Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADA À MODELAGEM DE ÁREAS E VOLUMES DOS POLIEDROS DE PLATÃO

RICARDO ELIAS JREIGE

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva**

Trabalho financiado pela Capes

Campus Universitário do Araguaia - MT setembro de 2015

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADA À MODELAGEM DE ÁREAS E VOLUMES DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Barra do Garças, 14 de setembro de 2015.

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva (Orientador)
Prof. Dr. Daniel da Silveira Guimarães (CUA-UFMT)
Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza (UFG)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

J89r Jreige, Ricardo Elias.
A Resolução de Problemas Aplicada à Modelagem de Áreas e Volumes dos Poliedros de Platão / Ricardo Elias Jreige. -- 2015
117 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Carlos Rodrigues da Silva.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Resolução de Problemas. 2. Metodologia. 3. Ensino. 4. Modelagem. 5. Poliedros de Platão. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8713/8710/8576

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "A resolução de problemas aplicada à modelagem de áreas e volumes dos poliedros de Platão"

AUTOR : Ricardo Elias Jreige

defendida e aprovada em 14/09/2015.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca / Orientador — Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno — Daniel da Silveira Guimarães — Dr. Daniel da Silveira Guimarães
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo — Marcelo Almeida de Souza — Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituição : Universidade Federal de Goiás

BARRA DO GARÇAS, 14/09/2015.

Dedico esta dissertação aos meus maravilhosos filhos, Elias Ricardo Mota Jreige e Rafael Ricardo Mota Jreige, por serem meu alicerce e conforto espiritual e, também, à minha família por terem me motivado e auxiliado nesta busca pelo conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, pois sem sua permissão nada seria possível.

Agradeço aos professores da UFMT: Dr. Adilson, Dr. Juan, Ms. Andrey, Ms. Renato e Ms. Lívio. Vocês foram fundamentais para meu crescimento profissional e pessoal. Espero, algum dia, alcançar o conhecimento e a sabedoria que vocês possuem.

Agradeço aos meus amigos/irmãos, Deusaguimar, Rodrigo, Fernado e Sinésio por terem lutado lado a lado comigo, auxiliando-me nos momentos de fraqueza e dificuldades. Essa vitória também é de vocês.

Agradeço ao professor Miguel Camargo pelo incentivo e apoio durante o mestrado.

Agradeço aos doutores membros da banca, Prof. Daniel da Silveira Guimarães (CUA-UFMT) e Prof. Marcelo Almeida de Souza (UFG) pelas contribuições significativas que engrandeceram este trabalho.

Agradeço aos meus pais, Elias e Mouna, e em nome deles estendo à minha família, pois sem eles não teria alcançado esta vitória. Eles foram decisivos para o cumprimento desta etapa de minha vida, dando-me suporte e ânimo a todo instante, não me deixando desistir.

Agradeço a minha esposa e filhos, pois eles aguentaram meus momentos de nervosismo, apreensão e angústia. Foram meu suporte e venceram comigo.

Agradeço ao Profmat pela oportunidade, a UFMT por ter me acolhido e a Capes por ter financiado meu mestrado.

E, finalizando, agradeço, em especial, ao professor Dr. Carlos Rodrigues por ter sido mais que um excelente professor e orientador, por ter sido amigo, companheiro, conselheiro, um exemplo a ser seguido. Lembro-me de cada lição dada, que levarei por toda vida e as passarei para minhas gerações. Você é humilde e extraordinário. Com você aprendi mais que disciplinas matemáticas. Jamais esquecerei tudo que fez por mim.

À todos meu muito obrigado!

Dá instrução ao sábio, e ele se fará mais sábio; ensina o justo e ele aumentará em entendimento.

Provérbios 9: 9

RESUMO

Este trabalho pretende mostrar a importância de se utilizar o método heurístico ou método de Polya como metodologia eficiente no ensino da matemática. Esta será aplicada na construção de modelos matemáticos capazes de calcular a área e o volume dos cinco poliedros convexos regulares. O contexto histórico do conteúdo a ser aplicado na sala de aula é fundamental para que o aluno entenda as relações matemáticas que serão construídas. Assim, procurou-se fazer um breve comentário acerca da história dos poliedros, ressaltando algumas definições e teoremas relevantes no estudo destes sólidos. No entanto, o foco principal deste trabalho é o método de resolução de problemas ou método heurístico e sua contribuição para o ensino da matemática, destacando a particularidade de suas etapas. Esta metodologia será analisada em diversas atividades, a fim de mostrar como o professor deve desenvolvê-las segundo este algoritmo. Pretende-se ainda fazer uma abordagem sucinta acerca da modelagem na matemática e sua importância na construção de conceitos matemáticos. Além de mostrar os resultados e análises da utilização do método heurístico em alguns problemas propostos para os alunos do 3º ano do Ensino Médio, que mostrarão a relevância deste método como metodologia favorável à resolução de problemas matemáticos.

Palavras chave: Resolução de Problemas, Metodologia, Ensino, Modelagem, Poliedros de Platão.

ABSTRACT

This work aims to show the importance of using the heuristic method or Polya method as an effective methodology in mathematics education. This will be applied in the construction of mathematical models able to calculate the area and volume of the five regular convex polyhedra. The historical context of the content to be applied in the classroom is crucial for the student to understand mathematical relationships to be built. So, we tried to make a brief comment about the history of polyhedra, highlighting some relevant definitions and theorems in the study of these solids. However, the main focus of this work is the method of problem solving or heuristic method and its contribution to the teaching of mathematics, highlighting the peculiarity of its stages. This methodology will be analyzed in various activities in order to show how the teacher should develop them under this algorithm. The aim is also to make a brief approach about modeling in mathematics and its importance in the construction of mathematical concepts. In addition to showing the results and analysis using the heuristic method in certain problems posed to students of the 3rd year of high school, which show the relevance of this method as favorable approach to solving mathematical problems.

Keywords: Troubleshooting, Methodology, Education, Modeling, Polyhedra of Plato.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

> *"O aluno muitas vezes não resolve problemas de matemática, não porque não sabe matemática, mas porque não sabe ler o enunciado do problema" [...] "Não basta ensinar só as relações matemáticas: é preciso também o português que a matemática usa".*
>
> (CAGLIARI (2003) *apud* ITACARAMBI, 2010, p.13-14)

Não é muito raro observar nas escolas discursos de alunos afirmando que a Matemática é a disciplina mais difícil de ser compreendida, porém quando perguntamos o porquê de tal pensamento, simplesmente ficamos sem uma resposta satisfatória que explique esta situação. Assim, um dos desafios do professor de Matemática é promover uma ruptura no paradigma de que ela somente pode ser aprendida por uma minoria de alunos, tidos como inteligentes pelos colegas de sala de aula.

Assim, a dificuldade encontrada pelos alunos em compreender conteúdos matemáticos motivou a elaboração deste texto, sendo que o método heurístico aplicado a resolução de problemas será utilizado para promover a aprendizagem da Matemática de forma significativa e eficiente. Pois, esta metodologia promove a busca do conhecimento matemático através de indagações e pesquisa, levando o aluno a elaborar e questionar estratégias de resolução dos problemas que serão apresentadas e, assim, criando novos questionamentos e, consequentemente, outras situações-problemas. Segundo Carvalho (1994, p. 82),

> [...] Não se aprende Matemática para resolver problemas e, sim, se aprende Matemática resolvendo problemas. Diante dessa perspectiva, qualquer situação que vise favorecer o aprendizado deve constituir-se em situação problema para o aluno a que se destina, ou seja, a proposta de tarefa feita pelo professor deve ser tão interessante que crie, na classe, um clima de pesquisa, de busca de solução para os problemas que emergirem da proposta. Nessa perspectiva não existe "aula"de resolução de problemas e sim situações de ensino onde, a partir de pesquisas sobre problemas emergentes ou de propostas problematizadoras, é elaborado o conhecimento matemático, e essa elaboração suscita novos problemas.

Pretende-se abordar as etapas do método de resolução de problemas desenvolvido por Polya[1] (2006), aplicando-o na elaboração de modelos matemáticos que resolvam problemas relacionados ao cálculo de áreas e volumes dos poliedros regulares de Platão. Através destes, será mostrada a relevância e importância do método heurístico como metodologia no ensino da matemática, sendo este o principal objetivo deste texto dissertativo.

Este trabalho foi realizado através de pesquisa bibliográfica e de estudo de caso que mostrará a eficiência do método heurístico no ensino e na aprendizagem da matemática. Nele será apresentado um breve histórico da origem dos poliedros de Platão, destacando algumas definições importantes e os teoremas mais relevantes acerca deste tema, tais como: O conceito de poliedro, o Teorema de Euler, a definição de poliedros regulares de Platão, bem como demonstração de que há apenas cinco deles.

Foram ainda abordados os aspectos conceituais do método heurístico (conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas), através de uma fundamentação teórica acerca da resolução de problemas matemáticos, baseados nas definições expostas no livro *A arte de resolver problemas* de Polya (2006). Além de conceituar problemas matemáticos e classificar os tipos mais comuns utilizados em sala de aula, com seus devidos exemplos. Foram apresentadas as etapas do método heurístico ressaltando os aspectos mais significativos de cada uma delas. Foram realizadas algumas aplicações do método heurístico em diversas atividades matemáticas, a fim de mostrar como o professor deve proceder durante o desenvolvimento de situações-problemas utilizando este método. Foi abordado, sucintamente, alguns conceitos de modelagem na matemática e sua significação na matemática.

Consta também a aplicação do método heurístico na construção de alguns modelos matemáticos onde se pretende mostrar que é possível para os alunos construírem

[1]George Polya nasceu a 13 de Dezembro de 1887 em Budapeste (Hungria), de família judaica de origem polaca. Faleceu a 7 de Setembro de 1985 em Palo Alto, na Califórnia (Estados Unidos). Foi um excelente estudante no ensino secundário, apesar da escola que frequentava valorizar muito a aprendizagem com base na memória, prática que considerava monótona e sem utilidade.

Foi professor de matemática de 1914 a 1940 no ETH Zürich na Suíça, e de 1940 a 1953 na Stanford University. Polya permaneceu como professor emérito de Stanford o resto de sua vida e carreira. Trabalhou com uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. Também é notável sua contribuição para a heurística em educação matemática.

No início de sua carreira, Polya escreveu, juntamente com Gábor Szegö, dois livros que trabalhavam a resolução de problemas: Problemas e Teoremas de Análise. Posteriormente, começou a pesquisar sobre métodos de resolução de problemas. Em *In How to Solve It*, Polya dá uma ideia geral da heurística de problemas matemáticos e não-matemáticos.

modelos matemáticos que não lhes foram apresentados em sua escolarização, através do método de resolução de problemas desenvolvido por Polya (2006). Assim, foram convidados para aplicação deste método os alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Objetivo de Jussara-GO que aceitaram participar desta proposta de ensino.

Com estes alunos foi feito um estudo inicial para relembrar alguns conceitos geométricos e algébricos que seriam necessários para execução do método, pois o conhecimento prévio é fundamental para construção de novos conceitos. Algumas resoluções obtidas pelos alunos, na construção dos modelos, constam neste texto dissertativo. Para cada atividade proposta à eles foi apresentada uma possível solução. Os modelos encontrados pelos alunos foram testados experimentalmente utilizando poliedros regulares de Platão em acrílico, verificando a validade dos modelos encontrados, ou seja, observando que satisfazem as condições iniciais dos problemas apresentados.

Foi apresentado a análise de um questionário respondido pelos alunos que participaram da aplicação do método de Polya que mostra a satisfação em se aprender uma nova técnica de estudo. No decorrer desta dissertação será mostrado que o *método heurístico* foi compreendido e executado com êxito, em todas as etapas, pelos alunos que participaram da aplicação prática deste, reforçando sua importância como metodologia no ensino e na aprendizagem da matemática.

Espera-se que este trabalho contribua para o ensino de Matemática, despertando nos alunos o interesse em resolver problemas desafiadores que produza um conhecimento significativo, e que este aprendizado possa servir de parâmetro para resolver outras situações-problemas semelhantes.

Capítulo 1

OS POLIEDROS DE PLATÃO

"[...] Que ninguém que ignore a geometria entre aqui [...]".
(Platão *apud* Boyer, 2010, p. 58)

Antes de seguirmos com o estudo acerca do método de resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática, vamos conhecer um pouco da origem da situação problema na qual esta pesquisa faz parte, ou seja, a história dos Poliedros de Platão.

1.1 *História dos Poliedros de Platão*

Segundo Marques (2015), Platão nasceu em Atenas no ano 427 a.C. e morreu por volta de 347 a.C.; seu nome verdadeiro era Aristóteles, sendo que recebeu o nome de Platão devido a seu vigor físico e da largura dos seus ombros (*platos* significa largueza).

Por ser aparentado de políticos conhecidos na época, Platão se interessava por política. Aos vinte anos de idade, torna-se disciplino de Sócrates, com o objetivo de se aprofundar na vida política. Porém, é a Filosofia que representa e dá significado a sua existência. Platão escreveu cerca de trinta diálogos em que ressalta as ideologias de Sócrates, expressando a beleza do pensamento socrático. *Timeu* é um de seus diálogos, constituído de um longo monólogo do personagem título, escrito por volta de 360 a.C, apresenta a especulação sobre a natureza do mundo físico e os seres humanos.

Sólidos convexos cujas faces são polígonos planos regulares congruentes são denominados sólidos platônicos. Esta designação se deve a Platão, que os revelou cerca de 400 a.C.. No entanto, a existência destes sólidos já havia sido reconhecida pelos pitagóricos; enquanto os egípcios utilizaram alguns deles em sua arquitetura e em outros objetos construídos por eles.

Segundo Marques (2015), é provável que a descoberta dos sólidos platônicos ocorreu num encontro entre Arquitas (428a.C. - 350a.C.) e Platão, em Cecília, no sul de Itália. Para Platão o Universo era constituído por um corpo e uma alma, ou inteligência. A matéria é composta de porções limitadas por triângulos ou quadrados, estes formam vários elementos que diferenciam pela natureza da forma das suas superfícies periféricas.

Se as superfícies fossem quadradas formaria o cubo (elemento Terra); Platão acreditava que átomos da terra seriam cubos, pois estes poderiam ser colocados lado a lado, de forma que se criasse uma estrutura estável. Se fossem triângulos, formariam um tetraedro (elemento fogo), cuja natureza penetrante, estava simbolizada forma pontiaguda de seus vértices. O ar era representado pelo octaedro, pois ele acreditava que o átomo de ar era um poliedro com oito faces e, a água, era representada pelo icosaedro, por acreditar que este era a forma do átomo de água. Ele ainda acreditava que, através de uma intervenção inteligente, um sólido platônico poderia se transformar em outro, exceto o cubo, que se transformava nele próprio. O dodecaedro, cheio de harmonia, simbolizava o próprio Universo. Segundo Eves (2004, p. 114):

> Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações do Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para a sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como fogo é o mais seco dos quatro "elementos" e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tenha maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a estabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções.

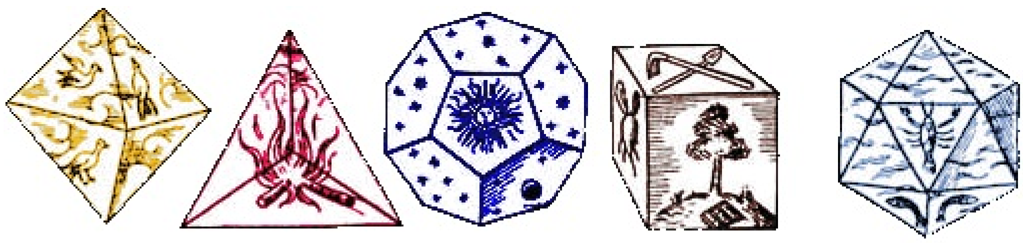


Figura 1.1: Poliedros Regulares de Platão: Elementos

Platão foi o primeiro matemático a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares. No seu diálogo *Timeu* ele faz referências a todos eles; desta forma, eles passaram a ser denominados de sólidos platônicos.

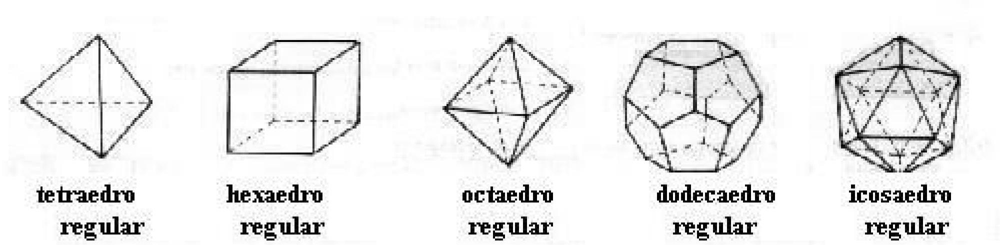


Figura 1.2: Poliedros Regulares de Platão

Mesmo sendo denominados como sólidos platônicos, Próclus (411-485 d.C.) atribui a construção destes poliedros a Pitágoras (569a.C.- 475a.C.), supondo ainda que é deste o teorema: *Há somente cinco poliedros regulares.* Séculos mais tarde, os poliedros regulares inspiraram Johannes Kepler (1571-1630 d.C.), astrônomo alemão, no estudo do movimento dos seis planetas que eram conhecidos (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vénus e Mercúrio). Kepler imaginou um modelo do sistema solar composto por esferas concêntricas inscritas e circunscritas a um cubo, a um tetraedro, a um octaedro, a um dodecaedro e a um icosaedro.

Figura 1.3: Modelo de Kepler

O modelo de Kepler se inicia com uma esfera externa, que representa a órbita de Saturno, dentro desta se inscreve, sucessivamente: um cubo, a esfera de Júpiter, um tetraedro, a esfera de Marte, um dodecaedro, a esfera da Terra, um octaedro e finalmente a esfera de Mercúrio, como mostra a figura 1.3.

Hoje o estudo dos sólidos platônicos é mais topológico como veremos nos tópicos a seguir.

1.2 *Poliedros e o Teorema de Euler*

Nesta seção abordaremos algumas definições e teoremas importantes no estudo dos poliedros, estes serão apresentados de forma mais completa para que não haja uma dualidade de interpretações. Assim, segundo Lima *et. al.* (2006, p. 283), pode-se definir poliedro como sendo

> [...] uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:
> a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
> b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
> Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
> c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).
> Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro.

Logo, segundo esta definição, os sólidos representados da figura 1.4[2] são poliedros.

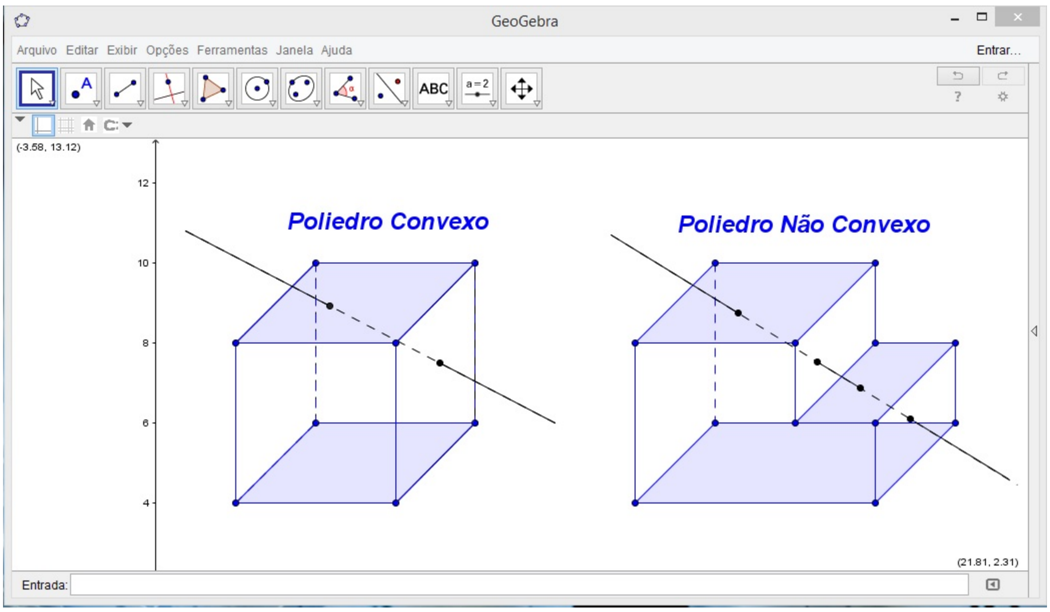


Figura 1.4: Poliedro convexo e não convexo

[2]Figura apresentada na tela do Geogebra. Muitas figuras apresentadas nesta pesquisa serão criadas com este software.

Ainda, segundo Lima *et. al.* (2006), pode-se afirmar que um poliedro é convexo se o seu interior também for convexo. Para melhor compreensão desta definição, pode-se deduzir que um poliedro é convexo se for possível traçar uma reta qualquer (não paralela a nenhuma de suas faces), esta o interceptar, no máximo, em dois pontos; caso contrário dizemos que o poliedro é não convexo, como é possível observar na figura 1.4.

Outra definição de poliedros convexos é apresentada por Dolce e Pompeo (1993, p.124), cujo enunciado é:

> Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:
> a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
> b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
> c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.
> Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção desses semi-espaços é chamado *poliedro convexo*.

Em qualquer poliedro, denomina-se *faces do poliedro* a cada uma de suas regiões poligonais, enquanto que a intersecção de duas de suas faces recebe o nome de *arestas do poliedro*. Já o encontro de três ou mais arestas chama-se *vértices do poliedro*. Representaremos o número de faces, de arestas e de vértices por F, A e V, respectivamente.

Segundo Lima *et. al.* (2006, p.284),

> [...] como as faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos por $F_n (n \geq 3)$ o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas, e observe que, pelo item (b) da definição do poliedro, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas.

Assim, é possível deduzir as relações abaixo:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n$$

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + ... + V_n$$

Como as faces que formam os poliedros podem ser de tipos diferentes, cada um deles podem possuir uma quantidade de arestas diferentes. Assim, se quisermos contá-las devemos multiplicar o número de faces triangulares por 3, o número de faces quadrangulares por 4, o número de faces pentagonais por 5 e assim sucessivamente; em seguida, somamos os resultados. Porém, ao fazer isso estaremos contando cada aresta duas vezes, já que esta é originada da intersecção de duas faces distintas. Assim, o número de arestas de qualquer poliedro pode ser representado por

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ... + nF_n).$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade por 2, obteremos a relação

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ... + nF_n.$$

A contagem do número de arestas também pode ser realizada utilizando os vértices do poliedro. Cada um destes é o encontro de três ou mais arestas; logo, se contarmos quantas arestas concorrem em cada vértice e somarmos os resultados, obteremos o dobro do número de arestas (porque cada aresta terá sido contada duas vezes: em um extremo e no outro). Logo, segue que

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ... + nV_n).$$

Multiplicando-se ambos os lados da igualdade por 2, teremos a relação

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n.$$

Veja ainda que podemos deduzir duas desigualdades a partir dessas equações. A primeira equação gera a desigualdade

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ... + nF_n$$

$$= 3(F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + ... + F_n) + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + ... + (n-1)F_n$$

$$= 3F + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + ... + (n-1)F_n$$

$$\geq 3F$$

Da segunda equação deduz-se que:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n$$

$$= 3(V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + ... + V_n) + V_4 + 2V_5 + 3V_6 + ... + (n-1)V_n$$

$$= 3V + V_4 + 2V_5 + 3V_6 + ... + (n-1)V_n$$

$$\geq 3V$$

A igualdade $2A = 3F$ somente é válida se o poliedro possuir apenas faces triangulares, sendo que neste caso teremos $F_4 = F_5 = F_6 = ... = F_{n+1} = 0, n > 3$. Analogamente, a igualdade $2A = 3V$ só é verdadeira se em todos os vértice concorrerem apenas três arestas, sendo que neste caso teremos $V_4 = V_5 = V_6 = ... = V_{n+1} = 0, n > 3$.

Agora, enunciaremos o foco central desta seção ao *teorema* ou ***relação de Euler***. Segundo Dolce e Pompeo (1993, p.124), "Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2,$$

em que V é o número de vértice, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro".

Demonstração: Será apresentado a demonstração do Teorema de Euler segundo Dolce e Pompeo (1993). Esta será dividida em duas etapas.

1ª etapa: Em caráter preliminar, mostraremos pelo Princípio de Indução Matemática (PIM) sobre o número de faces que, para uma superfície poliédrica limitada convexa *aberta*, vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1,$$

onde V_a, A_a e F_a representa o número de vértices, aresta e faces da superfície poliédrica limitada aberta, respectivamente.

i) Para $F_a = 1$.

Neste caso, trata-se de uma única superfície, ou seja, um polígono plano convexo de n lados. Logo, este ainda possui n vértices. Ou seja, $A_a = n$ e $V_a = n$. Observe algumas superfícies:

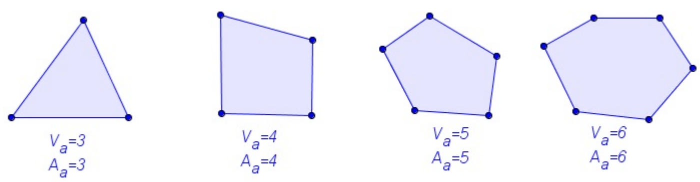


Figura 1.5: Poligonos – relação entre vértices e arestas

Segue que:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1.$$

Então, a relação é verdadeira para $F_a = 1$.

ii) Agora, admitamos que a relação seja válida para uma superfície de F' faces (onde V' é o número de vértices e A' o número de arestas), vamos provar que também é válida para uma superfície que possui $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F_a$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Tomemos uma superfície que possui F' faces, V' vértices e A' arestas; por hipótese de indução teremos:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando-se a essa superfície (que é aberta) uma face com p arestas (ou lados) e considerando que q arestas (ou lados) coincidam com arestas já existentes, obteremos uma nova superfície com F_a faces, V_a vértices e A_a arestas, tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p - q$ (q arestas coincidiram)

$V_a = V' + p - (q + 1)$ (q arestas coincidindo, *q+1* vértices coincidem)

Substituído os valores acima na expressão $V_a - A_a + F_a$, obteremos

$$V_a - A_a + F_a$$

$$= V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1$$

$$= V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1.$$

Portanto, pode-se deduzir a relação

$$V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'.$$

Esta igualdade mostra que a expressão não é alterada se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície aberta.

Por hipótese de indução, temos que $V' - A' + F' = 1$; segue daqui que

$$V_a - A_a + F_a = 1,$$

o que prova a relação preliminar.

2ª etapa: Tomemos uma superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com F faces, V vértices e A arestas) e dela retiramos uma face, como mostra a figura 1.6.

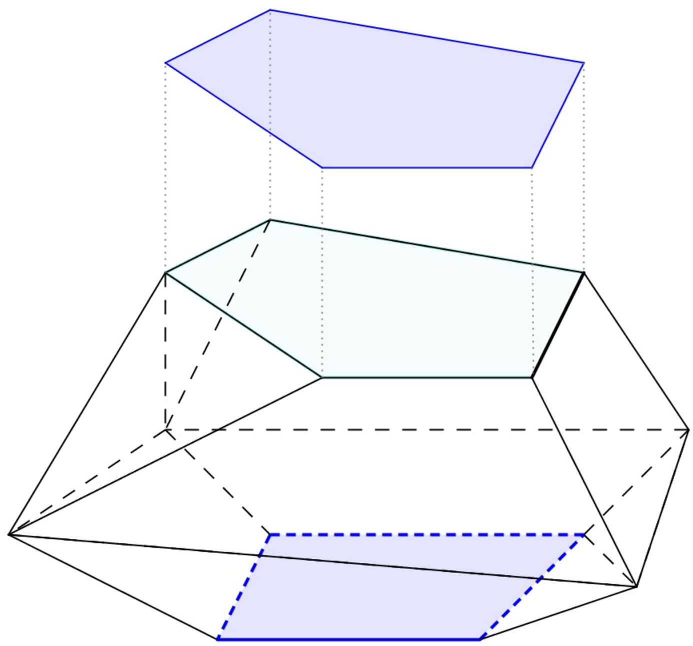


Figura 1.6: Poliedro retirando-se uma de suas faces

Assim, o poliedro ficará com uma superfície aberta (com F_a faces, V_a vértices e A_a arestas) à qual vale a relação $V_a - A_a + F_a = 1$. Mas, como temos $F_a = F - 1$, $V_a = V$ e $A_a = A$. Substituindo estas igualdades na relação, teremos:

$$V - A + F - 1 = 1.$$

O que resulta na relação:

$$\mathbf{V - A + F = 2}$$

Concluindo, assim, a demonstração.

Podemos ainda fazer algumas considerações importantes:

a) Denomina-se *poliedro euleriano* a todo poliedro que satisfaz a relação de Euler.

b) Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Observe a figura 1.7 a seguir.

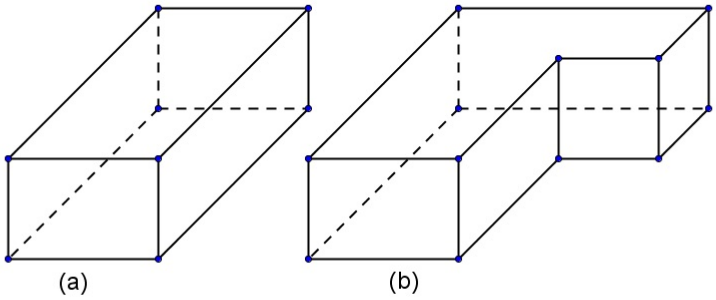


Figura 1.7: Poliedros: relação de Euler

Aplicando o teorema de Euler em ambos os casos teremos:

Figura 1.7 (a): $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$.

Figura 1.7 (b): $V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$.

Podemos perceber que a figura 1.7 (b) não é um poliedro convexo, porém a relação de Euler é válida para ele. Agora, observe a figura 1.8 de um poliedro para o qual não é válida a relação de Euler.

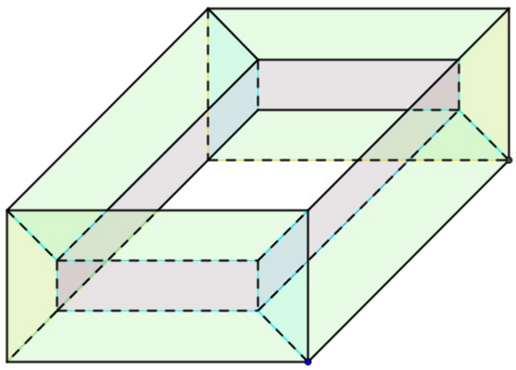


Figura 1.8: Poliedro: *Não eulerirano*

Note que ele possui 16 vértices, 32 arestas e 16 faces. Logo, teremos:

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Este poliedro não é euleriano.

1.3 *Poliedros de Platão*

Segundo Lima *et. al.* (2006, p. 293), "Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas".

Segundo Machado (1988, p. 146), " Um poliedro euleriano é chamado de poliedro de Platão quando todas as faces são polígonos com o mesmo número de lados e todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas".

Das duas definições citadas podemos concluir que todos os poliedros regulares convexos são *poliedros de Platão*; o teorema a seguir é fundamental para identificar todos eles.

Teorema: *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração: Segundo Machado (1988), é possível observar que um poliedro de Platão é euleriano e, portanto, satisfaz o Teorema de Euler, ou seja, vale a relação

$$V - A + F = 2.$$

Tomemos um poliedro de Platão, com F faces, V vértices e A arestas; admitamos que cada face seja formada por n lados ($n \geq 3$) e em cada vértice concorram r arestas ($r \geq 3$).

Como cada aresta é comum a duas faces distintas, temos:

$$A = \frac{nF}{2}.$$

Logo, segue que:

$$F = \frac{2A}{n}.$$

Analogamente, como cada aresta tem extremidade em dois vértices diferentes, temos:

$$A = \frac{rV}{2}.$$

Então,

$$V = \frac{2A}{r}.$$

Substituindo F e V na relação de Euler $V - A + F = 2$, obteremos:

$$\frac{2A}{r} - A + \frac{2A}{n} = 2.$$

Segue que:

$$A\left(\frac{2}{r}-1+\frac{2}{n}\right)=2.$$

Desta forma, deduz-se que:

$$A=\frac{2}{\frac{2}{r}+\frac{2}{n}-1}.$$

Como $A>0$, temos que $\frac{2}{r}+\frac{2}{n}>1$. Mas, como $n\geq 3$ e $r\geq 3$, podemos verificar esta relação em apenas cinco casos:

1º caso: Para $n=3$ e $r=3$:

$$\frac{2}{r}+\frac{2}{n}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}>1.$$

2º caso: Para $n=3$ e $r=4$:

$$\frac{2}{r}+\frac{2}{n}=\frac{2}{4}+\frac{2}{3}=\frac{14}{12}>1.$$

3º caso: Para $n=3$ e $r=5$:

$$\frac{2}{r}+\frac{2}{n}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{16}{15}>1.$$

4º caso: Para $n=4$ e $r=3$:

$$\frac{2}{r}+\frac{2}{n}=\frac{2}{3}+\frac{2}{4}=\frac{14}{12}>1.$$

5º caso: Para $n=5$ e $r=3$:

$$\frac{2}{r}+\frac{2}{n}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}>1.$$

Calculando A, V e F em cada caso, podemos verificar quais são os poliedros a que se referem. Assim, temos:

1º caso: Para $n=3$ e $r=3$.

$$A=\frac{2}{\frac{2}{r}+\frac{2}{n}-1}=\frac{2}{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6.$$

$$V = \frac{2A}{r} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

Como este poliedro possui 4 faces regulares, pode-se concluir que se trata do *tetraedro regular*.

2º caso: Para $n = 3$ e $r = 4$.

$$A = \frac{2}{\frac{2}{r} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{4} + \frac{2}{3} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 12.$$

$$V = \frac{2A}{r} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6.$$

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8.$$

Veja que este poliedro possui 8 faces regulares, recebendo o nome de *octaedro regular*.

3º caso: Para $n = 3$ e $r = 5$.

$$A = \frac{2}{\frac{2}{r} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{15}} = 30.$$

$$V = \frac{2A}{r} = \frac{2 \cdot 30}{5} 12.$$

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow F = 20.$$

Este poliedro possui 20 faces regulares. Logo, trata-se do *icosaedro regular*.

4º caso: Para $n = 4$ e $r = 3$.

$$A = \frac{2}{\frac{2}{r} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{2}{4} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 12.$$

$$V = \frac{2A}{r} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8.$$

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6.$$

Observe que este poliedro possui 6 faces regulares. A ele dá-se o nome de *hexaedro regular*.

5º caso: Para $n = 5$ e $r = 3$.

$$A = \frac{2}{\frac{2}{r} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{15}} = 30.$$

$$V = \frac{2A}{r} = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20.$$

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow F = 12.$$

Este último caso representa o *dodecaedro regular*, pois o poliedro possui 12 faces regulares.

Consequentemente, existem apenas cinco poliedro regulares convexos. Temos ainda que:

Os tetraedros, os octaedros e os icosaedros regulares possuem faces triangulares (triângulo equilátero), pois $n = 3$.

Os hexaedros regulares possuem faces quadrangulares (quadrado), pois $n = 4$.

Os Icosaedros regulares possuem faces pentagonais (pentágono regular), pois $n = 5$.

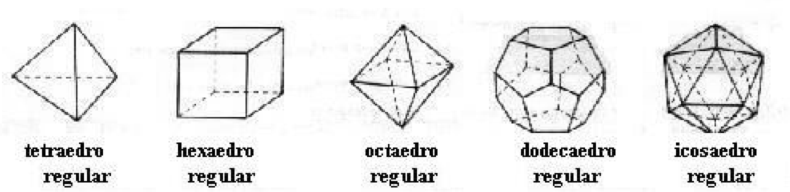


Figura 1.9: Poliedros de Platão

Capítulo 2

A HEURÍSTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> "É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo".
>
> (Polya, 2006, p. 41)

Em nosso cotidiano nos deparamos com inúmeras situações que exigem certo esforço mental para saná-las. Uma simples ida ao supermercado está cheia de situações que precisam de uma tomada de decisão, como exemplos podemos pensar: se levamos um produto de uma marca conhecida por um preço maior ou se optamos por uma com preço mais acessível, mas com uma marca desconhecida? Ao abastecer o carro o fazemos no posto de gasolina mais próximo, mesmo com o preço do combustível mais alto, ou em um outro estabelecimento mais distante com preço mais acessível? Em ambos os casos há a necessidade de um raciocínio lógico e uma análise de qual delas é mais vantajosa. Estas circunstâncias podem ser consideradas como sendo problemas que, segundo Dante (2007, p. 9), "É qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la". Baseado nesta definição, podemos supor que uma simples troca de pneus de um carro ou o conserto de um eletrodoméstico podem, também, ser considerados um problema.

No entanto, nesta pesquisa abordaremos a resolução de problemas relacionados à modelagem de áreas e volumes dos poliedros de Platão. Sendo estes conceitos geométricos desenvolvidos pelo uso da matemática podemos defini-los como sendo problemas matemáticos que, de acordo com Dante (2007, p. 10), "É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-los".

Segundo Mendes (2009) existem dois entendimentos relacionados com a resolução de problemas que podem ser observadas ao se fazer uma pesquisa sobre este tema. O primeiro relacionado à análise de como os alunos realizam a tarefa de resolver problemas, identificando aqueles com mais facilidades no processo, observando as características destes que contribuem para resolução de problemas. O segundo é desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas utilizando um processo heurístico, que consiste em sistematizar certas sequências que visam melhorar o desempenho dos alunos na execução das atividades.

Ensinar matemática através da resolução de problemas consiste em colocar os alunos em contato com situações diferentes daquelas que frequentemente são observadas em sala de aula, caracterizados pela resolução de exercícios rotineiros baseados num método tipológico, onde o aluno apenas segue um modelo preestabelecido, sem que este promova, nos alunos, a habilidade de pensar de forma crítica e reflexiva. Segundo Vila e Callejo (2006, p. 29),

> [...] o ensino/aprendizagem por meio da resolução de problemas é uma tentativa de modificar o desenvolvimento habitual das aulas de matemática. Os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos, capazes de se perguntar pelos fatos, suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios, modificando-os, se for necessário, e de propor soluções.

Partindo da definição de problema citado acima podemos entender a resolução de problemas como uma situação que se inicia na nossa infância e que nos acompanha até a fase adulta e, com isso, suas teorias podem ser adaptadas a cada etapa de nossas vidas; Consideraremos ainda que esta pesquisa terá uma abordagem sócio construtivista, pois se pretende ensinar uma estratégia que objetiva a descoberta e análise de uma solução para determinado problema, por meio da construção sistemática de conhecimentos. Para esta pesquisa serão convidados os alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Objetivo de Jussara-GO que queiram participar da aplicação do método heurístico, aos quais serão expostas as etapas da resolução de problemas. Em seguida, apresentaremos o problema que queremos solucionar, ou seja, construir um modelo matemático que expresse genericamente a área e o volume dos poliedros de Platão. Este processo será divido em etapas onde os alunos selecionados produzirão os modelos pedidos, sendo que, através destes, eles desenvolverão novos conceitos matemáticos de forma efetiva.

Devemos ainda destacar que o papel do professor na realização do processo heurístico é de suma importância, pois será ele que selecionará o problema e direcionará cada etapa do método, determinando as habilidades que os alunos devem adquirir; suas argumentações devem aguçar a vontade dos alunos em se alcançar um caminho para se resolver o problema. Segundo Vila e Callejo (2006, p. 28) "[...] um problema não pode ser desligado dos alunos aos quais é proposto nem da intencionalidade do professor que o selecionou para uma situação concreta de ensino-aprendizagem".

Segundo Varizo (1993), é consenso entre os professores de Matemática a resolução de problemas é importante para o ensino da matemática, porém não há um momento definido para o seu uso em sala de aula. De acordo com ela, há inúmeros motivos para o uso da resolução de problemas: alguns professores justificam sua aplicação por acreditarem que o conhecimento advindo deste processo ajudará o aluno a solucionar situações-problemas que fazem parte da sua vida social ou profissional; outros o fazem por acreditar que o objetivo fundamental da matemática é resolver problemas.

Ainda, de acordo com Varizo (1993), há um conflito entre os professores de matemática no momento de definir o que poderia ser considerado uma resolução de problema. Segundo ela, a maior parte destes profissionais, que atuam no Ensino Fundamental e Médio, consideram que resolver problemas é encontrar uma solução correta, não se preocupando com o processo que levou o aluno até ela; para estes professores a resolução de problemas está desvinculada do problema em sua essência, sendo que apenas sua resposta final é avaliada. Segundo Varizo (1993, p. 3),

> Esses professores ignoram o fato de que o *"saber como"* não implica o *"saber porque"*, nem o *"saber utilizar"*. Os alunos, ao desenvolverem operações matemáticas pela imitação e memorização, sem compreensão, têm poucas possibilidades de se apropriarem do conhecimento matemático como uma de suas ferramentas para atuar no mundo e, muito menos, como ciência.

Até a década de 60 os educadores matemáticos se preocupavam apenas em ensinar através de um sistema tipológico, repetitivo e com ênfase na resposta, correta ou não.

Porém, na década de 70, a Educação passa a refletir o ensino baseada na determinação de situações que construíssem, nos alunos, competências mínimas que lhes servissem para desenvolver comportamentos e atitudes sociais. Muitos professores desta geração tinham a preocupação de ensinar aos alunos habilidades básicas. Porém, esta transformação desenvolvida pela Educação não afetou significativamente o ensino da Matemática.

Segundo Varizo (1993), haviam alguns professores que entendiam a resolução de problemas como um processo e, desta forma, haveria a necessidade de desenvolver estratégias, métodos, procedimentos e heurísticas capazes de se alcançar a solução de determinado problema. Para este grupo de educadores matemáticos o raciocínio usado na resolução da situação-problema era mais importante que a simples resposta final. Embora no início dos anos 80 estes professores representavam uma minoria, nos anos seguintes houve um crescimento significativos destes devido a aceitação desta proposta de ensino, sendo que neste período a resolução de problemas passa a ser considerada uma das principais finalidades do ensino da Matemática. Os adeptos desta concepção sofriam uma grande influência das teorias contidas no livro *"How to solve it?"*, de George Polya, direcionado aos professores do 2º grau, cuja primeira publicação foi em 1944. Deve-se ressaltar que desde a década de 80 até o presente momento, a grande maioria dos estudos e pesquisas relacionados à resolução de problemas têm suas bases fundamentadas nas teorias de Polya.

2.1 *Tipos de Problemas*

Nas inúmeras literaturas sobre o assunto podemos observar um grande acervo acerca dos tipos de problemas que existem. No entanto, existem autores que conseguem uma sintetização mais condizente com o tema desta pesquisa. Segundo Varizo (1993, p. 4) os problemas podem ser "[...] classificados em: problemas rotineiros, não-rotineiros, reais e recreativos".

2.1.1 *Problemas Rotineiros*

Os problemas rotineiros podem ser entendidos como aqueles que o aluno utiliza um algoritmo preestabelecido pelo professor através de uma sequência lógica, um passo a passo. Podendo ser caracterizados, também, pelos ditos problemas de aplicação, que se apresentam sob uma linguagem comum, devendo o aluno reescrevê-lo na forma "simbólica" ou "linguagem matemática". Geralmente aparecem nos logo após a exposição de um conteúdo. Este tipo de problema não desperta a curiosidade e não desenvolve o pensamento abstrato, já que o aluno apenas deve reproduzir o conhecimento já utilizado pelo professor; constituem uma repetição de ações mecanizadas, um exercício para reforçar um determinado conteúdo. Segue abaixo alguns exemplos deste tipo de problema:

1. Encontre as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2. Resolva a equação $\log_x 81 = 4$.

3. O dobro da soma entre um número e cinco é igual ao triplo da diferença entre este número e quatro. Qual é o número?

Veja que em todos os exemplos acima o aluno precisa apenas utilizar o algoritmo apresentado pelo professor durante sua aula expositiva.

2.1.2 *Problemas Reais*

Os problemas reais são aqueles que se assemelham com situações-problemas vividas pelo homem no seu cotidiano. Este tipo de problema pode apresentar várias soluções, porém cabe analisar e selecionar a que melhor se adéqua ao problema real proposto. Neste tipo de situação, o trabalho em pequenos grupos é mais eficaz e significativo, pois será necessário coletar e analisar informações, envolvendo uma tomada de decisão.

A nível de escolarização de 1º e 2º graus, os problemas reais podem se caracterizar através de situações próximas da realidade de cada aluno ou como uma necessidade coletiva da comunidade em que os alunos estão inseridos. Um excelente exemplo deste tipo de problema ocorreu numa escola campo de estágio do curso de licenciatura em Matemática da UFG, na periferia de Goiânia, no ano de 1980; segundo Varizo (1993, p.8), a professora da turma, sob sua orientação,

> [...] solicitou aos alunos da 5ª série do primeiro grau, que especificassem os mantimentos que comprariam para alimentar uma família de cinco pessoas com um terço do salário mínimo, por um mês (havia sido verificado anteriormente que as famílias dos alunos ganhavam, em média, dois salários mínimos e que as famílias compunham-se, em média, de cinco pessoas). Solicitou-se, também, que a relação dos mantimentos deveria vir com o preço unitário e total. Os preços foram levantados pelos alunos nos mercados do bairro. desejava-se que os alunos desenvolvessem os algoritmos das quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação, divisão) e habilidades de cálculo com medidas de peso. Este proble-

ma foi dado para os alunos resolverem em pequenos grupos.

Segundo Varizo (1993), a execução do problema motivou os alunos, pois estes se envolveram com a proposta e buscaram soluções para a situação-problema em questão. Esta, por sua vez, contribui com a disciplina educação para o lar, além de servir como diagnóstico de aprendizagem, pois foi constatado que alguns alunos não conseguiam fazer determinadas operações matemáticas.

Para o Ensino Médio podemos propor o seguinte problema para ser resolvido em pequenos grupos: *Pesquise a respeito dos diversos ramos comerciais de sua cidade e em sites de busca, e verifique qual é mais rentável? Considerando que você tenha* $R\$ \ 80\,000,00$ *para aplicar. Faça uma planilha de custos.* Peça que organizem uma apresentação para expor a melhor solução nas suas análises e as devidas considerações. Em um outro momento retome a discussão e veja as análises que foram realizadas por cada grupo.

2.1.3 *Problemas Recreativos*

Embora não se tenha muito bem definido uma característica exclusiva, os problemas recreativos podem ser entendidos como aqueles relacionados aos aspectos históricos de determinado conteúdo, lendas (por exemplo: a origem do xadrez, os contos fantasiosos, porém racionalistas, comuns nas obras de Malba Tahan) e jogos de quebra-cabeça (que despertam o interesse dos alunos, desenvolvendo nestes, atitudes na busca de estratégias para se chegar a vitória). Para Gardner (*apud* Varizo, 1993, p. 9), "a matemática recreativa pode ser considerada simplesmente como matemática, com um toque de curiosidade ou diversão".

Pedagogicamente, muitos professores que desconhecem este tipo de problema acreditam que se trata de uma situação que promove apenas um momento de diversão ou de simples brincadeiras de descontração, sem preocupação com conteúdo ou conhecimento. No entanto, estes aspectos são apenas motivacionais, pois por trás deste tipo de problema, temos os aspectos: sociais (os alunos o executam em grupos), racionalista (os alunos devem montar e executar estratégias para se alcançar a vitória nas atividades propostas), legislativo (existem regras que devem ser seguidas e cumpridas), lúdico (o aluno tem prazer em fazê-lo), cognitivo e interpretativo (aprendem ou reforçam conteúdos matemáticos relacionados ao problema; no caso dos contos a busca pela solução dos problemas requer interpretação correta para se encontrá-la), contribui para transferência de conhecimento entre os alunos e entre professor mediador e aluno, entre outros. Vamos observar alguns exemplos abaixo:

1. Jogo do Nin,
2. Jogo do Bingo Trigonométrico

2.1.4 *Problemas Não-rotineiros*

Segundo Varizo (1993, p. 5) os problemas não-rotineiros são "aqueles cuja estratégia de solução não está contida no enunciado, exigindo do aluno o desenvolvimento de raciocínio mais complexo do que os problemas anteriores, tais como: estabelecer um plano de solução, levantar hipóteses, fazer conjecturas, organizar dados em tabelas, elaborar gráficos".

Assim, podemos compreender que os problemas não-rotineiros produzem um conhecimento mais amplo, uma vez que exigem do aluno um raciocínio mais consistente e uma análise mais rigorosa do problema. No entanto, mesmo com tal complexidade a matemática utilizada se encontra pronta e acabada, cabendo ao aluno conhecê-la e saber utilizá-la para gerar uma solução para o problema proposto.

Pode-se observar que os problemas não-rotineiros oferecem uma situação de autonomia para o aluno, uma vez que este deve criar estratégias para se alcançar uma solução que satisfaça as condições do problema. Existem problemas que oferecem diferentes soluções e variadas estratégias de se chegar a elas. Exemplo:

1. Dê as medidas de um paralelepípedo cuja área seja de $240m^2$.
2. Cite 3 números inteiros cujo produto seja 600.
3. Encontre uma função $f : R \longrightarrow R$ da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ que intercepte o eixo das ordenadas no ponto 5 e o eixo das abscissas no ponto 4.

Após a execução das atividades é importante que o professor proporcione um debate ou crie um painel para os alunos comparem as várias estratégias e soluções que foram geradas. Com isso, o aluno pode observar o dinamismo que a matemática possui, além de agregar outras formas de resolução que poderão lhes ser úteis em situações semelhantes.

A proposta contida nesta pesquisa está relacionada a este tipo de problema. Pois, os alunos participantes desta pesquisa deverão compreender o problema proposto, questionar e analisar os dados que possuem e montar estratégias para alcançar o objetivo, construir modelos matemáticos capazes de calcular as áreas e os volumes dos poliedros de Platão. Assim sendo, devemos conhecer mais detalhadamente o método heurístico e suas etapas.

2.2 *As Etapas do Método Heurístico*

A célebre frase "Penso, logo existo" de Descartes nos faz refletir acerca do ato necessário a uma vida humana plena, pensar. Esta atitude está interligada à resolução de problemas, pois esta requer um esforço mental para elaboração de estratégias que visam o alcance de uma solução que a satisfaça totalmente ou em parte. Segundo Polya (2006, p. 159) "Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. A não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos resolver um problema".

De fato, inúmeras pesquisas já foram realizadas a respeito da metodologia de Resolução de Problemas no ensino e na aprendizagem da Matemática, no entanto muitos professores questionam sua aplicabilidade na área em questão. Porém, se observarmos o objetivo definido pelo Ministério da Educação (MEC) para o ensino de Matemática no Ensino Médio, percebemos que a resolução de problemas se caracterizará como uma escolha certa para tal ação, uma vez que esta constrói no aluno um conhecimento científico, devido a suas etapas serem sistematizadas e experimentadas através de uma rigorosa verificação da solução alcançada. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – PCNEM (2000, p. 21), o ensino da matemática

> [...] deve contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamento mais abstratos e ressignificados, que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos e pressupostos metodológicos. A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas é finalidade da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de conhecimentos, bens e serviços.

A partir do momento que se enfatiza o ensino da matemática através da resolução de problemas, deve-se estar atento a alguns princípios que norteiam essa ação. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática) – PCN (1997, p. 32-33), podem ser sintetizados os seguintes princípios:

> • o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> • o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> • aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
> • o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
> • a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Mas, o que significa *Heurística*?

Se consultarmos a definição de heurística dada por Ferreira (2009, p. 1035, dicionário Aurélio), teremos:

> [Do latim: cient. heuristica (< gr.heuristiké [téchne], 'arte de encontrar', 'descobrir').] **S. f. 1.** Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas. [Cf. heureca.] **2.** Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar. **3.** Ciência auxiliar da História, que trata da pesquisa das fontes. **4.** *Inform.* Metodologia, ou algoritmo, us. para resolver problemas por métodos que, embora não rigorosos, ger. refletem o conhecimento humano e permitem obter uma solução satisfatória.

Segundo Polya (2006), a heurística é uma ciência que busca a compreensão do processo que gere a solução de problemas, especialmente aqueles que envolvem operações mentais, que tentam certa utilidade. Neste processo, nenhuma fonte de informação é desconsiderada e seu estudo deve ser analisado tanto logicamente quanto psicologicamente. A heurística procura melhorar o conhecimento das operações mentais básicas que se aplicam na resolução de problemas, proporcionando uma situação didática de aprendizagem significativa para o ensino da Matemática.

No método heurístico o professor possui um papel fundamental, sua ação não é a de mostrar como um problema é resolvido, mas apresentando aos alunos uma situação-problema que deve ser resolvida. Assim, o professor não se coloca como detentor do saber que será apenas repassado, mas como mediador que atua como um incentivador, fazendo com que os alunos sintam vontade de encontrar uma solução para o problema, desenvolvendo neles a capacidade de fazer conjecturas, inventar, verificar e refletir suas próprias ações e modificá-las caso seja necessário.

Nesse sentido o professor assume dois papéis: o de companheiro participante do processo de resolução de problemas, indagando, questionando, averiguando, sugerindo estratégias de solução, de maneira que os alunos possam alcançar o objetivo, resolver o problema proposto; e o de analista que verifica ao final de cada etapa do processo que estratégias foram usadas e se há possibilidades de generalização, ou ainda, propondo novos problemas derivados do apresentado.

As fases do método da resolução de problemas desenvolvido por Polya (2006) consiste em quatro etapas sequenciais: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto, sendo que estas serão abordadas, analisadas e exemplificadas a seguir.

2.2.1 *Compreensão do Problema*

Após selecionar o problema e apresentá-lo a classe, o professor deve dialogar com os alunos e orientá-los a respeito da *compreensão do problema*, que consiste em ler e interpretar o enunciado do problema. Nesse momento entra a ação de mediador e orientador do professor que segundo Polya (2006, p. XIX) deve fazer questionamentos relevantes aos alunos tais como

> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

É necessário ainda orientar os alunos a respeito da importância de se utilizar uma notação adequada, de forma que ele compreenda o que está construído no momento de transformar o problema numa expressão matemática, pois caso contrário esta pode se tornar o elemento que será causador do insucesso na resolução do problema.

Uma boa estratégia de resolução consiste na fragmentação do problema, pois se torna mais nítido seus detalhes, facilitando a separação dos dados da situação-problema e avaliando quais são necessários e quais são irrelevantes. O que se deve deixar claro nesta etapa do processo é a importância de se conhecer cada elemento do enunciado, se preciso faça anotações ou esquemas que visem a efetiva interpretação do problema apresentado.

Após estar certo da compreensão do problema, os alunos podem seguir para segunda etapa do processo heurístico, a elaboração de um plano de solução.

2.2.2 *Estabelecimento de um Plano*

Esta é a etapa em que o aluno deve utilizar o conhecimento que possui para formular uma estratégia de resolução e ir além, utilizar a imaginação, a intuição e toda habilidade relacionada à busca de soluções desenvolvidas por ele em todos os anos de estudo, para construir um caminho que leve à solução dos problemas. Este momento é oneroso, pois exige dos alunos a busca de informações que possa lhes ajudar, exigindo dele a pesquisa e investigação.

Nesta etapa, muitos professores acabam expondo suas ideias acerca da resolução dos problemas e, com isso, inibem ou desmotivam o aluno na construção do plano de solução. Assim, sugere ao professor que faça perguntas promova o surgimento de ideias que possam gerar a solução.

Deve-se ainda propor ao aluno um estudo detalhado do problema de maneira que ele possa utilizar analogias de forma precisa e coesa. É importante que o aluno consiga fazer generalizações, pois esta habilidade lhe permitirá conceituar e fazer abstrações que lhe serão úteis na resolução de problemas.

Cabe nesta etapa utilizar-se da técnica de decomposição e recomposição; a primeira, fragmenta informações que podem ser estudadas e manipuladas para gerar outras informações. A segunda, reorganiza os novos conhecimentos adquiridos criando um problema diferente do proposto, mas que auxilia na sua resolução.

É necessário enfatizar nesta etapa a necessidade do aluno possuir um conhecimento que permita a resolução do problema, ou seja, ele deve ter um conhecimento suficiente para gerar uma boa ideia para resolução do problema. Segundo Polya (1995), o aluno deve conhecer um problema correlato que possa ser utilizado para gerar um novo conhecimento. Para Polya (2006, p. 7),

> [...] é difícil ter uma boa idéia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa idéia, não basta uma simples recordação, mas não podemos ter uma idéia boa sem lembrar alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *conhece um problema correlato?*

Nesta etapa, o professor pode orientar os alunos a pesquisar elementos, relacionados ao problema apresentado, que possam ajudá-los a construir um plano executável; sendo que todo conhecimento adquirido poderá ser útil no momento de analisar cada possibilidade criada. Polya (2006, p. XIX) sugere, nesta etapa, algumas indagações que auxiliam o aluno na elaboração dos planos:

> Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema do mesmo tipo ou sobre o mesmo assunto? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema do mesmo tipo que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema do mesmo tipo e já resolvido anteriormente. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
>
> Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema do mesmo tipo. É possível imaginar um problema parecido mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Estas peguntas vão aguçar a curiosidade dos alunos, além de induzi-los à uma avaliação das escolhas que estão fazendo para se chegar a solução do problema. Após estabelecer um plano que leve ao resultado desejado, o aluno deve executar o plano que foi elaborado.

2.2.3 *Execução do Plano*

Segundo Polya (2006), após elaborar o plano, o aluno deve colocar em prática o que pesquisou, efetivando as ideias que foram geradas na etapa anterior, desenvolvendo operações e demonstrações afim de se alcançar a solução do problema, isto é, ele precisa *executar o plano*.

Nesta fase, o aluno deve estar atento aos passos que determinou para resolver o problema, verificando cada operação com rigor, para que não haja falhas na execução. Se o problema que foi proposto for muito complexo, o aluno deve fragmentá-lo e resolver as partes sob um olhar hierárquico, isto é, o aluno deve estabelecer o que é mais importante resolver primeiro, de maneira que o resultado contribua para se alcançar a solução do problema.

Para esta etapa, Polya (2006, p. XX) sugere que se faça algumas perguntas e estratégias para reforçar a exatidão da resolução: "Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?".

Embora esta etapa gere a solução do problema, o método não se encerra nele. É necessário ir além, fazer uma análise da solução encontrada; deve-se fazer um *retrospecto*.

2.2.4 *Retrospecto*

Esta é, de fato, a última etapa do método heurístico. É o momento em que o aluno faz uma análise crítica do trabalho realizado, revisando cada passo executado. Este momento é de suma importância, pois é nele que o aluno utilizará sua criatividade para avaliar a solução encontrada.

A análise da solução, feita nesta etapa, deve ser rigorosa, verificando sua exatidão, ou seja, se ela satisfaz as condicionantes do enunciado do problema. Deve ainda observar se existe outra forma de resolver o problema proposto.

Polya (2006) ainda sugere que o aluno utilize o método em outros problemas semelhantes, ou que estabeleça uma situação-problema inverso ao que foi proposto. Para o autor esta última ação gera um desenvolvimento intelectual importantíssimo, pois se o aluno é capaz de executar operações mentais inversas, significa que ele efetivamente adquiriu um domínio dos conhecimentos matemáticos utilizados na resolução do problema.

Para esta etapa, Polya (2006, p. XX) sugere que se faça os seguintes questionamentos: "É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?"

É necessário ressaltar que cada uma das etapas possui sua relevância e, portanto, o método heurístico deve ser aplicado com exatidão, mantendo sua hierarquia; pois algum aluno pode encontrar a solução de um problema de maneira extraordinária; no entanto, Polya (2006, p. 5) faz uma advertência acerca desta situação:

> Cada uma destas fases tem a sua importância. Pode acontecer que a um estudante ocorra uma excepcional idéia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Estas idéias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas alguma coisa muito inconveniente e desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção. Acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar detalhes em perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudo verificar cada passo. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa.

Desta forma, pode-se perceber que a utilização do método heurístico em sala de aula requer um planejamento sistemático e cuidadoso e, como os conhecimentos dos alunos são heterogêneos, o tempo necessário para cada um deles assimilar determinada informação é diferente; logo, o professor não pode se preocupar com o tempo e deve ser paciente para aguardar que aluno desenvolva o processo heurístico. É, ainda, de suma importância que se tenha certa atenção para formulação do problema, pois este deve partir do conhecimento dos alunos e tenha algum significado para eles.

2.2.5 *Compreendendo o Método Através de Exemplos*

Para que se possa ter uma compreensão mais efetiva do método heurístico, será abordado a seguir três exemplos que explicitam cada etapa da resolução de problemas descritas acima, com uma possível solução para cada situação.

Exemplo

Num manicômio havia 4 homens que participavam de reuniões de reabilitação: João, José, Pedro e Lucas. O médico psiquiatra que os tratava conhecia-os bem, e sabia que deveria colocá-los em uma única fila, lado a lados, sentados, seguindo alguns critérios para que não houvesse confusão nas sessões. Cada um dos internos possuía uma personalidade, um hábito e um animal imaginário. A forma como eles eram organizados nas cadeiras seguia o seguinte padrão:

a) O que sentava ao lado de Deus via camelos;

b) Napoleão ocupava a 1ª carteira;

c) José sentava ao lado de quem via cachorros;

d) Pedro tinha o hábito de passar a mão no cabelo;

e) Lucas ocupava a última cadeira e gostava de cutucar o nariz;

f) Jesus sentava ao lado de Lucas e gostava de cachorros;

g) Quem criava cachorros tinha o hábito de soltar gases;

h) Quem sentava no meio via gatos e gostava de piscar os olhos;

i) Hércules não tirava o dedo do nariz, a não ser para danar com seu coelho.

Agora, responda quem via camelos?

Na tentativa de se resolver este tipo de situação o aluno pode adquirir as competência de selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas e a tomar decisões. Desenvolve ainda a capacidade criar estratégias que envolvem informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos, ou ainda, interpretar e associar informações dadas em listas na construção de tabelas, bem como a utilização de raciocínio lógico na resolução deste tipo de problema, com características interpretativas.

Uma solução:

a) O primeiro passo é a compreensão do problema. Esta fase sugere que o aluno responda a determinadas perguntas básicas:

Quais são os dados?

Espera-se que o aluno entenda que os dados são as informações contidas no enunciado; logo, é necessário primeiro destacá-los. Assim, teremos como dados: São '4 homens: João, José, Pedro e Lucas', que devem ser colocados em uma única fila, lado a lados, sentados. Há um critério para isso, pois cada um deles 'possuía uma personalidade, um hábito e um animal imaginário'. A organização deles seguia um padrão:

‘a) O que sentava ao lado de Deus via camelos;

b) Napoleão ocupava a 1ª carteira;

c) José sentava ao lado de quem via cachorros;

d) Pedro tinha o hábito de passar a mão no cabelo;

e) Lucas ocupava a última cadeira e gostava de cutucar o nariz;

f) Jesus sentava ao lado de Lucas e gostava de cachorros;

g) Quem criava cachorros tinha o hábito de soltar gases;

h) Quem sentava no meio via gatos e gostava de piscar os olhos;

i) Hércules não tirava o dedo do nariz, a não ser para danar com seu coelho’.

Qual é a incógnita? Ou que se pretende descobrir?

O aluno deve identificar o que se deseja descobrir no problema, ou seja, qual variável se pede na situação dada. Neste caso:

‘Quem via camelos?’.

Os dados são suficientes?

O aluno deve avaliar se os dados contidos no enunciado são suficientes ou não para solucionar o problema.

Tem como organizar os dados em tabelas contendo as variáveis e os valores?

Esta sugestão não é obrigatória, ficando a critério do aluno esta montagem.

A tabela facilita a resolução?

Embora não seja obrigado utilizar tabelas, neste caso seria de suma importância.

b) O segundo passo é fazer a conexão entre os dados e a incógnita. É preciso criar um plano para a resolução.

Neste momento o professor pode fazer algumas indagações aos aluno acerca da resolução, tais como:

• Já viu algum problema semelhante a esse? Ou já viu o mesmo problema apresentado de maneira ligeiramente diferente?

• É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

• Utilizou todos os dados? Levou em conta todas as informações essenciais apresentadas no problema?

Nesta etapa é necessário que o aluno construa um plano de resolução. Um possível plano seria montar uma tabela colocando os dados contidos no enunciado.

c) O terceiro passo é executar o plano de resolução a qual se fez a escolha, verificando cada passo. Desta forma, se utilizarem tabelas para registrar os dados contidos no enunciado podemos observar que:

Nome				Lucas
Personalidade	Napoleão		Jesus	Hércules
Hábito		Piscar os olhos	Soltar gases	Cutucar o nariz
Animal		Gatos	Cachorros	Coelhos

Tabela 2.1: Registro da 1ª leitura do padrão

Em seguida, o aluno deve refazer a leitura do padrão encaixa-o nas vagas vazias da tabela, conforme a disposição abaixo:

Nome	Pedro	José		Lucas
Personalidade	Napoleão		Jesus	Hércules
Hábito		Piscar os olhos	Soltar gases	Cutucar o nariz
Animal		Gatos	Cachorros	Coelhos

Tabela 2.2: Registro da 2ª leitura do padrão

Seguindo o padrão, fazendo a 3ª leitura tem-se a situação:

Nome	Pedro	José	João	Lucas
Personalidade	Napoleão	Deus	Jesus	Hércules
Hábito		Piscar os olhos	Soltar gases	Cutucar o nariz
Animal	Camelos	Gatos	Cachorros	Coelhos

Tabela 2.3: Registro da 3ª leitura do padrão

Após esta etapa, fica explicita a solução do problema, ou seja, quem via camelos era Pedro.

d) O quarto e último passo consiste em fazer um retrospecto acerca da solução encontrada. O resultado deve ser analisado com os alunos. Seria importante responder as seguintes indagações:

• É possível verificar o resultado?

• É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

• É possível perceber isto num relance?

• É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?
Proponha que os alunos resolvam o "Teste de QI ou Teste de Einstein" encontrado facilmente num site de busca.

Exemplo

A turma de formandos do 3º ano do Ensino Médio decidiu fazer uma viagem. Fazendo os cálculos, verificaram que os 40 alunos, partiriam numa viagem de 8 dias de ônibus, circulando nele 4 horas por dia, custando a cada aluno $R\$ \ 800,00$. Porém, depois deste planejamento, 10 alunos desistiram da viagem, e os outros decidiram viajar, mas somente 4 dias, circulando no ônibus 6 horas por dia. Quantos reais cada um teve que pagar, se ninguém ocupou a vaga dos que desistiram?

Uma solução:

O problema acima tem o objetivo de construir no aluno a habilidade de resolver problemas que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas. Sendo assim, este problema deverá ser aplicado após a explicação do conteúdo sobre Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais, o qual deve compreendido e diferenciado pelos alunos.
A condução da resolução seguirá as seguintes orientações:

a) Primeiramente, é necessário que o aluno compreenda o problema. Nesta fase é importante que aluno responda algumas perguntas básicas, como:

Quais são os dados?

Espera-se que o aluno entenda que os dados são: "A turma de formandos decidiu fazer uma viagem. 40 alunos partiriam numa viagem de 8 dias de ônibus, circulando nele 4 horas por dia, custando a cada aluno $R\$ \ 800,00$". Outra informação é que "10 alunos desistiram da viagem e os outros decidiram não substituí-los, sendo que estes ainda decidiram viajar somente por 4 dias, circulando no ônibus 6 horas por dia".

Qual é a incógnita? Ou que se pretende descobrir?

O aluno deve identificar o que o problema está pedindo, ou seja: "Quantos reais cada um teve que pagar, se ninguém ocupou a vaga dos que desistiram?".

Os dados são suficientes?

O aluno deve avaliar se os dados contidos no enunciado são suficientes, se precisa e é possível encontrar outros.

Tem como organizar os dados em tabelas contendo as variáveis e os valores?

Fica a critério do aluno esta montagem.

A tabela facilita a resolução?

Embora não seja uma obrigatoriedade o uso de tabelas, é importante que o professor oriente os alunos a registrar os dados obtidos nestes, pois assim eles perceberão que desenhos, gráficos, quadros e tabelas são facilitadores do entendimento.

b) O segundo passo é fazer a conexão entre os dados e a incógnita. É preciso criar um plano para a resolução.

O professor pode fazer algumas perguntas que auxiliem o aluno na resolução, tais como:

• Já viu algum problema semelhante a esse? Ou já viu o mesmo problema apresentado de maneira ligeiramente diferente?

• É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

• Utilizou todos os dados? Levou em conta todas as informações essenciais apresentadas no problema?

Seria importante aqui o aluno esboçar o plano de resolução. Um possível plano seria montar uma tabela da seguinte maneira:

Nº de alunos	**Tempo (dias)**	**Tempo (horas/dia)**	**Custo por aluno (R\$)**
40	8	4	800
?	4	6	x

Tabela 2.4: Registro das informações contidas no enunciado

O aluno deve perceber pela leitura do problema que se desistiram 10 alunos teremos

$$? = 40 - 10 = 30$$

Assim,

Nº de alunos	**Tempo (dias)**	**Tempo (horas/dia)**	**Custo por aluno (R\$)**
40	8	4	800
30	4	6	x

Tabela 2.5: Registro das informações após a 1ª observação

c) O terceiro passo é executar o plano de resolução escolhido, verificando cada passo. Sendo assim, uma situação é o aluno identificar se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais, isto é, observar que:

i) As variáveis tempo em dias e tempo em horas por dia são diretamente proporcionais;

ii) A variável nº de alunos é diretamente proporcional.

Executando o plano teremos:

$$\frac{800}{x} = \frac{30}{40} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{4}{6}.$$

Fazendo algumas simplificações, obtem-se:

$$\frac{800}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Simplificando novamente, tem-se:

$$\frac{100}{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}.$$

Segue que:

$$\frac{100}{x} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, conclui-se que:

$$x = 800.$$

Ou seja, cada aluno teve que pagar $R\$ \ 800,00$.

d) O quarto e último passo consiste em fazer um retrospecto acerca da solução encontrada. Discuta o resultado com os alunos. Por que o valor foi o mesmo se o número de alunos diminuiu e ninguém ocupou seus lugares? Que relação a solução tem com as variáveis?

Seria importante aqui responder as seguintes perguntas:

• É possível verificar o resultado?

• É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

• É possível perceber isto num relance?

• É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Proponha novos problemas para serem resolvidos.

Exemplo

Ricardo comprou um terreno na cidade em que mora, cuja forma é um trapézio $ABCD$, em que os cantos ou vértices A e B formam ângulos de 90º; No lote ele pretende construir uma casa de base retangular, com 10 metros de frente, paralela ao muro frontal AD cujas medidas são $AD = 12m$, $AB = 32m$ e $BC = 20m$, como mostra a figura abaixo.

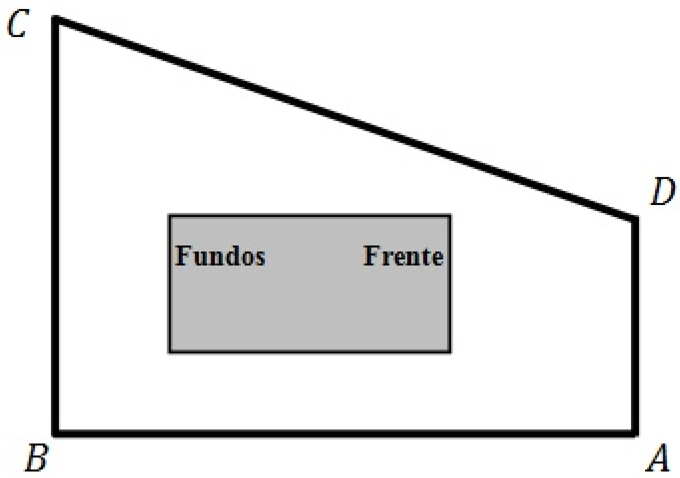


Figura 2.1: Planta baixa do terreno e casa

As normas de construção de casas da cidade onde Ricardo mora exige que qualquer obra tenha uma distância mínima de 2 metros de cada um dos muros que cerca a casa. Sendo assim, para aprovação do projeto da casa a ser construída, é necessário que sua frente mantenha uma distância mínima do muro frontal, representado pelo segmento AD. Qual o valor desta distância mínima para que a casa seja construída segundo às normas da cidade?

Uma solução:

Primeiro, precisamos compreender o problema e extrair os dados que foram apresentados, incluindo o que se pede, isto é:

O terreno tem forma de trapézio $ABCD$;

Os cantos ou vértices A e B formam ângulos de 90^o;

A casa a ser construída tem base retangular, com 10 metros de frente, paralela ao muro frontal AD;

$AD = 12m$, $AB = 32m$ e $BC = 20m$.

A casa deve ter uma distância mínima de 2 metros de cada um dos muros que a cerca.

Qual é a distância mínima necessária entre a frente da casa e o muro frontal AD (em metros)?

Em seguida, deve-se estabelecer um plano de resolução que possa ser executado, por exemplo, inserir os valores informados em seus devidos locais.

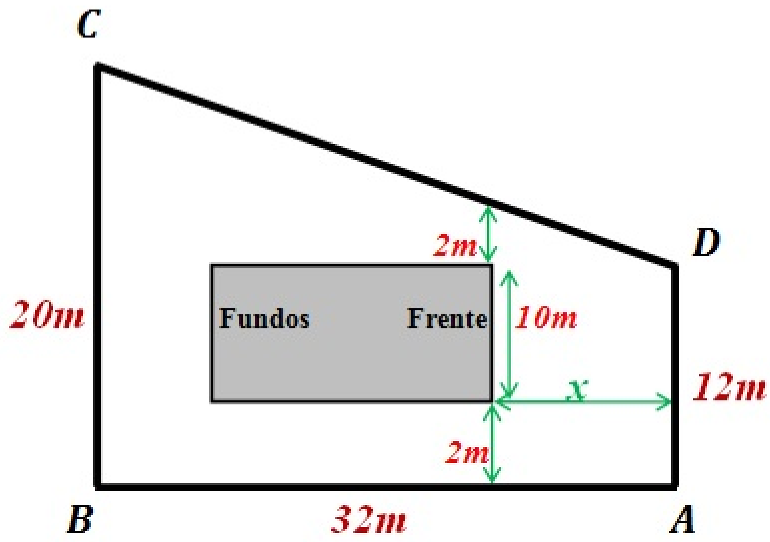


Figura 2.2: Planta baixa do terreno e casa - inserção de valores

O valor que se pede está representado por x. Uma possibilidade de achar este valor é observar que os triângulos retângulos CDE e FDG são semelhantes, sendo que o ângulo $\angle CDE$ é comum aos dois, e o lado BC é dividido em dois segmentos $BE = 12m$ e $CE = 8m$, como mostra a figura abaixo:

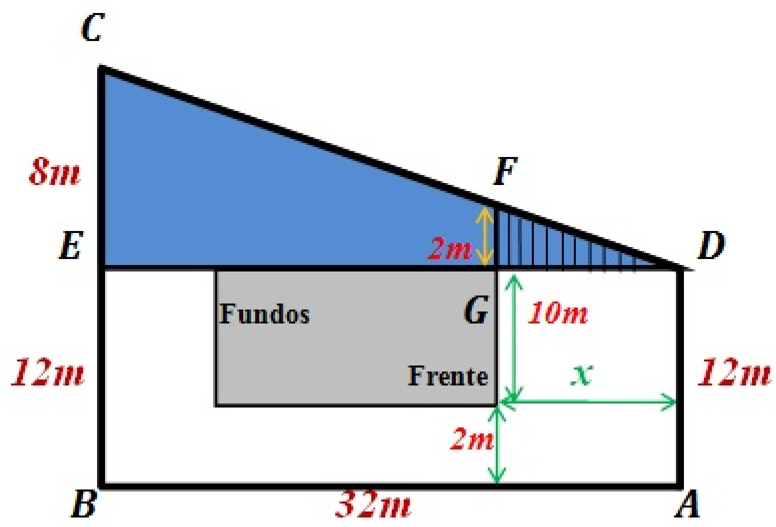


Figura 2.3: Planta baixa do terreno e casa - inserção de valores

Aqui um aluno pode usar as razões trigonométricas, pois ele pode entender que a razão entre os catetos oposto e adjacente é denominada tangente do ângulo. Assim, entra a terceira etapa, executar o plano.
Veja que observando o triângulo retângulo azul, teremos:

$$tg(\angle CDE) = \frac{CE}{ED} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

E ainda podemos observar que

$$tg(\angle CDE) = \frac{FG}{GD} = \frac{2}{x}.$$

Logo, pode-se deduzir que:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{4}.$$

Concluindo que:

$$x = 8\ m.$$

Portanto, a distância mínima entre a frente da casa e o muro frontal AD é de 8 metros.

A última etapa da resolução do problema é avaliar a solução e verificar se existem outras opções ou se o resultado encontrado pode ser usado em problemas semelhantes a este. Isso decorre do fato de que outro aluno possa ter usado um recurso diferente do primeiro, isto é, um outro aluno pode observar que se os triângulos retângulos azul e listrado são semelhantes, então eles são proporcionais, logo:

$$\frac{FG}{GD} = \frac{CE}{ED}.$$

Substituindo os devidos valores, obtem-se:

$$\frac{2}{x} = \frac{8}{32}.$$

Segue que:

$$8 \cdot x = 64$$

Que resulta em:

$$x = 8\ m.$$

Chegando à mesma conclusão que o primeiro aluno.

Podemos observar que este tipo de problema desenvolve, no aluno, o conhecimento geométrico, através da visualização, medição, aplicação teórica e prática, além de realizar a leitura e à representação da realidade, agindo sobre ela, construindo noções de grandezas e medidas para a compreensão de situações-problemas do cotidiano.

Assim, podemos entender que o método heurístico promove a construção do saber na medida em que o aluno realiza cada etapa de seu processo. Este conhecimento é efetivado na última fase do processo de resolução de problemas. Este aspecto construtivista cria condições para que aluno desenvolva modelos matemáticos que representem diversas situações-problemas. Assim, é necessário compreender o conceito e os elementos característicos da modelagem matemática.

2.3 *Modelagem Matemática*

Na vida escolar, em geral a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, os alunos se deparam constantemente com fórmulas que os professores lhes apresentam, muitas vezes, sem informar sua origem. Este ensino tipológico acaba se tornando o *calcanhar de Aquiles* na aprendizagem da matemática, uma vez que os alunos acabam por memorizar uma estratégia sem realmente entender o que está fazendo. Um exemplo desta situação é a tão conhecida Fórmula de Bhaskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Os alunos do Ensino Médio a utilizam frequentemente, mas geralmente não conseguem deduzi-la.

Não se pretende nesta pesquisa aprofundar nos conceitos e procedimentos da modelagem matemática; porém, como se pretende que os alunos criem modelos matemáticos que possam ser utilizados para calcular a área total e o volume dos poliedros regulares de Platão, observou-se a necessidade de abordar sucintamente este conceito. Pois, segundo Biembengut e Hein (2009, p. 12), “Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo”.

Os modelos que serão desenvolvidos pelos alunos terão o acompanhamento do professor mediador, este terá que estar atento às dificuldades que os alunos terão na execução das atividades e, sempre que necessário, abordar de forma construtiva conceitos que os alunos não se lembram ou que nunca aprenderam. A construção de um modelo está diretamente ligado ao conhecimento matemático que os alunos possuem, devendo estes serem criativos e intuitivos para escolher o melhor conteúdo matemático e a estratégia mais conveniente na elaboração do modelo. Segundo Biembengut e Hein (2009, p. 12),

> A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática.

As aprendizagens que os alunos participantes terão ao resolver as atividades propostas, lhes proporcionarão um conhecimento que poderá ser útil em outras situações similares. Eles terão um conhecimento efetivo acerca de vários conceitos e conteúdos matemáticos, reforçados pela ação de resolver as situações-problemas. Segundo Biembengut e Hein (2009, p. 13), “A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias”.

A construção dos modelos matemáticos constituirão um avanço no conhecimento formal dos alunos, devido ao aspecto abstrato que lhes são inerentes; além de proporcionar um aspecto autônomo e social, um vez que os alunos aprenderão fazer e socializar o que aprenderam. A resolução de problemas através de um método heurístico será o mecanismo pelo qual se concretizará cada aprendizagem que os alunos terão.

Capítulo 3

O MÉTODO HEURÍSTICO APLICADO NA CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS

> "[...] As boas ideias são baseadas nas experiências passadas ou em conhecimentos previamente adquiridos. [...] Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquiridos, tais como problemas e teoremas anteriormente resolvidos e demonstrados [...].
> (Polya, 2006, p.7)

Muito se debate acerca de como ensinar matemática aos alunos do Ensino Médio, não havendo nenhuma fórmula que responda absolutamente esta questão. Nesta epata final da pesquisa, pretende-se mostrar como o método heurístico pode contribuir para o ensino e a aprendizagem desta disciplina, através da aplicação deste na construção de modelos matemáticos que possam calcular a área total e o volume dos poliedros regulares de Platão.

Para a aplicação do método foram convidados os alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Objetivo da cidade de Jussara, Goiás. Aos discentes que quiseram participar foram apresentados oito atividades (vide ANEXOS), que seriam realizadas uma a uma. Nestas estão implícitos vários conceitos geométricos que durante a tentativa de se chegar a solução dos problemas vão sendo expostos, formando um novo conhecimento e assim sucessivamente. Estes aprendizados devem ser suficientes para se construir um modelo matemático que satisfaça o problema em questão. É importante destacar que o conhecimento matemático é cumulativo, logo cada aprendizagem adquirida associada com as informações que eles já possuem de situações anteriores a este estudo formarão uma rede de conhecimentos que os auxiliarão na execução das etapas a que serão expostos. De acordo com Biembengut e Hein (2010, p. 12), "A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem".

Os tópicos à seguir se referem aos problemas apresentados com suas devidas análises, bem como um questionário que conclui a aplicação. As atividades foram apresentadas seguindo um sequência que proporcionasse um maior acúmulo de conhecimentos matemáticos que poderiam ser usados.

3.1 *Área Total dos Poliedros Regulares de Platão*

Nesta etapa, o papel do professor é primordial para uma boa execução das etapas do método. Ele deve se preocupar em orientar os alunos, mas tentar ao máximo não expor alguma resposta ou estratégia de resolução. Porém, deve estar atento, para fazer indagações que levem os alunos a alcançar o objetivo imposto. A atenção do professor é importante, pois está lidando com vários pensamentos ao mesmo tempo.

Antes da apresentação dos problemas, foi feito um breve diálogo acerca dos conhecimentos que os alunos tinham a respeito de geometria. Nele fizemos uma revisão de conceitos como Teorema de Pitágoras, áreas de triângulos, área, ângulo central e soma dos ângulos internos de um polígono regular, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Além disso, foi pedido aos alunos que pesquisassem acerca dos poliedros regulares de Platão para que se inteirassem do conteúdo que seria exposto.

Durante cada atividade foi apresentado, aos alunos, os sólidos referentes a cada poliedro trabalhado; estes eram feitos de material acrílico transparente. Sua utilização foi de extrema importância para execução de cada situação-problema, pois a visualização é uma ferramenta fundamental para o entendimento do enunciado, além de proporcionar uma visão espacial do sólido que será objeto de estudo.

As primeiras atividade apresentadas estão relacionadas às áreas totais dos poliedros regulares de Platão. Estas serão abordadas nos problemas à seguir.

3.1.1 *Atividade 1*

ATIVIDADE 1- Determine um modelo matemático para calcular a área total do hexaedro regular, cuja aresta possui medida a:

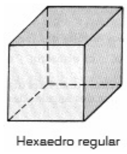


Figura 3.1: Poliedros: hexaedro regular

Nesta atividade os alunos desenvolverão a habilidade de calcular a área de um quadrado e saber aplicar o conhecimento em situações semelhantes ou que utilizem o modelo matemático encontrado; sendo que o objetivo a ser alcançado é encontrar um modelo matemático para calcular a área total do hexaedro regular, cuja aresta possui medida a.

Analisando as atividades é possível observar que todos os alunos compreenderam o enunciado do problema. O estabelecimento do plano de resolução e a execução deste foram quase que imediato. Alguns utilizaram o conhecimento que já tinham acerca do conteúdo e outros deduziram o modelo utilizando teoremas que foram relembrados. Todos consideraram que a resolução do problema foi fácil.

O aluno E.R.M.J. organizou a solução colocando os dados do problema e a resolução a partir do conhecimento que tinha sobre área do quadrado. Ressalta ainda que haveria várias formas de resolver o problema. Desta forma, pode-se concluir que ele conseguiu executar todas as etapas do método heurístico.

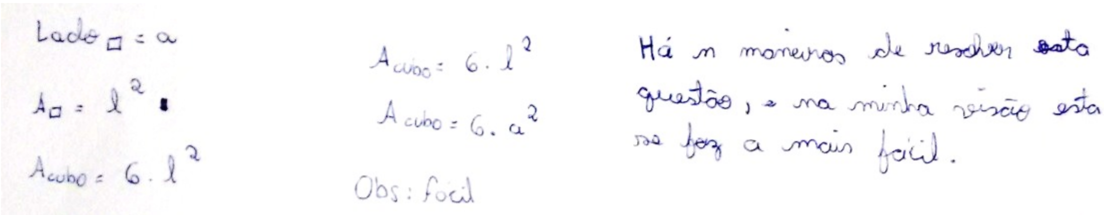


Figura 3.2: Atividade 1 - E.R.M.J.

Já a aluna I.M. divide a face quadrada em quatro triângulos, calculando a área deste utilizando sua fórmula usual e o Teorema de Pitágoras; em seguida, multiplica o resultado por quatro e por seis, sucessivamente.

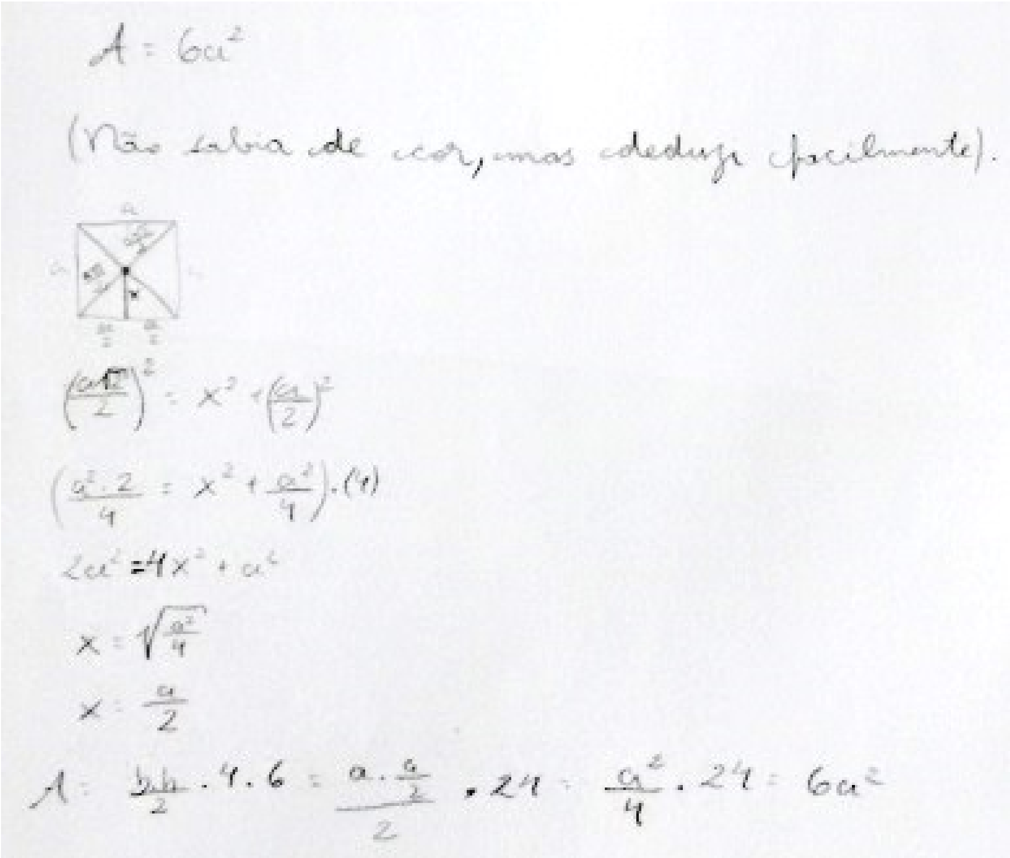


Figura 3.3: Atividade 1 - I.M.

Embora cada um deles tivessem utilizados recursos diferentes para se resolver o problema, a solução foi a mesma. É importante ressaltar que o sucesso em encontrar uma solução para o problema serviu de motivação para execução das outras atividades.

Uma solução para a atividade 1

Como o hexaedro regular é formado por 6 faces quadradas, basta calcular a área do quadrado de lado a e multiplicar po 6. Isto é, $S_{Hexaedro} = 6 \cdot S_{\square}$.

Logo, a área total do hexaedro regular é dada por:

$$S_{Hexaedro} = 6 \cdot a^2$$

3.1.2 *Atividade 2*

ATIVIDADE 2- Determine um modelo matemático para calcular as áreas totais do tetraedro regular, do octaedro regular e do icosaedro regular, cujas arestas possuem medida a:

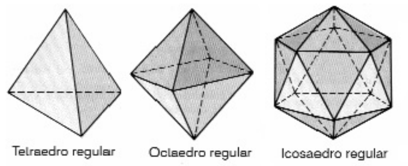


Figura 3.4: Poliedros: tetraedro, octaedro e icosaedro regulares

Nesta atividade os alunos desenvolverão a habilidade de calcular a área de um triângulo equilátero e saber aplicar o conhecimento em situações semelhantes ou que utilizem o modelo matemático encontrado; sendo que o objetivo a ser alcançado é encontrar um modelo matemático para calcular as áreas totais do tetraedro, octaedro e icosaedro regulares, cujas arestas possuem medida a.

A aplicação desta atividade foi extremante importante para aprimorar o conhecimento dos alunos, pois eles puderam compreender que a partir de um conceito matemático podemos encontrar solução de vários problemas semelhantes. Observando cada uma das atividades dos alunos que participaram da aplicação do método heurístico, é possível verificar que todos encontraram uma mesma solução final, ou seja, um mesmo modelo matemático para cada dos três sólidos; porém, as estratégias utilizadas não foram as mesmas.

Analisando a estratégia usada pelo aluno A.H. é possível observar que ele utilizou o Teorema de Pitágoras para encontrar a altura do triângulo equilátero; em seguida, usou a informação para encontrar a área deste. Este último conhecimento foi utilizado para determinar a área total dos três sólidos enunciados.

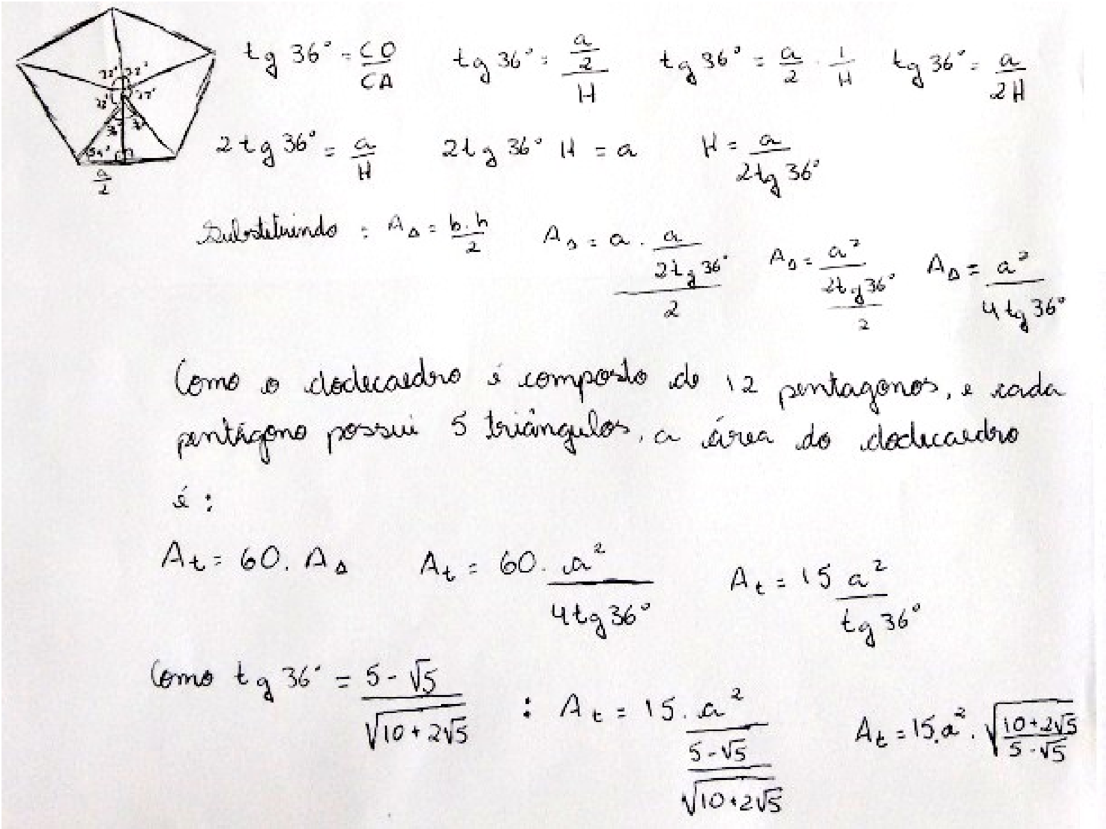
Já a aluna Y.C.G.R. utilizou o conhecimento que já possuía a respeito da área de um triângulo equilátero, aplicando-o para encontrar os modelos matemáticos pedidos.

Durante esta atividade as orientações dadas pelo professor foram fundamentais para que todos pudessem compreender a importância de cada conhecimento adquirido. Indagando que estes poderão ser utilizados em situações semelhantes.

Uma solução para a atividade 2

Como as faces do tetraedro, octaedro e icosaedro regulares são triângulos equilátero de mesma aresta a, basta calcular a área deste, ou seja,

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot a \cdot sen 60°}{2}.$$



$tg\,36° = \frac{CO}{CA}$ $\quad tg\,36° = \frac{\frac{a}{2}}{H}$ $\quad tg\,36° = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{H}$ $\quad tg\,36° = \frac{a}{2H}$

$2\,tg\,36° = \frac{a}{H}$ $\quad 2tg\,36°\,H = a$ $\quad H = \frac{a}{2tg\,36°}$

Substituindo: $A_\Delta = \frac{b.h}{2}$ $\quad A_\Delta = \frac{a \,.\, \frac{a}{2tg\,36°}}{2}$ $\quad A_\Delta = \frac{\frac{a^2}{2tg\,36°}}{2}$ $\quad A_\Delta = \frac{a^2}{4tg\,36°}$

Como o dodecaedro é composto de 12 pentagonos, e cada pentágono possui 5 triângulos, a área do dodecaedro é:

$A_t = 60 \,.\, A_\Delta$ $\quad A_t = 60 \,.\, \frac{a^2}{4tg\,36°}$ $\quad A_t = 15\,\frac{a^2}{tg\,36°}$

Como $tg\,36° = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ $\therefore$ $A_t = 15 \,.\, \frac{a^2}{\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$ $\quad A_t = 15 \,.\, a^2 \,.\, \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$

Figura 3.5: Atividade 2 - A.H.

Como $sen 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, segue que:

$$S_\triangle = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}}{2}.$$

Portanto, a área do triângulo equilátero de lado a é dada por:

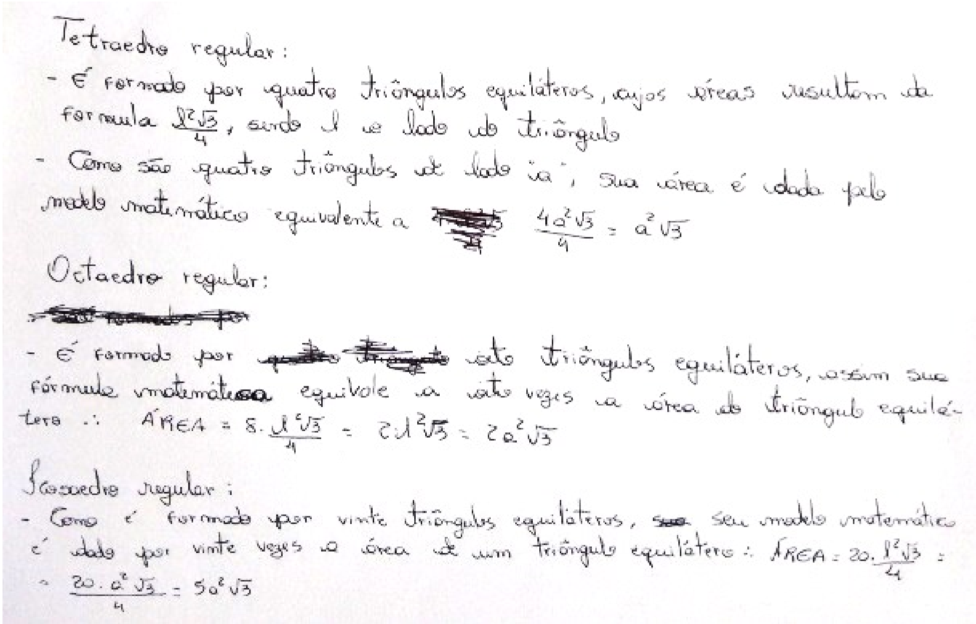
$$S_\triangle = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

A partir daqui, podem-se deduzir os modelos matemáticos que representam, respectivamente, a área total do tetraedro, octaedro e icosaedro regulares. Ou seja,

$$S_{Tetraedro} = 4 \cdot S_\triangle = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3}.$$

$$S_{Octaedro} = 8 \cdot S_\triangle = 8 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}.$$

$$S_{icosaedro} = 20 \cdot S_\triangle = 20 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}.$$



Tetraedro regular:

- É formado por quatro triângulos equiláteros, cujas áreas resultam da formula $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, sendo l o lado do triângulo
- Como são quatro triângulos de lado "a", sua área é dada pelo modelo matemático equivalente a $\frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

Octaedro regular:

- É formado por ~~quatro triângulo~~ oito triângulos equiláteros, assim sua fórmula matemática equivale a oito vezes a área do triângulo equilátero $\therefore$ ÁREA $= 8 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 2l^2\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

Icosaedro regular:

- Como é formado por vinte triângulos equiláteros, seu modelo matemático é dado por vinte vezes a área de um triângulo equilátero $\therefore$ ÁREA $= 20 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{20 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$

Figura 3.6: Atividade 2 - Y.C.G.R.

3.1.3 *Atividade 3*

ATIVIDADE 3- Determine um modelo matemático para calcular a área total do dodecaedro regular, cuja aresta possui medida a:

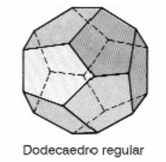


Figura 3.7: Poliedros: dodecaedro regular

Nesta atividade os alunos desenvolverão a habilidade de calcular a área de um triângulo isósceles, utilizando para encontrar a área de um pentágono regular, além da habilidade de saber aplicar o conhecimento em situações semelhantes ou que utilizem o modelo matemático encontrado; sendo que o objetivo a ser alcançado é encontrar um modelo matemático para calcular a área total do dodecaedro regular, cuja aresta possui medida a.

Embora todos os alunos tivessem compreendido o problema e selecionado os dados contidos no enunciado, a atividade 3 foi uma das que mais necessitou a interferência do professor, através de questionamentos para que os alunos entendessem como proceder para encontrar um plano de resolução. Neste momento, a situação-problema foi trabalhada coletivamente. Após as indagações feitas pelo professor e as conclusões apresentadas pelo grupo, chegou-se a um consenso que a melhor estratégia seria dividir a face pentagonal em triângulos formados pelo centro e pelos vértices do pentágono regular, formando assim cinco triângulos congruentes.

Depois de elaborarem o plano de execução, colocaram-no em prática. Neste instante, perceberam que conseguiriam realizar a atividade, porém o resultado ficaria em função da aresta a e da $tg\ 36°$.

A partir desta situação, desenvolveu-se um novo problema, encontrar um valor para $tg\ 36°$. O método utilizado para esta atividade foi uma aula expositiva e dialogada, onde o professor com a ajuda dos alunos demonstrou o valor procurado o qual é exposto à seguir.

Baseado na resolução apresentada por Carmo, Morgado e Wagner (2001, p.14-15), desenhamos um triângulo ABC onde $AB = BC = 1$ e $\angle BAC = 36°$. A partir de $\angle ACB$, traçamos a bissetriz CD, com $D \in AB$, de forma que possamos calcular todos os ângulos dos triângulos formados como mostra a figura 3.8.

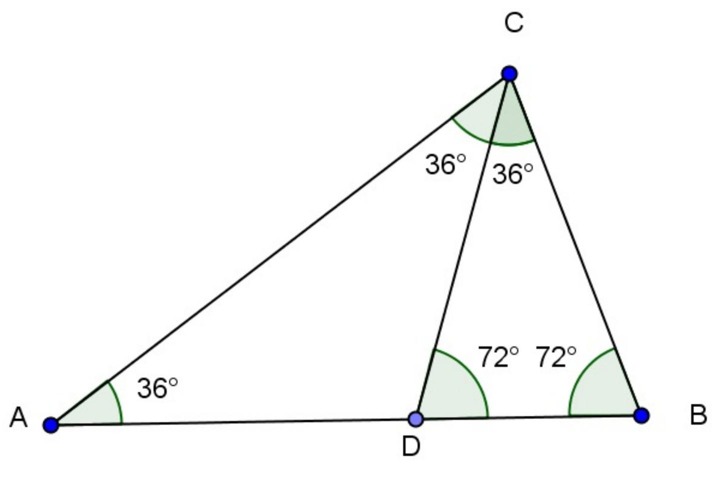


Figura 3.8: Triângulo Isósceles I

Podemos observar que os triângulos BCD e ACD são isósceles. Assim, fazendo $BC = CD = AD = x$ pode-se deduzir que:

$$BD = AB - AD.$$

Ou seja,

$$BD = 1 - x.$$

Observando a figura 3.9, podemos verificar que os triângulos BCD e ABC são semelhantes. Logo, eles são proporcionais.

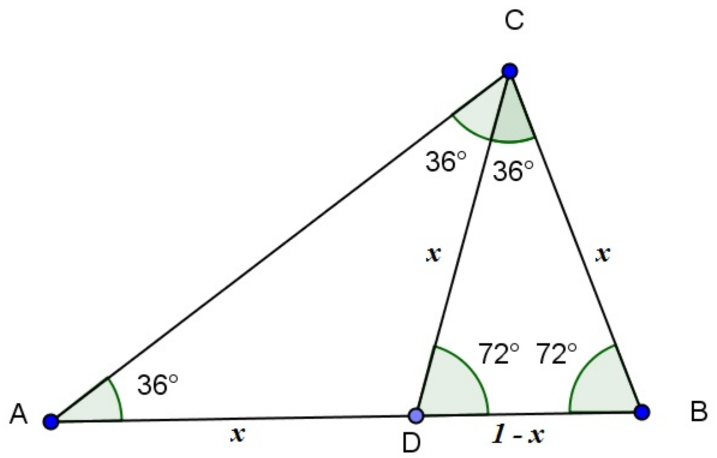


Figura 3.9: Triângulo Isósceles II

Segue que:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Substituindo seus devidos valores, temos:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.$$

Isto é equivalente a:

$$x^2 = 1 - x.$$

Que gera a equação do 2º grau:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Resolvendo-a, obtemos como raízes:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Como a segunda solução não é conveniente, pois é menor que zero. Conclui-se que:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

No triângulo ABC, traçamos a altura AH, relativa a sua base BC. Como o triângulo em questão é isósceles, essa altura também é mediana e bissetriz; assim, H é ponto médio de BC e o ângulo $\angle BAH = 18°$, como mostra a figura 3.10.

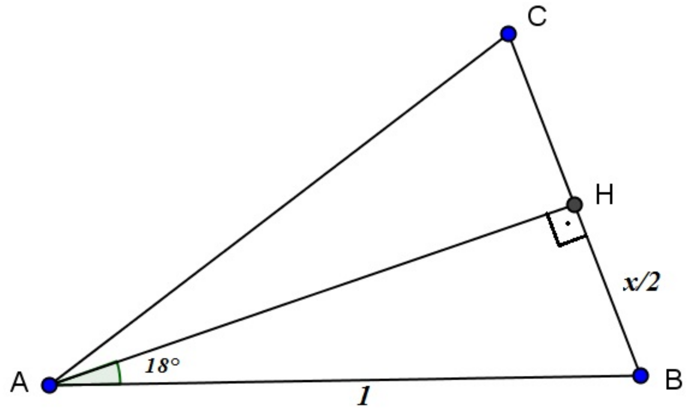


Figura 3.10: Triângulo ABH

Segue do triângulo ABH que

$$sen\ 18° = \frac{x}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}.$$

Ou seja,

$$\Rightarrow sen\ 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Utilizando o *princípio fundamental da trigonometria*, obtêm-se:

$$cos^2\ 18° = 1 - sen^2\ 18°$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{5+1-2\cdot\sqrt{5}}{16}.$$

Logo, tem-se:

$$cos^2\ 18° = \frac{10+2\cdot\sqrt{5}}{16}.$$

Tomando apenas o valor positivo do $cos 18°$, tem-se que:

$$cos\ 18° = \sqrt{\frac{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}{16}}.$$

Isto é,

$$cos\ 18° = \frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4}.$$

Com as informações obtidas podemos calcular o valor da $tg\ 18°$, ou seja,

$$tg\ 18° = \frac{sen\ 18°}{cos\ 18°} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4}},$$

que resulta em:

$$tg\ 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}.$$

Utilizando o resultado acima e a fórmula do arco duplo da tangente teremos:

$$tg\ 36° = tg\ (2 \cdot 18°) = \frac{2 \cdot tg\ 18°}{1 - tg^2\ 18°}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}\right)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}}{1 - \frac{5 - 2 \cdot \sqrt{5}}{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}}{\frac{4 + 4 \cdot \sqrt{5}}{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}} \cdot \frac{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}{4 \cdot (1 + \sqrt{5})}.$$

Aplicando a propriedade distributiva no numerador obtemos:

$$tg\ 36^\circ = \frac{16 \cdot \sqrt{5}}{4 \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}} \cdot (1 + \sqrt{5})}$$

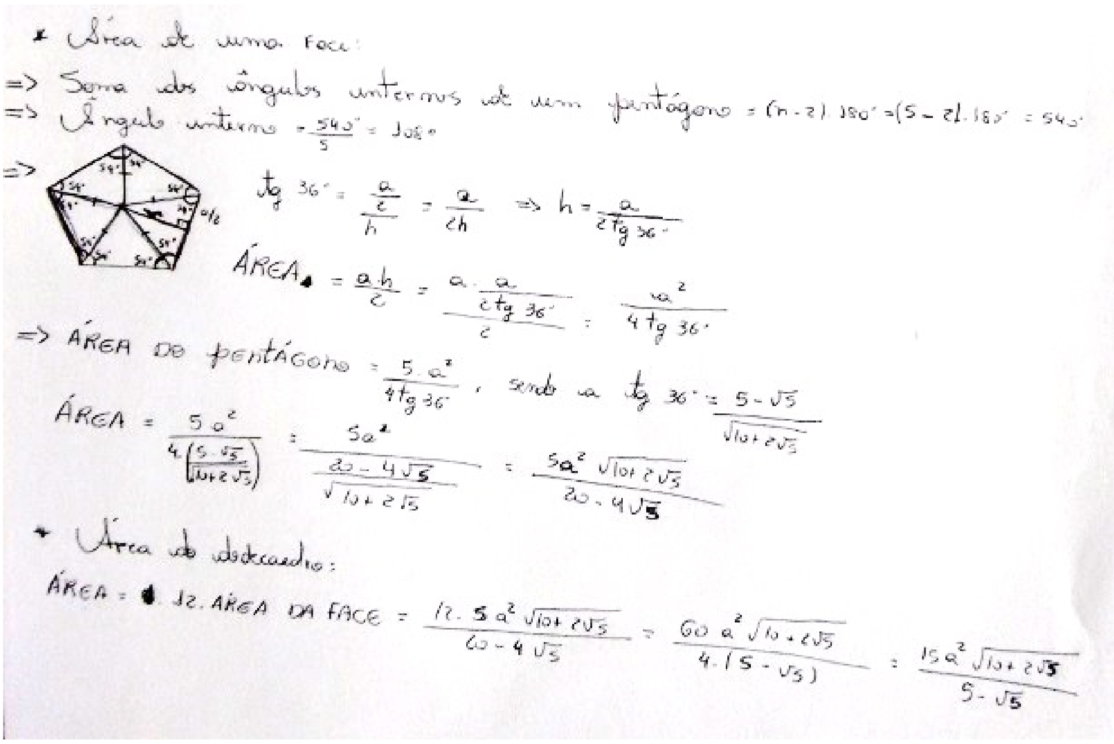
$$= \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}} \cdot (1 + \sqrt{5})}$$

Multiplicando numerador e denominador por $1 - \sqrt{5}$, após alguns cálculos e simplificações obteremos:

$$tg\ 36^\circ = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}$$

Com este resultado em mãos os alunos puderam continuar a resolução do problema inicial. É possível observar que os alunos encontraram um mesmo modelo, porém as estratégias sofreram diferenciação no que se refere aos cálculos executados. É importante ressaltar que os alunos utilizaram rascunho para efetuar os cálculos, sendo o resultado transcrito para a folha própria de cada atividade. Sendo assim, pode-se justificar alguns passos que não identificamos nas atividades.

Observe a figura 3.11, que consta a resolução feita pela aluna Y.C.G.R.:


* Área de uma face:

=> Soma dos ângulos internos de um pentágono $= (n-2).180^\circ = (5-2).180^\circ = 540^\circ$

=> Ângulo interno $= \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

=>

$tg\ 36^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{a}{2h} \Rightarrow h = \frac{a}{2 tg\ 36^\circ}$

$ÁREA_{\blacktriangle} = \frac{a.h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2tg\ 36^\circ}}{2} = \frac{a^2}{4 tg\ 36^\circ}$

=> ÁREA DO pentágono $= \frac{5.a^2}{4tg\ 36^\circ}$, sendo a $tg\ 36^\circ = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$ÁREA = \frac{5a^2}{4\left(\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)} = \frac{5a^2}{\frac{20-4\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} = \frac{5a^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20-4\sqrt{5}}$

* Área do dodecaedro:

$ÁREA = 12. ÁREA\ DA\ FACE = \frac{12.5a^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{60-4\sqrt{5}} = \frac{60a^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4.(5-\sqrt{5})} = \frac{15a^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}$

Figura 3.11: Atividade 3 - Y.C.G.R.

Pode-se verificar que no desenho feito por ela não está explicito o ângulo de

36°; porém, ela utiliza a tangente deste ângulo para calcular a altura de um triângulo. E, a partir desta, Y.C.G.R. encontra uma fórmula para a área do triângulo que será utilizado para encontrar um modelo matemático para calcular a área do pentágono e, consequentemente, encontra a solução para o problema proposto.

Deve-se ressaltar que todos os alunos seguiram o mesmo processo realizado por Y.C.G.R., exceto quanto aos cálculos, como pode ser observado na resolução feita pela aluna M.G.M.L.. É ainda possível observar que o ângulo de 36° está explícito no desenho feito por ela. Consta também alguns conceitos utilizados como a utilização da soma dos ângulos internos do pentágono e uma estratégia para o cálculo da área deste, como mostra a figura 3.12.

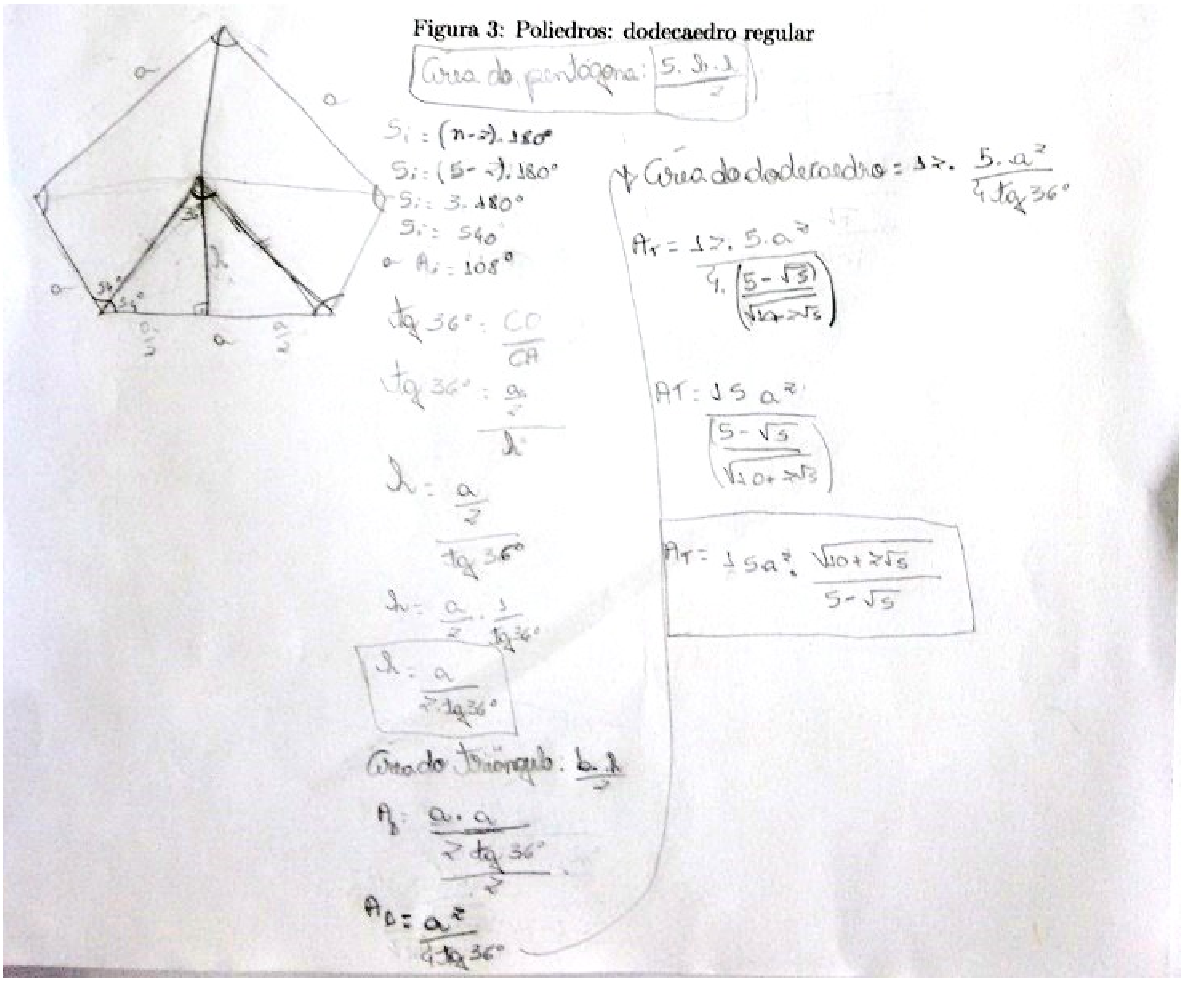


Figura 3.12: Atividade 3 - M.G.M.L.

Analisando a resolução da atividade 3 desenvolvidas pelos alunos podemos verificar que todos chegaram no mesmo modelo matemático para calcular a área total do dodecaedro regular de aresta a. No entanto, eles consideraram que a atividade tinha um nível médio de dificuldade, mas após o desenvolvimento do valor da $tg\ 36°$ a atividade se tornou apenas trabalhosa.

Uma solução para a atividade 3

Primeiramente, vamos dividir a face pentagonal do dodecaedro regular em triângulos formados pelo centro e pelos vértices do pentágono regular, formando assim cinco triângulos congruentes de base a; A medida do ângulo central do pentágono regular é obtida dividindo 360° por 5, obtendo como resultado $a_c = 72°$, como mostra a figura 3.13.

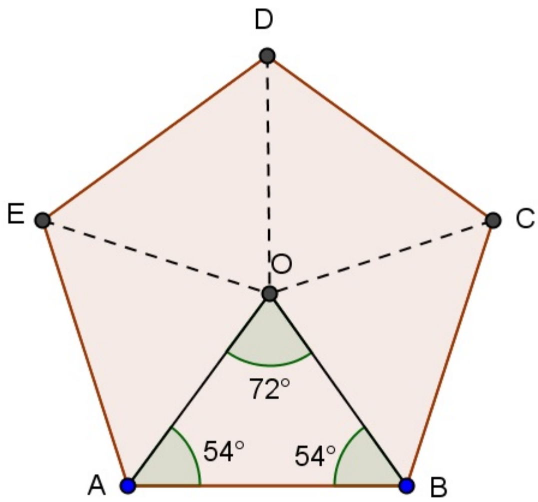


Figura 3.13: Pentágono Regular ABCDE

Podemos ainda observar que o triângulo AOB é isósceles; logo, a altura OH relativa a base AB é também a bissetriz do triângulo. Além disso, se calcularmos a área deste triângulo encontraremos informações suficientes para se chegar a solução do problema proposto.

Assim, observando o triângulo BOH da figura 3.14, temos:

$$tg\ 36° = \frac{\frac{a}{2}}{OH} = \frac{a}{2 \cdot OH}.$$

Segue que:

$$OH = \frac{a}{2 \cdot tg\ 36°}.$$

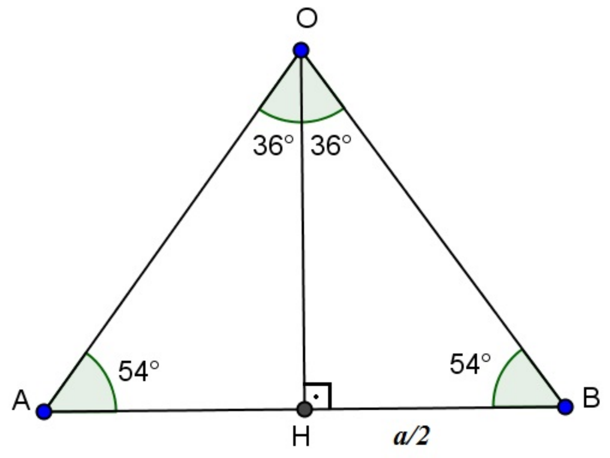


Figura 3.14: Triângulo BOH

Tem-se ainda que a área do triângulo BOH é dado por:

$$S_\triangle = \frac{AB \cdot OH}{2} = \frac{a \cdot \dfrac{a}{2 \cdot tg\ 36^\circ}}{2}.$$

Então,

$$S_\triangle = \frac{a^2}{4 \cdot tg\ 36^\circ}.$$

Seja S_P a área do pentágono regular $ABCDE$; como sua área é equivalente a cinco vezes a área do AOB, temos:

$$S_P = 5 \cdot S_\triangle = 5 \cdot \frac{a^2}{4 \cdot tg\ 36^\circ}$$

Seja S_D a área total do dodecaedro; como ele é formado por doze pentágonos regulares, segue que:

$$S_D = 12 \cdot S_P = 12 \cdot 5 \cdot \frac{a^2}{4 \cdot tg\ 36^\circ} = 15 \cdot \frac{a^2}{tg\ 36^\circ}.$$

Porém, temos que:

$$tg\ 36^\circ = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}.$$

Logo, tem-se que:

$$S_D = 15 \cdot \frac{a^2}{\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}},$$

que resulta em:

$$S_D = \frac{15 \cdot a^2 \cdot \sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}$$

Embora esse seja o modelo encontrado pelos alunos na aplicação do método heurístico, poderíamos multiplicar numerador e denominador por $5+\sqrt{5}$ e, após alguns cálculos, teríamos um modelo equivalente para calcular a área total do dodecaedro regular:

$$S_D = \frac{3\cdot(5+\sqrt{5})\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2$$

3.2 *Volume dos Poliedros Regulares de Platão*

As atividades a seguir estão relacionados ao cálculo do volume dos poliedros regulares de Platão. Antes da aplicação destas, houve um momento de diálogo para diagnosticar os conhecimentos matemáticos que os alunos possuíam e que eram necessários para execução das atividades. Senda assim, foram relembrados alguns conceitos importantes como: Volume de prismas e da pirâmide, além de análise do comportamento de sólidos inscritos em circunferências. Foi ainda estipulado que o conhecimento matemático adquirido nas situações-problemas anteriores poderiam ser utilizados para resolver as atividades seguintes e, assim, sucessivamente.

3.2.1 *Atividade 4*

ATIVIDADE 4- Determine um modelo matemático para calcular o volume do hexaedro regular, cuja aresta possui medida a:

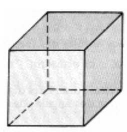


Figura 3.15: Poliedros: hexaedro regular

O objetivo desta atividade é encontrar um modelo matemático capaz de calcular o volume do hexaedro regular, cuja aresta possui medida a, utilizando conhecimento já adquiridos anteriormente. Este problema desenvolverá, nos alunos, a habilidade de saber selecionar conceitos matemáticos que possam ser úteis na resolução desta.

Analisando as soluções encontradas pelos alunos, pode-se observar que todos chegaram a modelos semelhantes, a não ser pela estratégia algébrica utilizada. O aluno A.H. utilizou o conceito de volume do prisma de aresta a para se chegar ao modelo desejado, identificando a estratégia utilizada, como mostra a figura 3.16.

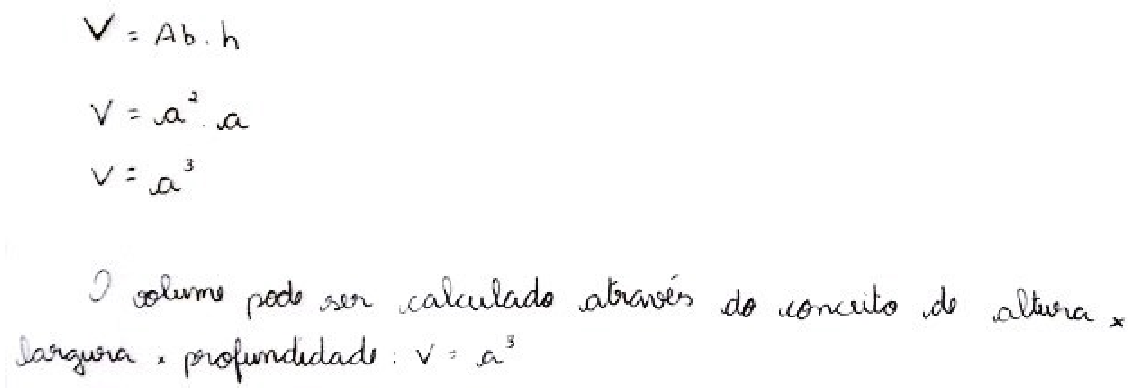


Figura 3.16: Atividade 4 - A.H.

O aluno E.V.B.E. utilizou a mesma estratégia do aluno acima citado, porém utilizou l como medida da aresta do hexaedro. como mostra a figura 3.17.

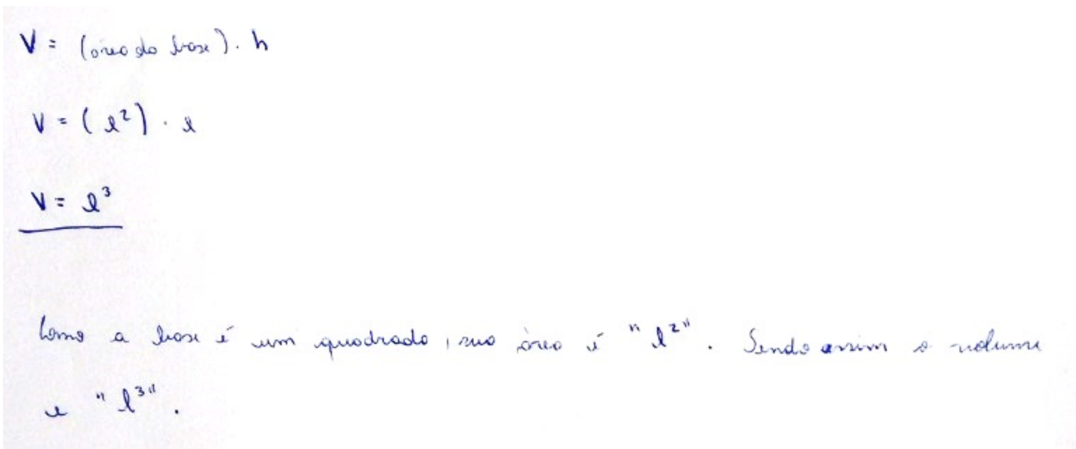


Figura 3.17: Atividade 4 - E.V.B.E.

Todos os alunos participantes utilizaram conceitos apresentados nas soluções da atividade 1. Para eles, problema foi de fácil resolução por já terem observado situação semelhante.

Uma solução para a atividade 4

Seja V_H o volume do hexaedro regular de aresta a. Como ele é um prisma de base quadrada, podemos calculá-lo através do produto entre a área de sua base e sua altura, ou seja,

$$V_H = S_\Box \cdot a = a^2 \cdot a.$$

Portanto, pode-se concluir que:

$$V_H = a^3$$

3.2.2 *Atividade 5*

ATIVIDADE 5- Determine um modelo matemático para calcular o volume do tetraedro regular, cuja aresta possui medida a:

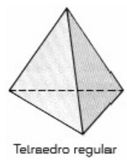


Figura 3.18: Poliedros: tetraedro regular

O objetivo desta atividade é encontrar um modelo matemático capaz de calcular o volume do tetraedro regular, cuja aresta possui medida a, utilizando conhecimento já adquiridos anteriormente. Este problema desenvolverá, nos alunos, a habilidade de saber selecionar conceitos matemáticos que possam ser úteis na resolução desta, além de saber utilizar o conceito de volume de uma pirâmide.

Analisando as soluções encontradas pelos alunos, pode-se notar que todos chegaram a um mesmo modelo matemático, a estratégia utilizada por eles foi semelhante, pois houve compartilhamento de ideias que pudessem ser úteis na resolução e, após algumas tentativas, todos concordaram que a melhor estratégia seria encontrar a altura da pirâmide utilizando o Teorema de Pitágoras, aplicando o resultado obtido na fórmula destinada a calcular o volume de uma pirâmide.

É possível observar a estratégia de resolução do aluno E.R.M.J.. Veja que ele destacou o triângulo formado pela altura, da apótema e da apótema da base da pirâmide, que foi utilizado para calcular a altura da mesma; nota-se que ele utilizou l como aresta e ao final substituiu por a . Aparentemente ele começou desenvolvendo o modelo a partir da fórmula utilizada para calcular o volume de uma pirâmide, como não havia a informação explicita da altura da pirâmide, precisou calculá-la. Ainda é possível observar que ele utilizou conceitos vistos na atividade 2, como a fórmula para calcular a área do triângulo equilátero, como mostra a figura 3.19.

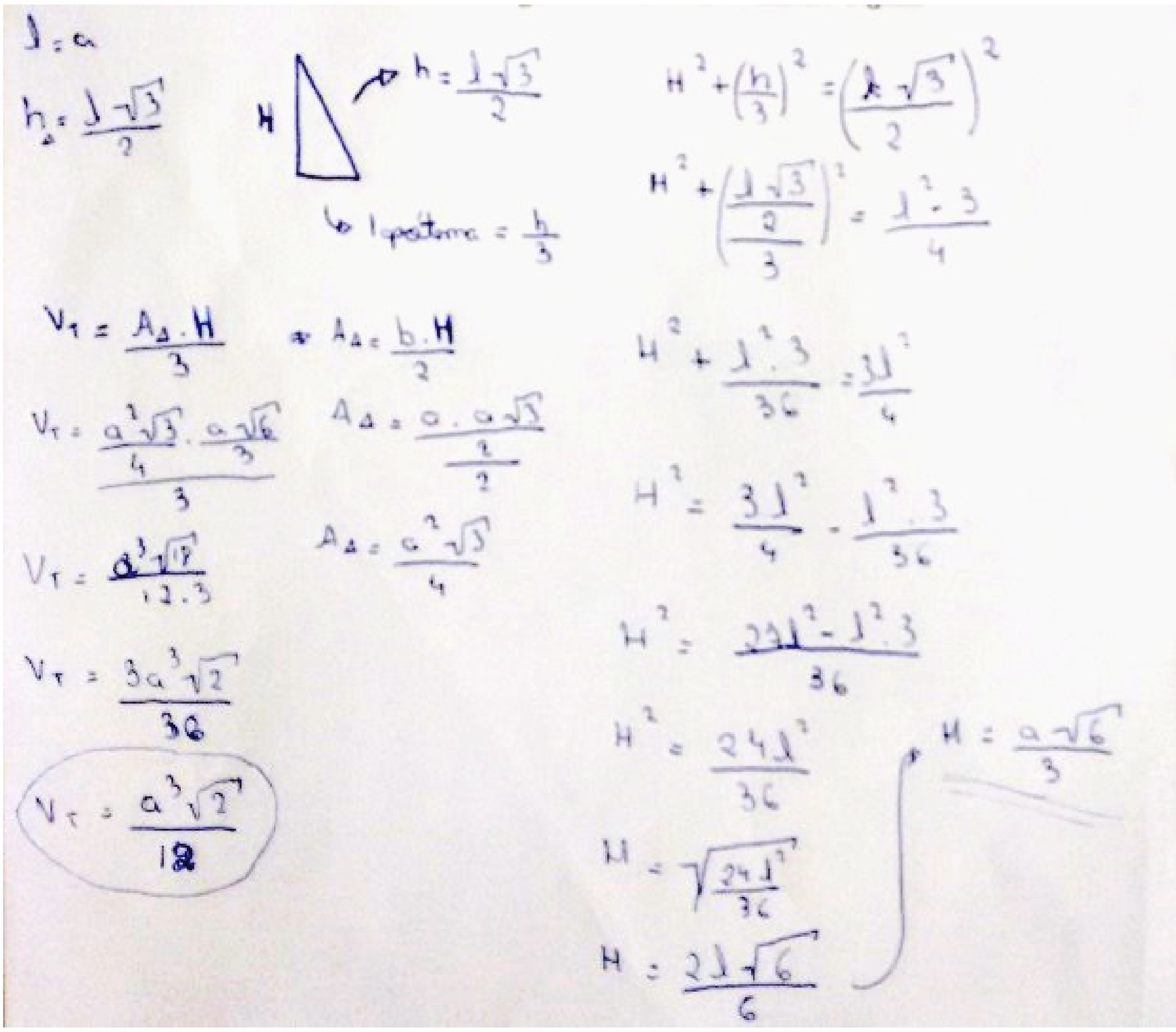


Figura 3.19: Atividade 5 - E.R.M.J.

O aluno E.V.B.E. desenhou uma pirâmide destacando, dentro desta, o triângulo utilizado para calcular sua altura, como mostra a figura 3.20. Foi possível notar a semelhança de sua resolução com a apresentada pelo aluno E.R.M.J., ressaltando que os dois não fizeram a atividade juntos. Entretanto, ambos tiveram a mesma escolarização no Ensino Médio, pois estudam na mesma sala. Ambos tiveram contato com a mesma forma de ensino. Mesmo que isso possa ter contribuído na escolha da estratégia, não podemos afirmar que isso sempre ocorrerá. Pois, senão este acontecimento seria padrão em todas as atividades.

Após compreender o problema e organizar uma estratégia de resolução, os alunos consideraram a atividade fácil de ser resolvida, pois já haviam resolvido problemas com

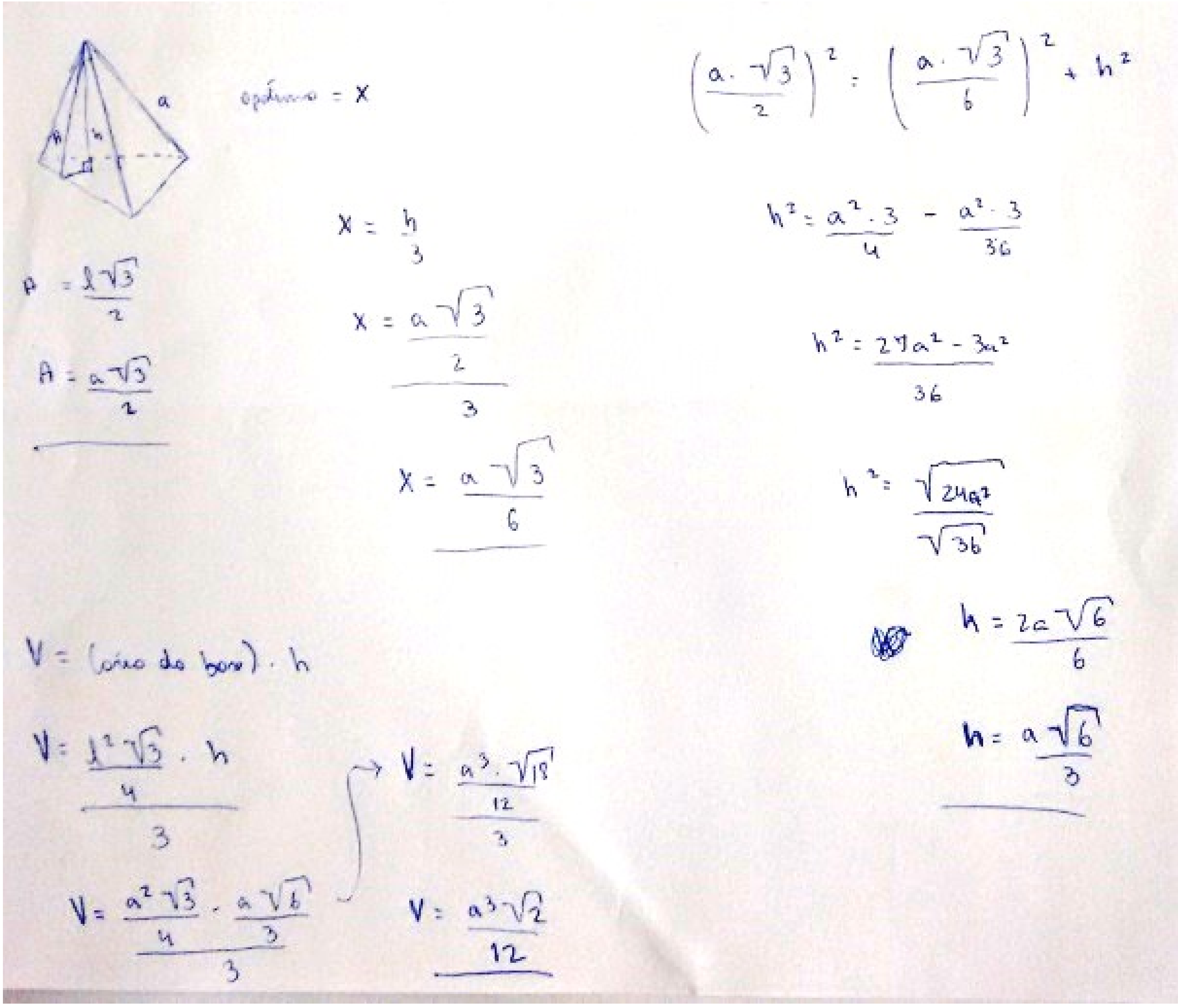


Figura 3.20: Atividade 5 - E.V.B.E.

ideias semelhantes durante as atividades anteriores.

<u>*Uma solução para a atividade 5*</u>

Seja V_T o volume do tetraedro regular de aresta a. Como se trata de uma pirâmide de base triangular, pode-se calcular o seu volume pela terça parte do produto da área da base por sua altura. Ou seja,

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle} \cdot h'$$

onde $S_{\triangle}$ é a área da base (triângulo equilátero) e H é a altura do tetraedro regular.

Primeiramente, calculamos a medida da altura do tetraedro regular de aresta a. Para isso, destacamos o triângulo AHB, onde $BH = r$ é o apótema da base, $AB = a'$ o apótema e $AH = h'$ a altura do tetraedro regular, como mostra a figura 3. 21.

Como a base do tetraedro é um triângulo equilátero, sua apótema é dada pela

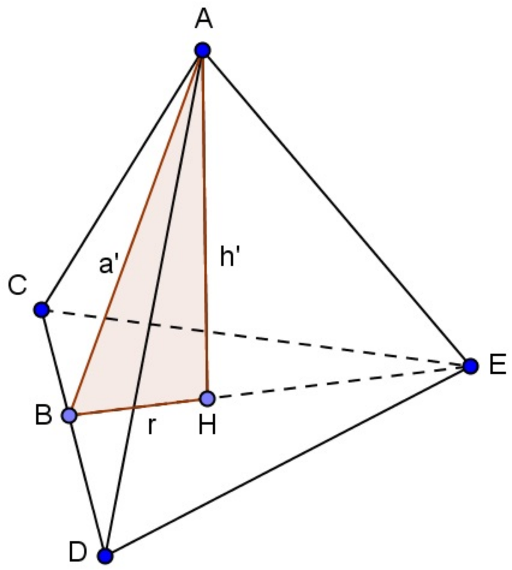


Figura 3.21: Tetraedro Regular: Triângulo AHB

terça parte de sua altura, ou seja,

$$r = BH = \frac{1}{3} \cdot BE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Então,

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}.$$

Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, segue que AB é sua altura. Logo, tem-se:

$$AB = h_{\triangle}.$$

Assim, teremos:

$$a' = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Logo, utilizando o Teorema de Pitágoras temos:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2.$$

Segue daqui que:

$$h'^2 = a'^2 - r^2.$$

Então,

$$h'^2 = \left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\right)^2.$$

Assim, temos:

$$h'^2 = \frac{3\cdot a^2}{4} - \frac{3\cdot a^2}{36}.$$

Ou seja,

$$h'^2 = \frac{27\cdot a^2 - 3\cdot a^2}{36}$$

Portanto,

$$h'^2 = \frac{24\cdot a^2}{36}$$

Extraindo as raízes de ambos os lados da igualdade e simplificando a fração obtida, teremos:

$$h' = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{3}.$$

Como a área da base do tetraedro já foi utilizada na atividade 2, temos sua medida. Assim, segue que

$$V_T = \frac{1}{3}\cdot S_\triangle\cdot h' = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\cdot\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{a^3\cdot\sqrt{18}}{36} = 3\cdot\frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{36}$$

Logo, o volume do tetraedro é dado por:

$$V_T = \frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12}$$

3.2.3 *Atividade 6*

ATIVIDADE 6- Determine um modelo matemático para calcular o volume do octaedro regular, cuja aresta possui medida a:

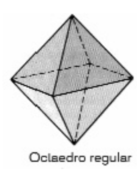
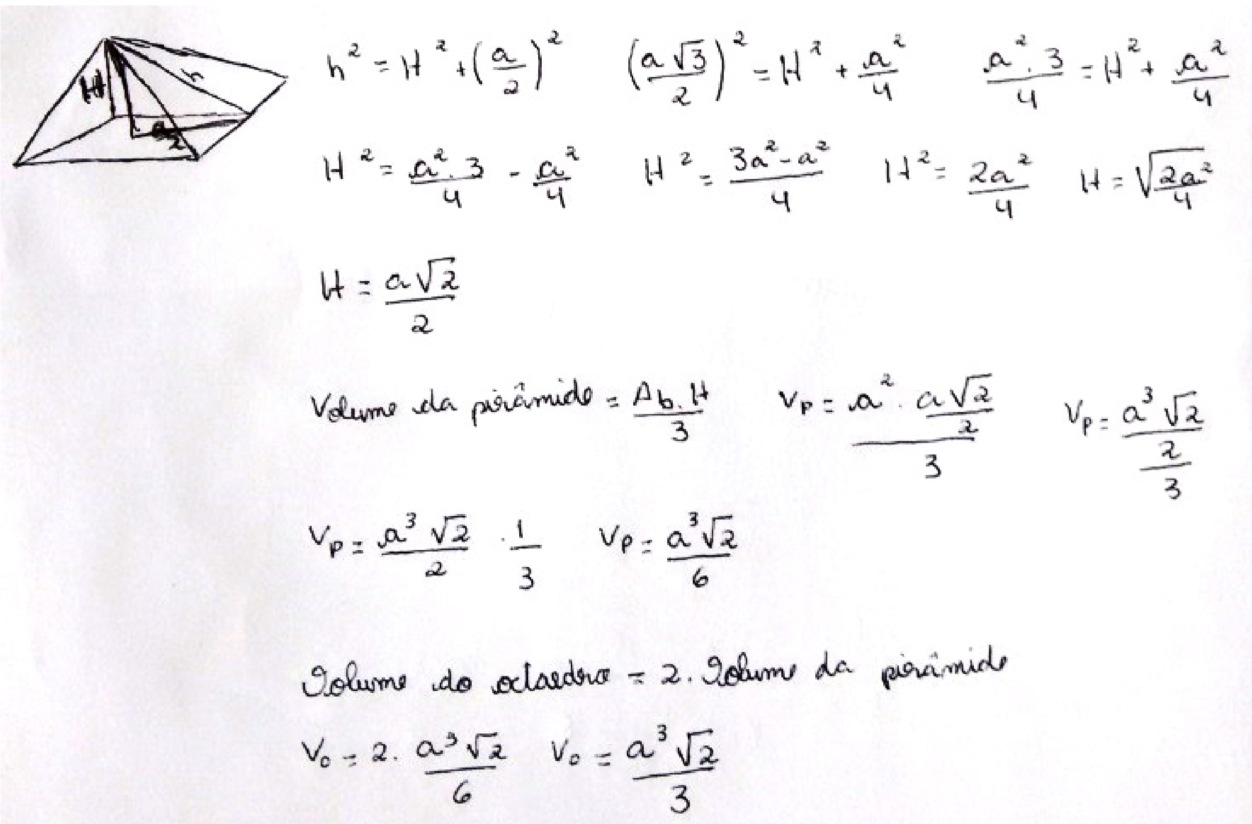


Figura 3.22: Poliedros: octaedro regular

O objetivo desta atividade é encontrar um modelo matemático capaz de calcular o volume do octaedro regular, cuja aresta possui medida a, utilizando conhecimento já adquirido anteriormente. Este problema desenvolverá, nos alunos, a habilidade de saber selecionar conceitos matemáticos que possam ser úteis na resolução desta, além de saber utilizar o conceito de volume de uma pirâmide.

A análise das soluções encontradas pelos alunos mostrou que todos alcançaram o objetivo definido. Esta atividade foi fundamental para verificar o nível de compreensão das atividades anteriores. Pode-se concluir que os alunos conseguiram assimilar o conhecimentos implícito nelas, sendo que mostraram se capazes de resolver problemas semelhantes aos já apresentados. Eles não tiveram dúvidas nesta atividade; quando começaram a fazer, perceberam de imediato uma estratégia de resolução eficiente. Observaram que bastaria calcular a área de uma pirâmide de base quadrada e dobrar o resultado.

Como já haviam calculado área de pirâmide na atividade anterior, foi fácil para eles aplicar a mesma ideia. Observe as figuras 3.23 e 3.24 das atividades realizadas pelos alunos A.H. e E.R.M.J., nesta ordem; pode-se verificar que ambos tiveram uma mesma estratégia e não foi diferente com os outros participantes.



$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = H^2 + \frac{a^2}{4} \quad \frac{a^2.3}{4} = H^2 + \frac{a^2}{4}$

$H^2 = \frac{a^2.3}{4} - \frac{a^2}{4} \quad H^2 = \frac{3a^2 - a^2}{4} \quad H^2 = \frac{2a^2}{4} \quad H = \sqrt{\frac{2a^2}{4}}$

$H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Volume da pirâmide $= \frac{A_b.H}{3}$ $\quad V_p = \frac{a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{3} \quad V_p = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{3}$

$V_p = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{3} \quad V_p = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Volume do octaedro = 2. Volume da pirâmide

$V_o = 2.\frac{a^3\sqrt{2}}{6} \quad V_o = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Figura 3.23: Atividade 6 - A.H.

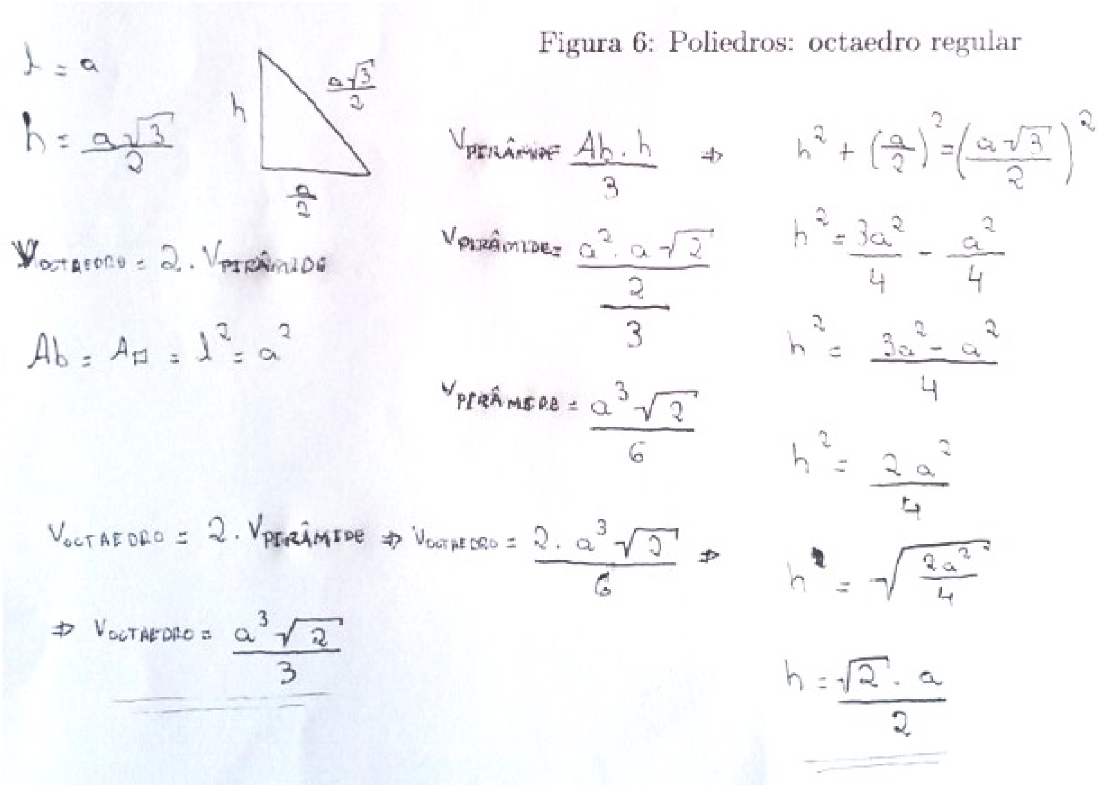


Figura 3.24: Atividade 6 - E.R.M.J.

Veja que ambos seguiram a mesma ideia da atividade anterior, ou seja, destacaram um triângulo para calcular a altura da pirâmide e utilizaram a fórmula utilizada para calcular o volume de uma pirâmide. A única diferença entre a estratégia desta atividade e da anterior é que nesta há a necessidade de dobrar o resultado encontrado do volume da pirâmide.

É evidente que o conhecimento cumulativo das atividades proporciona uma melhor adaptação na resolução de novos problemas semelhantes aos já observados. De fato, a aprendizagem é mais significativa e o método heurístico é muito eficiente neste aspecto.

Uma solução para a atividade 6

Seja V_O o volume do octaedro regular de aresta a. É possível observar que ele pode ser decomposto em duas pirâmides de base quadrada de medida a; assim, precisamos calcular o volume desta pirâmide.

Observando a figura 3.25, temos que h é a altura do triângulo equilátero ADE de lado a, a' é a metade do lado do quadrado de lado a e h' é a altura da pirâmide.

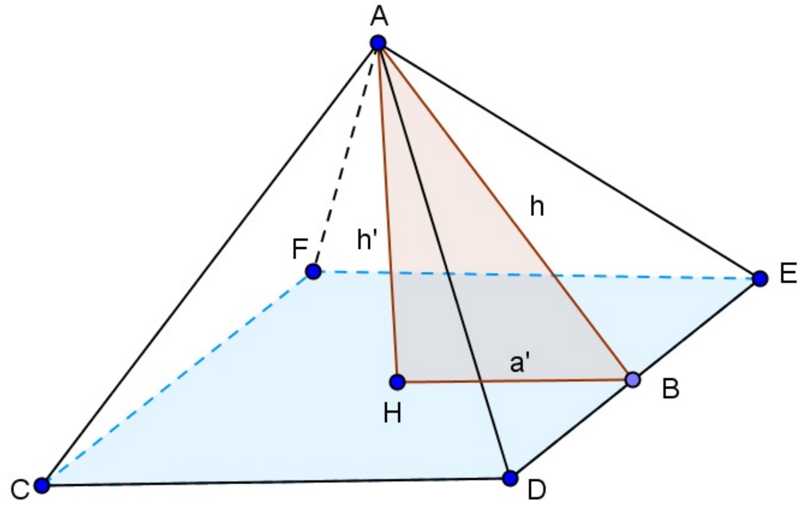


Figura 3.25: Pirâmide de base quadrada: Triângulo AHB

Assim, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$h'^2 = h^2 - a'^2 = \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3 \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2 \cdot a^2}{4}.$$

Calculando o valor absoluto de h', tem-se:

$$h' = \sqrt{\frac{2 \cdot a^2}{4}}.$$

Logo, segue que:

$$h' = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Calculando o volume da pirâmide (V_P) de base quadrada, temos:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot S_{\square} \cdot h' = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Então,

$$V_P = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}.$$

Temos ainda que:

$$V_O = 2 \cdot V_P = 2 \cdot \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}.$$

Portanto, o modelo matemático para calcular o volume do octaedro regular é dado por:

$$V_O = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}.$$

3.2.4 *Atividade 7*

ATIVIDADE 7- Determine um modelo matemático para calcular o volume do dodecaedro regular, cuja aresta possui medida a, inscrito numa circunferência de raio r:

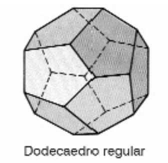


Figura 3.26: Poliedros: dodecaedro regular

O objetivo desta atividade é encontrar um modelo matemático capaz de calcular o volume do dodecaedro regular, cuja aresta possui medida a, inscrito numa circunferência de raio r. Este problema desenvolverá, nos alunos, a habilidade de saber observar uma figura espacial inscrita numa esfera, além de retirar dados desta visualização.

Aparentemente, esta foi a atividade que mais necessitou do aspecto cognitivo dos alunos. A princípio eles não tinham ideia de como fazer para calcular o volume do dodecaedro, mesmo manipulando o sólido em acrílico em suas mãos. Percebi que a orientação do professor é fundamental. Neste momento, foi perguntado se entenderam o enunciado do problema e quais eram as incógnitas, embora a resposta fosse positiva, os alunos não conseguiam estabelecer um plano de resolução. Após determinado momento, o professor mediador os questionou acerca do que eles haviam compreendido das atividades anteriores e mostrou, através de sólidos, o dodecaedro inscrito numa esfera. Depois de algumas indagações conseguiram perceber que o dodecaedro poderia ser construído através de doze pirâmides de base pentagonal.

Após esta ideia inicial e como os alunos já possuíam a informação de como calcular a área do pentágono regular, eles fizeram desenhos para melhor verificação dos dados que possuíam. Observando os resultados obtidos na atividade 3 e o conhecimento de volume da pirâmide das atividades 5 e 6, resolveram o problema proposto. Sendo que todos os alunos encontraram o mesmo modelo matemático. A figura 3.27 mostra a resolução do problema encontrada pelo aluno E.R.M.J.:

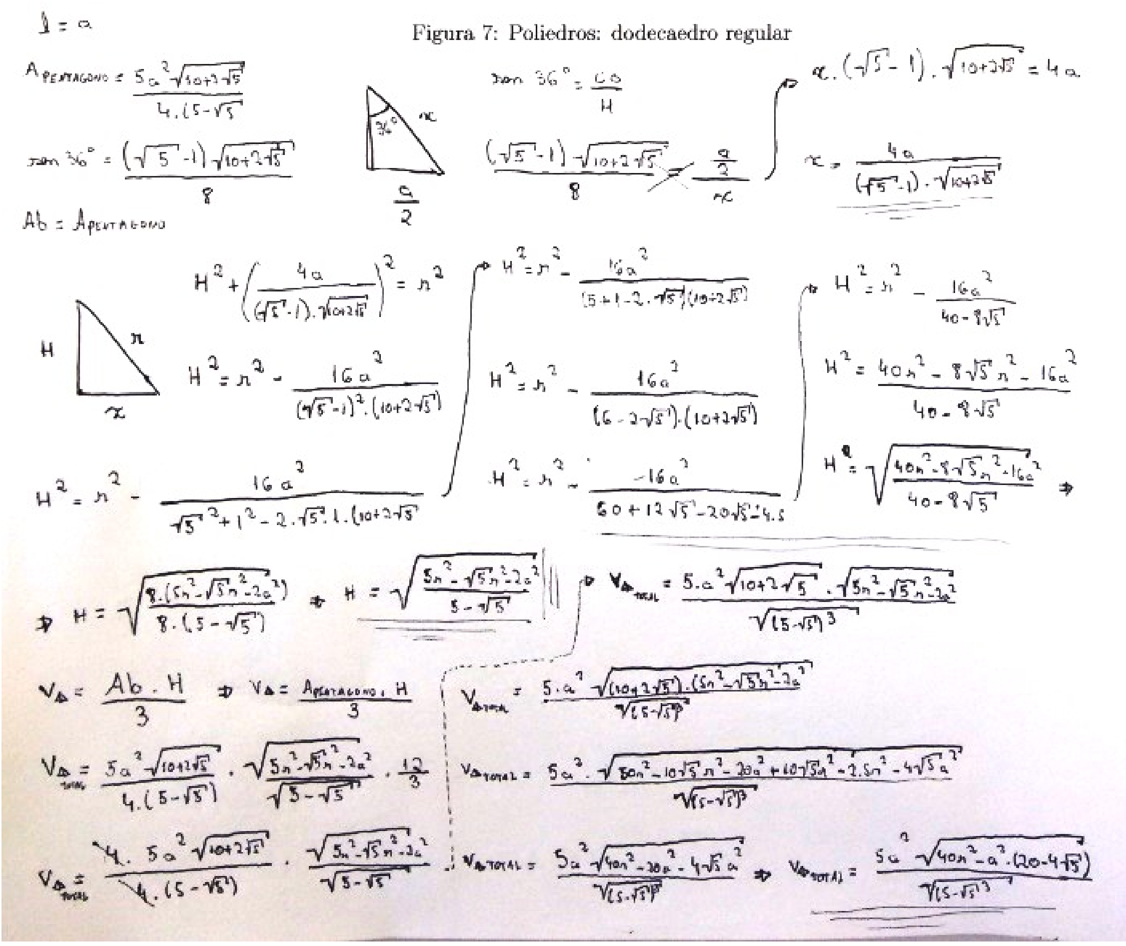


Figura 3.27: Atividade 7 - E.R.M.J.

É possível observar o grau de complexidade da resolução, sendo que nesta atividade o professor deve estar sempre atento as soluções encontradas pelos alunos para poder orientá-los com mais eficácia. Frequentemente, ocorriam equívocos nas resoluções, não por falta de conhecimento dos alunos, mas por conter expressões algébricas complexas. Nestas situações, o professor deve estar atento para orientar o aluno, para não expor a solução ou estratégia observada por ele, isto é, o professor deve indagar o aluno para que ele verifique cada passo da resolução, para que ele observe o erro cometido, sugerir que o aluno faça algo que o leve a encontrar uma solução.

Realizando a atividade, pode-se verificar que existem aspectos que auxiliam as etapas do método, tais como: interesse (a vontade de realizar a atividade desfaz os obstáculos que aparecem), motivação (parte do aluno, mas o professor deve oferece condições para que isso ocorra, através de incentivo, empolgação, elogio etc.), conhecimento prévio (a matemática é uma disciplina que depende que conteúdos prévios para se adquirir novos conteúdos) e uma boa orientação (que é atitude ligada ao professor e, este, deve ser um bom observador para poder realizar as interferências quando necessárias).

Na figura 3.28, pode-se observar a resolução da atividade 7 elaborada pela aluna Y.C.G.R.. Veja que a solução final é a mesma encontrada por E.R.M.J, porém a organização da escrita está mais acentuada. Ela se preocupou em dar uma sequência lógica, inserindo figuras que a auxiliaram na busca do modelo matemático proposto no enunciado.

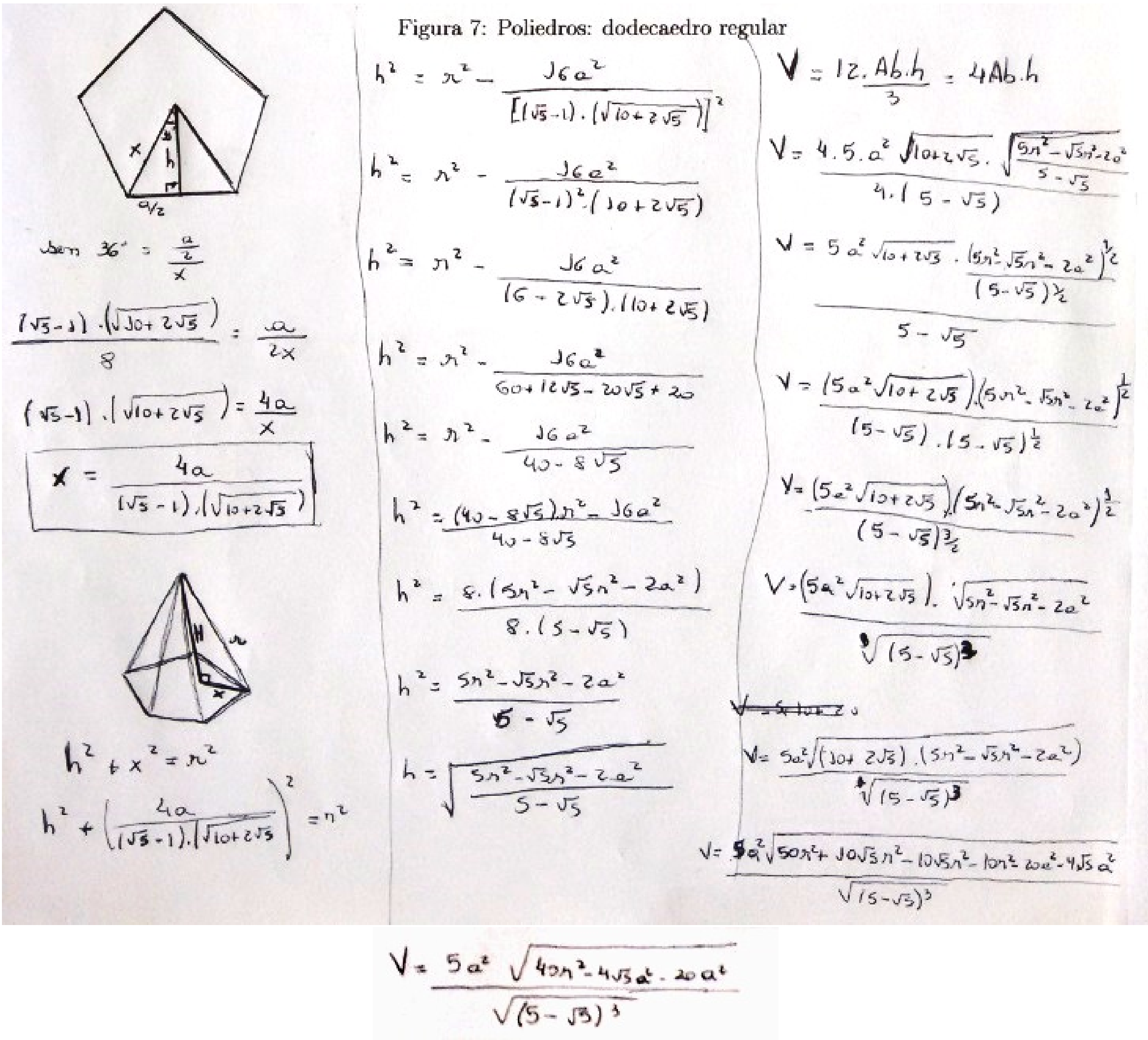


Figura 3.28: Atividade 7 - Y.C.G.R.

É necessário ressaltar que ao final desta atividade parecia que os alunos poderia resolver qualquer atividade. Eles estavam motivados e felizes com a conquista, pois consideraram esta atividade a mais difícil de se estabelecer um plano para resolução e, depois de iniciado, depararam com uma exaustiva tarefa de cálculos, que ao menor deslize dos olhos se poderia cometer um erro. Porém, o conhecimento adquirido durante a execução do plano foi efetivo, pois eles observaram a aplicação dos conceitos e teoremas de forma prática. Pode-se considerar que esta atividade foi primordial para que eles se interessassem mais pelo estudo da matemática, pois deslumbraram o quanto ela é bonita.

Uma solução para a atividade 7

Seja V_D o volume do dodecaedro. Se imaginarmos todas as diagonais do dodecaedro que passam pelo seu ponto central, podemos verificar que são formados doze pirâmides de base pentagonal. Observe a figura 3.29, nela podemos observar uma destas pirâmides.

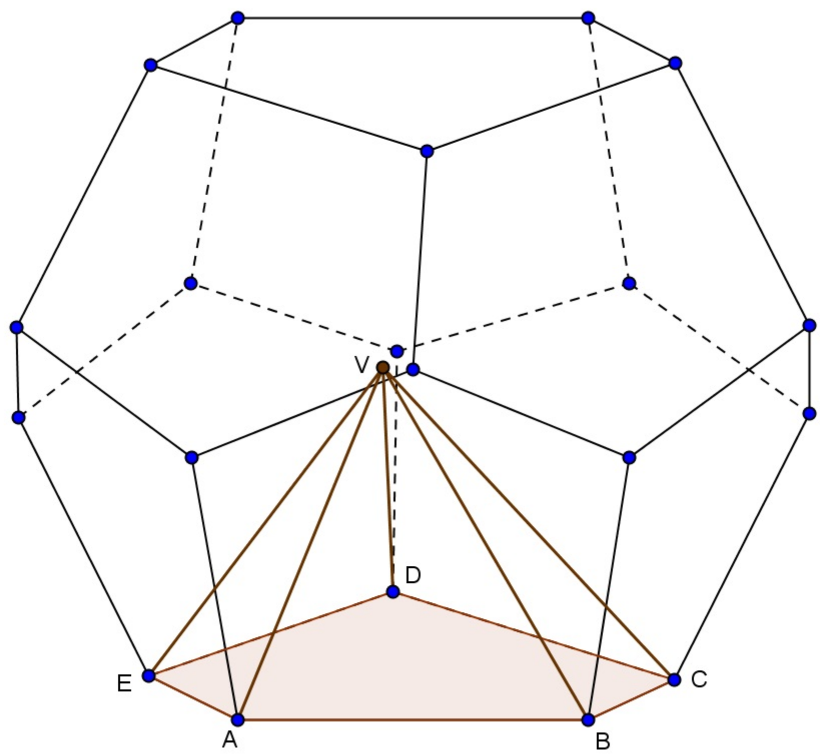


Figura 3.29: Pirâmide inserida no dodecaedro regular

Agora, vamos calcular o volume da pirâmide $ABCDEV$. Na atividade 3, vimos que

$$sen\ 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

e

$$cos\ 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}.$$

Logo, temos que

$$sen\ 36^\circ = sen\ (2\cdot 18^\circ)$$

$$= 2\cdot sen\ 18^\circ \cdot cos\ 18^\circ$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}.$$

Portanto,

$$sen\ 36^\circ = \frac{(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{8}$$

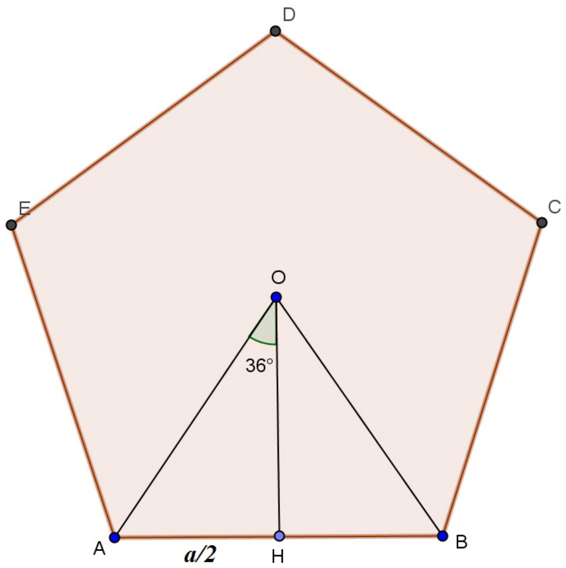


Figura 3.30: Pentágono: Triângulo AOB

Observando a figura 3.30, temos que:

$$sen\ 36^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{OA}$$

Substituindo o valor de $sen\ 36^\circ$, obtemos:

$$\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{8} = \frac{a}{2\cdot OA}$$

Logo, podemos observar que:

$$OA = \frac{4\cdot a}{(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}$$

Agora, calcularemos a altura da pirâmide $ABCDEV$. Como o dodecaedro pode ser inscrito numa esfera, temos que o centro desta também é o ponto central do dodecaedro; logo, $AV = BV = CV = DV = EV = r$, onde r é o raio da circunferência circunscrita ao dodecaedro regular.

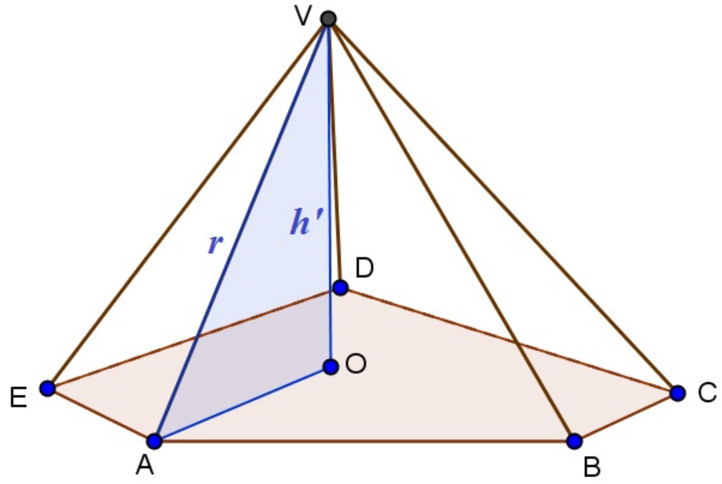


Figura 3.31: Pirâmide: Triângulo AOV

Observando a figura 3.31 e usando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOV, obtemos:

$$h'^2 = r^2 - OA^2 = r^2 - \left(\frac{4 \cdot a}{(\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{10+2 \cdot \sqrt{5}}}\right)^2$$

$$= r^2 - \frac{16 \cdot a^2}{(6 - 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (10 + 2 \cdot \sqrt{5})}$$

$$= r^2 - \frac{16 \cdot a^2}{60 + 12 \cdot \sqrt{5} - 20 \cdot \sqrt{5} - 20}$$

$$= r^2 - \frac{16 \cdot a^2}{40 - 8 \cdot \sqrt{5}}$$

$$= \frac{(40 - 8 \cdot \sqrt{5}) \cdot r^2 - 16 \cdot a^2}{40 - 8 \cdot \sqrt{5}}.$$

Tomando apenas o valor positivo de h', tem-se:

$$h' = \sqrt{\frac{(40 - 8 \cdot \sqrt{5}) \cdot r^2 - 16 \cdot a^2}{40 - 8 \cdot \sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot ((5 - \sqrt{5}) \cdot r^2 - 2 \cdot a^2)}{8 \cdot (5 - \sqrt{5})}}.$$

Portanto,

$$h' = \frac{\sqrt{((5 - \sqrt{5}) \cdot r^2 - 2 \cdot a^2)}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

Usando o modelo matemático, encontrado na atividade 3, para calcular a área do pentágono regular (S_P) e o valor encontrado da altura (h') da pirâmide, podemos calcular o volume desta. Sendo assim, se V_P é o volume da pirâmide, temos:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot S_P \cdot h'$$

Porém,

$$S_P = 5 \cdot \frac{a^2}{4 \cdot tg\ 36^\circ}$$

$$= 5 \cdot \frac{a^2}{4 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}} \right)}$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{5 - \sqrt{5}}$$

O volume do dodecaedro é equivalente ao de 12 pirâmides, logo, tem-se:

$$V_D = 12 \cdot V_P = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_P \cdot h'$$

$$= 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{((5 - \sqrt{5}) \cdot r^2 - 2 \cdot a^2)}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

$$= \frac{5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{(10 + 2 \cdot \sqrt{5})(5 \cdot r^2 - \sqrt{5} \cdot r^2 - 2 \cdot a^2)}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})^3}}$$

$$= \frac{5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{50 \cdot r^2 - 10 \cdot \sqrt{5} \cdot r^2 - 20 \cdot a^2 + 10 \cdot \sqrt{5} \cdot r^2 - 10 \cdot r^2 - 4 \cdot \sqrt{5} \cdot a^2}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})^3}}.$$

Portanto, o volume do dodecaedro regular de aresta a, inscrito numa circunferência de raio r é dado por:

$$V_D = \frac{5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{40 \cdot r^2 - (4 \cdot \sqrt{5} + 20) \cdot a^2}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})^3}}.$$

Devemos salientar que existe uma relação entre o raio r e a aresta a do dodecaedro, pois a partir do momento que fixamos o valor da aresta estabelecemos um valor único para o raio. Ou seja, a medida do raio será proporcional a medida da aresta. Assim, para aumentar ou diminuir a medida do raio, devemos aumentar ou diminuir, respectivamente, a medida da aresta do dodecaedro. Esta mesma ideia pode ser observada em todos os outros poliedros convexos regulares circunscritos numa esfera.

3.2.5 *Atividade 8*

ATIVIDADE 8- Determine um modelo matemático para calcular o volume do icosaedro regular, cuja aresta possui medida a, inscrito numa circunferência de raio r:

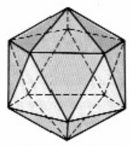


Figura 3.32: Poliedros: icosaedro regular

O objetivo desta atividade é encontrar um modelo matemático capaz de calcular o volume do icosaedro regular, cuja aresta possui medida a, inscrito numa circunferência de raio r. Este problema desenvolverá, nos alunos, a habilidade de saber observar uma figura espacial inscrita numa esfera, além de retirar dados desta visualização; Além, da habilidade de perceber que a ideia de resolução é semelhante a usada na atividade 7.

Esta foi a última atividade apresentada aos alunos. Foi possível perceber que não tiveram nenhuma dificuldade ou dúvida de sua resolução. Todos os alunos compreenderam o enunciado, percebendo que a estratégia de resolução era semelhante ao da atividade anterior. A princípio, eles deduziram que seria trabalhoso como o da atividade 7; no entanto, após estabelecer o plano de resolução, conseguiram, sem nenhuma dúvida, encontrar a solução para o problema proposto; ainda concluíram que os cálculos algébricos eram mais simples que os da atividade anterior.

Pode-se observar nas resoluções realizadas que todos os alunos tiveram estratégias semelhantes. Porém, eles faziam os cálculos em rascunhos durante a atividade e não colocaram tudo que havia neles. Um exemplo disso é a resolução apresentada pela aluna I.M.. Ela não transcreveu o desenho esboçado para realização das atividades; no entanto, é possível observar seu raciocínio em relação a solução encontrada, como mostra a figura 3.33.

Já observando a resolução apresentada pela aluna Y.C.G.R, é possível verificar

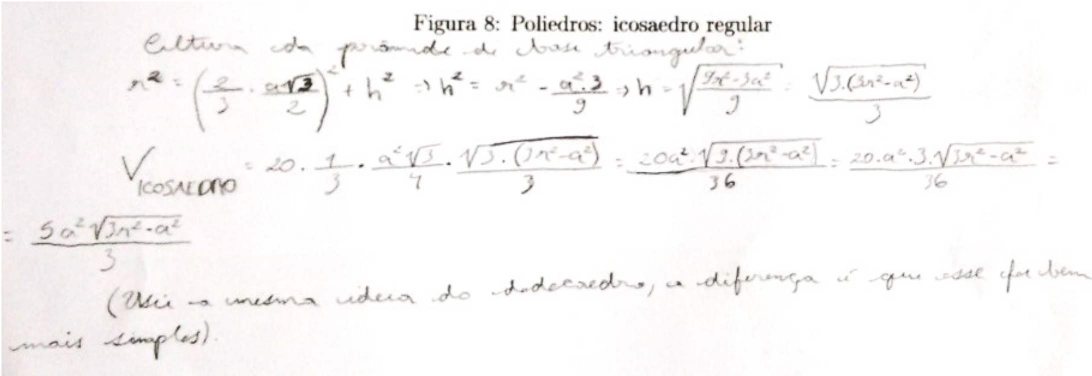


Figura 8: Poliedros: icosaedro regular

Altura da pirâmide de base triangular:

$r^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = r^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{9r^2 - 3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{3.(3r^2-a^2)}}{3}$

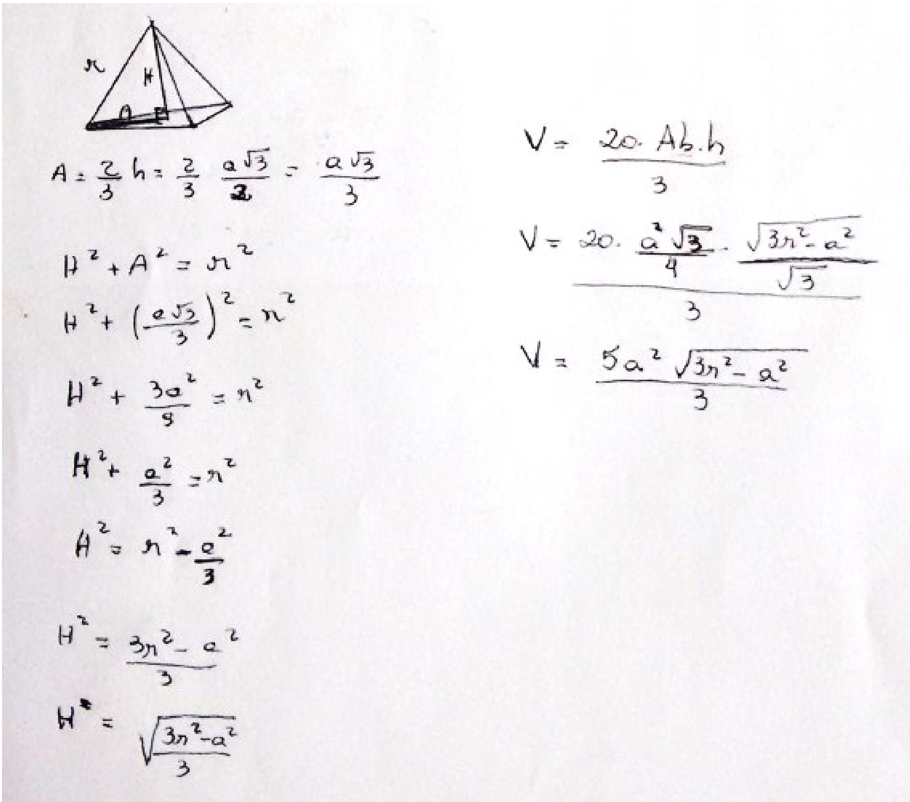
$V_{ICOSAEDRO} = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3.(3r^2-a^2)}}{3} = \frac{20a^2\sqrt{9.(3r^2-a^2)}}{36} = \frac{20.a^2.3.\sqrt{3r^2-a^2}}{36} =$

$= \frac{5a^2\sqrt{3r^2-a^2}}{3}$

(Usei a mesma ideia do dodecaedro, a diferença é que esse foi bem mais simples).

Figura 3.33: Atividade 8 - I.M.

que a utilização do desenho representando a situação é fundamental para visualizar os dados e resolver o problema, como mostra a figura 3.34.



$A = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$H^2 + A^2 = r^2$

$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = r^2$

$H^2 + \frac{3a^2}{9} = r^2$

$H^2 + \frac{a^2}{3} = r^2$

$H^2 = r^2 - \frac{a^2}{3}$

$H^2 = \frac{3r^2 - a^2}{3}$

$H = \sqrt{\frac{3r^2-a^2}{3}}$

$V = \frac{20 \cdot Ab \cdot h}{3}$

$V = \frac{20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3r^2-a^2}}{\sqrt{3}}}{3}$

$V = \frac{5a^2\sqrt{3r^2-a^2}}{3}$

Figura 3.34: Atividade 8 - Y.C.G.R.

Cabe ressaltar que todos encontraram um mesmo modelo matemático, que satisfaz as condições iniciais do problema.

Uma solução para a atividade 8

Seja V_I o volume do icosaedro regular. É possível perceber que se traçarmos todas a diagonais que passam pelo seu centro, criam-se vinte pirâmides de base triangular (triângulo equilátero); sendo que $ABCV$ é uma delas, como mostra na figura 3.35.

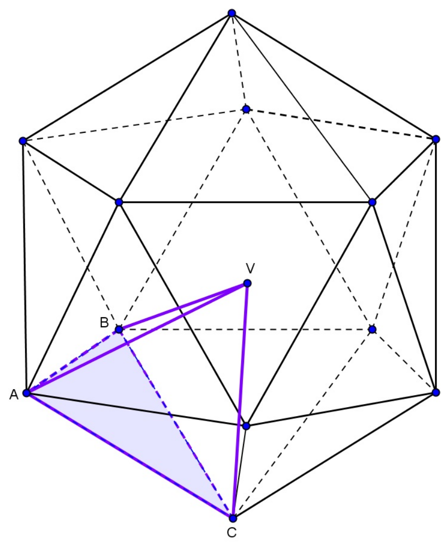


Figura 3.35: Icosaedro regular: Pirâmide ABCV inscrita

Assim, é necessário calcular o volume da pirâmide de $ABCV$. Como o icosaedro regular pode ser inscrito numa circunferência, está possui centro no vértice V da pirâmide $ABCV$, sendo $CV = r$ um de seus raios. Observe que a altura da pirâmide VM é a projeção de V sobre o baricentro de sua base. Logo, podemos destacar o triângulo CMV, retângulo em M, e calcular a medida de $VM = h'$, como mostra a figura 3.36.

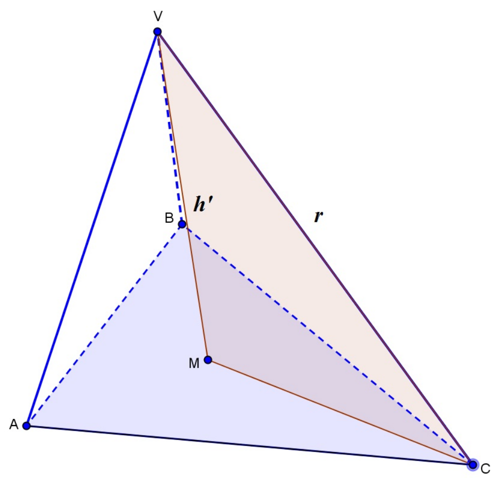


Figura 3.36: Pirâmide ABCV

Como M é o baricentro do triângulo ABC, temos que a medida do segmento CM é equivalente a dois terços da medida altura do triângulo equilátero ABC de lado a. Assim,

$$CM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Temos ainda, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$h'^2 = r^2 - CM^2 = r^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= r^2 - \frac{3 \cdot a^2}{9} = \frac{3 \cdot r^2 - a^2}{3}.$$

Então, o valor positivo de h' é dado por:

$$h' = \sqrt{\frac{3 \cdot r^2 - a^2}{3}}.$$

Seja V_P o volume da pirâmide $ABCV$, teremos:

$$V_I = 20 \cdot V_P = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle} \cdot h'$$

$$= \frac{20}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot r^2 - a^2}{3}}.$$

Portanto, o volume do icosaedro regular de aresta a, inscrito na circunferência de raio r, é dado por:

$$V_I = \frac{5}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3 \cdot r^2 - a^2}.$$

3.2.6 *Verificação Concreta dos Modelos Encontrados*

A última etapa do método heurístico é o retrospecto, que consiste em, basicamente três aspectos: averiguar se os cálculos realizados estão corretos, verificar se a solução encontrada satisfaz o enunciado do problema e saber onde o conhecimento adquirido pode ser útil. O primeiro aspecto foi realizado ao final de cada atividade. Enquanto o segundo foi executado após a atividade 8. Este momento foi culminado no laboratório de ciências do colégio Objetivo de Jussara-GO, onde todos os alunos que participaram das atividades puderam verificar a exatidão da matemática, além de proporcionar uma forma deles comprovarem que seus cálculos estavam corretos.

Cada um dos modelos matemáticos encontrados foi testado através de um experimento utilizando os sólidos platônicos em acrílico. Foram feitas medições das arestas dos poliedros e, em seguida, eram calculados o volume deste utilizando as fórmulas matemáticas. O resultado encontrado era convertido em unidades de capacidade, ou seja, de centímetros cúbicos para litros. Este resultado obtido era medido num recipiente graduado em litros e mililitros e, em seguida, despejado no sólido em acrílico como mostram as imagens abaixo.

Figura 3.37: Verificação do volume do hexaedro

Figura 3.38: Verificação do volume do tetraedro

Figura 3.39: Verificação do volume do octaedro

Figura 3.40: Verificação do volume do octaedro

Figura 3.41: Verificação do volume do dodecaedro

Figura 3.42: Verificação do volume do icosaedro

A comprovação positiva dos modelos motivou os alunos participantes, pois puderam verificar o resultado do trabalho realizado. O retrospecto foi fundamental e se estabeleceu como situação necessária na resolução de problemas através do método heurístico.

O terceiro aspecto do retrospecto, saber onde utilizar o conhecimento adquirido, foi realizado através de um questionário, onde também foi realizada uma avaliação do conhecimento adquirido pelos alunos.

3.2.7 *Análise do Questionário*

Nesta seção, será apresentada a análise do questionário, que se encontra no apêndice 1, página 112, que foi respondido pelos alunos que participaram da execução das atividades. Estas serão importantes para diagnosticar a eficiência do método, além de identificar o quanto ele foi útil na aprendizagem destes.

É possível observar que o conhecimento matemático que foi adquirido na execução das atividades foram significativo para os alunos. Para eles, o conhecimento foi útil por proporcionar uma forma melhor de como estudar e interpretar um problema. Segundo eles, a aprendizagem pode contribuir nos estudos de geometria, pois compreenderam que se pode compreender conteúdos mais complexos a partir de conceitos mais simples; as atividades ainda proporcionaram uma revisão de conteúdos importantes, sendo estes úteis para futuras avaliações que os alunos pretender fazer como ENEM e vestibulares.

Muitos alunos desenvolvem em sua escolarização, na disciplina de matemática, o hábito de memorizar fórmulas que serão úteis apenas para cumprir o cronograma de atividades avaliativas impostas pelos colégios; este conhecimento muitas vezes é imediatamente esquecido após a realização das provas. O método heurístico, se bem aplicado, proporciona um conhecimento real dos conteúdos propostos. Segundo a aluna Y.C.G.R., “[..] a ideia de desenvolver modelos matemáticos faz com que não se perca tempo decorando fórmulas, mas sim com que se saiba encontrá-las para utilizá-las quando necessário”.

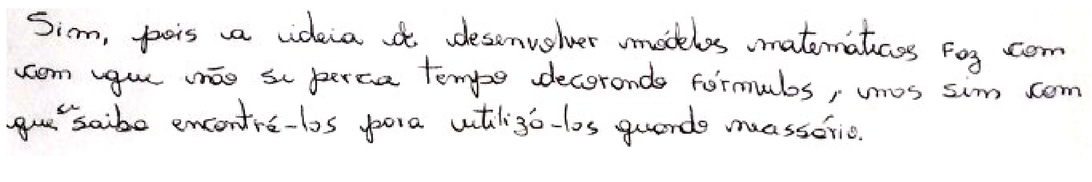

Sim, pois a ideia de desenvolver modelos matematicas faz com com que não se perca tempo decorando formulas, mas sim com que se saiba encontrá-los para utilizá-los quando nessário.

Figura 3.43: Questionário 01 – p. 112 – aluna Y.C.G.R.

De certa forma as atividades foram bem desenvolvidas pelos alunos; Com exceção de uma ou duas atividades que eles acharam mais trabalhosas, a maioria dos alunos as executaram com certa facilidade; deve-se ressaltar que a resolução de um problema depende do conhecimento prévio que o aluno tem acerca dos conteúdos refentes a situação proposta.

Quanto a dificuldade na execução das atividades, temos segundo E.V.B.E.: "A maioria das atividades foram fundamentadas em princípios básicos da geometria, sendo assim as caracterizo fáceis, com exceção de um ou dois exercícios, que foram mais complexos e cansativos".

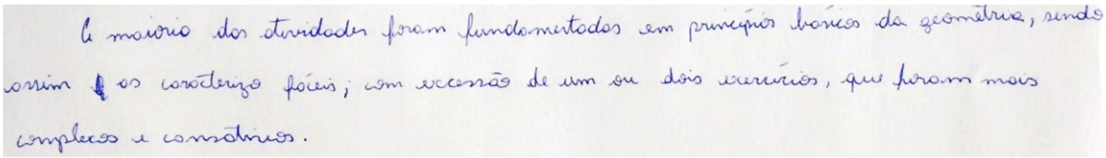

A maioria das atividades foram fundamentadas em princípios básicos da geometria, sendo assim as caracterizo fáceis; com excessão de um ou dois exercícios, que foram mais complexos e cansativos.

Figura 3.44: Questionário 01 – p. 112 – aluno E.V.B.E.

Cabe ainda ressaltar a importância fundamental do professor como orientador atento às dificuldades dos alunos. Por mais complexos que sejam as situações-problemas propostas pelo professor, sempre é possível resolvê-las, sendo o método heurístico um instrumento capaz de promover um verdadeiro conhecimento matemático. Novamente, sobre a dificuldade na execução das atividades, a aluna I.M. esclarece que "[...] a ajuda do professor foi muito esclarecedora quando necessária. alguns exercícios eu achei fáceis, outros, trabalhosos, mas não difíceis".

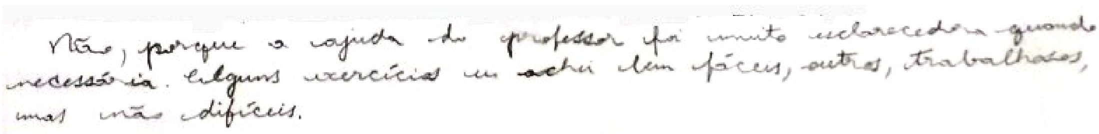

Não, porque a ajuda do professor foi muito esclarecedora quando necessária. alguns exercícios eu achei bem fáceis, outros, trabalhosos, mas não difíceis.

Figura 3.45: Questionário 02 – p. 112 – aluna I.M..

O retrospecto é um momento importante do método de Polya, pois nele verifica-se as possibilidades do uso do conhecimento adquirido durante a resolução do problema. Pode-se observar que os alunos perceberam que as aprendizagens poderiam ser utilizadas em várias situações que envolvessem os conteúdos estudados, além de utilizá-las em processos seletivos. Segundo o aluno A.H.P.O., o conhecimento adquirido pode ser utilizado em "[...] algumas atividades que envolvam área e volume de sólidos, exercícios que envolvam semelhança de triângulos, situações que envolvem os poliedros". Já a aluna I.M. ressalta que a aprendizagem assimilada pode ser útil "[...] na resolução de exercícios de geometria semelhantes em vestibulares, por exemplo: Área, volume e situações que envolvem triângulos equiláteros são bem recorrentes nos processos seletivos e as ideias que adquiri com certeza me auxiliarão".

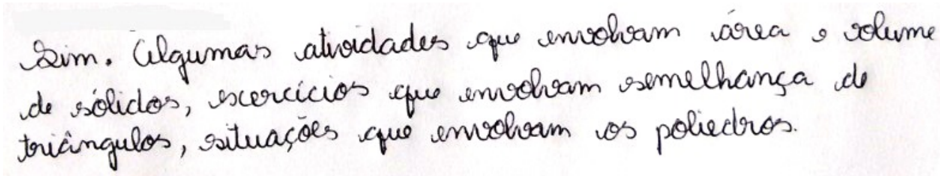

Sim. Algumas atividades que envolvam área e volume
de sólidos, exercícios que envolvam semelhança de
triângulos, situações que envolvam os poliedros.

Figura 3.46: Questionário 03 – p. 112 – aluno A.H.P.O.

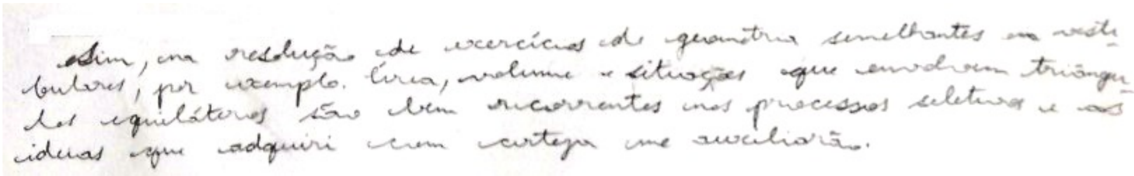

Sim, na resolução de exercícios de geometria semelhantes em vesti-
bulares, por exemplo. Área, volume e situações que envolvem triângu-
los equiláteros são bem recorrentes nos processos seletivos e as
ideias que adquiri com certeza me auxiliarão.

Figura 3.47: Questionário 03 – p. 112 – aluna I.M..

É importante esclarecer que sempre é possível melhorar uma aula dada; sendo assim, os alunos que participaram da execução da atividades fizeram algumas sugestões ou críticas que podem contribuir para melhoria de futuras aulas, tais como:

•Utilizar software 3D de geometria;

•Apresentar a planificação dos sólidos (Poliedros de convexos de Platão);

•Mostrar os poliedros em acrílico que possuam triângulos em seu interior que destaquem o apótema de suas faces e de outros elementos que possam facilitar a visualização geral destes sólidos.

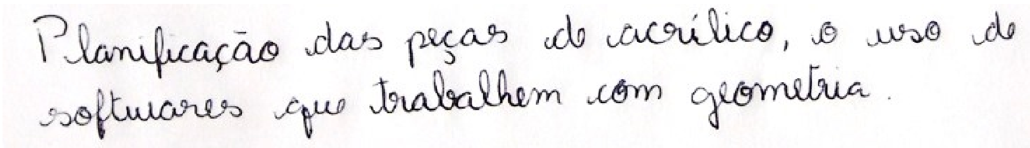

Planificação das peças de acrílico, o uso de
softwares que trabalhem com geometria.

Figura 3.48: Questionário 04 – p. 112 – aluno A.H.P.O.

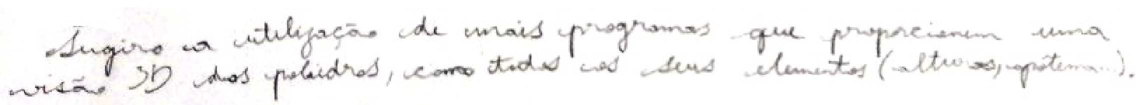

Sugiro a utilização de mais programas que proporcionem uma
visão 3D dos poliedros, com todos os seus elementos (alturas, apótemas...).

Figura 3.49: Questionário 04 – p. 112 – aluna I.M..

Veja que, por se tratar de geometria, o aspecto visual é de suma importância, pois pode facilitar a compreensão e análise dos elementos de qualquer sólido geométrico.

O método heurístico foi fundamental para o sucesso dos alunos na execução das atividades propostas, pois estabelece um algoritmo que direciona os alunos na resolução dos problemas, criando um modelo para se aprender conteúdos matemáticos de forma significativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivou mostrar a importância de se utilizar o método heurístico como metodologia ou estratégia no ensino da matemática e verificar sua eficiência através da resolução de problemas, pois esta é a essência no desenvolvimento da Matemática e tem um papel extremamente importante no ensino desta disciplina.

Deve-se ressaltar que as etapas de resolução de problemas propostas por Polya não se estabelecem como *fórmula mágica* para resolver todo e qualquer problema matemático, no entanto seu conhecimento pode ajudar àqueles que pretendem se tornar bons resolvedores de problemas ou quem quer aperfeiçoar esta habilidade.

Observou-se que o método heurístico ajuda o aluno a resolver problemas por exigir certa organização das ideias no decorrer da resolução. Desta forma, pode-se verificar que a ação de resolver problemas se torna uma tarefa comumente mais simples se comparada a situações em que as ideias não estão sistematizadas.

Este estudo da heurística na resolução problemas revelou que sua execução desenvolve, nos alunos, a criatividade, além de mostrar a capacidade do pensamento humano no desenvolvimento da matemática, de superar situações desafiadoras e de adquirir a habilidade de resolver problemas. Assim, um matemático, conhecedor do método de Polya, provavelmente terá uma visão mais ampla da Matemática, desenvolvendo a capacidade de lidar mais facilmente com os problemas matemáticos que possam surgir no seu cotidiano.

Mostrou-se ainda que o professor conhecedor do método de Polya dispõe de um importante recurso capaz de facilitar e aprimorar o processo ensino-aprendizagem da matemática, tornando sua aulas mais eficientes quanto ao ensino desta disciplina e os alunos mais criativos e encorajados a realizar as atividades propostas.

Ao apresentar uma breve história dos poliedros, em que foram expostos algumas definições e teoremas importantes deste conteúdo, pretendeu-se criar um aspecto mais contextualizado dos poliedros. Além de abordar alguns aspectos conceituais do método heurístico, ressaltando os tipos de problemas que são apresentados mais frequentemente nas aulas de matemática, exemplificando cada um deles. Desta maneira, pode-se compreender o quão vasto são as situações-problemas que nossos alunos enfrentam no seu cotidiano escolar.

Foi apresentado as etapas do método heurístico (foco central do trabalho), mostrando a importância de se compreender o problema proposto, saber estabelecer um plano de resolução para este, além de saber executá-lo; ainda foi destacado a necessidade de se fazer um retrospecto da resolução, averiguando os cálculos e observando a real aprendizagem proposta pelo método. Concluiu-se que este método é uma ferramenta fundamental no ensino da matemática, pois se usada como metodologia produz, no aluno, um conhecimento efetivo, isto é, uma aprendizagem significativa.

Neste trabalho foram realizadas algumas aplicações do método heurístico, a fim de mostrar como o professor deve proceder durante o desenvolvimento de atividades que envolvem situações-problemas. Assim, pode-se perceber que cada etapa do método é de suma importância, e sua sistematização deve ser obedecida, ou seja, pode-se verificar que para resolver um problema o aluno deve compreender o enunciado, em seguida, elaborar um plano de resolução e, somente depois, executar o plano que foi criado. O último passo, o retrospecto, é fundamental para fixar o conhecimento do conteúdo da qual o problema faz parte.

Foi apresentada a aplicação do método heurístico na construção de modelos matemáticos capazes de calcular a área e o volume dos poliedros regulares convexos de Platão, mostrando que é possível para alunos da 3ª série do Ensino Médio encontrá-los utilizando o método heurístico. Além de proporcionar-lhes a descoberta de uma aprendizagem significativa, desenvolvendo a autonomia do pensamento, uma vez que o aluno utiliza suas próprias indagações para encontrar uma solução para o problema proposto. Mostrou-se ainda que o aprendizado adquirido através das atividades é fundamental para resolver outras situações-problemas semelhantes aos que foram vistos, gerando novos conhecimentos úteis.

Deve-se ressaltar que todos os alunos participantes da execução do método conseguiram encontrar os modelos matemáticos propostos nas atividades. Observando ainda que o método foi compreendido e executado com êxito, em todas as etapas, por todos. Mostrando que sua utilização como metodologia proporciona uma aprendizagem real dos conteúdos matemáticos; pois, o aluno terá mais que um conhecimento puramente matemático, ele construirá um pensamento crítico e lógico que será primordial na sua vida social, contribuindo para futuras escolhas.

Partindo do pressuposto de que o conhecimento é sempre renovável, pode-se afirmar que qualquer método que o professor use pode ser adaptado à realidade de seus alunos. É ainda muito importante ressaltar que o bom professor é aquele que está sempre a procura de novas metodologias para o ensino da matemática, além de buscar o maior número de recursos para isso, ou seja, o bom professor é aquele que sempre aprende algo novo.

Referências Bibliográficas

[1] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5 ed. 1 reimpr. São Paulo: Contexto, 2009.

[2] BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números Complexos**. 3 ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática)

[4] CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino da matemática**. 2. ed. rev. São Paulo: Cortez, 1994.

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12. ed. 10 impr. São Paulo: Ática, 2007.

[6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. v.10. São Paulo: Atual, 1993.

[7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[8] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 4 ed. Curitiba-PR: Positivo, 2009.

[9] ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Resolução de Problemas**: construção de uma metodologia (ensino fundamental I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[10] LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2. 6 ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006, 372 p. (Coleção do Professor de Matemática)

[11] MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática**: Temas e Metas – Áreas e Volumes. v.4. São Paulo: Atual, 1988.

[12] MARQUES, Sylvie. **Sólidos Platônicos**. Disponível em: <http://avrinc05.no.sapo.pt/index.htm>. Acesso em: 10/05/2015.

[13] MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula**: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2 ed. Ver. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[14] PCN. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília-DF : MEC/SEF, 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 15/12/2014.

[15] PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília-DF: MEC, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 15/12/2014.

[16] POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático; traduzido por Heitor Lisboa de Araújo. 2 reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[17] VARIZO, Zaíra da C. M. **A Heurística e o Ensino da Resolução de Problemas**. In: Revista Inter-Ação Fac. Educ. UFG, 7(1-2): 31-39, jan/dez, 1983.

[18] VARIZO, Zaíra da C. M. **O Ensino da Matemática e a Resolução de Problemas**. In: Revista Inter-Ação Fac. Educ. UFG, 17(1-2): 1-21, jan/dez, 1993.

[19] VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para Aprender a Pensar**: O papel de crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006, 212 p.

APÊNDICE 1: Atividades elaboradas para aplicação do Método Heurístico

.

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 1- Determine um modelo matemático para calcular a área total do hexaedro regular, cuja aresta possui medida a:

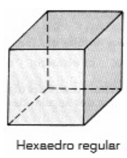


Figura 3.50: Poliedros: hexaedro regular

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 2- Determine um modelo matemático para calcular as áreas totais do tetraedro regular, do octaedro regular e do icosaedro regular, cujas arestas possuem medida a:

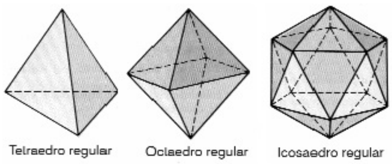


Figura 3.51: Poliedros: tetraedro, octaedro e icosaedro regulares

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 3- Determine um modelo matemático para calcular a área total do dodecaedro regular, cuja aresta possui medida a:

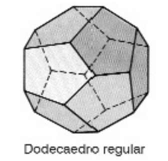


Figura 3.52: Poliedros: dodecaedro regular

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 4- Determine um modelo matemático para calcular o volume do hexaedro regular, cuja aresta possui medida a:

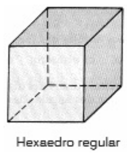


Figura 3.53: Poliedros: hexaedro regular

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 5- Determine um modelo matemático para calcular o volume do tetraedro regular, cuja aresta possui medida a:

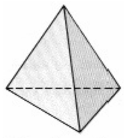


Figura 3.54: Poliedros: tetraedro regular

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 6- Determine um modelo matemático para calcular o volume do octaedro regular, cuja aresta possui medida a:

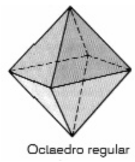


Figura 3.55: Poliedros: octaedro regular

Nome: ....

ATIVIDADE 7- Determine um modelo matemático para calcular o volume do dodecaedro regular, cuja aresta possui medida a, inscrito numa circunferência de raio r:

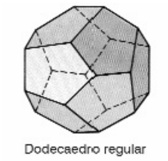


Figura 3.56: Poliedros: dodecaedro regular

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

ATIVIDADE 8- Determine um modelo matemático para calcular o volume do icosaedro regular, cuja aresta possui medida a, inscrito numa circunferência de raio r:

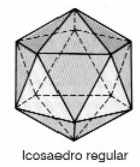


Figura 3.57: Poliedros: icosaedro regular

APÊNDICES 2 QUESTIONÁRIO PARA AVALIAR A APLICAÇÃO DO MÉTODO HEURÍSTICO

Universidade Federal de Mato Grosso

Campus Universitário do Araguaia

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

Nome: ....

Questionário

01- O conhecimento matemático adquirido durante as aplicações das atividades foram significativos para seus estudos na disciplina? Por que?

02- Na sua avaliação, foi difícil desenvolver as atividades propostas? Por que?

03- Você sabe informar algumas situações em que poderá utilizar o conhecimento adquirido? Especifique.

04- Deixe algumas sugestões ou críticas que possam contribuir para melhoria das atividades:

APÊNDICE 2: Planificação dos Poliedros Regulares de Platão

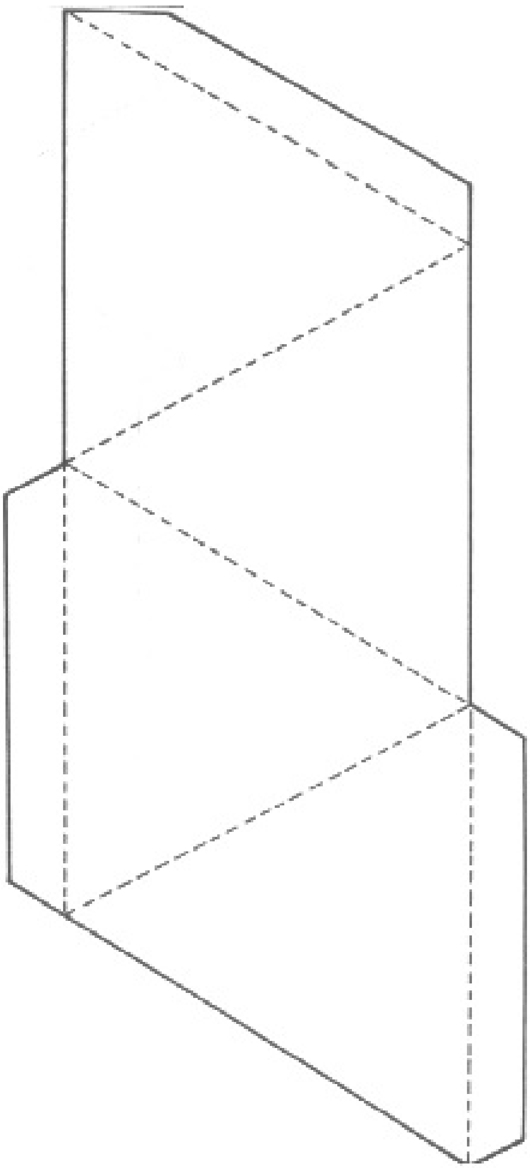


Figura 58: Planificação do Tetraedro Regular

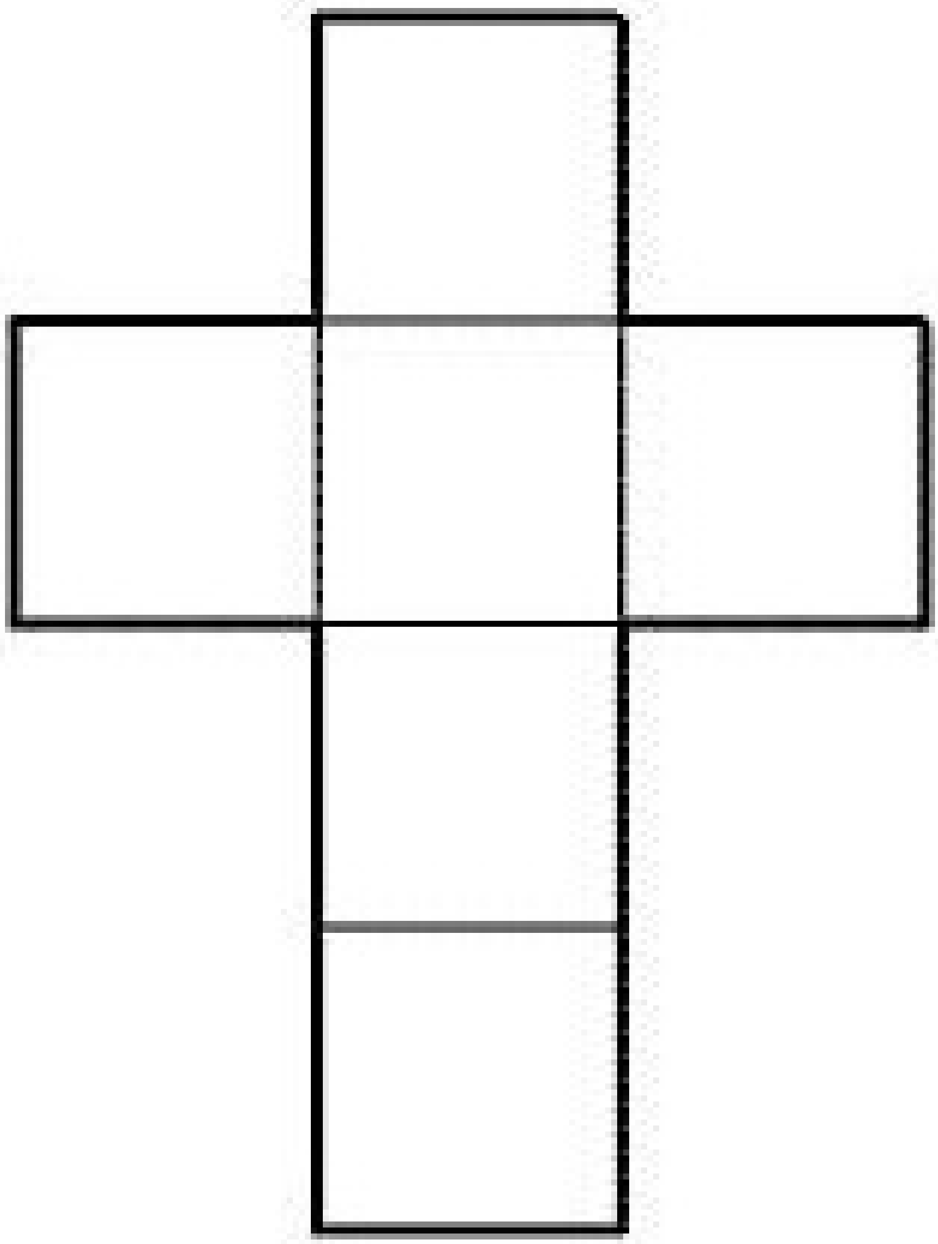


Figura 59: Planificação do Hexaedro Regular

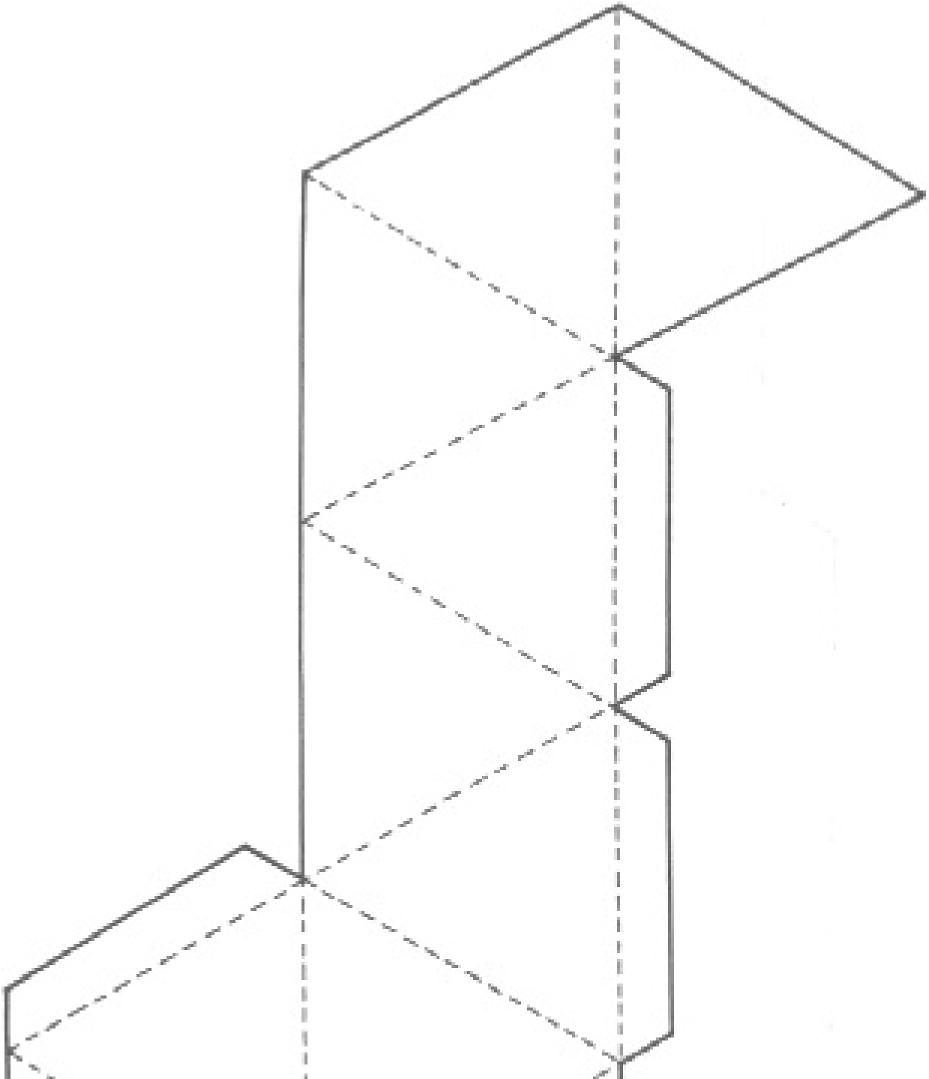


Figura 60: Planificação do Octaedro Regular

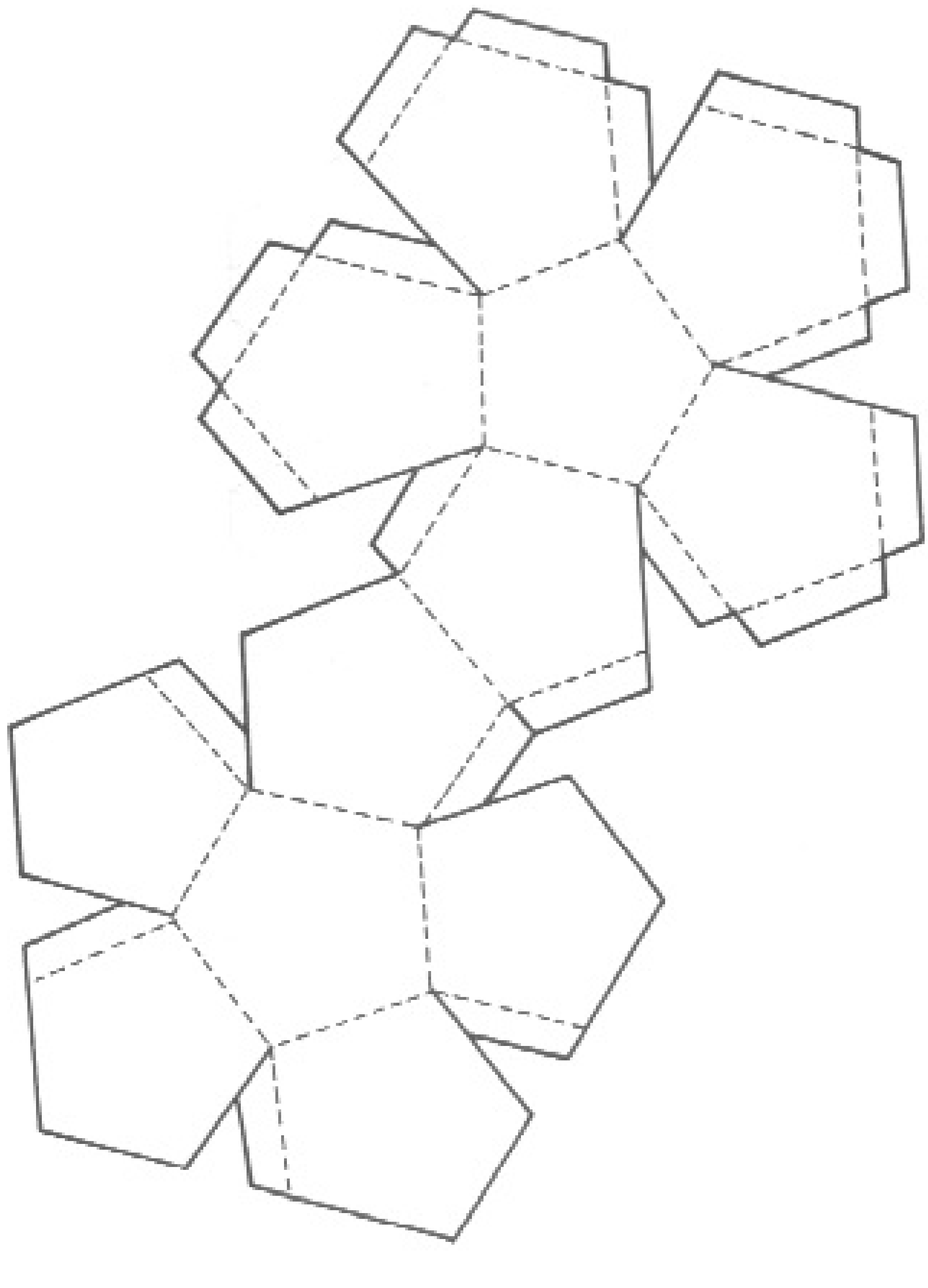


Figura 61: Planificação do Dodecaedro Regular

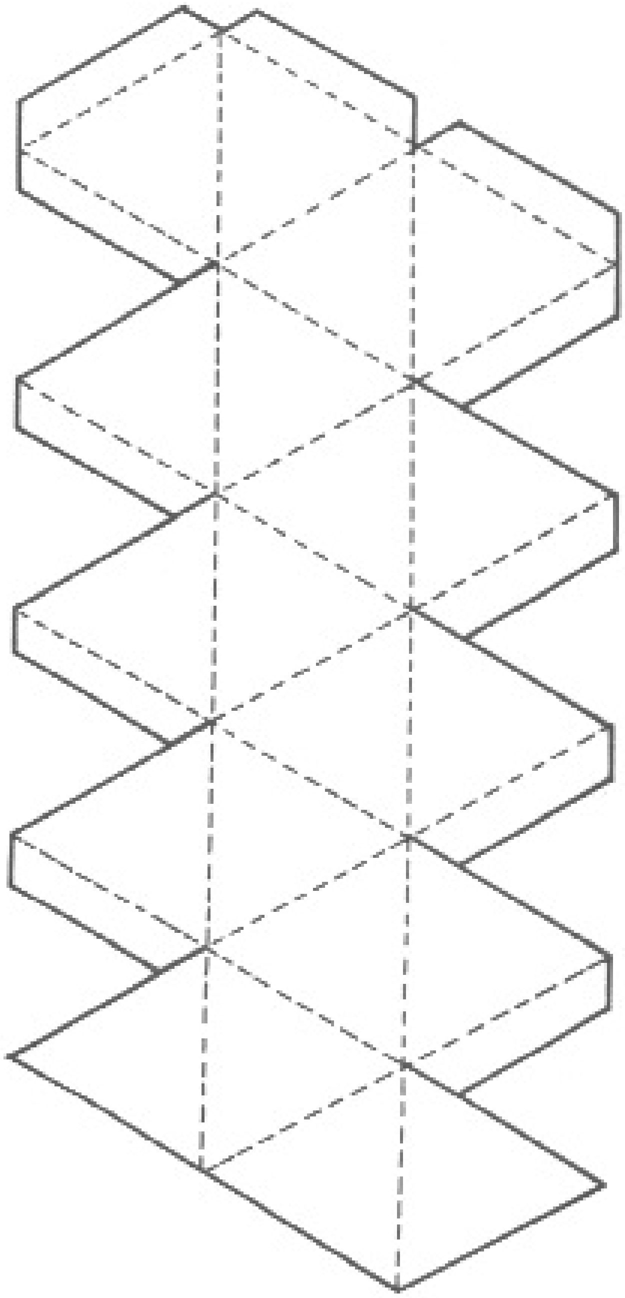


Figura 62: Planificação do Icosaedro Regular