Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO EM GEOMETRIA ANALÍTICA

Ensinando com as Tecnologias

Deusaguimar Divino da Silva

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva**

Trabalho financiado pela Capes

Barra do Garças - MT

Setembro de 2015

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO EM GEOMETRIA ANALÍTICA

Ensinando com as Tecnologias

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação,devidamente corrigida e defendida por Deusaguimar Divino da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 14 de Setembro de 2015.

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva (orientador)
Prof. Dr. Daniel da Silveira Guimarães (CUA-UFMT)
Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza (UFG)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586g Silva, Deusaguimar Divino da.
O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO EM GEOMETRIA ANALÍTICA : Ensinando Com as Tecnologias / Deusaguimar Divino da Silva. -- 2015
132 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Carlos Rodrigues da Silva.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Ensino de Geometria Analítica. 2. Tecnologias da Educação. 3. Software Geogebra. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8713/8710/8576

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "O Geogebra como ferramenta de ensino em geometria analítica - ensinando com as tecnologias"

AUTOR : Deusaguimar Divino da Silva

defendida e aprovada em 14/09/2015.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Dr. Daniel da Silveira Guimarães
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituição : Universidade Federal de Goiás

BARRA DO GARÇAS,14/09/2015.

À Ana Clarice Barbosa Silva, minha filha que tanto amo!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter nos dado sabedoria para realizarmos estudos e assim, descobrir e desenvolver as ciências. A minha mãe Clara Alves Pimenta por todas as "lutas" que enfrentou em sua vida para que eu pudesse realizar meus estudos e também por sempre incentivar-me a seguir com meus estudos, mesmo nas horas que sentia a vontade de abandonar tudo, obrigado mãe. A minha esposa Renata Barbosa Ferreira Silva, por sempre estar ao meu lado, e ter paciência quando não podia dedicar a ela e a nossa filha, obrigado meu amor. Ana Clarice obrigado por toda a alegria que você trouxe para a minha vida. As minhas irmas e irmão que sempre estiveram presentes ao meu lado incentivando-me a estudar. Aos professores e tutores do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso Campus Universitário do Araguaia, em especial a meu orientador Dr. Carlos Rodrigues da Silva, obrigado por todos os conhecimentos que nos passaram. Ao Colégio Estadual Dom Bosco por abrir suas as portas para que esse trabalho pudesse ser aplicado. Ao Departamento de Matemática da UEG-Câmpus Jussara-Go, pelo apoio dado na realização desse curso. Por fim mas não menos importantes aos colegas, Fernando, Ricardo, Rodrigo e Sinésio, pelas incansáveis horas de estudos que passamos juntos, a vocês tenho que dizer, vencemos mais uma "batalha" na busca pelo conhecimento.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli

Resumo

Esse trabalho tem como tema investigar a utilização do software Geogebra como ferramenta de ensino-aprendizagem em Geometria Analítica, suas possibilidades de interação e investigação desse conteúdo. É relatada a presença da informática na escola e o interesse que os alunos têm por esse tema, bem como a relação entre a escola, aluno e professor com as tecnologias. É apresentado o Software Geogebra e como utilizar suas principais ferramentas e exemplos na resolução de atividades. O texto conta com conteúdos de Geometria Analítica e uma série de atividades resolvidas utilizando o software, juntamente com os objetivos, as dificuldades encontradas e a estratégia da resolução de cada uma. As atividades propostas foram aplicadas a alunos que frequentam o 3º ano do Ensino Médio, que é, onde o aluno começa a estudar Geometria Analítica, segundo os currículos escolares. No decorrer do texto aparecem relatos sobre como decorreu a aplicação das atividades em sala de aula.

Palavras chave: Ensino de Geometria Analítica, Tecnologias da Educação, Software Geogebra.

Abstract

This work has as theme to investigate the use of Geogebra software as a tool for teaching and learning in analytic geometry, their interaction and research opportunities of this content. It is reported the presence of computers in school and the interest that students have for this theme, as well as the relationship between school, student and teacher with the technologies. The Software Geogebra and how to use its tools and examples of how to use them in solving activities. The text has contents of analytic geometry and a host of activities resolved using the software, along with the goals, the difficulties encountered and the resolution of each strategy. The proposed activities have been applied to students who attend the 3rd year of high school, that is, where the student starts studying analytic geometry, second the school curricula. In the text appears reports on how was the application of classroom activities.

Keywords: Teaching of analytic geometry, Education Technology, Software Geogebra.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de figuras **xiv**

Lista de tabelas **xv**

Introdução **1**

1 Motivação para a utilização do Geogebra **3**

1.1 A Geometria na vida do aluno 5

1.2 O que o aluno se interessa nas tecnologias 6

1.3 Por que utilizar o Geogebra em sala de aula? 10

2 Conhecendo o Geogebra **14**

2.1 Configurando o Geogebra 14

2.2 Algumas Ferramentas do Geogebra e como utilizá-las 16

2.2.1 Ferramenta Mover 16

2.2.2 Ferramenta Ponto 16

2.2.3 Ferramenta ângulo 17

2.2.4 Ferramenta vincular e desvincular ponto 18

2.2.5 Ferramenta interseção de dois objetos 19

2.2.6 Ferramenta ponto médio ou centro 20

2.2.7 Ferramenta homotetia 21

2.2.8 Ferramenta reta 21

2.2.9 Ferramenta Segmento 22
2.2.10 Ferramenta Semirreta 23
2.2.11 Ferramenta reta perpendicular 23
2.2.12 Ferramenta reta paralela 24
2.2.13 Ferramenta mediatriz 25
2.2.14 Ferramenta bissetriz 25
2.2.15 Ferramenta reta tangente 26
2.2.16 Ferramenta polígono 26
2.2.17 Ferramenta círculo 26
2.2.18 Ferramenta elipse 27
2.2.19 Ferramenta hipérbole 28
2.2.20 Ferramenta parábola 28
2.2.21 Ferramenta cônica por cinco ponto 28

3 Geometria Analítica e o Geogebra 30

3.1 O estudo do ponto com o auxílio do Geogebra 31
3.1.1 O plano cartesiano 31
3.1.2 Segmento 33
3.1.3 Ponto médio de um segmento 34
3.1.4 Alinhamento de três pontos 36
3.2 O estudo da reta como o auxílio do Geogebra 38
3.2.1 A equação geral da reta 39
3.2.2 A equação reduzida da reta 40
3.2.3 Posição relativa entre retas no plano 45
3.3 O estudo da circunferência com o auxílio do Geogebra 58
3.3.1 Posições relativas entre ponto e circunferência 59
3.3.2 Posições relativas entre reta e circunferência 61

4 Atividade sobre Geometria Analítica resolvidas com o auxílio do Geogebra 64

5 Considerações finais 102

A Atividades realizadas pelos alunos 106

Lista de Figuras

2.1 Exemplo de janela gráfica e algébrica 15
2.2 Configuração da janela de visualização 15
2.3 Barra superior 16
2.4 Ferramenta Mover 16
2.5 Ponto 16
2.6 Ponto localizado na janela de visualização 17
2.7 Ângulo 17
2.8 Vincular/Desvincular ponto 18
2.9 Exemplo de vincular ponto 18
2.10 Interseção de dois objetos 19
2.11 Exemplo de interseção de dois objetos 19
2.12 Ponto médio ou centro 20
2.13 Exemplo de ponto médio 20
2.14 Homotetia 21
2.15 Reta 21
2.16 Exemplo sobre retas 22
2.17 Segmento 22
2.18 Semirreta 23
2.19 Reta perpendicular 23
2.20 Exemplo sobre retas perpendiculares 23
2.21 Reta paralela 24
2.22 Mediatriz 25
2.23 Bissetriz 25
2.24 Reta tangente 26
2.25 Polígono 26

2.26 Círculo dado o centro e um de seus pontos . . . 26
2.27 Elipse . . . 27
2.28 Exemplo sobre elipse . . . 27
2.29 Hipérbole . . . 28
2.30 Parábola . . . 28
2.31 Cônica por cinco pontos . . . 28
2.32 Cônica por cinco pontos . . . 29

3.1 Plano cartesiano . . . 31
3.2 Exemplo 3.1.2.1 . . . 32
3.3 Distância entre dois pontos . . . 33
3.4 Ponto médio . . . 34
3.5 Alinhamento de três pontos . . . 37
3.6 Equação geral da reta . . . 39
3.7 Ângulo entre retas . . . 41
3.8 Reta vertical . . . 43
3.9 Reta horizontal . . . 45
3.10 Ângulos de retas paralelas . . . 45
3.11 Retas paralelas equações gerais . . . 46
3.12 Retas paralelas equações reduzidas . . . 47
3.13 Retas concorrentes . . . 48
3.14 Retas concorrentes equação reduzida . . . 49
3.15 Retas perpendiculares . . . 50
3.16 Ângulo entre retas . . . 53
3.17 Distância entre ponto e reta . . . 54
3.18 Circunferência dados centro e raio . . . 59
3.19 Exemplo 3.2 . . . 60
3.20 Reta tangente a um círculo . . . 61
3.21 Reta secante a um círculo . . . 62
3.22 Reta externa a um círculo . . . 63

4.1 Exercício 4.1 itens a e b . . . 65
4.2 Exercício 4.1 itens c e d . . . 65

4.3 Exercício 4.1 item e 65
4.4 Exercício 4.4 67
4.5 Exercício 4.5 67
4.6 Exercício 4.6 68
4.7 Exercício 4.7 a 69
4.8 Exercício 4.7 b 70
4.9 Exercício 4.8 70
4.10 Exercício 4.9 71
4.11 Exercício 4.10 72
4.12 Exercício 4.11 73
4.13 Exercício 4.15 75
4.14 Exercício 4.17 76
4.15 Exercício 4.18 76
4.16 Exercício 4.19 77
4.17 Exercício 4.20 78
4.18 Exercício 4.23 79
4.19 Exercício 4.24 80
4.20 Exercício 4.26 81
4.21 Exercício 4.27 82
4.22 Exercício 4.29 83
4.23 Exercício 4.30 84
4.24 Exercício 4.31 84
4.25 Exercício 4.32 85
4.26 Exercício 4.33 86
4.27 Exercício 4.34 87
4.28 Exercício 4.35 87
4.29 Exercício 4.36 item a 88
4.30 Exercício 4.36 item b 89
4.31 Exercício 4.36 item c 89
4.32 Exercício 4.37 90
4.33 Exercício 4.38 91
4.34 Exercício 4.39 91

4.35 Exercício 4.40 item a 92
4.36 Exercício 4.40 item b 93
4.37 Exercício 4.41 94
4.38 Exercício 4.42 94
4.39 Exercício 4.43 95
4.40 Exercício 4.44 item a 96
4.41 Exercício 4.44 item b 97
4.42 Exercício 4.44 item c 97
4.43 Exercício 4.46 98
4.44 Exercício 4.47 99
4.45 Exercício 4.48 101

Lista de Tabelas

1.1 Você Utiliza o computador? 6
1.2 Finalidades com que utiliza o computador 7
1.3 Você conhece algum software matemático? 9
1.4 Softwares conhecidos 9

Introdução

> “Quando eu estava na escola, o computador era uma coisa muito assustadora. As pessoas falavam em desafiar aquela máquina do mal que estava sempre fazendo contas que não pareciam corretas. E ninguém pensou naquilo como uma ferramenta poderosa.”
>
> (Bill Gates)

Os jovens no mundo atual estão muito ligados às tecnologias, por isso, é importante que façamos o uso delas dentro das salas de aulas, pois a escola também é um local onde preparamos os alunos para a sociedade. O simples fato de o aluno estar trabalhando com um recurso tecnológico na escola, pode-se tornar um mecanismo de incentivo para que esse possa cada vez mais buscar novos conhecimentos. Um recurso tecnológico é importante não somente pela facilidade e qualidade que traz ao trabalho dos estudantes, mas também pelo fato dos jovens gostarem de fazer o uso deles, podendo assim sentir-se motivados a realizar as atividades propostas pelo professor.

Ao ensinar Geometria fazendo o uso do quadro negro e giz, perde-se muito tempo na construção de figuras e por vezes elas não ficam com boa qualidade. Alem disso, não é possível manipular tais imagens. Com a utilização de um software conseguimos construir figuras e gráficos com boa qualidade e podemos manipular tais figuras permitindo, ao estudante uma boa exploração dos conceitos geométricos.

O conteúdo de Geometria Analítica, previsto para ser ensinado no ensino médio, aborda conceitos algébricos e geométricos. Existem várias dificuldades ao ensinar tal conteúdo, podem-se destacar algumas: a construção de gráficos de equações, a análise do comportamento desses gráficos e a relações que uma equação possui com outra, considerando a imagem de seus gráficos, como, por exemplo, a posição relativa entre retas e círculos. Pensando em contribuir para que tais dificuldades possam ser diminuídas utilizaremos o Geogebra como ferramenta de construção e análise de gráficos, assim ele será uma importante ferramenta para estudar e investigar os conteúdos abordados.

O Geogebra é um software livre, gratuito e de qualidade, desenvolvido com a finalidade de unir Geometria e Álgebra, como é sugerido pelo próprio nome. Esse fato faz com que ele torne-se, uma excelente ferramenta de trabalho para o ensino de Geometria Analítica, pois traz uma boa interface gráfica que permite a construção de gráficos utilizando as suas funções ou equações, além disso, podem-se construir figuras geométricas diretamente em sua janela gráfica, fazendo o uso de suas ferramentas. Outro fato importante a ser mencionado é a possibilidade de alterar e manipular os gráficos e figuras construídas anteriormente, permitindo assim, que ele se torne em uma ferramenta para análise e investigação de conceitos geométricos.

É abordada a justificativa para a utilização do Geogebra, o que foi fundamentado por autores como, Estela Kaufman, Fernando Hernándes, Valente, dentre outros. Fundamentado também no PCN (paramentos curriculares nacional), que incentiva a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula. É apresentado o Geogebra e como utilizar suas principais ferramentas, bem como alguns exemplos. O texto apresenta conteúdos de Geometria Analítica e atividades a serem resolvidas em sala de aula, juntamente com os objetivos de cada uma e as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução das mesmas.

As atividades foram aplicadas aos alunos de três turmas de terceiros ano do Ensino Médio do turno matutino do Colégio Estadual Dom Bosco, situado na cidade de Jussara-Go, onde foi realizado uma pesquisa com os alunos sobre quais são os interesses que os mesmos possuem em relação às tecnologias, e se conheciam algum software matemático. Em seguida foi apresentado o Geogebra e como seria a metodologia a ser trabalhada. Realizou-se, também pesquisas bibliográficas a fim de conhecer conteúdos de Geometria a Analítica e como trabalhar com o software em sala de aula.

Capítulo 1

Motivação para a utilização do Geogebra

Atualmente, na escola, devemos criar meios de ensinos que possibilitem a nossos alunos o interesse pelas aulas, pois um aluno interessado terá um melhor aproveitamento dos conteúdos ensinados e, consequentemente, melhores condições de ter um bom desenvolvimento em sua vida escolar. Os jovens do mundo atual nasceram em meio a um grande desenvolvimento tecnológico. E eles estão bastante ligados ao mundo digital. Estão vivendo essa cultura voltada para as tecnologias e sentem-se atraídos por esse mundo de recursos tecnológicos que nos cercam, que está presente na vida de todos. Alguns se interessam pelo assunto, outros pouco se interessam. Os professores devem estar preparados para conviver com essas tecnologias juntamente com os estudantes, pois os recursos tecnológicos, se bem preparados por parte do professor, podem contribuir com o processo de ensino aprendizagem, mas, se não houver uma preparação, podem não ser proveitosas e entrar em descrédito por parte dos alunos. Os professos devem estar atentos aos avanços tecnológicos verificando se alguns podem ser úteis no seu trabalho, Fernando Hernandez diz "sugiro que os educadores prestem mais atenção aos conteúdos que circulam na Internet. Que rompam o discurso tradicional e dogmático do aprendizado". O Popular 23/10/2006.

Fundamentado no que diz Fernando Hernandez, devemos estar atentos aos interesses de nossos alunos, no nosso caso especificadamente sobre seus interesses pelas tecnologias, assim podemos aproveitar esse prévio interesse de nossos alunos em benefício do processo de ensino-aprendizagem, buscando métodos que contribuam com esse processo. Podemos também utilizar o interesse dos alunos em determinados conteúdos construindo uma interação com a Matemática para despertar no aluno o interesse por ela, assim ele terá maior facilidade em aprender.

> A implantação da Informática na educação consiste basicamente de quatro ingredientes: o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar a ferramenta educacional e o aluno. O ensino pelo computador implica que o aluno, através da máquina, possa adquirir conceitos sobre praticamente qualquer domínio. (apud Valente, 1993).

Sobre o que diz Valente, pretendemos utilizar o Geogebra como software educativo mas não somente como uma ferramenta de ensino de Geometria Analítica, também como uma ferramenta que motive o aluno a estudar e buscar mais conhecimentos e despertar o interesse pela Geometria Analítica. Ensinar Geometria utilizando recursos de informática ou até mesmo um software como o Geogebra exige uma boa preparação por parte do professor, pois, além de conhecer os conceitos de Geometria, terá também que ter um bom conhecimento do software a ser utilizado, pois deve orientar seus alunos sobre os recursos oferecidos por tal tecnologia e como tirar proveito disso em favor do seu aprendizado. O professor é o coordenador do processo, o responsável na sala de aula. Sua primeira tarefa é sensibilizar os alunos, motivá-los para a importância do conteúdo a ser lecionado, mostrando entusiasmo, ligação da matéria com o software e com os interesses dos alunos. Deve também deixar claro seus objetivos ao se propor o ensino com algum software. Além disso, o professor deve procurar saber como é o conhecimento da turma em relação à informática e às tecnologias. Com o Software Geogebra, que pode ser utilizado como um instrumento motivador para os alunos, pelas possibilidades de recursos que oferece, essa motivação aumenta, se o professor tem um bom relacionamento com a turma, se realiza uma preparação antes de entrar na sala de aula, se ele estimula os alunos a buscar conhecimentos, a estudar e investigar o que foi estudado. Cabe ressaltar a importância do ensino de Geometria Analítica que é o objeto de nossa investigação e o papel do computador dando uma dinâmica a esse ensino.

> A Geometria exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. Não é suficiente conhecer bem a aritmética, Álgebra ou Análise par conseguir resolver situações problemas." (Vergnaud, 1993, apud, FAINGUELERNT; 1999)

Baseando no que diz Vergnaud, percebemos que o aluno atualmente necessita de uma ferramenta para explorar e investigar os conceitos da Geometria, sendo mais específicos os conceitos de Geometria Analítica. Com isso, utilizaremos o Geogebra como ferramenta de investigar, explorar e descobrir estes conceitos para, em seguida, estar resolvendo situações problemas.

1.1 A Geometria na vida do aluno

A geometria está presente na natureza, e por essa razão descobrimos as formas geométricas já nos primeiros anos de vida. Quando observamos uma construção, conseguimos observar as diversas formas, triângulos, retângulo, círculos, dentre outras. A partir de observações das figuras geométricas que estão a nossa volta, conseguimos realizar estudos e investigar conceitos necessários para a elaboração de uma Geometria teórica.

> Dois aspectos importantes devem ser considerados nos processos ensino-aprendizagem de Geometria: a Geometria como uma ciência do espaço e a visão como uma estrutura lógica. A Geometria, desenvolvimento teorias de ideias e métodos para construir e estudar modelos idealizados do mundo físico, requer que a exploração e a descrição do espaço devam ser trabalhados desde os primeiros anos de escolaridade. A Geometria, nas suas raízes, é pensada como uma ferramenta para descrever o espaço e medir figuras. (Fainguelernt, 1993; Hershkowitz, 1994)

A partir do momento que começamos a fazer observações geométricas no espaço em que vivemos, começamos também a formar bases para um futuro estudo a respeito de Geometria. Dessa forma, quando começarmos a ter contado com as definições geométricas, teremos condições favoráveis para assimilar as definições da Geometria. Pode-se dizer que uma pessoa começa a conhecer Geometria onde se tem uma visualização do que representa cada figura geométrica. Daí em diante, quando a pessoa tiver a possibilidade de interagir e investigar as formas geométricas, ela poderá obter informações e tirar conceitos a respeito de cada uma.

Pensando na interação que o aluno deverá ter com a Geometria, podemos utilizar o software Geogebra como uma ferramenta para o aluno interagir e investigar os conceitos sobre Geometria Analítica. Além disso, o Geogebra pode ser utilizado como instrumento motivador para os alunos, pelas possibilidades de pesquisas, investigações e construções que oferece. Utilizando o software, os estudantes poderão investigar, testar e analisar os conceitos de Geometria Analítica e, com isso, tirar suas próprias conclusões, para que futuramente possam construir conceitos geométricos.

1.2 O que o aluno se interessa nas tecnologias

Como foi escrito anteriormente, o professor deve procurar saber como é o conhecimento da turma em relação à informática e às tecnologias, pensando nisso, foi realizada uma pesquisa em três turmas da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Dom Bosco na cidade de Jussara-GO. A pesquisa foi respondida por 55 alunos no dia 21 de Janeiro de 2015. A finalidade da pequisa é de conhecer a relação aluno/tecnologias. E para diagnosticar a relação aluno/tecnologias, eles responderam espontaneamente as seguintes perguntas:

1) Você utiliza o computador?

2) Se sim, com quais finalidades utiliza? Se não, quais são os motivos que não utiliza?

3) Você conhece algum software para se trabalhar com Matemática? Quais são? Já utilizou algum?

4) Você acredita que as tecnologias podem te ajudar a aprender Matemática? Justifique.

A primeira pergunta foi feita com o objetivo de saber qual a porcentagem de alunos que utiliza o computador.

50 alunos responderam que sim utilizam, 3 alunos que não utilizam, um aluno respondeu que é muito raro utilizar e um respondeu que utiliza mais ou menos.

Observando os resultados constatamos que:

Resposta	Porcentagem
Sim	90,91
Não	5,45
Muito raro	1,82
Mais ou menos	1,82
Total	100

Tabela 1.1: Você Utiliza o computador?

Podemos constatar que a grande maioria dos alunos pesquisados utilizam o computador e que poucos não utilizam ou pouco utilizam. Com isso podemos constatar que a maioria desses alunos têm um mínimo de conhecimento sobre o computador. Assim, já se pode apresentar a eles o software Geogebra, sem falar sobre o computador.

Na segunda pergunta o objetivo é saber com quais finalidades o aluno utiliza o computador. A pergunta deixava o aluno livre para responder o que quisesse. Poderia até colocar mais de uma finalidade para o uso, pois, assim, ele ficaria livre para colocar o que realmente ele faz. Vejamos os resultados na tabela a seguir. Os dados da próxima tabela estão relacionados aos 50 alunos que responderam que utilizam o computador

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem de alunos
Redes sociais	23	46%
Pesquisas escolares e estudos	38	76%
Notícias	3	6%
Não utilizo redes sociais	2	4%
Filmes, séries e músicas	7	14%
Utilizo no trabalho	7	14%
Entretenimento e diversão	6	12%
Obter conhecimento	1	2%
Baixar programas	3	6%
Obter informação	4	8%
Jogar	6	12%
Assistir a jogos	2	4%
Pesquisas alheias	2	4%
Dúvidas	2	4%
Blogs	1	2%
Youtube	3	6%
Sites de educação	1	2%
Instalação de programas	1	2%
Slides	2	4%

Tabela 1.2: Finalidades com que utiliza o computador

Veja que 76% dos alunos utilizam o computador para realizar pesquisas escolares e estudos, porém não foi perguntado como é realizada essa pesquisa. Se eles utilizam páginas confiáveis, se existe uma prévia avaliação do que é pesquisado e, principalmente, se essas pesquisas são orientadas por algum professor. A aluno deve ter maturidade ao realizar uma pesquisa na internet, pois ele corre vários riscos desde estar estudando algo de fontes duvidosas, até mesmo de estar fazendo uma mera cópia dos conteúdos encontrados na internet. Assim, esse aluno não estará obtendo conhecimento, muito menos produzindo. Quando o aluno vai realizar uma pesquisa, ele dever ser orientado por seus professores sobre o que se deve ser feito, e o professor, por sua vez, deve deixar claro os seus objetivos ao propor esse tipo de trabalho. Mais do que isso, deve esclarecer como esse trabalho será avaliado, pois assim ja é um bom começo de aproveitar esse interesse que os alunos têm por essa tecnologia.

Houve também uma grande porcentagem de alunos que disseram gostar de utilizar o computador para acessar redes sociais. Embora não colocaram a finalidade com que utilizam essas redes, podemos aproveitá-las de modo a incentivar esses alunos a estudar, podendo interagir com os mesmos. Veja o diz Brennand.

> [...] os impactos deste processo "o uso da web e seus recursos, como as redes sociais" na capacidade de aprendizagem social dos sujeitos, têm levado ao reconhecimento de que a sociedade em rede está modificando a maioria das nossas capacidades cognitivas. Raciocínio, memória, capacidade de representação mental e percepção estão sendo constantemente alteradas pelo contato com os bancos de dados, modelização digital, simulações interativas, etc. (BRENNAND, 2006, p.202)

Os impactos que o aproveitamento dessas redes sociais podem trazer para a educação são muitos, mas acreditamos que o mais importante é a possibilidade de interação entre os alunos e professores, podendo, assim, discutir diversos temas relacionados ao ensino mesmo estando à distância. Essa facilidade de comunicação, se bem explorada, pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem, pois comunicando-se também se aprende.

Dos três alunos que responderam que não utilizam o computador, dois disseram que é por não possuir computador em casa. A que disse que utiliza mais ou menos é porque utiliza somente em pesquisas escolares e para olhar datas de concurso. Por fim, a que disse que é muito raro utilizar, faz seu uso apenas para acompanhar o programa jovem aprendiz.

Como já foi mencionado, o principal objetivo da segunda pergunta é de conhecer o que os alunos estão buscando na utilização das tecnologias, para assim podermos fazer uma preparação para trabalhar algum modelo de tecnologia, no nosso caso, trabalhar com o Geogebra.

Na terceira pergunta procuramos saber se os alunos conheciam algum software matemático. Vejamos os dados na tabela:

Resposta	Número de alunos	Porcentagem
Sim	15	30%
Não	35	70%

Tabela 1.3: Você conhece algum software matemático?

Abaixo encontra-se a tabela sobre quais softwares matemáticos os alunos conhecem

Software	Número de alunos
excel	11
calculadora	3
maple	2
cbill	1

Tabela 1.4: Softwares conhecidos

Podemos diagnosticar que a maioria não conhece nenhum software matemático e dos que conhecem a maioria citou que conhece o excel, um programa que pouco se assemelha com o que queremos utilizar. Com isso, devemos elaborar uma prévia apresentação do que é um software matemático e como o Geogebra poderá ser útil no Ensino de Matemática, o que será feito no segundo capítulo.

A quarta pergunta teve como objetivo observar se os alunos acreditam que os recursos tecnológicos podem ajudá-los a aprender Matemática. Todos responderam que sim, a tecnologia pode nos ajudar a aprender Matemática. Os motivos que levaram a responder afirmativamente a pergunta são:

Possibilidade e facilidades de pesquisa que a internet oferece;

Que um software pode tornar o ensino de matemática mais atrativo;

Como as tecnologias ajudam em tantas outras coisas, poderiam também ajudar na Matemática;

Que os jovens são mais ligados em tecnologia;

Pela possibilidade de maneiras de se aprender;

Pelas informações que podem ser encontradas na internet;

Porque aumenta a praticidade;

Pela forma com que se colocam situações complexas;

Pela rapidez de resolver determinadas contas e gráficos.

Esses foram os principais motivos que eles alegaram: as tecnologias podem ajudá-los. Resta agora responder a eles como que o Geogebra pode contribuir com o aprendizado. Ele é um software livre e gratuito que possibilita ao aluno investigar vários problemas matemáticos, e com isso, contribuir para a resolução dos mesmos, possibilitando que os estudos em Matemática tornam mais atrativos, além disso, existe no software a possibilidade de realizar diversas animações, o que pode atrair a atenção dos jovens. Também é um software que trabalha diretamente com as construções geométricas ou pode utilizar funções ou equações para construir determinados gráficos e, assim, poder realizar uma analise de conceitos matemáticos.

1.3 Por que utilizar o Geogebra em sala de aula?

É notório o avanço das tecnologias em nossa sociedade. Nos últimos anos, elas estão contribuindo com as mais diversas áreas da sociedade. Em uma fazenda, uma indústria, em nossas casas e na escola, elas estão presentes. A escola tem o papel de mostrar esse desenvolvimento para os alunos e também de incentivá-los a conhecer esses recursos. Os professores devem procurar, nas tecnologias, recursos que possam ser adequados pedagogicamente para a utilização em sala de aula. Hoje existe uma infinidade de softwares voltados para o ensino e aprendizagem em Matemática, cada um com suas particularidades. O professor, ao decidir utilizar um software em suas aulas precisará analisar se o software escolhido é adequado para o conteúdo a ser lecionado, se será possível atingir os objetivos propostos no planejamento. Deverá, ainda elaborar um planejamento das suas aulas deixando claro os objetivos que se quer alcançar fazendo o uso desse recurso e, por fim, terá que apresentar o software aos alunos para que esses possam obter um prévio conhecimento do recurso a ser utilizado.

O Geogebra é um software para se trabalhar com diversas áreas da Matemática, entre elas a Geometria Analítica, pois ele apresenta em sua janela de gráficos um sistema de coordenadas cartesianas onde se pode construir gráficos de retas, círculos, cônicas dentre uma diversidade de figuras geométricas. Ele também permite manipular esses gráficos, podendo, assim, explorar os conceitos e definições dos mesmos. Através dessa exploração que o software permite, aliada a uma boa preparação das aulas por parte do professor, os alunos podem aprender os diversos conceitos de Geometria Analítica. Nesse processo, o professor deverá assumir o papel de orientador, mostrando o que deve ser feito individualmente pelos alunos para se atingir os objetivos.

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46)

Não é papel da escola apresentar cursos voltados para determinadas tecnologias, mas seu papel é de conhecer os recursos e verificar se podem ser utilizados em alguma disciplina. No caso da Matemática, foi escolhido trabalhar como o software Geogebra por ser gratuito, ter uma boa interface gráfica, facilidade de se trabalhar com seus comandos e podendo, em um estudo mais aprofundado, realizar programações. Outro fato importante a mencionar sobre o Geogebra é a facilidade de se encontrar material de apoio quanto à sua utilização e também em relação ao número de possibilidades de trabalho que ele permite. Outro fato a ser citado é que ele é um software que permite realizar manipulações em figuras geométricas e gráficos já construídos, permitindo, assim, a exploração de conceitos matemáticos das figuras geométricas. Outro ponto forte é a qualidade gráfica das figuras construídas, o que contribuirá com estudos das mesmas. Os PCN nos mostram que devemos utilizar ferramentas tecnológicas na escola. Na educação entende-se como tecnologias os recursos utilizados no processo de ensino e aprendizagem. Assim o quadro negro, o lápis, a régua, o compasso, etc. podem ser considerados uma tecnologia.

> Anteriormente, outras tecnologias foram introduzidas na educação. A primeira revolução tecnologica no aprendizado foi provocada por Comenius (1592-1670), quando transformou um livro impresso em ferramenta de ensino e de aprendizagem, com a invenção da cartilha e do livro-texto. Sua ideia era utilizar esses instrumentos para viabilizar um novo currículo, voltado para a universalização do ensino. Hoje, apesar de se supor que atingimos um ensino universalizado quanto ao acesso, o mesmo não se pode afirmar quanto a democratização do conhecimento. (PROINFO, 2000, p. 13)

Novas tecnologias surgem a cada momento, podendo algumas serem utilizadas na escola ou não. Cabe ao professor, grupo gestor e pedagógico averiguar se é possível essa utilização. O professor e grupo pedagógico deve averiguar as relações que o software tem com o aprendizado. Se poderá contribuir com o ensino e com o cumprimento dos objetivos previstos para a disciplina. Ao grupo gestor cabe a criação de condições para se trabalhar com as tecnologias, tais como, organização do laboratório de informática, aquisição de hardwares e softwares a serem trabalhados em sala de aula. Existem leis que proíbem a utilização de algumas tecnologias, um exemplo é o uso dos telefones celulares, que no estado de Goiás foi proibido dentro de salas de aulas pela lei estadual nº 16993 de 10 de maio de 2010. Essas leis surgiram pelo fato de essa tecnologia, além de não estar contribuindo para a aprendizagem, estava prejudicando. Por outro lado existem softwares que podem ser instalados em smartphones com o objetivo de construir aprendizagem. Nesse caso o aluno deverá ter a responsabilidade de que está utilizando o aparelho para adquirir conhecimento e não como entretenimento. Por isso, ao se permitir a utilização de determinada tecnologia na escola, deve-se pesquisar se ela e apropriada e se não vai gerar transtornos. O professor deve orientar os alunos em relação a utilização ou não dessas tecnologias, mostrando os pontos positivos e negativos de cada uma.

Segundo Papert, "devemos mostrar para o aprendiz que não é o computador que o domina, e sim, ele que domina o computador". Quando o computador é usando simplesmente como transmissor de conteúdo, percebemos que não se desperta a imaginação e a criatividade em nossos alunos. Mas, quando a aluno domina o computador, quando ele começa a transmitir informações para a máquina, ele sentirá a necessidade de utilizar sua imaginação para criar o que lhe interessa dentro da máquina.

Não devemos utilizar o computador simplesmente como mero ilustrador de nossas aulas, mas devemos utilizá-lo como uma ferramenta que auxilia no processo ensino-aprendizagem. Também não devemos ficar presos somente ao uso do computador e esquecer as inúmeras ferramentas metodológicas existentes. Cada uma tem um importante papel no processo de ensino aprendizagem, porém devemos fazer uma interação entre o novo e o velho. Devemos trabalhar de forma que possamos contribuir o máximo para a aprendizagem de nossos alunos.

> Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000, p. 44)

Ao se ensinar Geometria, utilizando desenho representados no quadro negro, o aluno pode não fazer uma leitura adequada para resolver determinados problemas. No momento em que ele vê a figura desenhada em um livro, ele terá uma nova visão dela. Utilizando um software como Geogebra, além de o aluno ter uma visualização da figura, ele pode interagir com ela, mudando de posição, alterando medidas e, com isso, ele vai formulando suas conclusões. Porém, na educação, uma tecnologia não vem substituir a outra, podendo sim, acrescentar e suprir as dificuldades encontradas em outra. Por exemplo, representar o gráfico em três dimensões no papel utilizando um lápis pode ser uma tarefa cansativa e demorada, mas utilizando um software poderá ser uma tarefa simples. No entanto, deve-se ter o cuidado com a utilização de softwares. Para construir uma figura no papel, ele deve conhecer todo o processo de construção dessa figura. Já no software, ele deve saber utilizar seus comandos, por isso, ao propor a construção de gráfico com um software, esse deverá permitir a interação, pois assim será possível conhecer o processo de construção da figura proposta.

Capítulo 2

Conhecendo o Geogebra

2.1 Configurando o Geogebra

Nesse capítulo traremos um relato sobre o software Geogebra e suas várias ferramentas e como utilizar cada uma delas dando ênfase à contribuição de cada uma no processo de ensino e aprendizagem em Geometria Analítica.

> O Geogebra é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores (HOHENWARTER, 2009, p. 06)

Veja a tela inicial do Geogebra na figura 2.1, onde será apresentado como encontrar cada ferramenta e em seguida como utilizá-las para termos um bom aproveitamento do software no processo de ensino aprendizagem. Pode-se observar que a tela inicial do Geogebra é parecida com um software qualquer, com o qual os estudantes ja estão habituados a utilizar. É apresentado um campo de entrada e duas janelas a de visualização e a de álgebra.

O campo de entrada é o local onde digitamos as equações, pontos, funções, segmento, emfim, uma série de comandos para que seja construído o gráfico ou a figura geométrica a ser apresentada na janela de visualização e as equações a serem apresentadas na janela de álgebra. A janela de visualização é onde serão apresentados os gráficos, figuras geométricas e desenhos, que poderão ser construídos através do campo de entrada ou utilizando algumas das ferramentas apresentadas da faixa superior do Geogebra. Na Janela de álgebra serão mostradas as equações, funções e demais representações algébricas do que está sendo apresentado na janela gráfica.

Como exemplo, ao digitar a equação da elipse $x^2 + 2y^2 = 5$ no campo de entrada o programa construirá seu gráfico. Será fácil localizar o gráfico e sua equação. Veja figura:

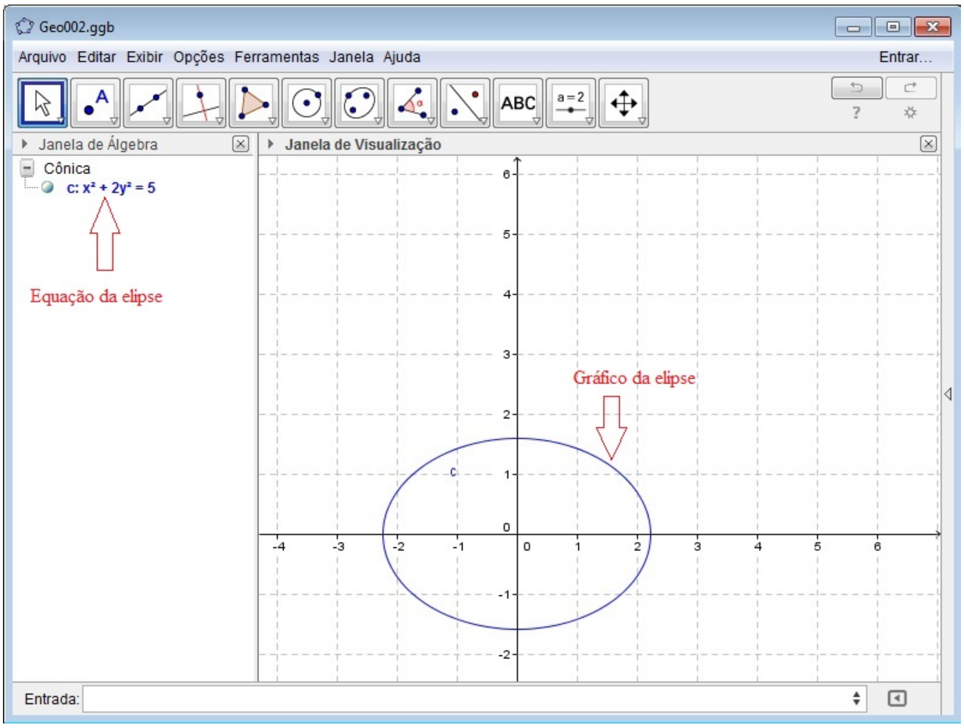


Figura 2.1: Exemplo de janela gráfica e algébrica

A figura acima ilustra como podemos encontrar nas janelas a equação e o gráfico das mesmas.

Antes de relatarmos sobre os comandos, mostraremos como configurar o Geogebra para termos um melhor aproveitamento de nosso estudo. Primeiro, clique com o botão direito do mouse na janela gráfica. Aparecerá uma janela onde deverão estar selecionados eixos e malha para que esses possam aparecer na janela como nas ilustrações acima.

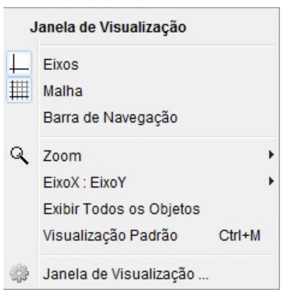


Figura 2.2: Configuração da janela de visualização

2.2 Algumas Ferramentas do Geogebra e como utilizá-las

Aqui serão apresentadas as principais Ferramentas do Geogebra e como utilizá-las de maneira que o estudante possa adquirir conhecimentos, investigar, interagir e resolver problemas sobre Geometria. As ferramentas são encontradas na barra superior do software, como na figura a seguir.

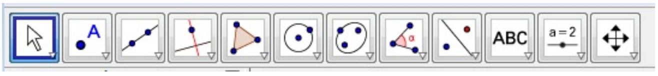


Figura 2.3: Barra superior

Ao clicar em um ícone da barra superior, uma nova janela se abrira e é nela que se deve selecionar a ferramenta que se deseja utilizar. Elas poderão ser.

2.2.1 Ferramenta Mover

Figura 2.4: Ferramenta Mover

É utilizada para mover e localizar objetos que se encontram construídos na janela de visualização. Ao se construir uma figura ou um gráfico no Geogebra, pode-se, futuramente, ter que movê-lo de acordo com determinadas necessidades impostas pelo problema que se está resolvendo. Por isso, essa ferramenta é muito útil no trabalho com o software.

2.2.2 Ferramenta Ponto

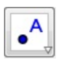


Figura 2.5: Ponto

Essa ferramenta é utilizada para marcar, construir e localizar pontos no sistema de coordenadas cartesianas. Isso será feito na janela de visualização, o que permitirá ao aluno Marcar e encontrar os pontos com facilidade, podendo, assim, fazer um estudo das localizações no plano cartesiano e as relações entre pontos, quantos pontos determinam uma reta, quando eles são colineares e outras relações que se jugarem necessárias. Outra maneira de localizar um ponto é digitando suas coordenadas na caixa de entrada. Por exemplo, para localizar o ponto $A = (-2, 3)$ deverá ser digitado como na figura abaixo, na linha inferior entrada:

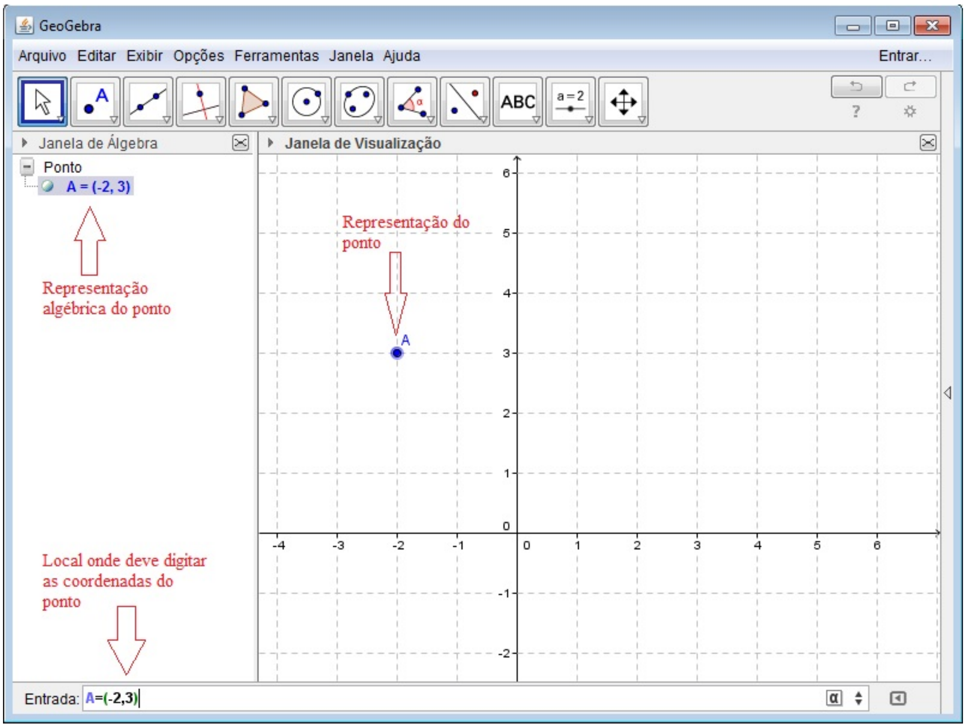


Figura 2.6: Ponto localizado na janela de visualização

Como vimos acima existem duas maneiras de se construir um ponto, digitando as coordenadas ou clicando na ferramenta ponto e em seguida na janela de visualização. Caberá ao estudante decidir qual é a melhor e em que caso será mais vantajoso ou preciso utilizar uma ou a outra.

2.2.3 Ferramenta ângulo

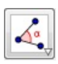


Figura 2.7: Ângulo

A ferramenta ângulo é utilizada para medir o ângulo entre duas retas, semirretas e segmentos. Para utilizar a ferramenta basta ter previamente construído os dois objetos que se deseja medir o ângulo formado entre eles. Para isso basta clicar sobre o primeiro objeto e em seguida sobre o segundo, o Geogebra determinará assim o ângulo entre os dois objetos. No caso de retas, dos quatro ângulos dois menores e dois maiores iguais.

2.2.4 Ferramenta vincular e desvincular ponto

Figura 2.8: Vincular/Desvincular ponto

A ferramenta é utilizada para vincular um ponto a uma curva, isto é, fazer com que o sistema entenda que um determinado ponto pertence a uma curva dada. Para utilizá-lo basta selecionar o ponto e em seguida a curva. Por exemplo para vincular o ponto $A = (m, n)$ à curva $y = x^5 - 3x^3 + 2$, basta clicar sobre o A e em seguida sobre a representação da curva. Observação: para construir a curva $y = x^5 - 3x^3 + 2$ ela deverá ser digitada na caixa de entrada como está representada na figura, veja que o Geogebra fornece as coordenadas onde foi clicado sobre a curva:

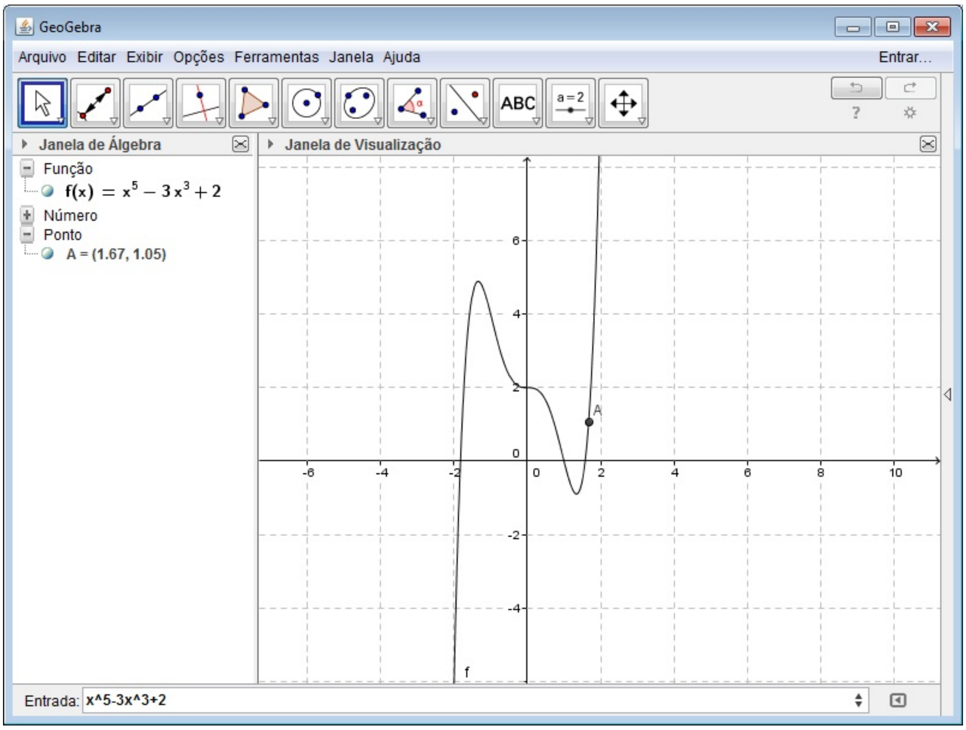


Figura 2.9: Exemplo de vincular ponto

2.2.5 Ferramenta interseção de dois objetos

Figura 2.10: Interseção de dois objetos

Utilizada para determinar quando houver, os pontos de interseção entre dois gráficos representados na janela de visualização. Para utilizá-la, basta selecionar um gráfico e em seguida o outro que possui um ou mais pontos comuns. Para o aluno é uma ferramenta útil na resolução de determinados problemas, pois ajuda na precisão de encontrar esses pontos e também na praticidade. Vejamos como utilizar essa ferramenta no problema a seguir.

Exemplo 2.1. Encontre os pontos de interseção entre os gráficos das curvas $f(x) = x^2 + 3x + 2$ e $g(x) = -x + 2$.

Para solucionar o problema, o aluno deverá primeiramente construir os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e em seguida utilizar a ferramenta interseção de dois objetos para encontrar os pontos. A representação algébrica dos pontos é facilmente encontrada na janela de álgebra. São eles $A = (-4, 6)$ e $B = (0, 2)$. Vejam a resolução na figura abaixo:

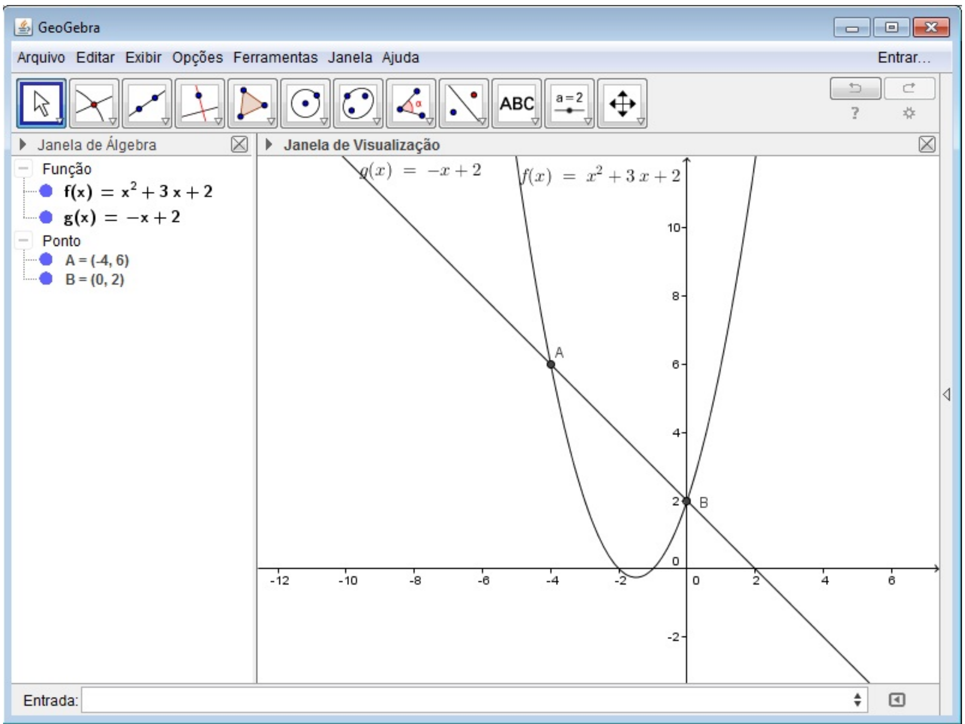


Figura 2.11: Exemplo de interseção de dois objetos

2.2.6 Ferramenta ponto médio ou centro

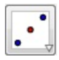


Figura 2.12: Ponto médio ou centro

Ao clicar neste ícone, dado um segmento, este localiza o ponto médio d0 segmento ou a distância média entre os dois pontos extremos. Para utilizá-la, basta selecionar um ponto extremo do segmento e em seguida o outro e automaticamente o sistema localizará o ponto médio. Essa ferramenta pode ser utilizada para resolver diversos problemas que envolvam a localização de ponto médio ou centro. Veja o problema abaixo:

Exemplo 2.2. Dados os pontos A e B, como mostrado na foto, retrata o encontro dos Rios Araguaia e Garças nas cidades de Aragarças, Barra do Garças e Pontal do Araguaia. O ponto A se localiza na margem do rio que fica em Aragarças e o ponto B na margem que fica em Barra do Garças, de modo que o segmento formado pelos pontos A e B formam um ngulo de 90° com ambas as margens. Encontre o ponto do segmento AB que se localiza no meio do rio, isto é exatamente na fronteira entre as cidades de Aragarças e Barra do Garças.

Figura 2.13: Exemplo de ponto médio

Para resolver o problema basta o aluno selecionar a ferramenta ponto médio e em seguida clicar sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto B. Mais à frente veremos como construir um segmento com suas medidas. Para alterar a cor dos objetos devemos clicar com o botão direito sobre ele e em seguida clica-se em propriedade selecionando a cor.

Como vimos no exemplo, o Geogebra permite trabalhar com figuras colocando-as na janela gráfica. Para isso basta utilizar a ferramenta inserir imagem. Colocar uma imagem em um problema matemático é uma maneira de atrair a atenção do aluno, uma vez que a atenção do aluno é primordial na resolução de problemas. A contextualização através de imagem não é primordial na resolução de problemas matemáticos, mas pode ajudar os alunos a aproximar a Matemática aprendida na escola com o seu cotidiano.

2.2.7 Ferramenta homotetia

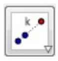


Figura 2.14: Homotetia

É utilizada para dividir um segmento em uma quantidade de partes iguais. Para isso deve-se selecionar um ponto extremo de um segmento e em seguida o outro e digitar a fração onde o numerador representa o número da parte e o denominador a quantidade de partes que o segmento deverá ser dividido. Por exemplo, para dividir um segmento em três partes iguais deve-se digitar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

2.2.8 Ferramenta reta

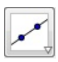


Figura 2.15: Reta

A ferramenta faz o gráfico de uma reta definida por dois pontos. Para utilizá-la, basta criar os dois pontos, em seguida com a ferramenta selecionada clicar sobre um e depois sobre o outro ponto obtendo assim a reta determinada por esses dois pontos.

Exemplo 2.3. Dados quatro pontos, três a três não colineares, quantas retas são definidas por esses pontos?

Para a resolução do problemas, o aluno deverá construir os quatro pontos respeitando as condições impostas, e em seguida, as retas determinadas por cada dois pontos que estão construídos. Para resolver o exercício o aluno deve contar quantas retas podem ser formadas, nesse caso formou-se 6 retas, como pode ser comprovado pela figura 2.16.

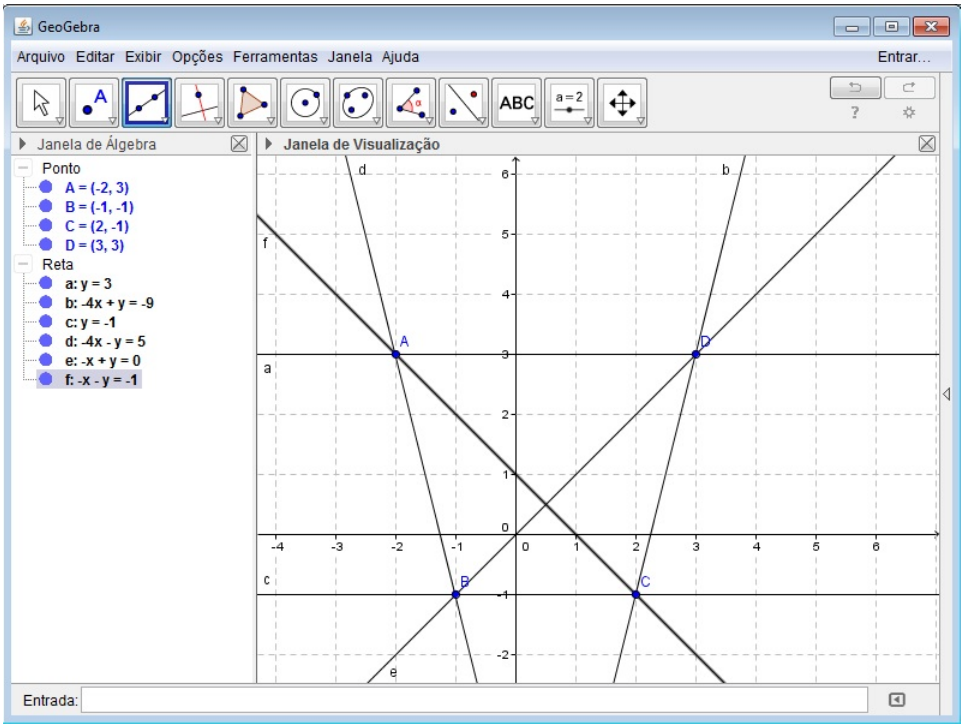


Figura 2.16: Exemplo sobre retas

2.2.9 Ferramenta Segmento

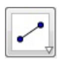


Figura 2.17: Segmento

Assim como na ferramenta anterior, antes de se construir um segmento devemos ter dois pontos previamente construídos na janela de visualização do Geogebra e, por fim, clicar sobre o primeiro e em seguida sobre o segundo ponto. Também poderá marcar o segmento diretamente, isto é, sem a necessidade de dois pontos previamente marcados, clicando em um ponto e arrastando o cursor até outro ponto.

2.2.10 Ferramenta Semirreta

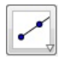


Figura 2.18: Semirreta

Analogamente às duas anteriores, deve-se ter dois pontos determinados e em seguida clicar sobre os dois. O primeiro ponto a ser clicado será a origem da semirreta.

2.2.11 Ferramenta reta perpendicular

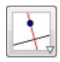


Figura 2.19: Reta perpendicular

Essa ferramenta é utilizada para se construir uma reta perpendicular. Ao utilizá-la deve-se previamente, ter uma reta construída e em seguida com a ferramenta reta perpendicular selecionada basta clicar na reta e em um ponto fora da reta já construída.

Exemplo 2.4. Qual deve ser o valor de k para que as retas r e s de equações $r : kx+y-2 = 0$ e $s : (2k+1)x - y = 4$ sejam perpendiculares?

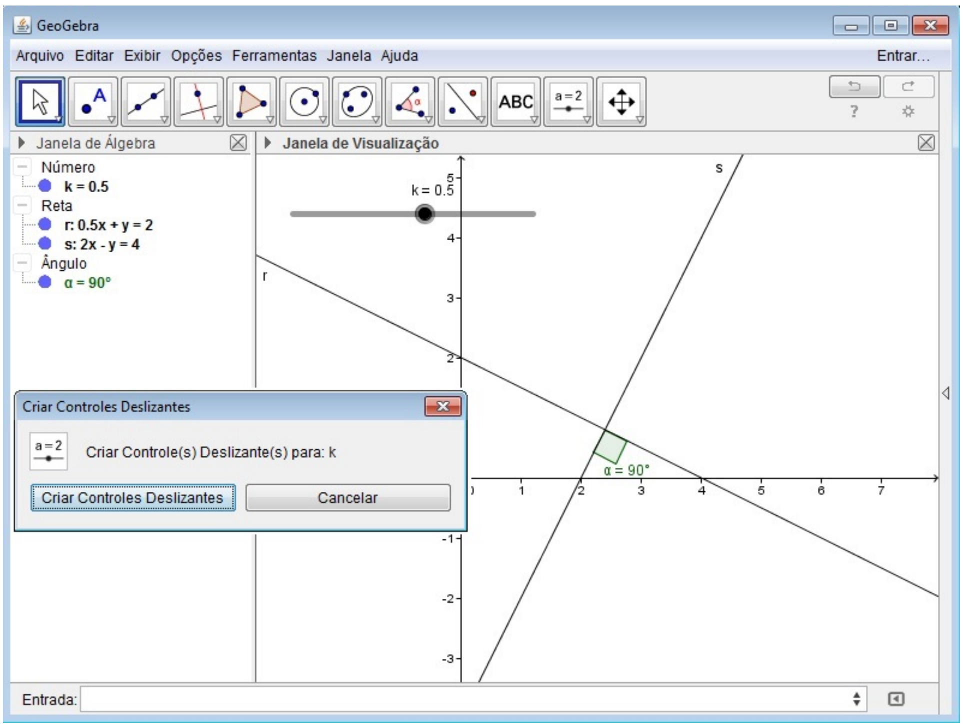


Figura 2.20: Exemplo sobre retas perpendiculares

O primeiro passo para a resolução do exercício é digitar a equação da reta r no campo de entrada e confirmar clicando na tecla enter do computador. Em seguida, o Geogebra vai perguntar se o usuário deseja criar controles deslizantes para k. Ele deverá criar, observação, controles deslizantes são onde manipula-se, os valores que k poderá assumir. Em seguida, deverá digitar a equação s assim como foi feita com a anterior. Veja a Figura 2.20.

Para resolver o exercício e medirmos o ângulo entre as duas retas. Para isso utilize a ferramenta ângulo como está explicado no Tópico 2.2.3. Apos medir o ângulo o aluno deverá, com a ferramenta mover selecionada, manipular o valor de k no controle deslizante. Quando o ângulo entre as duas retas for de 90° saberemos que as retas r e s são perpendiculares. Assim basta o aluno observar o valor de k que aparecerá na janela de álgebra. Para esse problema temos dois possíveis valores que são $k = -1$ ou $k = \frac{1}{2}$. Veja na figura 2.20 o problema resolvido para $k = \frac{1}{2}$.

2.2.12 Ferramenta reta paralela

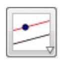


Figura 2.21: Reta paralela

Utilizada para construir uma reta paralela a uma reta dada. Para fazer o uso da ferramenta deve-se ter uma reta construída e com essa ferramenta selecionada clicar sobre a reta dada e sobre um ponto fora dela.

Exemplo 2.5. Quais devem ser os possíveis valores de m para que as retas r e s de equações $mx + y - 3 = 0$ e $(2m + 6)x - y = 9$, respectivamente, sejam paralelas?

Para o aluno resolver esse exercício, ele deverá construir a representação gráfica das duas retas, medir o ângulo entre as duas, e em seguida, manipular o valor de m até que se encontre um ângulo de 180° ou 0°. Aí sim, as retas r e s serão paralelas e nesse caso $m = -2$.

Outra maneira de resolver o exercício é marcar o ponto de intercessão entre as duas retas e manipular o valor de m até que esse ponto apareça como indefinido na janela de álgebra.

Veja que, $r : y = -mx + 3$ e $s : y = (2m + 6)x - 9$, das duas equações temos que,

$$(2m + 6)x - 9 = -mx + 3$$

$$(3m + 6)x = 12$$

$$x = \frac{12}{(3m + 6)}$$

Veja que não existe valor de x para $3m + 6 = 0$ logo não existira a intercessão entre as duas retas, , isto é se $m = -2$ as duas retas serão paralelas.

2.2.13 Ferramenta mediatriz

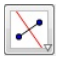


Figura 2.22: Mediatriz

Essa ferramenta é utilizada para construir a mediatriz. Com um segmento de reta já construído, clique sobre um ponto extremo do segmento e em seguida sobre o outro, ficara, assim, construída a reta mediatriz.

2.2.14 Ferramenta bissetriz

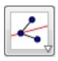


Figura 2.23: Bissetriz

Constrói-se a bissetriz de um ângulo. Antes de utilizar a ferramenta deve-se ter um ângulo BÂC previamente construído na janela do Geogebra. Observe que esse ângulo tem como vértice o ponto A e, para construir a bissetriz, deve-se clicar em um dos pontos B ou C e em seguida sobre o vértice A e, por último sobre o outro ponto, o que não foi escolhido no primeiro clique B ou C. Ficará, assim, construída a bissetriz do ângulo $\angle BC$.

2.2.15 Ferramenta reta tangente

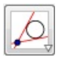


Figura 2.24: Reta tangente

A ferramenta reta tangente, pode ser utilizada de duas maneiras. Primeiro, construindo um ponto sobre uma curva, em seguida com a ferramenta selecionada clicar sobre a curva e depois sobre o ponto. O outro modo é construir um ponto fora da curva, selecionar a ferramenta, clicar sobre a curva e, em seguida, sobre o ponto construído.

2.2.16 Ferramenta polígono

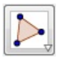


Figura 2.25: Polígono

Essa ferramenta faz a representação de um polígono determinado por três ou mais pontos. Além disso, ela também fornece a área desse polígono. Para encontrar a área basta localizar a palavra “pol” acompanhada de um número que representa o polígono. Exemplo “pol1”, o valor da área será o número que aparece na igualdade exemplo “pol1 = 265.12”, nesse caso, a área do polígono 1 é $265,12$. Vale lembrar que no Geogebra a unidade de medida de áreas é o centímetro quadrado.

2.2.17 Ferramenta círculo

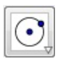


Figura 2.26: Círculo dado o centro e um de seus pontos

Para utilizar a ferramenta marque, um ponto que será o centro do círculo e, em seguida, outro ponto que pertencerá à circunferência. Com a ferramenta selecionada, clique sobre o centro e em seguida sobre o outro ponto. Outra maneira de construir um círculo é digitando sua equação na janela de entrada do Geogebra. Pode ser feito também um círculo dados o centro e a medida do raio e para isso basta utilizar a ferramenta “Círculo dado centro e raio”

2.2.18 Ferramenta elipse

Figura 2.27: Elipse

Para utilizar a ferramenta deve-se ter os dois focos e um ponto da elipse construídos na janela de visualização. Selecione a ferramenta elipse, clique sobre o primeiro foco, sobre o segundo foco e, por último sobre o ponto. Pode-se também construir o gráfico de uma elipse conhecendo sua equação, para isso basta digitar a equação na janela de entrada.

Exemplo 2.6. Construa o gráfico da equação da elipse $x^2 - 2xy + 4y^2 - 30x + 40y = 90$.

Para resolver o problema o aluno deverá digitar a equação na janela de entrada e teclar enter que o software encarregará de construir o gráfico. Veja a figura:

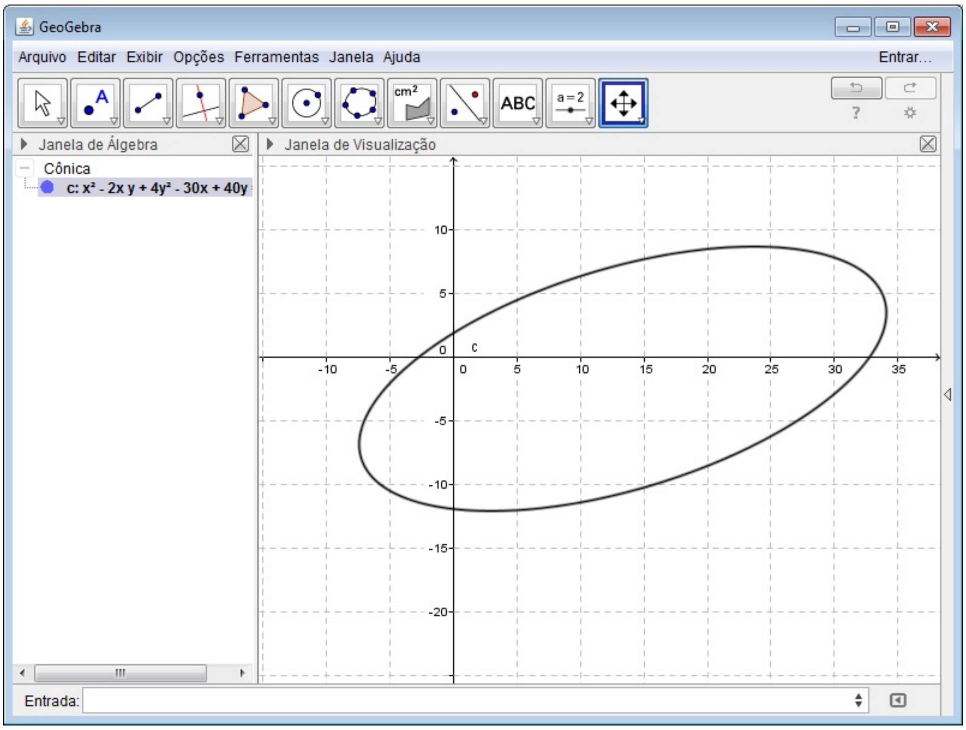


Figura 2.28: Exemplo sobre elipse

2.2.19 Ferramenta hipérbole

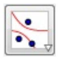


Figura 2.29: Hipérbole

Essa ferramenta deve ser utilizada após conhecer os vértices e um ponto da hipérbole. Deve-se clicar sobre ambos os vértices e, em seguida, sobre o ponto pertencente à hipérbole. Assim, como na Elipse, pode-se também obter o gráfico de uma hipérbole digitando sua equação na janela de entrada.

2.2.20 Ferramenta parábola

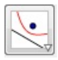


Figura 2.30: Parábola

Para utilizar a ferramenta devemos construir primeiro a reta diretriz e depois um ponto que será o foco. Com a ferramenta selecionada clique sobre o foco e, em seguida, sobre a diretriz. A parábola também pode ser construída digitando sua equação.

2.2.21 Ferramenta cônica por cinco ponto

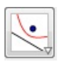


Figura 2.31: Cônica por cinco pontos

Como o próprio nome sugere, essa ferramenta constrói o gráfico de uma cônica definida previamente por cinco pontos. Para isso basta construir os pontos na janela de visualização e depois com a ferramenta selecionada clicar sobre os cinco pontos.

Exemplo 2.7. Verifique qual é a cônica determinada pelos pontos $A = (-2, -2), B = (-2, 1), C = (2, 3), D = (3, -1)$, e $E = (2, -5)$, e qual é sua equação?

O aluno deverá construir os pontos e em seguida com a ferramenta selecionada, clicar sobre os cinco pontos, não importando a ordem que será clicado, mas vale lembrar que o Geogebra construirá o gráfico somente quando todos os pontos forem selecionados.

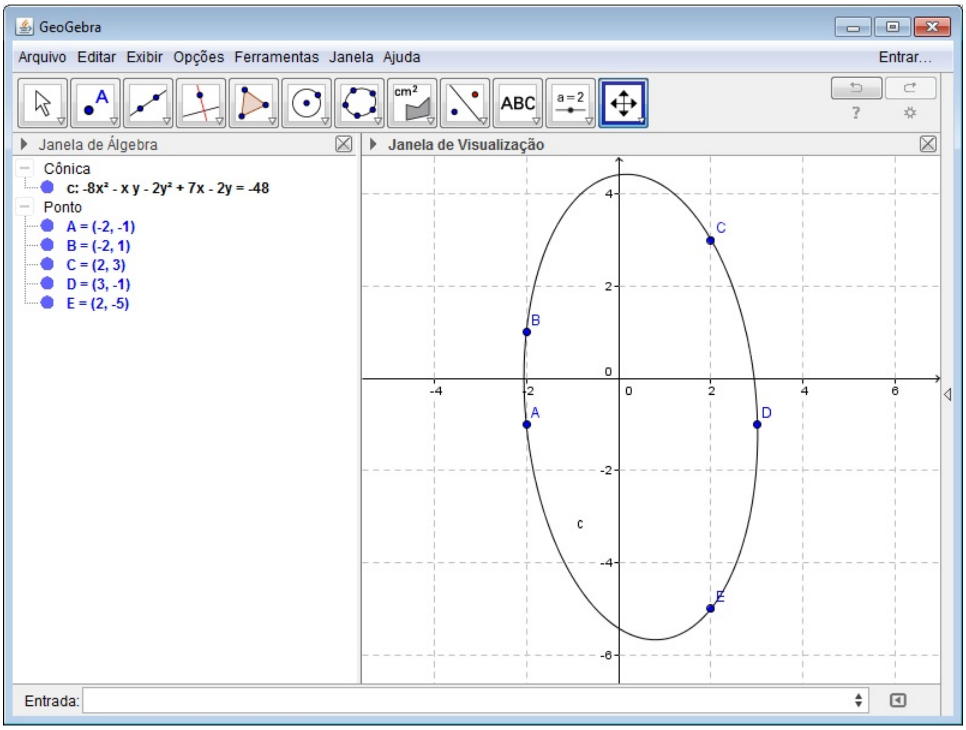


Figura 2.32: Cônica por cinco pontos

Veja na figura que essa cônica é uma elipse e sua equação pode ser encontrada na janela de álgebra e é $-8x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 2y = -48$

Capítulo 3

Geometria Analítica e o Geogebra

O conteúdo de Geometria Analítica está presente no currículo do ensino médio das escolas brasileiras é um conteúdo que exige do aluno conhecer representações geométricas, bem como trabalhar com álgebra. Uma maneira de se estudar a Geometria Analítica, é partir de uma representação geométrica de um determinado problema e, a partir daí, realizar interpretações para formular as definições, teoremas, propriedades e conceitos algébricos sobre o conteúdo.

> A Geometria Analítica tem por objetivo conciliar os fatos geométricos com as relações algébricas. Permite, assim, que a Álgebra e a Geometria se relacionem, o que possibilita um estudo sistemático das figuras geométricas, bem como, reciprocamente, a interpretação geométrica das relações algébricas. (IEZZI, 2004, p. 80)

Quando temos um desenho geométrico elaborado por uma definição, podemos realizar sobre ele interpretações com o objetivo de encontrar algum conceito algébrico. Por exemplo, se desenhamos duas retas concorrentes no plano cartesiano, facilmente o aluno percebe que essas duas retas têm um ponto em comum. Conhecendo-se dois pontos de cada uma dessas retas, o aluno pode realizar alguns cálculos e obter as equações das retas. Teremos, assim, um conceito algébrico. Mais adiante, poderá resolver um sistema formado pelas equações das duas retas e obter como resultado o ponto de interseção das retas. Temos, assim, um conceito algébrico para o ponto de interseção das duas retas, isto é, a solução do sistema de equação é o ponto comum às duas retas.

No Geogebra podemos construir figuras geométricas e consequentemente explorar seus conceitos algébricos, pois uma das funções desse software é a de relacionar álgebra e geometria. Veremos a seguir alguns conteúdos de Geometria Analítica e como resolver algumas atividades e problemas sobre o conteúdo utilizando o Geogebra.

3.1 O estudo do ponto com o auxílio do Geogebra

Quando o aluno começar a conviver com formas geométricas e a estudar a Geometria, ele começará também a ter a noção do conceito de ponto, por vezes aparecem algumas dúvidas sobre tal conceito. O que na verdade representa um ponto? Qual o tamanho do ponto? Para que serve um ponto? Mas sabemos que o ponto é um conceito primitivo, ele não tem tamanho peso e nem parte, mas em Geometria Analítica ele serve para indicar uma posição que está orientada por alguns fatores ou sistemas definidos, como por exemplo o sistema de coordenadas cartesianas, polares, esféricas, etc. O ponto geralmente é indicado por uma letra maiúscula de nosso alfabeto e ele pode ser localizado tanto no plano quanto no espaço.

3.1.1 O plano cartesiano

O plano cartesiano é um sistema de eixos orientados compostos por uma reta horizontal chamada de eixo abscisso, geralmente é indicado pela letra Ox e uma vertical chamada de eixo ordenado, geralmente é indicado pela letra Oy. Essas duas retas são concorrentes e o ângulo entre elas vale 90°. O seu criador foi o filósofo francês Renê Descartes (1596-1650) com a ajuda do matemático Pierre de Fermat (1601-1665). Veja imagem:

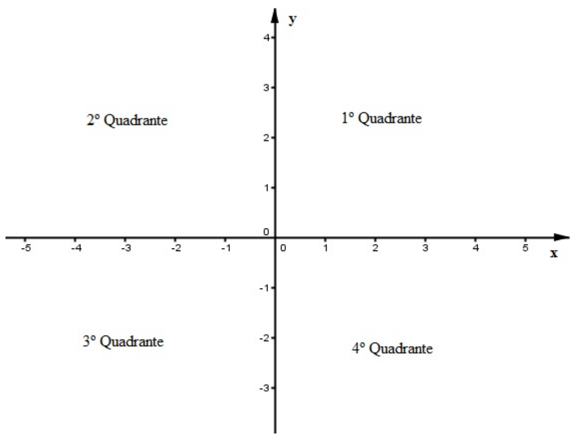


Figura 3.1: Plano cartesiano

Os eixos orientados x e y ortogonais dão origem a quatro partes, cada uma delas chamada de quadrante. Para orientar os eixos, diz-se que o ponto de encontro dos eixos é chamado de origem do sistema e este representa o ponto $(0,0)$, à direita e acima da origem encontram-se valores positivos, à esquerda e abaixo da origem, encontra-se valores negativos e os valores aparecem nos eixos de forma ordenada.

Genericamente representamos um ponto no plano cartesiano por $P = (x_1, y_1)$, esse ponto está localizado onde sua projeção ortogonal sobre o eixo Ox localiza-se no número x_1 e sobre o eixo Oy no número y_1. Dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_3)$ são iguais, isto é estão representados em um mesmo local no plano cartesiano se, suas coordenadas do eixo Ox ou Oy forem iguais, isto é, $x_1 = x_2$ ou $y_1 = y_2$.

Exemplo 3.1. Localize os pontos $A = (1,3), B = (1,4), C = (-2,3), D = (-3,-1)$, e $E = (2,-3)$, no sistema de coordenadas cartesiano.

Para resolver o problema utilizando o Geogebra, o aluno deverá digitar o ponto rigorosamente como está escrito. Isto é, da forma $A = (1,3)$, ou poderá encontrá-lo utilizando a ferramenta ponto. Veja um exemplo na figura:

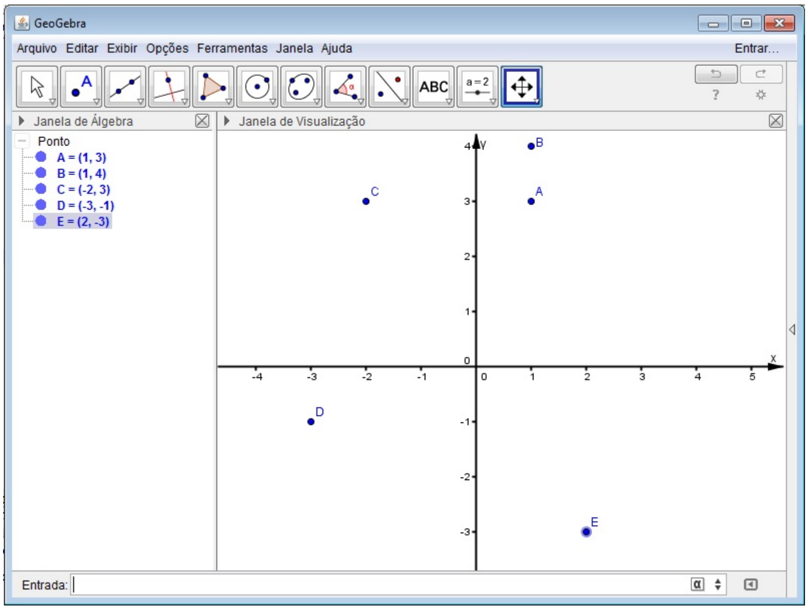


Figura 3.2: Exemplo 3.1.2.1

Veja que os pontos A e B estão no primeiro quadrante, C no segundo, D no terceiro e E no quarto. Esse exemplo serve para o aluno compreender como é o procedimento de localizar um ponto no plano cartesiano. Com prática, ele vai se habituando a localizar os pontos.

3.1.2 Segmento

Dados dos pontos A e B, eles determinam um segmento denominado de $\overline{AB}$. É válido lembrar que todos os pontos desse segmento pertencem a uma mesma reta e a medida desse segmento é a distância entre os pontos que são os extremos.

Fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e $P = (x_2, y_1)$ temos assim o triângulo ABP visto na figura 3.3,

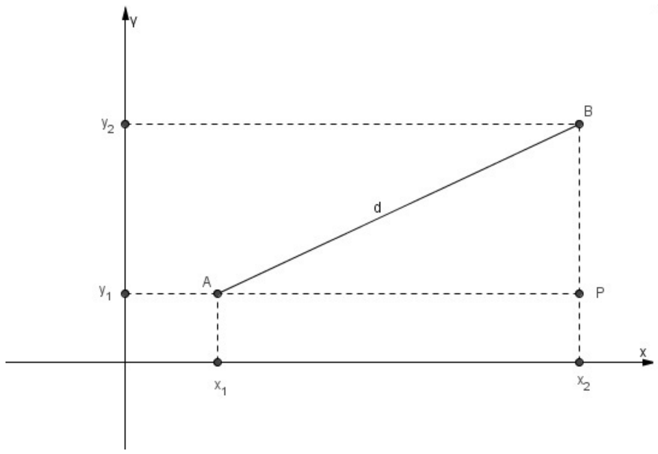


Figura 3.3: Distância entre dois pontos

No triângulo ABP o ângulo $A\hat{P}B$ é reto pois o segmento $\overline{PA}$ é paralelo ao eixo Ox e PB é paralelo ao eixo Oy. Assim, o triângulo ABP é retângulo em P. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos

$$AB^2 = AP^2 + BP^2$$

Veja no gráfico que:

$$AB = d$$

$$AP = x_2 - x_1$$

$$BP = y_2 - y_1$$

Substituindo esses valores na equação acima chegamos em:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Como esses valores são positivos, podemos extrair a raiz quadrada nos dois membros da igualdade, assim:

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Veja que $\sqrt{d^2} = |d|$, como $d \geq 0$ temos que $|d| = d$ o que resulta em:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.1}$$

Obtemos uma fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos no plano.

3.1.3 Ponto médio de um segmento

Vários problemas que envolvem geometria mostram a necessidade de se determinar o ponto médio de um segmento. O problema de se determinar esse ponto aparece também em várias ocasiões de nossa vida em diversas profissões. Por exemplo, o engenheiro deve saber como encontrá-lo para que possa planejar uma construção bem dividida.

Dado o segmento AB e M seu ponto médio, com $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $M = (x_M, y_M)$ como está apresentado na figura 3.4, vamos encontrar x_M e y_M em função de x_1 e x_2 e y_1 e y_2, respectivamente.

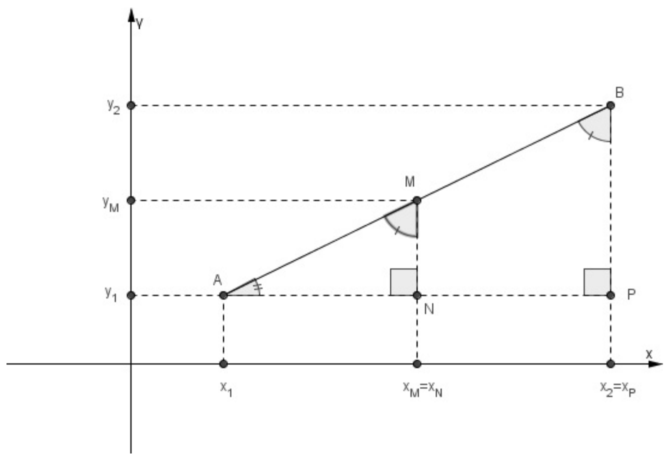


Figura 3.4: Ponto médio

Veja que nos triângulos ANM e APB temos:

$$A\hat{N}M = A\hat{P}B = 90^\circ$$

$$M\hat{A}N = B\hat{A}P, \text{pois são ângulos coincidentes}$$

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo e pela igualdade de dois ângulos teremos

$$A\hat{M}N = A\hat{B}P.$$

Portanto, pelo caso de semelhança de triângulos AAA (ângulo, ângulo, ângulo), os triângulos ANM e APB são semelhantes. Assim sendo, podemos dizer que a igualdade a seguir é valida

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP} \tag{3.2}$$

Vejam que

$$AB = AM + MB$$

Como M é o ponto médio do segmento AB teremos que $AM = MB$, logo

$$AB = AM + AM,$$

$$AB = 2AM. \tag{3.3}$$

Substituindo esse resultado na Equação (3.2)

$$\frac{AM}{2AM} = \frac{AN}{AP},$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AN}{AP},$$

$$AP = 2AN. \tag{3.4}$$

Pelo gráfico observe que $AP = (x_2 - x_1)$ e $AN = (x_M - x_1)$, substituindo esses valores na Equação (3.4) segue que

$$(x_2 - x_1) = 2(x_M - x_1),$$

$$x_2 - x_1 = 2x_M - 2x_1,$$

$$2x_1 + x_2 - x_1 = 2x_M,$$

$$x_1 + x_2 = 2x_M,$$

$$2x_M = x_1 + x_2,$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3.5}$$

Novamente pelo fato de os triângulos ANM e APB serem semelhantes,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BP}, \tag{3.6}$$

Substituindo o resultado da equação (3.2) na Equação (3.6)

$$\frac{AM}{2AM} = \frac{MN}{BP},$$

$$\frac{1}{2} = \frac{MN}{BP},$$

$$BP = 2MN. \tag{3.7}$$

Observe que $BP = (y_2 - y_1)$ e $MN = (y_M - y_1)$, substituindo esse valores na Equação (3.7)segue que:

$$(y_2 - y_1) = 2(y_M - y_1),$$

$$y_2 - y_1 = 2y_M - 2y_1,$$

$$2y_1 + y_2 - y_1 = 2y_M,$$

$$y_1 + y_2 = 2y_M,$$

$$2y_M = y_1 + y_2,$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.8}$$

Das Equações 3.5 e 3.8 e de $M = (x_M, y_M)$ obtemos a equação para o cálculo do ponto médio segmento a qual é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{3.9}$$

3.1.4 Alinhamento de três pontos

Dados três pontos no plano $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, pede-se para colocá-los de maneira alinhada no plano cartesiano. Nosso objetivo é encontrar uma condição Matemática para o alinhamento desses três pontos para que futuramente possamos verificar algebricamente se três pontos dados estão alinhados. Quando três pontos estão alinhados dizemos que eles pertencem a uma mesma reta e neste caso eles são chamados de pontos colineares. Vale lembrar que antes de realizar a dedução a seguir, deve-se mostrar ao aluno que dados três pontos eles podem ou não serem colineares, e caso não sejam os segmentos determinados por estes três pontos determinam um triângulo.

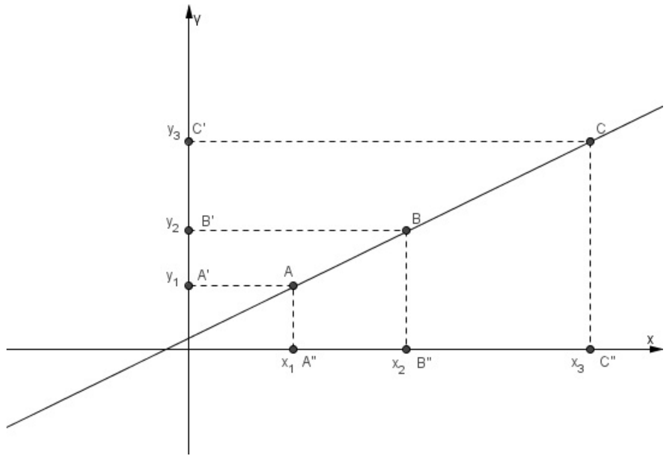


Figura 3.5: Alinhamento de três pontos

Na figura acima temos os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ sobre uma mesma reta. Sabemos que os segmentos AA', BB' e CC' são paralelos e que os segmentos AA'', BB'' e CC'' também são. Assim podemos aplicar o Teorema de Tales e obter:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A''B''}{A''C''}. \tag{3.10}$$

Veja que $A''B'' = x_2 - x_1$ e $A''C'' = x_3 - x_1$, substituindo esses valores na Equação 3.10 obtemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}. \tag{3.11}$$

Novamente pelo Teorema de Tales

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}. \tag{3.12}$$

Veja que $A'B' = y_2 - y_1$ e $A'C' = y_3 - y_1$, substituindo em (3.12) obtemos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}. \tag{3.13}$$

Das equações (3.10) e (3.12) obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1},$$

Subtraindo

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

em ambos os lados da igualdade obtêm-se:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = 0,$$

Encontrando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, que será $(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$,

$$\frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)} = 0.$$

Uma fração é igual a zero, se seu numerador for igual a zero por isso:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0,$$

$$x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_1y_1 = 0,$$

$$x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 + x_3y_1 = 0,$$

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 = 0,$$

Mas esse resultado é o determinante cujas linhas da matriz são $\{x_1, y_1, 1\}$,$\{x_2, y_2, 1\}$ e $\{x_3, y_3, 1\}$, portanto:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.14}$$

Obtemos assim uma relação para determinar se três pontos estão alinhados ou não.

3.2 O estudo da reta como o auxílio do Geogebra

Assim como o ponto, a reta também é um conceito primitivo. É importante deixar claro que a reta é uma representação que contém infinitos pontos. É comum estudantes confundirem retas e segmento de reta. Isso ocorre pela forma que se representa a reta no sistema de coordenadas cartesianas. Para representar um reta é preciso conhecer dois de seus pontos, também é possível representar a reta por uma relação que é chamada de equação da reta. Existem várias formas de representar a equação da reta. Elas podem ser: equação paramétrica da reta, equação cartesiana da reta, equação afim ou reduzida da reta. Nesse trabalho serão apresentadas as equações reduzia e a cartesiana

> Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecendo assim uma relação entre a Geometria e a Álgebra. Esta relação é, em muitos casos, pouco explorada no Ensino Médio e Fundamental, e o estudo da Geometria Analítica limitado a fórmulas e nomenclaturas.(DELGADO) .

Com o objetivo de apresentar essa relação ao aluno do Ensino Médio, será deduzidas as equações da reta no plano e os conteúdos relacionados a elas.

3.2.1 A equação geral da reta

No Ensino Médio é sempre importante lembrar ao aluno que no sistema cartesiano fazemos uma representação da reta, para que não haja confusões como, dizer que a reta é finita ou trocar reta com segmento.

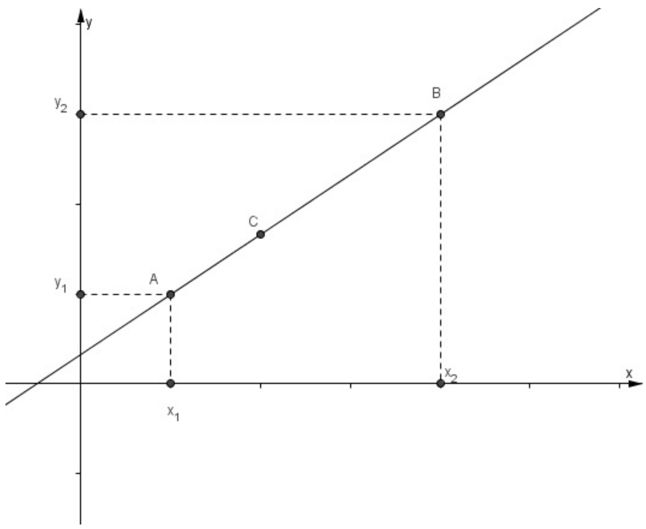


Figura 3.6: Equação geral da reta

Cada reta dada no plano está associada a uma equação e uma das formas de escrevê-la é a chamada equação geral. Para construirmos a equação geral de uma reta precisamos de dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ no plano, com $A \neq B$ assim sendo, pela igualdade de pontos, devemos ter, x_1, x_2, y_1 e y_2 número reais com $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$. Esses dois pontos definem uma única reta que passa por eles. Chamaremos essa reta de r. Seja $C = (x, y)$ um terceiro ponto localizado sobre a reta, isso é esses três pontos são colineares.

Foi estudado no tópico anterior, a condição de alinhamento de três pontos vista na Equação 3.14, utilizando-a obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizado a Regra de Laplace para o cálculo do determinante;

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot (y_1 - y_2) - y \cdot (x_1 - x_2) + 1 \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

$$x \cdot (y_1 - y_2) + y \cdot [-(x_1 - x_2)] + 1 \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

Sejam $a = (y_1 - y_2), b = -(x_1 - x_2)$ e $C = (x_1 y_2 - x_2 y_1)$ substituindo na equação acima temos;

$$x \cdot a + y \cdot b + 1 \cdot c = 0$$

portanto;

$$ax + by + c = 0 \tag{3.15}$$

Pelo fato de $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ temos que $a = (y_1 - y_2) \neq 0$ ou $b = (x_1 - x_2) \neq 0$. Portanto a relação $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ representa a equação geral da reta no plano onde $C = (x, y)$ é um ponto qualquer dessa reta.

3.2.2 A equação reduzida da reta

Antes de começar a falar sobre equação reduzida da reta, devemos mencionar o que é o ângulo de uma reta ou inclinação. É o ângulo entre a reta e o eixo das abscissas, e é medido no sentido anti-horário do eixo Ox para a reta r. Chamaremos esse ângulo de θ. Através da medida desse ângulo podemos calcular o valor do coeficiente angular da reta, que também pode ser chamado de declividade. O coeficiente angular é um número real m e é expresso pela tangente do ângulo θ isto é:

$$m = tg\theta \tag{3.16}$$

Veja a representação do ângulo na figura abaixo:

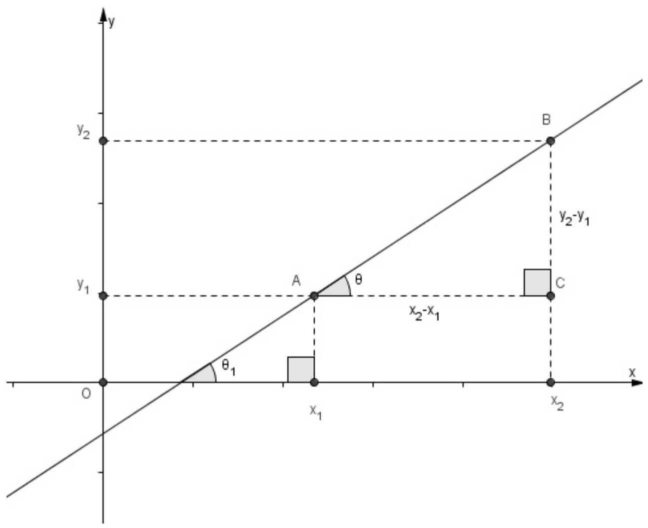


Figura 3.7: Ângulo entre retas

Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, aplicando a definição de tangente em um triângulo retângulo sobre o ângulo θ teremos:

$$tg\theta = \frac{cateto - oposto}{cateto - adjacente}$$

Como a medida do cateto oposto é $y_2 - y_1$ e do adjacente é $x_2 - x_1$ e da Equação 3.16 $m = tg\theta$ obtemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3.17}$$

Já foi visto que a reta determinada pelos pontos A e B possui equação geral $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, sendo $a = (y_1 - y_2)$ e $b = -(x_1 - x_2)$. Veja agora que:

$$\frac{a}{b} = \frac{(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}$$

assim:

$$\frac{a}{b} = -\frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}$$

eliminando os parenteses:

$$\frac{a}{b} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

substituindo o resultado da Equação (3.17) obtemos:

$$\frac{a}{b} = -m$$

logo

$$m = -\frac{a}{b} \tag{3.18}$$

Devemos estar atentos a três casos que podem ocorrer com a equação de uma reta. Esses casos surgem dos valores de a e b na equação geral da reta.

1º caso

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ teremos:

$$ax + by + c = 0$$

subtraindo $(ax + c)$ em ambos os membros da igualdade obtemos:

$$by = -(ax + c)$$

eliminado os parenteses:

$$by = -ax - c$$

dividindo ambos os membros da igualdade por b:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \tag{3.19}$$

Seja $n = -\frac{c}{b}$ e substituindo o resultado da Equação (3.18) na (3.19):

$$y = mx + n \tag{3.20}$$

A equação $y = mx + n$ é chamada de equação reduzida da reta, onde o valor de m é chamado de coeficiente angular e n de coeficiente linear.

2º caso

Se $a \neq 0$ e $b = 0$ da equação $ax + by + c = 0$ teremos:

$$ax + 0y + c = 0$$

o que resultaria em:

$$ax + c = 0$$

subtraindo c em ambos os membros da igualdade obtemos:

$$ax = -c$$

dividindo ambos os membros da igualdade por a resulta em:

$$x = -\frac{c}{a}$$

seja $k = -\frac{c}{a}$ por fim, chegamos à equação:

$$x = k \tag{3.21}$$

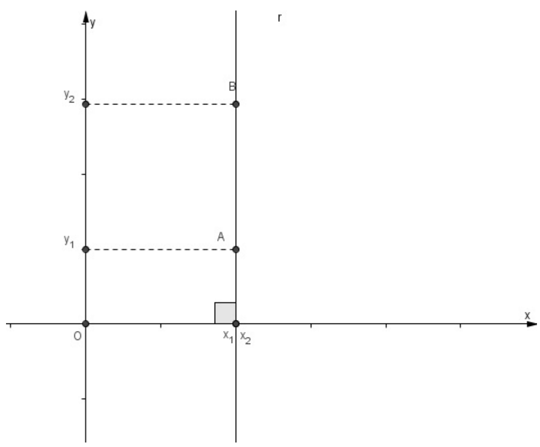


Figura 3.8: Reta vertical

A Equação (3.21) é representada por uma reta vertical, assim sendo, ela será paralela ao eixo Oy. Desse modo o ângulo θ formado pela reta e o eixo Ox é reto. Vejamos a figura 3.8.

A reta vertical tocará o eixo Ox no ponto $(k, 0)$. O valor de k é chamado de raiz da equação nessas condições. Neste caso de $\theta = 90°$ e de $m = tg\theta$ teremos que $m = tg90°$. Porém esse valor não é definido. Assim dizemos que a reta vertical não possui declividade.

3º caso

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ da equação $ax + by + c = 0$ teremos:

$$0x + by + c = 0$$

o que resultaria em:

$$by + c = 0$$

subtraindo c em ambos os membros da igualdade obtemos:

$$by = -c$$

dividindo ambos os membros da igualdade por b resulta em

$$y = -\frac{c}{b}$$

seja $d = -\frac{c}{b}$ por fim, chegamos à equação:

$$y = d \tag{3.22}$$

A Equação (3.22) é representada por uma reta horizontal. Assim sendo, ela será paralela ao eixo Ox, vejamos a figura 3.9.

A reta horizontal tocará o eixo Oy no ponto $(0, d)$. Essa equação somente tocará o eixo Ox quando $d = 0$ e nesse caso a reta será coincidente ao eixo Ox. Para os demais valores de d a reta é paralela ao eixo Ox. Quando a reta é paralela ao eixo Ox o ângulo θ entre esse eixo e a reta é igual a zero, ou seja $\theta = 0$ como $m = tg\theta$ teremos que $m = tg0$. Portanto, $m = 0$, assim dizemos que a inclinação da reta é nula.

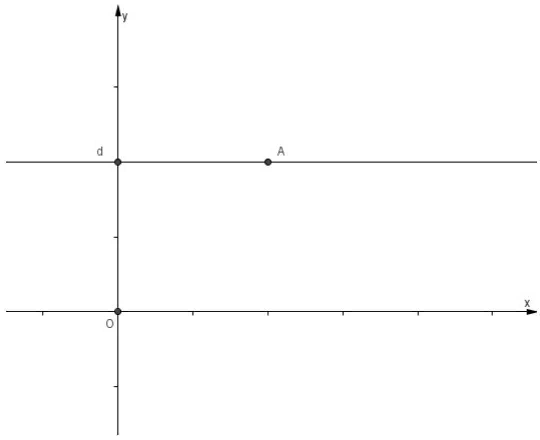


Figura 3.9: Reta horizontal

3.2.3 Posição relativa entre retas no plano

Dadas duas retas r e s no plano, podemos comparar essas retas relativamente às suas posições. Elas poderão ser coincidentes, paralelas ou concorrentes, vejamos a seguir como é caracterizada cada uma.

Retas coincidentes

Duas retas r e s no plano, são coincidentes se todos os pontos que pertencem à reta r também pertencerem a reta s. Essas duas retas também são chamadas de paralelas iguais.

Retas paralelas

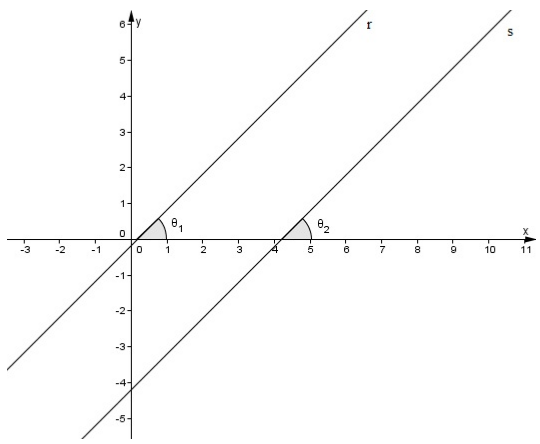


Figura 3.10: Ângulos de retas paralelas

As retas r e s do plano são paralelas distintas se não possuírem pontos comuns. Por outro, lado duas retas r e s são paralelas se o ângulo θ_1 da reta r for igual ao ângulo θ_2 da reta s.

Dadas as retas r e s cujas equações gerais são dadas respectivamente por $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, r e s são paralelas ou coincidentes se existir um número real $k \neq 0$ de modo que $a_1 = k \cdot a_2$ e $b_1 = k \cdot b_2$. Essas retas serão coincidentes quando tiverem: $a_1 = k \cdot a_2$, $b_1 = k \cdot b_2$ e $c_1 = k \cdot c_2$.

Utilizaremos o Geogebra para ilustrar esse fato: deve-se digitar a equação $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ no Geogebra, criar os controles deslizantes que forem pedidos. Para digitar a equação $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ devemos substituir $a_1 = k \cdot a_2$ e $b_1 = k \cdot b_2$ e digitar a equação no Geogebra $k * a_1x + k * b_1y + c_2 = 0$. Veja a figura abaixo.

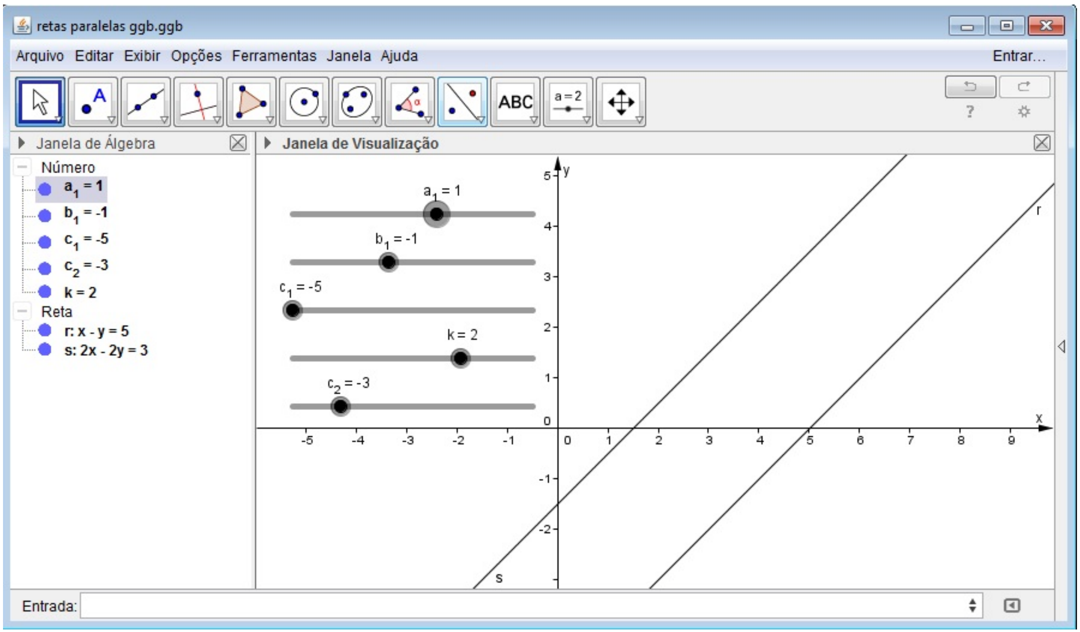


Figura 3.11: Retas paralelas equações gerais

Para que o aluno perceba esse fato, ele deverá manipular o valor de k nos controles deslizantes e observar as equações. Não é difícil perceber que o valor do coeficiente a_2 da equação s é igual ao produto do coeficiente a_1 da equação r por k. O mesmo ocorre com b_2 em relação a b_1. Nesse caso, o Geogebra funciona como uma ferramenta de investigação de conceitos matemáticos. Vale lembrar que não é uma demonstração para a condição de duas retas serem paralelas, dadas suas equações gerais.

Por outro lado, na reta $ka_1x + kb_1y + c_2 = 0$ podemos dividir ambos os membros da igualdade por $k \neq 0$ obtendo, assim a equação $a_1x + b_1y + \frac{c_2}{k} = 0$, chamando $\frac{c_2}{k}$ de c_3

teremos a equação $a_1x + b_1y + c_3 = 0$. Portanto, para simplificar, dizemos que dada uma reta $ax + by + c = 0$ a equação das retas que serão paralelas a ela são dadas na forma $ax + by + c_1 = 0$, caso $c = c_1$ elas são coincidentes e se $c \neq c_1$ elas serão paralelas distintas.

Sejam duas retas r e s cujas equações reduzidas são respectivamente $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$, onde $m_1 = tg\theta_1$ e $m_2 = tg\theta_2$.

Foi visto acima que duas retas são paralelas se $\theta_1 = \theta_2$, da trigonometria temos que $tg\theta_1 = tg\theta_2$ logo $m_1 = m_2$. Portanto, dadas as equações reduzidas de duas retas $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$, dizemos que essas duas retas são paralelas se $m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$. No caso de $n_1 = n_2$as retas seriam coincidentes.

O Geogebra pode ser utilizado como ferramenta para realizar investigações sobre esse fato, para isso deve-se digitar as equações das retas $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ e criar os controles deslizantes pedidos. Realizar uma investigação é manipular os valores de m_1, m_2, n_1 e n_2 nos controles deslizantes e observar o comportamento das retas em função desses valores, que são paralelas para $m_1 = m_2$ e coincidentes se $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$.

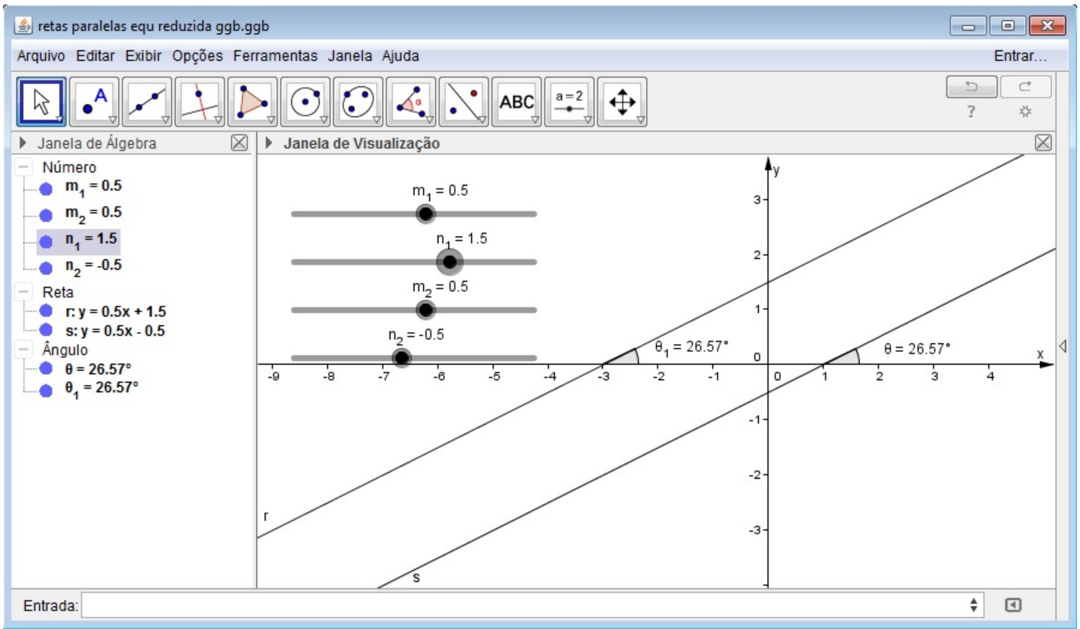


Figura 3.12: Retas paralelas equações reduzidas

Retas concorrentes

As retas r e s são concorrentes se sua interseção possuir um único ponto, isso se elas possuírem um único ponto comum, e essas retas possuem os ângulos formado com o eixo das abcissas diferentes.

No caso de serem dadas as equações gerais de duas retas r e s com equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, com a_1, a_2, b_1 e b_2 diferentes de zero, essas retas serão concorrentes se, para todo número real $k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$, com $a_2 = k_1 \cdot a_1$ e $b_2 = k_2 \cdot b_1$, tivermos $k_1 \neq k_2$. Dividindo ambos os membros da igualdade da equação $a_2 = k_1 \cdot a_1$ por a_1 e da equação $b_2 = k_2 \cdot b_1$ por b_1 obtemos;

$$\frac{a_2}{a_1} = k_1$$

$$\frac{b_2}{b_1} = k_2$$

Portanto, pelo fato de $k_1 \neq k_2$ teremos:

$$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \tag{3.23}$$

Assim, para analisar se duas retas são concorrentes, basta verificar a veracidade da inequação 3.23. Utilizaremos o Geogebra para verificar que quando duas retas são concorrentes o valor de $k_1 \neq k_2$, veja a figura:

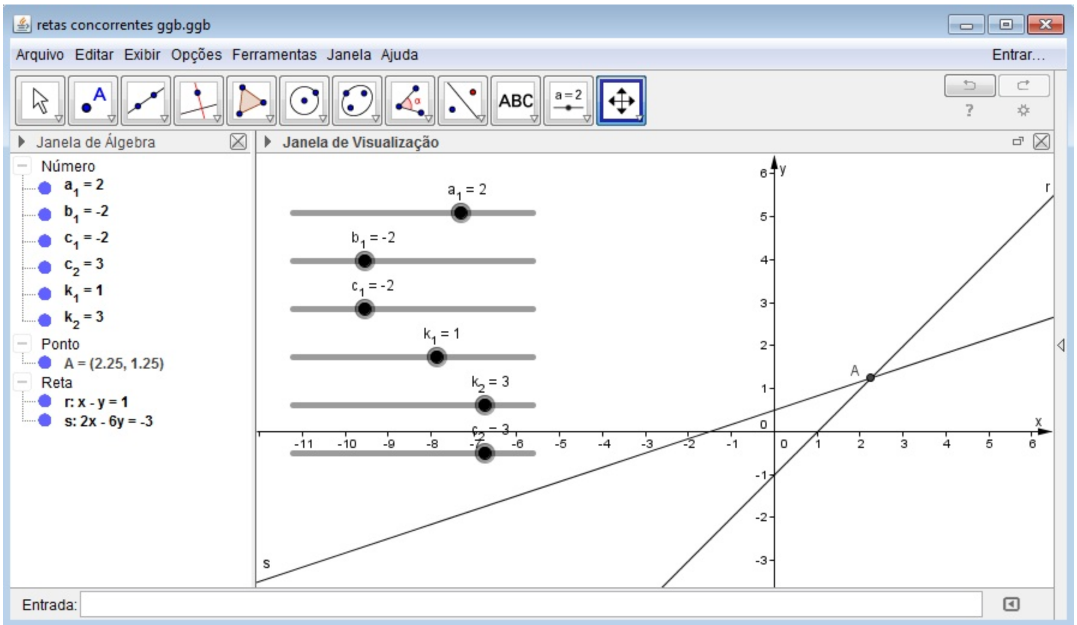


Figura 3.13: Retas concorrentes

O ponto A da figura é o ponto de intercessão das duas retas. O aluno deve mover os valores criados com os controles deslizantes para realizar uma análise sobre essas retas. Em algum momento ele deverá colocar os valores de $k_1 = k_2$ e assim perceber que as retas serão paralelas nesse caso e que para os demais serão concorrentes.

Se forem dadas duas retas concorrentes com a equação da forma reduzida r : $y = m_1x + n_1$ e $s : y = m_2x + n_2$. Partido de ponto que duas retas concorrentes possuem inclinações diferentes, seja θ_1 e θ_2 as inclinações de r e s respectivamente, assim $tg\theta_1 \neq tg\theta_2$, como foi visto chamaremos $m_1 = tg\theta_1$ e $m_2 = tg\theta_2$, logo $m_1 \neq m_2$. Portanto, podemos dizer que as retas r e s são concorrentes se $m_1 \neq m_2$.

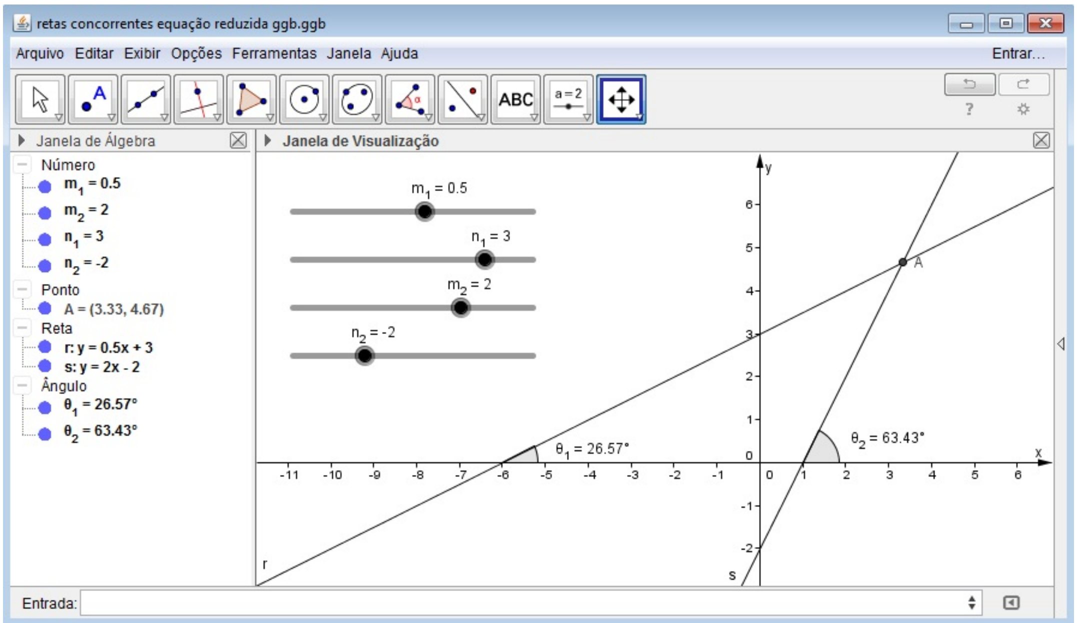


Figura 3.14: Retas concorrentes equação reduzida

Nesse caso, para realizar um estudo sobre as retas basta mover os valores de m_1, n_1, m_2 e n_2 e observar o comportamento das retas no gráfico e nas suas equações representadas no programa. Esperamos que o aluno perceba que, ao movimentar o valor do coeficiente angular, o ângulo da reta se altera e ao movimentar o coeficiente linear a reta moverá.

Retas perpendiculares

Duas retas r e s concorrentes são perpendiculares se o ângulo entre elas for reto. Considere duas retas perpendiculares $r : y = m_1x+n_1$ e $s : y = m_2x+n_2$ cujas inclinações são respectivamente α e β.

Veja na figura 3.15 que o triângulo ABC que é retângulo em A. Pela soma dos ângulos internos de um triângulo temos:

$$\alpha + \lambda + \theta = 180^\circ \tag{3.24}$$

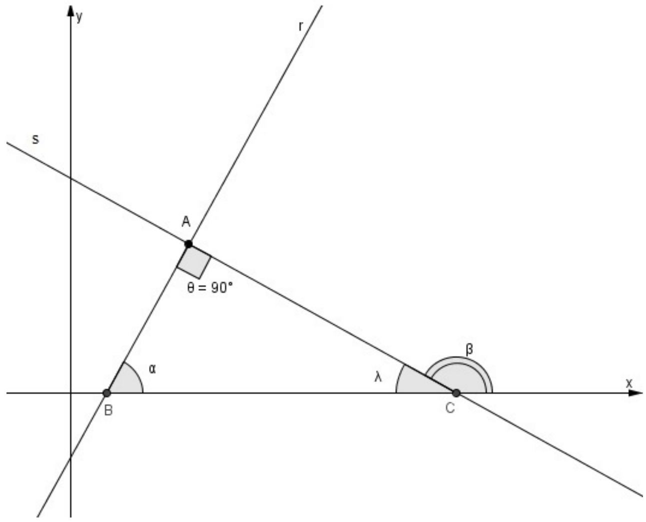


Figura 3.15: Retas perpendiculares

Por outro lado, a soma de dois ângulos suplementares é igual a 180°. Assim $\lambda + \beta = 180^\circ$ substituindo esse valor na Equação 3.24 obtemos:

$$\alpha + \lambda + \theta = \lambda + \beta$$

Subtraindo λ aos dois membros da igualdade teremos (Teorema do Ângulo Externo):

$$\alpha + \theta = \beta$$

ou

$$\beta = \alpha + \theta$$

e como $\theta = 90^\circ$ chegamos em:

$$\beta = \alpha + 90^\circ$$

Calculando a tangente dos dois membros da igualdades vemos que:

$$tg(\beta) = tg(\alpha + 90^\circ)$$

$$tg(\beta) = \frac{sen(\alpha + 90°)}{cos(\alpha + 90°)}$$

Aplicando a soma de dois arcos para seno e cosseno temos:

$$tg(\beta) = \frac{sen(\alpha)cos(90°) + sen(90°)cos(\alpha)}{cos(\alpha)cos(90°) - sen(\alpha)sen(90°)}$$

$$tg(\beta) = \frac{sen(\alpha) \cdot 0 + 1 \cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha) \cdot 0 - sen(\alpha) \cdot 1}$$

$$tg(\beta) = \frac{cos(\alpha)}{-sen(\alpha)}$$

$$tg(\beta) = -\frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} \tag{3.25}$$

Na trigonometria $cotg(\alpha) = \dfrac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$ e $tg(\alpha) = \dfrac{1}{cotg(\alpha)}$. substituindo o primeiro valor na Equação (3.25) e, na sequência, o segundo obtemos:

$$tg(\beta) = -cotg(\alpha)$$

$$tg(\beta) = -\frac{1}{tg(\alpha)} \tag{3.26}$$

Foi visto no Tópico 3.3.2, que o coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo de inclinação da reta, mas m_1 e m_2 são os coeficientes angulares das retas r e s respectivamente e como α e β são suas respectivas inclinações podemos dizer que, $m_1 = tg(\alpha)$ e $m_2 = tg(\beta)$, substituindo esse valores na Equação 3.16.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por m_1

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \tag{3.27}$$

Portanto, podemos dizer que duas retas $r : y = m_1x + n_1$ e $s : y = m_2x + n_2$ são perpendiculares se $m_1 \cdot m_2 = -1$

Considere agora as equações dadas na forma geral $r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e

$s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ com b_1 e b_2 diferentes de zero. Da equação da reta r teremos:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Somando $-a_1 - c_1x$ aos dois membros da igualdade:

$$b_1y = -a_1x - c_1$$

Dividindo por b_1:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

O valor $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ é o coeficiente angular dessa reta. Da equação da reta s teremos.

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Somando $-a_2 - c_2x$ aos dois membros da igualdade:

$$b_2y = -a_2x - c_2$$

Dividindo por b_2:

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$$

O valor $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ é o coeficiente angular dessa reta. Como foi visto na Equação (3.27) essas duas retas serão perpendiculares se $m_1 \cdot m_2 = -1$, substituindo os valores de m_1 e m_2:

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

$$\frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = -1$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $b_1 \cdot b_2$:

$$a_1 \cdot a_2 = -b_1 \cdot b_2$$

Logo:

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0 \tag{3.28}$$

Portanto, podemos concluir que dados duas retas $r: a_1x+b_1y+c_1 = 0$ e $s: a_2x+b_2y+c_2 =$

0 elas serão perpendiculares se $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$.

Por fim, dada uma reta $r : ax + by + c = 0$ e pelo fato de $ab + b(-a) = 0$ teremos que a equação das retas perpendiculares a r será $s : bx - ay + c_1 = 0$

Ângulos entre retas

Considerando duas retas r e s concorrentes mas não perpendiculares entre elas com suas equações dadas na forma reduzida $r : y = m_1x + n_1$ e $: y = m_2 + n_2$. O ângulo entre essas duas retas é o menor ângulo formado pela interseção delas. Na figura abaixo o ângulo entre as retas r e s será o θ.

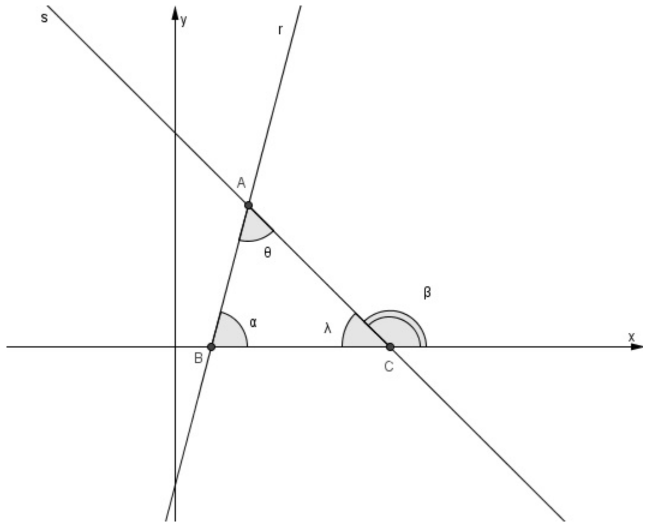


Figura 3.16: Ângulo entre retas

Veja que:

$$\theta + \alpha = \beta$$

Somando $-\alpha$ em ambos os lados da igualdade obtemos:

$$\theta = \beta - \alpha$$

logo:

$$tg(\theta) = tg(\beta - \alpha)$$

aplicando a fórmula para a tangente da diferença de dois ângulo temos:

$$tg(\theta) = \frac{tg(\beta) - tg(\alpha)}{1 + tg(\beta) \cdot tg(\alpha)} \tag{3.29}$$

Sejam $m_1 = tg(\alpha)$ e $m_2 = tg(\beta)$, substituindo esses valores na equação (3.29) obtemos:

$$tg(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

Como θ é um ângulo agudo, as retas são concorrentes e não perpendiculares, temos $0 < \theta < 90°$, portanto,

$$tg(\theta) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right| \tag{3.30}$$

Para encontrar o ângulo entre duas retas devemos conhecer os coeficientes angulares das retas, substituir na Equação (3.30) para obter o valor da tangente e, por fim, utilizar as relações trigonométricas para calcular o ângulo pedido.

No caso das retas serem paralelas, diz-se que o ângulo entre elas é nulo, isto é $\theta = 0$, no caso das retas serem perpendiculares o ângulo é $\theta = 90°$.

Distância entre um ponto e uma reta

Dados uma reta r e um ponto A, ambos no plano, seja o ponto B a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r. Dizemos que a distância entre o ponto A e a reta r é a medida do segmento AB, caso o ponto A pertença à reta, essa distância se anula. O cálculo da distância entre dois pontos é uma aplicação de perpendicularidade.

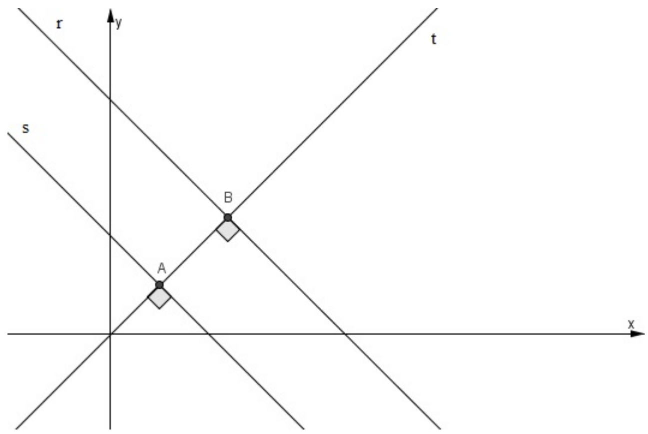


Figura 3.17: Distância entre ponto e reta

Considerem as retas da figura como seguem. Sejam a reta $r : ax + by + c = 0$ considerando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, considere a reta $s : ax + by + c_1 = 0$ que passa pelo ponto A. Como vimos anteriormente as retas r e s são paralelas pois satisfazem a condição para o paralelismo de retas. Seja agora uma reta t perpendicular a r, logo a reta será

$t : bx - ay + c_2 = 0$, considere também a reta t passando pela origem, isso é, $O = (0, 0)$ pertence à reta t logo, $c_2 = 0$. Portanto, $t : bx - ay = 0$. Pelo fato de r ser paralela à reta s, a reta t também será perpendicular a s. Sejam A e B os pontos de interseção entre as retas s com t e r com t, respectivamente. Como a reta t é perpendicular a ambas as retas teremos que B é a projeção ortogonal de A sobre a reta r. Para calcular a distância entre o ponto A e a reta r devemos calcular a distância entre os pontos A e B. Seja $d_{A,B}$ a distância entre os pontos e $d_{A,r}$ a distância entre A e r.

Determinaremos agora as coordenadas dos pontos A e B, como A é a interseção entre as retas s e t devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ ax + by + c_1 = 0. \end{cases}$$

Dai temos que;

$$bx = ay$$

logo;

$$x = \frac{ay}{b} \tag{3.31}$$

Substituindo a equação 3.31 na segunda equação do sistema temos:

$$a \cdot \frac{ay}{b} + by + c_1 = 0$$

$$\frac{a^2 y}{b} + by + c_1 = 0$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por b obtemos:

$$a^2 y + b^2 y + bc_1 = 0$$

Somando $-bc_1$ aos dois membros e colocando y em evidência:

$$(a^2 + b^2)y = -bc_1$$

Dividindo a equação por $(a^2 + b^2)$ concluímos que:

$$y = \frac{-bc_1}{(a^2 + b^2)}$$

Substituindo esse resultado na Equação (3.31) obtemos:

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{-bc_1}{(a^2 + b^2)}$$

Logo:

$$x = \frac{-ac_1}{(a^2 + b^2)}$$

Portanto as coordenadas do ponto A são:

$$A = \left(\frac{-ac_1}{a^2 + b^2}, \frac{-bc_1}{a^2 + b^2} \right)$$

Pelo fato de B ser a interseção entre as retas r e t devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Substituindo a Equação (3.31) na segunda equação do sistema temos:

$$a \cdot \frac{ay}{b} + by + c = 0$$

$$\frac{a^2 y}{b} + by + c = 0$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por b obtemos:

$$a^2 y + b^2 y + bc = 0$$

Somando $-bc$ aos dois membros e colocando y em evidência:

$$(a^2 + b^2)y = -bc$$

Dividindo a equação por $(a^2 + b^2)$ concluímos que:

$$y = \frac{-bc}{(a^2 + b^2)}$$

Substituindo esse resultado na Equação (3.31) obtemos:

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{-bc}{(a^2 + b^2)}$$

Logo:

$$x = \frac{-ac}{(a^2 + b^2)}$$

Portanto, as coordenadas do ponto B são:

$$B = \left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right)$$

Vamos agora calcular a distância entre A e B. Para isso utilizaremos a Equação (3.1):

$$d_{A,B} = \sqrt{\left(\frac{-ac_1}{a^2 + b^2} - \frac{-ac}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-bc_1}{a^2 + b^2} - \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right)^2}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{\frac{(-ac_1 + ac)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(-bc_1 + bc)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{\frac{[a(-c_1 + c)]^2 + [b(-c_1 + c)]^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{\frac{a^2(c - c_1)^2 + b^2(c - c_1)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c - c_1)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{\frac{(c - c_1)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$d_{A,B} = \frac{\sqrt{(c - c_1)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{A,B} = \frac{|c - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3.32}$$

Substituindo $d_{A,B} = d_{A,r}$ na equação (3.32) temos:

$$d_{A,r} = \frac{|c - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.33}$$

Essa equação é utilizada para o cálculo da distância de um ponto a uma reta.

Agora considerando a reta $r : ax + by + c = 0$ e um ponto $P = (x_0, y_0)$, a equação da reta paralela a r que passa por P é do tipo $s : ax + by + c_1 = 0$. Como conhecemos um ponto da reta s temos que

$$ax_0 + by_0 + c_1 = 0$$

Logo:

$$c_1 = -ax_0 - by_0$$

Substituindo esse resultado na equação (3.33)obtemos:

$$d_{P,r} = \frac{|c - (-ax_0 - by_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Portanto,

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.34}$$

A equação 3.34 é utilizada para efetuar o cálculo da distância entre a reta $r : ax+by+c = 0$ e um ponto $P = (x_0, y_0)$ no plano.

3.3 O estudo da circunferência com o auxílio do Geogebra

O conjunto formado pelos pontos $P = (x, y)$ com x,$y \in \mathbb{R}$, que possui igual distância do ponto $C = (a, b)$ com a,$b \in \mathbb{R}$ e $C \neq P$ é chamado de circunferência de centro C e raio r, sendo r a medida da distância entre P e C.

Da Equação 3.1 temos que a distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é dada por $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Assim, a distância entre os pontos $P = (x, y)$ e $C = (a, b)$ será:

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Vale assim a igualdade:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado obtemos:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{3.35}$$

A equação 3.35 é chamada de equação reduzida da circunferência de centro $C=(a,b)$ e raio r, veja figura:

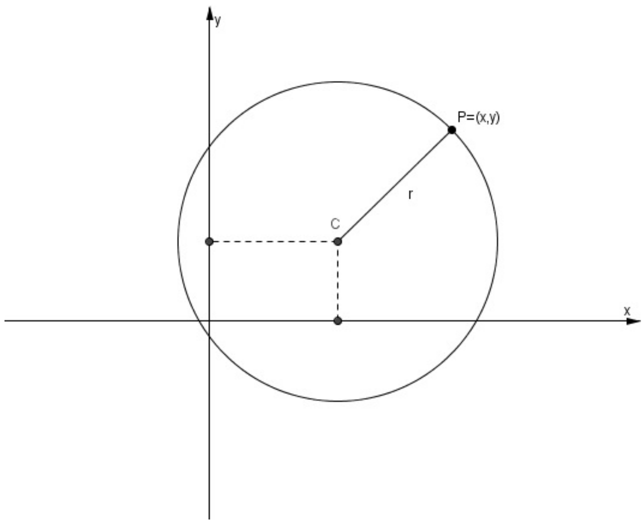


Figura 3.18: Circunferência dados centro e raio

Desenvolvendo os quadrados na equação (3.35) e reorganizando os termos obtemos a equação geral da circunferência, veja a seguir. $x^2-2ax+a^2+y^2-2bx+b^2=r^2$ Reagrupando os termos teremos:

$$x^2+y^2-2ax-2bx+(a^2+b^2-r^2)=0 \tag{3.36}$$

3.3.1 Posições relativas entre ponto e circunferência

Ao realizarmos a comparação entre um ponto $Q=(x,y)$ em relação a uma circunferência $\lambda:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, teremos três casos para comparar a distância entre esse ponto e o centro $C=(a,b)$ da circunferência, são elas:

Caso 1

A distância d_{QC} entre o centro C e ponto Q ser igual ao raio. Assim pela definição de circunferência o ponto Q pertencerá à circunferência de raio r e centro C, escrevemos: $Q \in \lambda$, se $d_{QC} = r$.

Caso 2

Quando a distância entre o centro e o ponto Q for menor que o raio, esse ponto será interno à circunferência e escrevemos: Q é interno a λ, se $d_{QC} < r$.

Caso 3

Se a distância entre o centro e o ponto Q for maior que o raio, esse ponto será externo à circunferência e escrevemos: Q é externo a λ, se $d_{QC} > r$.

Portanto, esses são os três casos em que podemos comparar um ponto a uma circunferência no plano.

Exemplo 3.2. Dada a circunferência cuja equação é $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$, determine a posição relativa dos pontos $A = (-1, 6)$, $B = (2, 1)$ e $D = (-6, -2)$ em relação à circunferência dada.

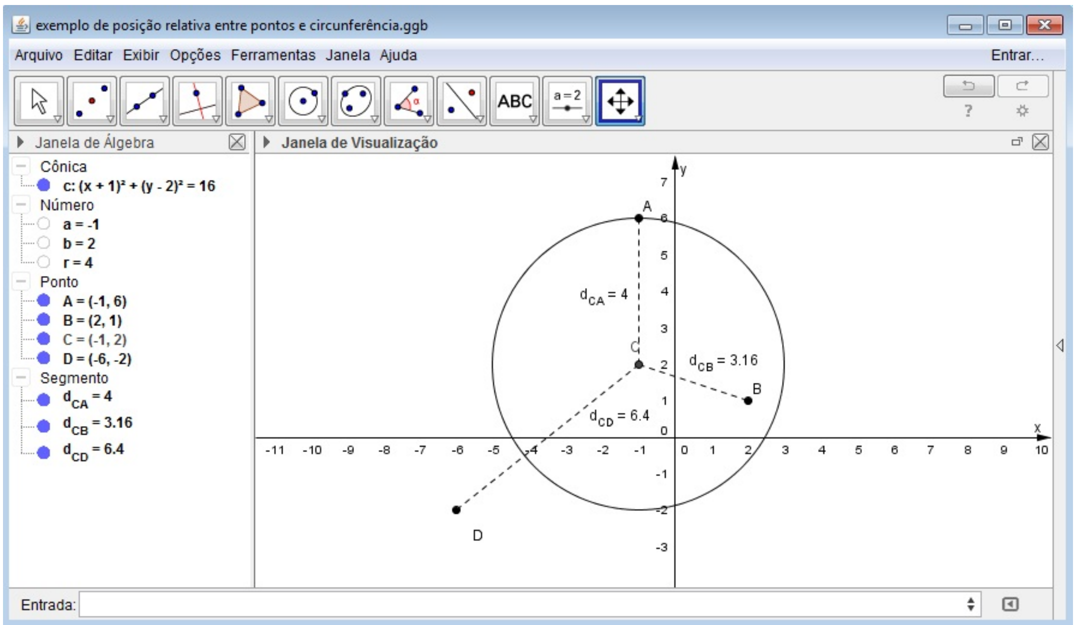


Figura 3.19: Exemplo 3.2

Resolvendo a atividade utilizando o Geogebra, primeiro deve-se digitar a equação da circunferência no campo de entrada e em seguida utilizar a ferramenta "ponto médio ou centro" para localizar o centro. Logo após devem ser digitadas as coordenadas dos pontos pedidos no campo de entrada e, por fim, marcar os segmentos CA, CB e CD utilizando a "ferramenta segmento". Para determinar a posição relativa dos pontos devemos observar os valores das medidas desses segmentos, veja Figura 3.19.

Veja que o centro é o ponto $C = (-1, 2)$ e o raio é 4. Observe que o ponto A pertence à circunferência, pois $d_{CA} = 4$ que é igual ao raio, B é interno, pois $d_{CB} \cong 3,16$ é menor que o raio e, por fim, que o ponto D é externo, pois $d_{CD} \cong 6,4$ é maior que o raio.

3.3.2 Posições relativas entre reta e circunferência

Considerando uma circunferência $\lambda : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ e uma reta $r : y = mx + n$, podemos comparar a posição da reta em relação à circunferência de três modos: quando possuir um ponto comum e nesse caso a reta é tangente à circunferência; quando possuírem dois pontos comuns e assim a reta é secante à circunferência e, por fim, o caso da reta não possuir nenhum ponto comum com a circunferência, assim dizemos que a reta é externa à circunferência.

Retas tangentes à circunferência

Retas tangentes à circunferência são as que possuem somente um ponto comum ao círculo. Veja a figura com uma circunferência de raio r e centro C e uma reta tangente s a λ no ponto A.

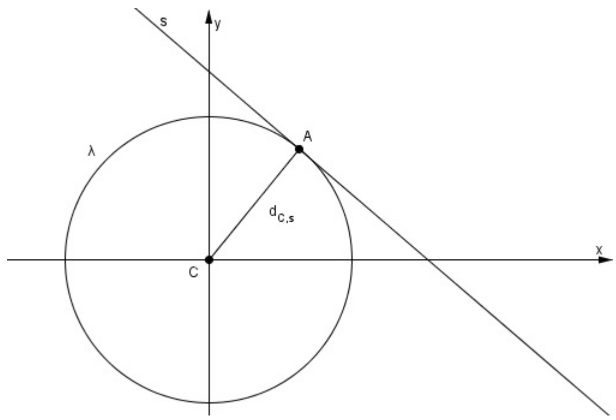


Figura 3.20: Reta tangente a um círculo

Como o ponto A pertence à circunferência λ assim, o segmento CA terá a mesma medida do raio, pelo fato de todos os outros pontos da reta s serem externos a λ e pelo motivo da distância entre o centro C e qualquer outro ponto externo a λ ser maior que o raio. Teremos que o raio é a menor distância entre C e s, sendo assim, dizemos que a distância entre o centro e a reta tangente à circunferência é igual ao raio, e escrevemos $d_{C,s} = r$.

Retas secantes à circunferência

Uma reta é secante a uma circunferência se possuírem dois pontos comuns. Veja na figura uma circunferência de raio r, centro C e uma reta secante s.

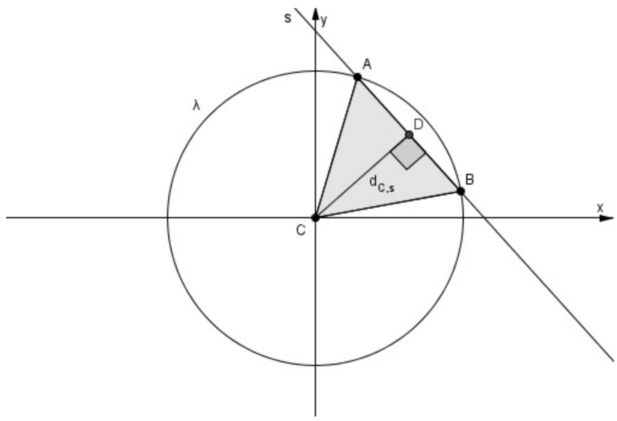


Figura 3.21: Reta secante a um círculo

Veja na figura que A e B são os pontos comuns entre a reta s e a circunferência λ, cujos segmentos CA e CB são raios da circunferência, assim $CA = CB = r$. A medida do segmento AD é a distância entre o centro e a reta s, assim $CD = d_{C,s}$. O triângulo CBD é retângulo, com $C\hat{D}B$ o ângulo reto, assim o lado CB é a hipotenusa e CD e BD são os catetos desse triângulo. Pelo fato de em um triangulo retângulo a hipotenusa ser o maior lado temos que $CD < CB$, portanto $d_{C,s} < r$. Daí podemos dizer que se uma reta é secante à circunferência, teremos a distância entre o centro e a reta secante é menor que o raio.

Retas externas à circunferência

As retas externas são as que não possuem pontos comuns com a circunferência. Veja na figura uma circunferência de raio r, centro C e uma reta externa s.

Na figura 3.22 temos que CD é a distância entre o centro e a reta s, que CA é o raio de λ. Vejamos que o ponto A pertence ao segmento CD, assim a medida de CD é maior que CA, isto é, $d_{C,s} > r$. Portanto, dadas uma circunferência e uma reta externa a ela, a distância entre o centro da circunferência e a reta será maior que o raio da mesma.

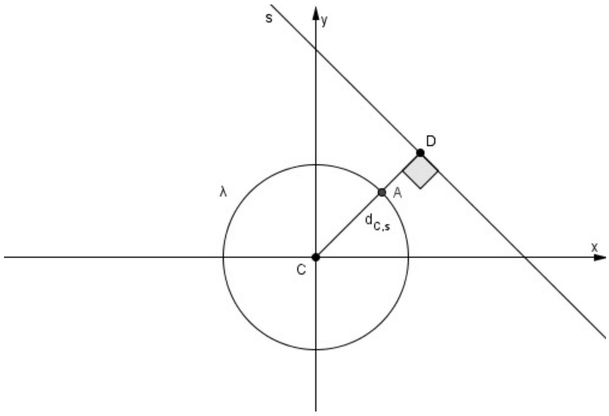


Figura 3.22: Reta externa a um círculo

Capítulo 4

Atividade sobre Geometria Analítica resolvidas com o auxílio do Geogebra

Inicialmente o trabalho consistiu em conhecer os interesses dos alunos do 3° ano do ensino médio do Colégio Estadual Dom Bosco em relação às tecnologias e se eles conheciam alguma forma de se aprender utilizando recursos tecnológicos. Para-se obter dados sobre esse conhecimento foi realizada a pesquisa apresentada no Capítulo 1 tópico 1.2. O trabalho foi desenvolvido nos três terceiros anos do turno matutino. Devido ao número de computadores no laboratório de informática do colégio, houve a necessidade de dividir as turmas em duplas ou trios de alunos, para que todos pudessem ter contato com o software. Foi realizada uma aula por semana em cada sala. As aulas consistiam na resolução de atividades utilizando o Geogebra.

Primeiro, apresentou-se o Geogebra para os alunos. E essa apresentação foi realizada por sala, fazendo-se o uso de projetor. Foram apresentados o software, os objetivos de nosso estudo e quais conteúdos seriam trabalhados. Também foram apresentados os principais comandos do Geogebra e como trabalhar com eles. Vale ressaltar que no decorrer das resoluções das atividades surgiu a necessidade de trabalhar alguns comandos não apresentados. Nesse caso, foram passados os comandos nas folhas das atividades ou individualmente para cada dupla.

A primeira atividade, que foi pedida, para realizarem, tinha como objetivo conhecer o software Geogebra, Apresentado algumas questões vistas a seguir. Relembrando que a realização das atividades foi acompanhada e orientada com o objetivo de obter o melhor aproveitamento possível das aulas.

Exercício 4.1. Utilizando a barra de ferramentas, construa as figuras abaixo.

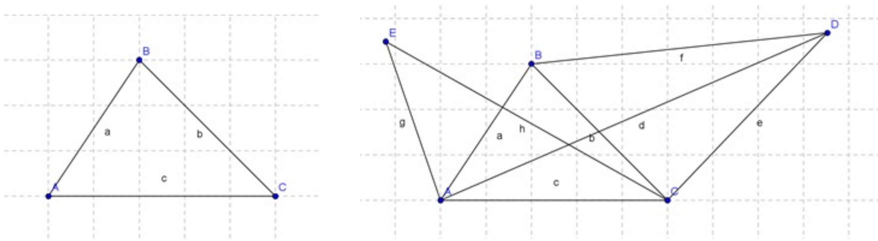


Figura 4.1: Exercício 4.1 itens a e b

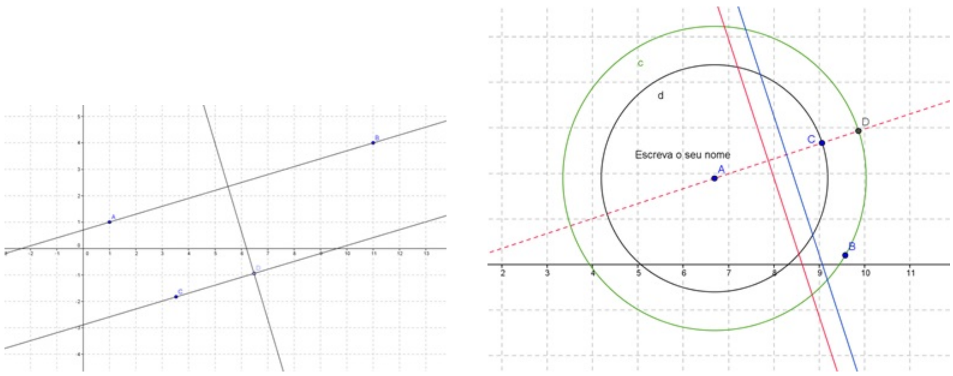


Figura 4.2: Exercício 4.1 itens c e d

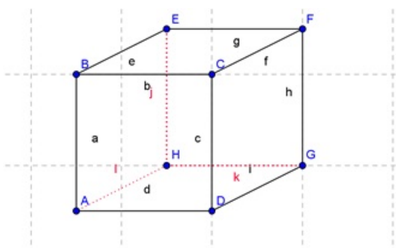


Figura 4.3: Exercício 4.1 item e

O objetivo da atividade é familiarizar os alunos com as ferramentas do Geogebra para que, ao necessitar das mesmas na resolução de problemas de Geometria, ele possa realizá-los com maior agilidade. Em um primeiro instante, a dificuldade encontrada era colocar a malha quadriculada como está na figura acima. Os alunos faziam perguntas como por exemplo: "Como colocar as linhas pontilhadas no fundo da figura?" Nesse caso o professor deve explicar como é o processo para exibir malhas quadriculadas como foi descrito no tópico 2.1 desse trabalho. No início teve alguns alunos que confundiram a ferramenta reta com segmento. Novamente coube ao professor explicar a diferença entre os dois conceitos, deixando claro qual deverá ser utilizado em cada atividade.

Algo que despertou a curiosidade de muitos era que as letras correspondentes nas figuras não estavam nos mesmos locais das figuras que foram entregues a eles. Para responder a esse questionamento, foi explicado que o software encontra-se pré-programado, porém o usuário pode alterar suas configurações ou renomear as figuras.

Exercício 4.2. Utilizando agora o campo de entrada, marque os pontos $A = (1, 2)$, $B = (5, -2)$ e $A = (-3, 4)$.

Exercício 4.3. Novamente utilizando o campo de entrada construa três retas.

O objetivo das atividades acima era mostrar ao aluno que o Geogebra possui duas maneiras de se construir figuras. Cabe a ele decidir qual é a melhor a ser utilizada em cada caso. A maioria prefere utilizar as ferramentas pois é um método mais prático e simples para trabalhar.

As atividades propostas eram resolvidas utilizando o Geogebra. Apresentaremos as atividades e em seguida sua resolução:

Exercício 4.4. Marque os pontos a seguir no plano cartesiano.

a) $A = (2, 4), B = (-2, -4)$ e $C = (1, -3)$

b) $A = (-3, -3), B = (10, 3)$ e $C = (3.5, 0)$

O objetivo dessa atividade era que o aluno utilize a ferramenta ponto para localizá-los no plano cartesiano. nesse caso o Geogebra é utilizado como papel quadriculado, assim deve configurá-lo para exibir malha. É esperado que, com atividades como essas, os alunos possam ter uma orientação sobre como localizar pontos no sistema de coordenadas, tanto fazendo o uso do software ou em sistema construído no papel.

Para resolver a atividade deve-se selecionar a ferramenta ponto no Geogebra e logo em seguida localizar os pontos no sistema de coordenadas. Deve-se verificar na janela de álgebra se o ponto foi marcado corretamente. Caso não esteja correto, o programa permite que esse ponto seja manipulado e levado ao local correto e para isso deve utilizar a ferramenta mover. Vejamos a seguir a resolução do problema.

Ao aplicar a atividade aos alunos houve algumas dificuldades no sentido de localizar o ponto, pois não sabiam como localizar e ou como utilizar a ferramenta necessária para resolver a atividade. Com uma breve orientação eles conseguiram. Vale lembrar que o próprio software oferece ajuda e métodos de construção que podem ser corrigidos futuramente.

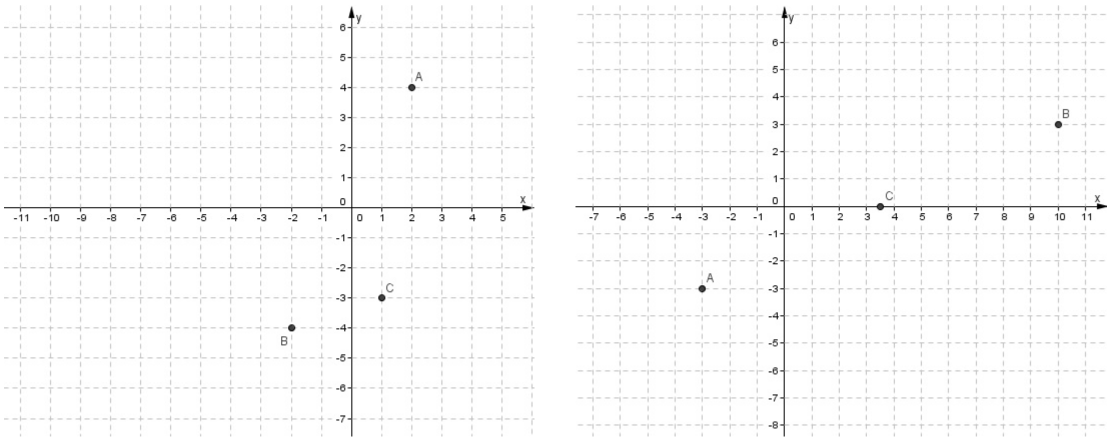


Figura 4.4: Exercício 4.4

Pode-se concluir que, devido à facilidade de se localizar o ponto e também manipular esse ponto, pode-se despertar no aluno o interesse em resolver as atividades. O que é importante para o aprendizado do aluno, pois um aluno interessado em determinado conteúdo buscará cada vez mais conhecer sobre o assunto.

Exercício 4.5. Utilizando o comando segmento, trace os segmentos formados pelos pontos de cada item do exercício anterior.

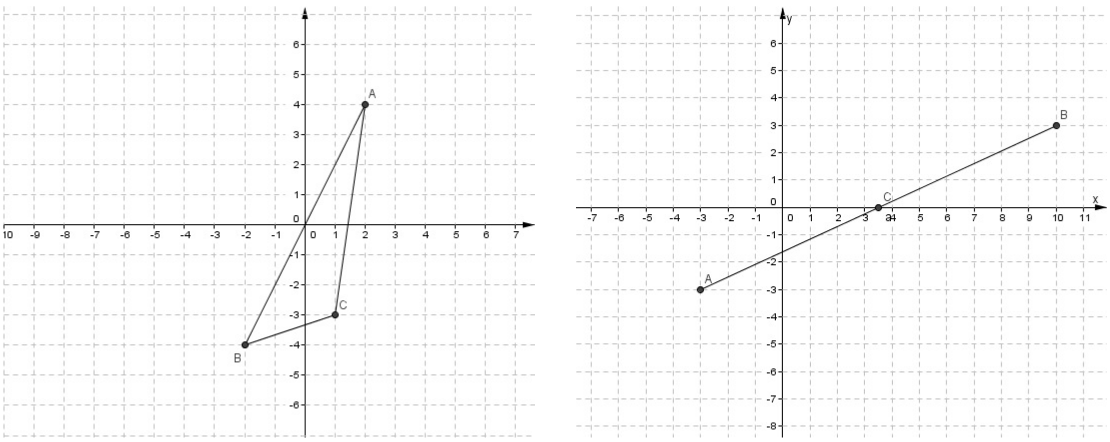


Figura 4.5: Exercício 4.5

O objetivo desse atividade é levar o aluno a notar que três pontos podem determinar um triângulo ou não, caso eles não determinarem eles serão colineares. Na atividade, foi pedido para utilizar o comando segmento. Esse comando deverá ser digitado na janela de entrada da seguinte forma segmento[A, B], onde A e B representa os pontos que determinam o segmento.

Exercício 4.6. Marque os pontos $A = (11, 3)$, $B = (-3, 10)$, faça o segmento determinado por eles e determine o seu ponto médio.

Nessa atividade o objetivo é compreender a noção de ponto médio, saber que o ponto médio divide um segmento em outros dois com a mesma medida. Lembrando que a medida de um segmento é a distância entre os dois pontos que o define. Para resolver a atividade, o aluno deverá marcar os dois pontos, e em seguida, o segmento determinado por eles. Por fim, utilizar a ferramenta ponto médio para resolver o problema. Veja resolução do problema a seguir.

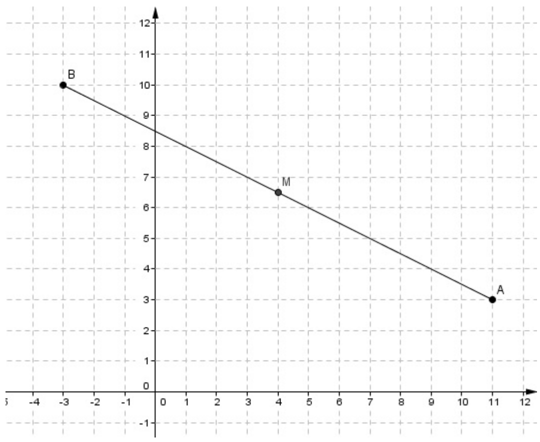


Figura 4.6: Exercício 4.6

Para encontrar as coordenadas do ponto médio, o aluno deverá localizar na janela de álgebra. Tal ponto é $M = (4; 6, 5)$. Para agilizar no trabalho de localizar o ponto médio, primeiro seleciona-o no gráfico e ele ficará destacado na janela de álgebra.

A maior dificuldade nessa atividade foi saber qual a ferramenta correta a utilizar, pois vários estavam tentando localizar o ponto médio utilizado a ferramenta inadequada, ou seja estavam tentando localizar o ponto utilizando a ferramenta ponto e marcando um ponto próximo ao correto. Muitos acertavam dessa maneira, porém o certo é utilizar a ferramenta ponto médio, pois assim não haverá erros, a menos que os pontos A e B tenham coordenadas diferentes das pedidas.

Exercício 4.7. Divida o segmento obtido no exercício 4.6 em

a) quatro partes iguais;

b) sete partes iguais.

No primeiro item da questão, o objetivo é que o aluno encontre o ponto médio dos dois segmentos AM e BM que foram determinados pelo ponto médio. Assim os segmentos AM e BM ficarão ambos divididos em dois segmentos iguais, cujo segmento AB ficará dividido em quatro segmentos iguais. Veja a resolução do exercício na figura 4.7. À princípio houve dificuldade sobre como resolver o problema. Alguns tentaram marcando os pontos aleatoriamente, outros perceberam que poderiam utilizar a ferramenta ponto médio e que, com ela, poderiam resolver o que se pedia.

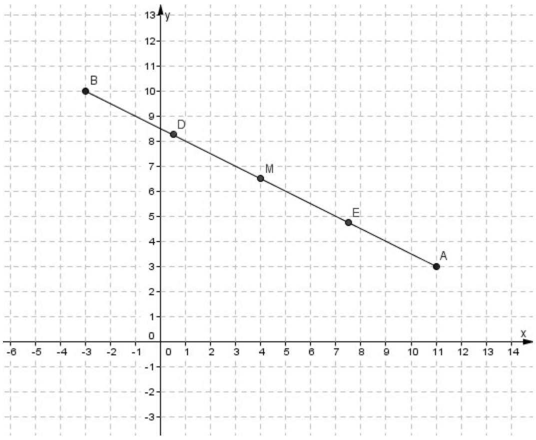


Figura 4.7: Exercício 4.7 a

Agora, no segundo item, o objetivo é que o aluno perceba que não é possível dividir um segmento em uma quantidade ímpar de pares iguais utilizando o ponto médio. Para isso, deverá utilizar a ferramenta homotetia, selecionar os pontos A e B e em seguida digitar no campo fator a fração $\frac{1}{7}$, depois repete a operação digitando a fração $\frac{2}{7}$, para encontrar os sete segmentos iguais. Então, deverá repetir a operação até digitar a fração $\frac{6}{7}$. Após essas sequências de comandos o segmento AB estará dividido em sete segmentos iguais. As coordenadas dos pontos da divisão do segmento podem ser encontradas na janela de álgebra.

Nesse item foi encontrada muita dificuldade, principalmente por estarem querendo resolver do mesmo modo que o anterior. Tentaram marcar os pontos aleatoriamente no segmento ou utilizando o ponto médio. Foi preciso uma orientação sobre a ferramenta correta a ser utilizada e como utilizá-la. Após a orientação eles conseguiram resolver sem grandes problemas.

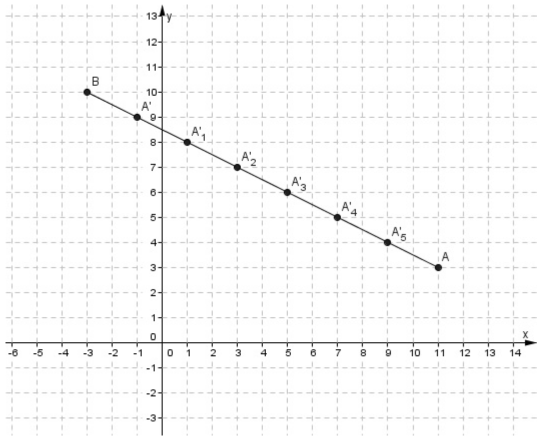


Figura 4.8: Exercício 4.7 b

Exercício 4.8. Encontre o ponto de interseção entre as retas dadas pelas equações r : $-x + y = 12$ e $s : 3x + 2y = 4$ e destaque esse ponto.

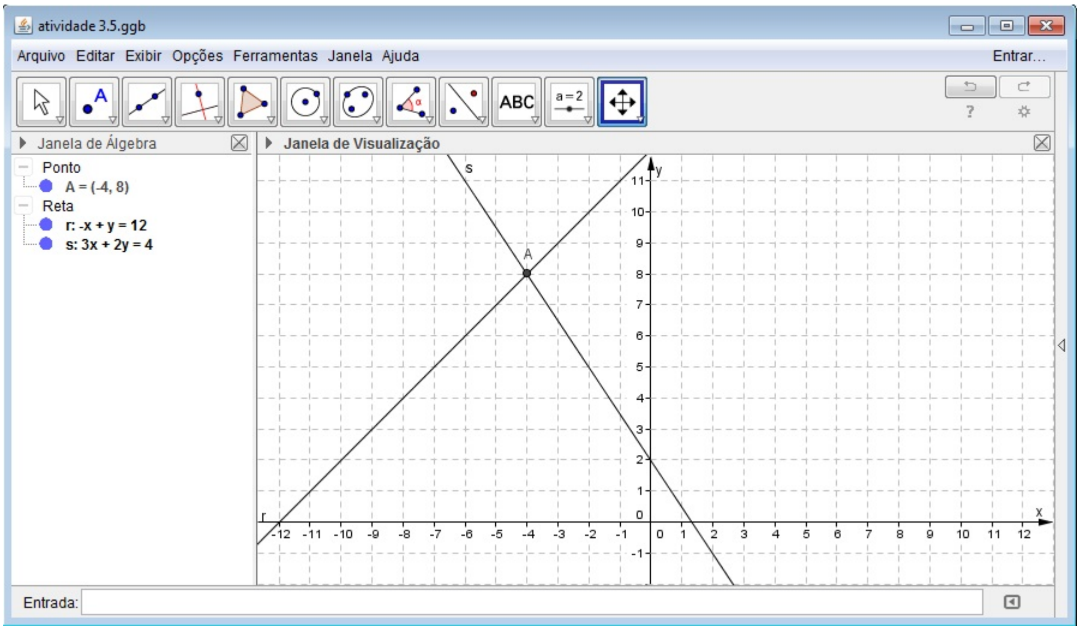


Figura 4.9: Exercício 4.8

O objetivo dessa atividade é para utilizar a janela de entrada no Geogebra, de modo que percebam que, ao digitar uma equação, o software mostrará o gráfico correspondente a ela, também para observar que essas retas possuem um único ponto comum e que é possível determiná-lo utilizando as ferramentas do Geogebra. Veja a gráfico do problema na figura 4.9:

É possível verificar que o ponto de interseção é $A = (-4, 8)$ e pode-se também manipular esse ponto utilizando a ferramenta mover. O ato de manipular o ponto é interessante pelo fato de permitir ao estudante explorar o que pode acontecer com uma das retas r ou s, à medida em que ele movimenta o ponto sobre a outra reta. Também é permitido realizar manipulações mudando os coeficientes nas equações das retas, na janela de álgebra, clicando sobre a equação da reta na janela de álgebra e alterando os valores.

Nessa atividade grande parte dos alunos resolveram localizando diretamente no gráfico o ponto de interseção. Apenas alguns fizeram o uso da ferramenta interseção de dois objetos. A atividade pode ser resolvida de qualquer uma das maneiras. Mas vale ressaltar que localizando o ponto diretamente no gráfico pode haver falhas, o ideal é utilizar a ferramenta apropriada citada acima.

Exercício 4.9. Marque no campo de entrada do Geogebra os pontos $A = (a, b)$,$B = (c, d)$ e $C = (m, n)$.

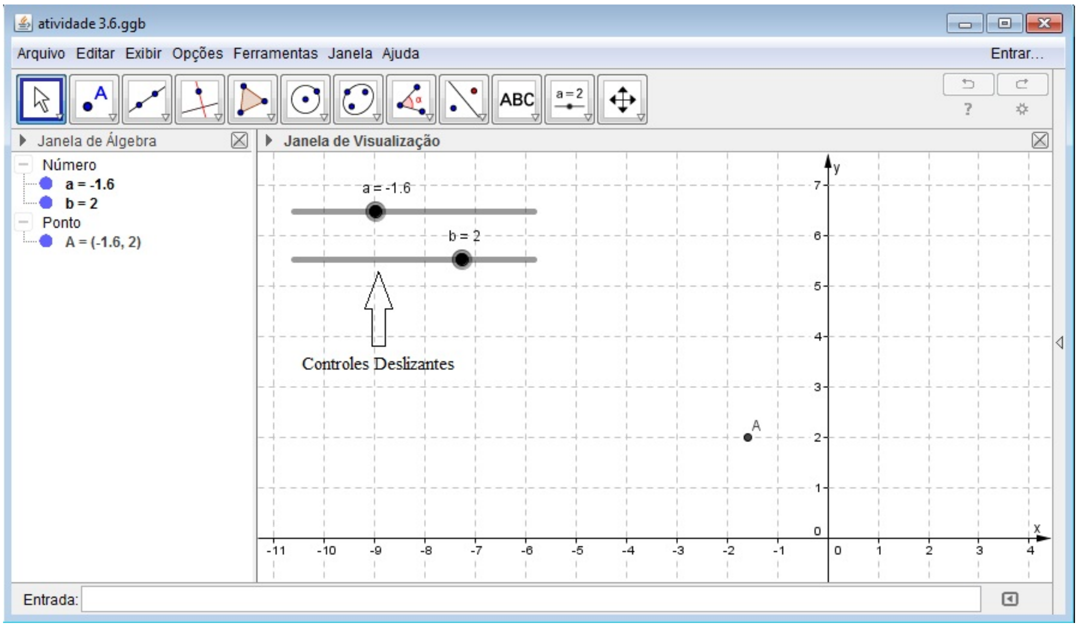


Figura 4.10: Exercício 4.9

O principal objetivo dessa atividade é aprender a utilizar os controles deslisantes do Geogebra. Eles têm o objetivo de permitir a manipulação de gráficos alterando-se os coeficientes das equações ou as coordenadas dos pontos, com isso podemos realizar explorações de conceitos matemáticos.

Ao digitar o ponto $A = (a, b)$ o programa pedirá para criar os controles deslizantes para os valores de a e b, então o ponto aparecerá automaticamente nas coordenadas $x = 1$ e $y = 1$. Para mudá-las basta utilizar os controles deslizantes ou mover o próprio ponto com a ferramenta mover, veja a figura:

A exploração de conceitos matemáticos é o ato de explorar as possibilidades oferecidas para realizar estudos utilizando essa ferramenta. Pode-se verificar que para o ponto $A = (a, b)$ estar no 1º quadrante os valores de a e b deverão ser ambos positivos, no segundo a negativo e b positivo, no terceiro a e b ambos negativo e, por fim, no 4º quadrante a positivo e b negativo. O aluno pode verificar isso colocando o ponto A em cada quadrante e observar os valores de a e b. Alterando-se apenas o valor de a, o ponto permanecerá a com a mesma distância em relação ao eixo Ox e alterando o valor de b, a distância em relação ao eixo y não se altera.

A maior dificuldade encontrada no problema foi sobre a criação de controles deslisantes, por isso, teve-se que ser explicado o significado e para que eles servem. Após isso pôde-se notar que alguns alunos tiveram dificuldades, pois todos os pontos iriam para o mesmo local nas coordenadas $(1, 1)$. Foi então necessário dizer que, ao criar um ponto, seria preciso movimentá-lo para que o próximo não se sobrepusesse a ele.

Exercício 4.10. Com a ferramenta mover, coloque os pontos nas coordenadas indicadas, $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$ e $C = (7, 4)$.

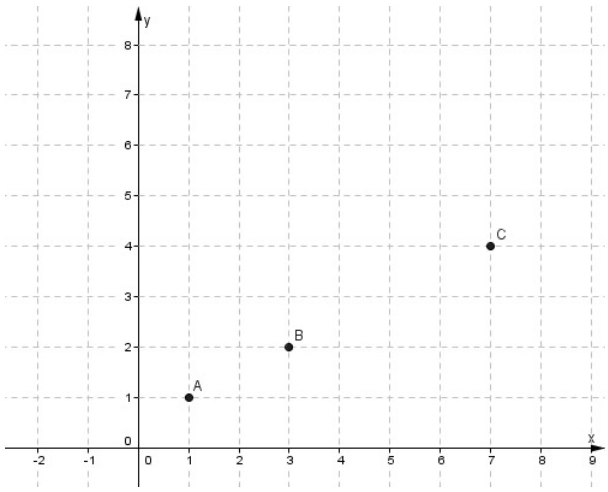


Figura 4.11: Exercício 4.10

O objetivo da atividade é de utilizar a ferramenta mover para manipular pontos. É importante a utilização dessa ferramenta pois ela permite realizar várias explorações de conceitos geométricos nos gráficos de equações e figuras previamente desenhadas. Veja a seguir a resolução da atividade na figura 4.11.

Nessa atividade não foram apresentadas grandes dificuldades, pois os alunos já estavam um pouco habituados com o programa.

Exercício 4.11. Estes três pontos estão alinhados? Isto é, eles são colineares?

Nessa atividade o aluno deve verificar se os pontos pertencem a uma mesma reta. No Geogebra existe alguns modos se verificar isso. Um deles é construindo uma reta determinada por dois pontos e verificar se o terceiro também está sobre a reta. Uma das maneiras de verificar se o terceiro está sobre a reta é construir uma nova reta determinada por esse ponto e um dos outros dois e verificar na janela de álgebra se as equações das retas foram idênticas. Por exemplo: determine a reta definida por A e B e em seguida a definida por A e C, se as equações forem a mesma, esses três pontos são colineares.

Os três pontos são colineares e determinam a reta cuja equação é $-x + 2y = 1$. Como pode ser visto na figura abaixo. Os alunos apresentaram poucas dificuldades para verificar o que se pedia no exercício. Muitos fizeram uma reta definida por dois pontos e notaram que o terceiro estava também sobre essa reta, assim os três pontos estavam alinhados.

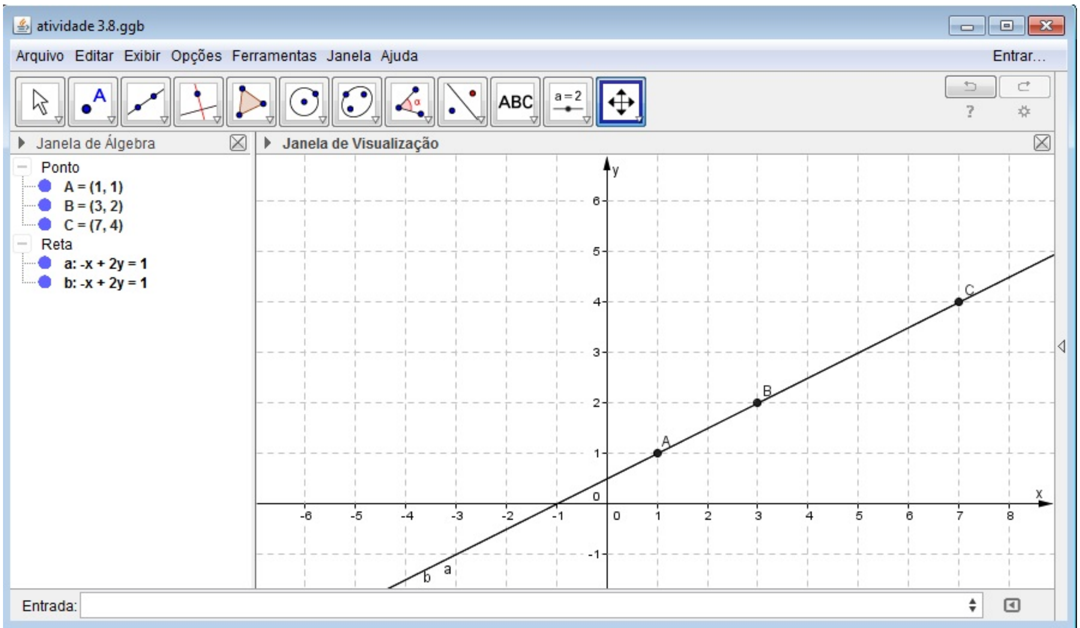


Figura 4.12: Exercício 4.11

Exercício 4.12. Calcule o Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ m & m & 1 \end{vmatrix}$$

e observe seu resultado.

Observação, o cálculo do determinante é feito da seguinte forma: "det: determinante[{{a,b,1}, {c,d,1}, {m,n,1}}]", os pontos do exercício 4.9 devem ser marcados nessa atividade.

Essa atividade tem como objetivo mostrar que é possível ter três pontos e calcular o determinante, onde as linhas da matriz são determinadas pelas coordenadas desses pontos, sendo o último elemento de cada linha igual a 1.

Os alunos devem, previamente, marcar os pontos $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e $C = (m, n)$ no gráfico e depois calcular o determinante. E aí sim, observar na janela de álgebra qual foi seu valor. O resultado do determinante depende da posição em que foram colocados os pontos.

A dificuldade encontrada foi de digitar as coordenadas dos pontos dentro da fórmula para calcular o determinante, porém com algumas explicações de que a fórmula deve ser digitada somente após ter os pontos marcados e também ser idêntica à da observação, os alunos conseguiram resolver o problema.

Exercício 4.13. Utilize a ferramenta mover para manipular esses pontos A, B e C. O que acontece com o resultado do determinante?

O objetivo é que o aluno observe que o valor do determinante se altera em função da mudança de posição dos pontos. Em alguns casos, o valor do determinante poderá ser zero. É importante esse tipo de atividade por permitir ao aluno manipular os pontos livremente, mas não esquecendo de observar que o valor do determinante será alterado de acordo com as mudanças de coordenadas dos três pontos utilizados para calcular o determinante.

Exercício 4.14. Trace a reta $\overleftrightarrow{AC}$, com o comando reta[A,C]

A expectativa de construir essa reta é que o aluno possa, mais adiante, estudar a condição de alinhamento dos três pontos. Através da reta construída, o aluno deve perceber que o terceiro ponto no caso o B pode pertencer ou não à reta. Para ter a percepção disso, basta ele mover o ponto B de modo que ele fique sobre ou fora da reta.

Exercício 4.15. Faça com que os três pontos A, B e C fiquem exatamente sobre a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Após isso, o que se pode dizer sobre o valor do determinante?

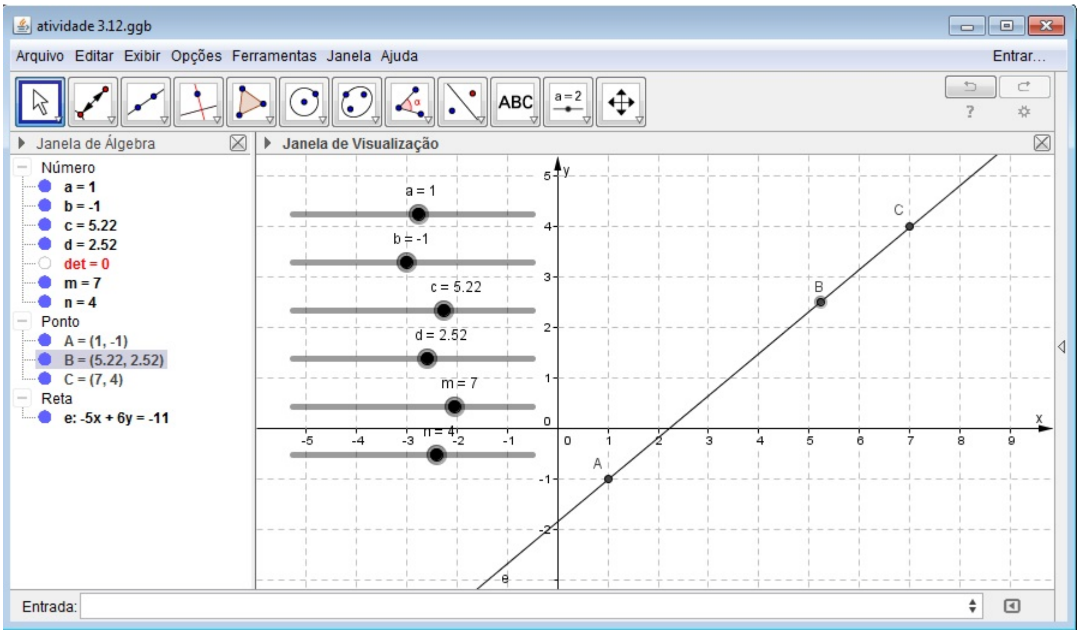


Figura 4.13: Exercício 4.15

O objetivo da atividade é observar que no momento em que os três pontos estiverem alinhados, o determinante será igual a zero. Essa é condição de alinhamento de três pontos. Veja resolução da atividade na figura acima:

Na resolução da atividade deve-se movimentar o ponto B até ele ficar sobre a reta fazendo com que o resultado do determinante, que é localizado na janela de álgebra, seja igual a zero.

Exercício 4.16. Construa o gráfico das retas cujas equações são $2x + y = 3$, $x - 3y = 7$ e $x - 8y = -5$

Essa questão tem como objetivo mostrar ao aluno como se representa uma reta no plano cartesiano. Para construir o gráfico das retas, deve-se digitar suas equações uma a uma no campo de entrada, em seguida o gráfico da reta aparecerá na janela de visualização. É importante ressaltar que esse é apenas um exemplo de retas, que nem sempre a representação coincidirá com as desse problema.

Exercício 4.17. O que se pode dizer sobre as três retas acima com relação as suas posições umas com as outras?

Espera-se que nessa atividade o aluno consiga responder qual é essa posição, que nesse caso são concorrentes duas a duas. Basta observar o gráfico das retas. No Geogebra podemos renomear essas retas antes de resolver o problema, se assim o aluno preferir.

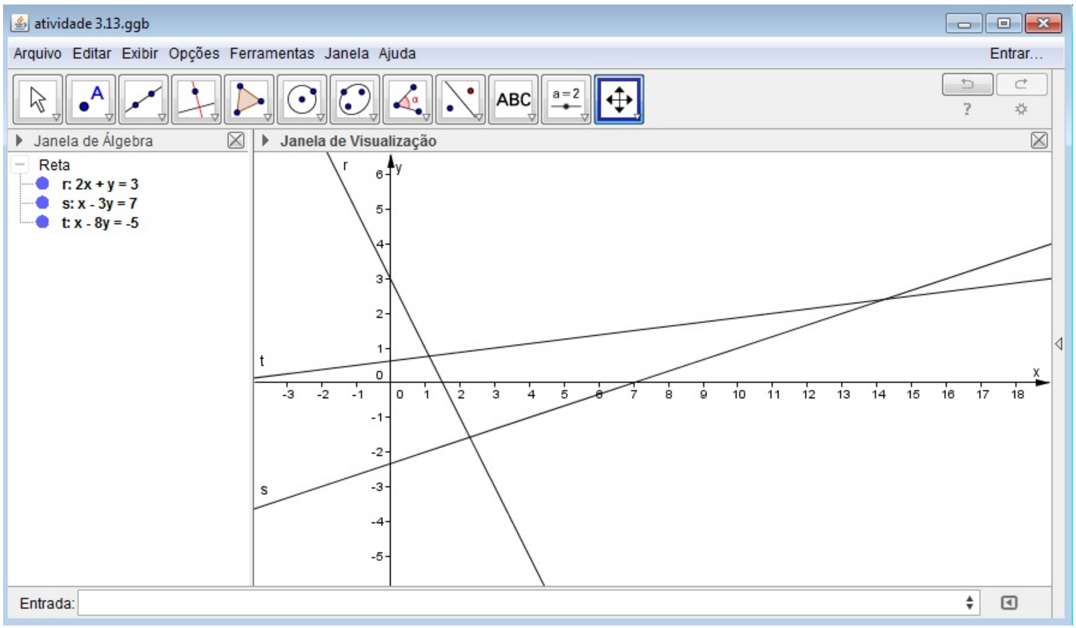


Figura 4.14: Exercício 4.17

Nessa atividade, o Geogebra foi utilizado como uma ferramenta para realizar a análise gráfica das retas que estão representadas.

Exercício 4.18. Encontre o ponto de interseção entre as retas e $r : y = 3x + 1$ e $s : y = x + 3$. Qual é esse ponto?

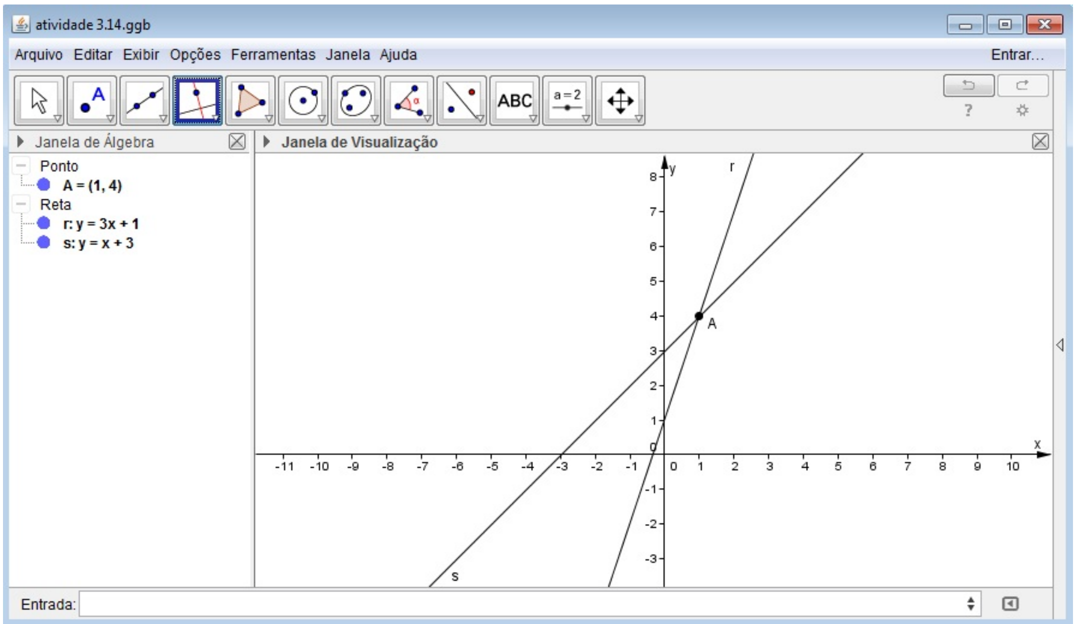


Figura 4.15: Exercício 4.18

O principal objetivo da atividade é encontrar o ponto de interseção das retas dadas. Para resolver a atividade com êxito, deve-se construir o gráfico das retas através do campo de entrada e, em seguida, utilizando a ferramenta interseção de dois objetos, clicar sobre uma reta e na outra, encontrando, assim, a interseção das retas. Veja a figura 4.15.

Exercício 4.19. Quaisquer duas retas no plano têm um ponto em comum? Justifique:

O objetivo dessa atividade é levar o aluno a realizar uma reflexão sobre a posição relativa entre duas retas. Para que o objetivo seja atingido, o professor deverá orientar o aluno a construir várias retas utilizando a ferramenta reta definida por dois pontos. Assim, ele deverá, em algum momento construir duas paralelas ou uma sobre a outra e, nesse caso, as retas serão coincidentes e terão infinitos pontos em comum.

O Geogebra será utilizado como uma ferramenta de investigação. Quando o aluno estiver familiarizado com a construção de retas, o professor deve sugerir a eles construir duas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ utilizando a ferramenta reta. É importante que não haja nenhuma outra figura representada na janela gráfica, pois essas poderão interferir na investigação do problema. Após terem construído as retas, deve-se encontrar o ponto E de interseção entre elas. No caso de existir esse ponto, suas coordenadas aparecerão na janela gráfica e se as retas forem paralelas ou coincidentes, aparecerá juntamente com o ponto a palavra indefinido. Veja a figura 4.19.

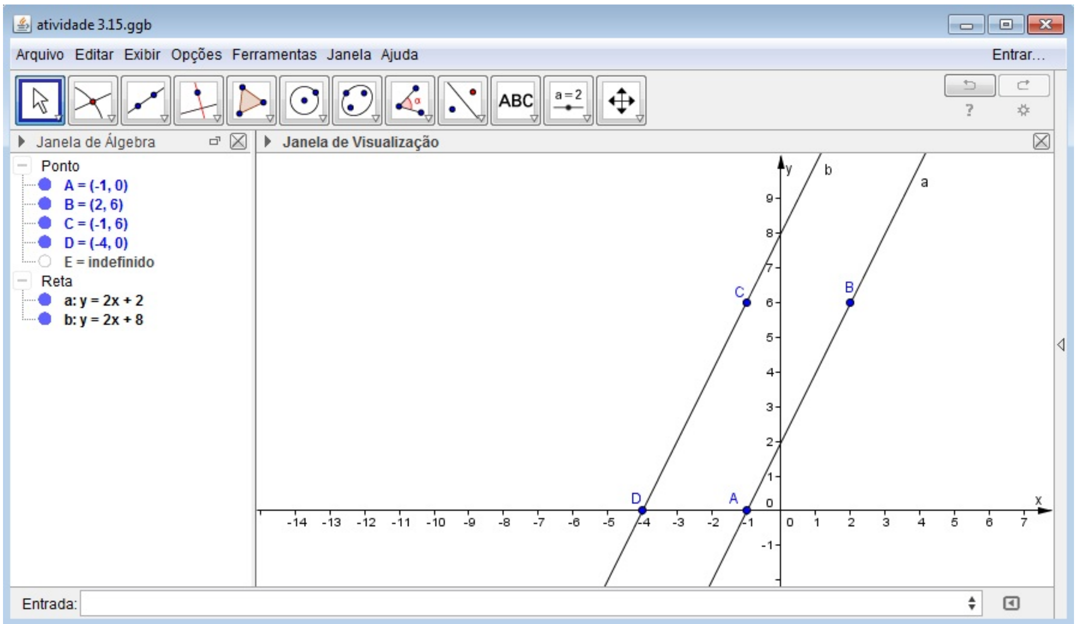


Figura 4.16: Exercício 4.19

No caso da figura, as retas são paralelas. Para verificar deve-se observar na janela de álgebra que seus coeficientes angulares são iguais.

Exercício 4.20. Construa o gráfico das retas $y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 5$. Qual é a posição relativa entre essas retas?

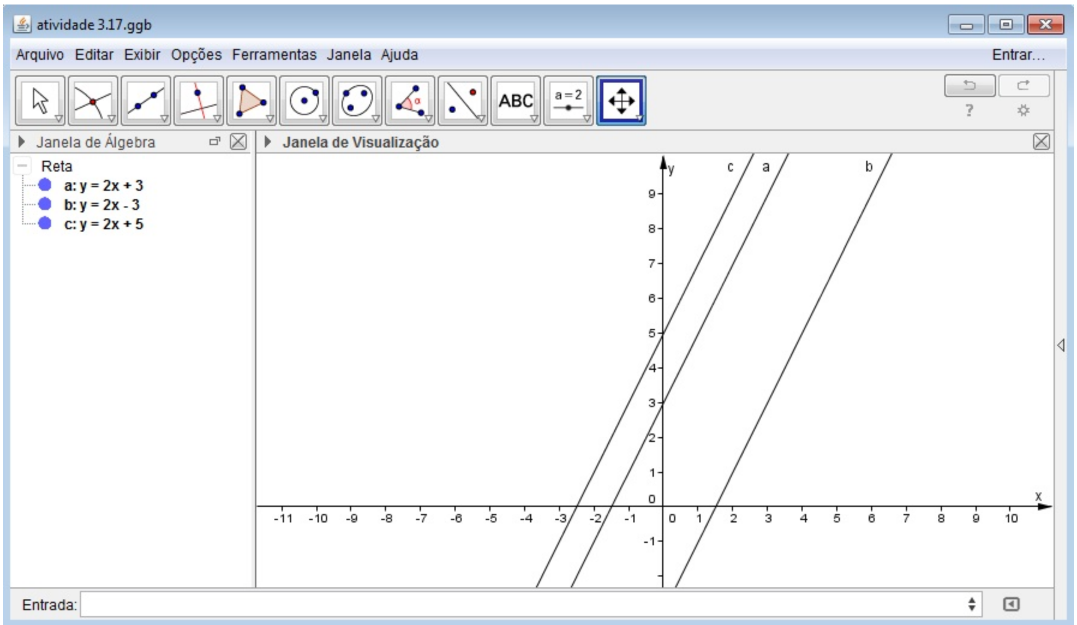


Figura 4.17: Exercício 4.20

O objetivo da questão é levar os alunos a perceber que as retas são paralelas. Podendo ele observar esse fato tanto no visual, através do gráfico, ou pela equações, nas igualdades dos coeficientes angulares. A parte visual é importante, pois o aluno terá a noção de como é o comportamento gráfico de cada uma das respectivas posições entre retas.

Exercício 4.21. Construa outras retas que tenham a mesma característica das retas o exercício anterior e escreva a equação de algumas:

Espera-se que nessa atividade o aluno consiga escrever equações da retas que sejam paralelas entre elas. Uma dificuldade encontrada é de o aluno construir retas com os mesmos coeficientes angulares das retas do exercício 4.20. Por isso, o professor deve orientá-los no sentido de que deve digitar a equação de uma reta preferencialmente na forma reduzida, em seguida, construir outras retas com o mesmo coeficiente angular da primeira.

Exercício 4.22. Escreva agora duas equações da reta que sejam paralelas a reta $y = 5x - 3$.

Essa atividade tem como objetivo avaliar se o aluno aprendeu o conceito de retas paralelas. Pois a realização da atividade 4.21 fornece condições para que possa ser realizada essa tarefa. Vale ressaltar que existe uma infinidade de retas que são paralelas a essa reta $y = 5x - 3$.

Exercício 4.23. Dada uma reta cuja equação é $r : y = mx + n$ onde m e n são números reais, escreva a equação das retas que sejam paralelas a essa reta.

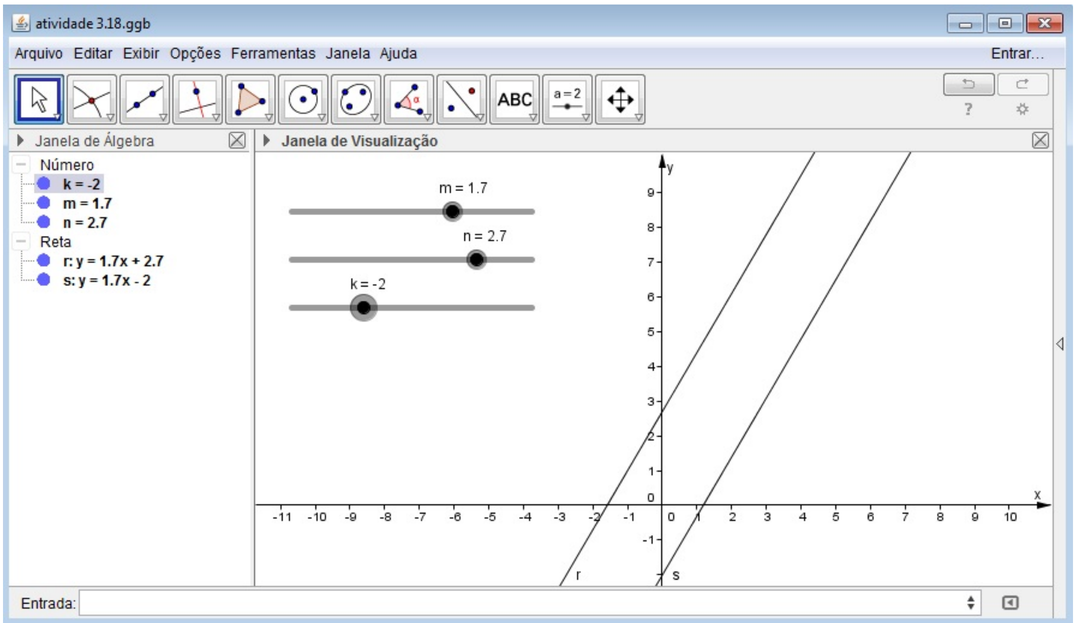


Figura 4.18: Exercício 4.23

O objetivo da atividade é que o aluno consiga representar genericamente as retas que serão paralelas à reta r. Deve-se digitar a equação da reta como aparece no enunciado, em seguida criar controles deslizantes para os valores de m e n. Espera-se que o estudante possa responder que as retas paralelas são dadas pela equação $s : y = mx + k$, o valor de k é um número real qualquer. Para obter êxito, o professor deverá lembrar os alunos sobre a definição de retas paralelas para que, assim, eles possam construir uma equação geral de uma reta paralela a uma reta dada.

Ao construir as duas retas o aluno deverá ser orientado a movimentar nos controles deslizantes os valores de m, n e k e observar que, ao movimentar o n a reta r mudará de posição, ao movimentar o k é a reta s que mudará de posição e, por fim, ao movimentar o m será alterada a inclinação das retas pois ambas dependem desse valor.

Exercício 4.24. Construa o gráfico das retas $r : y = x + 3$ e $s : y = -x + 1$ e encontre o ponto de interseção entre as retas. Qual é esse ponto?

Primeiramente o objetivo dessa atividade é verificar qual é o ponto comum entre essas retas. Espera-se que em seguida os alunos possam perceber que elas são perpendiculares. Através do gráfico pode-se perceber que o ângulo entre elas é aproximadamente 90°, nesse caso exatamente, só que para afirmar isso, deve-se realizar a medição do ângulo, o que faremos mais à frente. Poderão perceber que são perpendiculares pelo produto de seus coeficientes angulares mas, para isso, deverá conhecer a teoria de retas perpendiculares.

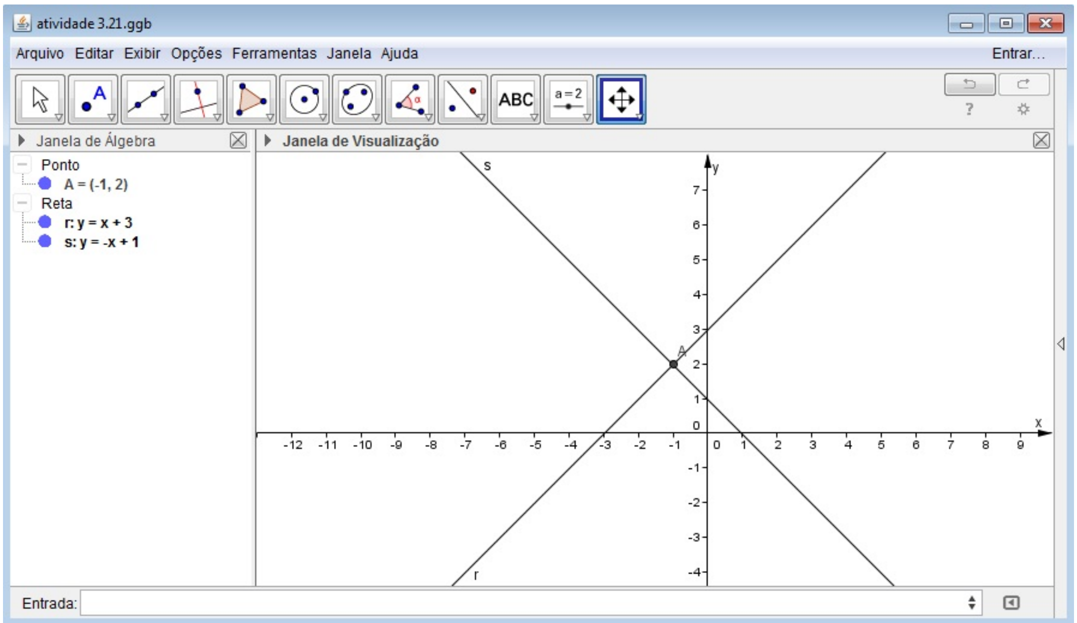


Figura 4.19: Exercício 4.24

Para determinar o ponto de interseção entre as retas, deve-se utilizar a ferramente interseção entre dois objetos e notar que esse ponto é $A = (-1, 2)$

Exercício 4.25. Construa o gráfico das retas $r : y = \frac{5}{2}x - 3$ e $s : y = -\frac{2}{5}x + 4$. O que se pode dizer a respeito do produto dos coeficientes angulares dessas retas?

Além de o aluno conseguir fazer a representação do gráfico dessa questão, seu objetivo consiste em calcular o produto dos coeficientes angulares. É esperado que o aluno resolva corretamente respondendo que esse valor é igual a -1. Esse resultado é útil para a resolução das atividades seguintes.

Exercício 4.26. Utilize a "ferramenta ângulo" para determinar o ângulo entre essas duas retas do exercício 4.25. Qual foi o ângulo encontrado? Você sabe qual a posição relativa entre essas duas retas?

O objetivo é encontrar a medida do ângulo, e através desse valor, conseguir responder que essas retas serão perpendiculares. Para resolver a atividade o aluno poderá utilizar o gráfico construído no exercício anterior. Veja a figura 4.20:

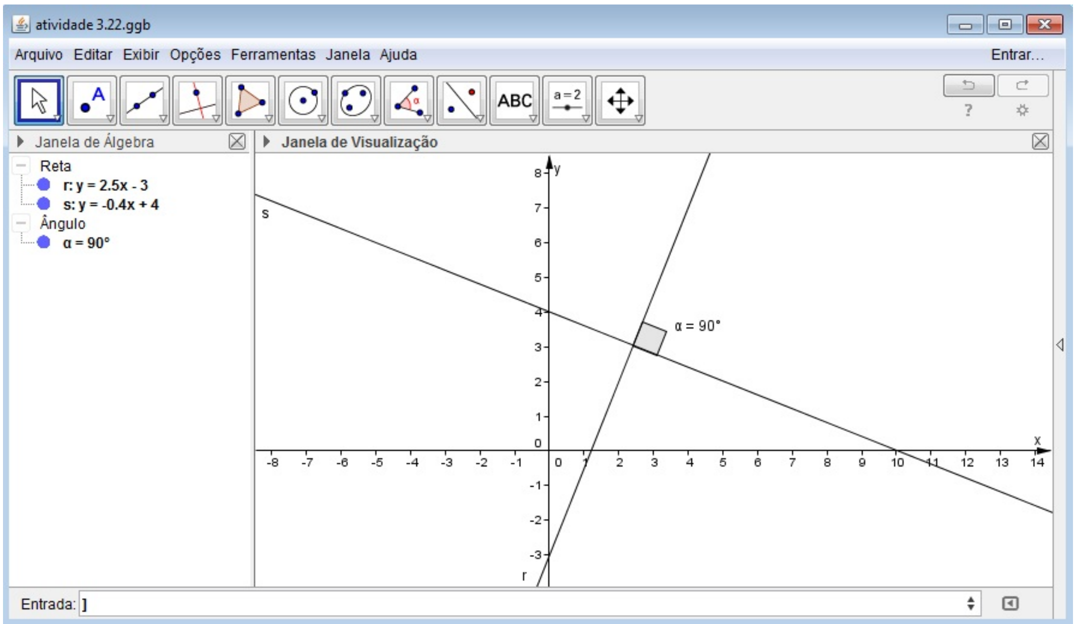


Figura 4.20: Exercício 4.26

Para realizar a medida de ângulo entre retas, deve-se utilizar a ferramenta ângulo. As vezes, é necessário fazer alguns ajustes nas configurações do Geogebra, tais como medir o ângulo com valores entre 0° e 180°, pois isso otimiza o estudo entre retas. Nessa atividade, também o aluno aprende a determinar o ângulo entre retas e isso será útil na resolução de problemas.

Exercício 4.27. Construa as retas de equações $r: y = mx - 3$, $s: y = -\frac{1}{m}x + 4$ sabendo que $m \neq 0$, manipule o valor de m e observe o comportamento das retas. Essas duas retas são perpendiculares?

Nessa atividade temos como objetivo levar o aluno a perceber que essas duas retas são perpendiculares. Para isso o aluno deverá determinar o ângulo entre as retas e em seguida é sugerido que se movimente o valor de m. Para isso deverá utilizar o controle deslizante. É esperado que o estudante, ao alterar o coeficiente angular, perceba que as duas retas continuarão sendo perpendiculares. Isso ocorre pois os coeficientes das retas r e s são respectivamente m e $-\frac{1}{m}$, assim o produto $m \cdot (-\frac{1}{m}) = -1$ esse resultado independe do valor de $m \in \mathbb{R}, m \neq 0$.

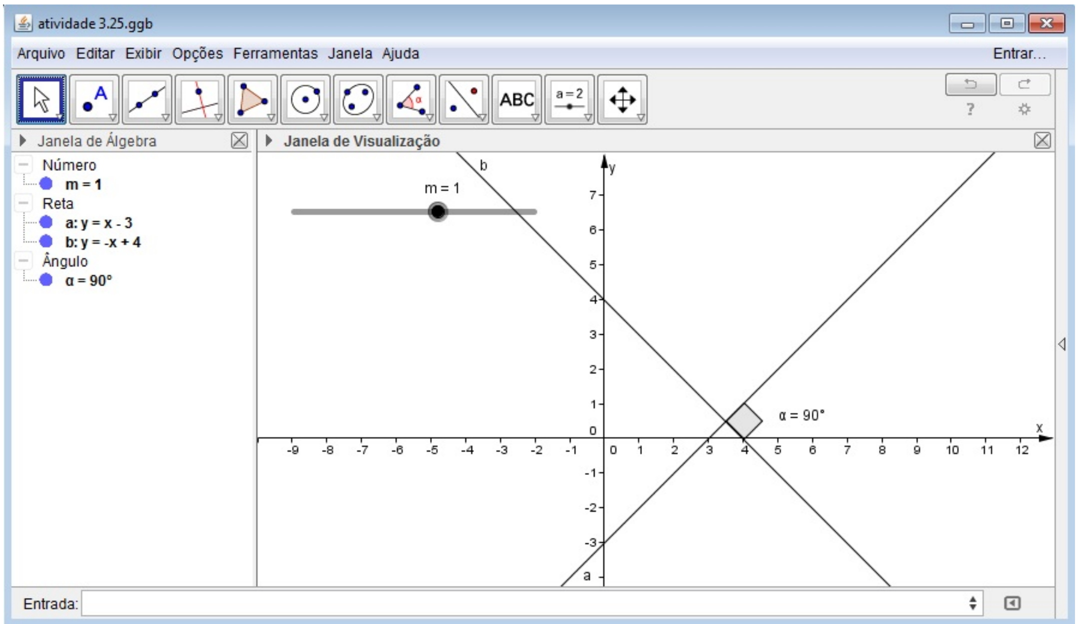


Figura 4.21: Exercício 4.27

Na figura estão representadas as duas retas com o ângulo entre elas. O Geogebra permite que seja alterado o valor de m proporcionando, assim, uma ferramenta para se observar o comportamento das retas. No nosso caso, a observação a ser feita é que, independentemente do valor de m, essas retas sempre serão perpendiculares.

Exercício 4.28. Dada uma reta cuja equação é $r : y = mx + n$ onde m e n são números reais e $m \neq 0$, escreva a equação das retas que sejam perpendiculares a essa reta.

O objetivo dessa atividade é que utilize os resultados anteriores como base para resolver o problema corretamente. O aluno deve construir uma reta s perpendicular à reta r. Para isso deverá conhecer as definições de retas perpendiculares e em seguida utilizar o resultado do exercício 4.27. Espera-se que chegue ao resultado $y = -\frac{1}{m}x + k$, k é um número real qualquer.

Exercício 4.29. Escreva a equação da circunferência cujo centro é o ponto $C = (-3, 2)$ e o raio mede 8.

O objetivo da atividade é conhecer o processo de construção de uma circunferência dados centro e raio. Para resolver a atividade, deve-se marcar o centro, que pode ser feito de duas maneiras: digitando as coordenadas do ponto no campo de entrada ou localizando o ponto no plano cartesiano, fazendo o uso da "ferramenta ponto". Esta segunda é uma opção mais didática, pois o aluno estará treinando seus conhecimentos sobre coordenadas. Após marcar o centro, deve-se utilizar a ferramenta "círculo dados centro e raio", para construir a circunferência. Deve-se clicar no centro e digitar a medida do raio na janela que abrirá. Obteremos a circunferência cuja equação é $c : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 64$, basta observar a janela de álgebra para obtê-la. A resolução da atividade no Geogebra encontra-se na figura a seguir.

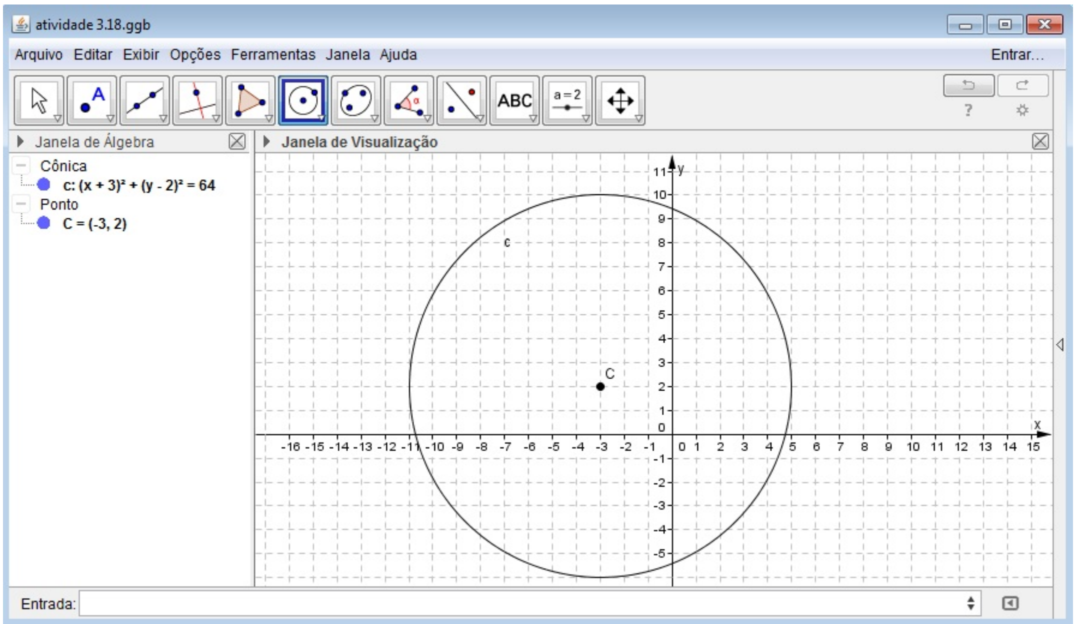


Figura 4.22: Exercício 4.29

Exercício 4.30. Uma circunferência tem diâmetros cujos extremos são $A = (1, 2)$ e $B = (-2, 3)$. Encontre a equação da circunferência.

O objetivo da atividade é obter conhecimentos sobre diâmetro, que a circunferência deverá passar por esses dois pontos, mais do que isso, que o centro será o ponto médio dos pontos que são os extremos do diâmetro. Para resolver a atividade, primeiramente, deve-se localizar os pontos A e B, em seguida marcar o segmento AB e localizar seu ponto médio, pois este será o centro da circunferência procurada. Finalmente, deve-se utilizar a ferramenta "círculo" clicando sobre o centro e um do pontos que ela deverá passar.

Veja na figura que o centro é $C = (-0, 5; 2, 5)$, que o diâmetro e o raio medem aproximadamente $d = 3, 16$ e $r = 1, 58$, respectivamente, e a equação da circunferência é $(x + 0, 5)^2 + (y - 2, 5)^2 = 1, 58^2$.

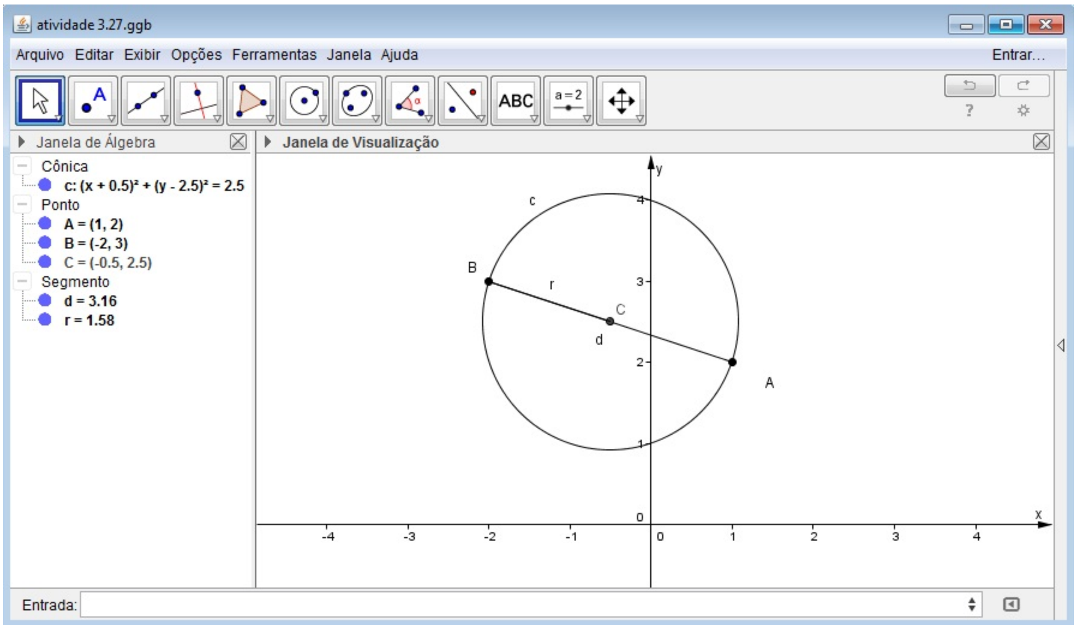


Figura 4.23: Exercício 4.30

Exercício 4.31. Determine a equação da circunferência de centro $C = (7, 6)$ e que passa por $A = (1, -3)$.

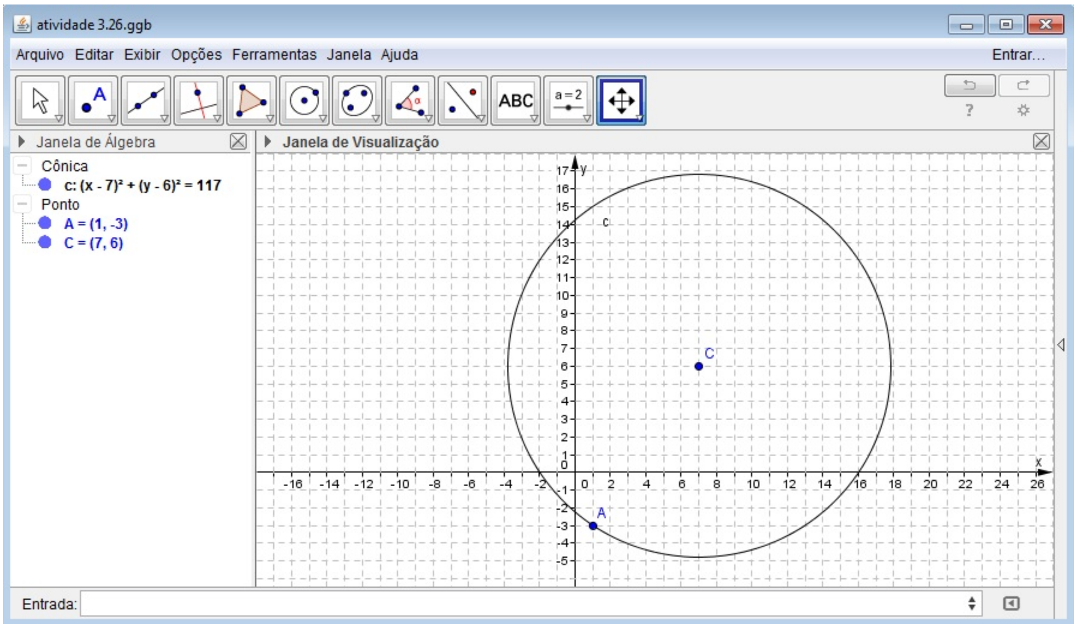


Figura 4.24: Exercício 4.31

Nessa atividade o objetivo é perceber que para construir uma circunferência, basta que sejam dados o centro e um de seus pontos. Para efetuar a resolução, deve-se localizar ambos os pontos na janela de gráficos do Geogebra e em seguida utilizar a ferramenta "círculo dados centro e um de seus pontos". Deve-se clicar primeiro no centro e em seguida no ponto que pertencerá a circunferência. É fácil ver na janela de álgebra que a equação da circunferência é $c : (x-7)^2 + (y-6)^2 = 117$.

Exercício 4.32. Determine a equação da circunferência de centro $C = (2,3)$ e que é tangente ao eixo y. Em qual ponto essa circunferência intercepta o eixo y?

Espera-se que os alunos possa encontrar o ponto de tangência pedido. Deve-se orientá-los sobre como encontrar esse ponto, que ele será o ponto do eixo Oy mais próximo do centro, isto é, a medida do raio será a distância entre o ponto $C = (2,3)$ e a reta y.

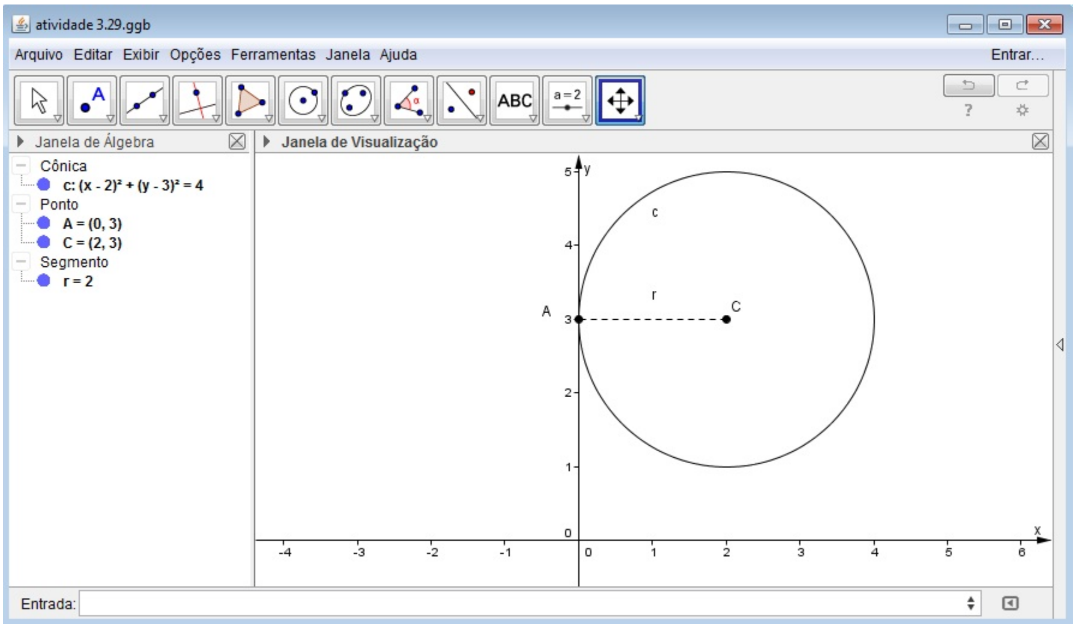


Figura 4.25: Exercício 4.32

O aluno deverá localizar o ponto de tangência, para isso ele poderá utilizar a ferramente reta perpendicular ao eixo Oy passando por C, marcar o ponto de interseção A entre a reta e o eixo, por fim, utilizar a ferramenta "círculo" para construir a circunferência. O aluno poderá destacar também o raio através do segmento AC. Pode-se tirar algumas relações dessa atividade como, por exemplo, as coordenadas do ponto de tangência será 0 em x e y será o mesmo do ponto C que é o centro, já o raio terá medida igual ao valor da abscissa na coordenada do centro. Veja que a equação pedida é $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Exercício 4.33. Determine se as equações representam ou não uma circunferência. Em caso afirmativo encontre seu centro e raio:

a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$

c) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 96 = 0$

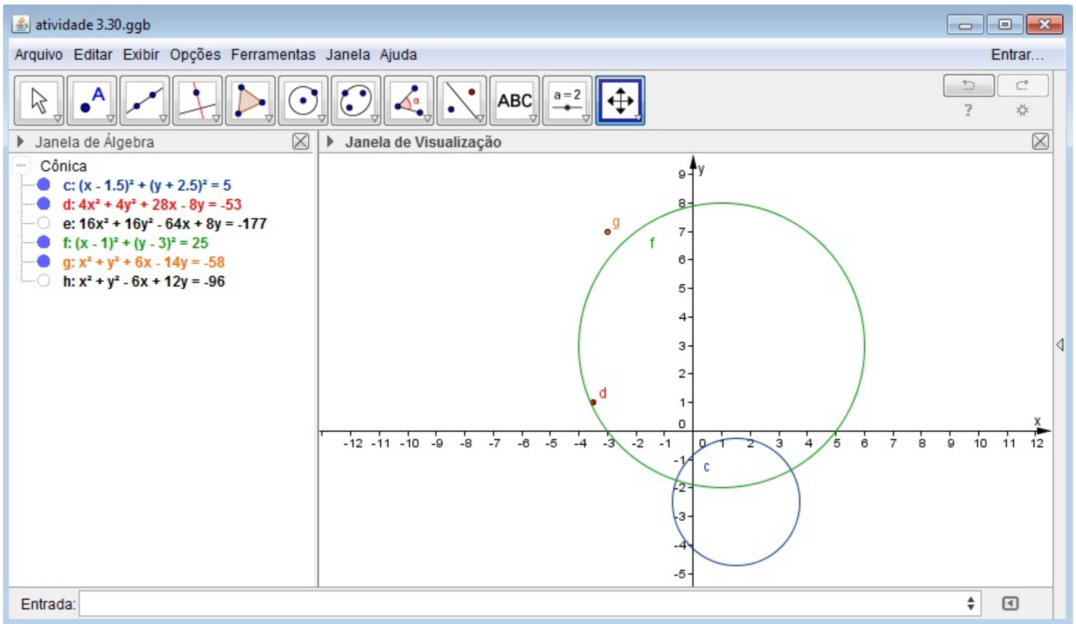


Figura 4.26: Exercício 4.33

O objetivo da atividade é mostrar ao aluno que nem sempre o gráfico gerado por uma equação quadrática resultará em uma circunferência. Na resolução, deve-se digitar a equação como foi dada, no campo de entrada, e em seguida colocar o cursor sobre a equação na janela de álgebra que o Geogebra mostrará o nome da equação. Pode-se também, observar as representações na janela gráfica. As equações que representam uma circunferência são as dos itens a e d, as dos itens b e e representam um ponto, por fim as dos itens c e f têm como representação um conjunto vazio.

Exercício 4.34. Determinar a equação da circunferência cujo raio é 6 e o centro é a interseção das retas $5x + 2y + 10 = 0$ e $x + 3y + 7 = 0$.

É esperado que o aluno possa construir as duas retas e, em seguida, encontrar o ponto de interseção entre elas para, assim construir a circunferência pedida.

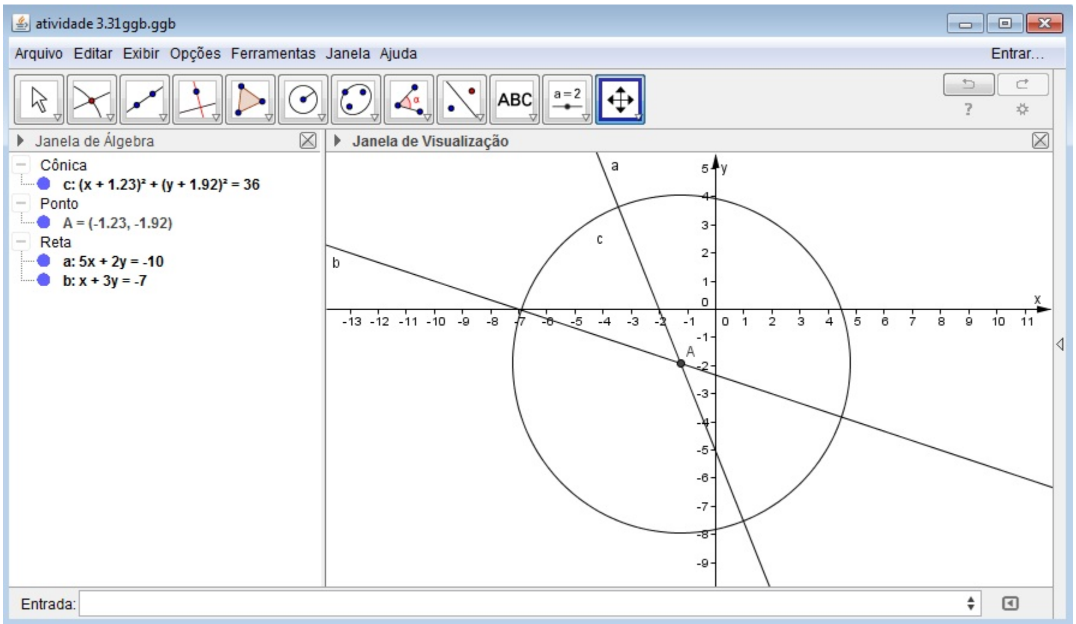


Figura 4.27: Exercício 4.34

O centro será o ponto $(-1,23;-1,92)$ assim, a equação pedida será $(x+1,23)^2+(y+1,92)^2=36$.

Exercício 4.35. Uma circunferência passa pelos pontos $A=(1,6)$e B $=B=(1,-4)$ e seu centro se encontra sobre a reta $r: x+y=2$. Encontre sua equação.

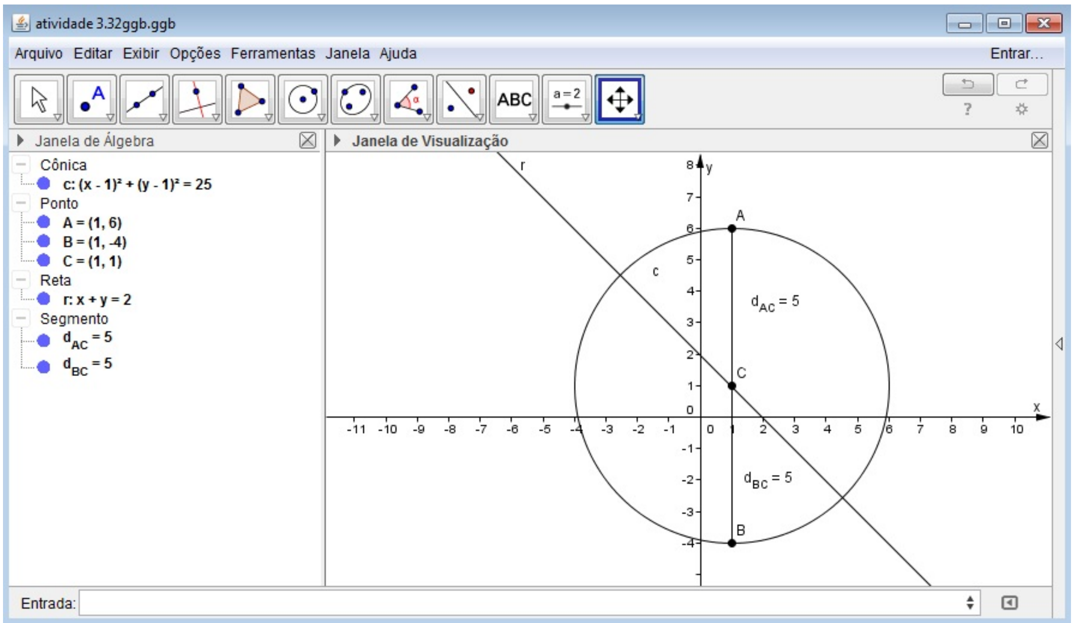


Figura 4.28: Exercício 4.35

O objetivo dessa atividade é que o aluno encontre um ponto C que esteja sobre a reta r e possua distância de A igual a de B, assim C será o centro da circunferência pedida.

O modo utilizado para resolver a atividade foi localizando os dois pontos A e B, a reta r, um ponto P sobre a reta e, em seguida, marcando os segmentos AC e BC. Deve-se movimentar o ponto C sobre a reta r até as distâncias de AC e BC serem iguais, encontrarão aí o centro da circunferência, que possibilitará a ele encontrar sua equação. Para isso, bastará utilizar a ferramenta círculo, clicando sobre o centro e em seguida sobre um dos pontos da circunferência. O raio será 5 e a equação será $(x-1)^2+(y-1)^2 = 25$.

Exercício 4.36. Determine se as equações representam ou não uma circunferência. Em caso afirmativo encontre seu centro e raio:

a) $(x-2)^2+(y-4)^2 = 9$

b) $x^2+y^2-4x-8y = 8$

c) $x^2+y^2-x+y = 3$

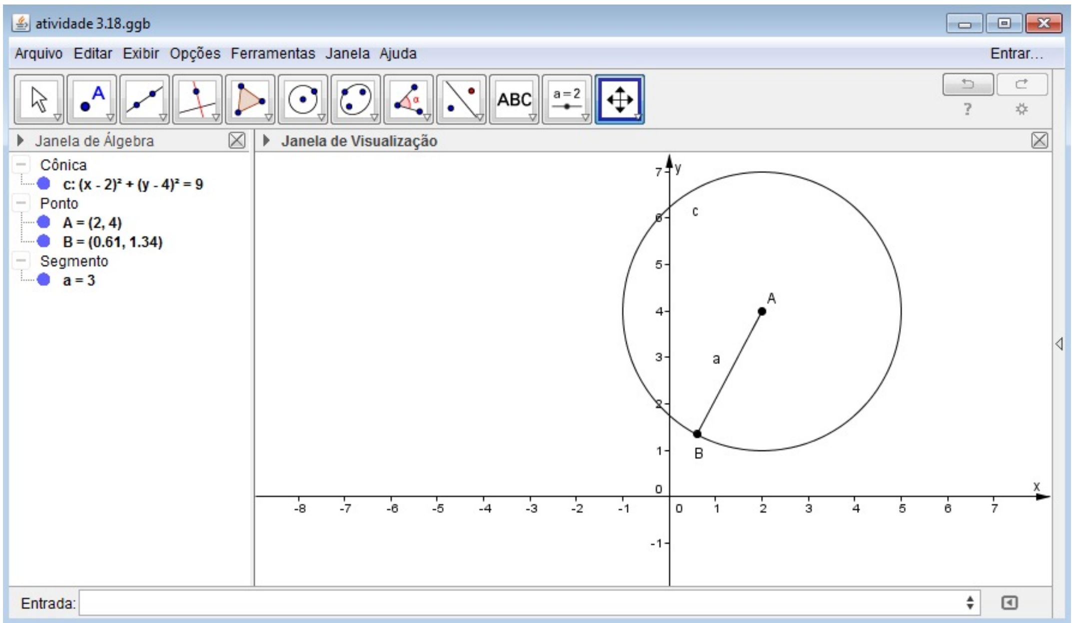


Figura 4.29: Exercício 4.36 item a

O objetivo é que se utilize o Geogebra para resolver a atividade de modo que possa se familiarizar com o que é raio e centro em uma circunferência. Primeiro, deve-se digitar a equação pedida, utilizar a ferramenta "ponto médio ou centro" para encontrar o centro, para o raio, marca-se um ponto sobre a circunferência e em seguida o segmento determinado por esse ponto é o centro, a medida desse segmento será o raio. Veja na janela de álgebra que o valor do raio é $a = 3$ e o centro é $(2, 4)$.

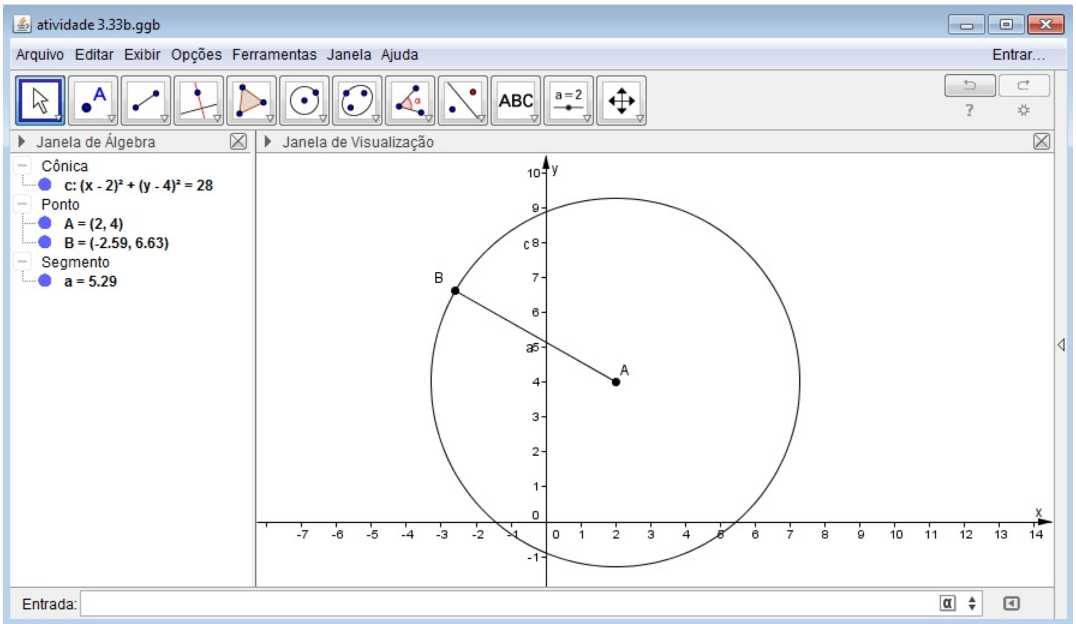


Figura 4.30: Exercício 4.36 item b

Nesse caso, o centro é o mesmo no item anterior, e essas circunferências são chamadas de concêntricas. O valor do raio é aproximadamente $a = 5,29$.

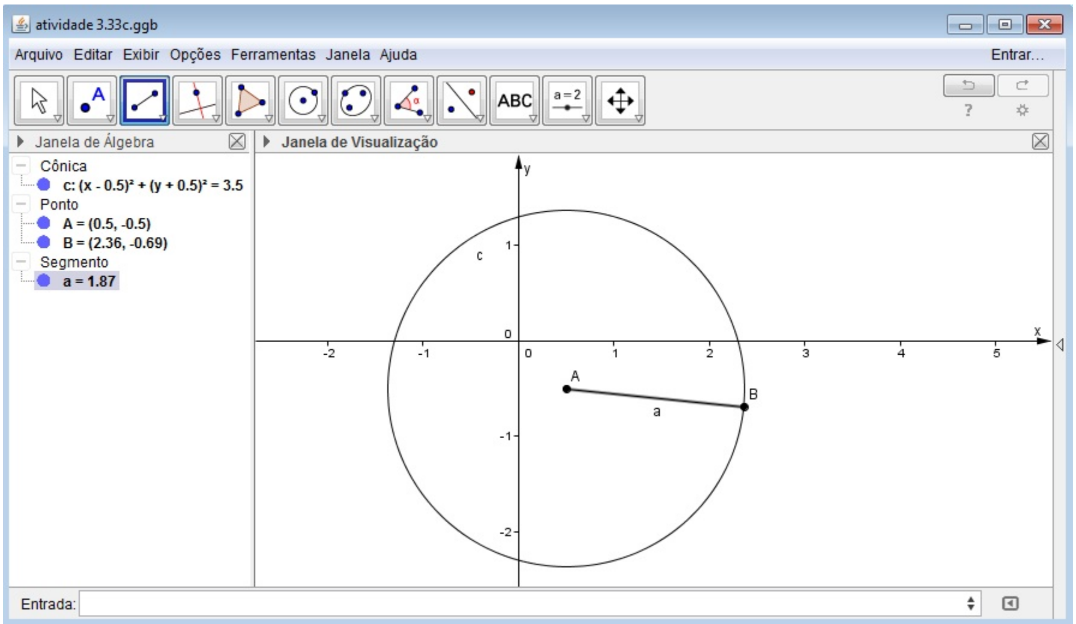


Figura 4.31: Exercício 4.36 item c

O valor do raio é aproximadamente $a = 1,87$ e o centro é $(0,5; 0,5)$.

Exercício 4.37. Qual é a equação da circunferência que tem centro no ponto $C = (-2, 5)$ e que passa pela origem?

Deseja-se, que nessa atividade, o aluno consiga localizar a origem do sistema para construir a circunferência desejada.

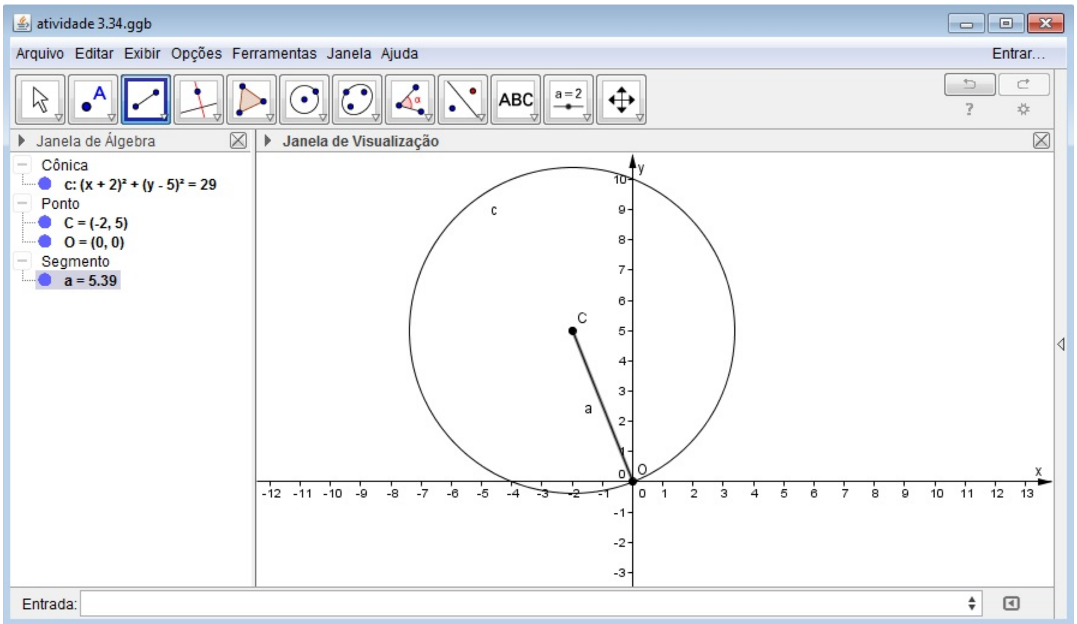


Figura 4.32: Exercício 4.37

Deve-se localizar o ponto $C = (-2, 5)$, a origem $O = (0, 0)$ e construir a circunferência utilizando a ferramenta apropriada. Veja que a circunferência pedida possui equação $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 29$.

Exercício 4.38. Encontre a equação da circunferência que contém os pontos $(-1, 4)$, $(5, -2)$ e $(1, -2)$.

Essa atividade tem como objetivo mostrar ao aluno que, dados três pontos não colineares, eles determinarão uma única circunferência que os contém.

De início devemos marcar os três pontos e, em seguida, utilizar a ferramenta "círculo definido por três pontos" para encontrar a equação da circunferência que é $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 20$.

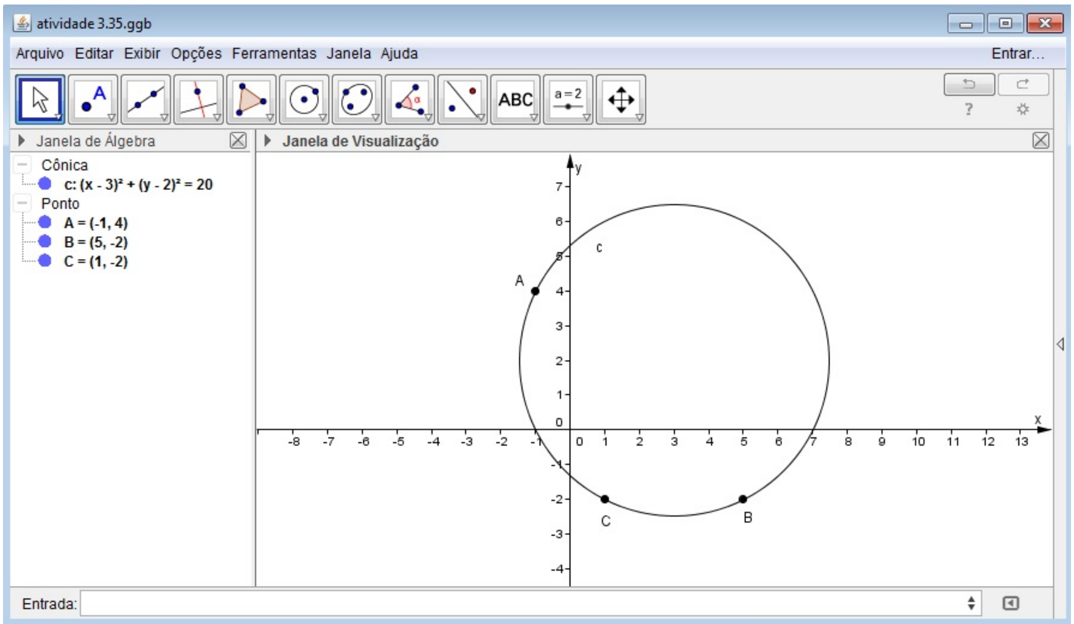


Figura 4.33: Exercício 4.38

Exercício 4.39. Encontre a equação da reta que forma ângulo de 45° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo, e passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y = k$ ou $(x-2)^2 + (y+4)^2 = k + 20 = r^2$.

É esperado que o aluno perceba que existe uma única reta que satisfaz a condição imposta no problema.

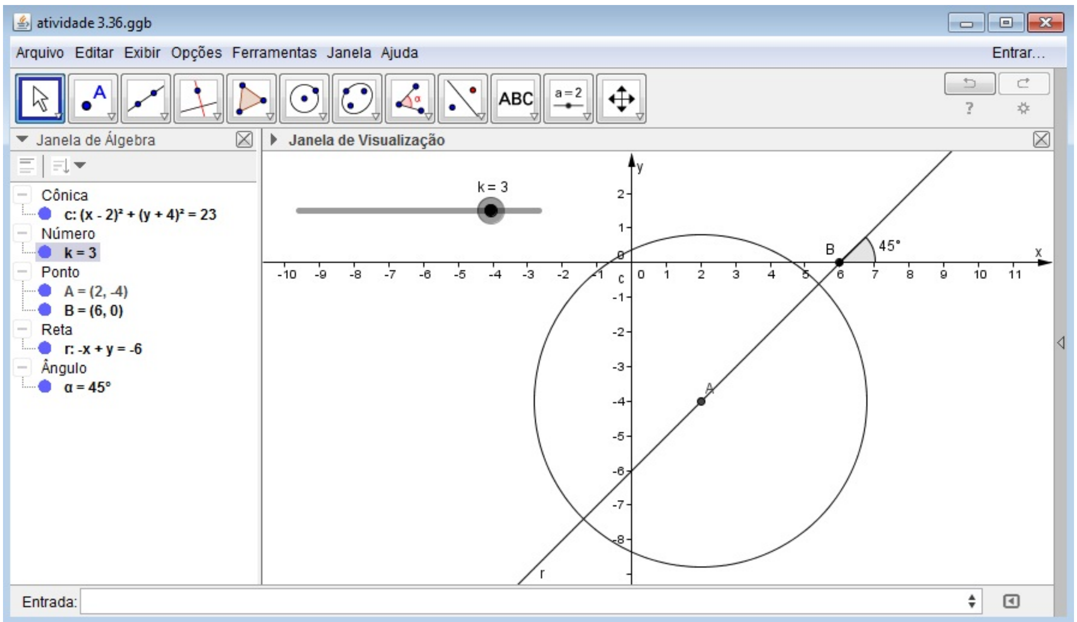


Figura 4.34: Exercício 4.39

Para resolver, o aluno deverá construir a circunferência dada pela equação, localizar o centro, um ponto B no eixo Ox, marcar a reta determinada pelo centro e o ponto sobre o eixo Ox, medir o ângulo entre a reta encontrada e o eixo das abscissas utilizando a ferramenta "ângulo", cliclando sobre a reta e em seguida obre o eixo. Por fim, deverá movimentar o ponto B até o local em que a medida do ângulo for 45°. A equação da reta que foi pedida é $r : -x + y = -6$. O valor de k não vai interferir na equação da reta, pois ele apenas interfere no valor do raio da circunferência, que é $r = sqrtk + 20$, mas não interfere no centro $(2, -4)$, que de fato da a solução do problema.

Exercício 4.40. Uma reta intercepta nos pontos $A = (3, 4)$ e $B = (-4, 3)$ uma circunferência centrada na origem.

a) Qual é o raio da circunferência?

b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos A e B e seus simétricos em relação a origem.

Primeiro, devemos construir os dois pontos, destacar a origem e construir a circunferência com centro na origem e passando pelos pontos. Para essa ù última tarefa, deve-se selecionar a ferramenta "círculo dado centro e um de seus pontos", clicar sobre o centro e em seguida sobre um dos pontos A ou B. O estudante deve perceber que o raio é a distância da origem a um dos pontos do círculo. Nesse caso foi escolhido o ponto A, logo o raio é $r = 5$.

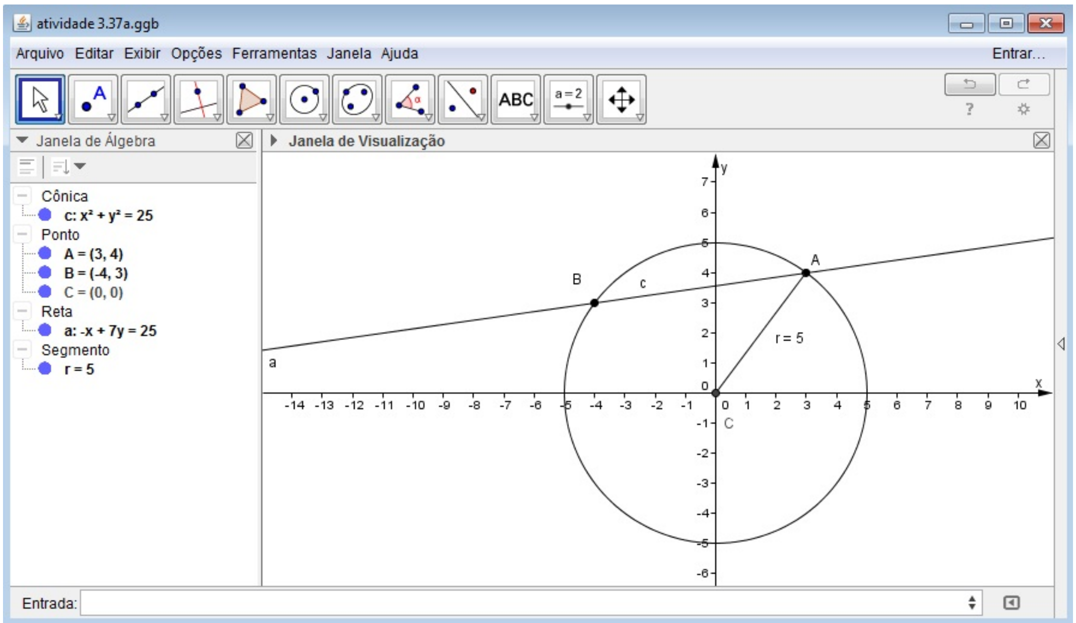


Figura 4.35: Exercício 4.40 item a

No item b deve-se aproveitar a figura construída para a anterior.

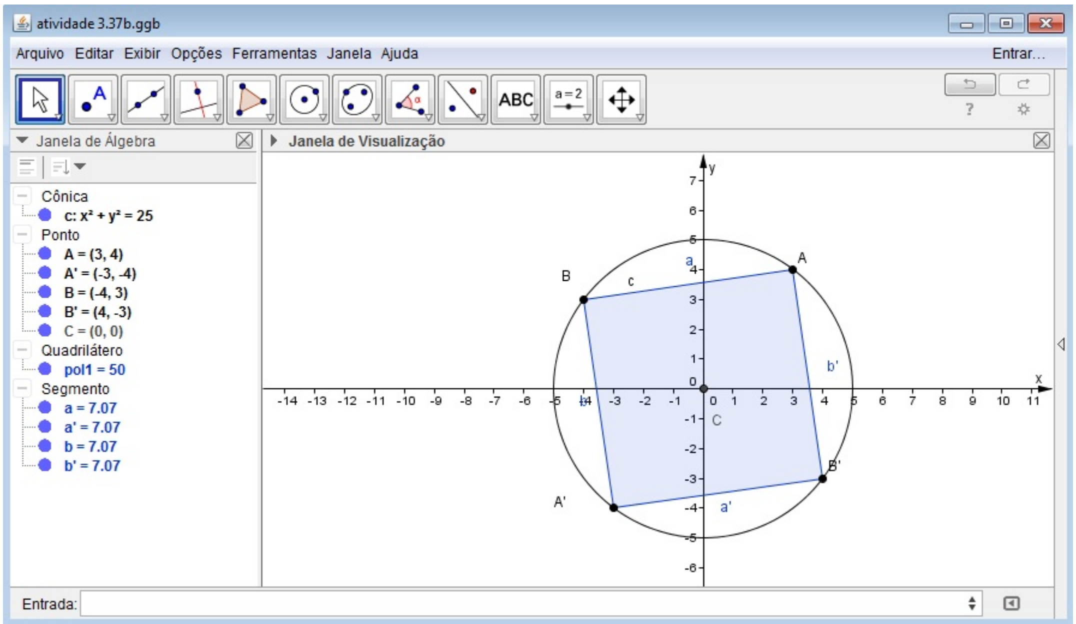


Figura 4.36: Exercício 4.40 item b

Utilize a ferramenta “reflexão em relação a um ponto”, clique no ponto A e em seguida na origem. Ficará assim definido o ponto A' que é o simétrico de A em relação a origem. Repita a operação para o ponto B criando o ponto simétrico B'. Para resolver a atividade deve-se selecionar a ferramenta “polígono” e selecionar os pontos que formarão o quadrilátero, o valor da área é $pol1 = 50$.

Exercício 4.41. Calcule a distância entre o centro da circunferência $x^2+y^2-7x-5y=9$ e a reta $-x+5y=-13$

O objetivo da questão é aprender a calcular a distância entre o centro e uma reta dada. Esse cálculo será utilizado para encontrar a posição relativa entre reta e circunferência. Um modo de resolver é digitar as equações da circunferência e da reta no campo de entrada, encontrar os pontos B e C de interseção entre os dois gráficos, localizar o ponto médio D entre esses pontos obtidos e, por fim, marcar o segmento DA entre o ponto médio e o centro como mostra a figura 4.37.

A medida do segmento obtido será a distância procurada. Tal medida é aproximadamente $4,31$. Uma maneira prática de encontrar a distância é digitando no campo de entrada “Distância[A,r]” que também resultará em aproximadamente $4,31$.

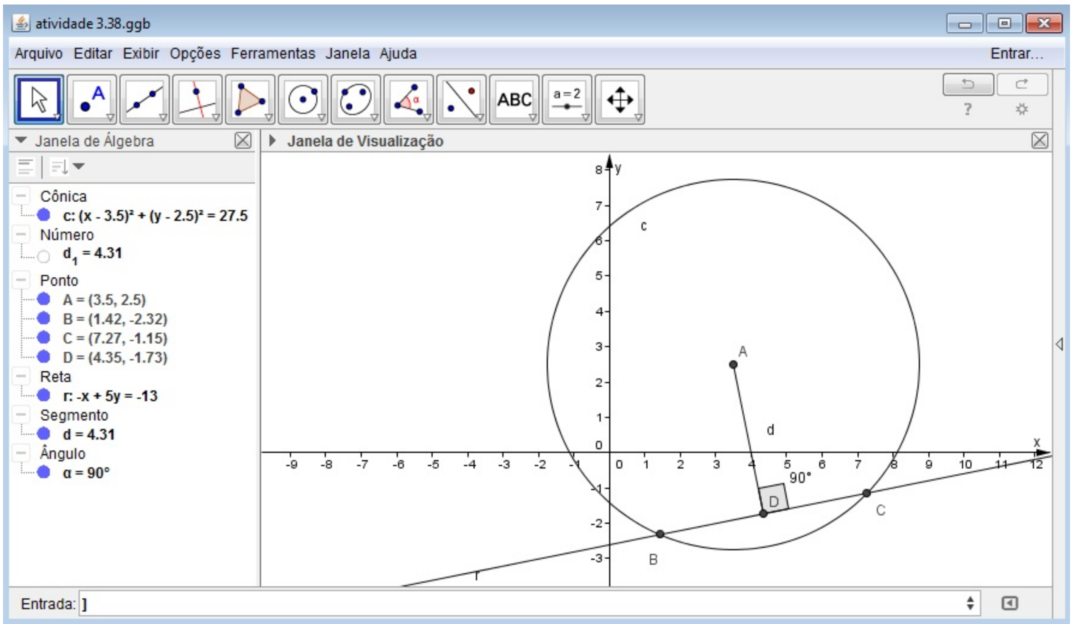


Figura 4.37: Exercício 4.41

Exercício 4.42. O conjunto dos pontos médios de todas as cordas de comprimento 4 da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$ constitui uma outra circunferência. Apresente sua equação.

Nessa atividade o aluno deve ser orientado sobre não ser necessário encontrar todas as cordas de tamanho 4. Limitaremos a encontrar três delas, pois três pontos determinam uma circunferência.

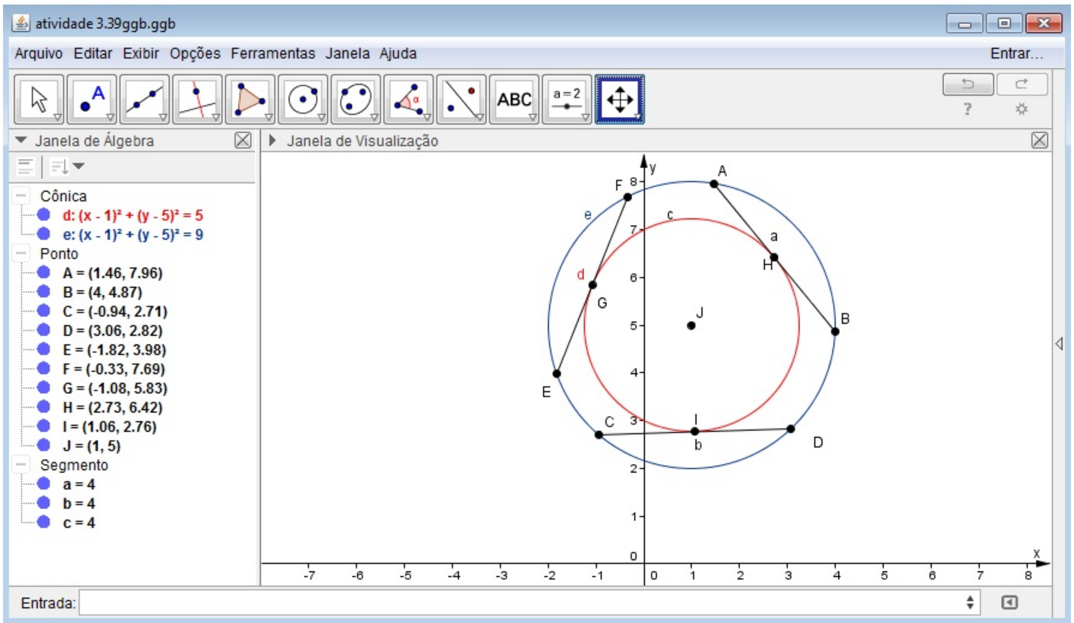


Figura 4.38: Exercício 4.42

O conjunto dos pontos médios das cordas de tamanho 4 de uma circunferência forma uma outra circunferência, pelo fato de que todas as cordas de mesma medida possuem distância igual ao centro de um círculo. A equação pedida é $(x-1)^2+(y-5^2) = 5$, essas circunferências são concêntricas.

Exercício 4.43. Dada a equação da circunferência $\lambda : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$, qual é a relação dos pontos abaixo em relação à circunferência? Se são internos, externos ou pertencem à circunferência.

a) $A = (3, 1)$

b) $B = (3, -1)$

c) $C = (5, 2)$

A atividade tem como objetivo mostrar ao aluno que dado uma circunferência podemos classificar os pontos de plano, como internos, pertencentes e ou externos à circunferência.

Uma boa maneira de resolver a atividade no Geogebra é construir primeiramente o gráfico da circunferência e em seguida colocar os pontos, observando sua posição em relação ao gráfico da circunferência. Veja que o ponto $A \in \lambda$, o ponto B é interno a λ e o ponto C é externo λ, como mostra a figura 4.43.

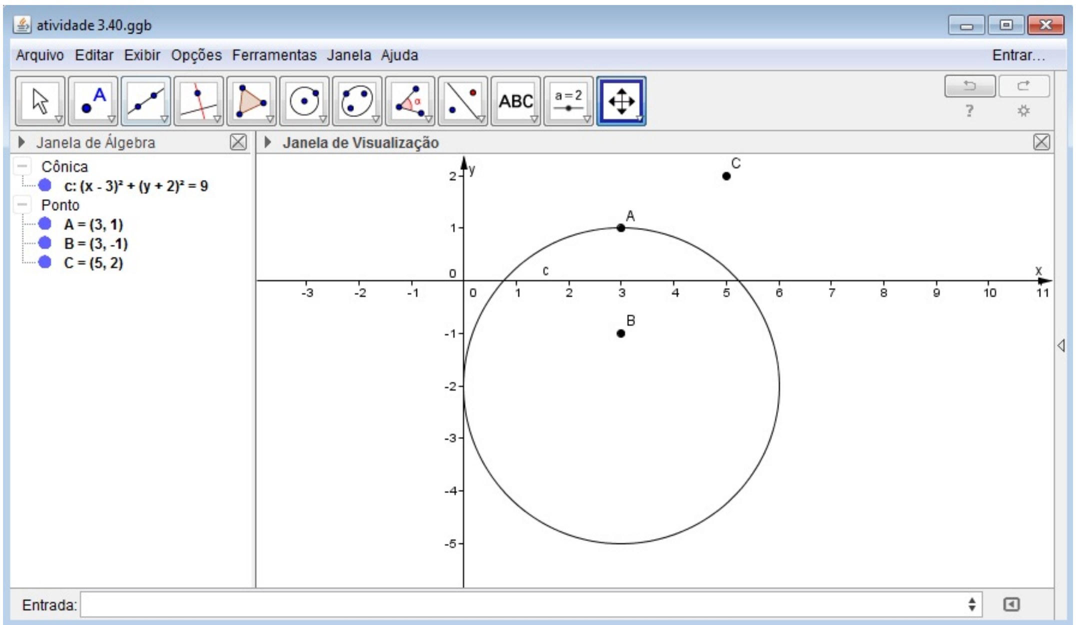


Figura 4.39: Exercício 4.43

Exercício 4.44. Apague o que foi feito no exercício 4.43 e digite novamente a equação da circunferência $\lambda : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$. Agora digite $M = (m-3)^2 + (n+2)^2 - 9$. E em seguida digite $P = (m, n)$ o ponto P representa um ponto qualquer do plano cartesiano. Utilize os controles deslizantes para responder as perguntas:

a) Com o valor de m = 3 e n = 1 qual é a posição do ponto P em relação à circunferência e o valor de M é negativo positivo ou zero?

b) Faça o mesmo que no item a para m = 3 e n = -1.

c) Faça o mesmo que no item a para m = 5 e n = 2.

O objetivo da atividade é levar o aluno a perceber a relação entre posição relativa de uma reta com a circunferência e o valor de M ser zero, positivo ou negativo.

Deve-se digitar primeiro a equação da circunferência $\lambda : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$, em seguida o ponto $P = (m, n)$ criando os controles deslizantes. Feito isso, é só manipular os valores pedidos para resolver as atividades. No item a o ponto P pertence a λ e o valor de M é zero. No item b o ponto P é interno e o valor de M é negativo. No item c o ponto P é externo e o valor de M é positivo. Veja as figuras.

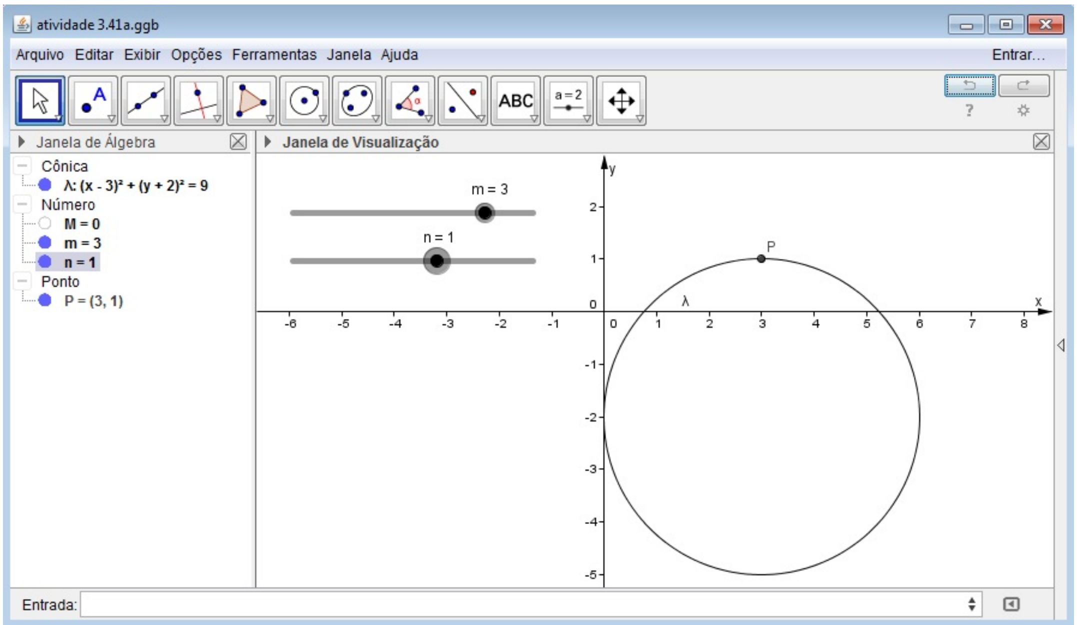


Figura 4.40: Exercício 4.44 item a

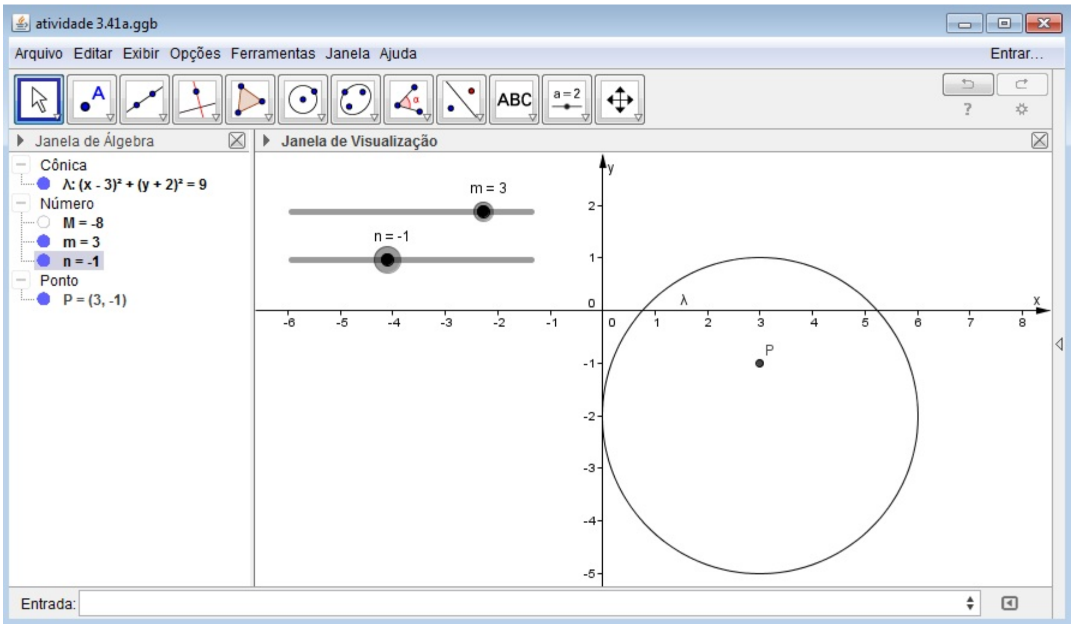


Figura 4.41: Exercício 4.44 item b

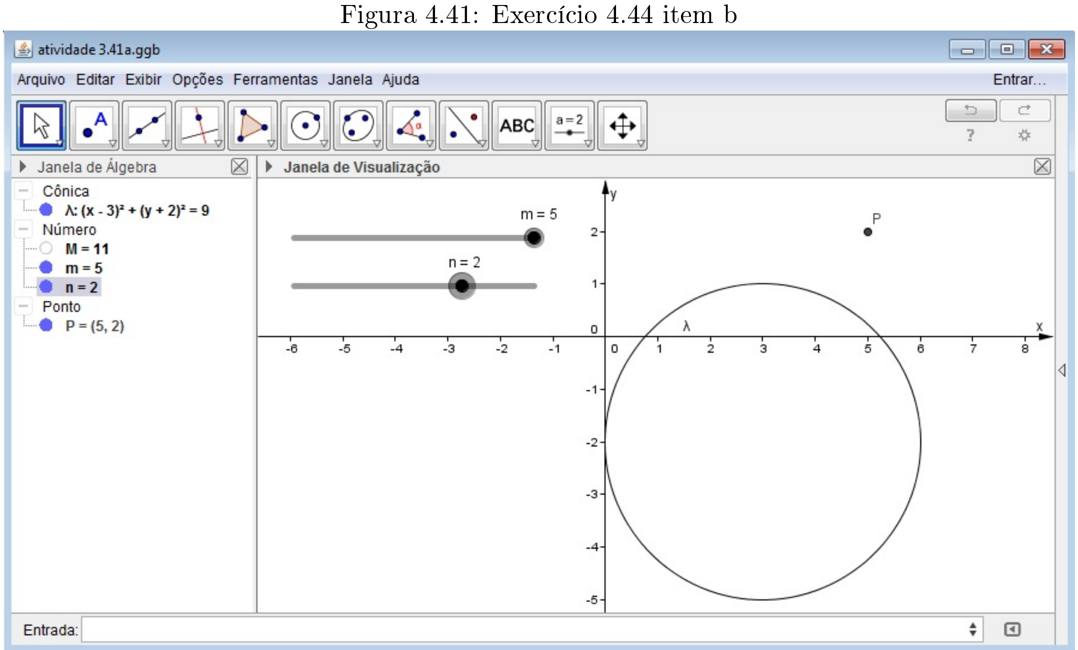


Figura 4.42: Exercício 4.44 item c

Exercício 4.45. Existe alguma relação entre o valor de M dado no exercício 4.44 e a posição relativa entre ponto e circunferência? Isto é, quando M for negativo, positivo ou zero qual será a posição do ponto em relação à circunferência?

Nessa atividade é esperado que o aluno possa perceber a relação do valor de M com a posição relativa entre os pontos e a circunferência. Quando forem dados um ponto e a equação de uma circunferência e for pedido a posição relativa do ponto o aluno deverá substituir o ponto na equação, subtrair o valor do raio e observar se o resultado foi zero, negativo ou positivo. Se for zero o ponto pertence à circunferência, se for negativo, é interno e se for positivo, é externo.

Exercício 4.46. Determine a posição das retas abaixo em relação à circunferência λ : $(x+1)^2+(y-1)^2=5$. Isto é, se a reta é tangente à circunferência (um ponto comum), secante à circunferência (dois pontos comuns) ou exterior à circunferência (nenhum ponto comum).

a) $r : 2x + y = 4$

b) $s : 3x + y = -7$

c) $t : x - y = 5$

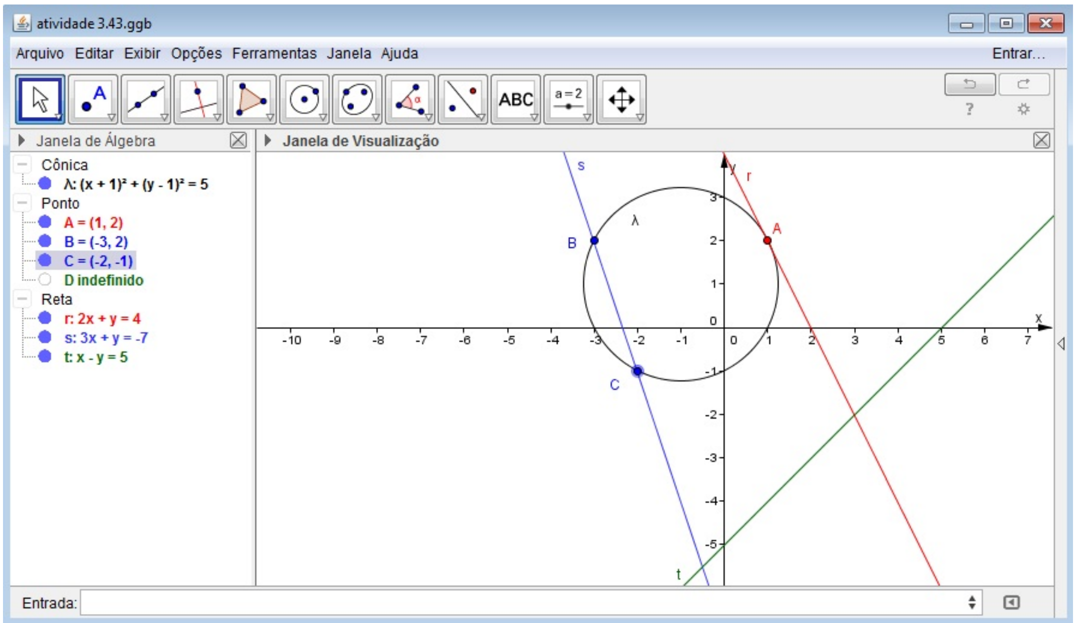


Figura 4.43: Exercício 4.46

O objetivo é determinar a posição relativa entre a reta e a circunferência utilizando o Geogebra. O aluno deve digitar as equações da circunferência e das retas, em seguida utilizar a ferramenta "interseção entre dois objetos" para encontrar os pontos de interseção entre cada reta e a circunferência. Caso os pontos existam, o software mostrará quais são ou qual é. Caso não existam pontos de interseção, ele vai dizer que o ponto é indefinido.

No item a, temos um ponto de interseção entre a reta r e a circunferência λ. Tal ponto é $A = (1, 2)$, logo a reta r é tangente a λ. No item b, temos, dois pontos $B = (-3, 2)$ e $C = (-2, -1)$ de interseção entre a reta s e a circunferência λ. Logo a reta

s e secante a λ, por fim, no item c, o ponto de interseção é indefinido. Logo a reta t é externa à circunferência λ.

Exercício 4.47. Sem apagar o que foi feito no exercício 4.46 localize o centro da circunferência $\lambda : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ e calcule o seu raio. Em seguida determine a distância entre ele e as retas r, s e t.

a) A distância do centro e a reta r é?

b) A distância do centro e a reta s é?

c) A distância do centro e a reta t é?

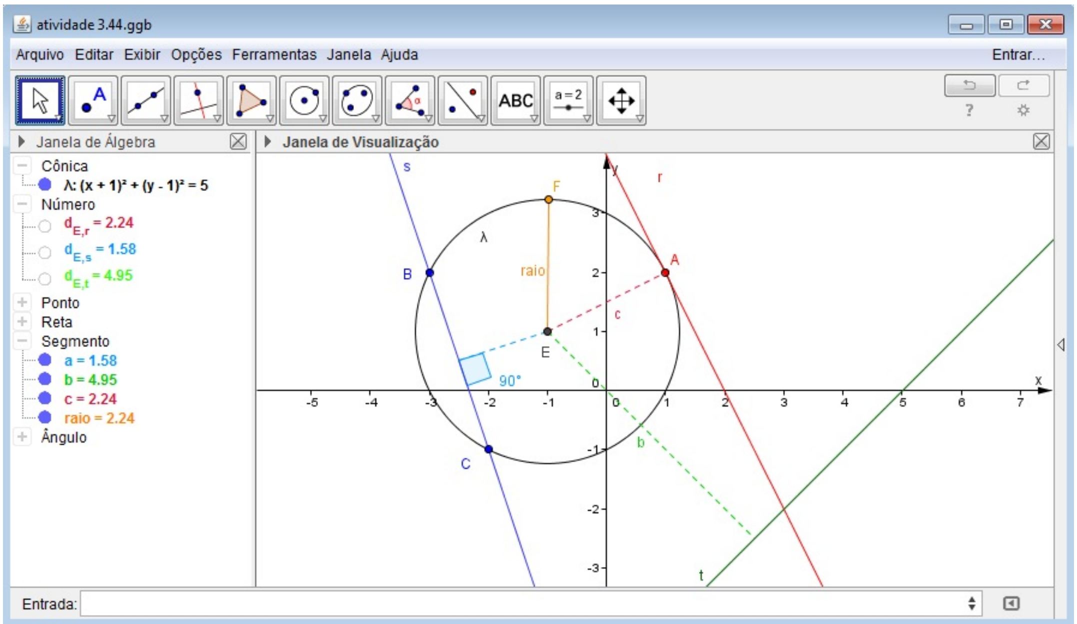


Figura 4.44: Exercício 4.47

O objetivo é preparar o aluno para calcular a distância entre uma reta e o centro de uma circunferência dada. Para que ele possa estabelecer a relação entre essa distância e a posição entre reta e circunferência.

Para calcular a distância entre o centro E e a reta s, digita-se no campo de entrada "Distância[s,E]". No item a o resultado pedido é de aproximadamente $d_{E,r} = 2,24$, Veja que esse valor é igual à medida do raio. No item b, o resultado foi aproximadamente $d_{E,s} = 1,58$ que menor que o raio. No item c o resultado foi aproximadamente $d_{E,t} = 4,95$ que é maior que o raio.

Exercício 4.48. Utilize o resultado dos exercícios 4.46 e 4.47 para resolver o exercício. Seja D a distância entre uma reta e o centro da circunferência de raio a. O que se pode dizer da posição relativa da circunferência com a reta quando:

a) D for igual ao raio?

b) D for maior que o raio?

c) D for menor que o raio?

No exercício 4.46 vimos que a reta r é tangente à circunferência. Ao calcularmos a distância D entre r e o centro E no exercício 4.47 vimos que D é igual à medida do raio. A reta s é secante à circunferência e a distância entre s e o centro é menor que o raio. A reta t é externa à circunferência e a distância entre o centro e reta t é maior que o raio. Concluímos que, se D for igual ao raio, a reta é tangente à circunferência, se D for maior que o raio? a reta é externa a circunferência e, por fim, se D for menor que o raio, a reta é secante a circunferência.

Exercício 4.49. Determine os valores de k para que a reta $x - k = 1$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 3$ sejam:

a) Secante;

b) Tangente;

c) Exterior.

Para resolver o problema deve-se digitar as equações, criar controles deslizantes para o valor de k e, em seguida, manipular o controles deslizantes para resolver a atividade. No item a, para ser secantes, sabemos que a reta deve interceptar a circunferência em dois pontos. Isso ocorre para $-2 < k < 2$. No item b, para ser tangente, isso ocorrerá quando a reta tiver um único ponto comum com a circunferência. Isso será quando $k = -2$ ou $k = 2$, para a reta ser externa, devemos ter $k < -2$ ou $k > 2$.

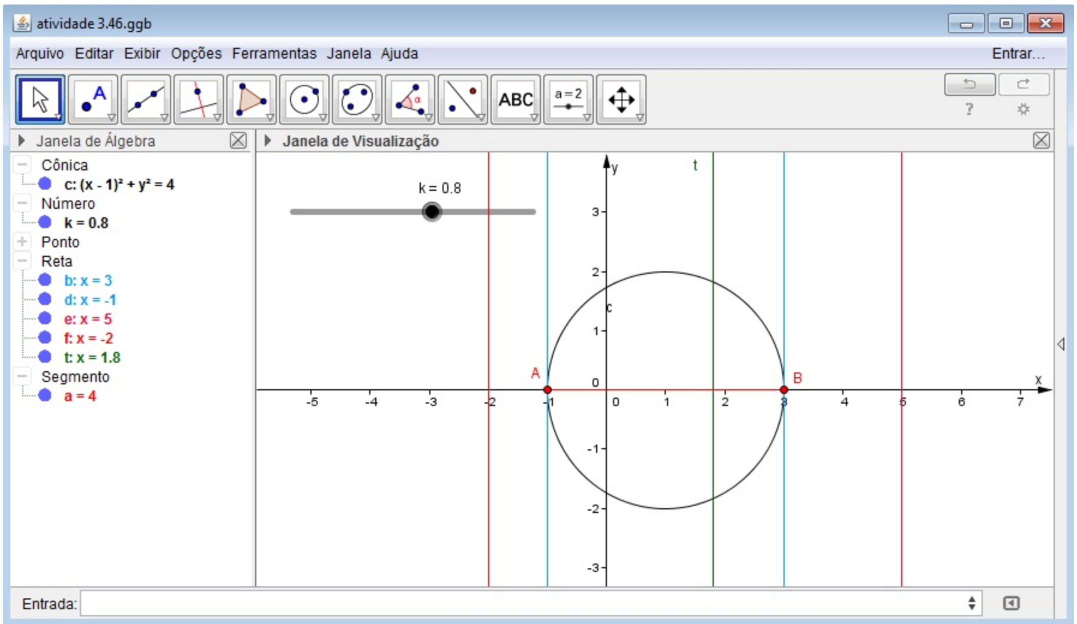


Figura 4.45: Exercício 4.48

Capítulo 5

Considerações finais

Logo no início das atividades foi notável o interesse dos alunos por essa maneira de aprender Matemática. Muitos desses alunos chegam à escola com medo da Matemática e esse medo faz com que eles sintam-se desmotivados a aprender. Os professores podem apresentar recursos que despertem a motivação em seus alunos que eles sintam vontade em aprender e não tenham medo da Matemática, medo esse que, por vezes, ele carrega desde o início de sua vida escolar.

Notou-se que durante o período de aplicação do trabalho os alunos demonstraram grande motivação em participar das atividades, pois diziam que estavam aprendendo o que foi proposto. Alguns chegaram a escrever nas folhas de resposta que foi muito bom para eles conhecer o Geogebra. Foi perguntado aos alunos: se "Foi possível assimilar algum conteúdo sobre geometria analítica?". Dentre as respostas dadas, destacam-se como justificativas para estarem aprendendo, a facilidade de compreensão do programa, a interface gráfica do Geogebra representando o plano cartesiano, pelo modo que são desenhadas as figuras e por estarem estudando fora de uma aula tradicional. Isso pode motivar o aluno a estar estudando cada vez mais, a estar sempre buscando o conhecimento e, assim, obter sucesso em sua vida escolar.

Para que as atividades pudessem ser aplicadas os exercícios propostos no Capítulo 4 foram divididos em sete listas as quais foram aplicadas uma por aula, uma aula para a apresentação do software e uma de trabalho livre com as ferramentas do Geogebra, totalizando assim nove aulas de aplicação das atividades em cada turma. Nas primeiras atividades, os alunos tiveram dificuldades em encontrar a ferramenta adequada a ser utilizada em cada caso específico, porém com breve explicação, eles compreendiam o que deveria ser feito. Alguns entendiam rápido o que era para ser feito e assim conseguiam terminar primeiro que os colegas. Muitas vezes esses procuravam ajudar alguns que estavam com dificuldades.

Podemos concluir que o trabalho foi proveitoso, tanto no sentido motivacional, quanto na aprendizagem dos estudantes, incentivando-os a buscar novos conhecimentos, o que será benéfico em sua vida escolar. Portanto, os professores podem utilizar o Geogebra como ferramenta de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Luiz Cláudio Lopes de. Aprendendo Matemática com o geogebra/ Luiz Cláudio Lopes de Araújo, Jorge Cássio Costa Nóbriga. *Exato*, São Paulo,2010.

[2] Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. (1998). Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC / SEF, Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> [Acesso em: 09 de Fevereiro de 2015].

[3] Brasil, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília: MEC, Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> [Acesso em: 10 de Março de 2015].

[4] BRENNAND, E. G. G. Hipermídia e novas engenharias cognitivas nos espaços de formação. In: SILVA ET AL(Org.) XIII ENDIPE Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. Políticas educacionais, tecnologias e formação do educador: repercussões sobre a didática e as práticas de ensino. Recife: ENDIPE,2006.

[5] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. *Ática*, São Paulo, 2010.

[6] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica: Coleção PROFMAT. *SBM*, Rio de Janeiro,2013.

[7] FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Educação Matemática: representação e construção em geometria. *Artes Médicas Sul*, Porto Alegre,1999.

[8] HERNÁNDEZ, Fernando. Olhar Eletrônico. *O Popular, Magazine*, Goiânia, 2006.

[9] HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. Ajuda GeoGebra Manual Oficial da Versão 3.2. Disponível em:

<http://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf> [Acesso em: 05 de Março de 2015].

[10] IEZZI, Gelson. Fundamento de Matemática elementar, 7: geometria analítica. *Atual*, São Paulo, 1993.

[11] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. Coleção Matemática: ciências e aplicações, 3ª serie. *Atual*, São Paulo, 2004.

[12] LIMA, Elon Lages Lima; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo, MORGADO; Augusto César. A matemática do Ensino Médio : Volume 3. *SBM*, Rio de Janeiro, 2006.

[13] PROINFO; Maria Izabel Simões Gonçalves. Informática e formação de professores / Secretaria de Educação a Distância; Volumes 1 e 2. Ministério da Educação. *Parma Ltda*, Brasília ,2000.

[14] VALENTE. J.A. Diferentes usos de computador na Educação: repensando a educação. Campinas, Gráfica Central da Unicamp, 1993

Apêndice A

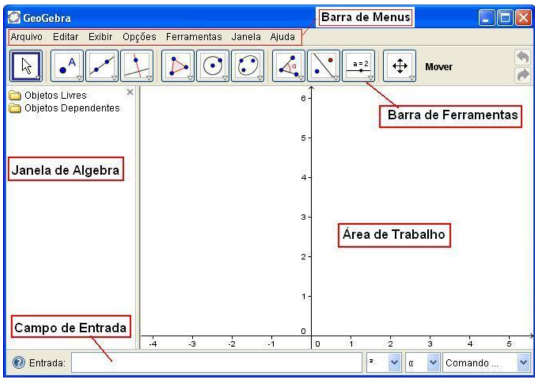
Atividades realizadas pelos alunos

Começando a utilizar o GeoGebra

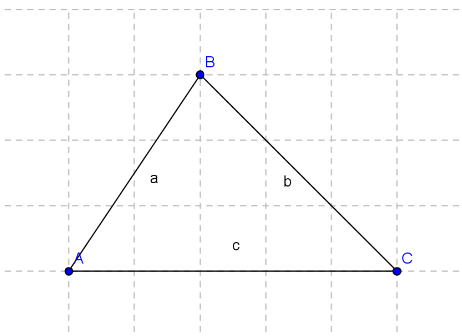
Alunos ____

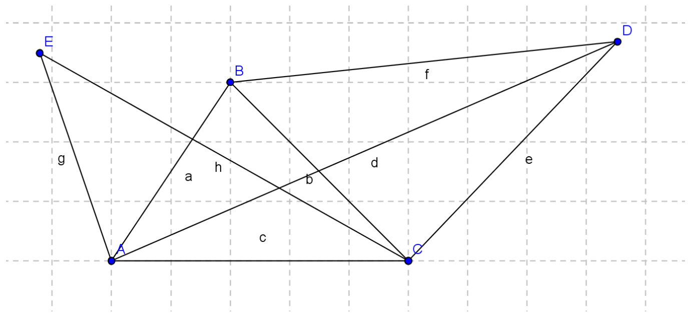
Aula 1

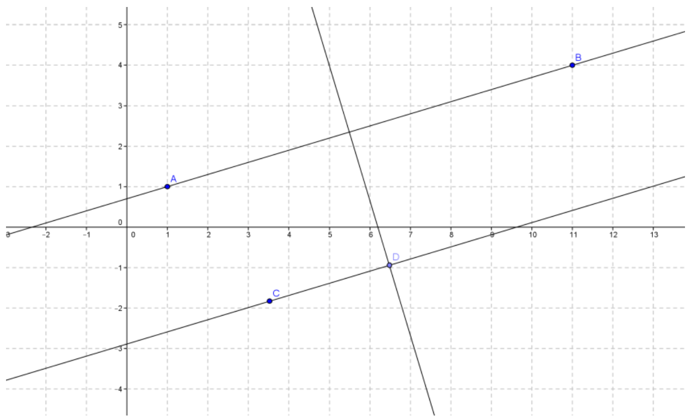
Conhecendo as ferramentas do GeoGebra

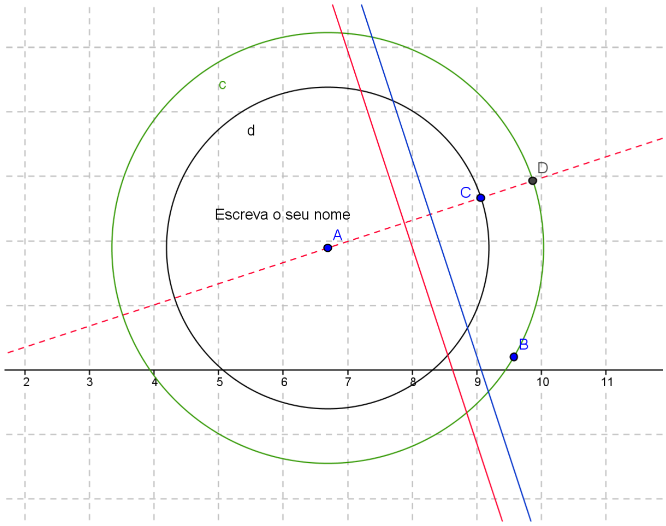


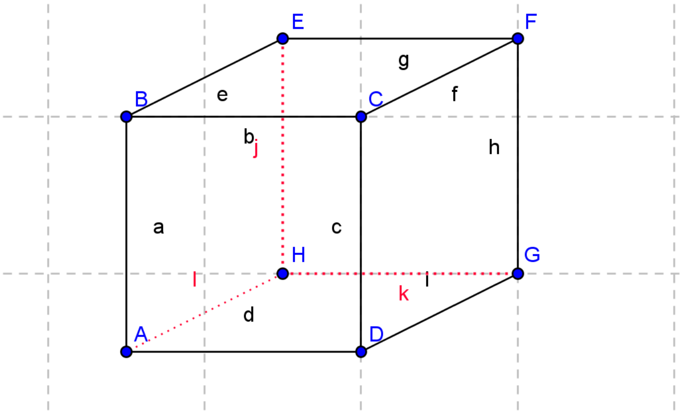
1) Utilizando a barra de ferramentas construa as figuras abaixo.




E
B
D
f
g
a
h
b
d
e
c
A
C


A
B
C
D


c
d
D
C
Escreva o seu nome
A
B
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

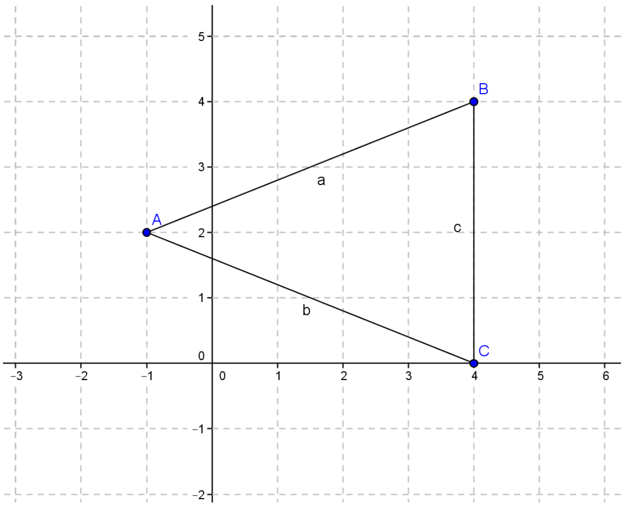

E
F
g
B
e
C
f
b
j
h
a
c
H
G
l
l
k
d
A
D

3) Utilizando agora o campo de entrada marque os pontos $A = (1, 2)$, $B = (5, -2)$, $A = (-3, 4)$.
4) É possível formar um triângulo com esses pontos? Justifique.

5) Novamente utilizando campo de entrada construa três retas.

6) Qual a posição relativa dessas retas uma em relação a outra? Paralelas, concorrentes ou coincidentes.

7) Você e capaz de construir um triângulo como da figura abaixo utilizando apenas o campo de entrada?



Colégio Estadual Dom Bosco

Professor: Deusaguimar Divino da Silva

Alunos: ____

Primeiras atividades de Geometria Analítica com o GeoGebra.

Essas atividades serão resolvidas utilizando o software geogebra, ao terminar uma atividade ela deverá ser salva no computador utilizando o seguinte nome **atividade 1 a nome dos alunos,** exemplo:

atividade 1 item a João e Maria

Para marcar um ponto utilize prioritariamente o comando na caixa de entrada

1) Marque os pontos a seguir no plano cartesiano.
   a) $A = (2, 4),\ B = (-2, -4)\ e\ C = (1, -3)$
   b) $A = (-3, -3),\ B = (10, 3)\ e\ C = (3.5, 0)$
2) Utilizando o comando **segmento** trace o segmento formado pelos pontos acima.
3) Marque os pontos $A = (11, 3),\ B = (-3, 10)$, faça o segmento determinado por eles e determine o seu ponto médio.
4) Divida o segmento obtido no exercício anterior
   a) em quatro partes iguais;
   b) em sete partes iguais.
5) Encontre o ponto de interseção entre as retas $-x + y = 12\ e\ 3x + 2y = 4$ destaque esse ponto.

Reflexões sobre as atividades:

O que você pode dizer sobre as atividades acima e que concussões podem obter a respeito delas?

Foi possível assimilar algum conteúdo sobre geometria analítica?

Colégio Estadual Dom Bosco

Professor: Deusaguimar Divino da Silva

Alunos: ____
____

Atividade 2 Geometria Analítica com o GeoGebra.

Essas atividades serão resolvidas utilizando o software geogebra, ao terminar uma atividade ela deverá ser salva no computador utilizando o seguinte nome **atividade 2 a nome dos alunos,** exemplo:

Condição de alinhamento de três pontos

1) Marque no campo de entrada do Geogebra os pontos $A = (a, b),\ B = (c, d)\ e\ C = (m, n)$;
2) Com a ferramenta mover coloque os pontos na posição $A = (1, 1), \quad B = (3, 2)\ e\ C = (7, 4)$
3) Estes três pontos estão alinhados? Isto é eles são colineares?
____
____
4) Calcule o Determinante $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}$ e observe seu resultado.
O cálculo do determinante é feito da seguinte forma
det: determinante[{{a,b,1}, {c,d,1}, {m,n,1}}]
5) Utilize a ferramenta mover para manipular esses pontos A, B e C. O que acontece o resultado do determinante?
____
____
6) Trace a reta AC com o comando reta[A,C]
7) Faça com que os três pontos fique exatamente sobre a reta. Após isso o que se pode dizer sobre o valor do determinante?

Reflexões sobre as atividades:

1) O Que se ponde escrever sobre a relação de alinhamento de três pontos com o determinante? Justifique.

2) Houve alguma outra observação que você fez nessa atividade? Justifique.

Colégio Estadual Dom Bosco

Professor: Deusaguimar Divino da Silva

Alunos:
____
____

Atividade 3 Geometria Analítica com o GeoGebra.

Essas atividades serão resolvidas utilizando o software geogebra, ao terminar uma atividade ela deverá ser salva no computador utilizando o seguinte nome **atividade 3 nome dos alunos.**

A equação da reta pode ser da forma reduzida $r\colon \mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$ onde m é chamado de coeficiente angular e n é chamado de coeficiente linear da reta x. Também poderá ser da forma $\mathrm{ax} + \mathrm{by} - \mathrm{c} = 0$ onde a, b e c são números reais e x e y as coordenadas de um ponto genérico da reta.

1) Construa o gráfico das retas$2x + y = 3,\ \mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 7$ e $\mathrm{x} - 8\mathrm{y} = -5$
2) O que se pode dizer sobre as três retas acima?
   ____
   ____
3) Encontre o ponto de interseção entre as retas e $r\colon y = 3x + 1$ e $s\colon y = x + 3$
   Qual é esse ponto? ____
4) Qualquer duas retas no plano tem pontos em comum? Justifique:
   ____
   ____
5) Construa o gráfico das retas $y = 2x + 3, y = 2x - 3$ e $y = 2x + 5$
6) Qual a relação dessas retas uma com a outra?
   ____
   ____
7) Construa outras retas que tenha a mesma característica das retas o exercício 5 e escreva a equação de algumas:
   ____
   ____
8) Escreva agora duas equações da reta que seja paralela a reta $\mathrm{y} = 5\mathrm{x} - 3$:
   ____
   ____
9) Dada uma reta cuja equação é $\mathbf{y} = \mathbf{mx} + \mathbf{n}$ onde m e n são números reais, escreva a equação das retas que seja paralela a essa reta. *Surgestão: Digite* $\boldsymbol{y = mx + n}$ *no Geogebra e clique em criar controles deslizantes em seguida faça a equação que deseja encontrar também no Geogebra*.
   ____
   ____

Colégio Estadual Dom Bosco

Professor: Deusaguimar Divino da Silva

Alunos:
____
____

Atividade 4 Geometria Analítica com o GeoGebra.

1) Construa o gráfico das retas $y = x + 3$, $\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 1$
2) Encontre o ponto de interseção entre as retas do exercício anterior. Qual é esse ponto? ____
3) Construa o gráfico das retas $y = \frac{5}{2}x - 3$, $\mathrm{y} = -\frac{2}{5}\mathrm{x} + 4$.
   ***Para digitar as retas no Geogebra digite* y = (5/2)x -3 e y = - (2/5)x+4**
4) Nas retas da atividade 1 e 3 o que se pode dizer a respeito do produto dos coeficientes angulares dessas retas? Justifique.
   Sugestão os coeficientes angulares das retas na atividade 1 são 1 e -1
   ____
   ____
5) Utiliza a ferramenta ângulo para determinar o ângulo entre essas duas retas. Qual foi o ângulo encontrado?
   ____
   ____
6) Você sabe o nome que recebe essas duas retas?
   ____
7) Construa agora as retas de equações $y = mx - 3$, $\mathrm{y} = -\frac{1}{m}\mathrm{x} + 4$ sabendo que $\mathrm{m} \neq 0$. Essas duas retas são perpendiculares?
   ***Para digitar as retas no Geogebra digite* y = mx -3 e y = - (1/m)x+4**
   Duas retas são perpendiculares se o ângulo entre elas forem de 90°.
   ____
   ____
8) Dada uma reta cuja equação é $\mathbf{y = mx + n}$ onde m e n são números reais e m≠0, escreva a equação das retas que seja perpendicular a essa reta.
   Sugestão: Digite $\boldsymbol{y = mx + n}$ *no Geogebra e clique em criar controles deslizantes em seguida faça a equação que deseja encontrar também no Geogebra.*
   ____
   ____
9) Dada a reta cuja equação é $\mathbf{y = mx + n}$ com $\mathrm{m} \neq 0$ como se escreve a equação das retas que seja perpendicular a ela? Justifique.
   ____
   ____
   ____

Colégio Estadual Dom Bosco

Professor: Deusaguimar Divino da Silva

Alunos:
____
____

Atividade 5 Geometria Analítica com o GeoGebra.

Resolva as atividade utilizando o GeoGebra

1) Escreva a equação da circunferência cuja centro é o ponto $C = (-3, 2)$ e o raio mede 8.

2) Uma equação da circunferência tem diâmetros cujos extremos são $A = (1, 2)$ e $A = (-2, 3)$ Encontre equação da circunferência.

3) Determine a equação da circunferência de centro $C = (7, 6)$e que passa por $A = (1, -3)$

4) Determine a equação da circunferência de centro $C = (2, 3)$e que é tangente ao eixo y.

   Em qual ponto essa circunferência intercepta o eixo y?

5) Dada a forma geral da equações de circunferência, determine se as equações representam ou não uma circunferência. Em caso afirmativo encontre seu centro e raio:

   (a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$;
   (b) $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$;
   (c) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$;
   (d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$;
   (e) $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 = 0$;
   (f) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 96 = 0$;

6) Determinar a equação da circunferência cujo raio é 6 e o centro é a interseção das retas 5x + 2y =10 = 0 e x + 3y + 7 = 0:

7) Uma circunferência passa pelos pontos A= (1, 6)e B = (1, -4) e seu centro se encontra sobre a reta x+ y = 2 Encontre sua equação.

Colégio Estadual Dom Bosco

Professor: Deusaguimar Divino da Silva

Alunos:
____
____

Atividade 6 Geometria Analítica com o GeoGebra.

Resolva as atividade utilizando o GeoGebra

1) Determine em cada caso o raio e o centro da circunferência:
   a) $(x-2)^2+(y-4)^2=9$
   b) $x^2+y^2-4x-8y=8$
   c) $x^2+y^2-x+y=3$
2) Qual é a equação da circunferência que tem centro no ponto $C=(-2,5)$ e que passa pela origem?

3) Encontre a equação da circunferência que contem os pontos $(-1,4),(5,-2)$ e $(1,-2)$.

4) Encontre a equação da reta que forma ângulo de 45º com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo, e passa pelo centro da circunferência de equação $x^2+y^2-4x+8y=k$

5) Uma reta intercepta nos pontos $A=(3,\ 4)$ e $B=(-4\ ,3)$ uma circunferência centrada na origem.
   a) Qual é o raio da circunferência?
   b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos A e B e seus simétricos em relação a origem.

6) Calcule a distância entre o centro da circunferência $x^2+y^2-7x-5y=9$ e a reta $-x+5y=-13$

7) O conjunto dos pontos médios de todas as cordas de comprimento 4 da circunferência $x^2+y^2-2x-10y+17=0$ constitui uma outra circunferência. Apresente sua equação.

Colégio Estadual Dom Bosco
Professor: Deusaguimar Divino da Silva
Alunos:
____

Atividade 7 Geometria Analítica com o GeoGebra.

1) Dada a equação da circunferência $(x-3)^2+(y+2)^2=9$, qual é a relação dos pontos abaixo em relação a circunferência? Se são interno, externo ou pertence ao circulo.
   a) A = (3, 1) ____
   b) B = (3, -1) ____
   c) C = (5, 2) ____
2) Apague o que foi feito no exercício 1 e digite novamente a equação da circunferência $(x-3)^2+(y+2)^2=9$, agora digite M = $(m-3)^2+(n+2)^2$-9 e em seguida digite P = (m, n) o ponto P representa um ponto qualquer do plano cartesiano.

Utilize os controles deslizantes para responder as perguntas

   a) Com o valor de m = 3 e n igual a 1 qual é a posição do ponto P em relação a circunferência e o valor de M e negativo positivo ou zero?
   ____
   ____
   b) Faça o mesmo que no item a para m = 3 e n = -1 e para m = 5 e n = 2.
   ____
   ____
   ____
3) Existe alguma relação entre o valor de M dado no exercício 2 e a posição relativa entre ponto e circunferência? Isto é quando M for negativo, positivo ou zero qual será a posição do ponto em relação a circunferência.
____
____
4) Determine a posição das retas abaixo em relação a circunferência $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ Isto é se reta é tangente a circunferência (um ponto comum), secante a circunferência (dois pontos comum) ou exterior a circunferência (nenhum ponto comum).
   a) r: 2x + y = 4 ____________________________________
   b) s: 3x + y = -7____________________________________
   c) t: x - y = 5 ____________________________________
5) Sem apagar o que foi feito no exercício 4 localize o centro da circunferência $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ e calcule o seu raio em seguida determine a distancia dele ate as retas r, s e t.
   O raio é ____,
   A distancia do centro a reta r é _______,
   A distancia do centro a reta s é _______,
   A distancia do centro a reta t é _______.
6) Utilize o resultado dos exercícios 5 e 4 para resolver o exercício 6. Seja D a distancia entre uma reta e o centro da circunferência de raio r. O que se ponde dizer da posição relativa da circunferência com a reta quando:
   a) D = r ____
   b) D > r____
   c) D < r ____
7) Determine os valores de k para que a reta x – k =1 e a circunferência $x^2+y^2-2x=3$ sejam:
   a) Secantes b) tangentes c) exteriores