Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

UMA NOVA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Sinésio Mateus da Silva Filho

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto**

Trabalho financiado pela Capes

Barra do Garças - MT

2015

FUNÇÃO LOGARÍTMICA:
UMA NOVA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Sinésio Mateus da Silva Filho e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 4 de setembro de 2015.

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos
Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

F481f Filho, Sinésio Mateus da Silva.
Função logarítmica: uma nova abordagem para o ensino médio / Sinésio Mateus da Silva Filho. -- 2015
88 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Adilson Antônio Berlatto.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Função logarítmica. 2. Ensino de matemática. 3. História dos logaritmos. 4. Contextualização. 5. Aplicações dos logaritmos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 4 de setembro de 2015 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto

Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos

À minha doce e amada esposa.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus, pois Ele é o criador de tudo e este trabalho não se realizaria sem a sua permissão, me dando paz e sabedoria para superar os momentos de dificuldade.

Aos meus pais, irmãos, minha esposa, meu filho e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Aos meus amigos, pelas alegrias, tristezas e dores compartilhadas. Com vocês, as pausas entre um parágrafo e outro de produção melhoraram tudo o que tenho produzido na vida.

A todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor Dr. Adilson Antônio Berlatto por ter aceito o desafio de me orientar ao longo deste trabalho, me acolhendo carinhosamente e me incentivando na sua realização.

A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a conclusão desta dissertação, o meu muito obrigado.

A matemática é o alfabeto
com qual Deus escreveu
o universo.

Pitágoras

Resumo

Com o objetivo de superar as dificuldades de ensino e aprendizagem da função logarítmica, apresentamos neste trabalho uma sequência didática mais acessível, para que os professores possam aplicá-la aos seus alunos, criando dessa forma uma opção interessante à forma tradicional geralmente utilizada pelas escolas. Para elaboração dessa sequência de ensino, optamos por introduzir e apresentar a teoria da função logarítmica de forma contextualizada, usando argumentos históricos, geométricos e algébricos. Por meio dessas ferramentas pretendemos construir uma proposta de ensino em que a aprendizagem seja significativa para o educando.

Palavras chave: Função logarítmica, Ensino de matemática, História dos logaritmos, Contextualização, Aplicações dos logaritmos.

Abstract

In order to overcome the difficulties of teaching and learning the logarithmic function, we present in this paper a more accessible teaching sequence, so that teachers can apply it to their students, thus creating an interesting option to the traditional way usually used by schools. To prepare this teaching sequence, we chose to introduce and present the theory of logarithmic function in context, using historical, geometric and algebraic arguments. Through these tools we aim to build an educational proposal in which learning is meaningful to the student.

Keywords: Logarithmic function, Teaching of mathematics, History of logarithms, Contextualization, Applications of logarithms.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Desde o princípio da raça humana, o homem tem interesse em conhecer e estudar fenômenos naturais visando obter desenvolvimento tecnológico e científico. Vários desses fenômenos, podem ser representados por modelos matemáticos envolvendo a função logarítmica. Sendo assim, esse tema é de grande importância para compreendermos o mundo em que vivemos.

A descoberta dos logaritmos foi realizada por Napier no século XVII, como um instrumento para facilitar e simplificar cálculos aritméticos, visto que nessa época não havia ainda nenhuma outra ferramenta que desempenhasse esse papel. Sua descoberta impressionou os matemáticos da época, uma vez que cálculos aritméticos que levavam meses para serem concluídos agora poderiam ser realizados em poucos dias.

Ultimamente, com a invenção das calculadoras, celulares e computadores, os logaritmos perderam essa importância. No entanto, ainda são de grande relevância para a matemática, pois constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos desse modelo de variação são encontradas em diversas áreas do conhecimento, fazendo dessa ferramenta algo imprescindível para a ciência e a tecnologia.

O ensino e aprendizagem da função logarítmica no ensino médio é algo desafiador tanto para os alunos quanto para os professores, por se tratar de um conteúdo que é ensinado com excesso de manipulação, deixando cair no esquecimento a real importância dessa ferramenta. Muitos são os docentes que abordam esse tema sem apresentar definições e conceitos, preocupados simplesmente em familiarizar os alunos com os procedimentos necessários para resolução dos exercícios. Geralmente os logaritmos são introduzidos no ensino médio como solução de uma equação exponencial, em que habitualmente o professor adota uma postura "tradicional", isto é, ele transcreve o texto do livro para a lousa e os alunos transcrevem para o caderno. A contextualização durante esse processo raramente é executada, uma vez que a maioria dos professores desconhecem material de apoio que forneça subsídios necessários para a sua realização.

Observa-se que vários livros didáticos utilizados na rede pública abordam esse tema de maneira muito superficial, apresentando demasiadamente manipulações, escassez em conceituações e aplicações limitadas ou fora do contexto real. Pouquíssimos livros fazem referência ao estudo dos logaritmos utilizando a abordagem geométrica, somente a citam a título de observação na apresentação dos logaritmos naturais. Desta maneira, eles cooperam exponencialmente para que os alunos aprendam esse conteúdo mecanicamente, onde as informações são memorizadas de maneira arbitrária, literal e não significativa.

O trabalho aqui apresentado, introduz a teoria da função logarítmica de forma contextualizada, usando argumentos históricos, algébricos e geométricos. Pretendemos então, por meio desta pesquisa teórica e prática, construir uma proposta onde a aprendizagem seja significativa para o educando por meio do ensino contextualizado.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, é apresentada a origem dos logaritmos. Nele abordamos a história da descoberta John Napier e as contribuições significativas para essa ferramenta realizada por Jobst Bürgi.

Para superar as dificuldades de aprendizagem da função logarítmica, apresentamos no Capítulo 2 a importância do ensino contextualizado da matemática. Neste capítulo, propomos a contextualização como facilitador do processo de ensino-aprendizagem e estudamos a mistificação acerca dessa disciplina.

No Capítulo 3, introduzimos uma nova abordagem para a definição da função logarítmica. Nele, apresentamos a teoria da função logarítmica de acordo com obra "Logaritmos"de Lima (2013), em que exploramos a ideia de utilizar o conceito de área para definir essa função. Também estudamos neste capítulo todas as propriedades e algumas aplicações dessa ferramenta.

A fim de melhorar o processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento, elaboramos no Capítulo 4 uma sequência de ensino que proporcione ao educando uma aprendizagem significativa da função logarítmica.

No Capítulo 5, verificamos a eficácia dessa sequência de ensino, onde é abordada a sua aplicação e os resultados obtidos.

Capítulo 1

A origem dos logaritmos

Neste capítulo, abordaremos um pouco da vida de John Napier, matemático e teólogo escocês que contribuiu de forma significativa com a descoberta e sistematização das tabelas de logaritmos. Estudaremos também contribuições posteriores a Napier, como as de Jobst Bürgi, que criou tabelas de logaritmos que proporcionaram ao físico Johannes Kepler evidenciar as leis do movimento planetário. Como referência para realização da pesquisa bibliográfica, adotamos os teóricos Eves, Boyer, Stewart, Cajori, Lima e Soares.

1.1 Os logaritmos de Napier e Briggs

John Napier nasceu em 1550 quando seu pai tinha 16 anos, vivendo a maior parte da sua vida na grandiosa propriedade da família, o castelo de Merchiston, agora parte da cidade de Edimburgo, na Escócia. Conhecido como barão de Merchiston, dedicou grande parte de seu tempo às questões religiosas, políticas e matemáticas de sua época.

Mesmo vindo de uma família rica, Napier sempre se mostrou interessado nos estudos. Ingressou em uma das melhores universidades do continente europeu, em St. Andrew, porém, devido a problemas familiares e religiosos, não concluiu o curso, retornando a sua terra natal. Apesar de não possuir curso universitário, era considerado um gênio, prosseguindo seus estudos nas áreas de teologia e matemática.

No ano de 1593, Napeir publica em sua opinião a obra mais importante da sua vida: *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, na qual ele acusava o papa de ser o Anticristo e que o fim do mundo ocorreria entre os anos de 1688 e 1700. Esse livro atingiu 21 edições, sendo pelo menos 10 edições ainda com autor em vida. Napier acreditava que esse livro levaria o seu nome e a sua reputação para a posterioridade.

Apesar de se envolver em diversos conflitos políticos, religiosos e mesmo não sendo matemático profissional, Napier era um grande admirador e estudioso da matemática, se interessando particularmente por computação e trigonometria.

Durante os séculos XVI e XVII, matemáticos, físicos, astrônomos e navegantes enfrentavam grandes dificuldades na realização de cálculos aritméticos. Operações como multiplicar, dividir, obter potências e raízes de números muito grandes levavam meses de trabalho para serem realizadas. Fazia-se necessário uma ferramenta matemática que tornasse esses cálculos cansativos em cálculos mais simples.

Muitos matemáticos se lançaram a solucionar esse problema, no entanto, poucos tiveram tanto sucesso como Napier. Resultou-se do seu empenho uma grande contribuição para a matemática: a invenção dos logaritmos.

Napier trabalhou cerca de 20 anos na criação dos logaritmos antes de publicar seus resultados. A sua descoberta partiu de conhecimentos complexos adquiridos de correspondência entre progressões geométricas e aritméticas. Outro fator que contribuiu para descoberta foi o método de *prostaférese*, que consistia em fórmulas trigonométricas que convertia o produto de dois números quaisquer na soma de dois números quaisquer.

De posse desses conhecimentos, Napier começou a relacionar os termos da progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...,$$

aos termos da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,$$

usando a relação de Stifel, verificou que o produto $b^m b^n$ de dois termos da progressão geométrica está associado à soma $m + n$ da progressão aritmética. Para manter os termos da progressão geométrica extremamente próximos, fazia-se necessário a escolha de uma base b bem próxima de 1.

Para compreendermos melhor essa ideia vamos considerar a multiplicação de 2,67 por 3,51. Pelo processo comum de multiplicação, encontramos 9,3717, que com duas casas decimais fica 9,37. Dessa forma, devemos tomar uma base b próxima de 1 tal que $b^m = 2,67$ e $b^n = 3,51$. Se tomarmos $b = 1,001$ então um pouco de aritmética revela que

$1,001^{983} \approx 2,67$ e $1,001^{1256} \approx 3,51$ arredondados para duas casas decimais. O resultado acima nos garante que:

$$2,67 \times 3,51 \approx 1,001^{983} \times 1,001^{1256} = 1,001^{983+1256} = 1,001^{2239} \approx 9,37.$$

De fato, o processo transformou o produto entre os dois números em uma simples adição de expoentes de uma potência. No entanto, se formos verificar os cálculos aritméticos realizados, dificultamos ainda mais o problema ao invés de facilitar, pois, para resolver $1,001^{1256}$, é necessário multiplicar $1,001$ por si mesmo 1256 vezes, algo muito trabalhoso de fazer. Para descobrir que 1256 é a potência certa a se usar, seria necessário mais trabalho ainda. Então, à primeira vista, fazer multiplicações por esse método parece inútil.

Para solucionar esse problema, era necessário que algum estudioso calculasse muitas potências de 1,001, a começar por $1,001^2$ e subir até $1,001^{10000}$. Dessa forma, após um trabalho gigantesco, pode-se publicar uma tabela de todas essas potências. Com essa tabela em mãos, a multiplicação seria facilmente realizada pelo método descrito acima.

Após muito estudar o problema, Napier foi esperto o suficiente para perceber que as potências de um determinado número podiam fazer o mesmo trabalho que o método de *prostaférese*, mas de um maneira bem mais simples. As tabelas necessárias não existiam, todavia, isso poderia ser superado. Assim, Napier se lançou ao trabalho para criar a primeira tabela de logaritmos da história.

Primeiramente, Napier tomou $1 - \dfrac{1}{10^7} = 0,9999999$ para b. No entanto, ainda recaía em casas decimais. Para evitar isso, ele multiplicou cada potência por 10^7, obtendo com isso a progressão geométrica

$$10^7, 10^7(1-\frac{1}{10^7}), 10^7(1-\frac{1}{10^7})^2, 10^7(1-\frac{1}{10^7})^3, ..., 10^7(1-\frac{1}{10^7})^m, ..., 10^7(1-\frac{1}{10^7})^n, ...$$

que estava associada à progressão aritmética

$$0, 1, 2, 3, ..., m, ..., n, ...$$

de modo geral, se

$$N = 10^7(1-\frac{1}{10^7})^L,$$

então ele chamava L de "logaritmo"do número N. Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1-\dfrac{1}{10^7})$ é 1, que é denotado por $Nap\log 10^7 = 0$ e $Nap\log 10^7(1-\dfrac{1}{10^7}) = 1$, respectivamente.

Ao analisarmos os logaritmos desenvolvidos por Napier, é facil mostrar que eles não admitiam o conceito de base de um sistema de logaritmo, pelo fato de sua definição ser diferente da atual, pois a sua progressão geométrica não se iniciava com 1. Para mostrar isso, suponhamos por absurdo que exista $b > 0$ uma base para os logaritmos de Naiper, como $Nap\log 10^7 = 0$, $Nap\log 10^7(1-\dfrac{1}{10^7}) = 1$ e $Nap\log 10^7(1-\dfrac{1}{10^7})^2 = 2$, escrevendo na linguagem moderna dos logaritmos temos $\log_b 10^7 = 0$, $\log_b 10^7(1-\dfrac{1}{10^7}) = 1$ e $\log_b 10^7(1-\dfrac{1}{10^7})^2 = 2$, então $b^0 = 10^7$, $b^1 = 10^7(1-\dfrac{1}{10^7})$ e $b^2 = 10^7(1-\dfrac{1}{10^7})^2$, assim $1 = 10^7$, $b = 10^7(1-\dfrac{1}{10^7})$ e $b = 10^{\frac{7}{2}}(1-\dfrac{1}{10^7})$. Veja que os possíveis valores obtidos para a base b nos leva a uma contradição, pois para todo $b > 0$ segue que $1 \neq 10^7$ e $10^7(1-\dfrac{1}{10^7}) \neq 10^{\frac{7}{2}}(1-\dfrac{1}{10^7})$ Portanto, Napier desconhecia o conceito de base de um sistema de logaritmos. No entanto, se dividimos N e L por 10^7, virtualmente teríamos uma base $\dfrac{1}{e}$, pois $(1-\dfrac{1}{10^7})^{10^7}$ fica bem próximo de $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$, que é o inverso multiplicativo da base dos logaritmos naturais.

Após longos 20 anos de trabalho calculando centenas de potências com apenas papel, tinta e pena, Napier finalmente consegue explanar os princípios da sua descoberta em termos geométricos. De acordo com Eves (2011), em linguagem moderna, Napier definiu seus logaritmos da seguinte maneira:

> Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem D, conforme a Figura 73. Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como o logaritmo de CB. Isto é, pondo $DF = x$ e $CB = y$, $x = Nap\log y$. (EVES, 2011, p.344)

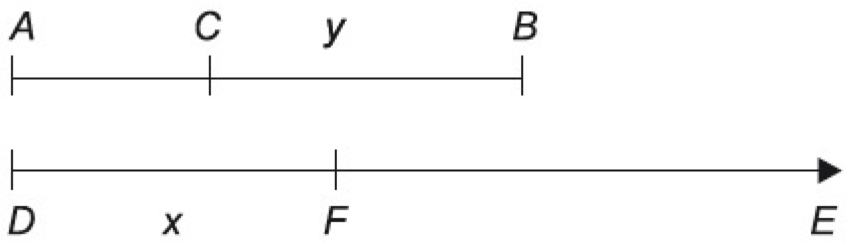


Figura 73

Figura 1.1: Definição geométrica do logaritmo de Napier.

É fácil ver que a definição geométrica adotada por Napier concorda com a definição numérica $N = 10^7(1-\frac{1}{10^7})^L$. Para mostrar isso, seja $DF = x$ e $CB = y$. Tomando AB como 10^7, e se a velocidade inicial de C também é tomada como 10^7, então usando um pouco do cálculo moderno temos $\frac{dy}{dt} = -y$ e $\frac{dx}{dt} = 10^7$, $y_0 = 10^7$ e $x_0 = 0$. Então $\frac{dy}{y} = -dt$ e $dx = 10^7 dt$, integrando obtemos $\ln y = -t + k_1$ e $x = 10^7 t + k_2$. Como $y_0 = 10^7$e $x_0 = 0$, segue que $k_1 = \ln 10^7$ e $k_2 = 0$, assim, $\ln y = -t + \ln 10^7$ e $x = 10^7 t$. Das duas últimas equações, concluímos que $\ln y = -\frac{x}{10^7} + \ln 10^7$, logo $x = -10^7 \ln\left(\frac{y}{10^7}\right)$, ou seja, $\frac{x}{10^7} = \log_{e^{-1}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$. Isso significa que se as distâncias CB e DF fossem divididas por 10^7, a definição geométrica de Napier nos levaria a um sistema de logaritmos de base e^{-1}, como foi mencionado antes, portanto $x = Nap \log y$. A princípio, Napier chamou a sua descoberta de "números artificiais". Somente mais tarde ele fez a composição de duas palavras gregas: *logos*(razão) e *arithmos*(número), fabricando assim a palavra "logaritmo".

Ao observarmos os resultados da demostração acima, fica evidente que a afirmação feita frequentemente de que os logaritmos neperianos são logaritmos naturais, não corresponde de fato com a verdade, uma vez que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, ao contrário dos logaritmos naturais. Isso é de se esperar, pois Napier adotou virtualmente a base e^{-1}, que é menor que 1, logo, a sua progressão geométrica é decrescente, fato que não ocorre nos logaritmos naturais.

No ano de 1614, Napier finalmente publicou a principal obra de sua vida no texto intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* ("Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos"), contendo uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco. Os seus logaritmos tiveram sucesso imediato. Napier tinha ciência da grandeza da sua descoberta e da sua utilidade, tanto que, de acordo com Stewart (2013), no prefácio de sua obra dizia:

> Já que não existe nada mais enfadonho, colegas matemáticos, na prática da arte matemática do que o grande atraso sofrido no tédio de extensas multiplicações e divisões, de encontrar razões, e na extração de raízes quadradas e cúbicas - e ... os muitos erros traiçoeiros que podem surgir: eu estive, portanto, revirando em minha mente que arte segura e expedita eu poderia ser capaz de aperfeiçoar para tais mencionadas dificuldades. No final, após muito pensar, finalmente descobri uma surpreendente maneira de abreviar os procedimentos ... e é uma tarefa prazerosa apresentar o método para uso público dos matemáticos. (STEWART, 2013, p.19)

O método apresentado por Napier despertou o interesse de muitos matemáticos da época, pois cálculos que antes levavam meses, agora poderiam ser realizados em poucos dias. Entre os seus admiradores, podemos destacar Henry Briggs (1551-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente de Oxford. Briggs estava encantado com a descoberta realizada por Napier e lançou-se a estudá-la. Quanto mais Briggs estudava o sistema de logaritmos, mais convencido estava de que, embora a estratégia de Napier fosse maravilhosa, a tática adotada estava errada. Assim, Briggs decide viajar até Edimburgo na Escócia para dar o seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos e propor um aperfeiçoamento simples e efetivo a sua descoberta.

Em 1615, Briggs visitou Napier em sua casa e passaram alguns minutos observando um ao outro com admiração antes que qualquer palavra fosse dita. Nessa visita, eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos, com Briggs propondo o uso de potências de dez e Napier dizendo que já havia pensado nisso. Ambos concordavam que as tábuas de logaritmos seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse 1, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou *comuns*. Todavia, Napier já não tinha energia suficiente para por em prática essas ideias, vindo a falecer em 1617. O seu segundo livro sobre os logaritmos, o *Mirifici*

Logarithmorum Canonis constructio, dava uma exposição completa dos métodos que ele usava para construir suas tabelas. A obra apareceu postumamente em 1619, recaindo sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela dos logaritmos comuns.

Para construir uma tábua de logaritmos com base nessa nova ideia, Briggs começou com $\log 10 = 1$ e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas. Desse modo, calculando $\sqrt{10} = 3,16277$, ele tinha que $\log 3,162277 = 0,5$, e de $\sqrt[4]{10^3} = 5,623413$ tinha que $\log 5,623413 = 0,75$. No ano da morte de Napier, Briggs publicou o livro *Logarithmorum Chilias Prima*, contendo os logaritmos comuns dos números de 1 a 1000, cada um calculado com quatorze casas decimais. No ano de 1624, Briggs publica o livro *Arithmetica Logarithmica* que continha os logaritmos comuns de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, novamente com quatorze casas decimais. A lacuna entre 20000 e 90000 foi preenchida com ajuda de Adriaen Vlacq (1600-1660), um livreiro e editor holandês. Juntos, Briggs e Vlacq publicaram quatro tábuas de logaritmos, só recentemente superadas, quando entre 1924 e 1949 se publicaram extensas tábuas de 20 casas decimais como parte das comemorações do tricentenário da descoberta dos logaritmos.

1.2 Os logaritmos de Bürgi

Jobst Bürgi nasceu em Lichtensteig na Suíça em 28 de fevereiro de 1552, era procedente de uma família pobre, modesta e numerosa, fato esse que o impediu de frequentar um curso superior. Assim que conseguiu, deixou sua terra natal para viver uma vida pobre e difícil.

Bürgi tinha um talento incomum para relógios, motivo que o fez ocupar a maior parte da sua vida trabalhando na construção e orientação deles, sendo assim, designado como assistente aos grandes construtores da época. Seu sucesso como construtor era tamanho que chegou a fabricar relógios para o conde de Landgraf de Hesse-Kassel, para o imperador romano Rudolph II e o sucessor dele Mathias, em Praga.

Como relojoeiro, Bürgi fez diversas invenções que melhoraram os mecanismos dos relógios, o que proporcionou maior precisão ao funcionamento deles. Isso permitiu que os relógios fossem usados como instrumentos científicos, principalmente na astronomia. Esses relógios foram chamados de relógios astronômicos e despertaram o interesse de grandes estudiosos da sua época.

Mesmo sendo exímio com relógios, Bürgi demostrava grande paixão pelas ciências astronômicas. Seu primeiro contato com a matemática foi quando tornou-se aluno do matemático Dasypodius. No entanto, ele era autodidata e isso o fez transcender ao nível dos cientistas da época. O fato de ser matemático amador e de ser pobre o afastava do meio intelectual, pois se sentia inferiorizado perante a comunidade científica.

Bürgi apresentava como matemático uma grande facilidade para manipular equações trigonométricas, motivo esse que chamou a atenção do famoso físico e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), que viu em Bürgi um ótimo ajudante para cálculos astronômicos. Com a motivação de Kepler, Bürgi lançou-se a desvendar algumas relações trigonométricas, entre elas podemos destacar a relação $1 + \operatorname{sen}(60°) = 2\operatorname{sen}^2(75°)$.

Essas relações desvendadas por Bürgi ajudaram Kepler a desenvolver vários cálculos astronômicos, pois até então, não sabia a quem recorrer. Vendo a importância de simplificar métodos computacionais para o desenvolvimento da astronomia, e baseado também na relação de Stiffel, Bürgi começou a relacionar os termos de uma progressão geométrica com os termos de uma progressão aritmética e por volta de 1588 inicia a descoberta de seus logaritmos. Segundo Boyer (1974), Bürgi concebeu os seus logaritmos da seguinte maneira:

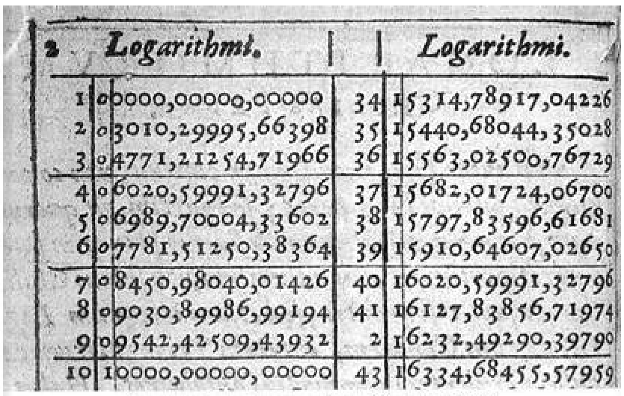
> Em vez de partir de um número um pouco menor que 1 (como Napier que usava $1 - 10^{-7}$), Bürgi escolheu um número um pouco maior que 1, o número $1 + 10^{-4}$; e em vez de multiplicar as potências desse número por 10^7, Bürgi multiplicava por 10^8. Havia ainda outra outra pequena diferença: em sua tabulação, Bürgi multiplicava todos os seus índices de potência por 10. Isto é, se $N = 10^8(1 + 10^{-4})^L$, Bürgi chamava $10L$ o número "vermelho"correspondente ao número "preto"N. Se nesse esquema dividirmos todos os números pretos por 10^8 e todos os vermelhos por 10^5, teremos virtualmente um sistema de logaritmos naturais. (BOYER, 1974, p.231)

Ao analisarmos a definição de Bürgi, dividindo os números pretos 10^8 e todos os vermelhos por 10^5, obtemos $\dfrac{N}{10^8} = \left[(1 + 10^{-4})^{10^4}\right]^{\frac{10L}{10^5}}$, logo, temos virtualmente a base $(1 + 10^{-4})^{10^4}$ para os logaritmos de Bürgi. Como $(1 + 10^{-4})^{10^4}$ é uma aproximação com quatro casas para o número $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ os seus logaritmos ficaram conhecidos como logaritmos naturais.

Bürgi frequentemente trocava correspondências com Johannes Kepler e nelas apresentou a ele seu método computacional. Kepler não perdeu tempo e foi o primeiro a usar os logaritmos para desenvolver as leis do movimento planetário, publicando-as em 1609 na obra *Astronomia Nova*.

Apesar de Napier e Bürgi terem desenvolvido independentemente ao mesmo tempo a descoberta dos logaritmos, partindo praticamente da mesma ideia, são visíveis as diferenças no trabalho de cada um. Napier concebeu os seus logaritmos por meio de uma definição geométrica, enquanto Bürgi justificou o seu trabalho por definições algébricas. Mesmo sendo o primeiro homem a propor a ideia dos logaritmos, a publicação do seu trabalho em 1620 na obra *Arithmetische Und Geometrische Progress-Tabulen* não obteve sucesso. Muito se deve ao fato da publicação dos logaritmos de Bürgi ter ocorrido seis anos após a publicação dos logaritmos de Napier. Outro motivo importante para o seu insucesso era que os logaritmos de Bürgi eram mais difíceis de serem compreendidos, principalmente no que se refere a lógica da construção das suas tabelas.

A descoberta dos logaritmos realizada por Naiper e Bürgi proporcionaram o avanço de diversas ciências que careciam de uma ferramenta matemática para simplificar cálculos complexos. Até hoje ensinamos a se calcular com logaritmos nas escolas de segundo grau e também em alguns cursos superiores. No entanto, com advento de computadores e calculadoras portáteis, caiu em desuso as tábuas e réguas de logaritmos (Figura 1.2) para fins computacionais.



2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

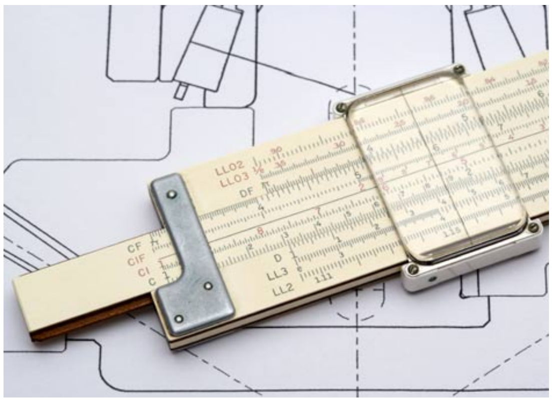


Figura 1.2: Tábua e régua de logaritmos.

Em relação à função logarítmica, é perceptível que ela nunca cairá no esquecimento, devido as suas variações (exponencial e logarítmica) serem partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, o ensino da função logarítmica e de sua inversa permanecerá para sempre como parte importante do ensino da matemática.

Capítulo 2

O ensino contextualizado da matemática

Neste capítulo, abordaremos a importância da contextualização como facilitador do processo de ensino e aprendizagem da disciplina de matemática. Estudaremos também a mistificação acerca dessa disciplina que é considerada por muitos como uma das principais responsáveis pelo fracasso e evasão escolar.

2.1 O ensino de matemática

A matemática é uma ciência que contribui diretamente para o desenvolvimento da raça humana e é essencial atualmente para formação de um cidadão apto a contribuir com a sociedade. De acordo com os PCN (1997), ela desempenha papel decisivo, pois nos permite resolver problemas da vida cotidiana e tem muitas aplicações práticas, funcionando como ferramenta para outras ciências.

Apesar de ser extremamente importante, o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina ainda continua sendo um desafio para todos. Muito se deve a uma metodologia arcaica, em que o ensino está centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para os alunos.

> O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem. (BRASIL, 1997, p.15)

Nas instituições de ensino, há um tradicionalismo na forma de ensinar matemática, em que é utilizada uma metodologia arcaica, baseada apenas no uso do livro didático e do quadro negro, visando a memorização dos conteúdos. Essas aulas são cansativas, tanto para os alunos quanto para os professores, promovendo o desinteresse dos mesmos. Para muitos participantes do processo de ensino, a matemática só pode ser aprendida por alunos inteligentes. Dessa forma, aqueles que apresentam dificuldades acabam sendo excluídos, ficando a margem do conhecimento e fadados ao fracasso escolar.

> Além dos índices que indicam o baixo desempenho dos alunos na área de Matemática em testes de rendimento, também são muitas as evidências que mostram que ela funciona como filtro para selecionar alunos que concluem, ou não, o ensino fundamental. Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como disciplina que contribui significativamente para elevação das taxas de retenção. (BRASIL, 1997, p.23)

O ensino de matemática através da memorização e repetição traz diversas consequências para o processo de ensino aprendizagem. Primeiramente, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem matemática se dá através do acúmulo de regras, fórmulas e algoritmos, chegando a conclusão de que fazer matemática é simplesmente seguir e aplicar essas regras. Com o tempo, os alunos perdem qualquer autoconfiança em sua intuição matemática, perdendo assim, seu "bom-senso"matemático. Por essa concepção errônea, acabam não conseguindo relacionar a matemática como uma ferramenta prática para solucionar problemas da vida real, o que contribui diretamente para a mistificação dessa disciplina que a cada dia é mais temida e considerada complexa pelos alunos.

De acordo com Moreira (1999), esse tipo de aprendizagem é considerada mecânica, em que as informações são memorizadas de maneira arbitrária, literal e não significativa. Essa forma de aprender é bastante estimulada nas escolas, pois possibilita o aluno a ir bem nas provas, mas tem pouca retenção e não requer compreensão. Em contrapartida, Moreira (1999) defende uma aprendizagem significativa em que os novos conhecimentos adquiridos pelos alunos se relacionam com o conhecimento prévio que eles já possuem.

> Na aprendizagem significativa, o aprendiz não é um receptor passivo, ele faz uso dos significados que já internalizou, de maneira substantiva e não arbitrária, para poder captar os significados dos materiais educativos. Nesse processo, ao mesmo tempo em que está progressivamente diferenciando sua estrutura cognitiva, está também fazendo a reconciliação integradora de modo a identificar semelhanças e diferenças e reorganizar seu conhecimento. (MOREIRA,1999,p.4).

Existem outros fatores que estão relacionados com o baixo desempenho apresentado pelos alunos na disciplina de matemática, entre eles podemos destacar as metodologias inadequadas, péssimas condições de trabalho, material didático defasado, aulas descontextualizadas, entre outros. No entanto, de acordo com os PCN (1997), parte dos problemas enfrentados no ensino de matemática estão ligados à formação dos professores de matemática, que muitas vezes é de qualidade insatisfatória.

Os cursos de formação de professores de matemática ainda não se preocupam como deveriam com o processo de ensino, adotando geralmente uma metodologia tradicional que futuramente será reproduzida pelos professores nas escolas do ensino básico. Dessa forma, a implantação de propostas inovadoras no ensino básico esbarra na falta de uma formação pedagógica qualificada dos professores e nas restrições ligadas as condições de trabalho.

Independentemente das dificuldades enfrentadas, muitos são os professores e pesquisadores que se mostram preocupados com o atual desempenho do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Esses estão se lançando em busca de metodologias mais efetivas para que essa disciplina deixe de ser o “patinho feio”da grade escolar. Visando superar essas dificuldades, várias linhas de pesquisas foram criadas apresentando propostas que colocam o aluno como o centro do processo educacional, enfatizando ele como um ser ativo no processo de construção do seu conhecimento e o professor como mediador, orientador e monitor das atividades realizadas pelos educandos.

2.2 A contextualização e o ensino de matemática

Durante seu exercício profissional no ensino de matemática da educação básica, os professores enfrentam grande dificuldades para motivar os seus alunos acerca da importância de se estudar essa disciplina. Muitas vezes eles se deparam com a seguinte pergunta “professor, em que vou utilizar esse conteúdo na minha vida?”. A maioria dos estudantes não consideram a matemática ensinada nas escolas hoje como algo útil para a sua vida diária, dificultando assim a sua motivação dentro do processo de ensino aprendizagem.

Uma ferramenta de ensino importante que pode estimular os alunos para que se sintam motivados a aprender é a contextualização, uma vez que essa metodologia proporciona ao aluno um contexto diferente do puramente matemático tão enfatizado no ensino tradicional. A respeito dessa dificuldade, D’Ambrósio nos diz:

> É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico. (D’AMBRÓSIO, 2001, p.31)

Segundo os PCN (1997), a contextualização da matemática se refere a aspectos como: a relação entre sujeito e objeto de estudo; o papel do aluno como participante não passivo; o ato de compreender, inventar e reconstruir; a relação com as áreas e com os aspectos presentes na vida social, pessoal e cultural do aluno.

Etimologicamente, contextuar significa enraizar uma referência em um texto, de onde fora extraído, e longe do qual perde substancialmente parte do seu significado. Sendo assim, uma estratégia importante para a construção de significados. Tomando o conhecimento como uma referência ou parte de um "texto"maior, podemos compreender o significado de contextualização como (re)enraizar o conhecimento ao "texto"original do qual foi extraído ou qualquer outro contexto que empreste significado.

O uso da contextualização no ensino de matemática cria condições para uma aprendizagem motivadora, em que existe a superação do distanciamento entre os conteúdos estudados e as experiências vividas pelos alunos. Com a utilização de diferentes contextos, pode-se transmitir a real importância do objeto estudado de forma que o aprendizado tenha relevância para o educando.

Para Fonseca (1995), contextualizar não é abolir estratégia e compreensão, mas exceder esses limites e entender a importância de fatores externos que normalmente são desconsiderados pela escola, de modo que os conteúdos matemáticos possam ter significado histórico, social e cultural para o educando.

> As linhas de frente da Educação Matemática têm hoje um cuidado crescente com o aspecto sociocultural da abordagem Matemática. Defendem a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido, buscar suas origens, acompanhar sua evolução, explicitar sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade do aluno. É claro que não se quer negar a importância da compreensão, nem tampouco desprezar a aquisição de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter na vida social, nas opções, na produção e nos projetos de quem aprende. (FONSECA, 1995, p.53)

Dentro do processo de contextualização, cabe ao professor o papel de transformar o saber científico em saber escolar, pois o conhecimento matemático formalizado e teórico não é passível de comunicação direta aos alunos. Essa transformação se dá por meio da busca de contextos em que o conhecimento escolar seja apreciável pelos alunos.

Um erro muito comum entre os docentes é a falsa propagação de que só há contextualização quando o contexto utilizado está relacionado ao cotidiano do aluno. De acordo com Valero (2002), exitem quatro grandes grupos de contextos que podem ser empregados dentro do processo de ensino aprendizagem: *o contexto de um problema*, o *contexto de interação*, o *contexto situacional* e o *contexto sociopolítico da Educação Matemática*.

- *Contexto de um problema*: trata-se das noções e procedimentos que envolvem determinado problema matemático, seja ele restrito às questões matemática, ou não. Esse grupo de contexto está diretamente relacionado a levar aos alunos problemas que permitam estabelecer conexões com o que já sabem, tanto em matemática quanto no seu cotidiano, visando a formação de cidadãos críticos e ativos socialmente. Pode-se envolver nesses problemas referências "reais", proporcionando ao aluno uma construção ativa do conhecimento, aumentando assim, as chances do aluno assimilar e reorganizar o novo conhecimento adquirido.

- *Contexto de interação*: são contextos onde os alunos possam interagir uns com os outros, trabalhando com atividades que lhes permitam formular hipóteses, testá-las e validá-las, não apenas sozinhos, mas interagindo e discutindo com seus pares e com o professor.

- *Contexto situacional*: esse contexto é bem mais amplo que os anteriores, visto que em uma situação não devemos considerar somente os processos mentais realizados pelos alunos na resolução de um problema, tão pouco o intercambio realizados por eles em busca de uma solução. Neste contexto, devemos considerar as relações históricas, politicas, sociais, culturais e psicológicas que estão presentes no processo de ensino aprendizagem da matemática, afim de torná-lo significativo para os alunos.

- *Contexto sociopolítico da Educação Matemática*: são os contextos que voltam a sua atenção de forma geral, para a formação do cidadão, visto que existe atualmente uma preocupação com a conexão entre a matemática aprendida nas escolas e as estruturas nas quais a sociedade está envolta.

Dentre os contextos, alguns são considerados de extrema importância para o processo de ensino dessa área de conhecimento, como a história da Matemática, a própria Matemática, a interdisciplinaridade e o cotidiano do aluno. Entretanto, as tentativas de contextualização tem ocorrido, muitas vezes, de modo artificial, com enunciados extensos e desnecessários, que por várias vezes apresentam informações que em nada interferem na resolução da atividade.

Com base no que foi apresentado até o momento e considerando que uma das funções da escola é formar cidadãos críticos e ativos socialmente, concluímos que a perspectiva na qual a escola tem trabalhado o ensino da matemática pode ser melhorada de modo relevante para atingir esse objetivo. Assim, vemos na contextualização uma ferramenta eficaz para atribuição de significados aos conceitos matemáticos aprendidos na escola, ajudando a relacionar essa disciplina com as outras áreas na qual se faz presente. Por acreditarmos nas contribuições da contextualização para ensino da matemática, apresentamos a seguir uma proposta de ensino axiomática e contextualizada para a função logarítmica.

Capítulo 3

O logaritmo como área

Neste capítulo, apresentamos uma nova abordagem para a definição e conceituação da função logarítmica de forma geométrica e contextualizada, com o objetivo de proporcionar aos professores de matemática instrumentos que possibilitem superar as enormes dificuldades encontradas dentro do processo de ensino e aprendizagem dessa importante ferramenta matemática que possui inúmeras aplicações.

3.1 As três componentes do ensino da Matemática

De acordo com Lima (2007), o ensino da Matemática deve ser organizado de forma que os alunos sejam capazes de lidar facilmente com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para que no futuro possam utilizar seus conhecimentos em situações da vida real. Visando atingir esses objetivos, o ensino da Matemática, deve abranger de forma equilibrada três componentes fundamentais, que são:

- *Conceituação:* compreende a formulação correta e objetiva das definições matemática, o enunciado preciso e correto das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos.

- *Manipulação:* está associada à habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados.

- *Aplicação:* são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia até as mais sutis que surgem em outras áreas.

Atualmente, o ensino da Matemática está centrado em manipulação. Muitos são os livros didáticos que não apresentam um equilíbrio entre as três componentes citadas acima, eles trazem uma conceituação inadequada, algumas aplicações e uma carga excessiva de manipulações algébricas. Isso torna o processo de ensino desmotivador, pois esses processos não provêm de problemas reais e não estão relacionados com o cotidiano do aluno.

> A presença de manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a Matemática se resumisse a ela. Isto tem bastante a ver com o fato de que o manuseio eficiente de expressões numéricas e símbolos algébricos impõe a formação de hábitos mentais de atenção, ordem e exatidão, porém, não exige criatividade, imaginação ou capacidade de raciocinar abstratamente. (LIMA, 2007, p.157)

Apresentamos a seguir uma abordagem diferenciada para a definição e os conceitos da função logarítmica, que aborda de forma equilibrada as componentes: conceituação, manipulação e aplicação. Usando esse tripé, pretendemos assegurar melhoras significativas no processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento.

3.2 O conceito de função

O ensino de funções é um dos assuntos mais abordados dentro do ensino básico, sendo primeiramente estudado no ensino fundamental e tendo seu estudo ampliado no ensino médio. Um dos fatores que torna o conceito de função como um dos mais importantes das ciências exatas é o fato da sua aplicabilidade direta para resolver diversos problemas que nos cercam.

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática. (EVES, 2011, p.661)

Um grande equívoco que persiste nos dias atuais e ainda é praticado por muitos docentes é a definição inadequada de função como um conjunto de pares ordenados. Essa definição é estática e não aborda de forma dinâmica as várias funções existentes, o que leva os próprios professores que apresentam essa definição não adotá-la quando trabalham funções específicas como as exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, polinomiais, etc. A respeito da definição de função, Lima (2007) nos diz:

> ... a definição de função como uma correspondência é muito mais simples, mais intuitiva e mais acessível ao entendimento do que a outra, que usa uma série de conceitos preliminares, como produto cartesiano, relação binária, etc. Por isso ela é usada por todos, exceto pelos autores de livros didáticos brasileiros. (LIMA, 2007, p.157).

O ensino de função é um grande desafio no ensino básico e está fadado ao fracasso quando adotamos uma definição errônea. Dessa forma, cabe nós professores proporcionarmos aos nossos alunos um contato direto com a definição correta. Na obra "Números e Funções Reais"de Lima (2013), encontra-se a definição precisa de função:

Definição 3.1 *Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que nos diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (lê-se "y igual a f de x"). O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.*

Muitos alunos terminam o ensino básico e ingressam nas universidades acreditando que uma função está bem definida simplesmente pela sua lei de correspondência, mas isso é um grande equívoco. Uma função é uma terna composta por três ingredientes: domínio, contradomínio e lei de correspondência. É comum vermos em livros didáticos do ensino fundamental e médio exercícios como "esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$". Note que não foram mencionados o domínio e o contradomínio, sem que esses sejam especificados de acordo com a definição acima não existe função. Esses exercícios mal elaborados propagam um falso conceito de função, que dificultam de forma exponencial o processo de ensino e aprendizagem dessa importante ferramenta matemática que possui inúmeras aplicações.

Segue-se do que foi dito acima que duas funções $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são iguais se, e somente se, $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

3.2.1 O gráfico de uma função

Agora que já conhecemos a definição correta de função, podemos nos concentrar no estudo de seu gráfico. De modo geral, definimos o *gráfico* de uma função $f : X \to Y$ como o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}.$$

Para que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f : X \to Y$, é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

- **G1**. Para todo ponto $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja a primeira coordenada é x.

- **G2**. Se $P = (x, y)$ e $P' = (x, y')$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x, então $y = y'$ (isto é, $P = P'$).

Para melhor compreendermos a definição acima, tomemos como exemplo, os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$ e $B = \{(x, y) \in [-3, 3] \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 9\}$ representados a seguir na Figura 3.1.

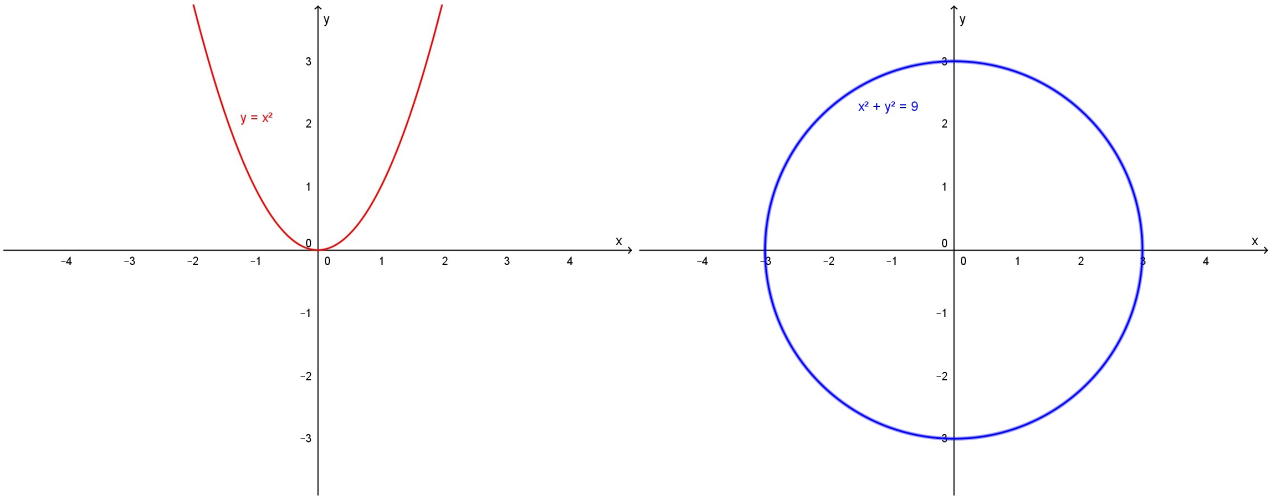


Figura 3.1: Representação dos conjuntos A e B

Agora que já conhecemos os conjuntos A e B, verificaremos se esses conjuntos representam gráficos de uma função qualquer. Para isto, basta confirmar se valem as condições **G1** e **G2**.

- Condição **G1**

  Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $(x, y) \in A$ cuja a primeira coordenada é x e a segunda coordenada é $y = (x)^2$. De modo análogo para todo $x \in [-3, 3]$, existe $(x, y) \in B$ cuja a primeira coordenada é x e a segunda coordenada é $y = \pm(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Portanto, os conjuntos A e B satisfazem a condição **G1**.

- Condição **G2**

  Sejam $P = (x, y)$ e $P' = (x, y') \in A$, então $y = x^2$ e $y' = x^2$, assim $y = y'$, logo $P = P'$. Portanto o conjunto A satisfaz a condição **G2**. Por outro lado os pares $P = (0, 3)$ e $P' = (0, -3)$ pertencentes a B e possuem a mesma coordenada $x = 0$, mas $y \neq y'$, logo $P \neq P'$. Portanto, o conjunto B não satisfaz a condição **G2**.

Ao analisarmos os resultados acima, verificamos que o conjunto A satisfaz as condições **G1** e **G2**, portanto, o conjunto A representa o gráfico de função $f : R \to R$. Já o conjunto B satisfaz a condição **G1**, mas não satisfaz a condição **G2**, portanto, o conjunto B não representa o gráfico de uma função.

3.2.2 Função injetiva

Uma função $f : X \to Y$ chama-se *injetiva* quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando $x \neq x'$ em X implica $f(x) \neq f(x')$. Essa condição pode também ser expressa em sua forma contrapositiva: $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$.

Exemplo 3.1 Vamos mostrar que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é injetiva.

Sejam x_1 e $x_2 \in [0, +\infty)$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$(x_1)^2 = (x_2)^2,$$

então

$$(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0,$$

logo

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos obrigatoriamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Em particular, $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetiva.

3.2.3 Função sobrejetiva

Uma função $f : X \to Y$ é *sobrejetiva* quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dada uma função $f : X \to Y$, para saber se um certo elemento $b \in Y$ pertence ou não à imagem $f(X)$, escrevemos a "equação" $f(x) = b$ e procuramos achar algum $x \in X$ que a satisfaça. Consequentemente, para mostrar que f é sobrejetiva, deve-se provar que a equação $f(x) = b$ possui uma solução $x \in X$, seja qual for o $y \in Y$ dado.

Exemplo 3.2 Vamos mostrar que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1$ é sobrejetiva.

Seja $y \in \mathbb{R}$, fazendo $g(x) = y$. Temos que

$$2x + 1 = y,$$

então

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, existe $x = \dfrac{y-1}{2}$ tal que $g(x) = y$. Portanto, g é sobrejetiva.

3.2.4 Função bijetiva

Uma função $h : X \to Y$ chama-se uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca* entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca (bijeção) $f : X \to Y$, dizemos que os conjuntos X e Y são *equipotentes*, ou seja, X e Y tem o mesmo número cardinal.

Exemplo 3.3 Vamos mostrar que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x$ é bijetiva.

Sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$2(x_1) = 2(x_2)$$

então

$$x_1 = x_2.$$

Logo, h é injetiva.

Por outro lado, seja $y \in \mathbb{R}$, fazendo $h(x) = y$. Temos que

$$2x = y$$

então

$$x = \frac{y}{2}.$$

Assim, existe $x = \dfrac{y}{2}$ tal que $h(x) = y$. Portanto, g é sobrejetiva. Como h é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva, concluímos que h é bijetiva.

3.3 Função Logarítmica

A definição de função logarítmica não é apresentada de forma significativa por vários livros didáticos e por muitos professores do ensino médio, que apenas a conceituam como a inversa da função exponencial e concentram seus esforços de ensino em manipulações algébricas, em raros casos apresentam algumas aplicações, sendo geralmente definida como mostramos abaixo.

Definição 3.2 *Dado um número real* $a > 0$*, chamamos de logaritmo de um número* $b > 0$ *na base* a*, o número* y *tal que* $a^y = b$*. O número* a *é chamado de base do logaritmo,* b *é o logaritmando e* y *o logaritmo. Denotamos* $\log_a b = y$*.*

É de se esperar que os alunos do ensino médio não conheçam o que é realmente de fato uma função logarítmica. Isso se deve a falta de conceituação e significado encontrada dentro do processo de ensino e aprendizagem. Para melhorar os resultados do ensino dessa área do conhecimento, apresentamos a seguir, por meio de argumentos geométricos, uma conceituação precisa da função logarítmica.

3.3.1 O conceito geométrico da função logarítmica

O primeiro a relacionar a área de uma faixa de hipérbole aos logaritmos foi o padre jesuíta belga Gregory Saint Vincent, em 1647, e depois Isaac Newton em 1660. Embora nenhum dos dois tenham identificado o logaritmo natural e nem tenham reconhecido o número e, suas observações mostraram que a concepção geométrica da função logarítmica é uma ideia muito antiga, com mais de três séculos e meio de existência. Ela parte de uma construção natural e intuitiva que pode motivar diretamente o ensino dessa área do conhecimento.

Para compreendermos essa relação, vamos considerar $\mathbb{H}(\alpha)$ o ramo positivo do gráfico da função $y = \alpha/x$, isto é, função que associa a cada número real positivo x o número $y = \alpha/x$, onde α é constante positiva. $\mathbb{H}(\alpha)$ é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x, \alpha/x)$, onde $x > 0$. Em notação de conjunto, $\mathbb{H}(\alpha) = \{(x, y); x > 0, y = \alpha/x\}$. Geometricamente, $\mathbb{H}(\alpha)$ é o ramo da hipérbole $x \cdot y = \alpha$ que está contido no primeiro quadrante.

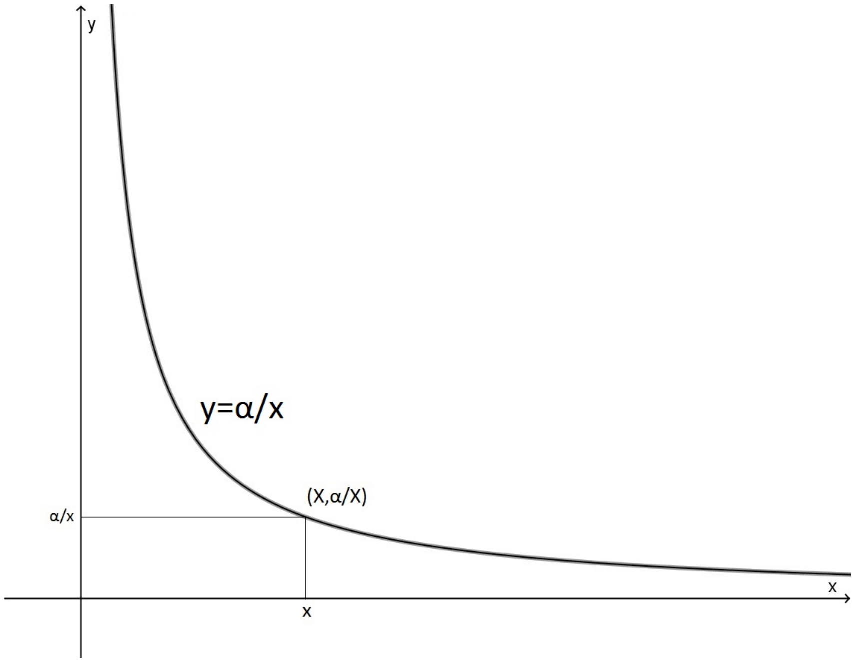


Figura 3.2: Gráfico de $f(x) = \alpha/x$, com $x > 0$ para algum $\alpha > 0$.

Uma faixa de hipérbole é obtida quando dois números reais positivos a e b, com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas e pelo ramo positivo da hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)$. Indicaremos essa região pelo símbolo $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$, assim $\mathbb{H}(\alpha)_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \alpha/x\}$.

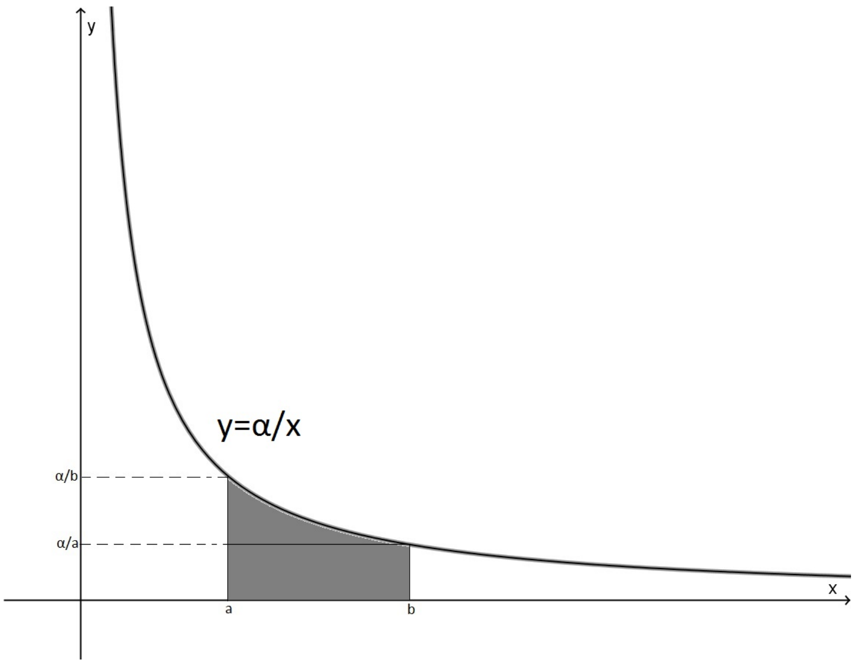


Figura 3.3: Faixa de hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$.

Mostraremos agora como proceder afim de calcular a área de uma faixa de hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$.

Para calcular a área da faixa $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$, vamos usar aproximações por retângulos. Primeiramente, decompomos o intervalo $[a, b]$ num número finito de intervalos justapostos. Com base em cada um dos intervalos $[c, d]$ da decomposição (onde $c < d$), consideramos o retângulo de altura α/d. O vértice superior desse retângulo toca o ramo da hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)$. É o que chamamos de retângulo inscrito na faixa $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. A reunião desses retângulos inscritos constitui o que chamamos de um polígono retangular inscrito na faixa $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$.

É fácil calcular a área de um polígono retangular inscrito numa faixa de hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 3.4 Considerando $\alpha = 1$ vamos decompor o intervalo $[1, 3]$ em quatro partes iguais e calcular, desta maneira, uma aproximação inferior para a área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(1)_1^3$.

Primeiramente, vamos calcular o comprimento de cada subintervalo, para isto, basta calcular o comprimento do intervalo $[1, 3]$ e dividir o resultado por 4, assim o comprimento de cada subintervalo é $1/2$. Agora, vamos determinar os pontos intermediários do intervalo $[1, 3]$, que são $x_0 = 1, x_1 = 1+1/2 = 3/2, x_2 = 3/2+1/2 = 2, x_3 = 2+1/2 = 5/2$ e $x_4 = 3$. Como $\alpha = 1$, estamos trabalhando com o ramo positivo da hipérbole $x \cdot y = 1$, assim, obtemos um polígono retangular cuja a área é igual à soma das áreas dos quatro retângulos abaixo hachurados.

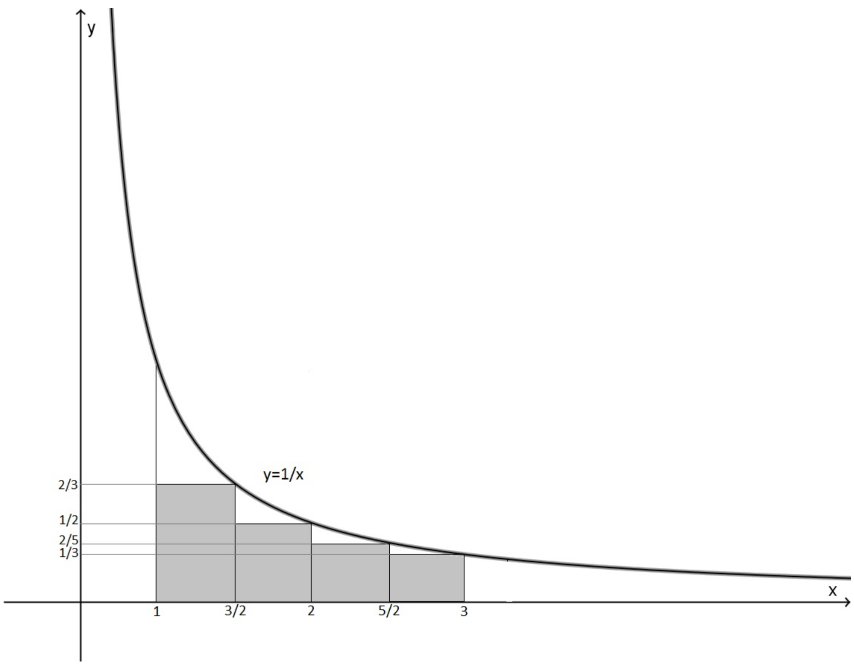


Figura 3.4: Primeira aproximação por falta da área da faixa $\mathbb{H}(1)_1^3$.

Logo uma aproximação para a área da faixa $\mathbb{H}(1)_1^3$ é a área do polígono retangular que é dada por

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}=0,95.$$

O exemplo acima nos fornece uma aproximação para a área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(1)_1^3$. Porém, se efetuarmos uma subdivisão ainda mais fina do intervalo $[1,3]$, encontramos uma aproximação ainda melhor. É o que nos mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.5 Vamos resolver o exemplo anterior decompondo o intervalo $[1,3]$ em 8 partes iguais.

Usando o mesmo procedimento anterior, verificamos facilmente que o comprimento de cada subintervalo é 1/4. Agora vamos determinar os pontos intermediários do intervalo $[1,3]$, que são $x_0=1, x_1=1+1/4=5/4, x_2=5/4+1/4=6/4, x_3=6/4+1/4=7/4, x_4=7/4+1/4=8/4, x_5=8/4+1/4=9/4, x_6=9/4+1/4=10/4, x_7=10/4+1/4=11/4$ e $x_8=11/4+1/4=3$. Logo obtemos um polígono retangular inscrito em $\mathbb{H}(1)_1^3$, formado por oito retângulos justapostos como mostra a Figura 3.5, cuja área total vale

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{84813}{83160},$$

ou seja, 1,019 aproximadamente.

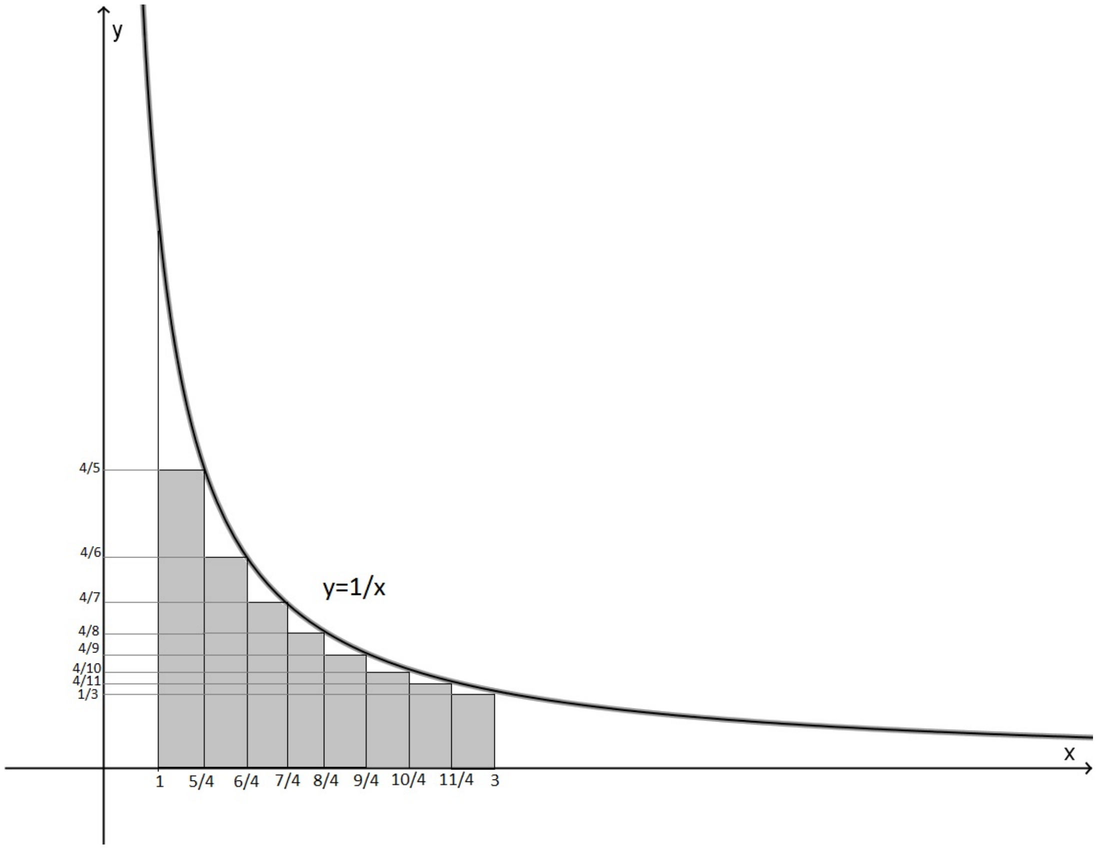


Figura 3.5: Segunda aproximação por falta da área da faixa $\mathbb{H}(1)_1^3$.

Cada polígono retangular inscrito na faixa de hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ fornece um valor aproximado por falta da área de $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Tanto mais aproximado será essa valor quanto mais fina for a subdivisão do intervalo $[a, b]$. isto é, quanto mais próximos uns dos outros estiverem os pontos de subdivisão, menor será a diferença entre o valor exato da área de $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ e a área do polígono retangular inscrito na faixa de hipérbole.

Assim, a área de $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ é o número real cujas aproximações por falta são áreas dos polígonos retangulares inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Se escrevermos $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] =$ área de $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$, temos $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] \geq$ área de P, em que P é o polígono retangular inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Porém, se refinarmos suficientemente a subdivisão do intervalo $[a, b]$, podemos obter polígonos retangulares cujas áreas sejam tão próximas da área de $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ quanto se deseje.

Voltando aos exemplos anteriores, vemos que $57/60$ é uma aproximação inferior para a área da faixa $\mathbb{H}(1)_1^3$, enquanto $84813/83160$ é uma aproximação inferior melhor. O método descrito acima ainda não nos permite determinar o valor exato de $\mathbb{H}_a^b$, mas já podemos garantir que $\mathbb{H}(1)_1^3$ tem área maior do que 1, pois área de $\mathbb{H}(1)_1^3$ é maior que $84813/83160$.

Teorema 3.1 *A área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ é α vezes a área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(1)_a^b$.*

Demonstração: Dado um segmento $[c, d]$ contido em $[a, b]$, um retângulo de base $[c, d]$, inscrito na hipérbole $y = 1/x$, tem altura $1/d$, enquanto um retângulo de mesma base, inscrito na hipérbole $y = \alpha/x$, tem altura α/d. Logo, a área do segundo é α vezes a área do primeiro.

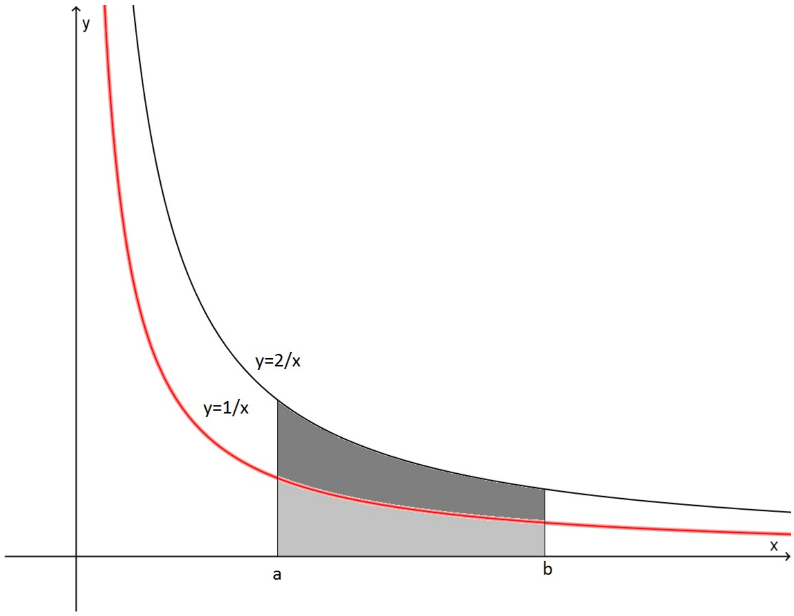


Figura 3.6: A área da faixa $\mathbb{H}(2)_a^b$ é o dobro da área da faixa $\mathbb{H}(1)_a^b$.

Toda subdivisão do intervalo do intervalo $[a, b]$ determina dois polígonos retangulares, um inscrito na faixa $\mathbb{H}(1)_a^b$ e o outro inscrito na faixa $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Segue-se que a área do segundo é α vezes a área do primeiro. Concluímos que $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] = \alpha \cdot A[\mathbb{H}(1)_a^b]$, pois são dois números reais com as mesmas aproximações inferiores.

Exemplo 3.6 Vamos calcular uma aproximação inferior para a área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(5)_1^3$ decompondo o intervalo $[1, 3]$ em oito partes iguais.

Usando o resultado do teorema 3.1, temos $A[\mathbb{H}(5)_1^3] = 5 \cdot A[\mathbb{H}(1)_1^3]$. Do exemplo 3.5, segue que ao dividir o intervalo $[1, 3]$ em oito partes iguais a área da faixa de hipérbole $A[\mathbb{H}(1)_1^3]$ é aproximadamente $1,019$. Assim $A[\mathbb{H}(5)_1^3] = 5 \cdot 1,019 = 5095$. Logo, uma aproximação inferior para área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(5)_1^3$ é 5095.

Teorema 3.2 *Seja qual for o número real, $k > 0$, as faixas $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ e $\mathbb{H}(\alpha)_{ka}^{kb}$ têm a mesma área.*

Demonstração: Primeiramente, vamos observar o seguinte fato. Dado um retângulo inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)$ cuja base é o seguimento $[c, d]$ do eixo das abscissas, o retângulo inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)$ e com base no seguimento $[ck, dk]$ tem mesma área que o anterior.

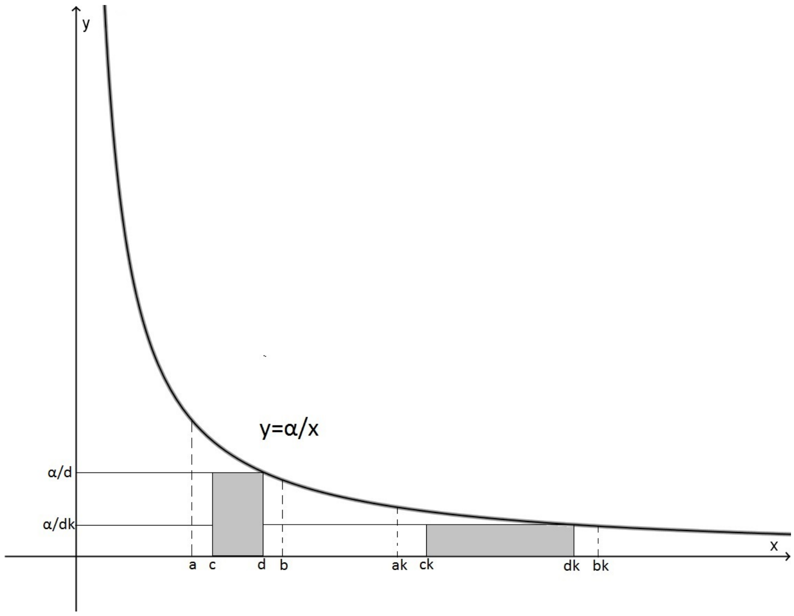


Figura 3.7: Área dos retângulos inscritos na faixa $\mathbb{H}(\alpha)$.

Assim, a área do primeiro é igual a

$$(d - c) \cdot \frac{\alpha}{d} = \alpha - \frac{\alpha c}{d},$$

enquanto a área do segundo é

$$(dk - ck) \cdot \frac{\alpha}{dk} = \alpha - \frac{\alpha ck}{dk} = \alpha - \frac{\alpha c}{d}.$$

Consideremos agora um polígono retangular P, inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto, um polígono retangular P', inscrito na faixa $\mathbb{H}(\alpha)_{ak}^{bk}$.

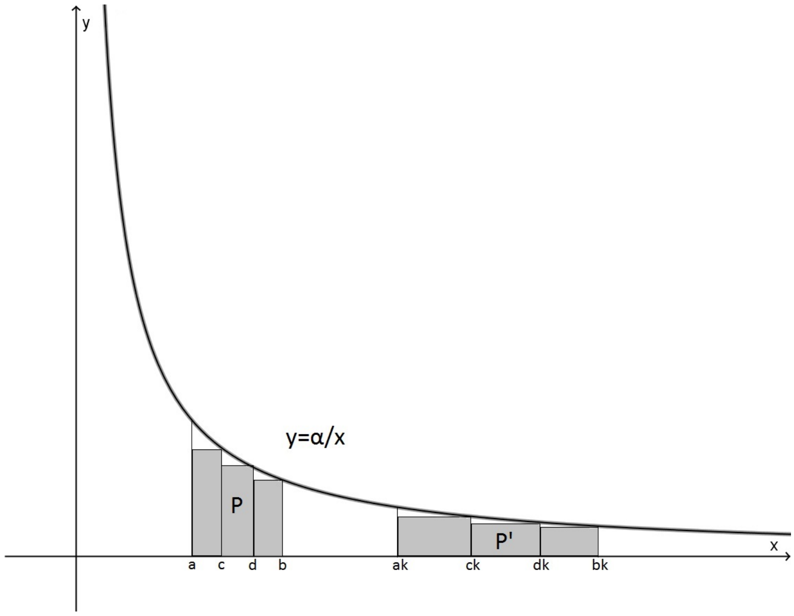


Figura 3.8: Polígonos P e P' inscritos nas faixas $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$ e $\mathbb{H}(\alpha)_{ak}^{bk}$.

Cada um dos retângulos que compõem P' tem a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo, a área de P' é igual à de P.

Concluímos, assim, que para cada polígono retangular inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$, existe um inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_{ak}^{bk}$ com a mesma área. Analogamente dividindo por k, veríamos que, para cada polígono retangular Q' inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_{ak}^{bk}$, existe outro Q, de mesma área, inscrito em $\mathbb{H}(\alpha)_a^b$. Isso significa que as áreas dessas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e portanto, são iguais.

Exemplo 3.7 Vamos calcular uma aproximação inferior para a área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(1)_3^9$.

Primeiramente, veja que $A[\mathbb{H}(1)_3^9] = A[\mathbb{H}(1)_{1\cdot 3}^{3\cdot 3}]$, usando o resultado do teorema 3.2, obtemos $A[\mathbb{H}(1)_3^9] = A[\mathbb{H}(1)_1^3]$, do exemplo 3.5, segue que $A[\mathbb{H}(1)_1^3]$ é aproximadamente $1,019$. Logo, uma aproximação inferior para área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}(1)_3^9$ é $1,019$.

O Teorema 3.2 é considerado a propriedade fundamental das faixas de hipérbole e traz consigo uma consequência direta que nos permite restringir nosso estudo somente as áreas das faixas de hipérbole da forma $\mathbb{H}(\alpha)_1^c$, pois

$$A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] = A[\mathbb{H}(\alpha)_1^{b/a}] = A[\mathbb{H}(\alpha)_1^c], \text{ onde } c = b/a.$$

Outro fato que podemos verificar geometricamente sem dificuldade é que se $a < b < c$, então $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] + A[\mathbb{H}(\alpha)_b^c] = A[\mathbb{H}(\alpha)_a^c]$.

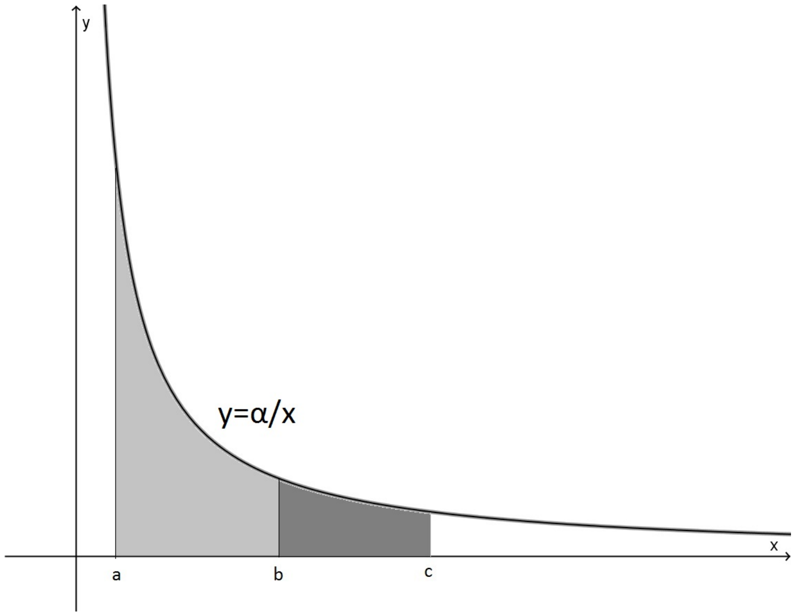


Figura 3.9: $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] + A[\mathbb{H}(\alpha)_b^c] = A[\mathbb{H}(\alpha)_a^c]$.

A fim de manter a validade da igualdade acima para quaisquer a, b e c reais positivos, convencionaremos que $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^a] = 0$ e $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] = -A[\mathbb{H}(\alpha)_b^a]$. Essa última convenção implica considerar áreas negativas. Assim, $A[\mathbb{H}(1)_1^2] = -A[\mathbb{H}(1)_2^1]$. Isto contraria a tradição, mas em compensação, a igualdade $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] + A[\mathbb{H}(\alpha)_b^c] = A[\mathbb{H}(\alpha)_a^c]$ torna-se válida sem restrições.

Definição 3.3 *Uma função real $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:*

1. *F é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$;*

2. *$F(xy) = F(x) + F(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.*

Teorema 3.3 $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *definida por* $\log(x) = \alpha \cdot A[\mathbb{H}(1)_1^x]$, *onde α é uma constante positiva é uma função logarítmica.*

Demonstração: Devemos mostrar que a função $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $\log(x) = \alpha \cdot A[\mathbb{H}(1)_1^x]$ goza das propriedades da Definição 3.3. Começaremos provando que

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Ora, como vimos anteriormente $A[\mathbb{H}(\alpha)_a^b] + A[\mathbb{H}(\alpha)_b^c] = A[\mathbb{H}(\alpha)_a^c]$ e $\mathbb{H}(\alpha)_{ak}^{bk} = \mathbb{H}(\alpha)_a^b$, logo $\log(xy) = \alpha \cdot A[\mathbb{H}(1)_1^{xy}] = \alpha(A[\mathbb{H}(1)_1^x] + A[\mathbb{H}(1)_x^{xy}]) = \alpha(A[\mathbb{H}(1)_1^x] + A[\mathbb{H}(1)_1^y]) = \alpha A[\mathbb{H}(1)_1^x] + \alpha A[\mathbb{H}(1)_1^y] = \log(x) + \log(y)$.

Agora, provaremos que log é uma função crescente. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, dizer que $x < y$ significa afirmar que existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que $\log(y) = \log(ax) = \log(a) + \log(x)$, como $a > 1$, temos $\log(a) = \alpha A[\mathbb{H}(1)_1^a] > 0$. Portanto, $\log(x) < \log(y)$. Isto completa a demostração do teorema e nos garante que log é uma função logarítmica, ou seja, um sistema de logaritmos.

3.3.2 Propriedades da função logarítmica

Seja $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica, são válidas as seguintes propriedades:

Propriedade 3.1 *Uma função logarítmica* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.*

Demonstração: Sejam x e $y \in \mathbb{R}^+$, tal que $x \neq y$, então $x < y$ ou $y < x$. Usando o fato de que a função logarítmica é crescente, temos que $\log(x) < \log(y)$ ou $\log(y) < \log(x)$, ou seja, $\log(x) \neq \log(y)$. Logo, dados $x \neq y \in \mathbb{R}^+$ conclui-se que $\log(x) \neq \log(y)$, portanto, a função *log* é injetiva.

Propriedade 3.2 *O logaritmo de 1 é zero.*

Demonstração: Usando o fato que a função logarítmica transforma produtos em somas $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ e fazendo $x = y = 1$, obtemos $\log(1 \cdot 1) = \log(1) + \log(1)$, então $\log(1) = 2\log(1)$, logo $\log(1) = 0$.

Propriedade 3.3 *Os números maiores que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

Demostração: Novamente usando o fato de que a função logarítmica é crescente, de $0 < x < 1 < y$, resulta que $\log(x) < \log(1) < \log(y)$, isto é $\log(x) < 0 < \log(y)$.

Propriedade 3.4 *Para todo $x > 0$, tem-se* $\log(1/x) = -\log(x)$.

Demostração: Sabemos que $x \cdot (1/x) = 1$, logo temos que $\log(x \cdot (1/x)) = log(1)$. Pela Propriedade 2, obtemos $\log(x) + \log(1/x) = 0$. Portanto $\log(1/x) = -\log(x)$.

Propriedade 3.5 *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$, *vale* $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$.

Demonstração: Partindo de $\log(x/y)$, obtemos $\log(x/y) = \log(x \cdot (1/y)) = \log(x) + \log(1/y)$. Aplicando a Propriedade 4, segue que $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$.

Propriedade 3.6 *Para todo* $x \in \mathbb{R}^+$ *e todo número racional* $r = p/q$ *tem-se* $\log(x^r) = r \cdot \log(x)$.

Demostração: Em primeiro lugar, vamos mostrar que $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso vamos usar o princípio da indução finita. Seja $P(n)$ a proposição dada por $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$. Temos que:

1. Para $n = 1$, temos $\log(x^1) = log(x) = 1 \cdot \log(x)$. Portanto $P(1)$ é verdadeira;

2. Suponhamos que $P(k) : \log(x^k) = k \cdot \log(x)$ seja verdadeira para algum número k, vamos mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeira.
   De fato $\log(x^{k+1}) = \log(x \cdot (x^k))$, como log é uma função logarítmica, segue que $\log(x \cdot (x^k)) = \log(x) + \log(x^k)$. Usando a hipótese de indução $\log(x^k) = k \cdot \log(x)$ acima, obtemos

   $$\log(x^{k+1}) = \log(x) + \log(x^k) = \log(x) + k \cdot \log(x) = (k+1) \cdot \log(x).$$

   Logo $P(k+1)$ é verdadeira. Assim $P(n) : \log(x^n) = n \cdot \log(x)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a propriedade 6 vale quando $r = n$ é um número natural.

Ela vale também quando $r = 0$ pois, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $x^0 = 1$, logo $\log(x^0) = log(1) = 0 = 0 \cdot \log(x)$.

Consideremos agora o caso em que $r = -n, n \in \mathbb{N}$, isto é onde r é um inteiro negativo. Como $\log(x^{-n}) = \log(1/x^n)$, vale a Propriedade 4, então $\log(x^{-n}) = \log(1/x^n) = -\log(x^n) = -n \cdot \log(x)$. Portanto, a Propriedade 6 também é válida quando r é inteiro.

Finalmente, o caso geral, em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Logo, $q \cdot \log(x^r) = \log((x^r)^q)$, pois q é natural e como foi demonstrado acima a Propriedade 6 é válida para números naturais. Por outro lado, $\log((x^r)^q) = \log((x^{p/q})^q) = \log(x^p) =$

$p \cdot \log(x)$, pois p é inteiro e como foi demonstrado acima a Propriedade 6 é válida para números inteiros. Juntando as duas equações obtemos $q \cdot \log(x^r) = p \cdot \log(x)$, então $\log(x^r) = p/q \cdot \log(x)$, ou seja, $\log(x^r) = r \cdot \log(x)$. Portanto, a Propriedade 6 também é válida quando r é racional.

Essa propriedade também é verdadeira quando $r \in \mathbb{R}$ e sua demonstração é feita por meio do cálculo infinitesimal, ferramenta que se distancia do objetivo deste trabalho. Porém a critério de curiosidade o leitor poderá encontrá-la em diversos livros de análise.

Propriedade 3.7 *Uma função logarítmica* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é ilimitada, superiormente e inferiormente.*

Demonstração: Dados arbitrariamente números reais α e β, devemos mostrar que é sempre possível achar números positivos x e y tais que $\log(x) < \alpha$ e $\log(y) > \beta$.

Primeiramente, vamos provar que a função logarítmica $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente, para isso, suponhamos que seja dado um número real β e que sejamos desafiados a achar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\log(x) > \beta$. Procederemos da seguinte maneira: tomamos um número natural n tal que $n > \beta/\log(2)$. Pela Propriedade 3, $\log(2)$ é positivo, então $n \cdot \log(2) > \beta$. Usando a Propriedade 5, vemos que $n \cdot \log(2) = \log(2^n)$. Portanto, $\log(2^n) > \beta$. Tomando $x = 2^n$, obtemos $\log(x) > \beta$. Assim, log é ilimitada superiormente.

Para provar que log também é ilimitada inferiormente, basta lembrar da Propriedade 4, ou seja, $\log(1/x) = -\log(x)$. Suponhamos então que seja dado um número real α, pelo que foi demonstrado acima (log é ilimitada superiormente), então podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\log(x) > -\alpha$, ou seja, $-\log(x) < \alpha$. Fazendo $y = 1/x$, teremos $\log(y) = \log(1/x) = -\log(x) < \alpha$, então $\log(y) < \alpha$. Portanto, log é ilimitada inferiormente.

3.3.3 A base de um sistema de logaritmos

Seja $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $\log(x) = \alpha \cdot A[\mathbb{H}(1)_1^x]$ uma função logarítmica. Existe um único $a > 0$ cujo logaritmo é igual a 1, ou seja, $log(a) = 1$. Esse número a é chamado de *base* do sistema de logaritmos.

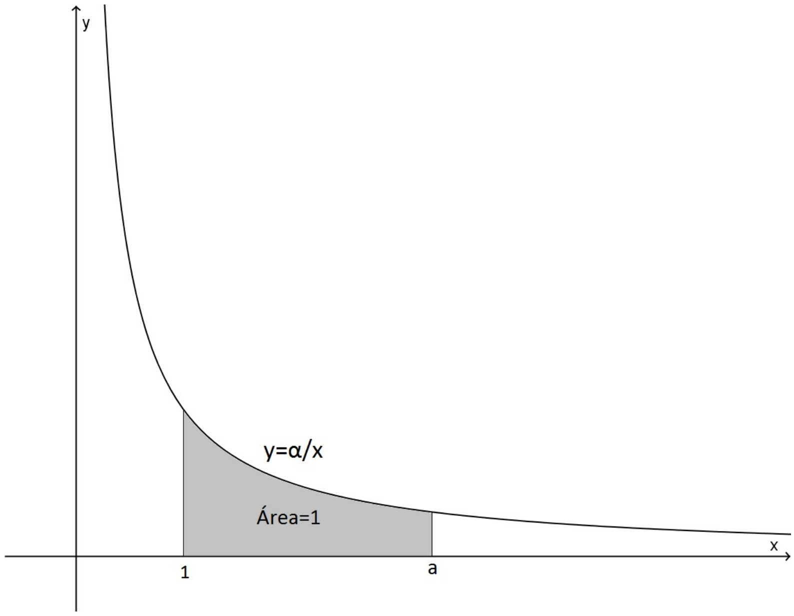


Figura 3.10: Base de um sistema de logaritmos.

Para cada valor de α escolhido temos um novo sistema de logaritmos. Em particular, tomando a escolha mais natural possível $\alpha = 1$, obtemos a função $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $\ln(x) = A[\mathbb{H}(1)_1^x]$ que é chamada de *logaritmo natural*.

A base do logaritmo natural é representada pela letra e. Então as afirmações "$\ln(x) = 1$"e "$x = e$"são equivalentes. Pode-se demonstrar que o número e é irracional, logo seu desenvolvimento decimal não termina nem é periódico. Um valor aproximado de e, com 12 algarismos decimais exatos, é $2,718281828459$.

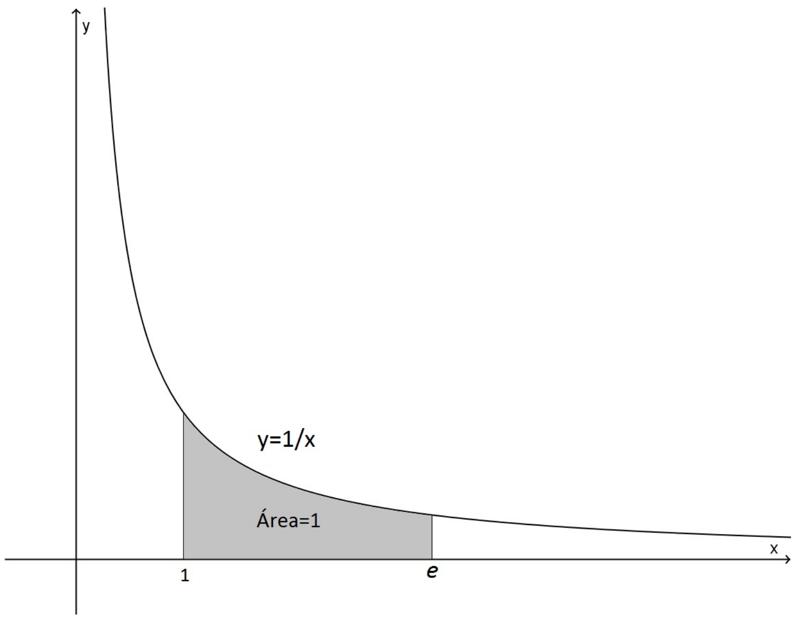


Figura 3.11: Base dos logaritmos naturais.

Como $\log(x) = \alpha \cdot A[\mathbb{H}(1)_1^x]$ e $\ln(x) = A[\mathbb{H}(1)_1^x]$, segue-se que $\log(x) = \alpha \cdot \ln(x)$. Usualmente a notação para logaritmo de base a de um número $x > 0$ é:

$$\log_a(x).$$

Se a é base de um sistema de logaritmos, então $\log_a(a) = \alpha \cdot \ln a$. Uma vez que a é a base do sistema, segue que $\log_a(a) = 1$, então $1 = \alpha \cdot \ln a$. Portanto, $\alpha = \dfrac{1}{\ln a}$.

Desta maneira, $\log_a(x)$ é a área da faixa de hipérbole $y = 1/(x \cdot \ln a)$ compreendida entre 1 e x. Esta definição é, como vemos, muito complicada. Melhor será recordar que:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a},$$

sendo a base $a > 0$ caracterizada pelo fato:

$$\log_a a = 1.$$

3.3.4 Mudança de base

Teorema 3.4 *Sejam a e b números reais maiores do que 1. Para todo $x > 0$ tem-se $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$.*

Demonstração: Dadas duas funções logarítmicas $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ e $\log_b(x) = \dfrac{\ln x}{\ln b}$, temos que $\ln x = \log_a(x) \cdot \ln a$, então

$$\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\log_a(x) \cdot \ln a}{\ln b} = \log_a(x) \cdot \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Como $\log_b(a) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$, segue que $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$ para todo $x > 0$.

Exemplo 3.8 Sabendo-se que $\log_{10} 2 \approx 0,301$ e $\log_{10} 3 \approx 0,477$. Vamos calcular o valor aproximado de $\log_9 512$.

Usando a mudança de base quando $a = 9$, $b = 10$ e $x = 512$, temos

$$\log_{10}(512) = \log_9(512) \cdot \log 10(9),$$

então $\log_9(512) = \dfrac{\log_{10}(512)}{\log_{10}(9)}$. Como $512 = 2^9$ e $9 = 3^2$, obtemos

$$\log_9(512) = \frac{\log_{10}(2^9)}{\log_{10}(3^2)} = \frac{9\log_{10}(2)}{2\log_{10}(3)} \approx \frac{9 \cdot 0,301}{2 \cdot 0,477} = \frac{2,709}{0,954} = 2,839.$$

Portanto, um valor aproximado para $\log_9(512)$ é $2,839$.

3.4 Aplicações

Apesar da descoberta dos logaritmos ter se dado simplesmente para facilitar cálculos, atualmente a sua grande utilidade é a aplicação em fenômenos em que o aumento ou a diminuição de uma grandeza se faz proporcionalmente ao valor da grandeza num dado instante. É muito mais atraente para o aluno do ensino médio lidar com situações contextualizadas envolvendo um novo conceito que ele está aprendendo, pois isso motiva o desenvolvimento do tema e torna o conhecimento significativo para quem esta aprendendo. Por isso, apresentamos a seguir algumas aplicações contextualizadas da função logarítmica.

3.4.1 Juros compostos

Vamos considerar o seguinte problema: "empregando-se um capital c a juros compostos de 20% ao ano, em quanto tempo este será dobrado?". Vamos agora resolvê-lo.

O montante no regime de juros compostos é dado por $M(t) = c(1+i)^t$, onde $M(t)$ é o montante após t capitalizações, c é o capital, i taxa unitária e t é número de capitalizações. Através do enunciado do problema acima, obtemos $i = 20/100 = 0,2$ e $M(t) = 2c$. Logo

$$2c = c(1+0,2)^t,$$

então

$$2 = 1,2^t.$$

Aplicando a função logarítmica e suas propriedades temos

$$\ln 2 = t \cdot \ln(1,2),$$

como $\ln 2$ e $\ln(1,2)$ são aproximadamente $0,693$ e $0,182$, temos que

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1,2)} \approx \frac{0,693}{0,182} = 3,807.$$

Assim, o tempo necessário para dobrar o capital é de aproximadamente $3,807$ anos.

3.4.2 Desintegração radioativa

> Num castelo inglês, existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa $M = M(t)$ de C^{14} hoje existente na mesa é $0,894$ vezes a massa $M(t)$ de C^{14} que existia num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa. Sabendo que a constante de desintegração do C^{14} é $0,00012444$ e que M_0 é a massa de C^{14} que existia na mesa quando ela foi feita, há t anos. Essa mesa é mesmo de fato a famosa Távola Redonda do rei Artur? (LIMA, 2013, p.125)

Usando a expressão da desintegração radioativa que é dada por $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$, em que $M(t)$ é a massa no instante t, M_0 é a massa inicial e α é a constante de desintegração. Observando o enunciado do problema acima, obtemos $M(T) = 0,894M_0$ e $\alpha = 0,00012444$. Logo

$$0,894M_0 = M_0 e^{-0,00012444t},$$

então

$$0,894 = e^{-0,00012444t}.$$

Procedendo como na aplicação anterior, temos

$$\ln 0,894 = -0,00012444t \cdot \ln e,$$

como $\ln e$ e $\ln 0,894$ são 1 e aproximadamente $-0,1121$, temos que

$$t = -\frac{\ln 0,894}{0,00012444 \cdot \ln e} \approx \frac{0,1121}{0,00012444} = 901.$$

Portanto, ela possui aproximadamente 901 anos e não pode ser considerada a mesa da Távola Redonda, pois a mesa do rei Artur tem mais de 1500 anos.

3.4.3 Resfriamento de um corpo

> Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30°. A água que fervia numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo, tem temperatura de 65°. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38°? (LIMA, 2013, p.126)

Usando a expressão do resfriamento de um corpo que é dada por $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$, em que $D(t)$ é a diferença de temperatura no instante t, D_0 é a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e α é uma constante que depende do material de que é constituída a superfície do objeto.

No momento em que se apagou o fogo ($t = 0$), a temperatura da água era de 100°C e a do ambiente 30°C. Logo $D_0 = 100 - 30 = 70$. Passado t minutos, a diferença da temperatura da água para a do meio ambiente é dada por $D(t) = 70 \cdot e^{-\alpha t}$. Para determinarmos a constante α, usamos a informação de que

$$D(5) = 70 \cdot e^{-5\alpha} = 65 - 30 = 35.$$

Portanto, $e^{-5\alpha} = 35/70 = 1/2$. Tomando logaritmos naturais, vem

$$-5\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

logo

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0,698}{5} = 0,1386.$$

Queremos saber o valor de t para o qual

$$D(t) = 70 \cdot e^{-0,1386t} = 38 - 30 = 8.$$

Novamente tomamos logaritmos para resolver a equação $70 \cdot e^{-0,1386t} = 8$, obtendo

$$-0,1386t = \ln\left(\frac{8}{70}\right) = -\ln\left(\frac{70}{8}\right)$$

donde

$$t = \frac{\ln\left(\frac{70}{8}\right)}{0,1386} = \frac{2,1691}{0,1386} = 15,65.$$

Assim, a água atingirá a temperatura de 38°C após 15,65 minutos de ter apagado o fogo.

3.4.4 O jogo de xadrez

De acordo com a lenda[1], o jogo de xadrez foi inventado por Sessa. O mesmo deu-o de presente ao rei, que havia perdido seu filho em uma batalha. O rei, que andava muito desanimado, acabou se interessando pelo jogo. Tempos depois, o rei chamou Sessa ao seu palácio e pediu para que ele escolhesse o que bem desejasse como recompensa, uma vez que o jogo teria trazido uma nova razão de viver para o rei.

Por várias vezes, Sessa recusara a oferta do rei, mas o soberano continuava a insistir para que Sessa escolhesse a sua recompensa. Foi então que Sessa pediu ao rei, como recompensa, 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 grãos de trigo pela terceira casa, e assim por diante, ou seja, a cada casa[2] a quantidade de grãos de trigo dobraria.

O rei pensou por instante e, logo depois, disse a Sessa que retornasse três dias depois para receber seu saco de trigo. O rei pediu que os matemáticos da corte calculassem a quantidade de grãos de trigo. Três dias mais tarde, Sessa voltou para receber a recompensa e os matemáticos apresentaram ao rei a dívida[3] de $2^{64} - 1$ grãos de trigo para com Sessa. Sabendo que $\log_{10}(2) = 0,301$, aproximadamente, então, quantos dígitos tem o número que expressa a dívida do rei em grãos de trigo?

[1] O leitor que se interessar poderá ler este e outros contos no livro "O homem que calculava"de Malba Tahan.

[2] Um tabuleiro de xadrez tem 64 casas.

[3] O cálculo da divida pode ser feito através da soma dos finitos termos de uma progressão geométrica.

Podemos utilizar os logaritmos para ter uma noção da grandeza deste número. Sabemos que o número é relativamente grande, então, podemos pensar apenas em 2^{64}. Fazer uma multiplicação de 64 termos não é muito simples, portanto, seria interessante transformar esta multiplicação em uma soma.

Para transformarmos uma multiplicação em uma soma, podemos utilizar os logaritmos. Vejamos:

$$\log_{10}(2^{64}) = 64 \cdot \log_{10}(2) = 64 \cdot 0,301 = 19,264,$$

assim, 2^{64} é aproximadamente $10^{19,254}$.

Sabemos que o nosso número está entre 10^{19} e 10^{20}. Como 10^{19} é um número com 20 dígitos e 10^{20} é um número com 21 dígitos, então o número que procuramos tem 20 dígitos. Um número com 20 dígitos está na classe dos quintilhões.

Os matemáticos da corte disseram ao rei que, caso todo reino fosse coberto de plantações de trigo, as safras colhidas durante 2.000 anos não seriam suficientes para pagar Sessa. O rei, para tentar sanar sua dívida, convidou Sessa a participar do seu reinado e deu-lhe diversos títulos a fim de tentar diminuir sua dívida impagável. Sessa, por sua vez, perdoou o rei e recebeu títulos de nobreza e tudo que o dinheiro pudesse comprar para o resto de sua vida.

Apenas por curiosidade, o número de grãos de trigo que o rei devia a Sessa era de exatamente 18446744073709551615 unidades.

Capítulo 4

Uma nova abordagem para o ensino da função logarítmica

Neste capítulo, propomos uma nova abordagem para o ensino da função logarítmica no Ensino Médio, por meio de uma sequência didática contextualizada que proporcione ao educando uma aprendizagem significativa. A contextualização será feita mediante a utilização de exemplos práticos e também dentro da própria matemática, utilizando o conceito de áreas, assunto já conhecido pelos alunos.

4.1 O logaritmo natural

Observe o gráfico da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$, abaixo:

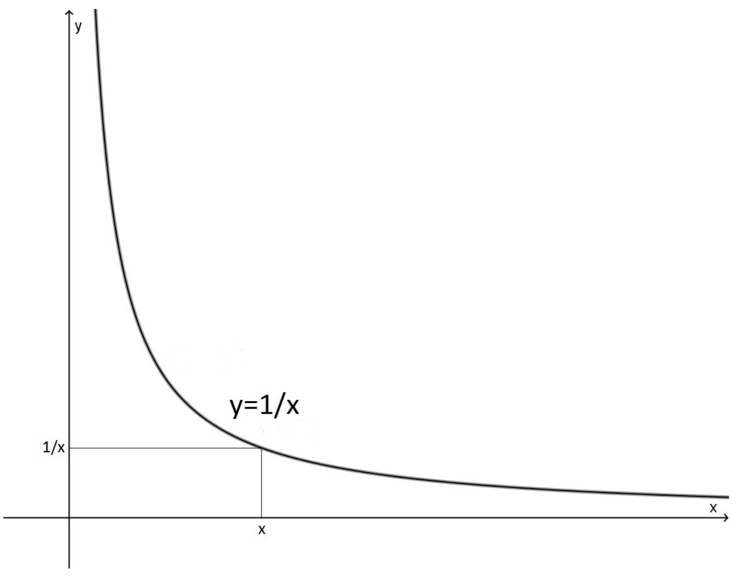


Figura 4.1: Gráfico da função $f(x) = 1/x$.

A partir do gráfico de f acima, definimos a função *logaritmo natural* como $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ cuja lei de correspondência é dada por

$$\ln(x) = \begin{cases} A_1^x, & x \geq 1 \\ -A_x^1, & 1 > x > 0 \end{cases},$$

onde A_1^x é área do gráfico de $y = 1/x$ compreendida entre 1 e x, e A_x^1 é área do gráfico de $y = 1/x$ compreendida entre x e 1, como podemos ver na Figura 4.2.

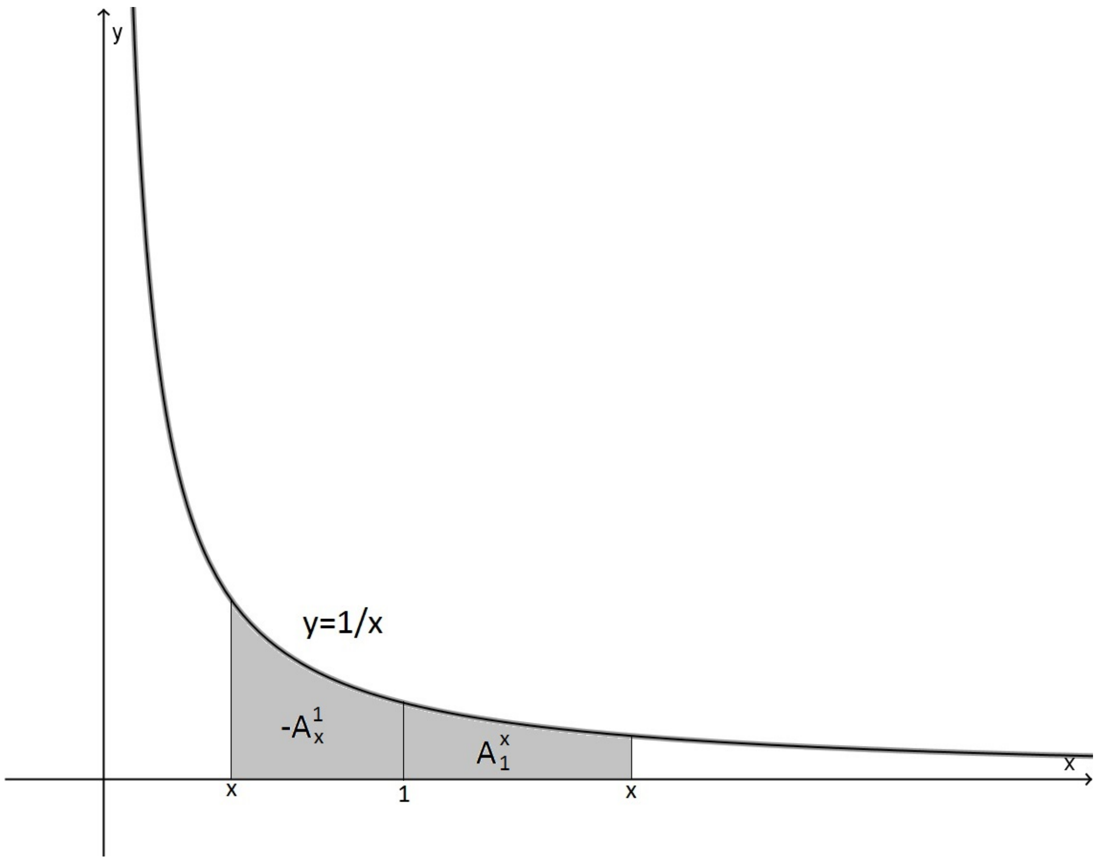


Figura 4.2: Significado geométrico do logaritmo natural.

O cálculo da área de uma curva é sempre um desafio para quem almeja calculá-la. Um caminho para encontrar aproximações para a área de A_1^x é dividi-la em retângulos de bases iguais inscritos em $y = 1/x$ e calcular uma aproximação por falta. Quanto menor for a base adotada para os retângulos inscritos, menor será a diferença entre o valor aproximado e o valor exato da área procurada.

Exemplo 4.1 Vamos calcular um valor aproximado para $\ln(2)$.

Pela definição de logaritmo natural, temos $\ln(2) = A_1^2$. Logo devemos calcular uma aproximação para A_1^2. Dividindo o intervalo $[1,2]$ em quatro partes iguais, obtemos $\dfrac{2-1}{4} = 1/4 = 0,25$, assim, a base de cada retângulo mede $0,25$ e a altura é o vértice direito que toca $y = 1/x$.

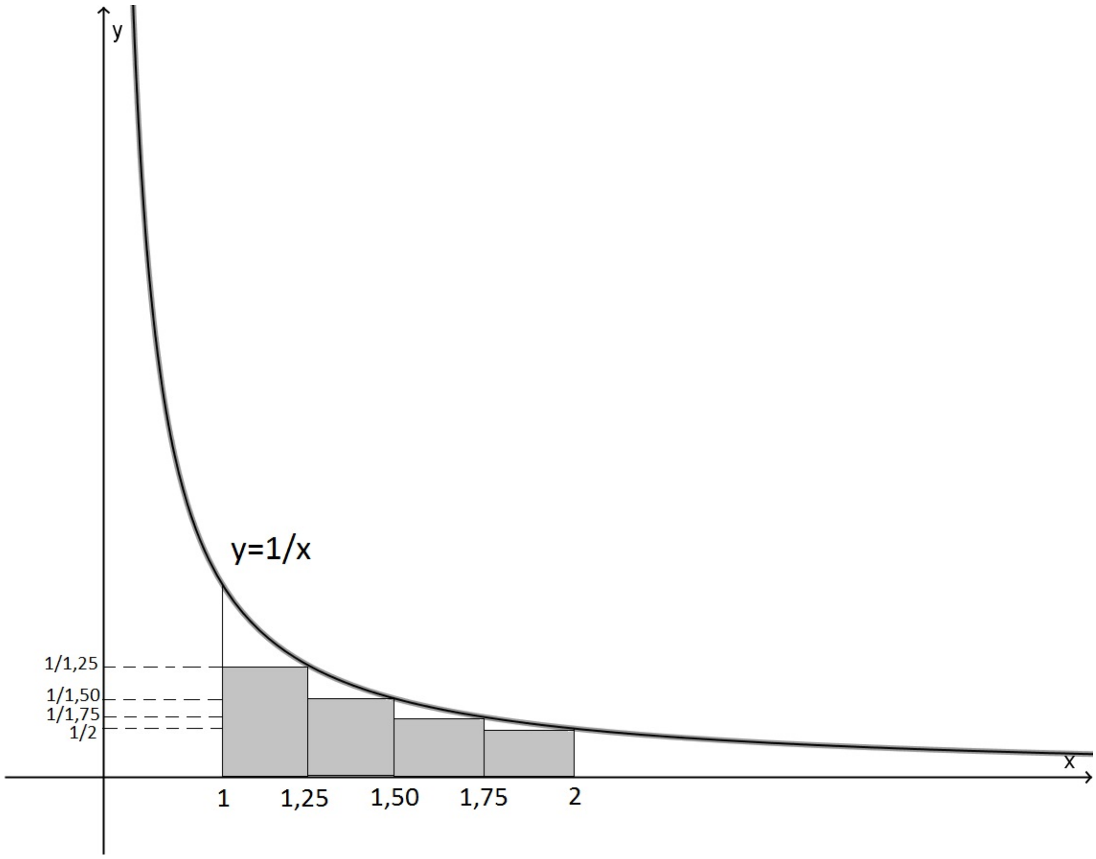


Figura 4.3: Primeira aproximação para ln(2).

Calculando com ajuda de uma calculadora, a área dos quatro retângulos da Figura 4.3, obtemos

$$0,25 \times \frac{1}{1,25} + 0,25 \times \frac{1}{1,50} + 0,25 \times \frac{1}{1,75} + 0,25 \times \frac{1}{2} = 0,6345.$$

Logo, uma aproximação para ln(2) é 0,6345.

Para melhorarmos a aproximação obtida para ln(2), devemos reduzir a base adotada para os retângulos inscritos. Dividindo o intervalo $[1,2]$ em oito partes iguais, obtemos $\dfrac{2-1}{8} = 1/8 = 0,125$, assim, a base de cada retângulo mede $0,125$ e a altura é o vértice direito que toca $y = 1/x$.

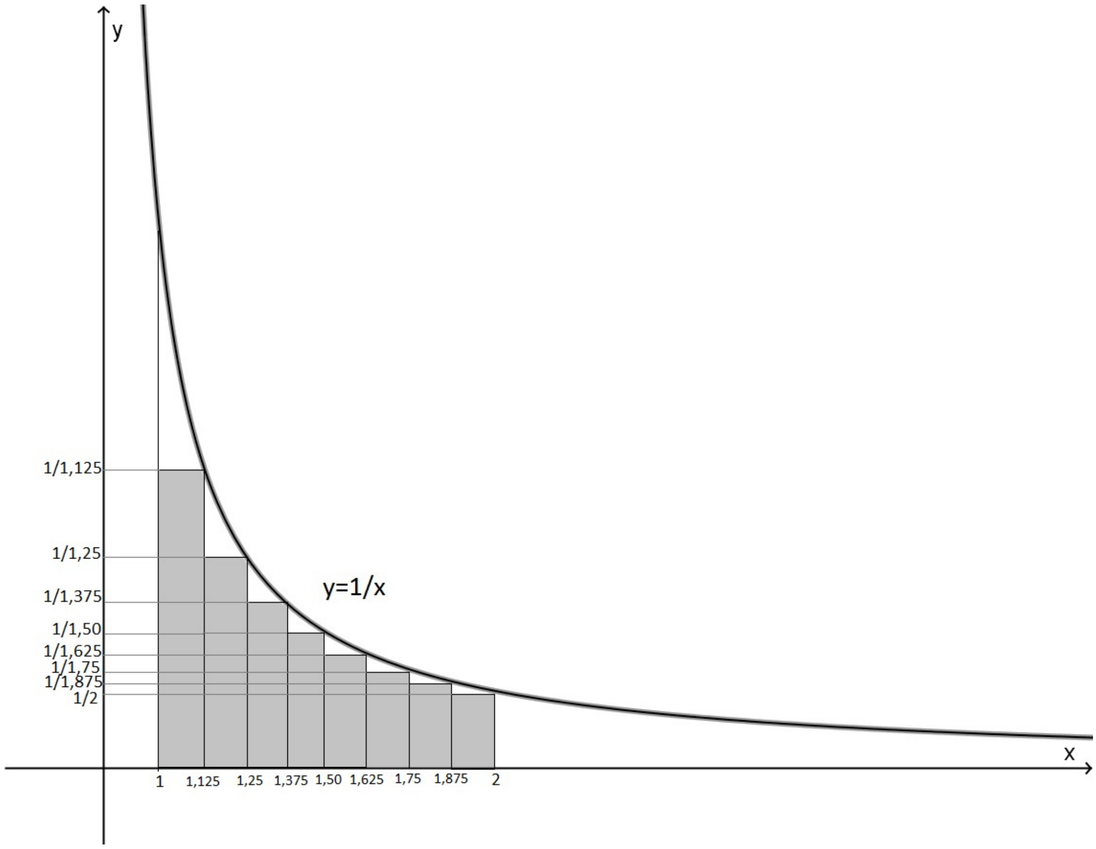


Figura 4.4: Segunda aproximação para ln(2).

Utilizando uma calculadora, podemos calcular a área dos oito retângulos acima. Assim obtemos

$$0,125 \times \frac{1}{1,125} + 0,125 \times \frac{1}{1,25} + 0,125 \times \frac{1}{1,375} + 0,125 \times \frac{1}{1,50} +$$

$$0,125 \times \frac{1}{1,625} + 0,125 \times \frac{1}{1,75} + 0,125 \times \frac{1}{1,875} + 0,125 \times \frac{1}{2} = 0,6628.$$

Assim, uma melhor aproximação para ln(2) é 0,6628.

Agora que já compreendemos o significado geométrico da função logaritmo natural e sabemos calcular aproximações por falta para ela. Podemos nos concentrar nas propriedades advindas dos logaritmos naturais. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 4.2 Vamos verificar que as faixas A_1^2 e A_2^4 tem a mesma área.

Calculando as aproximações inferiores para as áreas A_1^2 e A_2^4. Dividindo os intervalos $[1,2]$ e $[2,4]$ em quatro partes iguais, obtemos $\dfrac{2-1}{4} = 1/4 = 0,25$ e $\dfrac{4-2}{4} = 2/4 = 0,5$, assim, a base dos retângulos são 0,25 e 0,5 e a altura é o vértice direito que toca $y = 1/x$.

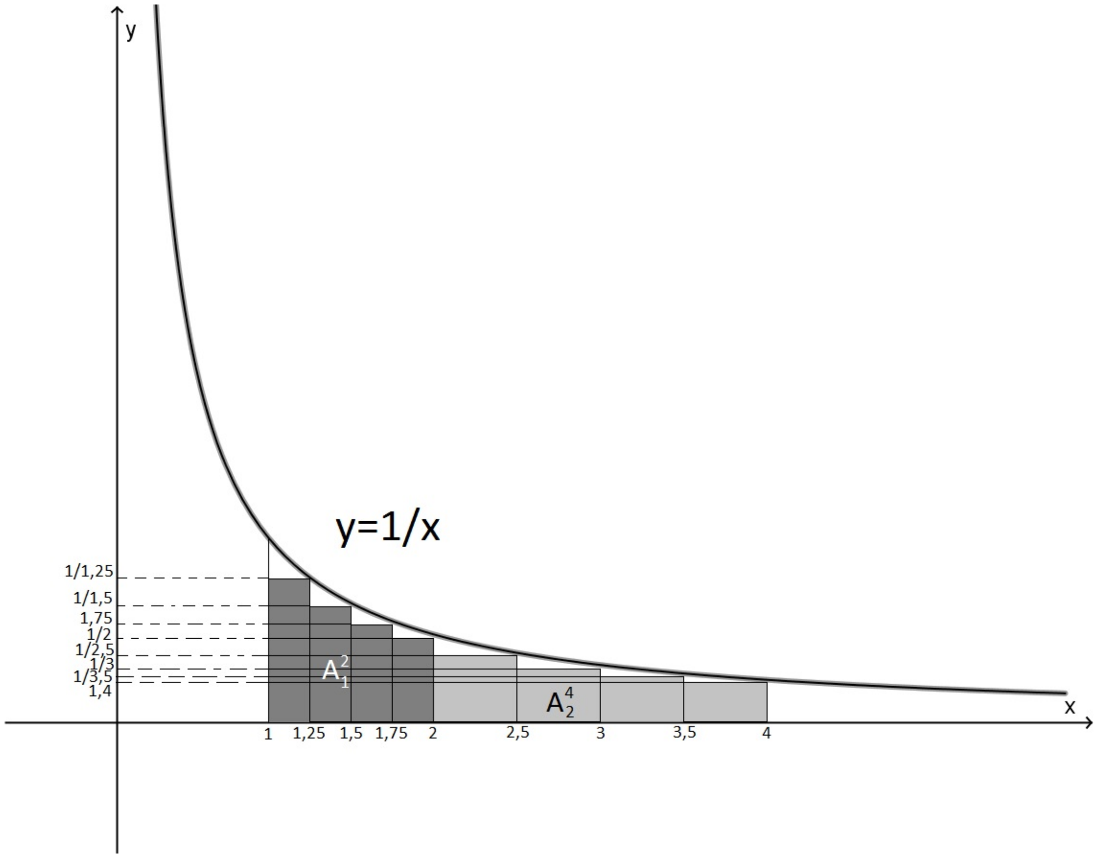


Figura 4.5: Aproximação para área das faixas A_1^2 e A_2^4.

Calculando uma aproximação inferior para a área das faixas A_1^2 e A_2^4 , obtemos

$$0,25 \times \frac{1}{1,25} + 0,25 \times \frac{1}{1,50} + 0,25 \times \frac{1}{1,75} + 0,25 \times \frac{1}{2} = 0,6345$$

e

$$0,5 \times \frac{1}{2,5} + 0,5 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{3,5} + 0,5 \times \frac{1}{4} = 0,6345.$$

Portanto, as áreas das faixas A_1^2 e A_2^4 possuem a mesma aproximação inferior 0,6345, logo é de se esperar que suas áreas sejam iguais. Esse exemplo é um caso particular do teorema a seguir.

Teorema 4.1 *Seja qual for o número real, $k > 0$, as faixas A_a^b e A_{ka}^{kb} têm a mesma área.*

O teorema acima é essencial para demonstração das propriedades dos logaritmos naturais e traz consigo uma consequência direta que nos permite restringir nosso estudo somente as áreas das faixas da forma A_1^c, pois

$$A_a^b = A_{a\cdot 1}^{a\cdot b/a} = A_1^{b/a} = A_1^c, \text{ onde } c = b/a.$$

4.2 Propriedades dos logaritmos naturais

Seja a função logaritmo natural definida por ln : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cuja lei de correspondência é dada por

$$\ln(x) = \begin{cases} A_1^x, & x \geq 1 \\ -A_x^1, & 1 > x > 0 \end{cases}.$$

São válidas as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1 *O logaritmo natural de 1 é zero.*

Usando a definição de logaritmo natural acima, segue que $\ln(1) = A_1^1$. Geometricamente A_1^1 reduz-se a segmento de reta, consequentemente, tem área igual a zero. Portanto, $\ln(1) = 0$.

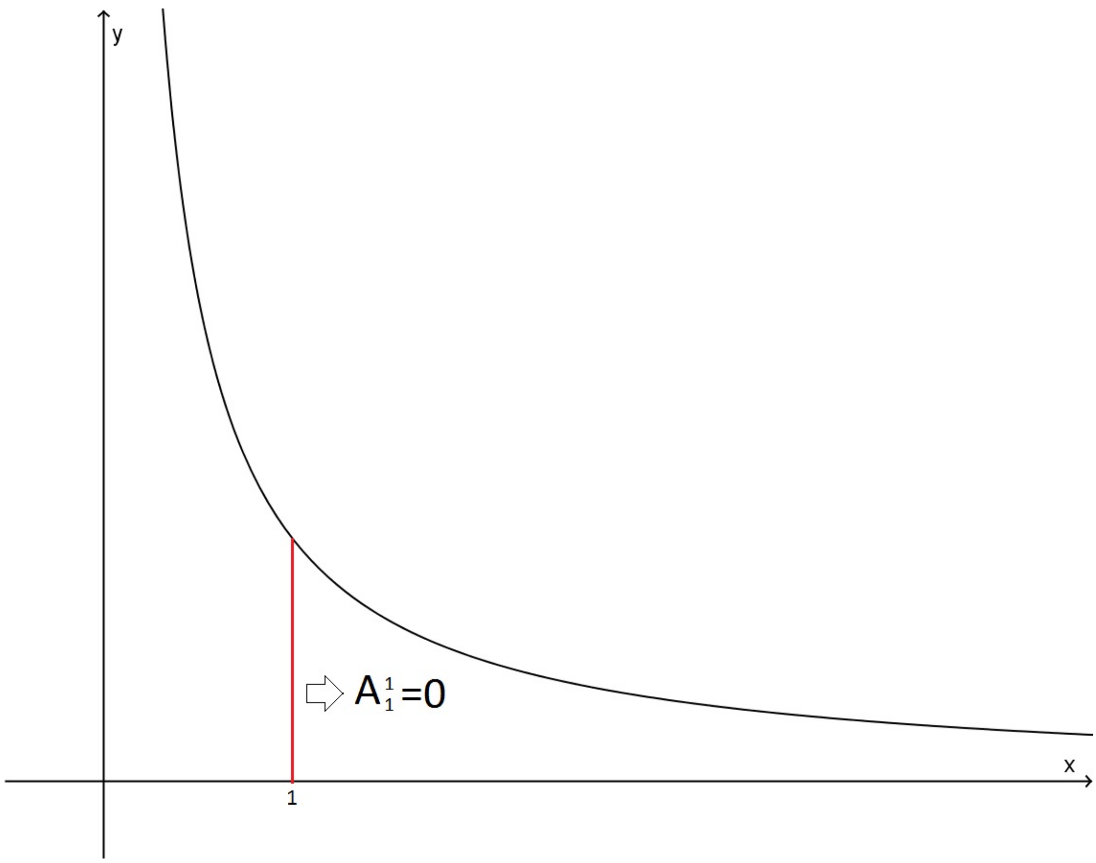


Figura 4.6: $\ln(1) = 0$

Propriedade 4.2 *Para todo a e* $b \in \mathbb{R}^+$ *tem-se* $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

A propriedade acima é considerada a mais importante dos logaritmos naturais. Ela nos garante que o logaritmo natural de um produto é igual a soma dos logaritmos dos fatores desse produto. Para melhor compreendermos o significado dessa propriedade vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 4.3 Vamos verificar que $\ln(2 \cdot 3) = \ln(2) + \ln(3)$.

Primeiramente, veja que $\ln(2 \cdot 3) = \ln(6)$, usando a definição geométrica do logaritmo natural obtemos $\ln(2 \cdot 3) = \ln(6) = A_1^6 = A_1^2 + A_2^6$, pelo teorema 4.1 segue que $A_2^6 = A_{2\cdot 1}^{2\cdot 3} = A_1^3$, logo $\ln(2\cdot 3) = A_1^2 + A_1^3 = \ln(2) + \ln(3)$. Portanto, $\ln(2\cdot 3) = \ln(2) + \ln(3)$.

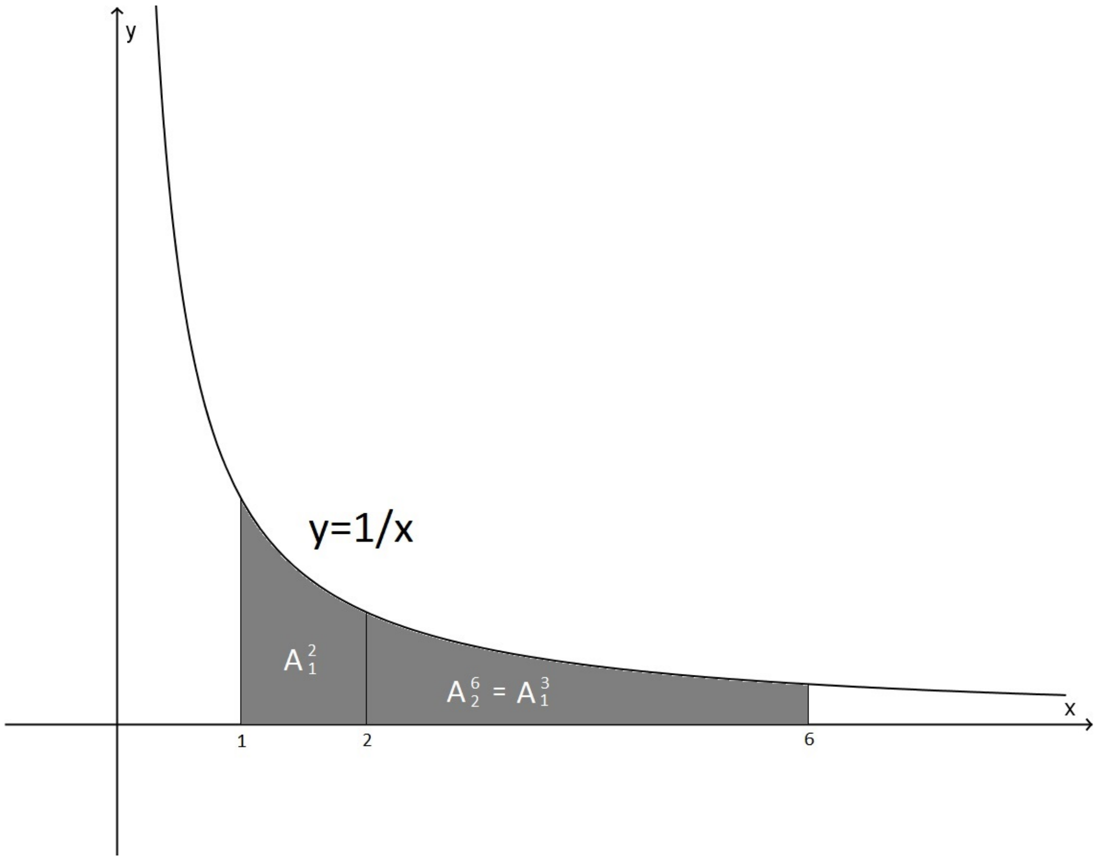


Figura 4.7: $\ln(2 \cdot 3) = \ln(2) + \ln(3)$

Propriedade 4.3 *Para todo a e $b \in \mathbb{R}^+$ tem-se* $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.

Essa propriedade nos garante que o logaritmo natural de um quociente é igual ao logaritmo natural do numerador menos o logaritmo natural do denominador. Para fixarmos melhor as ideias a respeito dessa propriedade, propomos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.4 Vamos mostrar que $\ln(4/5) = \ln(4) - \ln(5)$.

Em primeiro lugar, podemos observar facilmente que $\ln(4/5) = \ln(4 \cdot 1/5)$, usando a Propriedade 4.2 obtemos $\ln(4/5) = \ln(4 \cdot 1/5) = \ln(4) + \ln(1/5)$. Resta agora mostrar que $\ln(1/5) = -\ln(5)$, para isto observe a Figura 4.8.

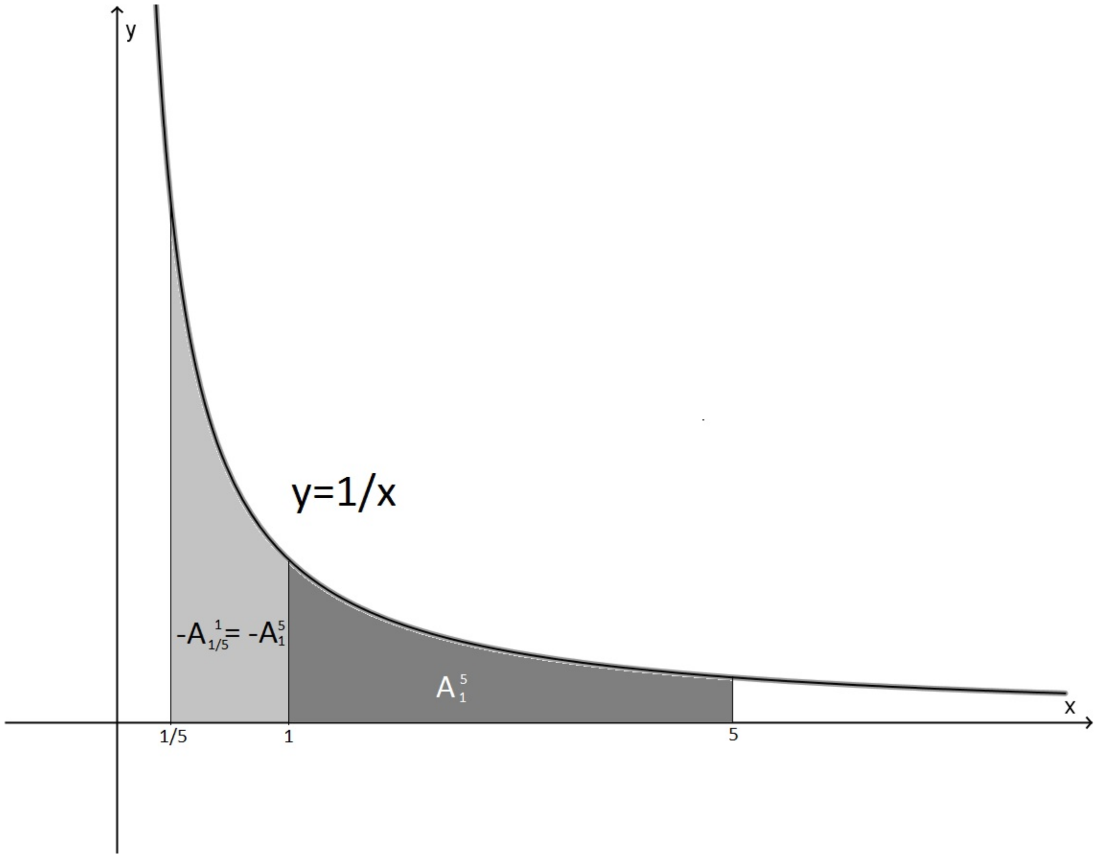


Figura 4.8: $\ln(1/5) = -\ln(5)$

Usando a definição geométrica dos logaritmos naturais e o Teorema 4.1, segue-se $\ln(1/5) = -A_{1/5}^{1} = -A_{5\cdot 1/5}^{5\cdot 1} = -A_1^5 = -\ln(5)$. Logo $\ln(4/5) = \ln(4 \cdot 1/5) = \ln(4) + \ln(1/5) = \ln(4) - \ln(5)$. Portanto, $\ln(4/5) = \ln(4) - \ln(5)$.

Propriedade 4.4 *Para todo $a \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional r tem-se $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$.*

A propriedade acima nos garante que o logaritmo natural de uma potência é igual ao produto do expoente dessa potência pelo logaritmo natural da base.

Exemplo 4.5 Vamos verificar que $\ln(5^3) = 3 \cdot \ln(5)$.

Inicialmente, temos que $\ln(5^3) = \ln(5 \cdot 5 \cdot 5)$, usando a Propriedade 4.2 obtemos $\ln(5^3) = \ln(5 \cdot 5 \cdot 5) = \ln((5 \cdot 5) \cdot 5) = \ln(5 \cdot 5) + \ln(5) = \ln(5) + \ln(5) + \ln(5)$. Portanto, $\ln(5^3) = 3 \cdot \ln(5)$.

4.3 A base dos logaritmos naturais

Seja a função logaritmo natural definida por $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cuja lei de correspondência é dada por

$$\ln(x) = \begin{cases} A_1^x, & x \geq 1 \\ -A_x^1, & 1 > x > 0 \end{cases}.$$

Existe um único $e > 0$ cujo logaritmo natural é igual a 1, ou seja, $\ln(e) = 1$. Esse número e é chamado de *base* dos logaritmos naturais.

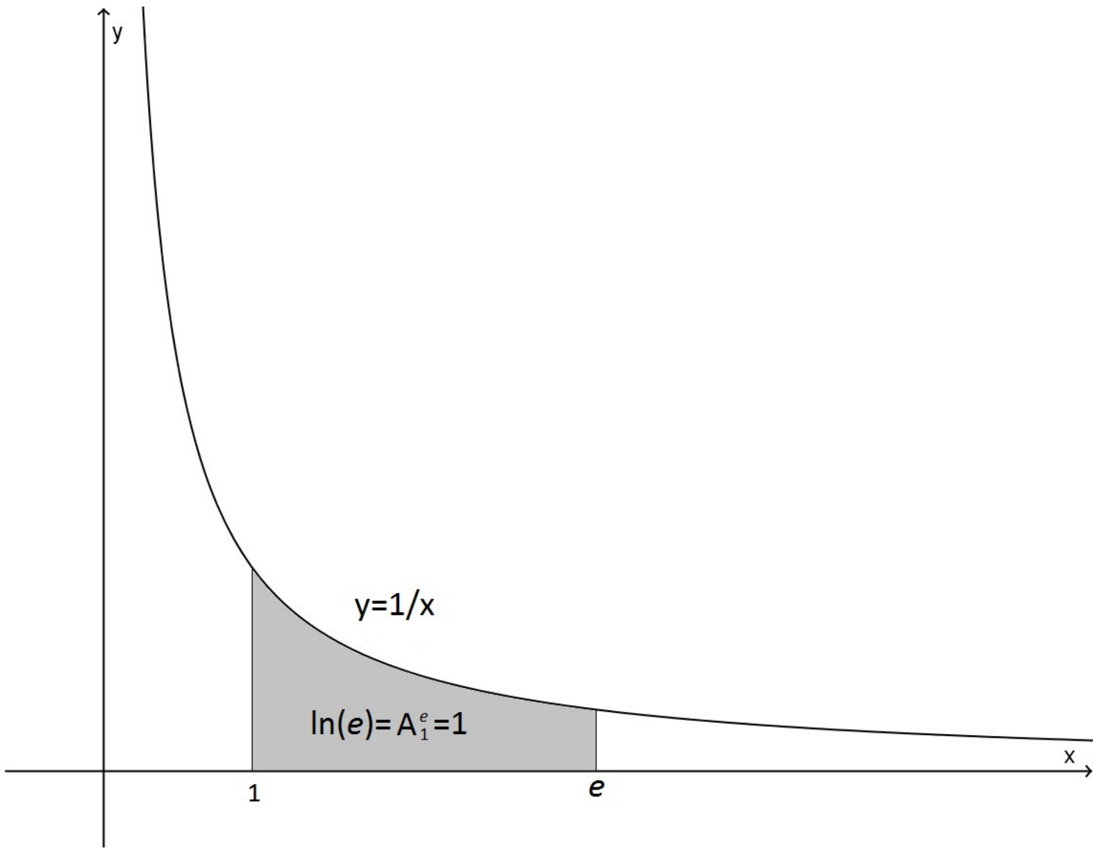


Figura 4.9: Base dos logaritmos naturais.

Pode-se demonstrar que o número e é irracional, logo seu desenvolvimento decimal não termina nem é periódico. Um valor aproximado de e, com 12 algarismos decimais exatos, é $2,718281828459$.

4.4 Outras bases

Seja k uma constante positiva. Em vez de $y = 1/x$, podemos considerar o gráfico de $y = k/x$ para definirmos os logaritmos. Para cada valor de k escolhido, temos um novo sistema de logaritmos. Evidente que, a escolha mais natural é $k = 1$, por isso que os logaritmos que estudamos até agora chamam-se *naturais*.

Dados dois pontos positivos de abscissas a e b, indicamos $A(k)_a^b$ como a área da faixa do gráfico $y = k/x$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$. Quando $k = 1$, continuaremos a indicar A_a^b como a área da faixa do gráfico $y = 1/x$ situada entre as retas $x = a$ e $x = b$.

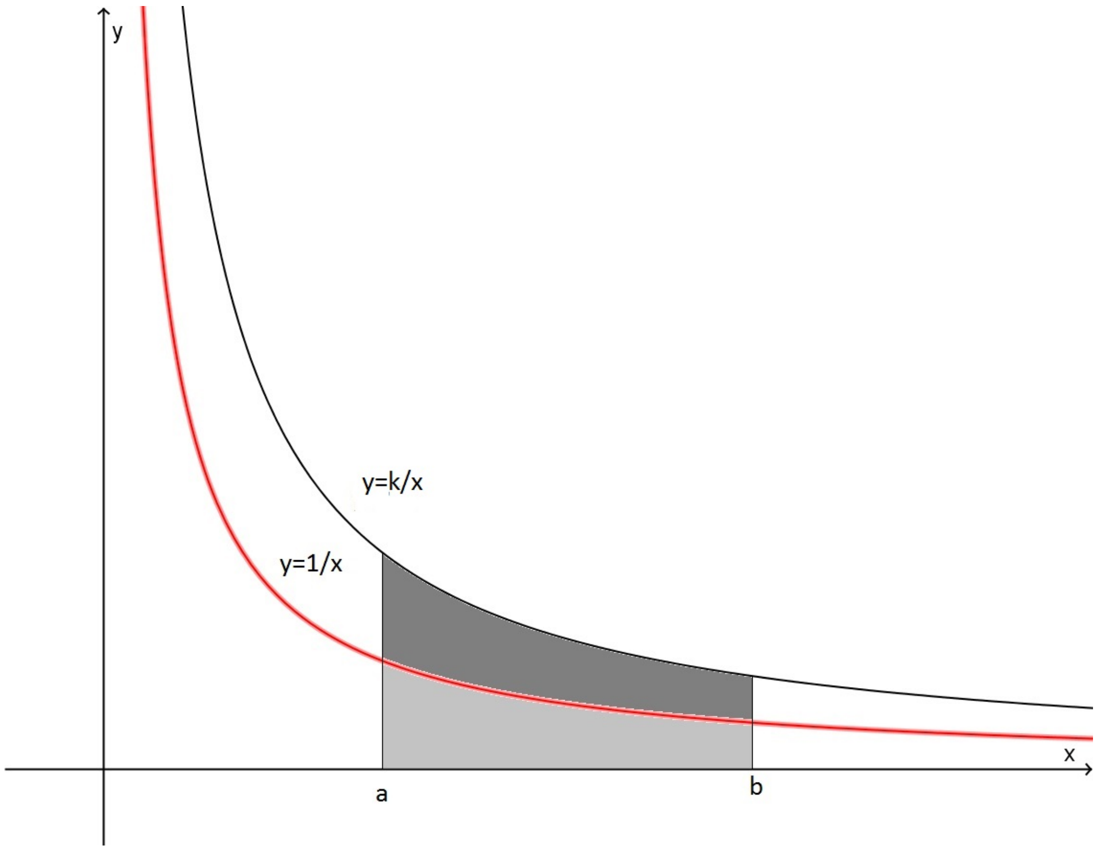


Figura 4.10: Área das faixas $A(k)_a^b$ e A_a^b

Teorema 4.2 *A área da faixa $A(k)_a^b$ é k vezes a área da faixa A_a^b.*

O teorema acima afirma que $A(k)_a^b = k \cdot A_a^b$ e nos permitirá futuramente definir todas as funções logarítmicas a partir dos logaritmos naturais. Para compreendermos melhor este teorema, propomos o exemplo a abaixo.

Exemplo 4.6 Vamos verificar que $A(2)_1^2 = 2 \cdot A_1^2$.

Primeiramente, dividimos o intervalo $[1, 2]$ em quatro partes iguais, obtendo $\dfrac{2-1}{4} = 1/4 = 0,25$, assim, a base de cada retângulo mede $0,25$ e a altura é o vértice direito que toca $y = 1/x$ ou $y = 2/x$, como mostra a Figura 4.11.

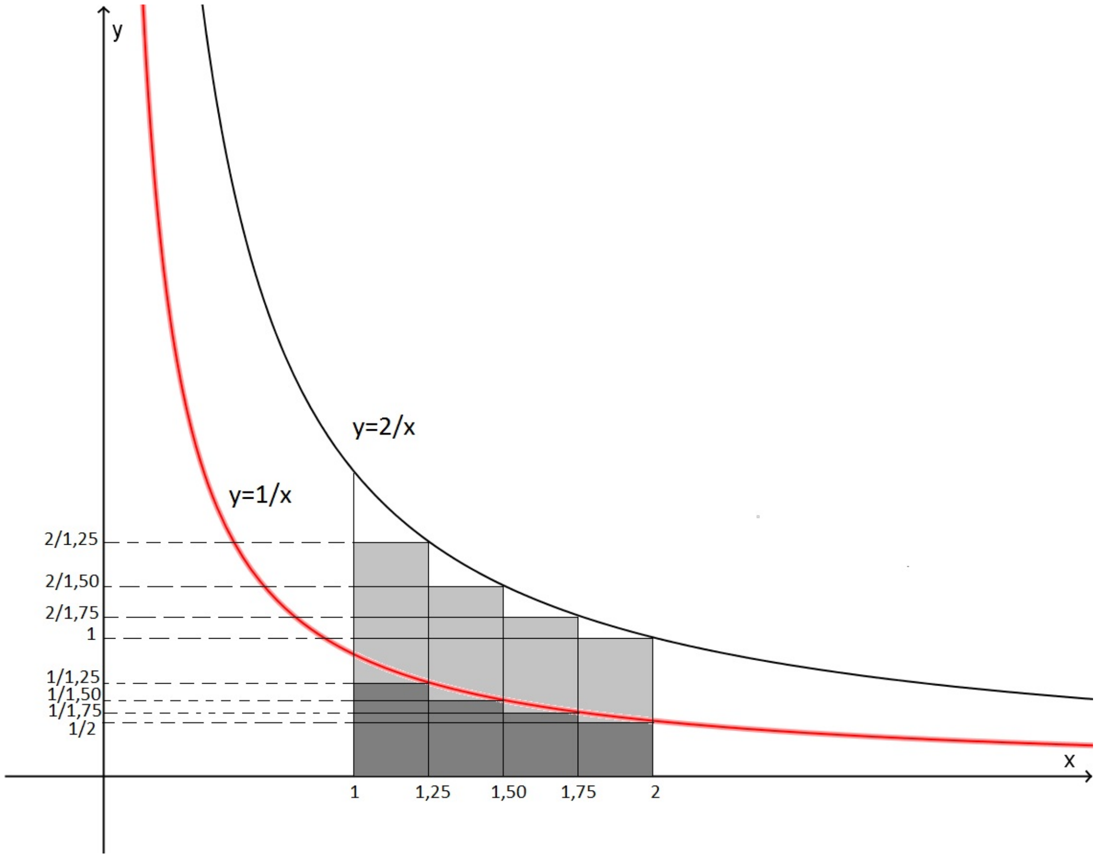


Figura 4.11: Aproximação das áreas das faixas $A(2)_1^2$ e A_1^2

Calculando as aproximações inferiores para as áreas das faixas A_1^2 e $A(2)_1^2$, obtemos

$$0,25 \times \frac{1}{1,25} + 0,25 \times \frac{1}{1,50} + 0,25 \times \frac{1}{1,75} + 0,25 \times \frac{1}{2} = 0,6345$$

e

$$0,25 \times \frac{2}{1,25} + 0,25 \times \frac{2}{1,50} + 0,25 \times \frac{2}{1,75} + 0,25 \times 1 = 1,2690.$$

Logo, $A(2)_1^2 = 1,2690 = 2 \cdot 0,6345 = 2 \cdot A_1^2$. De maneira análoga, se efetuarmos uma nova subdivisão do intervalo $[1, 2]$ em mais ou menos partes, também obteremos $A(2)_1^2 = 2 \cdot A_1^2$. Portanto, $A(2)_1^2 = 2 \cdot A_1^2$, pois são dois números reais com as mesmas aproximações inferiores.

Vejamos agora o caso geral. Utilizando o Teorema 4.2 e fixando a constante $k > 0$, introduzimos um novo sistema de logaritmos, pondo, por definição, para cada $x > 0$:

$$\ln(x) = \begin{cases} A_1^x, & x \geq 1 \\ -A_x^1, & 1 > x > 0 \end{cases}.$$

Pelo teorema, isto equivale a dizer:

$$\ln(x) = \begin{cases} k \cdot A_1^x, & x \geq 1 \\ -k \cdot A_x^1, & 1 > x > 0 \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\log(x) = k \cdot \ln(x).$$

A base do novo sistema de logaritmos é o número $a > 0$ tal que $\log(a) = 1$. Usualmente a notação para logaritmo de base a de uma número $x > 0$ é:

$$\log_a(x).$$

Se a é base de um sistema de logaritmos, então $\log_a(a) = k \cdot \ln a$. Uma vez que a é a base do sistema, segue que $\log_a(a) = 1$, então $1 = k \cdot \ln(a)$. Portanto, $k = \dfrac{1}{\ln a}$.

Desta maneira, $\log_a(x)$ é a área da faixa do gráfico de $y = 1/(x \cdot \ln a)$ compreendida entre 1 e x, como podemos visualizar na Figura 4.12.

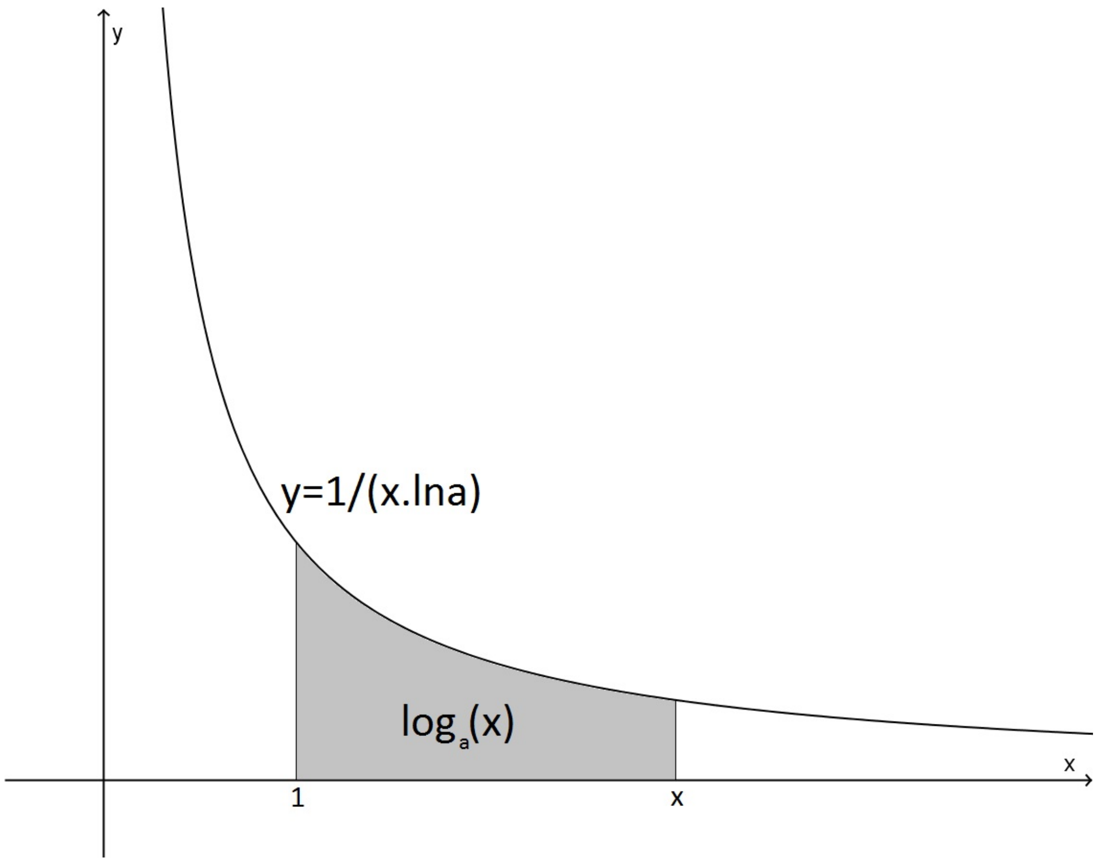


Figura 4.12: Definição de $\log_a(x)$

Esta definição é, como vemos, muito complicada. Melhor será recordar que:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a},$$

sendo a base $a > 0$ caracterizada pelo fato:

$$\log_a(a) = 1.$$

Exemplo 4.7 Sabendo-se que $\ln 2 = 0,6931$ e $\ln 10 = 2,3025$, vamos calcular o valor de $\log_2 10$.

Usando a definição de logaritmo, temos

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Fazendo $a = 2$ e $x = 10$, segue que

$$\log_2(10) = \frac{\ln 10}{\ln 2},$$

como $\ln 2 = 0,6931$ e $\ln 10 = 2,3025$, então

$$\log_2(10) = \frac{\ln 10}{\ln 2} = \frac{2,3025}{0,6931} = 3,3220.$$

Portanto, $\log_2(10) = 3,3220$.

4.5 Propriedades dos logaritmos em uma base qualquer

Seja $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função logaritmo de base a, definida por $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, são válidas as seguintes propriedades:

Propriedade 4.5 *O logaritmo de 1 é zero.*

Pela definição de logaritmo, tem-se $\log_a(1) = \dfrac{\ln 1}{\ln a}$. Por outro lado Propriedade 4.1 nos garante que $\ln(1) = 0$, logo $\log_a(1) = \dfrac{0}{\ln a} = 0$. Portanto, $\log_a(1) = 0$, ou seja, logaritmo de 1 é zero em qualquer base.

Propriedade 4.6 *O logaritmo de a na base a é 1.*

Essa propriedade pode ser facilmente mostrada através da definição de logaritmo. Veja que

$$\log_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1.$$

Portanto, $\log_a(a) = 1$, ou seja, o logaritmo de a na base a é 1.

Propriedade 4.7 *Para todo b e $c \in \mathbb{R}^+$ tem-se* $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$.

De fato, pela definição de logaritmo, temos $\log_a(b \cdot c) = \dfrac{\ln(b \cdot c)}{\ln a}$. Usando a Propriedade 4.2 obtemos

$$\log_a(b \cdot c) = \frac{\ln(b \cdot c)}{\ln a} = \frac{\ln(b) + \ln(c)}{\ln a} = \frac{\ln(b)}{\ln a} + \frac{\ln(c)}{\ln a} = \log_a(b) + \log_a(c).$$

Portanto, $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$.

Propriedade 4.8 *Para todo b e $c \in \mathbb{R}^+$ tem-se* $\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$.

Ao aplicarmos a definição de logaritmo, obtemos $\log_a(b/c) = \dfrac{\ln(b/c)}{\ln a}$. Usando a Propriedade 4.3 tem-se

$$\log_a(b/c) = \frac{\ln(b/c)}{\ln a} = \frac{\ln(b) - \ln(c)}{\ln a} = \frac{\ln(b)}{\ln a} - \frac{\ln(c)}{\ln a} = \log_a(b) - \log_a(c).$$

Portanto, $\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$.

Propriedade 4.9 *Para todo $b \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional r tem-se* $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$.

Usando novamente a definição de logaritmo, obtemos $\log_a(b^r) = \dfrac{\ln(b^r)}{\ln a}$. Aplicando a Propriedade 4.4 tem-se

$$\log_a(b^r) = \frac{\ln(b^r)}{\ln a} = r \cdot \frac{\ln(b)}{\ln a} = r \cdot \log_a(b).$$

Portanto, $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$.

Propriedade 4.10 *Sejam a e b números maiores do que* 1. *Para todo $x > 0$ tem-se* $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$.

A propriedade acima é popularmente conhecida como *mudança de base.* Para demonstrá-la consideremos duas funções logarítmicas $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ e $\log_b(x) = \dfrac{\ln x}{\ln b}$, temos que $\ln x = \log_a(x) \cdot \ln a$, então

$$\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\log_a(x) \cdot \ln a}{\ln b} = \log_a(x) \cdot \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Como $\log_b(a) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$, segue que $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$ para todo $x > 0$.

Exemplo 4.8 Sabendo-se que $\log_{10} 2 \approx 0,301$ e $\log_{10} 3 \approx 0,477$, vamos calcular o valor de $\log_9 512$.

Usando a mudança de base quando $a = 9$, $b = 10$ e $x = 512$, temos

$$\log_{10}(512) = \log_9(512) \cdot \log 10(9),$$

então $\log_9(512) = \dfrac{\log_{10}(512)}{\log_{10}(9)}$. Como $512 = 2^9$ e $9 = 3^2$, obtemos

$$\log_9(512) = \frac{\log_{10}(2^9)}{\log_{10}(3^2)} = \frac{9\log_{10}(2)}{2\log_{10}(3)} \approx \frac{9 \cdot 0,301}{2 \cdot 0,477} = \frac{2,709}{0,954} = 2,839.$$

Portanto, um valor aproximado para $\log_9(512)$ é $2,839$.

4.6 Atividades contextualizadas

4.6.1 Atividade 1

A atividade a seguir pode ser encontrada em SILVA (2013).

Atualmente, presenciamos uma facilidade incomum para efetuar cálculos, mas nem sempre foi assim. Ferramentas como computadores, calculadoras e celulares são invenções recentes do homem que não existiam no século XVII. Naquela época, poucos conseguiam realizar com eficiência cálculos envolvendo as operações de multiplicação, divisão e potenciação. Diante desse fato, Miguel, um aluno do ensino médio, decidiu investigar os métodos que os matemáticos usavam para realizar cálculos naquele século. Após muita pesquisa, para surpresa de Miguel, parte de uma tabela (Tabela 4.1) criada por Jobst Bürgi (1552-1632) no século XVII foi encontrada como única pista.

Tabela 4.1: Tabela Misteriosa

—	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
Linha 1	1	0,000	11	1,041	21	1,322
Linha 2	2	0,301	12	1,079	22	1,342
Linha 3	3	0,477	13	1.114	23	1,361
Linha 4	4	0,602	14	1,146	24	1,380
Linha 5	5	0,699	15	1,176	25	1,398
Linha 6	6	0,778	16	1,204	26	1,415
Linha 7	7	0,845	17	1,230	27	1,431
Linha 8	8	0,903	18	1,255	28	1,447
Linha 9	9	0,954	19	1,279	29	1,462
Linha 10	10	1	20	1,301	30	1,477

A tabela elaborada por esse matemático guardava alguns fatos que deixou Miguel curioso, para efetuar a multiplicação $2 \cdot 4$, bastava observar o número que estava posicionado (na mesma linha) logo após o 2 (que nesse caso é 0,301) e o número que estava posicionado (na mesma linha) logo após o 4 (que nesse caso é 0,602), efetuar a soma $0,301 + 0,602 = 0,903$, localizar o número 0,903 na tabela e, em seguida, observar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 0,903 é 8.

Para efetuar a divisão $10 \div 5$, bastava observar o número que estava posicionado (na mesma linha) logo após o 10 (que nesse caso é 1) e o número que estava posicionado (na mesma linha) logo após o 5 (que nesse caso é 0,699), efetuar a subtração $1-0,699 = 0,301$, localizar o número 0,301 na tabela e, em seguida, observar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 0,301 é 2.

Para calcular potenciação, por exemplo 5^2, Miguel percebeu que bastava observar qual número estava posicionado(na mesma linha) logo após o 5 (nesse caso 0,699) e em seguida, multiplicá-lo pelo expoente 2, encontrando nesse caso, o número 1,398 e procurar qual número que está logo atrás (na mesma linha) de 1,398 (que nesse caso é 25). Logo Miguel concluiu que $5^2 = 25$.

Usando a Tabela 4.1 (Tabela Misteriosa) e o raciocínio de Miguel acima, resolva:
a) as multiplicações;

i) $4 \cdot 7$

Solução: Ao observar a Tabela 4.1, vemos que o número posicionado (na mesma linha) logo após o número 4 é 0,602 e o número posicionado (na mesma linha) logo após o número 7 é 0,845, somando obtemos 0,602+0,845=1,467, agora, basta localizar o número 1,467 na tabela e observar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 1,467 é 28. Logo, $4 \cdot 7 = 28$.

ii) $6 \cdot 3$

Solução: Da Tabela 4.1, obtemos o número 0,778 localizado (na mesma linha) logo após o número 6 e o número 0,477 localizado (na mesma linha) logo após o número 3, somando tem-se 0,778+0,477=1,255, agora, devemos encontrar o número 1,255 na tabela e verificar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 1,255 é 18. Assim, $6 \cdot 3 = 18$.

b) as divisões;

i) $28 \div 4$

Solução: Ao analisar a Tabela 4.1, temos que o número posicionado (na mesma linha) logo após o 28 é 1,467 e o número posicionado (na mesma linha) logo após o 4 é 0,602, subtraindo temos $1,467 - 0,602 = 0,845$, agora, basta localizar o número 0,845 na tabela e observar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 0,845 é 7. Logo, $28 \div 4 = 7$.

ii) $30 \div 6$

Solução: Da Tabela 4.1, obtemos o número 1,477 localizado (na mesma linha) logo após o 30 e o número 0,477 localizado (na mesma linha) logo após o 3, subtraindo temos $1,477 - 0,477 = 1$, agora, devemos encontrar o número 1 na tabela e verificar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 1 é 10. Assim, $30 \div 3 = 10$.

c) as potências;

i) 2^4

Solução: Ao observar a Tabela 4.1, vemos que o número posicionado(na mesma linha) logo após o 2 é 0,301 e em seguida, multiplicamos ele pelo expoente 4, encontrando nesse caso, o número $4 \cdot 0,301 = 1,204$, agora, devemos encontrar o número 1,204 na tabela e observar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 1,204 é 16. Logo, $2^4 = 16$.

ii) 3^3

Solução: Na Tabela 4.1, encontramos o número 0,477 localizado (na mesma linha) logo após o 3 é e em seguida, multiplicamos ele pelo expoente 3, obtendo nesse caso, o número $3 \cdot 0,477 = 1,431$, agora, basta procurar o número 1,431 na tabela e verificar que o número que está logo atrás (na mesma linha) de 1,431 é 9. Assim, $3^3 = 9$.

4.6.2 Atividade 2

(Vunesp-SP) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22 horas e 30 minutos o médico da polícia chegou e, imediatamente, tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de 36,5°C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por $D(t) = D_0 \cdot 2^{-2\alpha t}$, em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio no instante $t = 0$, $D(t)$ é a diferença de temperatura do cadáver e o meio ambiente no instante t e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela abaixo:

Tabela 4.2: Dados obtidos pelo médico

INSTANTE	HORA	CORPO	AMBIENTE	DIFERENÇA
t=?	MORTE	36,5°C	16,5°C	D(t)=20°C
t=0	22:30	32,5°C	16,5°C	D(0)=16°C
t=1	23:30	31,5°C	16,5°C	D(1)=15°C

Considerando os valores aproximados para $\log_2 5 = 2,3$ e $\log_2 3 = 1,6$, determine:
a) o valor da constante α.

Solução: Ao analisarmos a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo quando $t = 1$, obtemos $D(1) = D(0) \cdot 2^{-2\alpha}$. Pela Tabela 4.2, sabemos que as diferenças de temperatura nos instantes $t = 0$ e $t = 1$ são $D(0)$=16°C e $D(1)$=15°C. Logo, $15 = 16 \cdot 2^{-2\alpha}$, então $2^{-2\alpha} = 15/16$. Aplicando logaritmo na base 2, tem-se

$$\log_2 2^{-2\alpha} = \log_2 \frac{15}{16}$$

$$-2\alpha \cdot \log_2 2 = \log_2 15 - \log_2 16$$

$$-2\alpha = \log_2(3 \cdot 5) - \log_2 2^4$$

$$-2\alpha = \log_2 3 + \log_2 5 - 4\log_2 2$$

$$-2\alpha = \log_2 3 + \log_2 5 - 4.$$

Como $\log_2 3$ e $\log_2 5$ são aproximadamente $1,6$ e $2,3$, então $-2\alpha = 1,6 + 2,3 - 4 = -0,1$. Portanto, o valor da constante α é $\dfrac{0,1}{2} = 0,05$.

b) a hora em que a pessoa morreu.

Solução: Pela tabela 4.2 acima, no instante t quando a pessoa morreu a diferença de temperatura era $D(t)$=20°C, usando a lei matemática $D(t) = D_0 \cdot 2^{-0,1t}$, obtemos $20 = 16 \cdot 2^{-0,1t}$. Logo $2^{-0,1t} = 20/16 = 5/4$. Aplicando logaritmo na base 2, tem-se

$$\log_2 2^{-0,1t} = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$-0,1t \cdot \log_2 2 = \log_2 5 - \log_2 2^2$$

$$-0,1t = \log_2 5 - 2\log_2 2$$

$$-0,1t = \log_2 5 - 2$$

Como $\log_2 5$ é aproximadamente $2,3$, temos $-0,1t = \log_2 5 - 2 = 2,3 - 2 = 0,3$, então $t = -\dfrac{0,3}{0,1} = -3$. Portanto, a morte da pessoa ocorreu 3 horas antes do médico encontrar o corpo, ou seja, a hora exata do homicídio foi às 19 horas e 30 minutos.

4.6.3 Atividade 3

(ENEM 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, em que A é a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

Solução: De acordo com o enunciado da atividade, sabemos que a meia-vida do césio-137 é de 30 anos, então $M(30) = A/2$. Assim quando $t = 30$, temos

$$M(30) = A \cdot (2,7)^{30k}$$

$$\frac{A}{2} = A \cdot (2,7)^{30k}$$

$$\frac{1}{1} = (2,7)^{30k}$$

$$2^{-1} = (2,7)^{30k}.$$

Aplicando logaritmo na base 10 em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\log_{10} 2^{-1} = \log_{10}(2,7)^{30k}$$

$$-1 \log_{10} 2 = 30k \log_{10}(2,7).$$

Como $\log_{10} 2 = 0,3$, segue-se

$$-1 \cdot 0,3 = 30k \log_{10}(2,7)$$

$$\log_{10}(2,7) = -\frac{0,3}{30k}$$

$$\log_{10}(2,7) = -\frac{0,01}{k} \tag{4.1}$$

Vamos reservar a equação 4.1 acima, pois mais tarde ela nós será necessária. Consideremos agora t_α o instante em que a massa da substância se reduz a 10% da massa inicial, então $M(t_\alpha) = 0,1A$. Substituindo t_α na expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, tem-se

$$M(t_\alpha) = A \cdot (2,7)^{kt_\alpha}$$

$$0,1A = A \cdot (2,7)^{kt_\alpha}$$

$$0,1 = (2,7)^{kt_\alpha}$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log_{10}(2,7)^{kt_\alpha}$$

$$-1 = kt_\alpha \cdot \log_{10}(2,7)$$

Pela equação 4.1 podemos substituir $\log_{10}(2,7)$ por $-\dfrac{0,01}{k}$, então

$$-1 = kt_\alpha \cdot \left(-\frac{0,01}{k}\right)$$

$$t_\alpha = \frac{1}{0,01} = 100.$$

Portanto, em 100 anos, a massa de césio-137 será reduzida para 10% da massa inicial.

4.6.4 Atividade 4

(UERJ) Em uma calculadora científica de 12 dígitos, quando se aperta a tecla LOG, aparece o logaritmo decimal (na base 10) do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO. Depois de digitar 42 bilhões, quantas vezes devemos apertar a tecla LOG para que no visor apareça ERRO pela primeira vez?

Solução: Seja A_1 o número introduzido na calculadora para o calculo do LOG, ou seja, $A_1 = 48.000.000.000 = 4,8 \cdot 10^{10}$. Apertando a tecla LOG pela primeira vez, obtemos no visor da calculadora o número A_2, que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_2 = \log A_1 = \log(4,8 \cdot 10^{10})$$

$$A_2 = \log 4,8 + \log 10^{10}$$

$$A_2 = \log 4,8 + 10 \cdot \log 10$$

$$A_2 = \log 4,8 + 10 \cdot 1$$

$$A_2 = \log 4,8 + 10.$$

Ora, como $10^0 < 4,8 < 10^1$, então $\log 1 = 0 < \log 4,8 < \log 10 = 1$. Logo, podemos concluir que $\log 4,8$ será um número entre 0 e 1, portanto, é da forma decimal $0,m$, onde m é uma sequência formada por algarismos do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Desta maneira, o segundo número a aparecer no visor é $A_2 = 0,m + 10 = 10,m$.

Ao apertamos a tecla LOG pela segunda vez, obtemos no visor da calculadora o número A_3, que é dado pela expressão

$$A_3 = \log A_2 = \log(10, m).$$

Note que $10^1 < 10, m < 10^2$, então $\log 10^1 = 1 < \log(10, m) < \log 10^2 = 2$. Assim, concluímos que $\log(10, m)$ será um número entre 1 e 2, portanto, é da forma decimal $1, p$, conforme a definição acima. Logo o terceiro número a aparecer no visor é $A_3 = 1, p$.

Apertando a tecla LOG pela terceira vez, obtemos no visor da calculadora o número A_4, que é dado por

$$A_4 = \log A_3 = \log(1, p).$$

Como $10^0 < 1, p < 10^1$, então $\log 1 = 0 < \log(1, p) < \log 10 = 1$. Logo, podemos concluir que $\log(1, p)$ será um número entre 0 e 1, portanto é da forma decimal $0, q$, como definimos acima. Assim, o quarto número a aparecer no visor é $A_4 = 0, q$.

Ao apertamos a tecla LOG pela quarta vez, obtemos no visor da calculadora o número A_5, que é dado por

$$A_5 = \log A_4 = \log(0, q).$$

Ora, $0, q < 1$, então o seu logaritmo decimal é negativo, ou seja, $\log(0, q) = k$, onde k é um número negativo. Portanto, o quinto número a aparecer no visor $A_5 = k$, onde k é um número negativo.

Apertando a tecla LOG pela quinta vez, obtemos no visor da calculadora a mensagem de ERRO ao executar a operação $\log k$. Isso ocorre devido a não existência de logaritmos de números negativos, ou seja, a função logarítmica não está definida para números menores que zero.

Capítulo 5

Aplicação e resultados

Com a meta de avaliar a eficácia da proposta de ensino apresentada no capítulo anterior, fez-se necessário sair das teorias e partir para a prática, a qual foi realizada na Escola Estadual Getúlio Vargas (Figura 5.1).

A escola está situada na cidade de Cocalinho-MT, a uma distância de 780 km da capital Cuiabá, localizada no extremo Leste do Estado de Mato Grosso à margem esquerda do Rio Araguaia, com grande extensão territorial e aproximadamente 5.860 habitantes.

Figura 5.1: Escola Estadual Getúlio Vargas.

Sua organização no Ensino Fundamental é feita por ciclos de formação humana, onde o desafio é proporcionar a todos uma educação básica com qualidade social. Desta maneira, a escola trabalha na perspectiva da inclusão, de modo que o educando é o centro das ações pedagógicas. Neste modelo de organização a escola assume um compromisso com a formação e o desenvolvimento dos estudantes que vão além dos conhecimentos sistematizados, inclui as dimensões políticas, éticas e socioculturais. Já o Ensino Médio da Escola Estadual Getúlio Vargas é organizado por meio do sistema seriado.

A escola é um espaço público no qual os alunos passam boa parte do seu tempo, estudando e compartilhando suas culturas diversas. Entretanto, percebe-se que a sociedade em que a escola está inserida é muito carente, com vários problemas sociais que interferem no espaço pedagógico.

Atualmente a escola dispõe de 18 salas, dois banheiros e uma quadra coberta poliesportiva. Essas salas estão distribuídas da seguinte forma: 11 salas de aula, todas climatizadas e com capacidade de estudo para 30 alunos; uma biblioteca climatizada com grande acervo de livros e capacidade para acomodar 30 pessoas; uma sala de informática também climatizada com capacidade de pesquisa para 30 pessoas com acesso à internet.

A turma selecionada para a execução da proposta de ensino "Uma nova abordagem para o ensino da função logarítmica"foi o 3º ano do ensino médio do período matutino (Figura 5.2), formada por 12 estudantes com faixa etária entre 16 a 20 anos, sendo a maioria de classe média baixa. Os trabalhos tiveram início no dia 22 de junho de 2015 estendendo-se ao longo da semana até dia 26 de junho de 2015.

Figura 5.2: Turma do 3º ano matutino.

Iniciamos a aplicação da proposta (Figura 5.3) no dia 22 de junho apresentando aos alunos o logaritmo natural de um número positivo x, como a área do gráfico $y = 1/x$ compreendida entre 1 e x. Durante os trabalhos, poucos alunos apresentaram dificuldades em compreender essa definição e a maioria conseguiu associar o conceito de logaritmo natural com algo que já era de seu conhecimento: o cálculo de área. Visando reforçar ainda mais a aprendizagem foi proposto aos alunos o Exemplo 4.1, onde calculamos com a participação deles uma aproximação para $\ln(2)$. Percebe-se que uso dessa definição facilita o processo de ensino e aprendizagem, proporcionando aos alunos significado real para os logaritmos naturais.

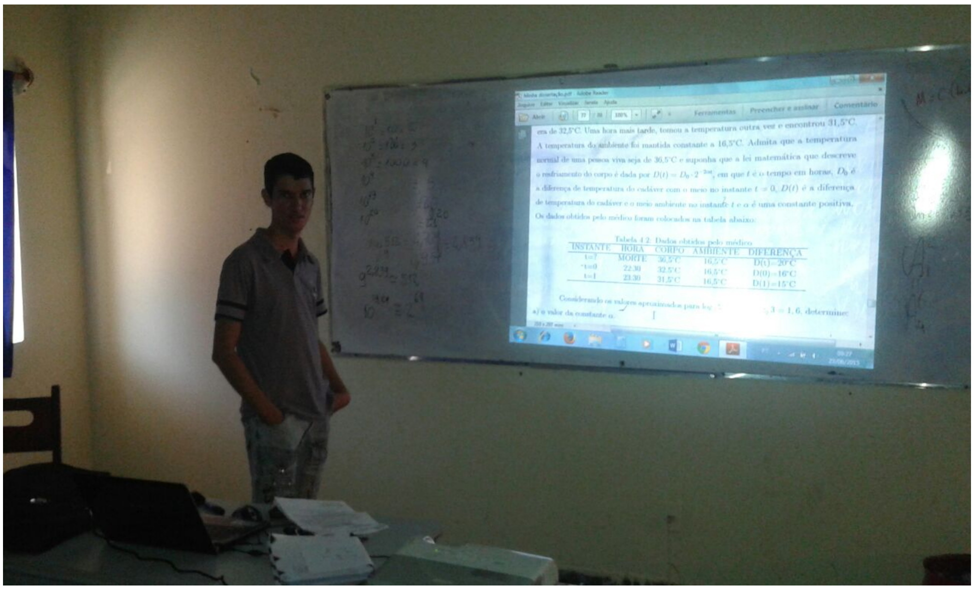


Figura 5.3: Aplicação da proposta de ensino.

No dia 23 de junho trabalhamos com os alunos as propriedades dos logaritmos naturais. Observou-se que muitos alunos tiveram um embaraço em compreender algebricamente as propriedades operatórias. No entanto, o uso do conceito geométrico na exemplificação das propriedades agiu como facilitador da aprendizagem, tornando os argumentos algébricos em algo concreto e significativo. Os Exemplos 4.3 e 4.4 conseguiram associar os termos algébricos e geométricos melhorando consideravelmente a aprendizagem dos alunos.

O conceito de base foi apresentado para os alunos no dia 24 de junho, sendo assimilado e compreendido com facilidade, como o único número positivo cujo o logaritmo é igual a 1. A partir deste fato, trabalhamos para estender o conceito dos logaritmos naturais para todos os outros logaritmos. Seguindo a proposta, adotamos a curva $y = k/x$

e mostramos aos alunos geometricamente que para cada k escolhido teríamos um novo sistema de logaritmos, posteriormente definimos o logaritmo de um número positivo x na base a, como $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. As maiores dificuldades encontradas pelos alunos foi entender as operações algébricas envolvidas no processo, no entanto, essas dificuldades se tornavam amenas quando usávamos argumentos geométricos. A ideia de ensinar outros logaritmos por meio do logaritmo natural traz certo conforto aos alunos, pois possibilita a contextualização e uma aprendizagem real.

No dia 25 de junho apresentamos aos alunos as propriedades dos logaritmos em uma base qualquer. Pode-se notar que os alunos tiveram pouquíssimas dificuldades, uma vez que já conheciam as propriedades dos logaritmos naturais. A fim de avaliar a aprendizagem dos alunos acerca dessas propriedades, propomos aos alunos que resolvessem o Exemplo 4.8, onde a maioria dos alunos obtiveram sucesso.

As atividades contextualizadas foram propostas aos alunos no dia 26 de junho. Verificou-se um grande interesse dos alunos em resolvê-las, uma vez que os problemas apresentados retratam situações concretas da vida real. Esse fato instigou a vontade deles de aprender e proporcionou um resultado extremamente positivo, onde a maior parte dos alunos mostraram-se bem-sucedidos na resolução dos problemas. Entre os problemas apresentados percebe-se uma grande motivação por parte dos alunos na Atividade 2. Pode-se também comprovar como é produtiva a contextualização no ensino de matemática.

Observa-se então, que a proposta apresentada é realmente válida e que alcançou de forma direta o objetivo almejado, facilitando o processo ensino e aprendizagem de maneira significativa, quebrando o tabu por parte dos alunos que acham matemática extremamente difícil e evitando assim a tão rotineira pergunta: "-Professor em que vou usar isso na minha vida?", tornando os logaritmos algo acessível e mensurável.

Futuramente para adequar ainda mais esta proposta pedagógica, uma sugestão plausível aos docentes é o uso de softwares matemáticos que tornam as aulas mais dinâmicas e atrativas para os alunos. Existem diversos softwares, dentre eles destacamos o GeoGebra que dentro da proposta nos permite calcular as áreas por aproximações inferiores por meio da soma de Reimann. Outra possibilidade é o uso do GeoGebra para comparar gráficos e bases dando aos alunos uma ótima concepção geométrica das definições e propriedades. Por meio desse recurso podemos expandir as possibilidades de ensino e aprendizagem da função logarítmica.

Considerações finais

.

O ensino de matemática está passando por grandes transformações e cabe a nós professores acompanhá-las para que possamos proporcionar aos nossos educandos uma aprendizagem significativa. É evidente que centralizar o ensino de matemática somente por atividades de memorização e manipulação está fadado ao fracasso, pois a dinâmica do mundo globalizado exige de todos conhecimento sólido em matemática para que consigam tirar conclusões e tomar decisões inteligentes.

Diante desse processo de mudança, professores buscam diariamente metodologias que possam facilitar o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos necessários para uma boa formação.

Um dos temas menos preferidos pelos os docentes sem dúvida, é a função logarítmica. Existem vários motivos que dificultam o ensino e a aprendizagem da função logarítmica no Ensino Médio, dentre eles está o fato que os livros didáticos não trazem uma sequência didática que contemplem o conceito, as propriedades e as aplicações.

Neste trabalho apresentamos uma proposta de ensino para a função logarítmica, baseada em conceitos geométricos e aplicações contextualizadas que possa ser utilizada pelos docentes nas turmas do Ensino Médio. Durante a sua aplicação verificamos a sua eficiência em facilitar significativamente o processo de ensino e aprendizagem, proporcionando aos alunos uma nova concepção da função logarítmica. Esperamos que por meio dela, os professores possam transformar o ensino desse tema, tradicionalmente ensinado por meio de memorização em algo concreto e relevante para os alunos.

Espera-se que este trabalho sirva de motivação para o começo de um estudo profundo do ensino da função logarítmica e que essa proposta de ensino seja aprofundada por outros docentes com o uso de softwares matemáticos, com a finalidade de melhorar a qualidade de ensino do nosso país.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental.**Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, Brasília: MEC/SEF, 1997.

[2] BOYER, Carl b. **História da matemática**, Tradução Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher ltda, São Paulo,1974.

[3] CAJORI, Floriam **Uma história da matemática**, Tradução Lázaro Coutinho, Editora Ciência Moderna ltda, Rio de Janeiro, 2007.

[4] D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**, 17ª. Ed. - Campinas-SP: Papirus, 2001.

[5] EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**, tradução Hygino H. Domingues. 5ª. Ed. - Campinas-SP: editora da Unicamp, 2011.

[6] FONSECA, M. C. F. R. **Por que ensinar Matemática**, Revista Presença Pedagógica, Belo Horizonte, V.1, N.6, março/abril, 1995.

[7] LIMA, Elon Lajes. **Logaritmos**. 5ª.Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] LIMA, Elon Lajes. **Matemática e Ensino**. 3ª.Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[9] LIMA, Elon Lajes. **Números e Funções Reais**. 1ª.Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção PROFMAT.

[10] MOREIRA, Marco A.**Aprendizagem significativa**, Editora da UNB, 1999.

[11] SILVA, Josiel Pereira da. **Logaritmos e aplicações**. Dissertação de mestrado (PROFMAT) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande-PB, 2013.

[12] SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Dissertação de Mestrado (Ensino de ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2011.

[13] STEWART, Ian. **17 Equações que mudaram o mundo**, tradução Georfe Schlesinger. 1ª. Ed. - Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2013.

[14] TAHAN, M. **O homem que calculava**, 55.ed. Editora Record, 2001.

[15] VALERO, P. **Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia**, Quadrante:Revista teórica e de investigação, Lisboa, PT, V. 11, N.1, p. 49-59, 2002.