola Idelfonso Bastos Borges (CTAIBB). Esse fora um anseio da comunidade local e o Ministério da Agricultura. Seu nome é devido ao veterinário que conseguiu a cessão do terreno para que a unidade de ensino se instalasse. No entanto, o mesmo veio a falecer no dia da cerimônia de inauguração, em abril de 1970.

Em 1974 houve a transição da gestão do CTAIBB para a Universidade, vinculando-se à Pró-Reitoria de Ensino por meio da Faculdade de Educação da UFF.

Em dezembro de 2008, com a nova proposta de interiorização do ensino, após diversas reuniões, a comunidade docente e os servidores optaram pela transição para o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, trazendo ainda mais cursos e expandindo as ações de extensão, pesquisa e ensino da rede federal de ensino.

Hoje, o *Campus* conta com uma estrutura que vem se consolidando e crescendo na região oferecendo cursos técnicos de: Agropecuária, Agroindústria, Informática, Meio Ambiente e Química; em nível superior o curso de Ciência e Tecnologia de Alimentos; em nível de extensão, o Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego (PRONATEC), Mulheres Mil, além do curso técnico em Agropecuária no *Campus* Avançado de Cambuci, alcançando o número de dois mil alunos e mantendo seus objetivos de expandir o ensino de qualidade na região Noroeste Fluminense.

Assim como todos os outros *campi*, o *Campus* Bom Jesus oferece uma ótima estrutura física, possuindo salas de aulas climatizadas com TV, equipamentos de *datashow*, laboratórios de Informática e *micródromo*.[1]

3.3 A Turma participante

A turma em que se desenvolveu a pesquisa é uma das duas turmas do terceiro ano do curso de Agropecuária Integrado do *Campus* Bom Jesus.

De acordo com a matriz curricular do curso de Agropecuária para o terceiro ano, são treze disciplinas que compõem o Ensino Médio com carga horária de 1080 horas/aula e seis disciplinas que compõem a Formação Técnica com carga horária de 600 horas/aula totalizando 1680 horas/aula no ano.

A turma é constituída de 19 alunos de 17 a 19 anos, dos quais 17 são rapazes e 2 são moças. O professor de Matemática que leciona na turma é o autor dessa pesquisa. As figuras 39 e 40 a seguir mostram a turma em dois momentos da pesquisa.

Figura 39 – Primeiro dia da pesquisa

Fonte: Dados da pesquisa

3.4 O tema da pesquisa e escolha da turma

O Profmat é um Mestrado Profissional, e por isso a opção pelo tema está atrelada ao Ensino e aconteceu quando o professor-pesquisador, ao adentrar em uma sala da turma do 1º ano de Agroindústria onde leciona, observou o quadro branco preenchido com o conteúdo de vetores pela professora de Física. Na ocasião, o que estava exposto consistia na soma e subtração de vetores em termos de módulo, utilizando a Lei dos Cossenos. Daí, pensou em inserir vetores no Ensino Médio na disciplina de Matemática. Essa ideia foi comunicada ao orientador que prontamente a abraçou. Esse tema é relevante, como aponta a revisão

[1] Laboratório de microcomputadores com acesso à internet disponível para os alunos do IFF.

Figura 40 – Turma no micródromo

Fonte: Dados da pesquisa

bibliográfica. Acredita-se que a sua inserção pode ser feita em qualquer ano de escolaridade do Ensino Médio, pois os pré-requisitos que os alunos necessitam estão presentes na Matemática do Ensino Fundamental. É possível também inserir vetores no 9º ano dependendo da abordagem que se quer privilegiar.

O professor-pesquisador já trabalha no *Campus* Bom Jesus desde setembro de 2011 e atua nos cursos técnicos integrados de Informática, Agroindústria e Agropecuária, e não tem predileção por nenhum ano de escolaridade em especial. No primeiro semestre de 2014, lecionou no primeiro ano. Entretanto, o professor de matemática que lecionava na turma participante da pesquisa conseguiu uma redistribuição para um outro *Campus*, acarretando uma nova divisão de turmas no final do 3º bimestre. Para não sobrecarregar os professores de matemática resolveu-se distribuir as turmas de maneira que a divisão de aulas fosse justa para os professores de matemática do *Campus* Bom Jesus, dessa forma, o professor-pesquisador assumiu uma turma de 3ºano de Agropecuária.

Primeiramente, pretendia-se inserir vetores no 1º ano, boa parte do conteúdo de funções já havia sido ministrada, os alunos já estavam na metade do 2º semestre de 2014. Além do que, no primeiro dia de aula com a turma participante da pesquisa, verificou-se que o professor anterior havia trabalhado o tópicos de Geometria Analítica sem vetores e os demais conteúdos previstos no planejamento já haviam sido ministrados, entretanto, foi feita uma revisão com exercícios e problemas envolvendo esses conteúdos e percebeu-se que era preciso trabalhar um pouco mais os conteúdos vistos pelos alunos. Optou-se, portanto, por aplicar uma sequência didática com o *software* GeoGebra nessa turma de 3º ano, pois se pretendeu, além de inserir vetores no currículo, avaliar a forma como os alunos resolveriam algumas questões com uso de vetores após a aplicação dessa sequência.

Capítulo 4

A pesquisa

4.1 Metodologia de pesquisa

A partir dos estudos discutidos sobre Tecnologias Digitais e Investigação Matemática, buscou-se uma metodologia que pudesse atender o objetivo geral proposto: favorecer a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio acerca do conteúdo de vetores, com apoio da Tecnologias Digitais. Considerou-se que os procedimentos vinculados a abordagens qualitativas de pesquisa se mostravam adequados a este trabalho.

Para Bogdan e Biklen (1994), cinco principais características identificam uma investigação de natureza qualitativa:

- *Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*;
- *A investigação qualitativa é descritiva*;
- *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*;
- *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva*;
- *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.*

A pesquisa qualitativa também é chamada de naturalística, com o foco no indivíduo ou grupo de participantes. É baseada na interpretação e análise do discurso. Pressupõe o contato direto e citações são frequentemente usadas. Os dados da realidade são importantes. O interesse do pesquisador em relação a um determinado problema reside nas atividades e nos procedimentos e interações pesquisador-pesquisado. Nesses estudos, consideram-se os diferentes pontos de vistas dos participantes. A narrativa é valorizada nesse tipo de pesquisa. (BOGDAN; BIKLEN, 1994)

4.1.1 Pesquisa-ação

De acordo com as características desta pesquisa, acredita-se que a pesquisa-ação é pertinente como metodologia para este trabalho.

> A pesquisa ação é aquela que, além de compreender, visa intervir na situação, com vistas a modificá-la. O conhecimento visado articula-se a uma finalidade intencional de alteração da situação pesquisada. Assim, ao mesmo tempo que realiza um diagnóstico e a análise de uma determinada situação, a pesquisa-ação propõe ao conjunto de sujeitos envolvidos mudanças que levem a um aprimoramento das práticas analisadas.(SEVERINO, 2007, p. 120)

Para Fiorentini e Lorenzato:

> Trata-se de um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa. Ou seja, a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas em sua própria transformação, gerando novas situações de investigação.(FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 112)

E que, segundo Carr, Kemmis e Elliont *apud* (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 113), "para o caso da investigação escolar entendem que os professores devem eles próprios, constituir-se como pesquisadores de sua prática(podendo ter ou não um auxiliar externo: o professor pesquisador-universitário)."

A respeito da validação dos dados em uma pesquisa qualitativa, Dambrósio (2012) ressalta que ela não é tão direta quanto na pesquisa quantitativa, pois é influenciada por critérios subjetivos, mas que possui um bom grau de rigor. E que "a análise dos dados depende de uma fundamentação teórica que, obviamente, depende do pesquisador e de suas interpretações."

4.2 Procedimentos metodológicos

A partir da breve orientação metodológica mencionada, elaborou-se uma sequência didática de aulas no Laboratório de Informática e na sala de aula, com ênfase na utilização do *software* GeoGebra. Foram 16 aulas no total, distribuídas da seguinte forma: 8 aulas no laboratório de informática, 4 no *micródromo* e 4 na sala de aula.

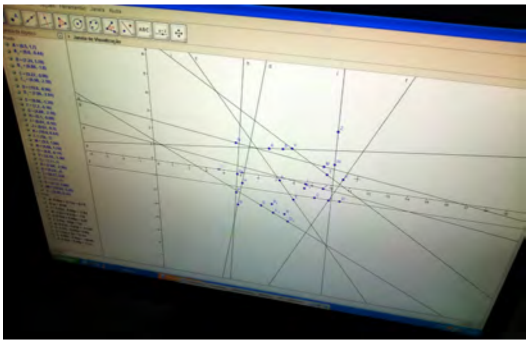
Essa pesquisa foi registrada no Departamento de Pesquisa do *Campus* Bom Jesus. Os alunos (sujeitos da pesquisa) receberam um termo de consentimento esclarecido, pelo qual foram convidados a participar da pesquisa. Os menores de idade encaminharam esse termo para que o responsável o assinasse.

Os 19 alunos da turma foram divididos em nove grupos: A, B, C, D, E, F, G, H e I. Sendo oito grupos de dois e um grupo de três, o grupo I.

Elaborou-se um questionário inicial concernente ao perfil dos alunos quanto ao uso do computador no cotidiano e ao conhecimento sobre vetores que se encontra no apêndice C. Produziu-se uma apresentação em *Powerpoint* com o intuito de mostrar o *software* GeoGebra com as principais ferramentas necessárias ao desenvolvimento das atividades. Isso se fez necessário, pois dos 19 participantes da pesquisa apenas 1 respondeu no Questionário I que já havia manipulado o *software* em aulas de Matemática com algum professor na sua vida escolar. E, a análise do questionário mostrou que 21 % dos alunos da pesquisa disseram que algum professor de matemática no Ensino Médio já utilizou algum *software* na compreensão de algum conceito matemático, sinalizando que o uso de *softwares* em aulas de matemática ainda é incipiente.

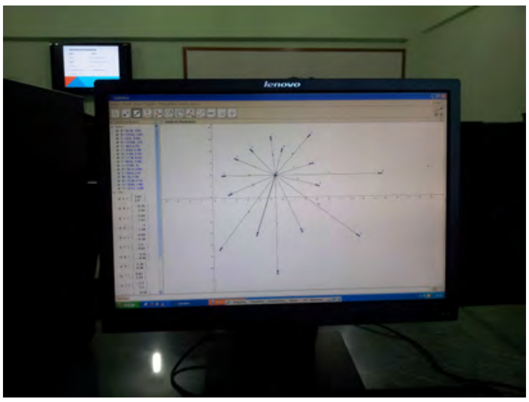
Os alunos se familiarizavam com o GeGebra à medida em que exploravam essas ferramentas de maneira livre. A figura 41 mostra um conjunto de retas criadas pelo grupo E no primeiro dia da pesquisa, momento em que os participantes tiveram o contato inicial com o GeoGebra. Já a figura 42 ilustra um conjunto de vetores criados pelo grupo G.

Figura 41 – Retas criadas pela grupo E



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 42 – Vetores criados pelo grupo G



Fonte: Dados da pesquisa

Foram aplicadas um conjunto de treze questões, denominadas **Questões iniciais**, que se encontram no apêndice B, para verificar como os alunos solucionariam os problemas propostos com o conhecimento prévio que eles possuíam. A partir daí, eles tiveram aulas no Laboratório de Informática, no Micródromo e na sala de aula com cinco atividades pré-elaboradas que foram entregues a eles e que os orientavam para que pudessem construir os conceitos relacionados ao estudo de vetores, manipulando os objetos na tela do GeoGebra, num processo de investigação matemática. E duas atividades, denominadas **Atividades exploratórias**, em sala de aula, caracterizadas por um conjunto de questões com o objetivo de fazer com que os alunos manipulassem os conceitos que foram construídos com o uso do computador. Além disso, o professor-pesquisador e os alunos sistematizaram a teoria dos principais tópicos dos conteúdos que foram abordados nas aulas com o computador ao demonstrar alguns resultados teóricos.

Por fim, após a sequência didática proposta, foram aplicadas as mesmas 13 questões iniciais com o objetivo de verificar se a sequência com o uso do Geogebra favoreceu o uso de vetores por parte dos alunos na resolução de problemas. E, foi enviado o Questionário II contendo duas perguntas que foram elaboradas com o propósito de saber se, na opinião dos alunos, as aulas com o auxílio do GeoGebra facilitaram a aprendizagem do conteúdo e se a sequência de aulas contribuiu a utilização de vetores como ferramentas na resolução de problemas.

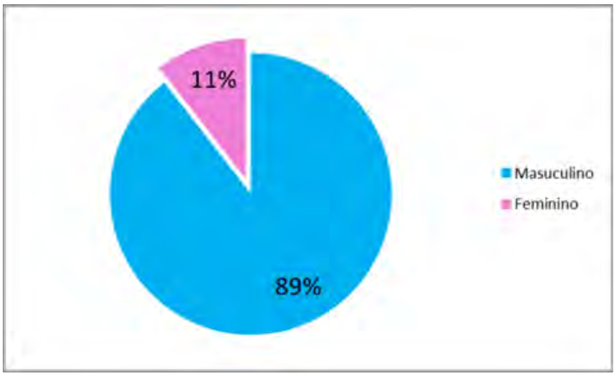
4.3 Análise do questionário I

O primeiro questionário aplicado é composto por 20 itens. A fim de identificar o perfil dos alunos, verificou-se inicialmente a idade, o sexo e a cidade natal dos participantes da pesquisa, nos três primeiros itens dos questionário. Os gráficos 43 e 44 mostram, respectivamente, que 89% dos participantes são do sexo masculino, o que reflete uma característica do Curso de Agropecuária da Instituição e a maioria dos alunos possui idade compatível para o ano de escolaridade em que se encontram. Com exceção de um aluno de 19 anos de idade. A tabela 2 mostra que mais da metade dos alunos da turma nasceu em Bom Jesus do Itabapoana. Os demais alunos ou moram na cidade para estudar no IFF e retornam para as suas cidades natais, geralmente nos fins de semana, ou já moram em Bom Jesus com a família.

Foi perguntado aos sujeitos da pesquisa se já haviam participado de alguma pesquisa referente ao Ensino com algum professor de alguma disciplina em sua vida escolar. Quinze dos dezenove participantes disseram que não. Um integrante da grupo C respondeu que havia participado de uma pesquisa na disciplina técnica de Irrigação, um outro integrante da grupo F respondeu ter participado de uma pesquisa na disciplina de Matemática no Ensino Fundamental. Dois integrantes, um do grupo B e um outro do grupo C, responderam ter participado de uma pesquisa na disciplina de Olericultura[1],o que mostra que alguns alunos já

[1] A olericultura é o ramo da horticultura que abrange a exploração de um grande número de espécie de plantas, comumente conhecidas como hortaliças e que engloba culturas folhosas, raízes, bulbos, tubérculos e frutos diversos

Figura 43 – Sexo



Fonte: Dados da pesquisa

tiveram contato com pesquisa, como sujeitos participantes dela.

Figura 44 – Idade

Fonte: Dados da pesquisa

Optou-se por investigar o uso do computador no cotidiano do aluno em casa e na escola, para analisar o perfil dos sujeitos com relação as TD, porque se pretendeu verificar como o computador pode favorecer a construção do conhecimento acerca de vetores durante a pesquisa.

Os dados do gráfico 45 revelaram que 68% dos sujeitos da pesquisa possuem computador em casa com acesso a internet. O gráfico 46 revelou que 42% utilizam sempre o computador em casa, 26% utilizam o computador as vezes e que 32% nunca utilizam o computador em casa, note que 32% não possuem computador em casa como indica o gráfico 45.

Outro ponto analisado foi concernente à predominância no uso dos recursos computacionais mais comuns existentes hoje. A tabela 2 mostra os que são mais utilizados por quem possui computador em casa com internet. Havendo uma prevalência por: editor de texto, redes sociais, *software* de navegação e jogos. Observe que é raro a utilização de algum *software* educacional.

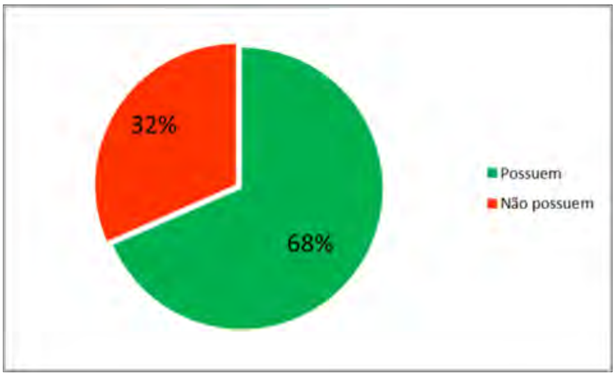
Com intuito de saber sobre a utilização do computador com o propósito de estudo, foi

Tabela 1 – Cidade Natal dos participantes da pesquisa

Cidade Natal	Frequência
Bom Jesus do Itabapoana	11
Cabo Frio	1
Cachoeiro do Itapemirim	1
Divino	1
Manhumirim	1
Rio de Janeiro	1
São João de Mereti	1
São Paulo	1
Vitória	1

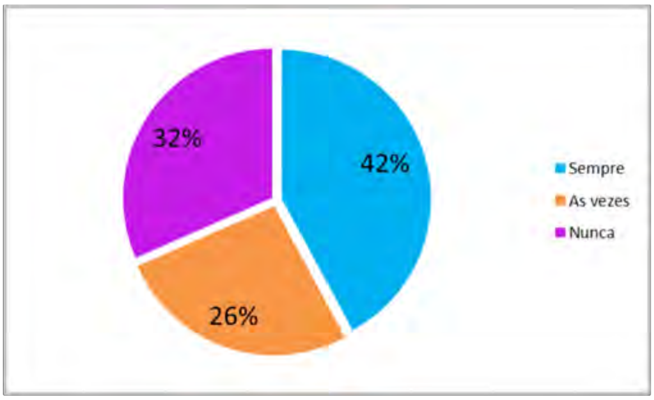
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 45 – Computador em casa com acesso a internet



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 46 – Frequência de uso do computador em casa



Fonte: Dados da pesquisa

feita a seguinte pergunta no item 9 do questionário: você utiliza o computador para estudo? Dos 19 alunos o gráfico 47 mostra que 53% utilizam às vezes o computador para esse fim, 47% o utilizam sempre. Sendo que nenhum participante nunca o utiliza para estudo.

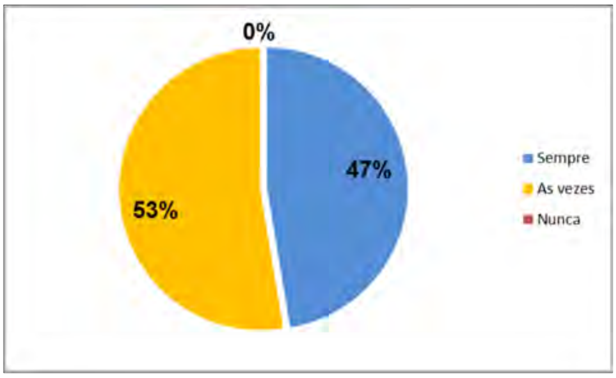
A tabela 3 apresenta em forma de frequência simples relativa (em porcentagem) as

Tabela 2 – Recursos mais utilizados no computador em casa

Recursos	Frequência
Editor de texto	11
Software educacional	1
Planilha de cáculo	2
Redes sociais	10
Software de apresentação	3
Software de navegação	11
Jogos	10
Outros	5

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 47 – Utilização do computador para estudo



Fonte: Dados da pesquisa

respostas sobre como os alunos se auto-avaliam quanto ao domínio no uso dos computadores. E revela que 5% possuem um domínio ruim sobre o computador. Quase 50% possuem um domínio regular sobre a máquina. E que 26% têm um domínio bom, 21% têm um domínio muito bom sobre o uso do computador. Esses dados indicam que esses estudantes dominam de forma positiva o uso do computador, que favoreceu a utilização do *software* na pesquisa, não havendo problemas sérios quanto ao uso/operacionalização do computador.

Tabela 3 – Domínio no uso do computador

Respostas	Frequência (%)
Ruim	5
Regular	48
Bom	26
Muito bom	21
Excelente	0
Total	100

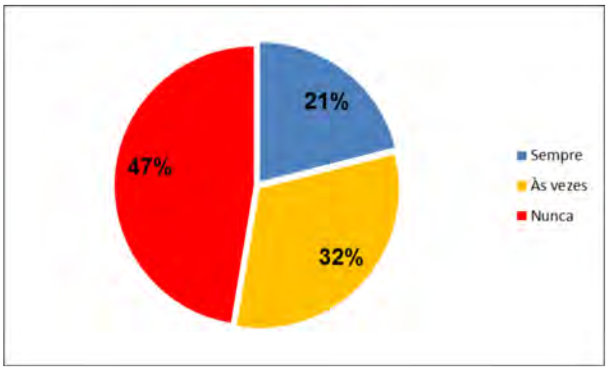
Fonte: Dados da pesquisa

Nos itens de 11 a 15 do questionário, avaliou-se a presença da Informática no ambiente escolar da turma participante da pesquisa. No item 11 verificou-se a frequência de utilização do micródromo; 21% dos alunos sempre utilizam o micródromo para estudo, 32% às vezes o utilizam e 47% nunca o utilizam, como mostra o gráfico 48.

No item 12, verificou-se se o laboratório de informática da Instituição era utilizado por algum professor de outra disciplina, exceto a disciplina de Informática; todos os participantes responderam que em nenhuma disciplina eles tiveram aula no laboratório de informática.

Outra questão foi saber se eles já haviam manipulado algum *software* nas aulas de Matemática no Ensino Médio. Apenas um integrante da dupla E respondeu que já havia manipulado o GeoGebra.

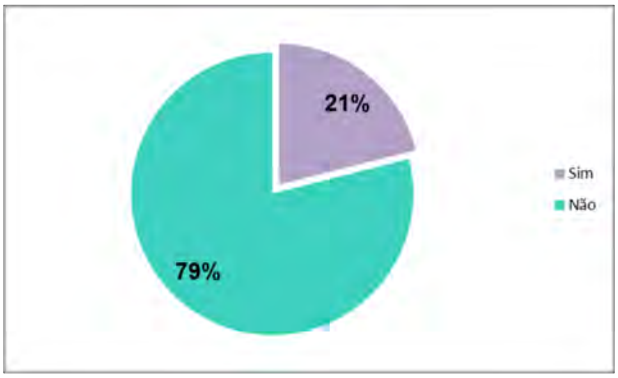
Figura 48 – Utilização do micródromo para estudo



Fonte: Dados da pesquisa

Ainda sobre a utilização de *software* nas aulas de matemática, procurou-se averiguar se, algum professor que os alunos tiveram já utilizou algum *software*, como um recurso auxiliar na construção do conhecimento. O gráfico 49 mostra que 79% dos alunos responderam negativamente a essa questão. Já 21% disseram que sim. Desses, 3 alunos responderam que isso ocorreu no 2° ano do Ensino Médio e 1 aluno disse que isso ocorreu no 1° ano.

Figura 49 – Utilização de algum software nas aulas de matemática por algum professor

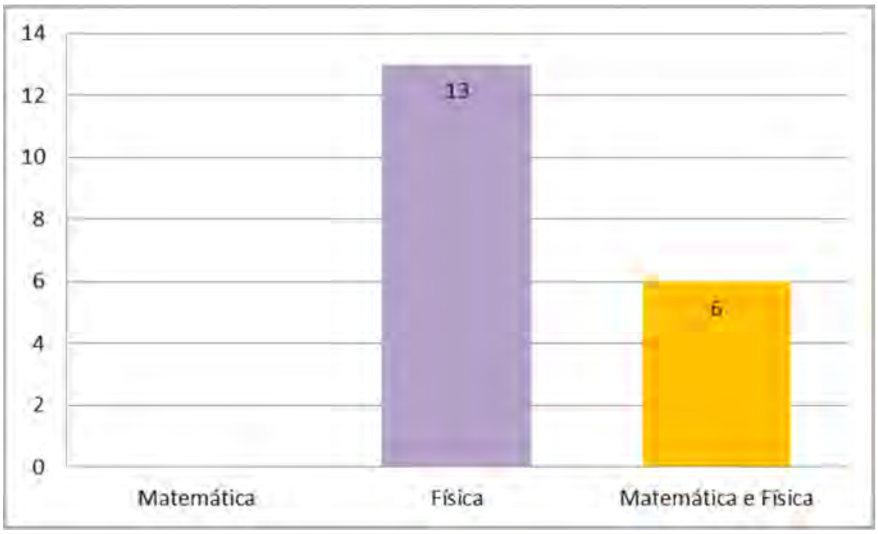


Fonte: Dados da pesquisa

A última parte do questionário foi reservada para verificar o contato que os alunos têm ou tiveram com vetores; em que ano aconteceu, se consideram vetor um ente da matemática e/ou da física e se tiveram dificuldades em compreender o uso dos vetores em Física.

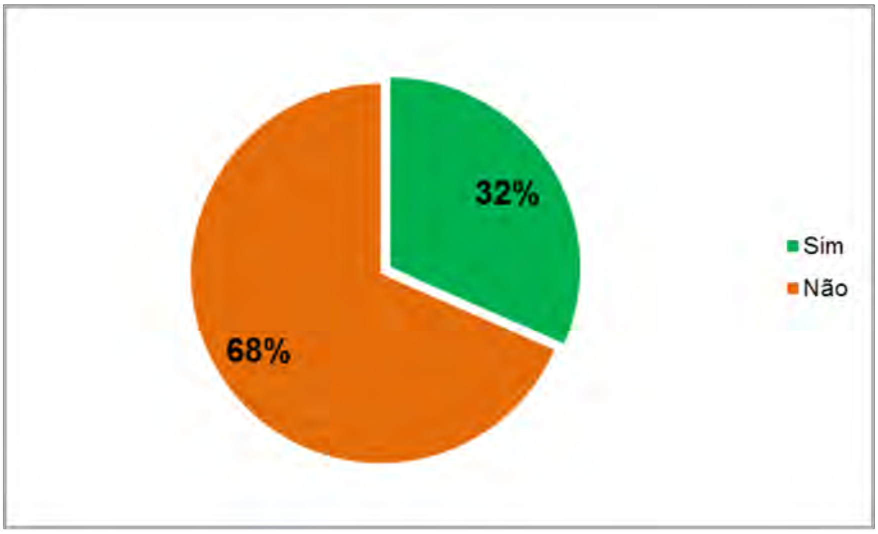
O gráfico de barras 50 mostra que 6 dos 19 alunos consideram vetor um ente da Matemática e da Física e 13 alunos o consideram como um ente da Física. Nenhum o considera como um ente apenas da Matemática. Já o gráfico 51 aponta que 32% dos alunos tiveram dificuldades em compreender o uso dos vetores na Física.

Figura 50 – Vetor como ente da Matemática ou da Física



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 51 – Dificuldade em compreender o uso de vetores na Física



Fonte: Dados da pesquisa

4.4 Questões iniciais

As questões iniciais foram selecionadas para verificar quais conhecimentos os alunos mobilizaram para resolver questões sobre o módulo de vetores, a representação do vetor soma e o vetor diferença, a componente do vetor peso de um bloco sobre um plano inclinado, a representação de um vetor resultante, a condição de alinhamento de três pontos, a equação da reta, a classificação de triângulos quanto ao ângulo, o ângulo entre duas retas, as coordenadas dos vértices de um retângulo num plano cartesiano, o ângulo entre as diagonais de um trapézio isósceles e sobre um teorema da Geometria que diz que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade, em situações ora diretas ora indiretas. Estas questões encontram-se no apêndice B deste trabalho.

Estas 13 questões foram apresentadas aos nove grupos para que tentassem resolvê-las em 80 min no laboratório de informática. Os alunos resolveram as questões de acordo com os conhecimentos que possuíam, sem o auxílio da calculadora. O papel do professor-pesquisador, neste momento, foi apenas aplicar as questões propostas. Porém, surgiram dúvidas, alguns grupos não compreenderam certos conceitos tais como módulo e pontos colineares, por exemplo; nessa situação, interveio-se de maneira a clarificar as ideias subjacentes.

O quadro 4.1 mostra os objetivos de cada uma das questões propostas aos sujeitos da pesquisa. Já a tabela que se encontra no Apêndice D deste trabalho apresenta detalhadamente o resultado alcançado pelos participantes em cada item. Todos os alunos compareceram a aula.

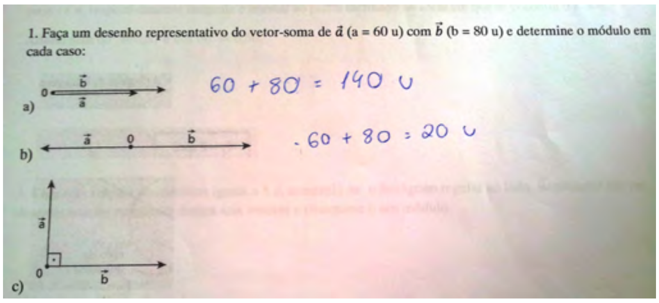
Quadro 4.1 – Objetivos das questões

Questões	Objetivos
1	Representar geometricamente o vetor soma e diferença e determinar o módulo.
2	O mesmo objetivo da questão 1, porém no plano quadriculado.
3	Determinar a componente do vetor peso.
4	Representar geometricamente o vetor resultante a partir de uma figura dada.
5	Representar no plano cartesiano o vetor resultante.
6	Determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos.
7	Verificar se três pontos dados são colineares.
8	Classificar um triângulo quanto aos ângulos no plano cartesiano.
9	Determinar o ângulo entre duas retas.
10	Determinar as coordenadas dos vértices de um retângulo no plano cartesiano.
11	Determinar a coordenada de um triângulo retângulo.
12	Determinar o ângulo entre as diagonais de um trapézio isósceles.
13	Demonstrar o teorema da base média de um triângulo.

Fonte: Elaboração própria

Analisando as resoluções dos grupos e a tabela Questões iniciais do Apêndice D, observou-se que na questão 1 composta pelos itens a, b e c, cinco grupos conseguiram representar o vetor-soma e determinar o seu módulo nos item a; quatro grupos representaram corretamente, seis calcularam o módulo de maneira certa. A figura 52 mostra o registro feito pela grupo F, que apresentou apenas o módulo do vetor-soma.

Figura 52 – Solução dos itens a e b pela grupo F



Fonte: Dados da pesquisa

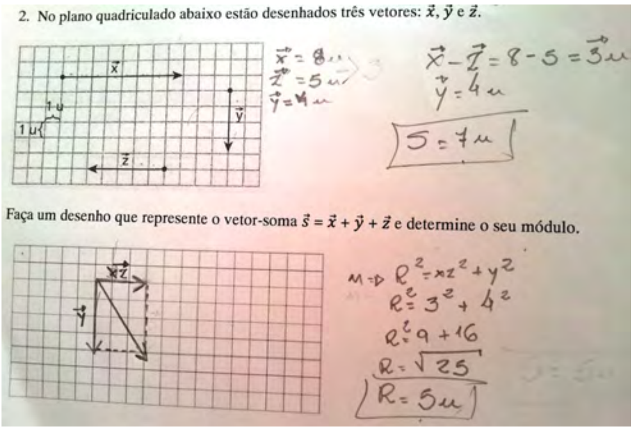
Apenas o grupo C representou e calculou corretamente o vetor soma no caso em que as componentes formavam um ângulo de 90°, utilizando o Teorema de Pitágoras. Esse fato pode ser justificado, pois um integrante da dupla C perguntou:

Grupo C: *"posso utilizar o Teorema de Pitágoras, professor?"*

Professor: *"sim! Podem usar qualquer resultado que vocês já conhecem para resolver a questão."*

Sobre a questão 2, a situação se mostra preocupante, pois de todos os grupos apenas o grupo C apresentou uma solução correta, como mostra a figura 53.

Figura 53 – Solução da questão dois do grupo C

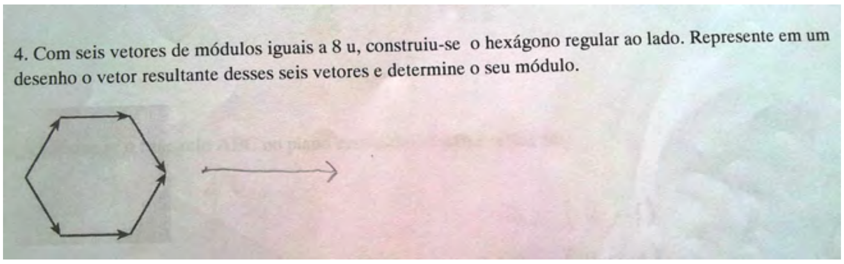


Fonte: Dados da pesquisa

A questão 3 foi anulada, já que verificou-se que o tempo para a resolução das 13 questões se mostrou escasso e principalmente porque não foi explorado com o uso do *software* a projeção de um vetor sobre outro.

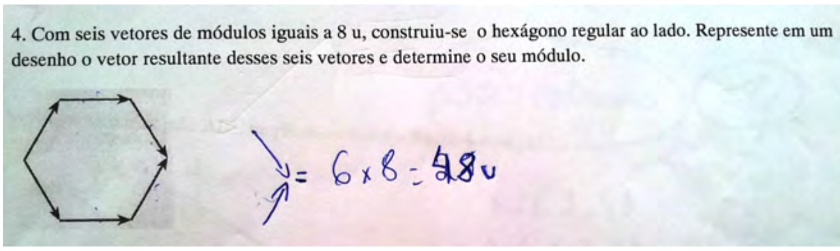
Na questão 4, foi solicitado aos grupos que desenhassem o vetor resultante e determinassem o seu módulo, a partir de uma configuração de vetores dada. Apenas dois grupos esboçaram uma resolução para a questão, mas não alcançaram o objetivo da mesma. O grupo E indicou o vetor resultante dos vetores dados, com uma seta para a direita, como uma das diagonais do hexágono, e não apresentou o módulo do vetor resultante. A figura 54 mostra a solução do grupo. Pode-se supor que o grupo se recordou da soma de vetores visto em Física, no entanto a resolução não foi completa. Já o grupo H, que apresentou a solução mostrada na figura 55, não representou por um desenho o vetor pedido e incorreu no erro, ao calcular o módulo do vetor resultante, de multiplicar o módulo de cada vetor que é 8 u por 6 resultando em 48 u.

Figura 54 – Solução da questão quatro do grupo E



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 55 – Solução da questão quatro do grupo H



Fonte: Dados da pesquisa

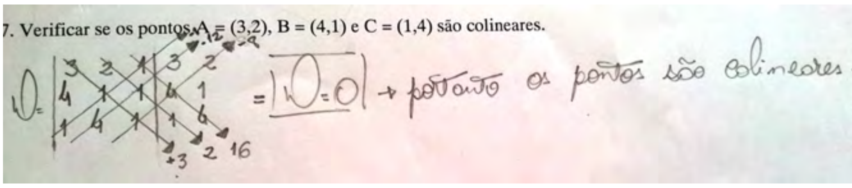
Na questão 5, foi solicitado aos grupos que representassem num plano cartesiano com uma malha quadriculada o vetor resultante $\vec{R} = 2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$. Nessa questão, nenhum grupo apresentou algum resultado.

A questão 6 foi anulada durante a aplicação final dessas questões, após a sequência didática proposta, motivada pelo fato de não ter sido explorado a contento a equação paramétrica da reta originada a partir da ideia de vetores múltiplos, devido ao pouco tempo disponível, pois os alunos já estavam em um período de provas semestrais, que na ocasião foram antecipadas, com a mudança no calendário escolar.

O intuito na questão 7 foi o de verificar se 3 pontos dados são colineares ou não. Apenas um grupo resolveu a questão utilizando conhecimentos de Geometria Analítica como mostra a figura 56.

Na questão 8 havia um triângulo ABC desenhado no plano cartesiano, cujas coordenadas dos vértices A, B e C poderiam ser lidas e os grupos tiveram que verificar se o triângulo era retângulo. Apenas o grupo C apresentou uma solução utilizando a fórmula da distância entre

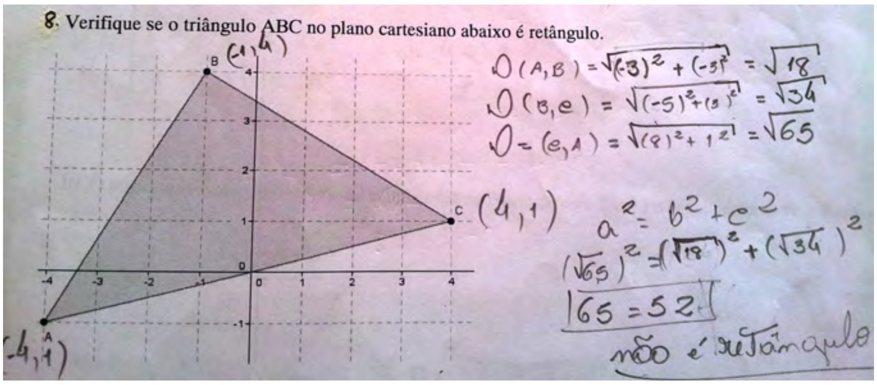
Figura 56 – Solução da questão sete do grupo C



Fonte: Dados da pesquisa

dois pontos, calculando o comprimento dos lados do triângulo e verificou se os três valores encontrados obedeciam a relação de Pitágoras. Como, pelos cálculos deles, os valores não obedeciam a relação, concluíram que o triângulo não era retângulo. Entretanto, eles cometeram um deslize inicial ao escrever as coordenadas do ponto A como sendo $(-4, 1)$, mas as coordenadas corretas são $(-4, -1)$. A figura 57 mostra a solução do grupo. Portanto, nenhum grupo alcançou o objetivo proposto desta questão.

Figura 57 – Solução da questão oito do grupo C



Fonte: Dados da pesquisa

A questão 9 foi anulada, visto que no decorrer das aulas não foi possível explorar a equação da reta como um todo, pois o tempo se tornou escasso.

Na questão 10, havia um retângulo ABCD desenhado no plano cartesiano, sendo que as coordenadas de três dos quatro vértices foram fornecidas. O objetivo era determinar as coordenadas do 4° vértice D. Todos os grupos, com exceção do grupo I , perceberam de modo intuitivo que o vértice D tem coordenadas $D = (6, 1)$, mas não apresentaram um raciocínio que justificasse o resultado, por isso nenhum grupo alcançou o objetivo esperado para a questão.

Por fim, nenhum grupo resolveu as questões 11, 12 e 13, cujos objetivos eram, respectivamente, determinar as coordenas de um dos vértices de um triângulo retângulo, o ângulo entre as diagonais de um trapézio isósceles e mostrar que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Assim que começou a resolver as questões, o grupo D perguntou:

Grupo D: *"é para utilizarmos os software para resolvermos as questões?"*

Professor: *"não! Vocês irão resolver as questões propostas com o conhecimento que vocês já possuem."*

Um dos grupos entrou na internet para pesquisar como se resolvia uma das questões. Foi quando interveio-se pedindo para que desligassem o computador. Isso aconteceu pois estavam no Laboratório de informática. Os próprios alunos consideraram que o tempo de aplicação dessas 13 questões deveria ser maior.

4.5 Análise da sequência didática

Nesta seção, encontram-se os resultados obtidos no estudo realizado pelos nove grupos nass atividades que foram aplicadas e que se encontram no Apêndice A. Analisou-se a forma como os participantes trabalham em grupo, como utilizam a tecnologia; identificaram-se as dificuldades e facilidades reveladas pelos participantes.

As opiniões sobre os resultados apresentados neste capítulo são fundamentadas pelos registros de observação individuais feitas pelo professor por meio do diário de campo e pelas atividades resolvidas pelos alunos.

Examinou-se cada uma das sete atividades que fazem parte da sequência didática sobre vetores, que foram aplicadas no laboratório de informática, no micródromo e na sala de aula. Cinco atividades representam o conteúdo de vetores que podem ser abordados no 3° ano do Ensino Médio em Geometria Analítica. As outras duas representam exercícios e problemas que envolvem o conteúdo abordado, para também diagnosticar como os alunos estavam se desenvolvendo em relação ao conteúdo de vetores após a experiência com o *software*.

4.5.1 Atividade I

O objetivo desta primeira atividade em relação ao conteúdo é de utilizar o GeoGebra para construir um paralelogramo, pois a segunda atividade trata de segmentos equipolentes e para que dois segmentos AB e CD sejam equipolentes é necessário que o ABDC seja um paralelogramo. Essa atividade é uma adaptação da construção de um paralelogramo retirada do livro Aprendendo Matemática com o software GeoGebra de Araújo e Nóbriga (2010, p.61).

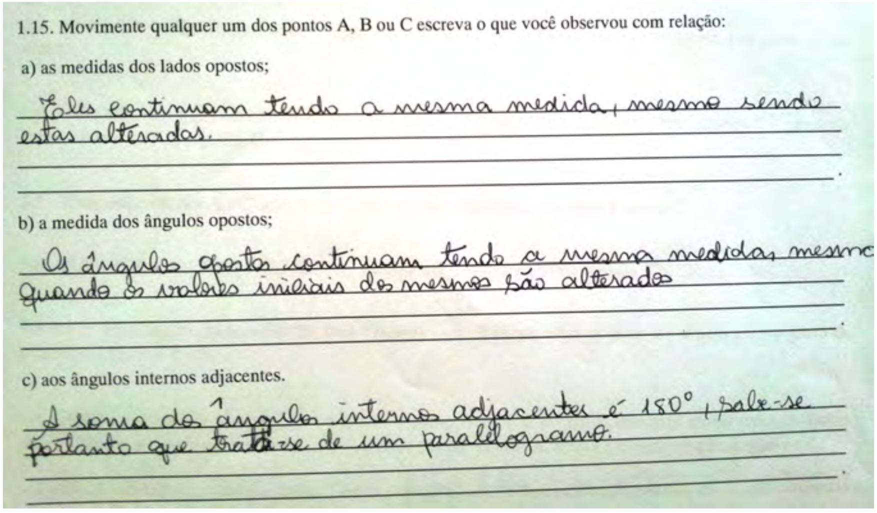
A atividade é composta de 17 itens que levam o aluno a construir o paralelogramo e analisar as propriedades inerentes a ele, tal como ocorre no item 1.15 letra a, com o qual os grupos observaram o que acontece com as medidas dos lados opostos do paralelogramo ao movimentar um dos vértices. Perceberam, por exemplo, que os lados opostos do paralelogramo têm a mesma medida. Os alunos manipularam o *software* e fizeram as suas próprias considerações.

Essa atividade foi realizada no segundo dia de pesquisa, a primeira após apresentação dos principais ícones do programa. No início notou-se que alguns grupos estavam meio perdidos na localização das ferramentas necessárias para a execução da atividade. Então o professor interveio, mostrando onde encontrá-las no GeoGebra, para isso utilizou o notebook conectado a TV. Acredita-se que isso ocorreu naturalmente, porque os alunos não estavam habituados com o programa. Por exemplo, alguns grupos não encontraram a ferramenta Interseção de Dois Objetos. Como o grupo C já havia concluído os oito primeiros itens da atividade, solicitou-se que este grupo auxiliasse os demais. O que foi feito com muito entusiasmo pelos integrantes do mesmo.

Passado esse momento inicial, a aula transcorreu bem. O grupo F terminou a atividade sem a intervenção do professor. O interesse foi aumentando à medida em que eles foram se acostumando com as ferramentas do programa. Solicitou-se que os alunos expusessem o que aprenderam, a que resultados chegaram, que propriedades sobre paralelogramo perceberam ao manipular o GeoGebra. Apresentaram uma certa dificuldade, no entanto, ao passo que utilizavam o *software* e com algumas explicações e intervenções do professor, eles foram adquirindo confiança. Perguntei se eles perceberam o real intuito das questões. O grupo D respondeu: construir um paralelogramo. Já o grupo C respondeu: explorar as propriedades do paralelogramo. O grupo F terminou a atividade de forma ligeira, sem o apoio do professor. Então, verificou-se que eles haviam respondido aos questionamento de forma pertinente, demonstrando não ter dificuldade no uso do *software*, concluindo a atividade satisfatoriamente.

As figuras 58 e 59 destacam as conclusões a que os grupos B e G chegaram sobre as medidas dos lados opostos, dos ângulos opostos e dos ângulos adjacentes de um paralelogramo. Percebeu-se que nos itens a e b, as duplas B e G chegaram ao resultado esperado, porém no item c, o grupo B concluiu corretamente que a soma dos ângulos adjacentes de um paralelogramo é igual a 180°, mas o grupo G chegou a uma conclusão incompleta. Posteriormente, foi preciso mostrá-los que o correto foi o que o grupo G e os outros grupos conseguiram perceber.

Figura 58 – Conclusões do item 1.15 do grupo B



1.15. Movimente qualquer um dos pontos A, B ou C escreva o que você observou com relação:

a) as medidas dos lados opostos;

Eles continuam tendo a mesma medida, mesmo sendo estas alteradas.

b) a medida dos ângulos opostos;

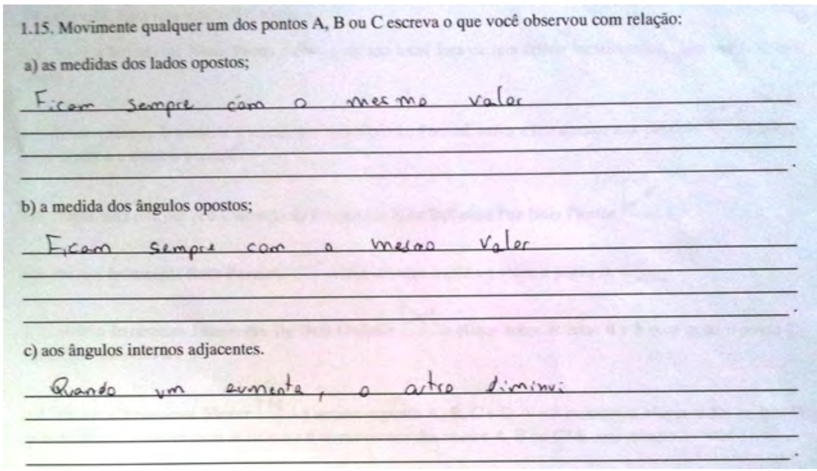
Os ângulos opostos continuam tendo a mesma medida, mesmo quando os valores iniciais dos mesmos são alterados

c) aos ângulos internos adjacentes.

A soma dos ângulos internos adjacentes é 180°, sabe-se portanto que trata-se de um paralelogramo.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 59 – Conclusões do item 1.15 do grupo G



1.15. Movimente qualquer um dos pontos A, B ou C escreva o que você observou com relação:

a) as medidas dos lados opostos;

Ficam sempre com o mesmo valor

b) a medida dos ângulos opostos;

Ficam sempre com o mesmo valor

c) aos ângulos internos adjacentes.

Quando um aumenta, o outro diminui

Fonte: Dados da pesquisa

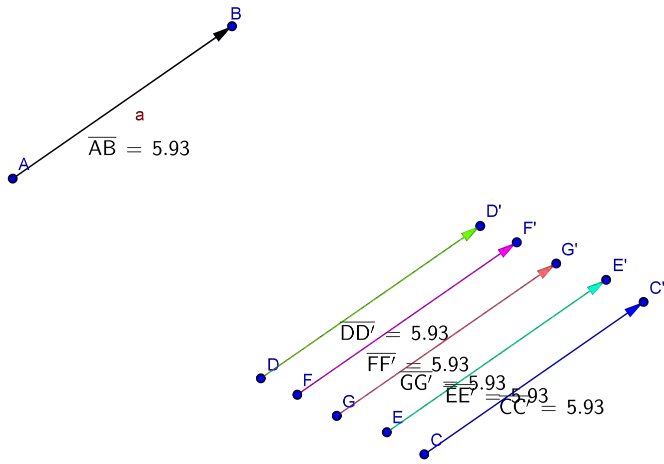
4.5.2 Atividade II

O objetivo desta atividade é conduzir os alunos a construírem de forma investigativa os conhecimentos necessários à definição de segmentos equipolentes, vetor e suas coordenadas.

Nos itens 2.1 a 2.3 os alunos criaram segmentos orientados de mesma direção, sentido e módulo, caracterizando os segmentos equipolentes. Os grupos perceberam que ao movimentar o segmento orientado AB, os outros segmentos criados por eles, mantiveram as características de AB, isto é, que os segmentos orientados equipolentes a AB possuem a mesma direção, sentido e módulo que o segmento AB. Isso ficou mais claro no item 3 quando ativaram a ferramenta (Distância, Comprimento ou Perímetro) e determinaram o comprimento de cada segmento.

Pediu-se aos participantes que utilizassem a ferramenta (Reta) para traçar as retas que indicam a direção de cada segmento orientado e, que após a realização da atividade, fosse enviado o arquivo por *e-mail*. Alguns grupos enviaram-no com as retas, outras não. O grupo E o enviou sem as retas suportes, como mostra a figura 60.

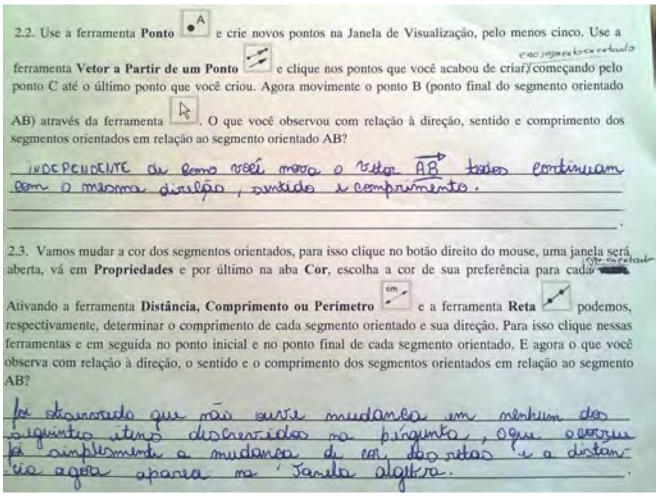
Figura 60 – Segmentos equipolentes a AB gerado pelo grupo E



Fonte: Dados da pesquisa

As figuras 61 e 62 mostram as soluções dos itens 2.2 e 2.3 dos grupos E e B respectivamente. Note que o grupo E respondeu como esperado, pois disse que todos os segmentos possuem a mesma direção, sentido e comprimento. Já o grupo B respondeu que o comprimento dos segmentos "são proporcionais ao comprimento do segmento AB". Esta resposta justifica-se, posto que o aluno ao movimentar o ponto B alterou o vetor $\overrightarrow{AB}$ ao comparar o resultado com o primeiro vetor que ele produziu na tela do computador. Esperava-se, em cada momento, que o grupo analisasse um conjunto de segmentos orientados em relação ao vetor $\overrightarrow{AB}$ na nova posição.

Figura 61 – Grupo E



2.2. Use a ferramenta **Ponto** e crie novos pontos na Janela de Visualização, pelo menos cinco. Use a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** e clique nos pontos que você acabou de criar, e no segmento orientado começando pelo ponto C até o último ponto que você criou. Agora movimente o ponto B (ponto final do segmento orientado AB) através da ferramenta . O que você observou com relação à direção, sentido e comprimento dos segmentos orientados em relação ao segmento orientado AB?

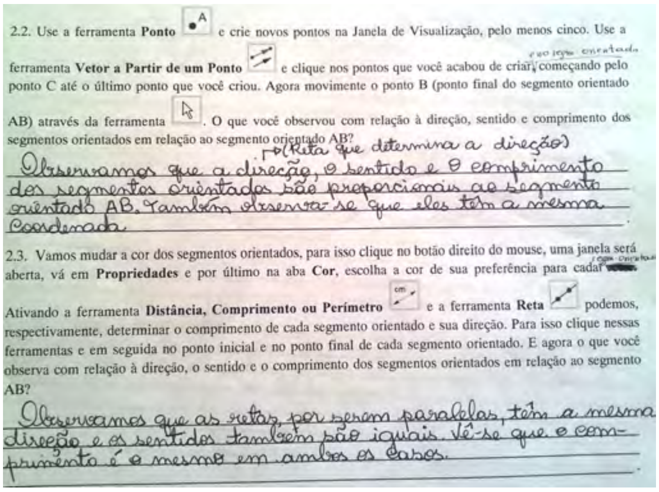
INDEPENDENTE de como você mova o vetor $\overrightarrow{AB}$ todos continuam com o mesmo direção, sentido e comprimento.

2.3. Vamos mudar a cor dos segmentos orientados, para isso clique no botão direito do mouse, uma janela será aberta, vá em **Propriedades** e por último na aba **Cor**, escolha a cor de sua preferência para cada segmento orientado [redacted]. Ativando a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro** e a ferramenta **Reta** podemos, respectivamente, determinar o comprimento de cada segmento orientado e sua direção. Para isso clique nessas ferramentas e em seguida no ponto inicial e no ponto final de cada segmento orientado. E agora o que você observa com relação à direção, o sentido e o comprimento dos segmentos orientados em relação ao segmento AB?

foi observado que não ouve mudança em nenhum dos seguintes itens discrevidos na pergunta, o que ocorreu foi simplesmente a mudança de cor das retas e a distancia agora aparece na Janela algebra.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 62 – Grupo B



2.2. Use a ferramenta **Ponto** e crie novos pontos na Janela de Visualização, pelo menos cinco. Use a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** e clique nos pontos que você acabou de criar, e no segm. orientado começando pelo ponto C até o último ponto que você criou. Agora movimente o ponto B (ponto final do segmento orientado AB) através da ferramenta . O que você observou com relação à direção, sentido e comprimento dos segmentos orientados em relação ao segmento orientado AB?

(Reta que determina a direção)

Observamos que a direção, o sentido e o comprimento dos segmentos orientados são proporcionais ao segmento orientado AB. Também observa-se que eles têm a mesma coordenada.

2.3. Vamos mudar a cor dos segmentos orientados, para isso clique no botão direito do mouse, uma janela será aberta, vá em **Propriedades** e por último na aba **Cor**, escolha a cor de sua preferência para cada seg. orientado [redacted]. Ativando a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro** e a ferramenta **Reta** podemos, respectivamente, determinar o comprimento de cada segmento orientado e sua direção. Para isso clique nessas ferramentas e em seguida no ponto inicial e no ponto final de cada segmento orientado. E agora o que você observa com relação à direção, o sentido e o comprimento dos segmentos orientados em relação ao segmento AB?

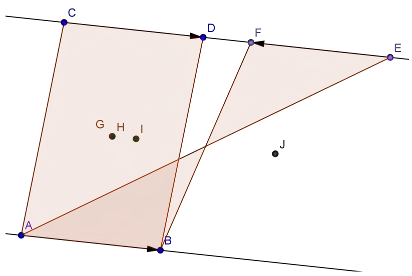
Observamos que as retas, por serem paralelas, têm a mesma direção e os sentidos também são iguais. Vê-se que o comprimento é o mesmo em ambos os casos.

Fonte: Dados da pesquisa

Após os alunos explorarem os itens 2.1, 2.2 e 2.3, registrando suas conclusões, eles expuseram os seus pontos de vista a respeito do assunto tratado, enviaram para o *email* do professor ou salvaram na área de trabalho do computador do laboratório quando a internet estivesse lenta.

Com o objetivo de caracterizar a equipolência de dois segmentos orientados, os alunos seguiram os itens 2.4 a 2.10. Para isso, construíram dois polígonos: um paralelogramo ABDC e um outro polígono ABFE. No primeiro, AB é equipolente a CD; no segundo, AB não é equipolente a EF. A figura 63 ilustra a construção feita pelo grupo E.

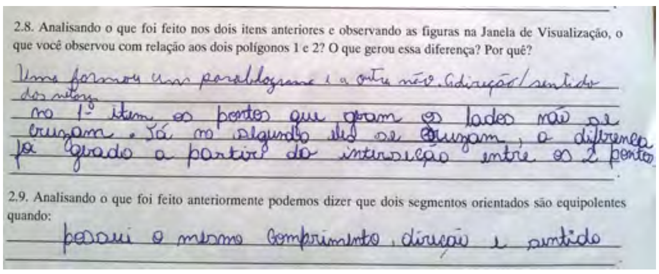
Figura 63 – Construção do grupo E



Fonte: Dados da pesquisa

As figuras 64 e 65 mostram as conclusões do grupo E a respeito dos itens 2.9 e 2.10. Note que este grupo mencionou que o que gera essa diferença é o a direção e o sentido. Mas, na realidade é apenas o sentido dos dois segmentos, pois o grupo, ao seguir os passos anteriores, traçou uma reta paralela a AB, que é uma reta suporte dos segmentos CD e EF, logo, a direção não influenciou na diferença entre os polígonos gerados. Outras duplas responderam que o que gera a diferença entre os polígonos é a interseção dos lados do segundo polígono. Percebeu-se nesse momento, que poucos chegaram a considerações coerentes sobre os segmentos equipolentes, sendo necessária a intervenção do professor. Continuando a atividade, no item 2.10, eles responderam que os pontos médios das diagonais do polígono em questão coincidem quando se trata do paralelogramo, que é outra característica de dois segmentos equipolentes AB e CD quaisquer. Esse fato foi posteriormente demonstrado.

Figura 64 – Item 2.9 do grupo E



2.8. Analisando o que foi feito nos dois itens anteriores e observando as figuras na Janela de Visualização, o que você observou com relação aos dois polígonos 1 e 2? O que gerou essa diferença? Por quê?

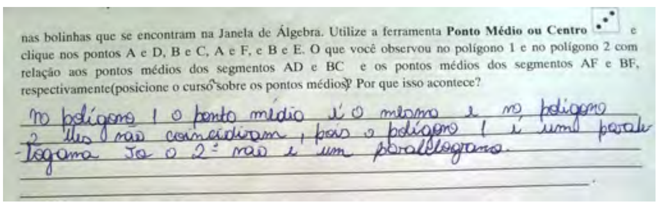
Uma formou um paralelogramo e a outra não. (direção/sentido dos retas) no 1º item os pontos que geram os lados não se cruzam. Já no segundo eles se cruzam, a diferença foi gerado a partir da intersecção entre os 2 pontos

2.9. Analisando o que foi feito anteriormente podemos dizer que dois segmentos orientados são equipolentes quando:

possui o mesmo comprimento, direção e sentido

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 65 – Item 2.10 do grupo E



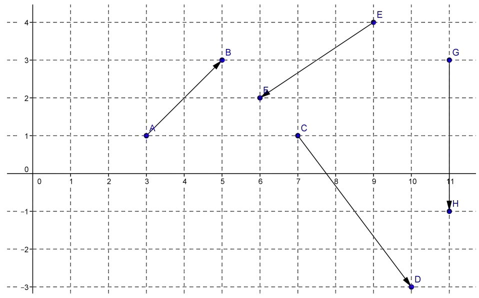
nas bolinhas que se encontram na Janela de Álgebra. Utilize a ferramenta **Ponto Médio ou Centro** e clique nos pontos A e D, B e C, A e F, e B e E. O que você observou no polígono 1 e no polígono 2 com relação aos pontos médios dos segmentos AD e BC e os pontos médios dos segmentos AF e BF, respectivamente(posicione o cursô sobre os pontos médios)? Por que isso acontece?

no polígono 1 o ponto médio é o mesmo e no polígono 2 eles não coincidiram, pois o polígono 1 é um paralelogramo. Já o 2º não é um paralelogramo.

Fonte: Dados da pesquisa

Com o intuito de caracterizar vetor em termos de coordenadas, foram elaborados os itens 2.11 a 2.21. Os alunos criaram quatro vetores na Janela de Visualização com extremidades de coordenadas inteiras, preferencialmente. A figura 66 ilustra os vetores criados pelo grupo B.

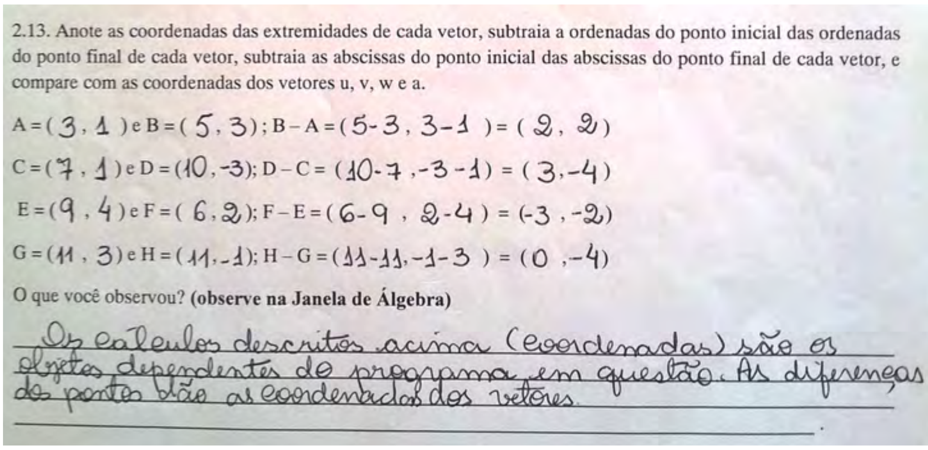
Figura 66 – Vetores do grupo B



Fonte: Dados da pesquisa

Depois, os grupos anotaram as coordenadas das extremidades dos vetores e calcularam a diferença entre essas coordenadas. Com isso, verificaram que as coordenadas dos vetores que aparecem na Janela de Álgebra representam o resultado encontrados por eles. As figuras 67 e 68 mostram as conclusões dos grupos B e H, respectivamente.

Figura 67 – Grupo B



2.13. Anote as coordenadas das extremidades de cada vetor, subtraia a ordenadas do ponto inicial das ordenadas do ponto final de cada vetor, subtraia as abscissas do ponto inicial das abscissas do ponto final de cada vetor, e compare com as coordenadas dos vetores u, v, w e a.

A = (3 , 1) e B = (5 , 3); B − A = (5−3 , 3−1) = (2 , 2)

C = (7 , 1) e D = (10 , −3); D − C = (10−7 , −3 −1) = (3 , −4)

E = (9 , 4) e F = (6 , 2); F − E = (6−9 , 2−4) = (−3 , −2)

G = (11 , 3) e H = (11 , −1); H − G = (11−11 , −1−3) = (0 , −4)

O que você observou? **(observe na Janela de Álgebra)**

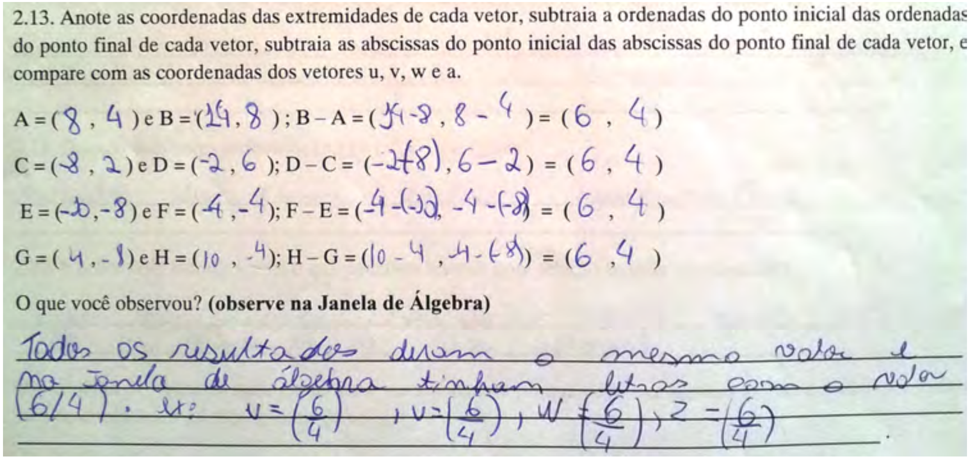
Os calculos descritos acima (coordenadas) são os objetos dependentes do programa em questão. As diferenças dos pontos são as coordenadas dos vetores.

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo B, no item 2.13, concluiu, observando a Janela de Álgebra, que a diferença que eles haviam calculado representava exatamente as coordenadas dos vetores, pois estas são mostradas na Janela de Álgebra. O grupo H curiosamente, por conta própria, utilizou a ferramenta Vetor a partir de um Ponto para criar quatro vetores equipolentes entre si. O que gerou coordenadas iguais para os quatro vetores, como mostra o registro feito pelo grupo, indicado na figura 68.

Em seguida, nos itens 2.14 a 2.17, o objetivo foi fazer com que os alunos percebessem que as coordenadas de um vetor não dependem da sua localização no plano cartesiano. As

Figura 68 – Grupo H



2.13. Anote as coordenadas das extremidades de cada vetor, subtraia a ordenadas do ponto inicial das ordenadas do ponto final de cada vetor, subtraia as abscissas do ponto inicial das abscissas do ponto final de cada vetor, e compare com as coordenadas dos vetores u, v, w e a.

A = (8 , 4) e B = (14, 8) ; B − A = (14-8 , 8 - 4) = (6 , 4)

C = (-8 , 2) e D = (-2 , 6); D − C = (-2+8), 6 − 2) = (6 , 4)

E = (-10,-8) e F = (-4 ,-4); F − E = (-4-(-10), -4 -(-8)) = (6 , 4)

G = (4 , -8) e H = (10 , -4); H − G = (10 - 4 , -4 -(-8)) = (6 , 4)

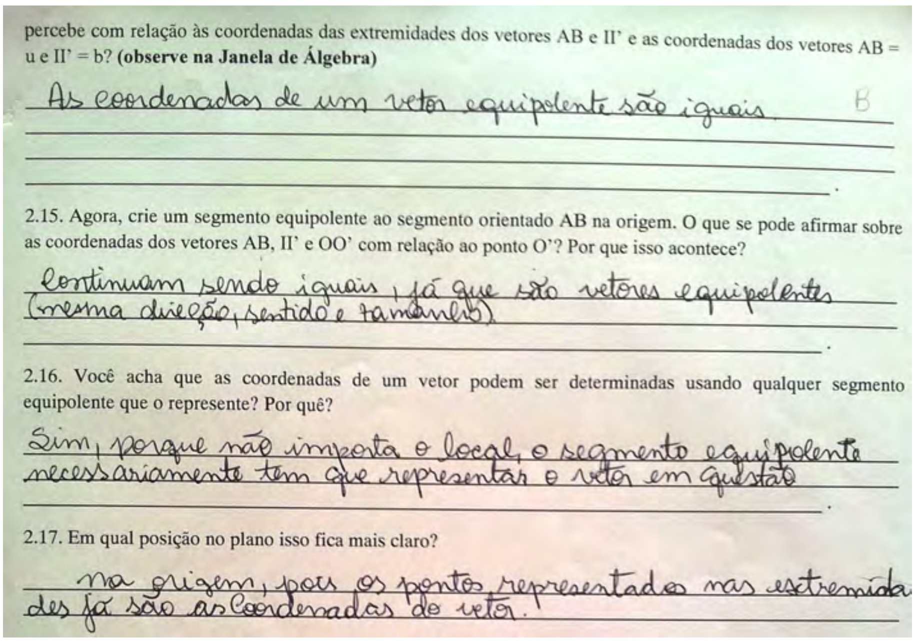
O que você observou? **(observe na Janela de Álgebra)**

Todos os resultados deram o mesmo valor e na Janela de álgebra tinham letras com o valor (6/4). ex: u = (6 4) , v = (6 4), w (6 4), z = (6 4)

Fonte: Dados da pesquisa

figuras 69 e 70 mostram as considerações feitas por eles. Observa-se que o registro do grupo B no item 2.17 comprova esse fato. Eles concluíram, analisando os resultados e os registros na Janela de Álgebra, que ao colocar o vetor na origem, as suas coordenadas ficam claramente determinadas pela extremidade do vetor, e que com isso, podem fazer uma identificação entre pares ordenados, pontos e vetores na origem. Nos itens 2.18 a 2.20, objetivou-se conduzir o aluno a inferir sobre a igualdade de vetores em termos de coordenadas. Sete grupos chegaram a conclusão de que dois vetores são iguais quando possuem coordenadas iguais. Nessa atividade os participantes não apresentaram dificuldades. Já estavam familiarizados com as ferramentas do programa.

Figura 69 – Grupo B



percebe com relação às coordenadas das extremidades dos vetores AB e II' e as coordenadas dos vetores AB = u e II' = b? **(observe na Janela de Álgebra)**

As coordenadas de um vetor equipolente são iguais B

2.15. Agora, crie um segmento equipolente ao segmento orientado AB na origem. O que se pode afirmar sobre as coordenadas dos vetores AB, II' e OO' com relação ao ponto O'? Por que isso acontece?

Continuam sendo iguais, já que são vetores equipolentes (mesma direção, sentido e tamanho)

2.16. Você acha que as coordenadas de um vetor podem ser determinadas usando qualquer segmento equipolente que o represente? Por quê?

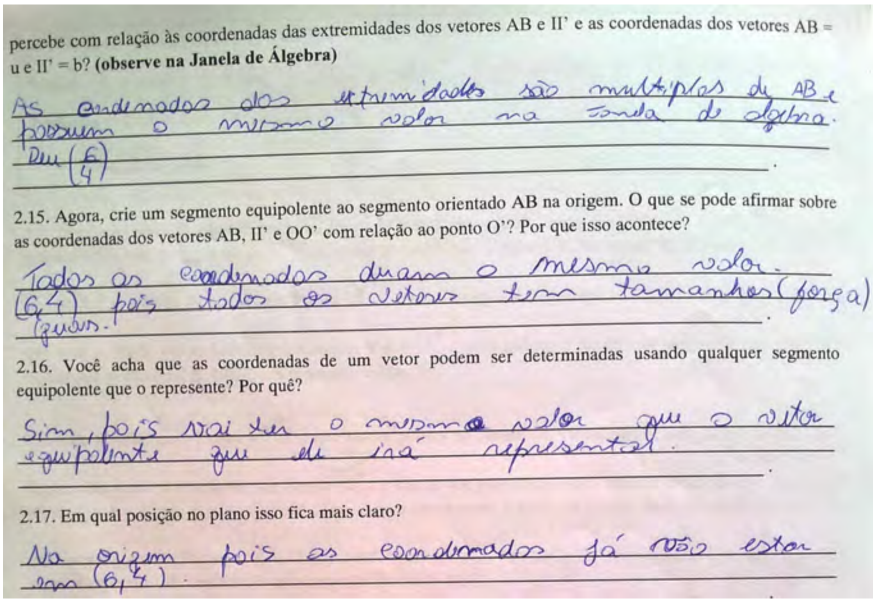
Sim, porque não importa o local, o segmento equipolente necessariamente tem que representar o vetor em questão

2.17. Em qual posição no plano isso fica mais claro?

na origem, pois os pontos representados nas extremidades já são as coordenadas do vetor.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 70 – Grupo H



percebe com relação às coordenadas das extremidades dos vetores AB e II' e as coordenadas dos vetores AB = u e II' = b? **(observe na Janela de Álgebra)**

As coordenadas dos extremidades são multiplos de AB e possuem o mesmo valor na Janela de álgebra. Deu $\binom{6}{4}$

2.15. Agora, crie um segmento equipolente ao segmento orientado AB na origem. O que se pode afirmar sobre as coordenadas dos vetores AB, II' e OO' com relação ao ponto O'? Por que isso acontece?

Todos os coordenadas deram o mesmo valor. (6,4) pois todos os vetores tem tamanhos (força) iguais.

2.16. Você acha que as coordenadas de um vetor podem ser determinadas usando qualquer segmento equipolente que o represente? Por quê?

Sim, pois vai ter o mesmo valor que o vetor equipolente que ele irá representar.

2.17. Em qual posição no plano isso fica mais claro?

Na origem pois os coordenadas já vão estar em (6,4).

Fonte: Dados da pesquisa

4.5.3 Atividade III

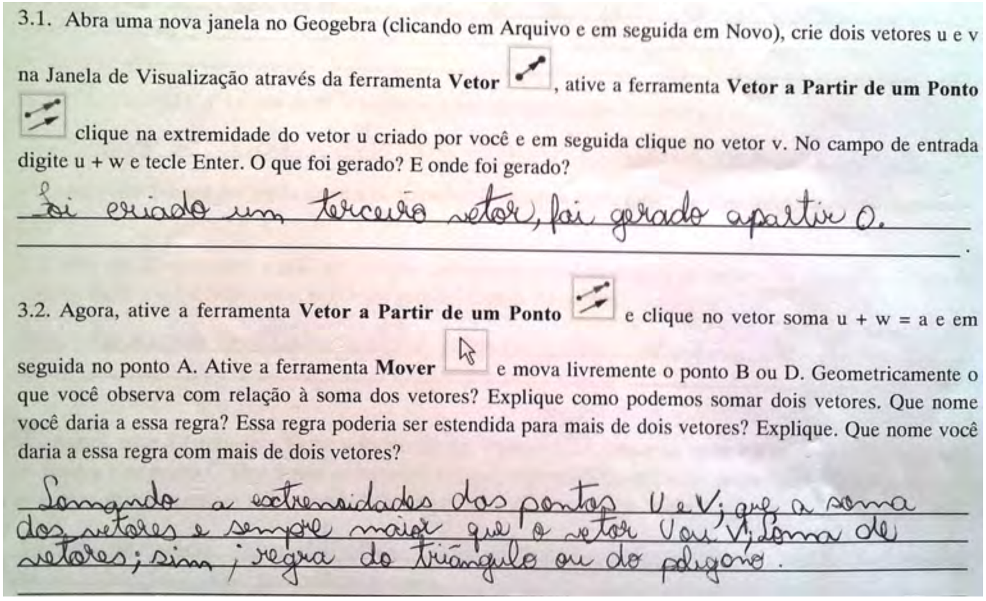
Os objetivos desta atividade foram o de determinar, geometrica e algebricamente, a adição e a subtração de dois vetores e verificar porque podemos subtrair as coordenadas das extremidades de um vetor para determinar suas coordenadas.

Esta a atividade foi realizada no micródromo, já que o Laboratório de informática nem sempre esteve disponível. Os grupos já foram se posicionando e pedindo para iniciarem logo, mostrando muito entusiasmo. Foi solicitado que os participantes seguissem os passos da atividade.

Os itens 3.1 a 3.2 foram feitos com o intuito de conduzir os alunos a enunciarem uma regra para a soma de dois vetores, geometricamente. No item 3.1 foi solicitado aos participantes que criassem dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a partir da ferramenta Vetor, mas alguns grupos utilizaram os primeiros passos da atividade anterior para segmentos orientados. Neste momento o professor interveio dizendo que não eram necessários tais procedimentos e que bastava usar a ferramenta (Vetor), pois os alunos já haviam conceituado vetor. Em seguida, os alunos criaram o vetor w, cópia do vetor v, com a ferramenta Vetor a Partir de um Ponto, digitaram u + w e Enter no Campo de Entrada e criaram o vetor soma na origem. Nenhum grupo teve dificuldade neste momento.

Foi perguntado na atividade qual o nome que eles dariam para a regra da soma de vetores, de acordo com o desenho na tela. O grupo C sugeriu que a regra fosse soma de vetores. Outros grupos disserem regra do triângulo. As figuras 71 e 72 mostram os registros feitos pelos grupos A e E, respectivamente, quanto a soma geométrica de dois vetores.

Figura 71 – Grupo A



3.1. Abra uma nova janela no Geogebra (clicando em Arquivo e em seguida em Novo), crie dois vetores u e v na Janela de Visualização através da ferramenta **Vetor** , ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** clique na extremidade do vetor u criado por você e em seguida clique no vetor v. No campo de entrada digite u + w e tecle Enter. O que foi gerado? E onde foi gerado?

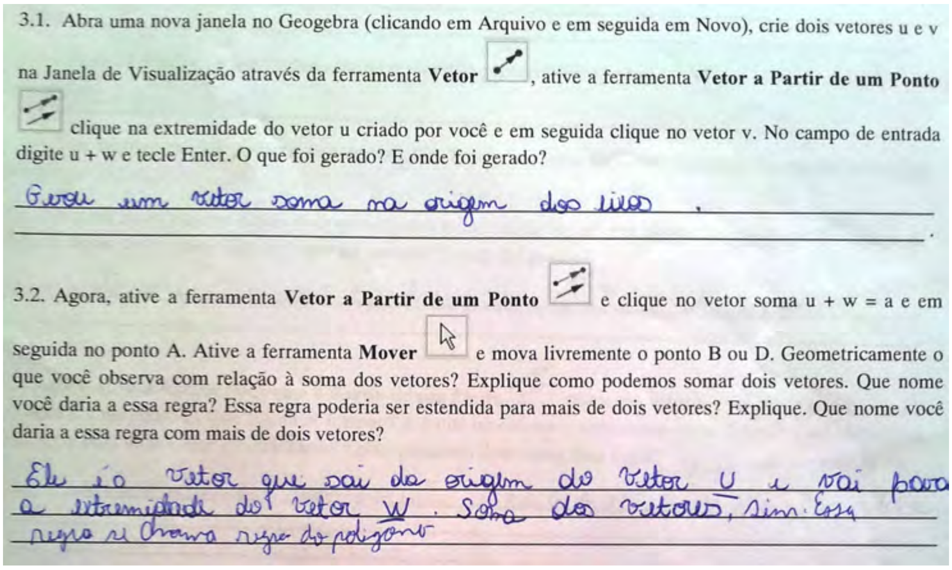
foi criado um terceiro vetor, foi gerado apartir O.

3.2. Agora, ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** e clique no vetor soma u + w = a e em seguida no ponto A. Ative a ferramenta **Mover** e mova livremente o ponto B ou D. Geometricamente o que você observa com relação à soma dos vetores? Explique como podemos somar dois vetores. Que nome você daria a essa regra? Essa regra poderia ser estendida para mais de dois vetores? Explique. Que nome você daria a essa regra com mais de dois vetores?

Somando a extremidades dos pontos U e V; que a soma dos vetores é sempre maior que o vetor U ou V; Soma de vetores; sim; regra do triângulo ou do polígono.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 72 – Grupo E



3.1. Abra uma nova janela no Geogebra (clicando em Arquivo e em seguida em Novo), crie dois vetores u e v na Janela de Visualização através da ferramenta **Vetor** , ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** clique na extremidade do vetor u criado por você e em seguida clique no vetor v. No campo de entrada digite u + w e tecle Enter. O que foi gerado? E onde foi gerado?

Gerou um vetor soma na origem dos eixos.

3.2. Agora, ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** e clique no vetor soma u + w = a e em seguida no ponto A. Ative a ferramenta **Mover** e mova livremente o ponto B ou D. Geometricamente o que você observa com relação à soma dos vetores? Explique como podemos somar dois vetores. Que nome você daria a essa regra? Essa regra poderia ser estendida para mais de dois vetores? Explique. Que nome você daria a essa regra com mais de dois vetores?

Ele é o vetor que sai da origem do vetor U e vai para a extremidade do vetor W. Soma dos vetores, sim. Essa regra se chama regra do polígono

Fonte: Dados da pesquisa

A figura 73 ilustra os vetores criados pelo grupo D.

O item 3.3 abordou as coordenadas do vetor soma. Os alunos preencheram uma tabela utilizando as coordenadas. Nesse momento, precisaram da ajuda do professor para mostrar como deveriam proceder. Orientou-se que exibissem a malha quadriculada e que reposicionassem os pontos A, B, C e D no cruzamento das linhas horizontais e verticais da malha para que as coordenadas fossem números inteiros, pois dessa forma facilitaria a compreensão das coordenadas do vetor soma, mas que eles poderiam colocar os vetores em

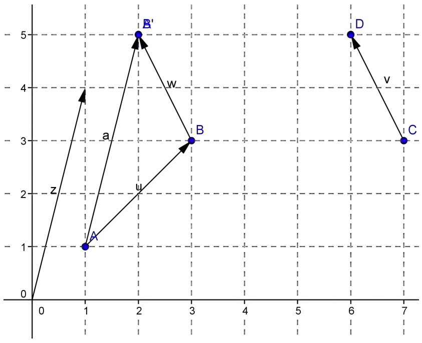
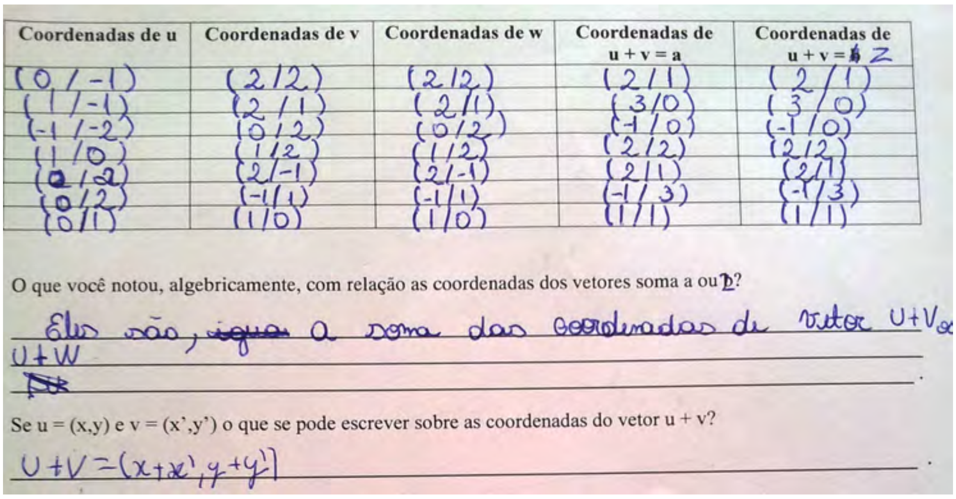


Figura 73 – Vetores do grupo D
Fonte: Dados da pesquisa

qualquer lugar do plano. Essa intervenção foi necessária, pois estavam tendo dificuldades em compreender o objetivo desse item (que era o de investigar como se processa a soma de vetores, algebricamente). Assim, após os esclarecimentos, eles terminaram a atividade sem dificuldades. Gravaram o arquivo na área de trabalho e enviaram por *e-mail*.

As figuras 74 e 75 apresentam as considerações feitas pelas duplas E e I sobre as coordenadas do vetor soma de dois vetores dados, após registrarem as coordenadas dos vetores u, v e w e dos vetores soma a e b, concluindo, a partir da análise da tabela, o resultado esperado.

Figura 74 – Grupo E



Coordenadas de u	Coordenadas de v	Coordenadas de w	Coordenadas de u + v = a	Coordenadas de u + v = ~~b~~ Z
(0 / -1)	(2 / 2)	(2 / 2)	(2 / 1)	(2 / 1)
(1 / -1)	(2 / 1)	(2 / 1)	(3 / 0)	(3 / 0)
(-1 / -2)	(0 / 2)	(0 / 2)	(-1 / 0)	(-1 / 0)
(1 / 0)	(1 / 2)	(1 / 2)	(2 / 2)	(2 / 2)
(2 / 2)	(2 / -1)	(2 / -1)	(2 / 1)	(2 / 1)
(0 / 2)	(-1 / 1)	(-1 / 1)	(-1 / 3)	(-1 / 3)
(0 / 1)	(1 / 0)	(1 / 0)	(1 / 1)	(1 / 1)

O que você notou, algebricamente, com relação as coordenadas dos vetores soma a ou b?

Eles são, ~~igua~~ a soma das coordenadas de vetor U+V e U+W

Se u = (x,y) e v = (x',y') o que se pode escrever sobre as coordenadas do vetor u + v?

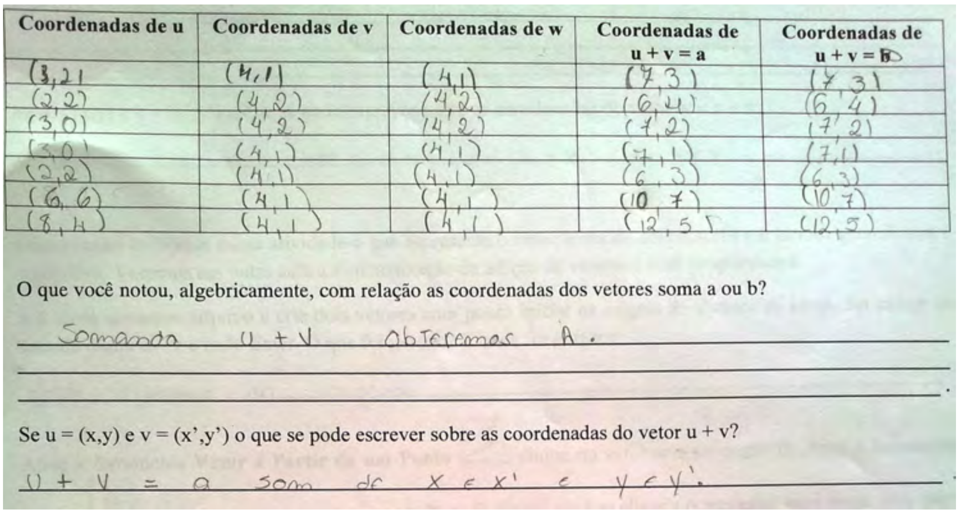
U+V = (x+x', y+y')

Fonte: Dados da pesquisa

Os itens 3.4 a 3.6 tratavam da soma de dois vetores considerando-os com a origem no mesmo ponto do plano, de forma que os alunos tiveram que construir um paralelogramo e perceber que, geometricamente, o vetor soma representa a diagonal do paralelogramo construído. Os passos a seguir nesses itens foram os mesmos dos anteriores. Quase todos os grupos compreenderam bem estes itens da atividade.

A figura 76 mostra o registro do grupo sobre a soma de vetores criados na origem do sistema de eixos, em que observaram que o vetor soma representa a diagonal do paralelogramo

Figura 75 – Grupo I



Coordenadas de u	Coordenadas de v	Coordenadas de w	Coordenadas de u + v = a	Coordenadas de u + v = b
(3,2)	(4,1)	(4,1)	(7,3)	(7,3)
(2,2)	(4,2)	(4,2)	(6,4)	(6,4)
(3,0)	(4,2)	(4,2)	(7,2)	(7,2)
(3,0)	(4,1)	(4,1)	(7,1)	(7,1)
(2,2)	(4,1)	(4,1)	(6,3)	(6,3)
(6,6)	(4,1)	(4,1)	(10,7)	(10,7)
(8,4)	(4,1)	(4,1)	(12,5)	(12,5)

O que você notou, algebricamente, com relação as coordenadas dos vetores soma a ou b?

Somando u + v obteremos A.

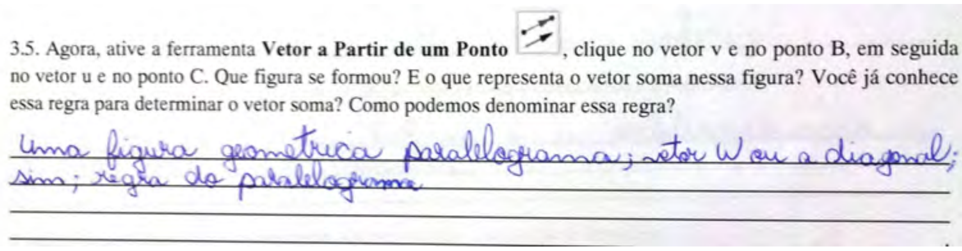
Se u = (x,y) e v = (x',y') o que se pode escrever sobre as coordenadas do vetor u + v?

u + v = a soma de x e x' e y e y'.

Fonte: Dados da pesquisa

construído.

Figura 76 – Grupo A



3.5. Agora, ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto**, clique no vetor v e no ponto B, em seguida no vetor u e no ponto C. Que figura se formou? E o que representa o vetor soma nessa figura? Você já conhece essa regra para determinar o vetor soma? Como podemos denominar essa regra?

Uma figura geometrica paralelograma; vetor W ou a diagonal; sim; regra do paralelogramo

Fonte: Dados da pesquisa

Os itens 3.7 a 3.9 foram elaborados para que o aluno perceba como é feita a subtração de vetores, de forma geométrica e algébrica. Para isso eles criaram dois vetores u e v na origem do sistema de eixos cartesianos e executaram a operação u - v no Campos de Entrada, gerando um terceiro vetor na origem. Em seguida, utilizaram a ferramenta Vetor a Partir de um Ponto para criar um quarto vetor equipolente ao vetor u - v = w, com a origem no vetor v.

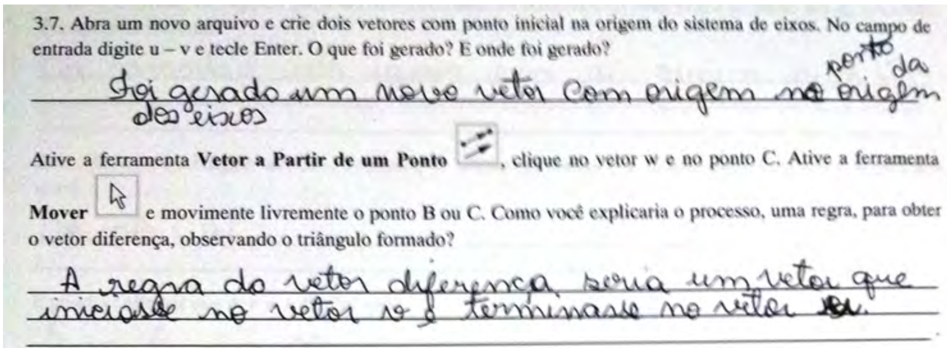
No item 3.7 pediu-se que os participantes elaborassem uma regra para determinar o vetor diferença u - v, a maioria dos grupos o fez coerentemente. Já no item 3.8, poucos grupos perceberam que o vetor diferença representava a outra diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores u e v. Acredita-se que isso ocorreu pois seria necessário detalhar mais a questão a esse respeito.

O grupo G afirmou que u + v representava uma diagonal do paralelogramo e u - v a outra diagonal.

A figura 77 apresenta o registro do grupo B sobre a diferença de vetores criados na origem do sistema de eixos. Ao observar o vetor diferença em várias posições na Janela de

Visualização, a dupla enunciou a regra.

Figura 77 – Grupo B


3.7. Abra um novo arquivo e crie dois vetores com ponto inicial na origem do sistema de eixos. No campo de entrada digite u – v e tecle Enter. O que foi gerado? E onde foi gerado?

foi gerado um novo vetor com origem ~~no~~ ponto da origem dos eixos

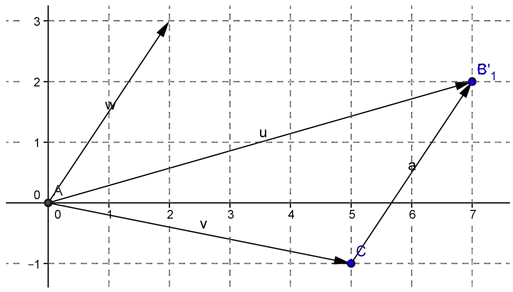
Ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto**, clique no vetor w e no ponto C. Ative a ferramenta **Mover** e movimente livremente o ponto B ou C. Como você explicaria o processo, uma regra, para obter o vetor diferença, observando o triângulo formado?

A regra do vetor diferença seria um vetor que iniciasse no vetor v e terminasse no vetor ~~u~~.

Fonte: Dados da pesquisa

A figura 78 ilustra o vetor diferença u - v criado pelo grupo G.

Figura 78 – Grupo G



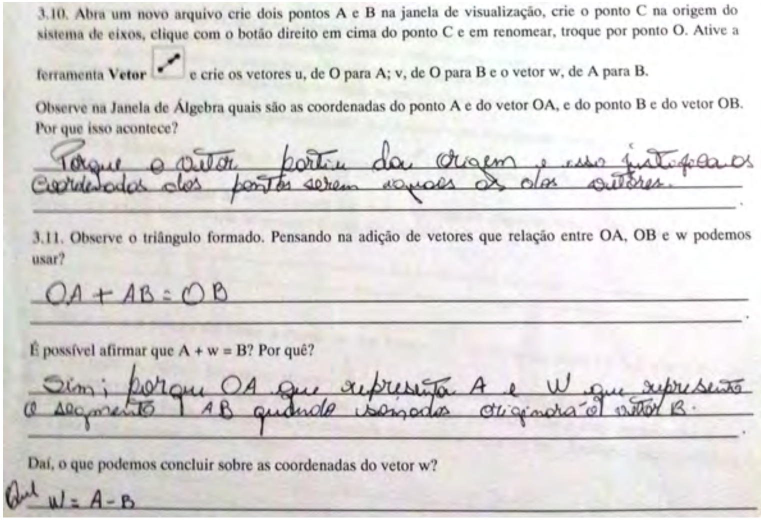
Fonte: Dados da pesquisa

Sobre as coordenadas do vetor diferença, solicitou-se aos participantes que posicionassem as extremidades dos vetores em pontos do plano de coordenadas inteiras e analisassem as coordenadas do vetor diferença, assim como foi feito no caso do vetor soma. Então, concluíram que bastava subtrair as coordenas dos vetores u e v para determinar as coordenadas do vetor diferença.

Os itens 3.10 e 3.11 foram elaborados para comprovar, geometricamente, um resultado da atividade 2 em que ao subtrair as coordenadas das extremidades de um vetor $\overrightarrow{AB}$ se determina as coordenadas desse vetor. Os grupos criaram vetores na origem fazendo uma identificação dos pares ordenados com pontos e vetores. Isso permitiu que os participantes compreendessem com mais clareza esse fato.

A figura 79 mostra as considerações feitas pelo grupo C. Note que no item 3.11 o grupo utilizou a soma de vetores para obter as coordenadas de um vetor $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$. Observe na figura 80 o mesmo item e as considerações do grupo G. Eles concluíram que o vetor w é a diferença dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Isso mostra, que apesar do item sugerir que os participantes pensassem na adição de vetores, o grupo utilizou a subtração para responder a questão.

Figura 79 – Grupo C


3.10. Abra um novo arquivo crie dois pontos A e B na janela de visualização, crie o ponto C na origem do sistema de eixos, clique com o botão direito em cima do ponto C e em renomear, troque por ponto O. Ative a ferramenta **Vetor** e crie os vetores u, de O para A; v, de O para B e o vetor w, de A para B.

Observe na Janela de Álgebra quais são as coordenadas do ponto A e do vetor OA, e do ponto B e do vetor OB. Por que isso acontece?

Porque o vetor partiu da origem e isso justifica as coordenadas dos pontos serem iguais as dos vetores.

3.11. Observe o triângulo formado. Pensando na adição de vetores que relação entre OA, OB e w podemos usar?

OA + AB = OB

É possível afirmar que A + w = B? Por quê?

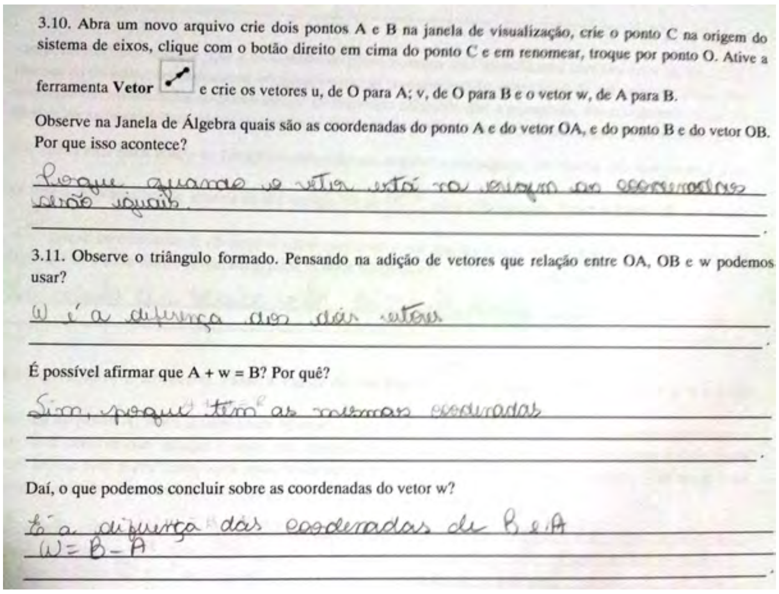
Sim; porque OA que representa A e W que representa o segmento AB quando somados originará o vetor B.

Daí, o que podemos concluir sobre as coordenadas do vetor w?

W = A - B

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 80 – Grupo G


3.10. Abra um novo arquivo crie dois pontos A e B na janela de visualização, crie o ponto C na origem do sistema de eixos, clique com o botão direito em cima do ponto C e em renomear, troque por ponto O. Ative a ferramenta **Vetor** e crie os vetores u, de O para A; v, de O para B e o vetor w, de A para B.

Observe na Janela de Álgebra quais são as coordenadas do ponto A e do vetor OA, e do ponto B e do vetor OB. Por que isso acontece?

Porque quando o vetor está na origem as coordenadas serão iguais.

3.11. Observe o triângulo formado. Pensando na adição de vetores que relação entre OA, OB e w podemos usar?

W é a diferença dos dois vetores

É possível afirmar que A + w = B? Por quê?

Sim, porque têm as mesmas coordenadas

Daí, o que podemos concluir sobre as coordenadas do vetor w?

É a diferença das coordenadas de B e A
W = B - A

Fonte: Dados da pesquisa

4.5.4 Atividade exploratória I

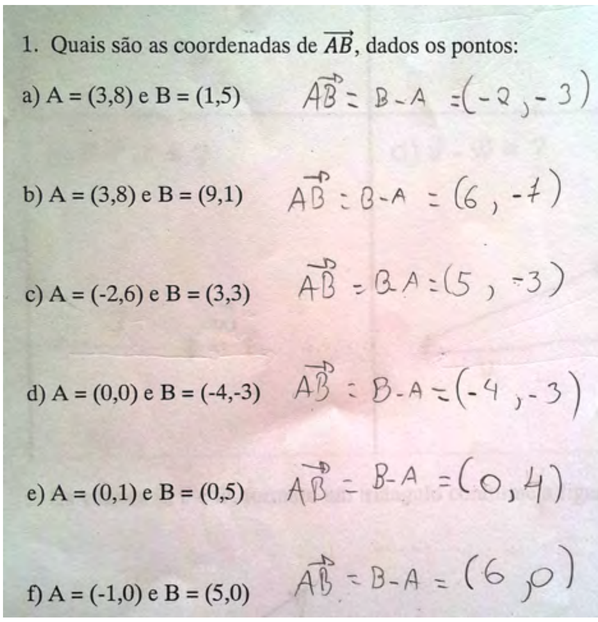
Além das atividades sobre vetores, no computador, foi preciso explorar questões e exercícios sobre vetores na sala de aula. Após 4 encontros no Laboratório de informática ou no micródromo, alguns conceitos e resultados foram formalizados, demonstrando propriedades que envolvem segmentos equipolentes e as primeiras operações com vetores (adição e subtração). Aplicaram-se questões que abordam o cálculo das coordenadas de um vetor, a representação gráfica do vetor soma e diferença de dois ou mais vetores dados, o cálculo em termos de coordenadas do vetor soma e diferença e um problema sobre módulo de um vetor sobre uma figura geométrica. Esta atividade encontra-se no Apêndice A. A figura 81 ilustra um momento de formalização dos conceitos e resultados vistos em aulas anteriores.

Figura 81 – Momento de formalização dos conceitos

Fonte: Dados da pesquisa

Na primeira questão foram dados dois pontos A e B e eles tinham que determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$. Nenhum participante teve dificuldade. A figura 82 mostra o registro da dupla H.

Figura 82 – Grupo H



1. Quais são as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$, dados os pontos:

a) A = (3,8) e B = (1,5) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -3)$

b) A = (3,8) e B = (9,1) $\overrightarrow{AB} = B - A = (6, -7)$

c) A = (-2,6) e B = (3,3) $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -3)$

d) A = (0,0) e B = (-4,-3) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -3)$

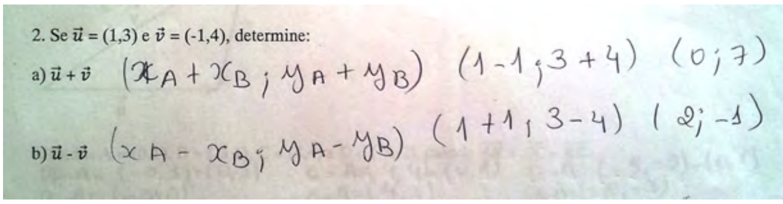
e) A = (0,1) e B = (0,5) $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4)$

f) A = (-1,0) e B = (5,0) $\overrightarrow{AB} = B - A = (6, 0)$

Fonte: Dados da pesquisa

Assim como na primeira questão, nenhum aluno mostrou dificuldade em resolver a segunda, já que os próprios alunos, nas atividades propostas vistas até aqui, chegaram as suas próprias conclusões sobre a soma e a subtração de vetores em termos de coordenadas. Nessa questão foram dadas as coordenadas de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ onde os participantes tinham que determinar as coordenadas do vetor soma $\vec{u}$ + $\vec{v}$ e do vetor diferença $\vec{u}$ - $\vec{v}$. Todos os participantes responderam corretamente. A figura 83 mostra o registro feito pelo grupo B.

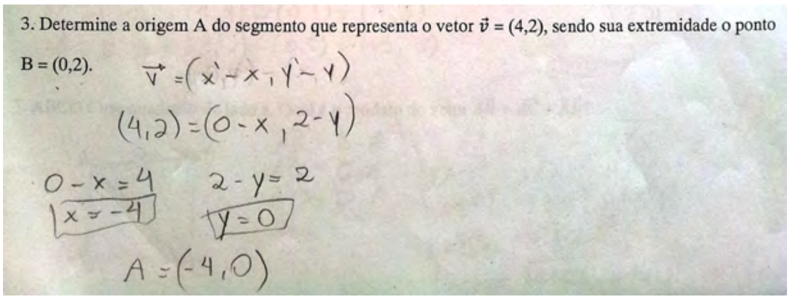
Figura 83 – Grupo B



Fonte: Dados da pesquisa

Na terceira questão foram dados as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ e a extremidade do mesmo, e foi pedido para determinar a origem do vetor. Dos nove grupos, apenas três obtiveram uma resposta coerente. Quatro grupos fizeram um registro gráfico, no entanto, não atingiram o objetivo, pois erraram a conta ao efetuarem o cálculo. A figura 84 mostra o registro feito pelo grupo C.

Figura 84 – Grupo C

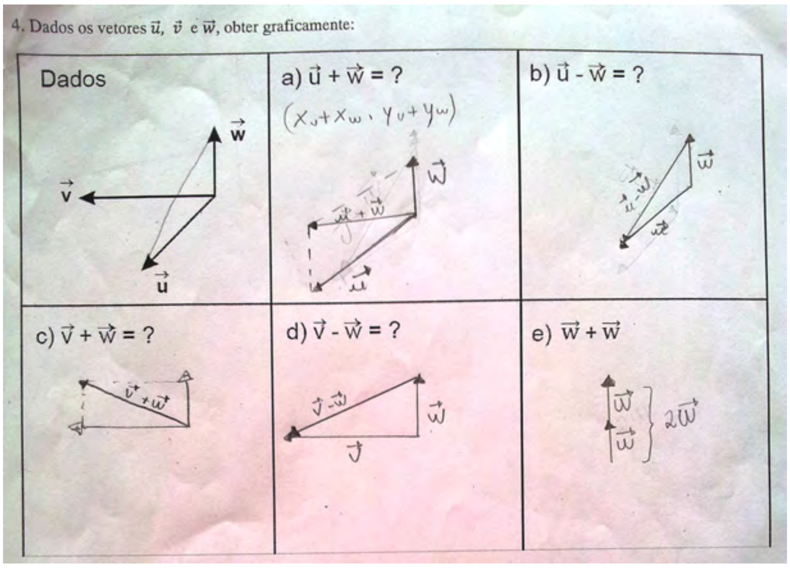


Fonte: Dados da pesquisa

Com relação a quarta questão, foi dado uma figura composta por três vetores $\vec{u}$, $\vec{v} e \vec{w}$ de mesma origem e cinco itens para que os participantes registrassem graficamente o vetor resultante em cada situação. Quatro grupos representaram corretamente o vetor soma do item a, três grupos não representaram corretamente o vetor diferença do item b, cinco grupos representaram corretamente o vetor soma do item c, dois grupos não representaram corretamente o vetor diferença do item d e cinco grupos representaram corretamente o vetor soma do item e.

A figura 85 mostra o registro feito pela dupla C. Pode-se observar que esse grupo representou corretamente todas as situações exigidas na questão.

Figura 85 – Grupo C

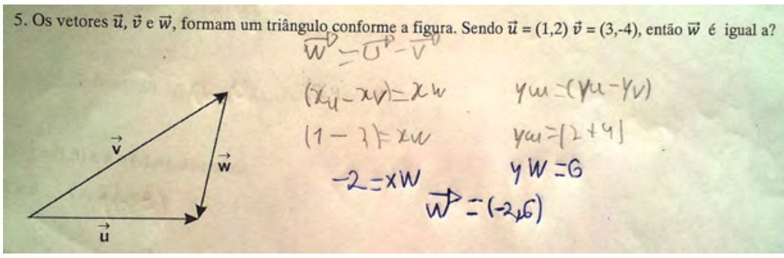


Fonte: Dados da pesquisa

A quinta questão trata de subtração de vetores, foram dadas as coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sua representações gráficas, a partir de uma origem comum, pediu-se que determinassem as coordenadas do vetor $\vec{w}$. Cinco grupos calcularam corretamente as coordenadas do vetor $\vec{w}$. Os demais indicaram que o vetor $\vec{w}$ é igual a: $\vec{u} - \vec{v}$, mas erraram a conta.

A figura 86 mostra o registro feito pela dupla E. Nota-se que a dupla indicou o vetor $\vec{w}$ como sendo a diferença dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e efetuou o cálculo corretamente.

Figura 86 – Grupo E

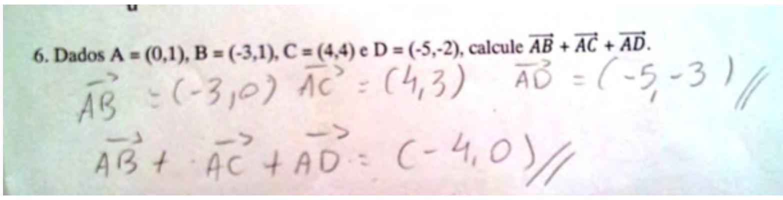


Fonte: Dados da pesquisa

Na sexta questão foram dadas as coordenadas dos pontos A, B, C e D. Solicitou-se aos participantes que calculassem a soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Apenas três grupos não determinaram a soma corretamente, no entanto esboçaram alguns cálculos. A figura 87 mostra o registro feito pelo grupo I.

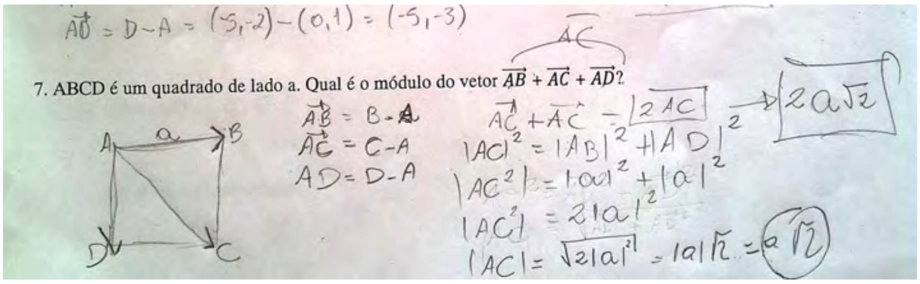
Na última questão foi dado um quadrado ABCD de lado a, a partir daí pediu-se que determinassem o módulo do vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Apenas o grupo C conseguiu resolver corretamente o problema. A figura 88 mostra a resolução do grupo C.

Figura 87 – Grupo I



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 88 – Grupo C



Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se, pela resolução, que o dupla utilizou a representação gráfica dos vetores no quadrado e associou à diagonal do quadrado, o vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ e determinou o módulo corretamente. Acredita-se que esse problema exigiu uma maior mobilização dos conhecimentos construídos até aqui.

4.5.5 Atividade IV

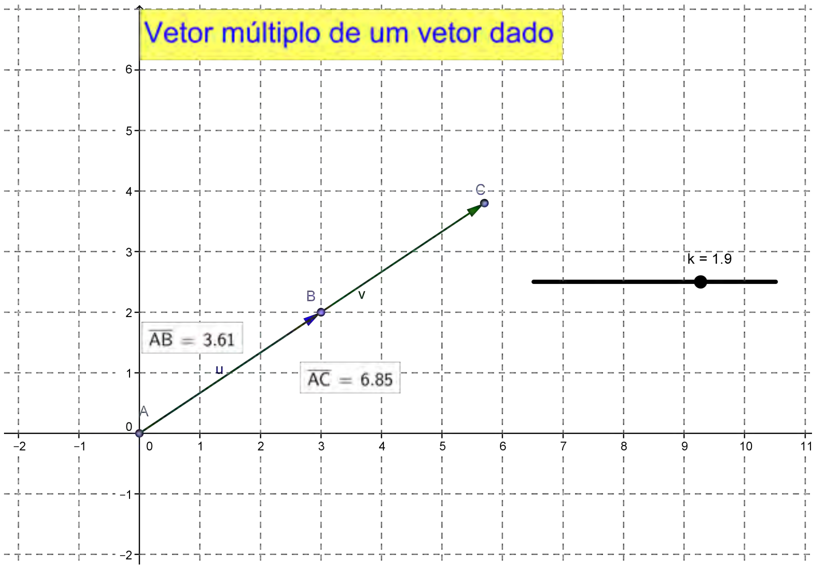
Os objetivos da atividade 4 foram o de explorar, geometrica e algebricamente, o produto de um número real k por um vetor $\vec{u}$; explorar as características de dois vetores múltiplos tais como direção, sentido, módulo e suas coordenadas; verificar a condição de colinearidade de três pontos e introduzir a equação paramétrica de uma reta por meio de vetores, utilizando um arquivo[2] criado pelo professor-pesquisador.

A atividade é composta de 7 itens que possibilitam aos alunos manipularem, com maior dinamismo, o vetor $\overrightarrow{AC}$, múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$, contribuindo para que os mesmos possam fazer suas considerações. A manipulação é feita por meio de um seletor k criado para que os alunos alterem a posição do vetor $\overrightarrow{AC}$, podendo compará-lo com o vetor $\overrightarrow{AB}$. A figura 89 ilustra a Janela de Visualização do arquivo criado para essa atividade onde se encontra o seletor k.

Antes de iniciar a atividade foi solicitado aos alunos que baixassem o arquivo enviado para o *email* da turma. Entretanto, alguns computadores não estavam funcionando e a internet estava lenta. Como os alunos já estavam familiarizados com o *software*, eles iniciaram a

[2] Trata-se de um *applet* que se encontra no endereço: http://www.geogebra.org/material/show/id/186150

Figura 89 – Atividade Múltiplo de um Vetor Dado



Fonte: Dados da pesquisa

atividade por conta própria, o diálogo a seguir entre o professor-pesquisador e os participantes destaca o que ocorreu nesse momento inicial.

Grupo B : *"oh professor o computador não está funcionando."*

Professor: *"então troca por outro."*

Grupo G: *"a internet não está funcionando."*

Grupo C: *"eu consegui entrar no e-mail"*

Grupo C: *"qual é o arquivo?E esses outros dois aqui?"*

Professor: *um arquivo refere-se a atividade e os outros dois são os joguinhos de adição e subtração. Mas vocês só irão utilizá-los depois que terminarem a atividade."*

Professor: *"os alunos que não conseguirem utilizar a internet, me chamem que eu vou transferir os arquivos para o meu pendrive e copiar na máquina de vocês."*

A interação entre o professor e os seus alunos foi fundamental para que as aulas transcorressem bem. Inicialmente, o grupo D teve uma certa dificuldade em identificar as coordenadas, mas logo exploraram a Janela de Álgebra e começaram a atividade de maneira correta.

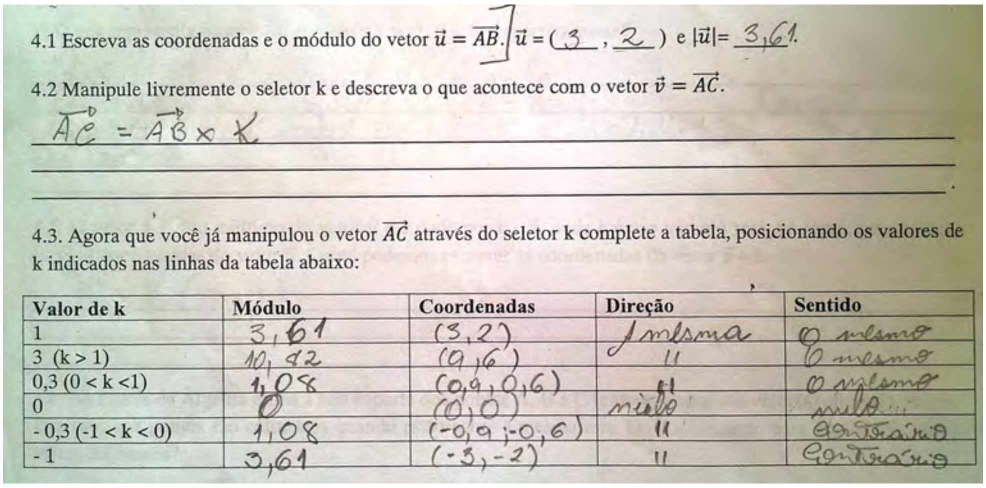
Os itens 4.1 a 4.4 foram elaborados para que os alunos ao manipularem o vetor $\overrightarrow{AC}$ múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$ fixo, pudessem fazer suas considerações observando e descrevendo as alterações da direção, sentido, módulo e coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, permitindo que tirassem suas próprias conclusões, num processo de construção do conhecimento.

Primeiramente, os participantes anotaram no item 4.1 as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e o seu módulo. No item 4.2 pediu-se que registrassem de forma incipiente o que perceberam sobre o vetor $\overrightarrow{AC}$, após a manipulação do seletor.

No item 4.3, optou-se por fornecer uma tabela com alguns valores para k, previamente escolhidos, para que os sujeitos da pesquisa determinassem o módulo, as coordenadas, a direção e o sentido do vetor $\overrightarrow{AC}$, para que no item 4.4 eles comparassem os resultados anotados com o vetor $\overrightarrow{AB}$.

A figura 90 mostra a percepção inicial do grupo C sobre as alterações que ocorreram com o vetor $\overrightarrow{AC}$ ao variarem o seletor k e o registro das informações extraídas por ela ao posicionarem o seletor nos valores fornecidos pela atividade.

Figura 90 – Item 4.1 do grupo C


4.1 Escreva as coordenadas e o módulo do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. $\vec{u}$ = (3 , 2) e $|\vec{u}|$= 3,61

4.2 Manipule livremente o seletor k e descreva o que acontece com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times K$

4.3. Agora que você já manipulou o vetor $\overrightarrow{AC}$ através do seletor k complete a tabela, posicionando os valores de k indicados nas linhas da tabela abaixo:

Valor de k	Módulo	Coordenadas	Direção	Sentido
1	3,61	(3,2)	mesma	o mesmo
3 (k > 1)	10,42	(9,6)	"	o mesmo
0,3 (0 < k <1)	1,08	(0,9 ; 0,6)	"	o mesmo
0	0	(0,0)	nula	nulo
- 0,3 (-1 < k < 0)	1,08	(-0,9 ; -0,6)	"	contrário
- 1	3,61	(-3, -2)	"	contrário

Fonte: Dados da pesquisa

Notou-se, no item 4.2, que o grupo registrou de maneira precoce e de forma algébrica dois vetores que são múltiplos um do outro, mostrando possuir um considerável grau de abstração. Os demais grupos também fizeram registros relevantes nesse item, destacam-se as considerações dos grupos E e I a seguir:

Grupo E: "quando movimentamos o k o vetor v cresce ou diminui dependendo para onde mechemos com k."

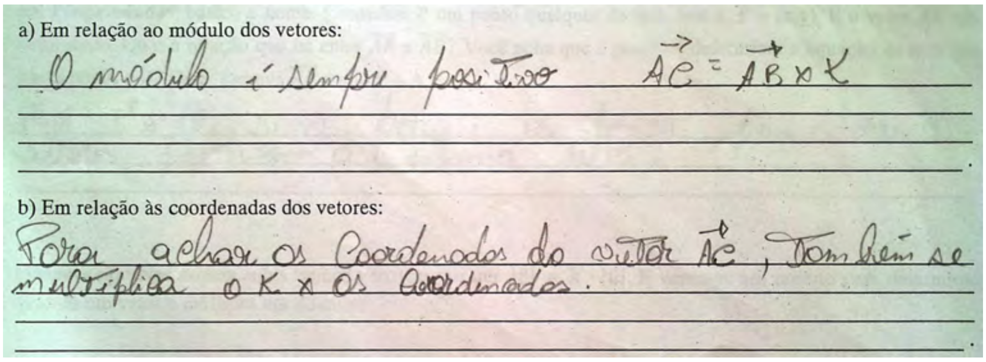
Grupo F: "ao movimentar o seletor k o que acontece é que mudam as distâncias AC e também do k. Assim, observando a mudança das coordenadas e os seus valores."

Após a utilização da tabela preenchida por eles, percebeu-se que as considerações feitas pelos grupos refletiam melhor as mudanças que realmente ocorreram ao variarem o seletor.

Analisando esse item notou-se, como esperado, que a maioria dos sujeitos indicaram que o módulo do vetor $\overrightarrow{AC}$ representava o módulo de $\overrightarrow{AB}$ multiplicado pelo valor de k, assim como as suas coordenadas.

A figuras 91 e 92 representam as considerações do grupo C sobre o vetor $\overrightarrow{AC}$.

Figura 91 – Itens 4.4 a e b do grupo C



a) Em relação ao módulo dos vetores:

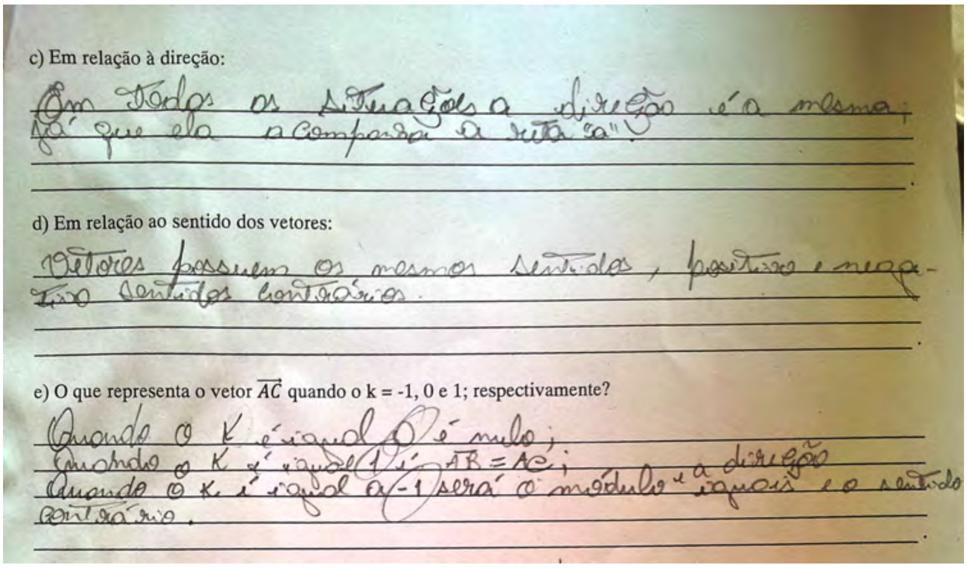
O módulo é sempre positivo $\vec{AC} = \vec{AB} \times K$

b) Em relação às coordenadas dos vetores:

Para achar as coordenadas do vetor $\vec{AC}$, também se multiplica o K x as coordenadas.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 92 – Itens 4.4 b, c, d e e do grupo C



c) Em relação à direção:

Em todas as situações a direção é a mesma, já que ela acompanha a reta "a".

d) Em relação ao sentido dos vetores:

Vetores possuem os mesmos sentidos, positivo e negativo sentidos contrários.

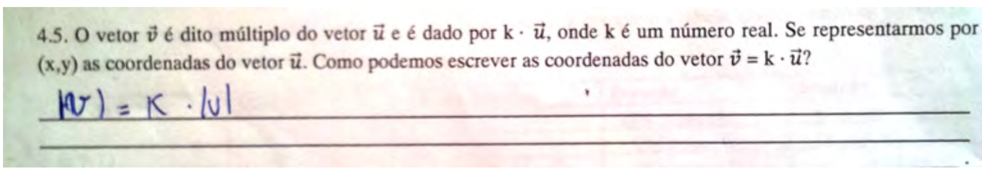
e) O que representa o vetor $\overrightarrow{AC}$ quando o k = -1, 0 e 1; respectivamente?

Quando o K é igual 0 é nulo;
Quando o K é igual 1 é $AB = AC$;
Quando o K é igual a -1 será o módulo e a direção iguais e o sentido contrário.

Fonte: Dados da pesquisa

Já a figura 93 destaca o registro do grupo H sobre as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$. Poucos grupos registraram corretamente as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, nesse item, alguns confundiram as coordenadas do vetor com o módulo do vetor, como mostra o registro desse grupo.

Figura 93 – Itens 4.4 e do grupo H



4.5. O vetor $\vec{v}$ é dito múltiplo do vetor $\vec{u}$ e é dado por k · $\vec{u}$, onde k é um número real. Se representarmos por (x,y) as coordenadas do vetor $\vec{u}$. Como podemos escrever as coordenadas do vetor $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$?

$|v| = K \cdot |u|$

Fonte: Dados da pesquisa

No item 4.5, foi dito que um vetor $\vec{v}$ é múltiplo de um outro vetor $\vec{u}$ quando $\vec{v} = k\vec{u}$ para algum k real e, solicitou-se que, a partir da análise feita por eles, representassem as coordenadas do vetor $\vec{v}$ sabendo-se que as coordenadas do vetor $\vec{u}$ são (x, y).

O diálogo a seguir, mostra um momento de interação entre o Grupo D, o Grupo E e o professor.

Grupo D: *"não estou entendendo professor."*

Professor: *"leia as instruções."*

Grupo D: *"a direção, como assim?"*

Professor: *"a direção é dada por quê?"*

Grupo D: *"uma reta."*

Professor: *"mova o seletor e complete a tabela posicionando nos valores indicados."*

Grupo D: *"sentido professor? É esquerdo ou direito?"*

Professor: *"vejam o que acontece com o vetor AC ao manipulá-lo através do seletor."*

Grupo D: *"então é esquerdo ou direito?"*

Professor: *"compare com o vetor AB."*

Grupo D: *"o mesmo sentido ou sentido oposto."*

Professor: *"agora sim!"*

Grupo E: *"não entendi professor!"*

Professor:*"troque u por (x,y)"*

Grupo E: *"ah ta!"*

Grupo E:*"professor, não estou conseguindo exibir a reta."* Professor: *"janela de álgebra."*

Grupo E: *"achei!*

Grupo E: *"representam a mesma reta."*

Professor: *"pense um pouco mais!"*

Dupla: *"os pontos são múltiplos."*

Professor: *"pontos?"*

Grupo E: *"não, vetores."*

Grupo D: *"as coordenadas são múltiplas."*

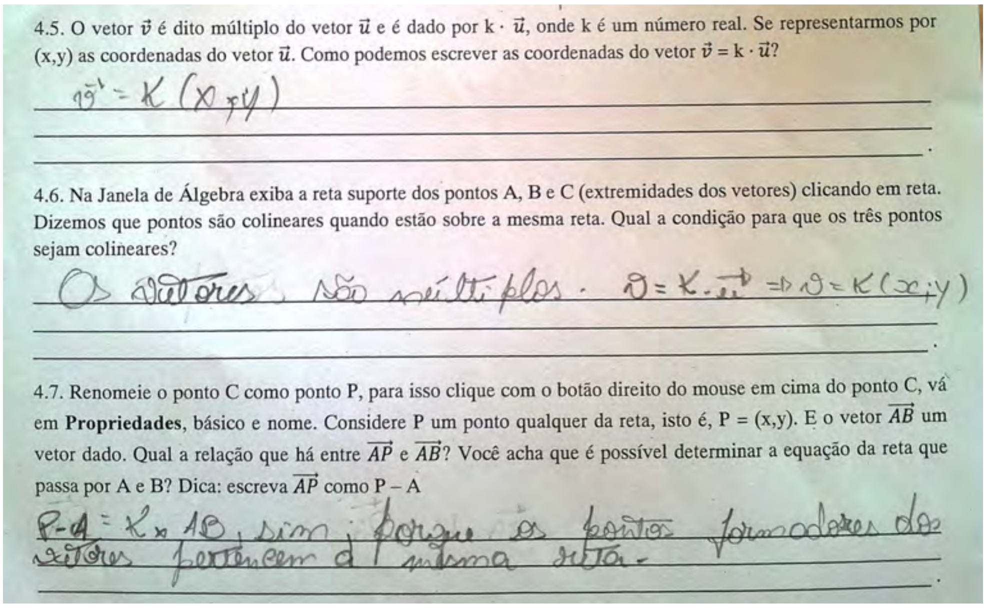
Grupo D: *"AP é múltiplo de AB."*

Professor: *"como podemos escrever?"*

Grupo D:*"AP = k AB"*

No item 4.6, os alunos exibiram a reta suporte dos vetores como pedido na atividade e tentaram relacionar a condição de colinearidade dos pontos A, B e C (extremidade dos vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$) com o fato de esses vetores serem múltiplos. Já no item 4.7 solicitou-se que os alunos renomeassem o ponto C como ponto P representando um ponto qualquer da reta suporte dos vetores, e o vetor $\overrightarrow{AB}$ como um vetor dado, que indica a direção da reta. O intuito era fazer com que os alunos pensassem na possibilidade de determinar a equação da reta que passa pelos pontos A e B utilizando o que eles haviam aprendido sobre múltiplos de vetores. A figura 94 apresenta as considerações feitas pelo grupo C a esse respeito.

Figura 94 – Itens 4.6 e 4.7 do grupo C



4.5. O vetor $\vec{v}$ é dito múltiplo do vetor $\vec{u}$ e é dado por k · $\vec{u}$, onde k é um número real. Se representarmos por (x,y) as coordenadas do vetor $\vec{u}$. Como podemos escrever as coordenadas do vetor $\vec{v}$ = k · $\vec{u}$?

$\vec{v}$ = K (x ; y)

4.6. Na Janela de Álgebra exiba a reta suporte dos pontos A, B e C (extremidades dos vetores) clicando em reta. Dizemos que pontos são colineares quando estão sobre a mesma reta. Qual a condição para que os três pontos sejam colineares?

Os vetores são múltiplos. $v = K . \vec{u} \Rightarrow v = K(x;y)$

4.7. Renomeie o ponto C como ponto P, para isso clique com o botão direito do mouse em cima do ponto C, vá em **Propriedades**, básico e nome. Considere P um ponto qualquer da reta, isto é, P = (x,y). E o vetor $\overrightarrow{AB}$ um vetor dado. Qual a relação que há entre $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$? Você acha que é possível determinar a equação da reta que passa por A e B? Dica: escreva $\overrightarrow{AP}$ como P – A

P-A = K x AB, sim; porque os pontos formadores dos vetores pertencem à mesma reta.

Fonte: Dados da pesquisa

4.5.6 Atividade V

O objetivo dessa atividade foi o de introduzir o produto interno utilizando o GeoGebra. No capítulo 2 deste trabalho encontra-se a operação de produto interno que é dada de forma geométrica e algébrica. Optou-se por abordar a forma algébrica no computador e geometricamente na sala de aula.

Esta atividade é composta de três itens apenas. Primeiramente, no item 5.1 os alunos exibiram a malha quadriculada na Janela de Visualização e depois com a ferramenta Vetor criaram dois vetores na origem do sistema, seguindo as orientações do item. Depois, no Campo de Entrada, digitaram o comando $u \cdot v$ para determinar o produto interno ou escalar dos dois vetores. No item 5.2 os alunos exploraram essa operação posicionando as extremidades dos dois vetores nos pontos de coordenadas inteiras, preferencialmente, como sugerido.

No item 5.3 todos colocaram o resultado do valor de **a**, representação do produto interno dos dois vetores, direto na tabela. E perceberam, comparando os resultados encontrados, qual a expressão que representa o produto interno.

Alguns grupo me perguntaram se o que eles responderam representava o produto interno. Os grupos A e D concluíram que o produto interno entre os vetores $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$ é dado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xy + x'y'$. Então, foi necessário investigar posteriormente com os alunos, se o que eles conjecturavam era verdadeiro. O diálogo abaixo mostra esse momento:

Grupo A: *"é professor, da o resultado de a."*

Professor: *"vamos conferir. Posicione as extremidades dos vetores em pontos diversos e analise."*

Grupo A: *"continua certo."*

Professor: *"vejam se colocarmos aqui não vai dar certo. Então não é essa a expressão do produto interno."*

Grupo A: *"é mesmo! Mas quando é positivo dá."*

Professor: *"vamos ver."*

Para a atividade IV solicitou-se que os alunos acessassem o *e-mail* da turma para baixarem três arquivos do GeoGebra elaborados pelo professor, um denominado multvetor.ggb referente a essa atividade e os outros dois arquivos denominados golf.ggb [3] e guerra.ggb [4], que tratam da subtração e da adição de vetores, respectivamente, eles representam um objeto (jogo) em que os alunos podem treinar essas operações por meio das coordenadas dos vetores, de maneira lúdica. O trecho a seguir representa um diálogo do grupo A com o professor, no início da atividade V.

Grupo A: *"professor não entendi!"*

Professor: *"observe na tela a janela de álgebra e de visualização e leia a sequência novamente."*

Professor: *"veja no plano cartesiano e na janela de álgebra as coordenadas."*

Grupo A: *"ah! Entendi!"*

Professor: *"é isso! Complete a tabela e mãos à obra!"*

Grupo D: *"como indicar o ângulo mesmo?"*

Professor: *"veja o ícone na atividade."*

Grupo D: *"ah tá professor!"*

Grupo D: *"eu já tinha encontrado."*

Este trecho do diálogo refere-se ao momento em que o grupo precisou exibir o ângulo entre os vetores u e v criados inicialmente por eles no item 5.2

As duas aulas foram suficientes para que todos os participantes terminassem a atividade.

[3] http://tube.geogebra.org/material/show/id/92039
[4] http://tube.geogebra.org/material/show/id/92057

No entanto, dois grupos apenas conseguiram terminar as duas atividades antes do término das aulas e puderam brincar com os joguinhos. Um dos alunos do grupo C disse:

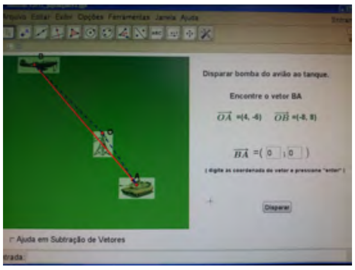
Grupo C: *"tira foto e coloca na sua pesquisa professor."*

Professor: *"bem pensado! Já ia me esquecendo!"*

Grupo C: *"tira foto quando a gente destruir o tanque."*

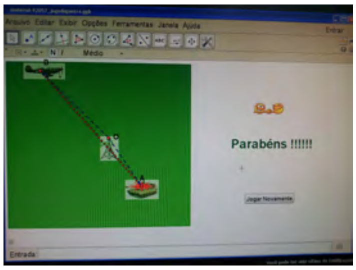
As figuras 95 e 96 ilustram dois momentos em que o grupo C se diverte com o Jogo de Guerra que trata da subtração de vetores.

Figura 95 – Foto do momento intermediário do jogo



Fonte: Elaboração própria

Figura 96 – Foto do momento final do jogo



Fonte: Elaboração própria

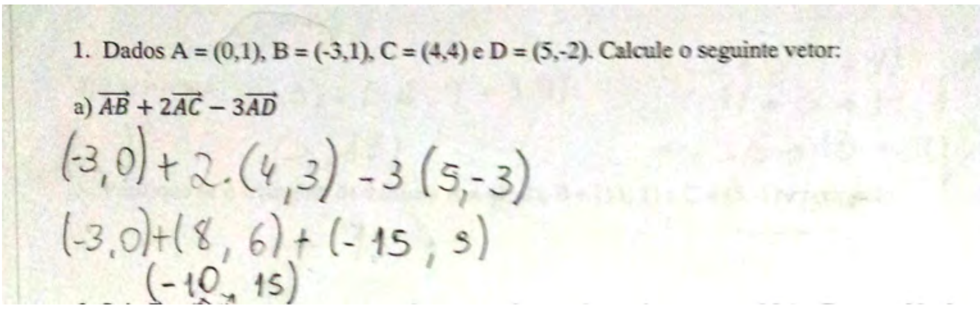
4.5.7 Atividade exploratória II

Após as atividades IV e V que ocorreram no Laboratório de informática, duas aulas aconteceram na sala de aula com o intuito de verificar o que os alunos haviam aprendido com o uso do *software*, os principais conceitos e resultados vistos nas atividades foram demonstrados e sistematizados, o produto interno de maneira geométrica, a fórmula do cosseno do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ foi demonstrada; apresentou-se a condição para que dois vetores formem um ângulo de 90°. Em seguida, demonstrou-se quando dois vetores são múltiplos um do outro com suas características, de acordo com a Teoria de vetores do capítulo 2, determinando um critério para que dois vetores sejam múltiplos e chegou-se a equação paramétrica da reta que passa por dois pontos, a partir do último item da atividade IV, no entanto não houve tempo suficiente para explorar este tópico do conteúdo.

Foram aplicadas questões que retomam a adição e subtração de vetores de forma algébrica, a representação de um vetor no plano e seus múltiplos, a utilização gráfica de um vetor em uma situação geométrica e a equação da reta que passa por dois pontos. Essa atividade encontra-se no Apêndice A.

Com relação à primeira questão, pode-se afirmar que a maioria dos sujeitos resolveram-na sem dificuldade, foram dados quatro pontos A, B, C e D para que determinassem a soma $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$. A figura 97 mostra o registro do grupo G.

Figura 97 – Item 1 do grupo G


1. Dados A = (0,1), B = (-3,1), C = (4,4) e D = (5,-2). Calcule o seguinte vetor:

a) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$

(-3,0) + 2.(4,3) - 3 (5,-3)

(-3,0)+(8, 6)+(-15, 9)

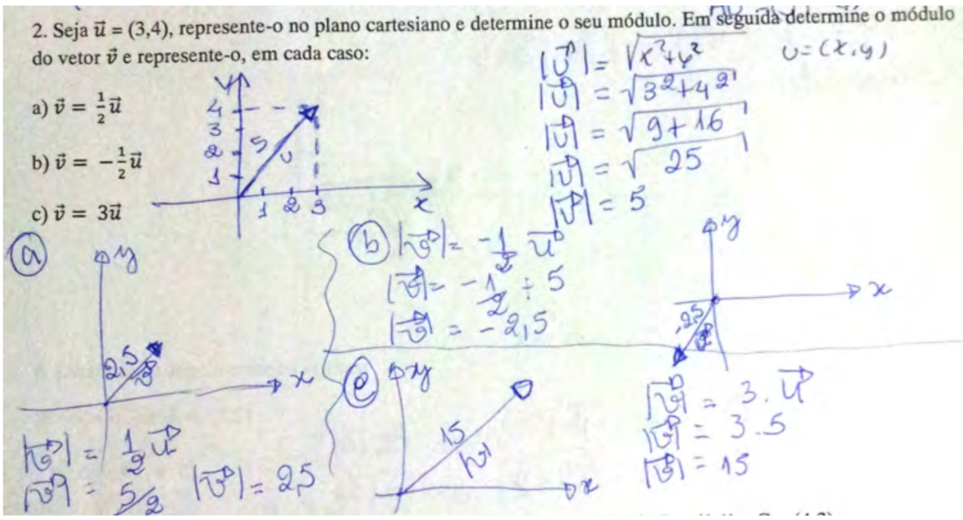
(-10, 15)

Fonte: Dados da pesquisa

Observou-se neste registro que o grupo calculou diretamente as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, como visto na atividade II, denotando que os alunos já pensam os vetores associando-os as suas coordenadas, que são calculadas subtraindo suas extremidades. E, em seguida, fizeram os cálculos sobre múltiplos de vetores aprendidos na atividade IV.

Na questão 2, solicitou-se que calculassem o módulo e representassem três vetores múltiplos do vetor dado $\vec{u} = (3, 4)$ no plano cartesiano. Verificou-se que quase todos os grupos calcularam o módulo dos vetores múltiplos como visto no laboratório na atividade IV e representaram graficamente os vetores múltiplos no plano cartesiano. A figura 98 mostra o registro de forma completa do grupo B.

Figura 98 – Item 2 do grupo B


2. Seja $\vec{u}$ = (3,4), represente-o no plano cartesiano e determine o seu módulo. Em seguida determine o módulo do vetor $\vec{v}$ e represente-o, em cada caso:

a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$

b) $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

c) $\vec{v} = 3\vec{u}$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad u = (x, y)$

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2+4^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{9+16}$

$|\vec{u}| = \sqrt{25}$

$|\vec{u}| = 5$

(a) $|\vec{v}| = \frac{1}{2}\vec{u}$

$|\vec{v}| = 5/2$ $\quad |\vec{v}| = 2,5$

(b) $|\vec{v}| = -\frac{1}{2}\vec{u}$

$|\vec{v}| = -\frac{1}{2} \cdot 5$

$|\vec{v}| = -2,5$

(c) $|\vec{v}| = 3.\vec{u}$

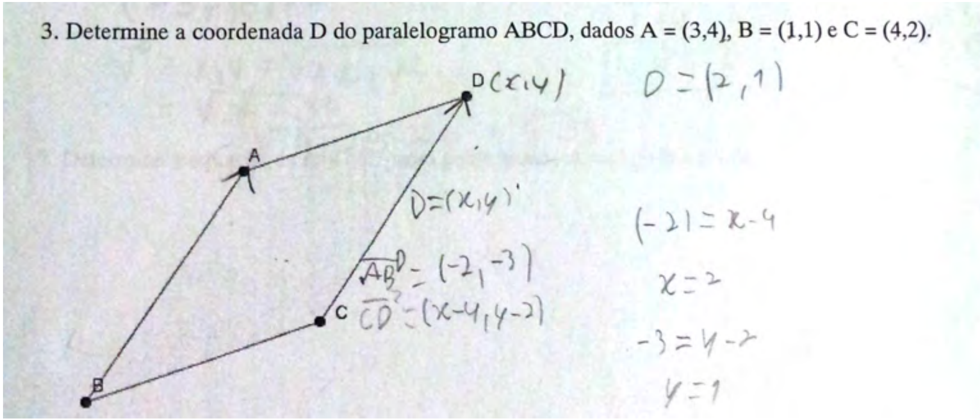
$|\vec{v}| = 3.5$

$|\vec{v}| = 15$

Fonte: Dados da pesquisa

Já na questão 3, são dadas as coordenadas de três vértices A, B e C de um paralelogramo ABCD, e foi solicitado aos participantes que determinassem as coordenadas do vértice D. Aqui notou-se que a dupla G não resolveu a questão, cinco grupos resolveram corretamente representando vetores sobre os lados do paralelogramo e o outras quatro grupos representaram os vetores, no entanto, ao determinar as coordenadas de D, igualando as coordenadas de dois vetores sobre os lados do paralelogramo, trocaram a ordem dos termos na subtração. A figura 99 mostra o registro do grupo E.

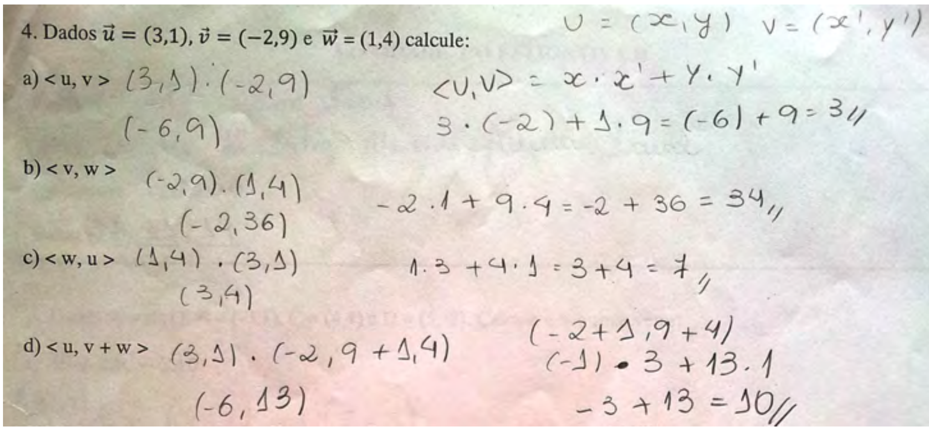
Figura 99 – Item 3 da grupo E



Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 4, foram dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e pediu-se que calculassem o produto interno de dois vetores. Todas os grupos calcularam corretamente os produtos internos requeridos, demonstrando facilidade em determinar o produto interno algebricamente. A figura 100 indica o registro do grupo G.

Figura 100 – Item 4 do grupo G

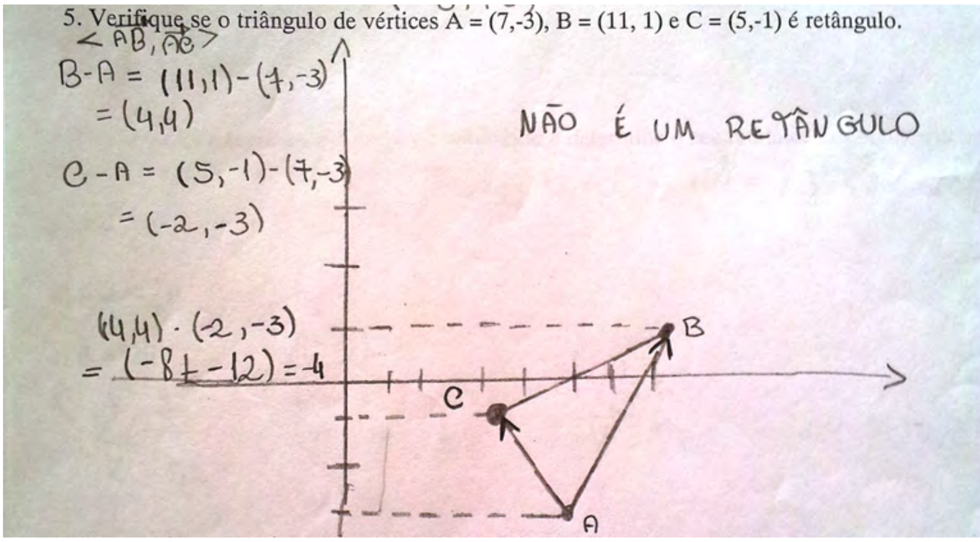


Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 5, foram dadas as coordenadas cartesianas dos três vértices de um triângulo e solicitou-se que os alunos verificassem se o triângulo era retângulo. O grupo D não conseguiu resolver a questão, as demais grupos usaram o fato de que dois vetores formam um ângulo de 90° quando o seu produto interno é zero, e tentaram verificar se o triângulo é o não retângulo. Apenas os grupos B e C conseguiram responder corretamente chegando a conclusão de que se tratava de um triângulo retângulo. Os outros grupos utilizaram essa ideia, no entanto, erraram o cálculo das coordenadas dos vetores, conduzindo-os a uma conclusão não esperada. A figura 101 mostra a solução do grupo E.

Na questão 6 foram dados as coordenadas de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com o propósito de

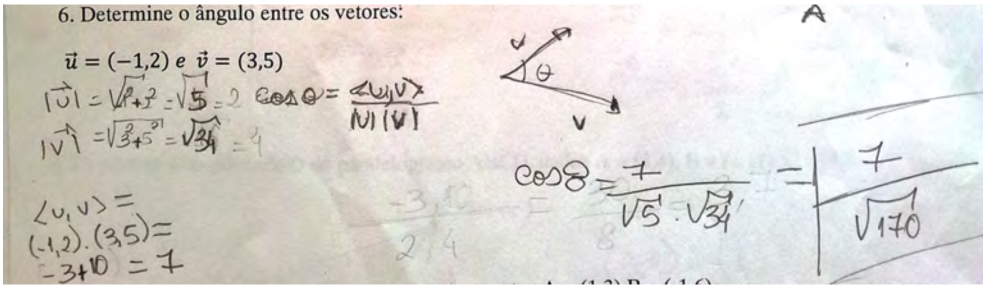
Figura 101 – Item 5 do grupo E



Fonte: Dados da pesquisa

verificar se os alunos aplicariam corretamente a fórmula $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Cinco grupos não conseguiram chegar a um resultado satisfatório. Apenas três indicaram os cálculos corretamente. A figura 102 mostra o registro do grupo A.

Figura 102 – Item 6 do grupo A



Fonte: Dados da pesquisa

E por último, na questão 7 os participantes teriam que determinar a equação da reta que passa pelos dois pontos $A = (1, 3)$ e $B = (-1, 6)$, na forma paramétrica. No entanto, o tempo de aula não foi suficiente para que os alunos resolvessem a questão. Acredita-se, por ter sido apresentado a equação da reta nessa forma, de modo incipiente, que esse foi um fator que contribui para que os alunos não utilizassem bem a equação paramétrica.

4.6 Questões finais

Nesta subseção, encontram-se as questões iniciais que foram aplicadas aos alunos no início da pesquisa e que, após a sequência didática de aulas investigativas que ocorreram no laboratório, no micródromo e na sala de aula, foram aplicadas novamente a eles, constituindo o que se denominou questões finais, porém com a diferença de poderem utilizar os conhecimentos acerca de vetores construídos ao longo das aulas. As análises dos dados referem-se aos registros escritos das duplas feitos nessa atividade final. As tabelas que se encontram no Apêndice D deste trabalho apresentam detalhadamente o resultado alcançado pelos participantes em cada item. Todos os alunos compareceram a aula. Os objetivos das questões foram apresentados na quadro 4.1.

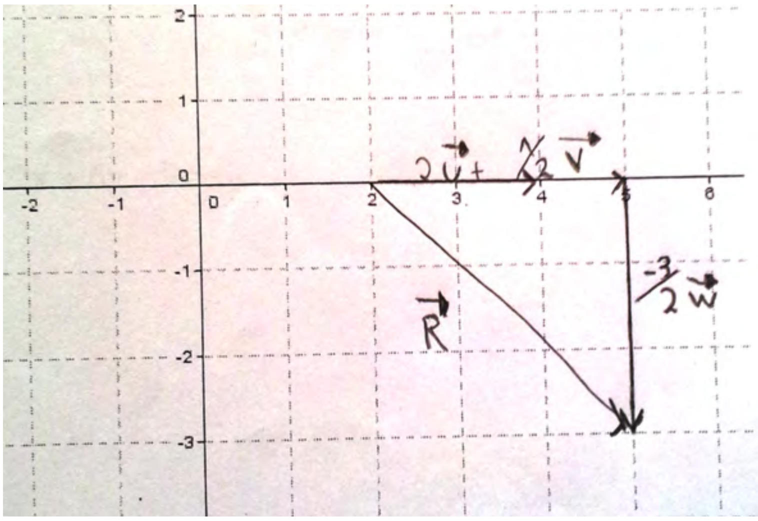
Analisando a questão 1, verificou-se que seis grupos representaram corretamente o vetor-soma, e sete grupos calcularam o módulo do vetor de forma coerente no item a; quatro duplas representaram corretamente o vetor-soma e seis calcularam o módulo do vetor de forma correta, no item b. Já no item c, quatro grupos fizeram a representação certa e cinco calcularam corretamente. Havendo uma melhora com relação ao número de acertos nesse item em relação à primeira vez em que foram aplicados.

Na questão 2, apenas um grupo havia resolvido corretamente a questão, já na segunda vez em que foi aplicada, após a sequência didática, quatro grupos representaram o vetor-soma coerentemente e três calcularam corretamente o módulo do vetor.

Na questão 4, cinco grupos conseguiram representar o módulo do vetor resultante numa configuração de vetores diferente do habitual e quatro grupos determinaram o módulo do vetor resultante. Cabe ressaltar que no primeiro momento da pesquisa, nenhuma grupo havia resolvido essa questão.

Na questão 5, o aluno precisou utilizar a ideia de vetores múltiplos para representar coerentemente o vetor resultante no plano cartesiano, cinco grupos tiveram êxito. Destaca-se que anteriormente, nenhum grupo havia resolvido a questão. A figura 103 ilustra a solução do grupo I.

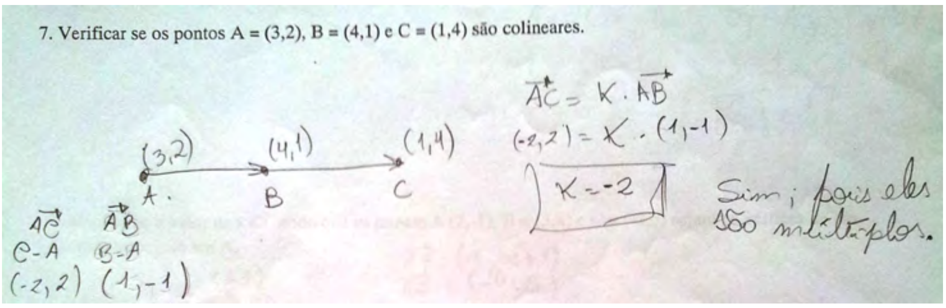
Figura 103 – Solução da questão 05 pelo grupo I



Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 7, que trata de colinearidade de três pontos A, B e C no plano, apenas dois grupos utilizaram vetores múltiplos para solucionar a questão, representaram a situação geometricamente e utilizaram algebricamente o conceito de múltiplos para alcançarem tal objetivo. Esse resultado pode ser explicado pelo fato de que esse tipo de questão exige do aluno uma mobilização grande dos conhecimentos construídos nas aulas, pois o aluno tem que representar os pontos como sendo colineares utilizando vetores e o conceito algébrico de vetores múltiplos. A figura 104 mostra a solução do grupo C.

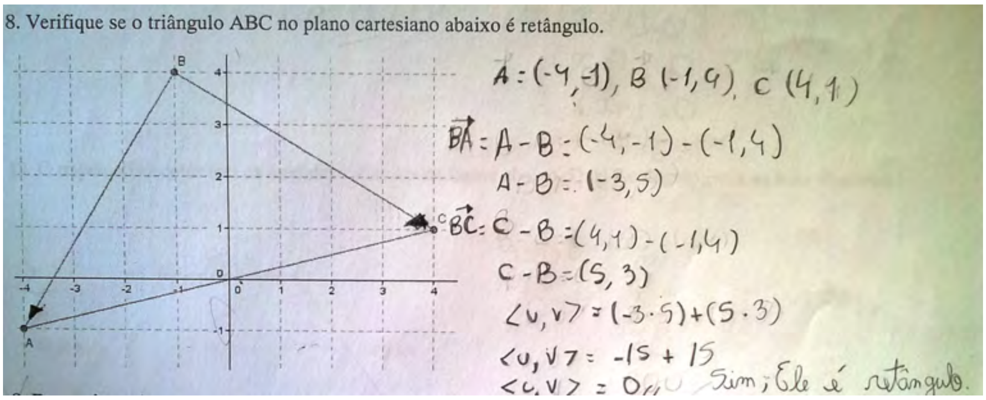
Figura 104 – Solução da questão 07 pelo grupo C



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a questão 8, tem-se um triângulo ABC no plano e pede-se para verificar se este triângulo é ou não retângulo, os dados revelaram que sete grupos utilizaram o produto interno para decidirem se o triângulo era ou não retângulo. Isso evidencia o fato de que eles ao fazerem a atividade sobre produto interno se recordaram da condição de perpendicularismo de dois vetores. A figura 105 ilustra a resolução do grupo F.

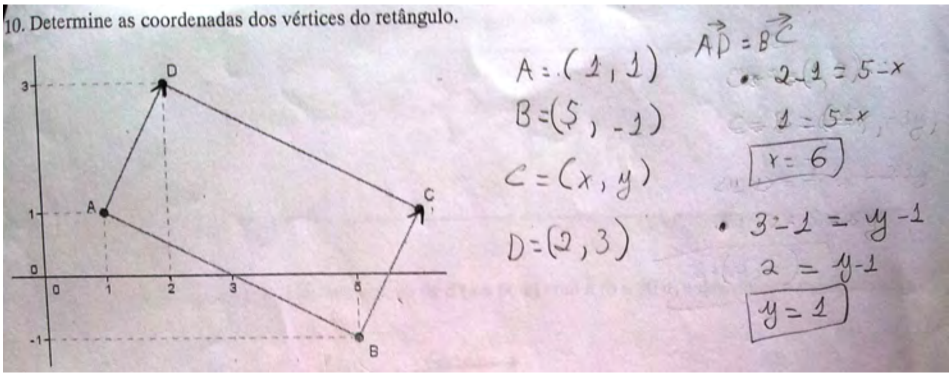
Figura 105 – Solução da questão 08 pelo grupo F



Fonte: Dados da pesquisa

Com relação a questão 10, em que se pede para determinar as coordenadas de um dos quatro vértices de um retângulo no plano cartesiano, cinco grupos utilizaram vetores sobre os lados do retângulo e perceberam que bastava igualar as coordenadas desses vetores. A figura 106 mostra a resolução do grupo H.

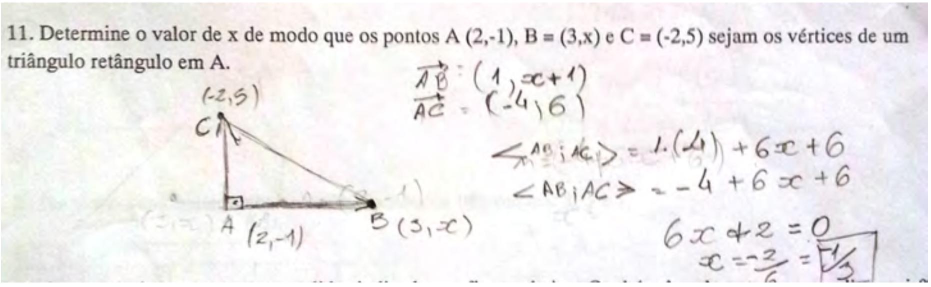
Figura 106 – Solução da questão 10 pelo grupo H



Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 11, foram dados três pontos A,B e C, vértices de um triângulo retângulo em A, para que determinassem a ordenada do vértice B triângulo ABC, assim como na questão 8 os grupos que esboçaram uma solução utilizaram o produto interno de dois vetores igualando-o a zero para determinar as coordenadas de B, quatro grupos resolveram essa questão corretamente. A figura 107 ilustra a resolução do grupo C.

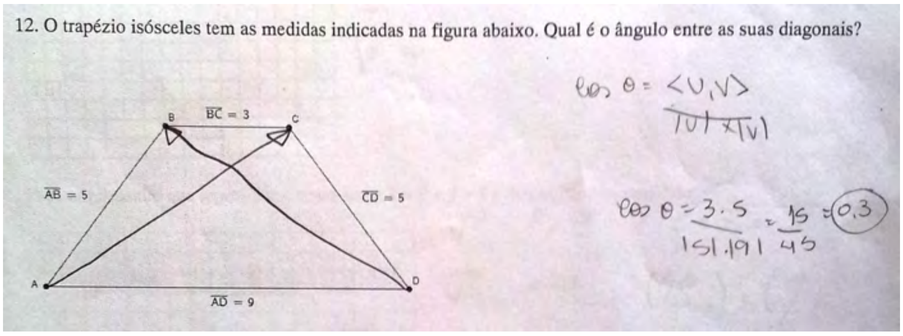
Figura 107 – Solução da questão 11 pelo grupo C



Fonte: Dados da pesquisa

Sobre a questão 12 que trata do ângulo entre duas diagonais de um trapézio isósceles, deve-se salientar que a fórmula do ângulo entre dois vetores foi demonstrada na sala de aula, e não foi explorada no Geogebra. Cinco grupos esboçaram sobre as diagonais do trapézio vetores que as representassem e tentaram aplicar a fórmula diretamente, no entanto, por não munirem o plano por um sistema de eixos OXY perpendiculares não alcançaram o objetivo da questão. A figura 108 mostra o esboço feito pelo grupo G.

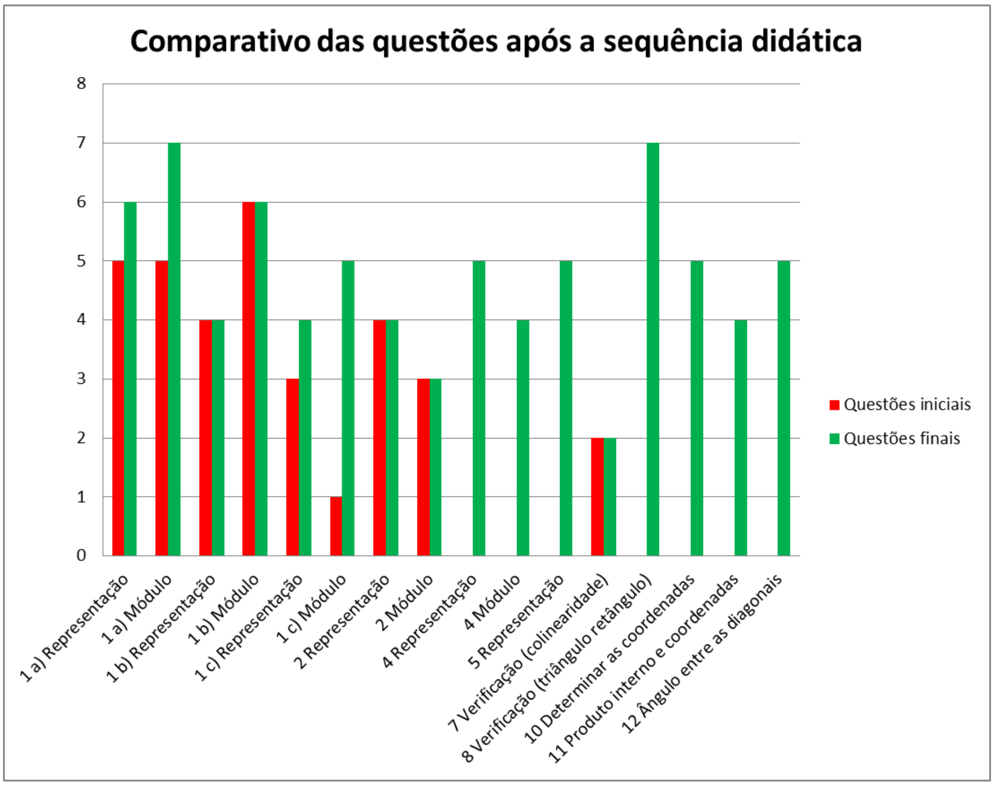
Figura 108 – Solução da questão 12 pelo grupo G



Fonte: Dados da pesquisa

Para se ter uma ideia melhor do resultados antes e depois da sequência didática, o gráfico de barras 109 ilustra o número total de duplas que atingiu os objetivos de cada questão.

Figura 109 – Gráfico comparativo



Fonte: Dados da pesquisa

4.7 Análise do questionário II

Com o intuito de saber a opinião dos participantes da pesquisa sobre como o *software* contribuiu para a aprendizagem de vetores e se os vetores auxiliaram na resolução de problemas, foi elaborado um questionário final com duas questões a esse respeito. Optou-se por um questionário simples em que os participantes precisassem apenas preencher um espaço em branco diretamente no *Word*. Esse questionário foi enviado para o *e-mail* da turma para que os grupos o preenchessem e retornassem ao professor. Todos os grupos responderam, exceto os grupos E e G.

4.7.1 Questão 1

Em sua opinião, as aulas no laboratório de Informática com o auxílio do *software* GeoGebra e as aulas na sala de aula facilitaram ou não a aprendizagem de vetores? Justifique.

Grupo A: *"facilitaram, pois, todo método utilizado de uma forma para que tenhamos uma visão mais ampla sobre o assunto é bem vista pelo aluno, e a matéria de vetores é algo que requer uma boa interpretação do aluno e o Geogebra proporcionou essa visão diferente fazendo que tivéssemos mais noção sobre o assunto."*

Grupo B: *"sem dúvida facilitaram. De uma forma inovadora, o programa Geogebra, juntamente com o auxílio técnico aos alunos na utilização do mesmo efetuado pelo professor, proporcionou um enorme aprendizado sobre vetores. Os alunos, ao mesmo tempo que se dispuseram a efetuar as ordenanças, foram sujeitos a aprender e a se divertir, já que o ensino se fez de uma forma virtualizada, que chama a atenção dos estudantes facilitando assim a maneira de o professor passar o conteúdo proposto, não deixando que as aulas sigam de uma maneira ritualística e massante."*

Grupo C:*"facilitaram a aprendizagem de vetores, pois foi possível visualizarmos não somente um exemplo para uma curiosidade ou dúvida sobre o objeto de estudo, mas vários em uma simples troca de posição e ou mexida no mouse com o objeto de estudo."*

Grupo D: *"facilitaram, pois ficou mais fácil de compreender suas características quando observávamos o visualmente e digitalmente, tivemos um conhecimento mais aprofundado sobre os vetores do que o que havíamos tido antes na minha opinião as aulas foram muito importantes e proveitosas."*

Grupo F: *"facilitaram; ao utilizar o sofware e as aulas dentro da sala podemos visualizar os vetores de uma maneira melhor e mais fácil de ser executada."*

Grupo H:*"sim , por que quando o professor nos entregava os exercícios eu fazia de acordo com o Geogebra!"*

Grupo I: *"sim, pois explicou com mais detalhes e com mais facilidades sobre esse assunto."*

4.7.2 Questão 2

A sequência de aulas em que você participou contribuiu para utilizar os vetores como ferramenta para resolver as questões propostas? Justifique.

Grupo A:*"sim, mas acho que se tivéssemos mais tempo para a utilização do Geogebra ficaria ainda mais fácil para resolver as questões propostas, e se a turma em um todo tivesse se colocado mais a disposição do professor talvez teria ficado ainda mais fácil, mesmo o professor sendo de ótima qualidade e muito atencioso fica difícil para quem quer aprender."*

Grupo B: *"contribuiram, já que os vetores facilitam na resolução de muitos problemas, até mesmo os do dia-a-dia. Com vetores, algo que levaria à cálculos extensos, podem ser simplificados e resolvidos com facilidade e isso foi observado durante as aulas em que utilizamos os mesmos."*

Grupo C: *"sim, contribuiu muito, pois aprendemos outro método de resolução, que por muita das vezes foi mais fácil do que o que já tínhamos em mente para resolver, mas às vezes foi mais difícil, mas nada que a prática e o tempo nos faça acostumados. Se tivéssemos mais aulas, ou seja, mais tempo, com certeza iríamos, proporcionalmente ao tempo, termos mais facilidade nas resoluções de questões com o método de vetores."*

Grupo D: *"sim; entendendo o que são e para que serve os vetores conseguimos resolver* *alguns exercícios propostos utilizando os mesmos."*

Grupo F: *"sim; percebemos que utilizar os vetores através do Software GeoGebra conseguíamos resolver facilmente as questões propostas, contribuiu também pois ao resolvê-las dentro de sala houve uma maior participação e uma maior aprendizado."*

Grupo H: *"sim, ajudou tanto no computador quanto nas aulas em sala."*

Grupo I: *"sim. Pois explicou as questões e ficou mais fácil a identificação dos vetores."*

Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo principal promover a aprendizagem do conteúdo Vetores no Ensino Médio por meio de uma sequência didática fundamentada na investigação matemática auxiliada pelo uso das tecnologias digitais, aqui representadas pelo GeoGebra; promovendo a inserção deste conteúdo no currículo de Matemática neste nível de Ensino. Focou aspectos iniciais da Teoria de Vetores no Plano, além de verificar se a sequência proposta favorece a utilização dos vetores como ferramenta na resolução de algumas questões por parte dos alunos.

Os resultados obtidos permitem concluir que uma sequência didática com o uso do GeoGebra pode ser um caminho para estreitar a relação de ensino e aprendizagem, uma vez que no processo de construção do conhecimento, a utilização do *software*, com o qual os alunos constituíram-se agentes ativos neste cenário, revelou que as TD inseridas num contexto de investigações matemáticas contribuíram para que os alunos construíssem os conceitos matemáticos, ao passo que o professor se tornou um mediador nesta relação ao apontar caminhos e promover questionamentos. As opiniões dos participantes da pesquisa corroboram esse fato, pois consideraram que a manipulação dos objetos pelo *software* tornou possível visualizá-los em diferentes posições, propiciando aos mesmos tirarem suas próprias conclusões a respeito do tema tratado, fazer inferências sobre os resultados encontrados em cada tópico abordado nas atividades investigativas.

A partir do comparativo das questões iniciais e finais podemos constatar que houve um considerável aumento no número de acertos, demonstrando que a proposta pode ser uma alternativa para promover a inserção de vetores no currículo de Matemática. Em certos momentos, o tempo foi um fator que atrapalhou, mas isso se explica pelo fato de que esta pesquisa foi aplicada no 4º bimestre e as atividades finais foram aplicadas em um período de provas, o que não estava previsto, já que houve uma mudança no calendário escolar quanto a semana de provas e recuperações semestrais.

Acreditamos que as atividades de caráter investigativo desse trabalho podem ser utilizadas pelos professores do Ensino Básico com o intuito de abordar o conteúdo de Vetores com o apoio das TD, sendo esta, uma abordagem que promova uma mudança na prática tradicional de ensino; no entanto, não estamos dizendo que se deve abandonar essa prática completamente.

Podemos dizer que o GeoGebra possui diversas características que o tornam uma ótima escolha de uso nas aulas de Matemática por motivos já expostos, mas que apresentou neste trabalho pontos que potencializaram a aprendizagem do conteúdo versado de forma dinâmica por parte dos alunos.

Outro resultado positivo se refere à adesão da equipe de matemática do *Campus* Bom Jesus que inseriu o conteúdo de vetores no currículo de matemática no 3º ano do Ensino Médio, ficando a critério do professor da turma abordar a Geometria Analítica com enfoque vetorial. Cabe ressaltar que isso foi feito pelos professores do 3º ano das turmas do *Campus* no ano de 2015.

Esperamos que este trabalho proporcione aos professores da área momentos de reflexão sobre a prática em Educação Matemática e, para pesquisas futuras que venham a se apoiar de algum modo neste estudo, sugerimos uma aplicação desta em outros anos de escolaridade do Ensino Básico, e também uma investigação do Ensino de Vetores no Espaço.

Referências

ARAúJO, L. C. L. de; NóBRIGA, J. C. C. *Aprendendo Matemática com o Geogebra*. São Paulo: Exato, 2010. Citado na página 83.

ASSEMANY, D. et al. Uma influência na abordagem vetorial para o ensino médio na aprendizagem de cálculo i. *VII CIBEM*, 2013. Citado na página 20.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução a Teoria e aos Métodos*. [S.l.]: Porto, 1994. Citado na página 69.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 3^a. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 22, 23, 24, 26 e 27.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática*. 1^a. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 22, 28, 29 e 30.

CHAGAS, A. S. das. *O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Vetores no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — IMPA, 2014. Citado na página 20.

DAMBRóSIO, U. *Educação Matemática: Da Teoria a Prática*. 23^a. Campinas, SP: Papirus, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 70.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 51.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. $3ed.rev.$. Campinas - SP: Autores Associados, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 19, 27 e 70.

LEMOS, M. B. C. *Vetores no Ensino Fundamental: Uma sequência didática para o 9 ano*. Dissertação (Mestrado) — IMPA, 2014. Citado na página 20.

LIMA, E. L. *Exame de Textos: Análise dos Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. Citado na página 18.

OCEM, M. da Educação do B. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias*. v.2. Brasília, DF, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 24.

PCNEM, M. da Educaç ao do B. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. v.2. Brasília, DF, 2001. Citado na página 25.

PONTE, J. ao Pedro da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Invetigações Matemática na Sala de Aula*. 3^a. São Paulo: Autêntica, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 24, 25, 26, 27 e 28.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23^a. S ao Paulo: Cortez, 2007. Citado na página 70.

VENTURI, J. J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. 9^a. Curitiba: Unificado, 200−−. Citado na página 40.

Apêndices

APÊNDICE A

Atividades aplicadas

ATIVIDADE 1 - PARALELOGRAMO

Instituição:

Nome:

Professor:

Data: ____/ ____ / ____

1.1. Abra o programa clicando no ícone GeoGebra. Clique com o botão direito do mouse em uma área em branco da Janela de Visualização e em seguida clique em Eixos para esconder os eixos coordenados e em Malha para esconder a malha quadriculada;

1.2 Use a ferramenta **Reta Definida Por Dois Pontos** e clique em dois locais distintos na Janela de Visualização. Essa reta receberá o rótulo **a**.

1.3. Ative a ferramenta **Novo Ponto** e clique em um local fora da reta criada anteriormente. Um ponto C será criado.

1.4. Trace uma reta **b** paralela à reta **a**, que passe por C. Para tal, ative a ferramenta reta paralela e clique sobre a reta **a** e sobre o ponto C.

1.5. Trace uma reta por A e C através da ferramenta **Reta Definida Por Dois Pontos**.

1.6. Ative a ferramenta **Reta Paralela** e clique sobre a reta **c** e sobre o ponto B.

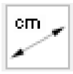
1.7. Ative a ferramenta **Interseção De Dois Objetos** e clique sobre as retas **d** e **b** para gerar o ponto D, interseção das retas **d** e **b**.

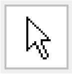
1.8. Utilize a ferramenta **Mover** e arraste o ponto A, B, C e D. Você conseguiu mover todos os quatro pontos? O que acontece com as retas a e b ao mover um dos pontos A, B ou C? E com relação às retas **c** e **d**?

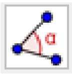
1.9. Esconda as quatro retas e deixe visíveis os quatro pontos. Para isso use a ferramenta **Exibir/Esconder Objeto** que se encontra na última janela da barra de ferramentas e clique sobre cada uma das quatro retas e em seguida tecle ESC.

1.10. Ative a ferramenta **Polígono** e clique em seguida nos pontos A, B, D, C e A para fechar o polígono.

1.11. Ative a ferramenta **Exibir/Esconder Rótulo**  e clique nos quatro lados do paralelogramo para esconder os seus rótulos.

1.12 Ative a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro**  na oitava janela da barra de ferramentas e clique sobre cada um dos lados do paralelogramo para mostrar o comprimento dos lados do paralelogramo.

1.13. Utilize a ferramenta **Mover**  e arraste um dos pontos A, B ou C.

1.14. Ative a ferramenta **Ângulo**  na oitava janela da barra de ferramentas, e clique nos pontos B, A e C, ou C, A, e B para mostrar o ângulo interno cujo vértice é A. Depois utilize a mesma ferramenta para mostrar os outros ângulos internos.

Obs: o programa cria ângulo no sentido anti-horário.

1.15. Movimente qualquer um dos pontos A, B ou C escreva o que você observou com relação:

a) as medidas dos lados opostos;

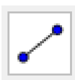
____
____
____
____ .

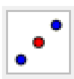
b) a medida dos ângulos opostos;

____
____
____
____ .

c) aos ângulos internos adjacentes.

____
____
____
____ .

1.16. Utilize a ferramenta **Segmento**  e trace as duas diagonais do paralelogramo clicando nos vértices B e C, e A e D.

1.17. Use a ferramenta **Ponto Médio ou Centro**  para criar o ponto médio entre os pontos B e C, e A e D. Movimente qualquer um dos pontos A, B ou C. O que você observou?

____
____
____
____ .

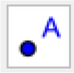
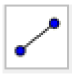
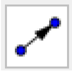
ATIVIDADE 2 – SEGMENTOS ORIENTADOS EQUIPOLENTES /VETOR

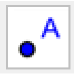
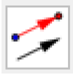
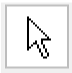
Instituição:

Nome:

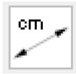
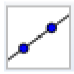
Professor:

Data: ____/ ____ / ____

2.1. Abra uma novo arquivo clicando na Barra de Menu, em seguida clique em Novo. Se a malha e os eixos já estiverem na tela esconda-os como você o fez na Atividade 1 item 1.1. Na Janela de Visualização crie dois pontos A e B através da ferramenta **Ponto** , use a ferramenta **Segmento**  para criar o segmento AB que será rotulado por a. Utilize a ferramenta **Vetor**  para indicar o sentido do segmento AB com ponto inicial A e ponto final B, isto é, um segmento orientado.

2.2. Use a ferramenta **Ponto**  e crie novos pontos na Janela de Visualização, pelo menos cinco. Use a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto**  e clique no segmento orientado AB e nos pontos que você acabou de criar, começando pelo ponto C até o último ponto que você criou. Agora movimente o ponto B (ponto final do segmento orientado AB) através da ferramenta . O que você observou com relação à direção, sentido e comprimento dos segmentos orientados em relação ao segmento orientado AB?

____
____
____
____ .

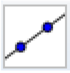
2.3. Vamos mudar a cor dos segmentos orientados, para isso clique no botão direito do mouse, uma janela será aberta, vá em **Propriedades** e por último na aba **Cor**, escolha a cor de sua preferência para cada segmento orientado. Ativando a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro**  e a ferramenta **Reta**  podemos, respectivamente, determinar o comprimento de cada segmento orientado e sua direção. Para isso clique nessas ferramentas e em seguida no ponto inicial e no ponto final de cada segmento orientado. E agora o que você observa com relação à direção, o sentido e o comprimento dos segmentos orientados em relação ao segmento AB?

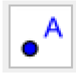
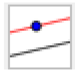
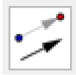
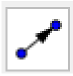
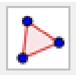
____
____
____
____ .

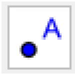
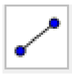
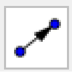
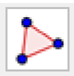
Observação 1: segmentos orientados que têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido são ditos **equipolentes**. E ao conjunto de segmentos orientados equipolentes denominamos vetor. Definiremos mais precisamente esses conceitos em outra aula.

Salve esse arquivo em uma pasta com o seu nome na área de trabalho. Continuaremos a atividade para verificar mais uma característica sobre os segmentos equipolentes, seguindo os passos seguintes:

2.4. Siga o item 2.1. para criar um segmento orientado AB.

2.5. Ative a ferramenta **Reta**  e clique nos pontos A e B para criar uma reta suporte do segmento AB.

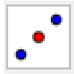
2.6. Crie um ponto C fora da reta AB com a ferramenta **Ponto** , ative a ferramenta **Reta Paralela**  para obter uma reta paralela à reta AB passando pelo ponto C, clique em C e em seguida na reta AB; com a ferramenta **Translação Por um Vetor**  clique em C e no segmento orientado AB, surgiu um ponto C', troque por D; use a ferramenta **Vetor**  para orientar o segmento CD, de C para D; utilize a ferramenta **Polígono**  e clique nos pontos A, B, D, C e A, nessa ordem, gerando o polígono 1. Qual o nome desse polígono?

2.7. Ative a ferramenta **Ponto**  e crie um ponto E sobre a reta c, um pouco distante e a direita do ponto D, crie outro ponto F na reta c entre D e E; use a ferramenta **Segmento**  para criar o segmento EF, altere o comprimento do segmento EF para o mesmo comprimento do segmento AB (veja na Janela de Álgebra), clique em um dos pontos E ou F e arraste-o ao longo da reta c até que o seu comprimento fique igual ao do segmento AB; use a ferramenta **Vetor**  para orientar o segmento EF, de E para F; utilize a ferramenta **Polígono**  e clique nos pontos A, B, F, E e A, nessa ordem, gerando o polígono 2. Que polígono é esse?

2.8. Analisando o que foi feito nos dois itens anteriores e observando as figuras na Janela de Visualização, o que você observou com relação aos dois polígonos 1 e 2? O que gerou essa diferença? Por quê?

2.9. Analisando o que foi feito anteriormente podemos dizer que dois segmentos orientados são equipolentes quando:

Para finalizar vamos ver mais uma característica sobre segmentos equipolentes.

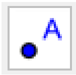
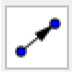
2.9. Vamos limpar um pouco a Janela de Visualização desmarcando alguns rótulos dos objetos, para isso clique nas bolinhas que se encontram na Janela de Álgebra. Utilize a ferramenta **Ponto Médio ou Centro**  e clique nos pontos A e D, B e C, A e F, e B e E. O que você observou no polígono 1 e no polígono 2 com relação aos pontos médios dos segmentos AD e BC e os pontos médios dos segmentos AF e BF, respectivamente, posicione o cursor sobre os pontos médios? Por que isso acontece?

____
____
____
____
____ .

Observação 2: Vamos demonstrar o fato que você constatou em outra aula.

2.10. Salve esse arquivo em uma pasta com o seu nome na área de trabalho. Continuaremos a atividade para caracterizarmos vetores em termos de **coordenadas**.

2.11. Clique em Arquivo na Barra de Menu e abra um novo arquivo . Clique com o Botão Direito sobre a Janela de Visualização, logo em seguida em **Eixos** e **Malha** para mostrar os eixos coordenados e a malha quadriculada.

2.12. Use a ferramenta **Ponto**  e crie o ponto A na origem do Sistema de Eixos, troque o nome do ponto A para ponto O, para isso clique com o **botão direito** e em **propriedades**, na aba **Básico** faça a alteração no campo **Nome,** crie 4 vetores com a ferramenta Vetor  (preferencialmente de coordenadas inteiras), um em cada quadrante.

2.13. Anote as coordenadas das extremidades de cada vetor, subtraia a ordenadas do ponto inicial das ordenadas do ponto final de cada vetor, subtraia as abscissas do ponto inicial das abscissas do ponto final de cada vetor, e compare com as coordenadas dos vetores u, v, w e a.

A = (,) e B = (,) ; B – A = (,) = (,)

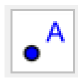
C = (,) e D = (,); D – C = (,) = (,)

E = (,) e F = (,); F – E = (,) = (,)

G = (,) e H = (,); H – G = (,) = (,)

O que você observou? **(observe na Janela de Álgebra)**

____
____
____
____ .

2.14. Marque um ponto (de coordenadas inteiras, preferencialmente) na malha com a ferramenta **Ponto** , crie um segmento equipolente ao segmento orientado AB através da ferramenta **Vetor a partir de um Ponto** , clique no vetor AB e em seguida em I, note que foi criado um vetor II' equipolente a AB. O que você percebe com relação às coordenadas das extremidades dos vetores AB e II’ e as coordenadas dos vetores AB = u e II’ = b? **(observe na Janela de Álgebra)**

____ .

2.15. Agora, crie um segmento equipolente ao segmento orientado AB na origem. O que se pode afirmar sobre as coordenadas dos vetores AB, II’ e OO’ com relação ao ponto O’? Por que isso acontece?

____ .

2.16. Você acha que as coordenadas de um vetor podem ser determinadas usando qualquer segmento equipolente que o represente? Por quê?

____ .

2.17. Em qual posição no plano isso fica mais claro?

____ .

2.18. Quando inserimos um sistema de eixos ortogonais no plano identificamos os pontos do plano com pares ordenados de números reais. Você acha que podemos fazer essa identificação com vetores também? Por quê?

____ .

2.19. Quando dois pares ordenados (x,y) e (x’,y’) são iguais?

____ .

2.20. E sobre dois vetores iguais o que podemos afirmar com relação às suas coordenadas?

____ .

Observação 3: Veremos mais claramente na atividade 3 porque podemos subtrair as coordenadas dos pontos para determinarmos as coordenadas do vetor.

ATIVIDADE 3 – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES

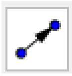
Instituição:

Nome:

Professor:

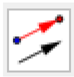
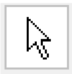
Data: ____/ ____ / ____

Vimos, na atividade anterior, que a cada ponto do plano fazemos uma identificação com um vetor na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e que as componentes (coordenadas) de um vetor são dadas pela subtração das coordenadas do ponto inicial, do segmento orientado que o representa, das coordenadas do ponto final desse segmento. Para começar nossa atividade vamos verificar esse fato, (Observação 3 da Atividade 2)

3.1. Abra uma nova janela no Geogebra (clicando em Arquivo e em seguida em Novo), crie dois vetores u e v na Janela de Visualização através da ferramenta **Vetor** , ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto**  clique na extremidade do vetor u criado por você e em seguida clique no vetor v. No campo de entrada digite u + w e tecle Enter. O que foi gerado? E onde foi gerado?

____

____ .

3.2. Agora, ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto**  e clique no vetor soma u + w = a e em seguida no ponto A. Ative a ferramenta **Mover**  e mova livremente o ponto B ou D. Geometricamente o que você observa com relação à soma dos vetores? Explique como podemos somar dois vetores. Que nome você daria a essa regra? Essa regra poderia ser estendida para mais de dois vetores? Explique. Que nome você daria a essa regra com mais de dois vetores?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____ .

3.3. Nesse item da atividade vamos explorar as coordenadas do vetor soma para isso, exiba a malha quadriculada, clicando com o botão direito na Janela de Visualização e em seguida em Malha. Movimente algumas vezes os pontos A, B, C e D, livremente, localizando-os no encontro das retas horizontais e verticais da malha. Registre algumas coordenadas dos vetores u, v, w, e as coordenadas dos vetores soma a e b na tabela a baixo.

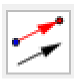
Coordenadas de u	Coordenadas de v	Coordenadas de w	Coordenadas de u + w = a	Coordenadas de u + v = b

O que você notou, algebricamente, com relação as coordenadas dos vetores soma a ou b?

Se u = (x,y) e v = (x’,y’) o que se pode escrever sobre as coordenadas do vetor u + v?

Salve esse arquivo em sua pasta na área de trabalho. E vejamos outra forma de visualizar a soma de vetores no plano.

3.4. Abra um novo arquivo e crie dois vetores com ponto inicial na origem do sistema de eixos. No campo de entrada digite u + v e tecle Enter. O que foi gerado? E onde foi gerado?

3.5. Agora, ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** , clique no vetor v e no ponto B, em seguida no vetor u e no ponto C. Que figura se formou? E o que representa o vetor soma nessa figura? Você já conhece essa regra para determinar o vetor soma? Como podemos denominar essa regra?

3.6. Procedendo de forma similar ao que fizemos no item 3.3, movimente os pontos B e C, livremente, e registre na tabela abaixo as coordenadas de u, v e w.

Coordenadas de u	Coordenadas de v	Coordenadas de w = u + v

O que você notou, algebricamente, com relação as coordenadas do vetor soma w = u + v?

____

____

____ .

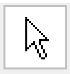
Se u = (x,y) e v = (x’,y’) o que se pode escrever sobre as coordenadas do vetor w = u + v?

____ .

Observação 1: Vimos nessa atividade o que representa o vetor soma de dois vetores em termos geométricos e algébricos. Veremos em outra aula a sistematização da adição de vetores e suas propriedades.

3.7. Abra um novo arquivo e crie dois vetores com ponto inicial na origem do sistema de eixos. No campo de entrada digite u – v e tecle Enter. O que foi gerado? E onde foi gerado?

____ .

Ative a ferramenta **Vetor a Partir de um Ponto** , clique no vetor w e no ponto C. Ative a ferramenta **Mover**  e movimente livremente o ponto B ou C. Como você explicaria o processo, uma regra, para obter o vetor diferença, observando o triângulo formado?

____

____

____ .

3.8. Digite no campo de entrada u + v e tecle Enter. Já sabemos que o vetor soma u + v representa a diagonal do paralelogramo cujos lados são os vetores u e v. O que se pode dizer sobre o vetor diferença u – v ?

____ .

3.9. u + v = v + u e u – v = v – u? Isto é a adição dois vetores é comutativa e a subtração?

____

____

____.

O que podemos dizer sobre os vetores u + v e u – v? u – v = u + (-v)? Explique.

____

____

____

____

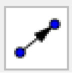
____ .

Se u = (x,y) e v = (x’,y’). Como podemos obter as coordenadas do vetor u – v ?

____ .

Observação 2: Veremos em outra aula como obter o módulo do vetor soma e do vetor diferença de dois vetores dados.

Vimos, na atividade 2, que a cada ponto do plano fazemos uma identificação com um vetor na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e que as componentes (coordenadas) de um vetor são dadas pela subtração das coordenadas do ponto inicial, do segmento orientado que o representa, das coordenadas do ponto final desse segmento. Vamos ver porque isso acontece.

3.10. Abra um novo arquivo crie dois pontos A e B na janela de visualização, crie o ponto C na origem do sistema de eixos, clique com o botão direito em cima do ponto C e em renomear, troque por ponto O. Ative a ferramenta **Vetor**  e crie os vetores u, de O para A; v, de O para B e o vetor w, de A para B.

Observe na Janela de Álgebra quais são as coordenadas do ponto A e do vetor OA, e do ponto B e do vetor OB. Por que isso acontece?

____

____

____ .

3.11. Observe o triângulo formado. Pensando na adição de vetores que relação entre OA, OB e w podemos usar?

____

____ .

É possível afirmar que A + w = B? Por quê?

____

____

____ .

Daí, o que podemos concluir sobre as coordenadas do vetor w?

____

____

____ .

ATIVIDADE 4 – VETOR MÚLTIPLO DE UM VETOR DADO

Instituição:

Nome:

Professor:

Data: ____/ ____ / ____

O módulo de um vetor $\vec{u}$ de coordenadas (x,y) é dado pelo comprimento do segmento orientado. Nessa atividade iremos trabalhar com a operação de multiplicação de um número real por um vetor. Para isso abra o arquivo mult_vetor.ggb ou em um navegador acesse o link: http://www.geogebratube.org/material/show/id/186150 que foi criado pelo professor para essa atividade.

4.1 Escreva as coordenadas e o módulo do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. $\vec{u}$ = (____ , ____) e $|\vec{u}|$= _____ .

4.2 Manipule livremente o seletor k e descreva o que acontece com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

____

____

____ .

4.3. Agora que você já manipulou o vetor $\overrightarrow{AC}$ através do seletor k complete a tabela, posicionando os valores de k indicados nas linhas da tabela abaixo:

Valor de k	**Módulo**	**Coordenadas**	**Direção**	**Sentido**
1				
3 (k > 1)				
0,3 (0 < k <1)				
0				
- 0,3 (-1 < k < 0)				
- 1				

4.4. De acordo com as anotações que você fez na tabela, compare os resultados que você observou sobre o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ com o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

(*Sempre que precisar manipule o seletor para tirar as suas conclusões*)

a) Em relação ao módulo dos vetores:

____

____

____

____ .

b) Em relação às coordenadas dos vetores:

____

____

____

____ .

c) Em relação à direção:

d) Em relação ao sentido dos vetores:

e) O que representa o vetor $\overrightarrow{AC}$ quando o k = -1, 0 e 1; respectivamente?

4.5. O vetor $\vec{v}$ é dito múltiplo do vetor $\vec{u}$ e é dado por $k \cdot \vec{u}$, onde k é um número real. Se representarmos por (x,y) as coordenadas do vetor $\vec{u}$. Como podemos escrever as coordenadas do vetor $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$?

4.6. Na Janela de Álgebra exiba a reta suporte dos pontos A, B e C (extremidades dos vetores) clicando em reta. Dizemos que pontos são colineares quando estão sobre a mesma reta. Qual a condição para que os três pontos sejam colineares?

4.7. Renomeie o ponto C como ponto P, para isso clique com o botão direito do mouse em cima do ponto C, vá em **Propriedades**, básico e nome. Considere P um ponto qualquer da reta, isto é, P = (x,y). E o vetor $\overrightarrow{AB}$ um vetor dado. Qual a relação que há entre $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$? Você acha que é possível determinar a equação da reta que passa por A e B? Dica: escreva $\overrightarrow{AP}$ como P – A

Observação: Nas nossas aulas iremos verificar por que $|\vec{v}| = k \cdot |\vec{u}|$. E veremos um critério para determinar quando um vetor é múltiplo um do outro.

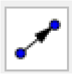
ATIVIDADE 5 – PRODUTO INTERNO

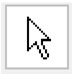
Instituição:

Nome:

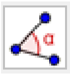
Professor:

Data: ____/ ____ / ____

5.1. Exiba a malha (se essa já não estiver na Janela de Visualização), com botão direito do mouse, ative a ferramenta **Vetor**  e crie dois vetores na origem do sistema de eixos. Renomeie como ponto O o ponto que está na origem e como ponto A e B as extremidades dos dois vetores, para isso use o botão direito do mouse e clique em **propriedade**, e na aba **básico** em seguida em **nome**. No Campo de Entrada digite u*v. Observe que na Janela de Álgebra surgi o número a. Essa multiplicação será denominada produto interno ou escalar de u por v, e será indicada por $< u , v >$.

5.2. Use a ferramenta **Mover**  e clique nos pontos A ou B e posicione-os, preferencialmente, no encontro das linhas horizontais e verticais da malha (para que as coordenadas dos vetores sejam números inteiros), isso facilitará suas observações. O que você observa sobre o valor a ao alterar a posição dos vetores? Você encontrou alguma relação entre o número a e as coordenadas de u e v?

____
____
____
____ .

5.3 O ângulo entre os vetores u e v é o menor ângulo entre os segmentos que os representa. Ative a ferramenta **Ângulo**  e clique nos pontos A, O e B (ou B, O e A) para indicar o ângulo entre os vetores u e v. Posicione os vetores de acordo com os valores das coordenadas que estão na tabela abaixo e com esses valores tente escrever uma expressão numérica para o valor de a.

Coordenadas de u	**Coordenadas de v**	**a = u · v**
(1,2)	(2,3)	
(0,2)	(4,1)	
(-4,2)	(2,3)	
(-3,6)	(7,2)	
(-1,4)	(5,3)	
(-3,5)	(5,3)	
(1,3)	(-3,1)	

a) Se as coordenadas de u e v forem, respectivamente (x,y) e (x',y'), você saberia dizer qual é a expressão que representa o produto escalar u · v?

____

b) Quando o produto interno foi igual a zero, qual o ângulo entre os vetores? ______________________ .

Observação: Veremos a definição de produto interno, de maneira algébrica e geométrica nas aulas.

ATIVIDADE EXPLORATÓRIA I

Instituição:

Nome:

Professor:

Data: ____/ ____ / ____

1. Quais são as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$, dados os pontos:

a) A = (3,8) e B = (1,5)

b) A = (3,8) e B = (9,1)

c) A = (-2,6) e B = (3,3)

d) A = (0,0) e B = (-4,-3)

e) A = (0,1) e B = (0,5)

f) A = (-1,0) e B = (5,0)

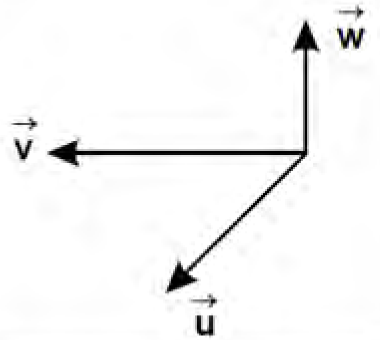
2. Se $\vec{u}$ = (2,3) e $\vec{v}$ = (-1,4), determine:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

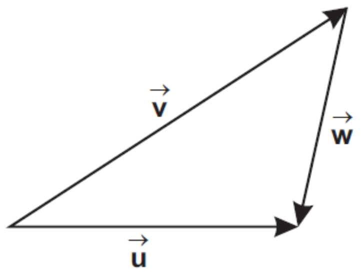
b) $\vec{u} - \vec{v}$

3. Determine a origem A do segmento que representa o vetor $\vec{v}$ = (4,2), sendo sua extremidade o ponto B = (0,2).

4. Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, obter graficamente:

Dados 	a) $\vec{u} + \vec{w} = ?$	b) $\vec{u} - \vec{w} = ?$
c) $\vec{v} + \vec{w} = ?$	d) $\vec{v} - \vec{w} = ?$	e) $\frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} = ?$

5. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, formam um triângulo conforme a figura. Sendo $\vec{u}$ = (1,2) e $\vec{v}$ = (3,-4), então $\vec{w}$ é igual a?



6. Dados A = (0,1), B = (-3,1), C = (4,4) e D = (-5,-2), calcule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

7. ABCD é um quadrado de lado a. Qual é o módulo do vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$?

ATIVIDADE EXPLORATÓRIA II

Instituição:
Nome:
Professor:
Data: ____/ ____ / ____

1. Dados A = (0,1), B = (-3,1), C = (4,4) e D = (5,-2). Calcule o seguinte vetor:

a) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$

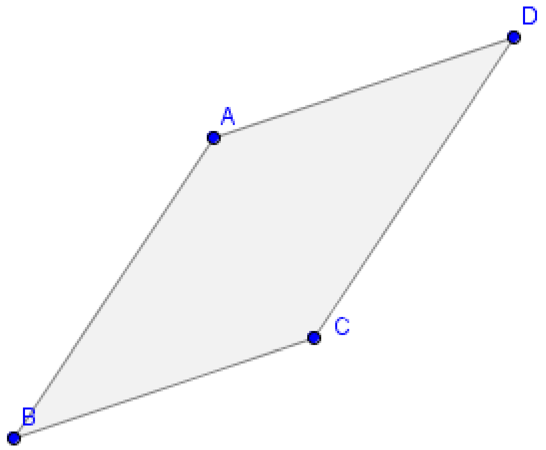
2. Seja $\vec{u}$ = (3,4), represente-o no plano cartesiano e determine o seu módulo. Em seguida determine o módulo do vetor $\vec{v}$ e represente-o, em cada caso:

a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$

b) $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

c) $\vec{v} = 3\vec{u}$

3. Determine a coordenada D do paralelogramo ABCD, dados A = (3,4), B = (1,1) e C = (4,2).



4. Dados $\vec{u} = (3,1)$, $\vec{v} = (-2,9)$ e $\vec{w} = (1,4)$ calcule:

a) < u, v >

b) < v, w >

c) < w, u >

d) < u, v + w >

5. Verifique se o triângulo de vértices A = (7,-3), B = (11, 1) e C = (5,-1) é retângulo.

6. Determine o ângulo entre os vetores:

$\vec{u} = (-1,2)\ e\ \vec{v} = (3,5)$

7. Determine a equação da reta que passa pelos pontos A = (1,3) B = (-1,6)

APÊNDICE B

Questões iniciais

Questões iniciais

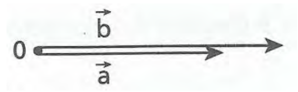
Instituição:

Nome:

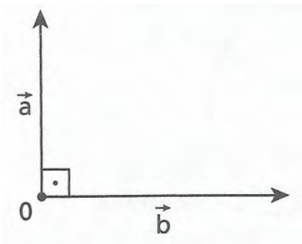
Professor:

Data: / /

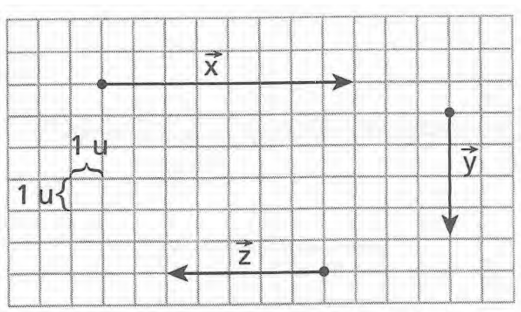
1. Faça um desenho representativo do vetor-soma de $\vec{a}$ (a = 60 u) com $\vec{b}$ (b = 80 u) e determine o módulo em cada caso:

a) 

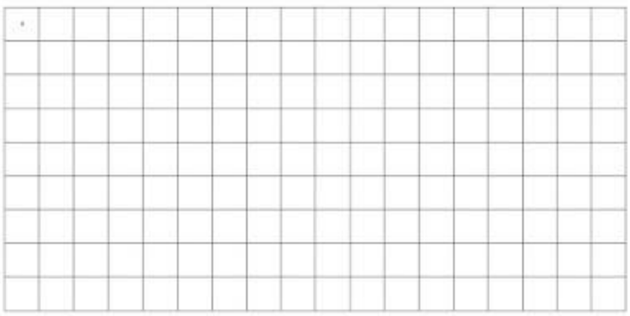
b) 

c) 

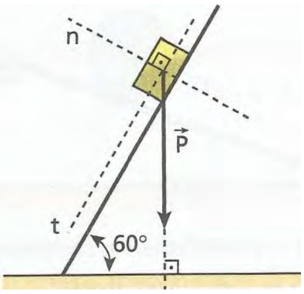
2. No plano quadriculado abaixo estão desenhados três vetores: $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$.



Faça um desenho que represente o vetor-soma $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ e determine o seu módulo.



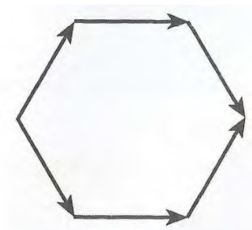
3. O peso de um corpo é uma força vertical, dirigida para baixo. Na figura, está representado um bloco de peso $\vec{P}$, apoiado em um plano inclinado de 60º em relação á horizontal.



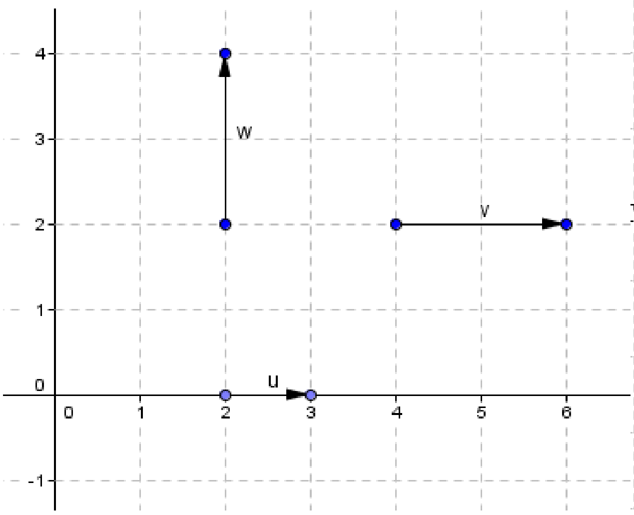
Sabendo que a intensidade de $\vec{P}$ é igual a 20,0 newtons, calcule a intensidade das componentes de $\vec{P}$ segundo as retas *t* e *n*, respectivamente tangente e normal ao plano inclinado no local em que se encontra o bloco.

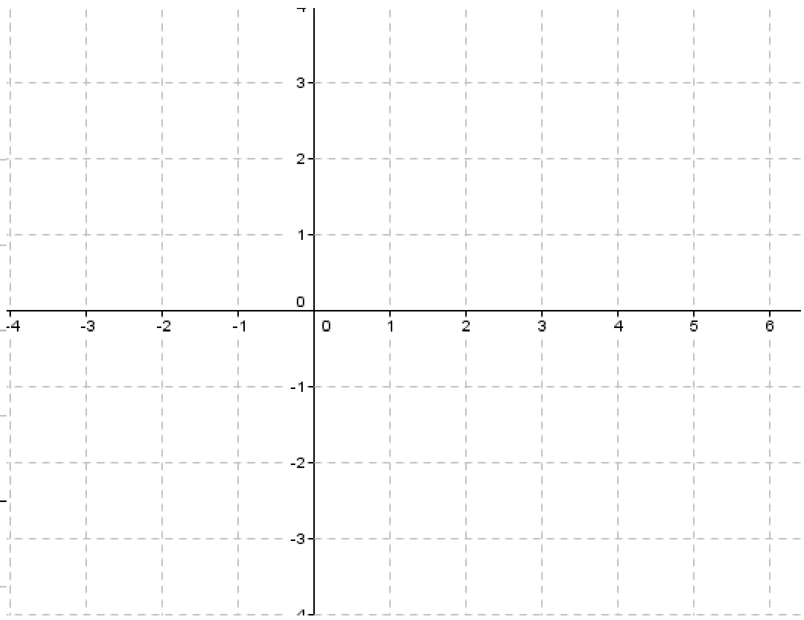
Adote: sem 60º ≅ 0,87 e cos 60º ≅ 0,50.

4. Com seis vetores de módulos iguais a 8 u, construiu-se o hexágono regular ao lado. Represente em um desenho o vetor resultante desses seis vetores e determine o seu módulo.



5. Considere os vetores abaixo:



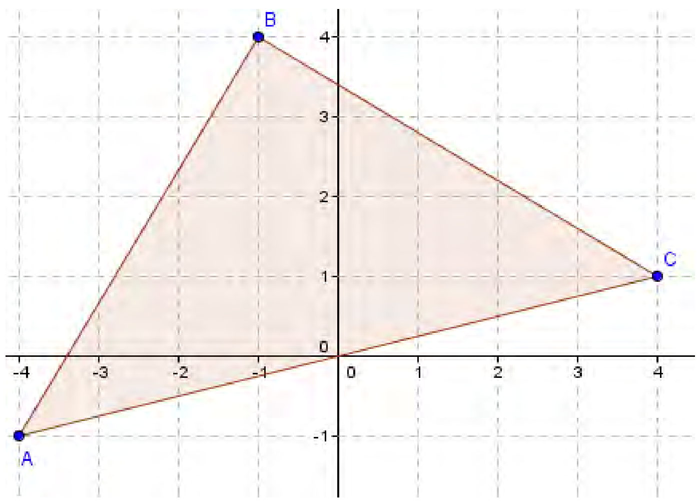


Desenho o vetor $\vec{R} = 2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

6. Obter a equação da reta que passa pelos pontos A = (2,-1) e B = (1,3).

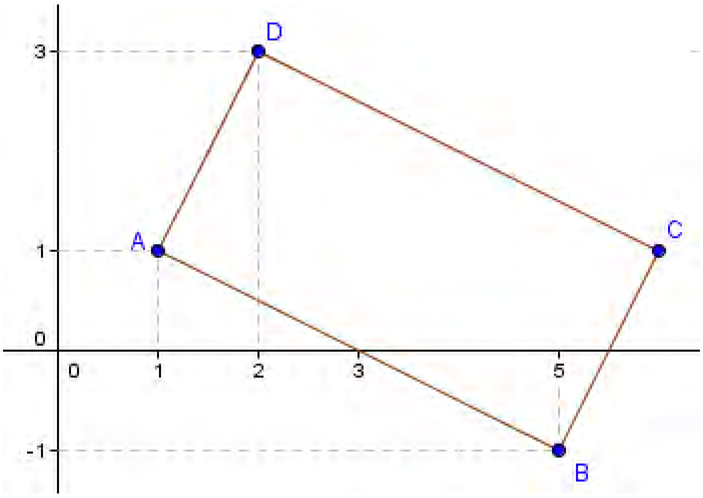
7. Verificar se os pontos A = (3,2), B = (4,1) e C = (1,4) são colineares.

8. Verifique se o triângulo ABC no plano cartesiano abaixo é retângulo.



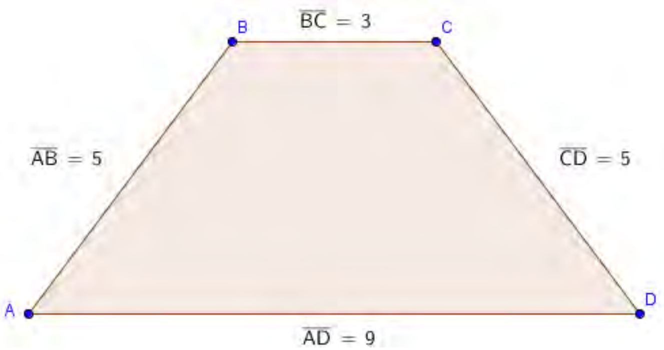
9. Determine o ângulo entre as retas r_1: 2x + y – 7 = 0 e r_2: 2x + 6y – 9 = 0.

10. Determine as coordenadas dos vértices do retângulo.



11. Determine o valor de x de modo que os pontos A (2,-1), B = (3,x) e C = (-2,5) sejam os vértices de um triângulo retângulo em A.

12. O trapézio isósceles tem as medidas indicadas na figura abaixo. Qual é o ângulo entre as suas diagonais?



13. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

APÊNDICE C

Questionários e Termo de Consentimento

Pesquisa: Uma Investigação por meio de uma Sequência Didática com o *Software* GeoGebra para o Estudo de Vetores no Ensino Médio

Patricio do Carmo de Souza

A pesquisa é parte da exigência do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) para obtenção do grau de mestre por parte do professor Patricio do Carmo de Souza orientado pelo professor Paulo Sérgio Dias da Silva. Os dados obtidos serão utilizados exclusivamente para fins acadêmicos. Agradeço a sua cooperação e colaboração para que essa pesquisa tenha êxito.

Nome: ____

Questionário I

1) Idade: _________

2) Sexo: a. (   ) Masculino;   b (   ) Feminino;

3) Cidade onde nasceu: ____ Estado: ___________

4) Você já participou de alguma pesquisa com algum professor, referente ao Ensino?
   Sim (   ) Não (   )

5) Se você respondeu que sim na questão 5, qual foi a disciplina?
   ____

6) Sua casa possui computador com acesso a internet?
   Sim (   ) Não (   )

7) Com que frequência você utiliza o computador em casa?

   Sempre (   ) As vezes (   ) Nunca (   )

8) Se você respondeu que sim na questão 6, assinale o(s) recurso(s) que mais utiliza em casa:

   Editor de texto (   )
   Software educacional (   )
   Planilha de cálculo (   )
   Redes sociais (   )
   Software de apresentação (   )
   Software de navegação (   )
   Jogos (   )
   Outros (   )

9) Você utiliza o computador para estudo?
Sempre (   ) As vezes (   ) Nunca (   )

10) Você considera que o seu domínio no uso dos computadores seja:
Ruim (   ) Regular (   ) Bom (   ) Muito bom (   ) Excelente (   )

11) Com que frequência você utiliza o laboratório de informática da escola para estudo?
Sempre (   ) As vezes (   ) Nunca (   )

12) Qual (is) disciplina (s), diferente da disciplina Informática, você tem aula no laboratório de informática?

____
____

13) Você já manipulou algum software nas aulas de matemática do Ensino Médio?
Sim (   ) Não (   )
Se sim, qual?
____

14) Algum professor de matemática do Ensino Médio utilizou algum software para mostrar a utilidade do mesmo nas aulas de matemática para que você compreenda melhor o conteúdo ministrado por ele?
Sim (   ) Não (   )

15) Se você respondeu que sim na questão 13, assinale o ano de escolaridade em que isso ocorreu:
1º ano (   ) 2º ano (   ) 3º ano (   )

16) Você conhece vetores?
Sim (   )   Não (   )

17) Você considera vetor um objeto:
da Matemática (   ) da Física (   )

18) Você teve dificuldades em compreender o uso dos vetores na Física?
Sim (   ) Não (   )

19) Em que ano você utilizou ou utiliza vetores?
1º ano (   ) 2º ano (   ) 3º ano (   )

20) Você considera vetor uma ferramenta que facilita a resolução de problemas?
Sim (   ) Não (   )

Questionário II

Instituição:

Nome:

Professor:

Data: ____/ ____ / ____

1. Em sua opinião, as aulas no laboratório de Informática com o auxílio do *software* Geogebra e as aulas na sala de aula facilitaram ou não a aprendizagem de vetores? Justifique.

2. A sequência de aulas em que você participou contribuiu para utilizar os vetores como ferramenta para resolver as questões propostas? Justifique.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do Estudo: *Uma Investigação por Meio de Uma Sequência Didática com o Software GeoGebra para o Estudo de Vetores no Ensino Médio*
Pesquisador responsável: Patricio do Carmo de Souza
Orientador: Paulo Sérgio Dias da Silva
Instituição: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Riberio/Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Programa: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

CONVITE:

Prezado (a) discente:

Você está sendo convidado (a) para participar da referida pesquisa de forma voluntária. Você pode escolher não responder a qualquer uma das perguntas apresentadas no questionário e poderá, a qualquer momento, desistir de participar da mesma. Você terá seu anonimato garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. A sua participação é muito importante e consistirá em responder inicialmente um questionário sobre tecnologias no seu cotidiano e na escola, em seguida você participará de atividades na sala de aula e no laboratório informática.

____

Patricio do Carmo de Souza

Ciente e de acordo com o que foi exposto, eu ____

____, estou de acordo em participar da pesquisa, assinando esse termo nesta data.

Bom Jesus do Itabapoana, _____ de __________________________________ de 2014.

____

Assinatura

APÊNDICE D

Tabelas das questões iniciais e finais

Resultado das questões iniciais

Questões iniciais	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Total
1 a) Representação	1	0	1	1	1	0	0	0	1	5
1 a) Módulo	1	0	0	1	1	1	1	0	0	5
1 b) Representação	1	1	1	0	1	0	0	0	0	4
1 b) Módulo	1	1	1	0	1	1	0	0	1	6
1 c) Representação	1	0	1	0	1	0	0	0	0	3
1 c) Módulo	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2 Representação	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2 Módulo	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
3 Anulada										
4 Representação	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 Módulo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 Representação	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6 Anulada										
7 Verificação (colinearidade)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
8 Verificação (triângulo retângulo)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9 Anulada										
10 Determinar as coordenadas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11 Produto interno e coordenadas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12 Ângulo entre as diagonais	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13 Anulada										

1: indica objetivo alcançado
0: indica objetivo não alcançaddo

Resultado das questões iniciais após a sequência didática

Questões utilizando vetores	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Total
1 a) Representação	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
1 a) Módulo	1	1	1	1	1	1	1	0	0	7
1 b) Representação	1	1	1	0	1	0	0	0	0	4
1 b) Módulo	1	1	1	0	1	1	1	0	0	6
1 c) Representação	1	1	1	0	1	0	0	0	0	4
1 c) Módulo	1	1	1	0	1	1	0	0	0	5
2 Representação	0	1	1	0	0	0	1	0	1	4
2 Módulo	0	1	1	0	0	0	1	0	0	3
3 Anulada										
4 Representação	0	1	1	1	1	0	1	0	0	5
4 Módulo	0	1	1	1	0	0	1	0	0	4
5 Representação	0	1	1	0	1	1	0	0	1	5
6 Anulada										
7 Verificação (colinearidade)	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
8 Verificação (triângulo retângulo)	1	1	0	1	1	0	1	1	1	7
9 Anulada										
10 Determinar as coordenadas	1	0	0	1	0	1	1 o		1	5
11 Produto interno e coordenadas	0	0	1	0	0	1	1	1	0	4
12 Ângulo entre as diagonais	1	1	0	1	0	0	1	1	0	5
13 Anulada										

1: indica objetivo alcançado
0: indica objetivo não alcançado