UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

A IMPORTÂNCIA DE TRABALHAR COM O RESTO DA DIVISÃO E COM A IDEIA DE CONGRUÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Tábata Larissa dos Santos Alves

Orientador: Prof. Dr. Claudiano Goulart

Feira de Santana
Agosto de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

A IMPORTÂNCIA DE TRABALHAR COM O RESTO DA DIVISÃO E COM A IDEIA DE CONGRUÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Tábata Larissa dos Santos Alves

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Claudiano Goulart

Feira de Santana

21 de Agosto de 2015

Ficha catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Alves, Tábata Larissa dos Santos

A477i A importância de trabalhar com o resto da divisão e com a idéia de congruência no ensino fundamental / Tábata Larissa dos Santos Alves - Feira de Santana, 2015.

84 f.: il.

Orientador: Claudiano Goulart

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Matemática – ensino fundamental. I. Goulart, Claudiano, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 372.8:51

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE TÁBATA LARISSA DOS SANTOS ALVES DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e um dias dias do mês de agosto de dois mil e quinze às 14:00 horas no Auditório PPGM - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"A Importância de Trabalhar com o Resto da Divisão e com a Ideia de Congruência no Ensino Fundamental"**, da discente **Tábata Larissa dos Santos Alves**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Claudiano Goulart (Orientador, UEFS), Jamerson dos Santos Pereira (UFRB) e Kisnney Emiliano de Almeida (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 21 de agosto de 2015.

Prof. Dr. Claudiano Goulart (UEFS)
Orientador

Jamerson dos Santos Pereira

Prof. Me. Jamerson dos Santos Pereira (UFRB)

Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, meu porto seguro no qual deposito toda a minha fé e confiança. E a Jesus, meu amigo mais presente e confidente, a quem confio minhas angustias e entrego minha vida. Muito obrigada por sempre se fazerem presentes em minha vida, me dando força para proseguir nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Rosa e Marcos. E a meu irmão Alfredinho. Vocês fizeram parte de cada pequeno processo de crescimento de minha vida, sempre me apoiando e acreditando que eu era capaz. Agradeço por toda compreensão, de não estar presente devido aos estudos. Sem o apoio de vocês tenho certeza que não teria alcançado e vencido mais esta etapa. Amo vocês demais!

Ao que no início do mestrado era um conhecido, durante o curso se tornou namorado, noivo e agora recebe o título de marido. Meu maridinho Jonailson. Muito obrigada por toda compreensão, paciência, companheirismo e principalmente por todo amor que tem me dedicado. Quando você me dizia para "forçar a natureza" para estudar, muitas vezes gerava uma força que não mais existia em mim. Não há palavras que possam expressar o quanto te amo!

À minha família, por toda alegria pela minha conquista e confiança de que eu era capaz de atingir mais este objetivo.

Aos professores do PROFMAT, pela dedicação e a paciência de sempre procurar sanar nossas dúvidas.

Ao corpo docente e funcionários do CEJAA, em especial aos muitos amigos que foram verdadeiros presentes em minha vida. As experiências compartilhadas, apesar do pouco tempo de convívio, serão levadas para o resto de minha vida! Um agradecimento especial às minhas mademoiselles: Cris, Barbara e Jane, por todo o estímulo. E a prozinha Elione, por todo carinho e experiências compartilhadas.

Aos meus colegas do PROFMAT, por todas angustias compartilhadas. Em especial aos meus amigos Ana e Robson. Sem vocês, literalmente, não teria conseguido. Vocês como professores são fantásticos, e como amigos, nem tenho palavras! Não posso me esquecer de Érica! Tenho que agradecer a Rubenilson também, por me acolher com tanto carinho, por tantas vezes, em seu lar!

Ao professor orientador Claudiano Goulart, que com seu jeito paciente realizou valiosas contribuições, sem as quais a elaboração e contrução deste trabalho não seriam possíveis. Muito obrigada professor, por todo tempo dedicado. Desde a graduação o considerava como um exemplo a seguir, pela qualidade de suas aulas e planejamentos. Agradeço pela oportunidade de ser sua orientanda no mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro, fundamental durante o processo.

Resumo

Diante da grande dificuldade dos estudantes na utilização do algoritmo da divisão e a grande relevância deste conteúdo na educação matemática, é importante a realização de pesquisas que se proponham a discutir este tema vislumbrando possibilidades que favoreçam sua aprendizagem. Tendo em vista tal panorama, o objetivo de nossa pesquisa é discutir de que maneira trabalhar com situações em que utilizam o resto da divisão, pode favorecer a aprendizagem significativa do algoritmo da divisão. Dentre as questões discutidas, daremos maior destaque àquelas em que é utilizada a ideia de congruência em sua resolução. Por fim, vamos sugerir algumas propostas didáticas abordando esta ideia.

Palavras-chave: Divisão, congruência, proposta didática.

Abstract

Faced with the great difficulty of the students in using the division algorithm and the great relevance of this content in mathematics education, it is important to conduct research that propose to discuss this topic glimpsing possibilities favoring their learning. Given this scenario, the aim of our research is to discuss how to work with situations where the rest of the division interfere in any way in the solution, can foster meaningful learning of the division algorithm. Among the issues discussed, we will give greater emphasis to those in which the idea of congruence is used in its resolution. Finally, we suggest some educational proposals addressing this idea.

Keywords: Division, congruence, didactic proposal.

Sumário

Agradecimentos **i**

Resumo **iii**

Abstract **iv**

Sumário **v**

Introdução **1**

1 Fundamentação teórica **3**

1.1 Algoritmo 3

1.2 Aprendizagem significativa 3

1.3 Divisão Euclidiana 5

1.4 Congruência 7

1.5 Congruência: contexto histórico 10

2 Ensino da divisão **12**

2.1 A divisão no ensino fundamental 13

2.2 Metodologias de ensino e a importância das questões propostas 17

2.3 O ensino da aritmética e a congruência 24

3 Análise da abordagem da divisão nos livros didáticos **30**

3.1 Como a divisão é apresentada nos livros didáticos atuais 31

3.2 Como e quais questões vem sendo apresentadas? 41

4 Aplicações **50**

4.1 Sugestões de atividades 50

4.2 Sugestão de investigação 67

5 Conclusão **73**

Referências Bibliográficas **75**

Introdução

As quatro operações básicas são consideradas a base da educação matemática. Destas operações, a divisão é o “terror” de grande parte dos estudantes, que muitas vezes concluem o ensino médio sem saber aplicar corretamente o algoritmo da divisão. Apesar de ser um conteúdo trabalhado deste as séries iniciais, ainda há um grande déficit em sua aprendizagem.

Considerando a grande dificuldade dos estudantes na resolução do algoritmo da divisão, muitas vezes por ser visto como um método de resolução abstrato e sem significado, entedendemos que é necessário discutir acerca de metodologias de ensino e abordagens do conteúdo que contribuam com sua aprendizagem.

A proposta inicial de nossa pesquisa foi sugerir a implementação do conteúdo congruência no ensimo médio. Refletindo sobre a proposição, chegamos a conclusão que a quantidade de conteúdos que compõem a grade curricular deste período são tantos, que muitas vezes não há tempo hábil de serem trabalhados. Com a preocupação de propor uma discussão em que houvesse viabilidade de aplicação, observamos a possibilidade de trabalhar com a ideia de congruência por meio de questões, de modo que suas resoluções seriam utilizando o algoritmo da divisão.

Partindo desde ponto, refletimos que a maneira como o conteúdo é abordado, e as questões que são propostas em sala, muitas vezes partem do livro didático, visto que este é um dos recursos mais utilizados no processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, é importante que as propostas de atividades deste material colaborem com a aprendizagem, e apresentem a situação através de diversas abordagens. Além disso, o tratamento do tema deve se dar de maneira que contemple todas as ideias associadas ao conteúdo.

Entendemos que, é importante realizar pesquisas que discutam este tema, vislumbrando estratégias que favoreçam a aprendizagem deste conteúdo tão relevante, inclusive para a aprendizagem de outros conteúdos do currículo de matemática. Precisamos estudar abordagens do conteúdo de divisão de naturais que contribuam para a sua aprendizagem. O objetivo do nosso trabalho é discutir de que maneira trabalhar com situações em que o resto da divisão interfere de alguma maneira na solução, pode favorecer a aprendizagem significativa do algoritmo da divisão. Dentre tais questões, daremos maior destaque àquelas em que é utilizada a ideia de congruência em sua resolução.

Visando alcançar tais objetivos, nosso trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo, intitulado *Fundamentação teórica*, tem por objetivo apresentar alguns conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Em cada seção, apresentamos um destes conceitos.

Já o objetivo do segundo capítulo é apresentar o panorama da aprendizagem da divisão, e argumentar meios de colaborar com sua aprendizagem. Apresentaremos na primeira seção o modo como as quatro operações são compreendidas como a base do conhecimento em matemática; em seguida exibiremos um panorama geral da situação da aprendizagem em matemática no Brasil, salientando a dificuldade específica em divisão, quando iniciam a aprendizagem do método de resolução do algoritmo da divisão. Na segunda seção discutiremos acerca das metodologias de ensino e sua intervenção no processo de aprendizagem; argumentaremos então que situações em que o resto interfere no resultado favorece para uma aprendizagem significativa. Por fim, na terceira seção discutiremos sobre o ensino da aritmética e de que maneira a ideia da congruência pode contribuir para este ensino.

No terceiro capítulo nosso objetivo é apresentar a análise dos dados coletados em livros didáticos. O capítulo, intitulado *Análise da abordagem da divisão nos livros didáticos* está dividido em duas seções. Na primeira apresentaremos a análise dos dados coletados sobre a abordagem do conteúdo de divisão dos números naturais em nove livros de quinta série (sexto ano) do ensino fundamental. Na segunda seção, faremos uma análise detalhada das questões apresentadas nos livros em que o resto interfere de alguma maneira no resultado da questão.

O objetivo do quarto capítulo, denominado *Aplicações*, é propor situações em que utilizamos a ideia de congruência para determinar a solução. Algumas questões foram retiradas dos bancos de questões da OBMEP, outras de revistas que discutem temas voltados para educação, e outras nós que elaboramos. O capítulo é composto por uma única seção na qual apresentaremos as questões e suas respectivas soluções.

Por fim, no último capítulo apresentaremos nossas considerações finais.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Alguns deles tratam de conceitos matemáticos e outros referentes à educação.

1.1 Algoritmo

Uma reportagem da revista Nova escola designa o algoritmo como sendo uma "sequência de instruções em ordem determinada para resolver um cálculo"([47], p. 39). Já Coutinho [15] o expõe de maneira mais informal, inicialmente ele apresenta a definição encontrada no Aurélio, que defini o algoritmo como sendo "processo de cálculo, ou de resolução de um grupo de problemas semelhantes, em que se estipulam, com generalidade e sem restrições, regras formais para a obtenção de um resultado, ou da solução de um problema." ([15], p. 17). Em seguida, afirma que tais definições formais não colaboram com a identificação de um algoritmo, e o resume como sendo "essencialmente, uma receita pra resolver um determinado tipo de problema. ... O algoritmo propriamente dito é constituido pelo conjunto de instruções da receita"([15], p. 18). O algoritmo também é conhecido pelo senso comum como "conta armada"

1.2 Aprendizagem significativa

Discuti-se muito acerca de aprendizagem significativa e sua importância, mas qual seu significado? O que estamos entendendo neste trabalho por aprendizagem significativa? A teoria da aprendizagem significativa foi apresentada pelo psicologo Ausubel, que iniciou as primeiras formulações acerca deste conceito nos anos oitenta. Ele apresenta duas dimensões da aprendizagem escolar, a aprendizagem significativa e memorística. Essas dimensões referem-se *à maneira como o aluno recebe os conteúdos que deve aprender: quanto mais se aproxima do pólo de aprendizagem por descoberta, mais esses conteúdos são recebidos de modo não completamente acabado e o aluno deve defini-los ou "descobri-los" antes de assimila-los; inversamente, quanto mais se aproxima do pólo da aprendizagem receptiva, mais os conteúdos a serem aprendidos são dados ao aluno em forma final, já acabada ... Quanto mais se relaciona o novo conteúdo de maneira substancial e não arbitrária com algum aspecto da estrutura cognitiva prévia que lhe for relevante, mais próximo se está da aprendizagem significativa. Quanto menos se estabelece esse tipo de relação, mais próxima se está da aprendizagem mecânica ou repetitiva.*

([35], p. 39)

Os autores ainda apresentam que segundo a teoria de Ausubel existem três benefícios da aprendizagem significativa comparada com a memorística, como podemos observar:

Em primeiro lugar, o conhecimento que se adquire de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo. Em segundo, aumenta a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida. E, em terceiro, uma vez esquecida, facilita a aprendizagem seguinte, a "reaprendizagem", para dizer de outra maneira. A explicação dessas vantagens está nos processos específicos por meio dos quais se produz a aprendizagem significativa onde se implica, como um processo central, a interação entre a estrutura cognitiva prévia do aluno e o conteúdo de aprendizagem. Essa interação traduz-se em um processo de modificação mútua tanto da estrutura cognitiva inicial como do conteúdo que é preciso aprender, constituindo o núcleo da aprendizagem significativa, o que é crucial para entender as propriedades e a potencialidade.

([35], p. 39)

Borges [7] apresenta um conceito mais informal sobre aprendizagem, na verdade, em um folhetim, no artigo com o tema "Conversas sobre o ensino da matemática" ele apresenta a seguinte questão e logo em seguida sua resposta: " Como saber que verdadeiramente se compreendeu aquilo que foi "ensinado"? Pensamos que consiste no seguinte: Sabemos que compreendemos algo quando o aplicamos as mais diversas situações diferentes daquela donde partiu a nossa compreensão. Quando somos criativos em relação a esse novo conhecimento" ([7], p.2). Diante de tais conceitos, iremos definir nossa compreensão de aprendizagem significativa. Quando nos referirmos a aprendizagem significativa a partir deste ponto do trabalho, estaremos nos reportando a tal concepção. Entendemos por aprendizagem significativa aquela em que o estudante compreende de fato o que está fazendo, e não simplesmente o faz por ter memorizado o método a ser realizado. O estudante compreende cada etapa dos procedimentos adotados para se opter a resolução da questão. Por exemplo, no algoritmo da soma, para obter o resultado correto precisamos somar cada ordem com sua correspondente, não podemos somar unidade com dezenas, ou situação análoga. Algum estudante ao somar os números 210 e 37, pode armar a conta da maneira como podemos notar na figura 1.1:

$$+\begin{array}{l} 210 \\ 37 \\ \hline \end{array}$$

Figura 1.1: Algoritmo da soma "armada" de maneira equivocada

Este seria um exemplo de um estudante que não aprendeu de maneira significativa a realizar o algoritmo da soma. Ele sabe que deve colocar um número debaixo do outro, contudo não compreendeu que para obter o resultado correto ele deve somar a ordem da unidade com a da unidade, a da dezena com a da dezena e assim sucessivamente. Por serem operações essenciais muitos podem achar que erros como o agora citado não ocorrem. Entretanto eles são comuns aos estudantes que estão iniciando a aprendizagem dos algoritmos das quatro operações básicas. Principalmente por esta aprendizagem, muitas vezes, ocorrer de maneira mecânica, eles memorizam o método de resolução e não compreendem o que estão fazendo. Outra situação comum quando os estudantes estão aprendendo as quatro operações, é se lhes são propostas algumas situações problemas, normalmente alguns questionam ao (a) professor(a): "Professor(a), aqui é pra fazer o que? Somar, subtrair, multiplicar ou dividir?" Esse questionamento deixa claro que o estudante não compreendeu a questão e o que foi solicitado. Entendemos que aprender de maneira significativa é o estudante, diante de uma situação problema, saber identificar o que é imprescindível fazer para resolver a questão; ele refletir sobre o que está sendo proposto e ser capaz de realizar os procedimento necessários para responder o que a questão solicitou, além de, obviamente, realizar tais procedimentos de maneira correta. Vale ressaltar como uma aprendizagem significativa, concebida como acabamos de apresentar, colabora com a construção de um sujeito crítico. Para haver uma aprendizagem desta maneira é fundamental um entendimento do contexto apresentado na questão e pensar em quais caminhos o levará a solução do problema.

1.3 Divisão Euclidiana

Diante da relevância deste tema para nosso trabalho vamos apresentar uma demonstração formal do algoritmo da divisão euclidiana (ou simplesmente, Algoritmo de Euclides) para o conjunto dos números naturais. É importante ressaltar que este teorema pode ser estendido ao conjunto dos números inteiros, mas não o faremos por não se tratar do nosso conjunto de estudo.

Para sua demonstração é necessário utilizar o Princípio da Boa Ordem, que apresentaremos abaixo, sem demonstração. Maiores detalhes pode ser encontrados em [16] e [21].

Proposição 1.1. (Princípio da Boa Ordem) *[16]: Se L é um subconjuno não vazio de $\mathbb{N}$, então L possui um elemento m tal que $m \leq x$ para todo $x \in L$.*

Definição 1.2. O número natural $m \in L$ que aparece na proposição anterior é dito elemento mínimo (ou simplesmente, mínimo) de L e denotado por $min\ L$.

Em linhas gerais, o Princípio da Boa Ordem nos diz que todo subconjunto limitado em $L \subset \mathbb{N}$ admite um menor elemento. É importante observar que esta propriedade pode não ser verdadeira em outros conjuntos numéricos. Tomemos o seguinte exemplo

Exemplo 1.3. Considere o conjunto

$$L = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \quad | \quad n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Observemos que $x > 0$, $\forall x \in L$. No entanto é impossível determinar um número natural $x_0 \in L$ tal que $x \geq x_0$, $\forall x \in L$ uma vez que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente e $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero a medida que n aumenta.

Apresentaremos, a seguir, a demonstração do Algoritmo da divisão Euclidiana

Teorema 1.4. (Algoritmo da Divisão Euclidiana)*([16], p.32) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, existe um único par de números naturais q, r de maneira que*

$$a = bq + r \qquad (r < b).$$

Demonstração. **Existência:** Suponhamos inicialmente que a seja múltiplo de b. Assim, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = bq$. Tomando $r = 0$ obtemos o resultado desejado. Se a não é múltiplo de b, considere o conjunto

$$L = \{n \in \mathbb{N}, \quad | \quad bn > a\}.$$

Observemos que L é não vazio. De fato, como $b \neq 0$ então

$$b(a+1) = ba + b > ba > a.$$

Deste modo, $a + 1 \in L$. Pelo Princípio da Boa Ordem existe $m = min\ L$. Mais precisamente, como a não é múltiplo de b então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$bq < a < b(q+1).$$

Neste caso, $q+1 = min\ L$. Como $bq < a$ então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$a = bq + r.$$

Suponhamos $r \geq b$. Pela equação anterior, temos $r = a - bq \geq b$. Somando bq a ambos os membros da igualdade temos

$$a = (a - bq) + bq \geq b + bq = b(q+1).$$

Mas isto não é possível uma vez que $q+1 \in L$ e daí, $a < b(q+1)$. Portanto, $r < b$. Isto conclui a primeira parte da demonstração.
Unicidade: Suponhamos que existam $q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{N}$ nas condições do teorema, ou seja,

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2, \qquad r_1,\ r_2 < b.$$

Admitamos que se pudesse ter $r_1 \neq r_2$. Sem perda de generalidade, suponhamos $r_1 < r_2$. Neste caso,

$$0 < r_1 - r_2 < b$$

já que $r_1,\ r_2 < b$. Usando a igualdadade $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ temos

$$bq_1 + (r_1 - r_2) = bq_2,$$

isto é, $b|(r_1 - r_2)$. Em particular, $b < r_1 - r_2$. Temos, portanto, uma contradição à conclusão anterior. Logo, $r_1 = r_2$. Como consequência, obtemos ainda que $bq_1 = bq_2$. Como $b \neq 0$ então $q_1 = q_2$. Isto conclui a demonstração do teorema. $\square$

Definição 1.5. Os números naturais a, b, q e r que aparecem no teorema anterior são chamados, respectivamente, *divisor, dividendo, quociente* e *resto* da divisão de a por b.

1.4 Congruência

Observamos então, que o percursor do trabalho com congruência, foi Carl Friedrich Gauss, em seu trabalho *Disquisitiones arithmeticae.* Atualmente este é um tema presente em muitos livros. Vamos citar alguns destes trabalhos, e apresentar duas das definições encontradas. Afim de compreensão da simbologia utilizada, apresentaremos a definição de divisibilidade.

Definição 1.6. ([16], p.101) Diz-se que um número inteiro a divide um número inteiro b se $b = a.c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$. Neste caso diz-se também que *a é um divisor de b* e que b *é um múltiplo de a.* Ou ainda que *b é divisível por a.* Indicaremos por $a \mid b$ o fato de a dividir b; e se não a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.

No livro Números Inteiros e Criptografia RSA, o autor ressalta no *Prefácio* do seu trabalho a opção por apresentar os temas de maneira informal, notamos isso na definição apresentada para congruência, observe:

Definição 1.7. ([15], p. 73) Diremos que, pulando de n em n, todos os inteiros são equivalentes; ou ainda, dois inteiros cuja diferença é um múltiplo de n são equivalentes. Formalmente, diremos que dois inteiros a e b cuja diferença é um múltiplo de n são equivalentes. Formalmente, diremos que dois inteiros a e b são congruentes módulo n, escrevemos $a \equiv b\ (mod\ n)$.

Dos livros que selecionamos para aqui citar,a encontrada no livro Introdução a Teoria dos Números é a definição mais formal. O livro define congruência da seguinte maneira,

Definição 1.8. ([39], p.32) Se a e b são inteiros dizemos que a é congruente a b módulo m $(m > 0)$ se $m \mid (a$ - $b)$. Denotamos isto por $a \equiv b\ (mod\ m)$. Se $m \nmid (a - b)$ dizemos que a é incongruente a b módulo m e denotamos $a \not\equiv b\ (mod\ m)$.

O livro intitulado 21 *aulas de olimpíadas matemáticas*, reune artigos escritos pelo autor para suas aulas. Este trabalho é dividido em cinco partes, a saber: Àlgebra, Combinatória, Geometria, Teoria dos números e Outras coisas!. Na parte IV, que trata da Teoria dos Números, o primeiro capítulo, discuti sobre Congruências. No capítulo é apresentado o tema com a definição e as propriedades operacionais da congruência, em seguida são sugeridos alguns exercícios. No capítulo desta dissertação intitulado "Aplicações", iremos apresentar algumas questões que podem ser utilizadas na quinta série (sexto ano) do ensino fundamental, que utilizam a ideia de deixar o mesmo resto da congruência para serem solucionadas, como nos propomos em fazer neste trabalho. Infelizmente não poderemos utilizar as atividades propostas pelo autor, como algumas destas sugestões, pois os exercícios propostos no livro 21 *aulas de olimpíadas matemáticas* são resolvidas utilizando as propriedades de congruência. Como nosso objetivo não é implementar a congruência no ensino fundamental, mas sim propor situações que sejam solucionadas utilizando a ideia de congruência de deixar mesmo resto, ficamos assim impossibilitados de apresentar as questões como sugestões, por não atenterem nossa finalidade. Ele é um outro título que apresenta a definição de congruência. Podemos ainda citar o livro Elementos de Aritmética [21], como outro material que também traz a definição deste tema. Uma consequência desta definição, relevante para o nosso trabalho, visto que utilizaremos exatamente esta ideia para trabalhar com os alunos da quinta série (sexto ano), é a de que números congruos a um valor deixam mesmo resto quando divididos por este valor. Vamos apresentar esta afirmação na forma de proposição e demonstrá-la.

Proposição 1.9. *Sejam a e b números inteiros. Temos que, a é congruo a b módulo m se e somente se a e b deixam mesmo resto quando divididos por m.*

Demonstração. Considerando a e b números inteiros, suponhamos que se a é congruo a b módulo m. Por definição, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a - b = c.m$$

Usando o Teorema da divisão euclidiana, temos que existe k, q, r, r' tais que

$$a = k.m + r \qquad 0 \leq r < m$$

$$b = q.m + r' \qquad 0 \leq r' < m$$

Da relação $a - b = c.m$ obtemos $m.k + r - m.q - r' = c.m$. Donde $m(k - q - c) = r' - r$. Portanto

$$m \mid (r - r')$$

Uma das propriedades da relação "divide" (definição 2.1) afirma que se $x \mid y$, então $|x| \leq |y|$. Como $m > 0$, então $\mid (r - r') \mid < m$. Observe que $(r - r') \neq m$. Logo, temos

$$0 \leq \mid r - r' \mid < m$$

Ou seja, $\mid r - r' \mid$ é um múltiplo de m que está entre 0 e m. Desta forma $\mid r - r' \mid = 0$, ou seja,

$$r = r'$$

Para demonstrar a recíproca, consideremos $k, q, r \in \mathbb{Z}$, tais que

$$a = k.m + r \quad \text{e} \quad b = q.m + r \qquad 0 \leq r < m$$

Portanto, $a - b = m(k - q)$, ou seja, $m \mid (a - b)$. Pela definição então, podemos concluir que

$$a \equiv b \ mod \ m$$

□

1.5 Congruência: contexto histórico

Se questionarmos qual ramo da matemática discute acerca da congruência, a resposta é Aritmética, mas alguns também poderão responder Teoria do números. Vamos discorrer brevemente sobre tais conceitos. A aritmética é apresentada por Lorensatti [24] como "o ramo da Matemática que lida com os números e com as operações possíveis entre eles... é o mais elementar e mais antigo ramo da Matemática" ([24], p. 2) . No que tange a Teoria dos números, a autora a define como sendo "o ramo da Matemática pura que estuda mais profundamente as propriedades dos números em geral" ([24], p. 2) . Já Coutinho [15] retifica que nas civilizações mais antigas já se verifica estudo dos números inteiros. Contudo a definição apresentada por esse autor se difere em partes da apresentada por Lorensatti, como podemos observar na citação a seguir:

> *... é na Grécia que primeiro identificamos a teoria do número tal como entendemos hoje em dia. No que diz respeito aos inteiros, os gregos diferenciavam entre a logística, ou arte de calcular com números inteiros, e a aritmética, ou estudo das propriedades fundamentais dos inteiros. A primeira era de domínio dos comerciantes e profissionais; a segunda dos matemáticos e filósofos. A teoria dos números é herdeira da aritmética dos gregos. Ironicamente a palavra aritmética é usada hoje em dia para descrever aquilo que os gregos chamavam de logística.*
>
> ([15], p. 8)

Um dos grandes colaboradores dos estudos em Teoria dos números, foi Cal Friedrich Gauss . Sua obra *Disquisitiones arithmeticae*, é uma importante publicação em teoria dos números além de ser um dos clássicos da literatura matemática. Inclusive, Coutinho [15] afirma que o desenvolvimento sistemático da teoria dos números teve início com este trabalho. Esta obra foi tão significativa que as simbologias apresentadas por Gauss naquele período não foram modificadas; sem falar de muitos resultados, utilizados ainda hoje, que são encontrados nas *Disquisitiones.* Gauss afirmou que "A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas". Apesar da relevante contribuição dada à Teoria dos números, os estudos deste matemático alemão não se restringiram à Teoria dos números. O livro História da Matemática [8] apresenta um pouco da trajetória deste matemático que deixou descobertas e trabalhos relevantes para a Matemática.

Filho de um artesão de Brunswick, nascido no ano de 1777, desde criança ele se mostrou um prodígio em matemática. Um história conhecida de Gauss, é de quando ele tinha dez anos de idade, quando seu professor solicitou que os estudantes realizassem a somas dos números de um a cem. Pouco tempo depois, Gauss apresentou a resposta do que o professor havia solicitado. Apenas com dez anos de idade ele havia calculado mentalmente a soma

Figura 1.2: Carl Friedrich Gauss, por Christian Albrecht Jensen

da progressão aritmética $1, 2, 3, ..., 100$. Logo ele chamou atenção de seus professores e o Duque de Brunswick apoiou seus estudos, tanto no colégio quanto na Universidade de Göttingen, que iniciou no ano de 1795. Um ano após entrar na universidade, ainda com dezoito anos de idade, ele descobriu que um polígono regular de dezessete lados também pode ser construído com régua e compasso, até então só se sabia construir o triângulo equilátero e o pentágono, mas nenhum outro com o número de lados primo. Com essa descoberta, ele iniciou o registros de alguns de seus estudos em um diário. O livro História da Matemática (1996) ainda destaca as descobertas mais significativas de Gauss quando ainda era estudante, "o método dos mínimos quadrados, a prova da lei da reciprocidade quadrática na teoria dos números, e seu trabalho sobre o Teorema Fundamental da Álgebra." ([8], p. 344). Sua tese de doutorado foi intitulada "Nova Demonstração do Teorema que Toda Função Algébrica Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau". Dois anos após sua defesa de doutorado, surgiu as *Disquisitiones arithmeticae*, já citada no início da seção. Apesar de sua relevância, inicialmente este trabalho despertou pouca atenção, e em geral permaneceu assim até 1820, quando C. G. Jacobi (1804-1851) e P.G. Lejeune Dirichlet apresentaram consequências que derivavam desta obra. Além das *Disquisitiones*, Gauss deu contribuições à astronomia, deu início ao ramo da geometria chamado geometria diferencial, e publicou alguns trabalhos antes de seu falecimento em 1855 [8].

Capítulo 2

Ensino da divisão

Neste capítulo apresentaremos um panorama geral da relevância em se discutir acerca da divisão, uma das quatro operações básicas que são compreendidas como uma das bases para a aprendizagem de matemática. Além de sua relevância enquanto conteúdo, refletir sobre a divisão e suas possíveis metodologias de ensino se faz necessário, dada a grande dificuldade que os estudantes apresentam com relação a este tema. Observamos que mesmo durante o ensino médio os alunos não demonstram ter afinidade com tal conteúdo. Muitos deles não conseguem desenvolver o cálculo corretamente ou recorrem ao uso de uma calculadora quando o uso desta é permitido. Logo, discorrer a respeito desta questão pode favorecer a vislumbrar caminhos que auxiliem na compreensão deste assunto.

O presente capítulo está dividido em três seções: a divisão no ensino fundamental; metodologias de ensino e a relevância das questões propostas; e sobre o ensino da aritmética e a congruência. Na primeira seção apresentamos como as quatro operações básicas (isto é: soma, subtração, multiplicação e divisão) e como saber ler e escrever, são compreendidos como base para o aprendizado. Em seguida, exibiremos um panorama geral da situação da aprendizagem em matemática no Brasil, por meio de índices coletados em avaliações externas. Enfatizamos a dificuldade específica encontrada pelos estudantes no conteúdo de divisão, principalmente quando apresentados ao algoritmo da divisão. Por fim, enfatizamos os obstáculos encontrados pelos estudantes ao se deparar com o método de resolução do algoritmo, já que apesar de trabalhar desde as séries iniciais com as ideias de divisão, as resoluções nesta etapa se davam por meio de manipulação do concreto. Iniciamos a segunda seção tratando das metodologias de ensino e como a adotada pelo docente pode favorecer a aprendizagem, no caso deste trabalho, da divisão. Munidos da concepção de aprendizagem significativa adotada, argumentamos o quanto situações onde o resto interfere no resultado final favorecem para a aprendizagem significativa. Finalizamos a seção sugerindo que questões que trabalham com a divisão na forma de divisão euclidiana e envolvendo a ideia de congruência podem colaborar para uma aprendizagem significativa. Por fim, na última seção apresentamos um breve contexto histórico do surgimento da congruência. Finalizamos o capítulo, discutindo acerca do ensino da aritmética, quais são as propostas e de que maneira a ideia de deixar mesmo resto da congruência pode contribuir para alcançar os objetivos propostos.

2.1 A divisão no ensino fundamental

Assim como para construir uma casa é necessário um bom alicerce, no desenvolvimento do conhecimento também precisamos percorrer etapas, e as primeiras devem ter sido bem realizadas para uma boa evolução das seguintes. Se questionarmos quais são as competências básicas necessárias para que um estudante consiga avançar na aprendizagem de novos conhecimentos, o senso comum nos dirá que é saber ler e escrever, e saber fazer as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Normalmente professores do sexto ano (quinta série) do Ensino Fundamental alegam que se os estudantes dessa série chegassem sabendo ler e escrever, o desenvolvimento desses alunos seria outro, e o mesmo diz o(a) professor(a) de matemática com relação as quatro operações. Tal tema foi discutido pela revista Nova escola [17], que apresentou o quanto é complicada a transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental, devido as mudanças que estes estudantes tem que enfrentar, "além de se deparar com vários professores, eles precisam se acostumar rapidamente com a forma como os docentes ensinam - mais focada nos conteúdos do que nas necessidades das crianças."([17], p.43). E no que diz respeito a Matemática, pesquisas apontam que esta transição se torna mais complexa. A autora ainda destaca que, na maioria dos casos, os professores do 6° ano esperam que os alunos "dominem"as quatro operações.

Com relação à ideia de que ler e escrever e saber fazer as operações básicas são a base para o aprendizado, não é mero senso comum. O governo federal lançou no ano de 2012 o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. O objetivo do programa é alfabetizar todas as crianças em língua portuguesa e em matemática até os oitos anos de idade [1]. De acordo com o livreto e o material de apresentação do programa [1] e [9] quando alfabetizado o estudante deve compreender o sistema alfabético de escrita, ou seja, ser capaz de ler e escrever. Além disso deve haver a compreensão dos textos, sua função e os efeitos que desejam causar. Outro objetivo a ser alcançado para que uma criança esteja alfabetizada, é que esta seja capaz de realizar suas próprias produções textuais. Quando discute a alfabetização matemática, o material deixa claro que para o projeto ela é compreendida num sentido mais amplo, numa perspectiva de letramento. Em síntese, o foco do projeto no que diz respeito a alfabetização matemática não é essencialmente com conteúdos matemáticos, mas de que maneira a aprendizagem de matemática pode colaborar e se faz necessária para que os estudantes se alfabetizem, devido a grande influência de ideias e simbologias matemáticas presentes nos diversos textos. Entretanto, quando apresenta alguns aspectos importantes da matemática, que devem ser trabalhados para que a aprendizagem desta colabore com a alfabetização das crianças, o texto dá uma enfase maior para a aprendizagem dos sitemas de numeração e operações aritméticas, ressaltando a relevância de tais conhecimentos matemáticos, como podemos observar no trecho a seguir.

> *Os números, suas representações e a necessidade de operar com quantidades estão presentes em muitas práticas cotidianas e, como temos insistido aqui, compõem o nosso modo de ver o mundo, de descrevê-lo, de analisá-lo e de agir nele e sobre ele. Por isso, impregnam grande parte das nossas práticas de leitura e de escrita e, assim, afim de promovermos uma alfabetização no sentido amplo, é necessário incluir o trabalho com o conceito, o registro e as operações com números naturais – sempre em situações de uso – entre as nossas responsabilidades como alfabetizadores.*
>
> ([9], p.31)

Apesar do destaque dado, o texto ressalta que a Alfabetização Matemática não se restringe a tais conteúdos e que as situações apresentadas aos estudantes devem ser significativas aos mesmos. Perante o exposto, notamos a importância das operações básicas para um bom desenvolvimento da aprendizagem matemática, para a alfabetização, e pelo que foi discutido até mesmo para a construção de um sujeito crítico, que além de ter acesso a informação sabe se posicionar diante da mesma. Contudo, apesar de sua relevância, o que vem ocorrendo é um grande déficit na aprendizagem destas operações, e da matemática de maneira geral, realidade expressa pelos baixos índices apresentados nas avaliações externas realizadas. Encontramos um exemplo disso na reportagem postada no site $G1$ [26] que apresentou o ganhador brasileiro da Medalha Fields, e o como esta premiação contrasta com o baixo índice do Brasil na aprendizagem de Matemática. A reportagem apresenta que dos 65 países analisados pelo PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, a sigla refere-se a tradução em inglês), o Brasil ficou na 58ª posição; e ainda que segundo análises da Prova Brasil, apenas 12% dos discentes finalizam o ensino fundamental mostrando possuir o aprendizado esperado para quem concluiu esta etapa. Outro dado que ratifica esta situação é o apresentado no site Agência Brasil [44], menos de 10% dos estudantes que concluem o ensino médio aprenderam o considerado adequado pelo movimento Todos pela Educação (TPE). Tal porcentagem foi determinada pelo movimento TPE, com base nas avaliações do Ministério da Educação. O TPE é um movimento apartidário da sociedade brasileira, fundado em 2006, com a missão de contribuir para que o País assegure a todas as crianças e jovens o direito a Educação Básica de qualidade [43]. A reportagem destaca ainda que houve uma melhora no quinto ano do ensino fundamental, o número de estudantes com aprendizado adequado passou de $36,3\%$ para $39,5\%$. Entretanto, o dado em si mostra que ainda é uma porcentagem muito aquém da desejada. Vale ressaltar que tais dados se referem à estudantes da rede pública de ensino e nacionais, com exceção do PISA que analisa alunos da rede particular e pública de vários países do mundo. Ainda que os dados façam referência a todos os conteúdos matemáticos trabalhados na série analisada, sabemos que no que diz respeito ao levantamento realizado com o quinto ano a dificuldade com as quatro operações contribui consideravelmente com o baixo índice, como destaca Agranionih (et al) [4] na análise dos dados realizados em sua região, que também apresentou baixos índices. Dentre as dificuldades dos estudantes, principalmente no que diz respeito à aprendizagem dos algoritmos das operações, sem dúvida a que eles apresentam mais dificuldades é no algoritmo da divisão. Agranionih (et al)[4] afirma que "o cálculo da divisão tem sido considerado pelos professores como um dos mais difíceis de ser assimilado pelos aluno". Diante deste quadro, algumas questões se apresentam: O que fazer para reverter esse panorama? Que ações podem ser implementadas para se buscar a melhoria dos índices apresentados? Não vamos aqui discutir questões estruturais e do sistema, apesar de saber que tais fatores interferem significativamente para a melhora da qualidade de ensino, nos deteremos neste trabalho em refletir e discorrer acerca de uma proposta didática que acreditamos que possa favorecer a aprendizagem desde conteúdo com o qual os estudantes apresentam tantas dificuldades, que é a resolução do algoritmo da divisão.

Contudo, o que fazer para que um estudante aprenda a resolver o algoritmo da divisão? Esta, sem dúvida, não é uma pergunta que possa ser respondida com poucas palavras, e muito menos com poucas ações. E com certeza não é uma pergunta fácil de se responder, ainda mais que é exatamente a partir da "conta armada" que os estudantes começam a apresentar as dificuldades com a divisão, como destaca Pinheiro [37]. A autora enfatiza que desde a Educação Infantil são trabalhadas situações que envolvem a divisão, e que normalmente as resoluções são realizadas por meio de desenhos, contagem nos dedos montando tabelas ou realizando somas sucessivas. Vamos fazer um recorte dos exemplos citados pela autora e nos ater ao que se refere às resoluções que são realizadas por meio de desenhos, com o objetivo de refletir sobre sua importancia para a aprendizagem do algoritmo da divisão. Denominaremos estes desenhos como "registros" e consideraremos não apenas desenhos, mas também traços, bolinhas, etc. Ou seja, qualquer registro que o estudante utilize para chegar à solução do problema. Normalmente, o que acontece nestes casos é o seguinte: se é necessário dividir 38 por 5, ele irá desenhar trinta e oito tracinhos, ou qualquer outro registro, e vai agrupá-los de cinco em cinco, conforme ilustrado na figura 2.1 a seguir:

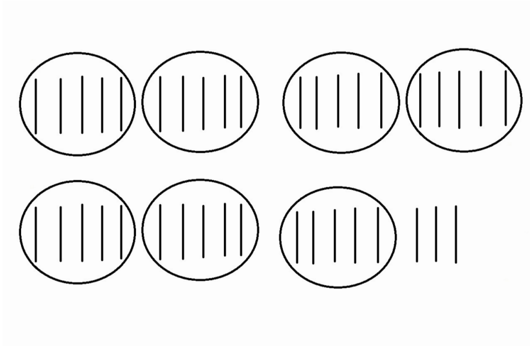

Figura 2.1: Resolução por meio de registro

Realizar a resolução desta maneira é muito importante, pois a criança tem a oportunidade de visualizar que agrupando de cinco em cinco ele vai descobrir quantas vezes o cinco "cabe dentro" do trinta e oito e se sobra alguma coisa. Quando apresentado ao algoritmo da divisão, normalmente o aluno acha este método de resolução abstrato, já que ele não poderá mais manipular o concreto. Contudo, para a compreensão de como resolver o algoritmo, é possível fazer referência às ideias trabalhadas no método que utiliza registros. Por exemplo, quando dividirmos 38 por 5 utilizando o algoritmo, podemos questionar, quantas vezes o cinco "cabe dentro" do trinta e oito? Note que a ideia é similar a utilizada no registro, por outro lado, agora ele utilizará a multiplicação para determinar o número que multiplicado por cinco resultará em trinta e oito, ou o que chega em um resultado mais próximo, em outras palavras, vai determinar a quantidade de vezes que o cinco "cabe dentro" do trinta e oito. Vale ressaltar que estamos considerando que o estudante não mais irá manipular o concreto, caso ele apenas resolva o algoritmo, o que nem sempre acontece. Muitas vezes, exatamente por não compreender como resolver o algoritmo, o aluno recorre ao concreto. Entretanto, na maioria das vezes, questões em que é necessário a utilização do algoritmo da divisão para determinar o resultado, apresentam situações de difícil resolução por meio do registro. Observe: caso seja solicitado a realização da divisão de 1098 por 12, se ele traçar mil e noventa e oito tracinhos e agrupá-los de doze em doze, há uma alta probabilidade de cometer algum equívoco em alguma das etapas, ou no momento de traçar ou no de agrupar, devido a grande quantidade envolvida no processo. Ou seja, em determinadas situações os estudantes se veem obrigados a utilizar o algoritmo para resolver a questão. Além disso, há um processo de construção do conhecimento, na matemática isso é ainda mais evidente, muitas vezes os estudantes compreendem o conteúdo que está sendo desenvolvido, mas não atingem a resolução das questões propostas pois esbarram em conhecimentos prévios que são necessário para a resolução das mesmas, contudo, tais conhecimentos não foram assimilados pelo aluno. Como se costuma dizer, a matemática é uma "bola de neve", um conteúdo depende da aprendizagem de outros. E quando nos referimos às quatro operações, estas estão presentes em uma quantidade considerável dos temas trabalhados em matemática. Desta forma, no momento em que não há a compreenção de como resolver o algoritmo, nos deparamos com um problema. Diante do exposto podemos questionar, de que maneira o docente pode favorecer a aprendizagem do algoritmo da divisão em um estudante da 5ª série (6º ano) que ainda não sabe resolver a "conta armada"? Nos limitemos aqui a inquirir acerca da quinta série do ensino fundamental por ser nosso foco de estudo, contudo, note que esta questão se aplicaria a qualquer série do ensino fundamental e médio, e provavelmente com uma frequência bem menor, mas talvez também se aplique a estudantes do ensino superior. Outra questão que podemos elencar é se de fato uma mediação do professor pode interferir neste processo de construção da aprendizagem, visto que tal competência deveria ter sido desenvolvida nos anos anteriores.

Na próxima seção vamos discutir sobre a relevância da intervenção do professor, e das questões propostas favorecem, ou não, o processo de aprendizagem. Além de discorrer sobre aprendizagem significativa e o como situações contextualizadas e que utilizam o resto podem contribuir para alcançar tal aprendizagem.

2.2 Metodologias de ensino e a importância das questões propostas

Entendemos que a qualidade do ensino e da aprendizagem perpassa por diversos aspectos, como citado na seção anterior, dentre os quais podemos citar: a estrutura do ambiente, o acesso a materiais, as interações sociais, as relações afetivas, as questões didáticas, dentre outras. Entretanto, nosso trabalho se propõe a discutir um de tais aspectos, o que se refere às atividades propostas. As questões que o(a) professor(a) propõem aos estudantes, está bastante ligada com sua metodologia de ensino. Então, voltamos a questão lançada anteriormente, será que a mediação docente tem influência na aprendizagem? A Epistemologia genética, de Piaget [36] busca compreender como se dá o desenvolvimento das estruturas de pensamento da criança. O autor ressalta em seus trabalhos a contribuição do aspecto psico-social no desenvolvimento intelectual da mesma. Ou seja, as interações da criança com o meio social em que vive contribuem diretamente na construção de suas concepções. No ambiente escolar, tais interações são ainda mais influentes, visto a forte intervenção que o professor exerce na construção de determinados conhecimentos dos estudantes. A maneira como se dá estas interações professor-aluno está bastante atrelada à metodologia de ensino do professor. Vasconselos [45] discute acerca de duas metodologias de ensino, a expositiva e a dialética. No que se refere a primeira metodologia citada, o que o autor verificou em suas observações foi que "o grande trabalho do professor se concentra na exposição, a mais clara e precisa possível, a respeito do objeto de estudo, onde procura trazer para os alunos os elementos mais importantes para a compreensão do mesmo, recuperando o conhecimento acumulado pela humanidade." [45]. Esta metodologia é também mencionada como metodologia "tradicional". O texto destaca alguns problemas associados a esta metodologia de ensino, como a falta de interação do estudante com seu objeto de estudo, e no que se refere ao ponto de vista política, tal metodologia resulta na formação de um sujeito passivo, não crítico. Já a metodologia defendida pelo autor, a dialética, entende o sujeito como ser ativo na construção do conhecimento. De acordo com o autor, nesta metodologia "o conteúdo que o professor apresenta precisa ser trabalhado, refletido, re-elaborado, pelo aluno, para se constituir em conhecimento dele. Caso contrário, o educando não aprende, podendo, quando muito, apresentar um comportamento condicionado, baseado na memória superficial". É dado um destaque ao papel do educador nesta metodologia, nela o docente não é mero transmissor de conhecimento, mas tem a responsabilidade de "provocar os sujeitos para o processo de conhecer e colocar à disposição objetos (materiais, situações) ou indicações que possam levar ao conhecimento (quando ele fala, faz da sua fala o objeto de conhecimento)". Assim, percebemos que atrelada a metodologia de ensino, estão também as atividades e questões que são propostas, pois dependendo de uma série de fatores, estas podem favorecer ou prejudicar a aprendizagem. Por exemplo, sugerir ao estudante uma questão com um nível de dificuldade muito além de suas habilidades e competências, pode desestimulá-lo e fazê-lo achar que o problema é com ele, que ele que não sabe o conteúdo. Em contrapartida, propor situações com o nível muito aquém das possibilidades do estudantes, limita-o a simplesmente aplicar fórmula ou realizar determinados procedimentos, sem o estimular a refletir sobre o que foi proposto. Além do que, situações deste tipo não irão colaborar com a aprendizagem significativa dos conteúdos, e consequentemente não colabora com a aprendizagem de conceitos que não foram bem consolidados pelo estudantes, já que não estimula a reflexão acerca das etapas dos procedimentos adotados para determinar a solução da situação proposta.

Como já discutimos nesta sessão, a metodologia de ensino adotada, além dos tipos de questões propostas, podem favorecer a promoção desta aprendizagem significativa. Em algumas situações resolver um algoritmo e determinar seu resultado não é suficiente para responder o que foi solicitado na questão, outras informações são imprescindíveis para a determinação da solução. Por exemplo, questões que se houver resto diferente de zero, ele irá interferir da resposta da questão. Uma situação clássica, é a que apresenta uma quantidade de passageiros e pergunta quantos ônibus são necessários para transportá-los. Caso haja resto, será necessário acrescentar uma unidade no resultado do algoritmo já que haverá a necessidade de contratar mais um ônibus, conforme exemplo abaixo.

Exemplo: Haverá uma excursão com um grupo da terceira idade. Para levar o animado grupo e os organizadores da viagem serão contratados ônibus com capacidade de transportar 32 passageiros. Participarão da viagem 12 organizadores e 175 idosos que fazem parte do grupo. Quantos ônibus serão necessários contratar para que todos participem da excursão?

Solução: Inicialmente precisamos determinar o total de passageiros que participarão da viagem, que pode ser encontrado pela soma da quantidade de organizadores com a quantidade de idosos que participarão da viagem.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 12 \\ 175 \end{array} \\ \hline 187 \end{array}$$

Figura 2.2: Determinação da quantidade de passageiros

Em seguida, precisamos calcular quantos ônibus serão necessários para transportar as 187 pessoas que viajarão. Para tal, utilizaremos o algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 187 & 32 \\ \cline{2-2} 27 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 5 \\ \hline 160 \end{array}$$

Figura 2.3: Determinação da quantidade de ônibus

O resultado encontrado foi 5, entretanto houve um resto na conta, que são as pessoas que sobraram, logo precisamos adicionar uma unidade no resultado do algoritmo. Sendo assim serão necessários seis ônibus para transportar todos que participarão da viagem.

Note como situações deste tipo podem colaborar com uma aprendizagem significativa. Diante de uma turma com diversas realidades, como normalmente ocorre, alguns estudantes já dominam o algoritmo enquanto outros não compreendem nem como resolver pelo método do registro, citado na seção anterior. Então, voltar e resolver as questões pelo método do registro não é uma opção viável à medida que para os que já dominam o algoritmo seria um retrocesso. Logo, o docente precisa pensar em estratégias que colaborem com a aprendizagem daqueles que ainda não sabem, contudo, de maneira que não prejudique os que já dominam. Uma estratégia que acreditamos ser possível, é associar significado aos números que estão sendo operados, isso pode colaborar a compreensão da resolução do algoritmo. Trabalhar com conteúdos da realidade do estudantes pode favorer a aprendizagem da matemática. Ou seja, a contextualização dos conteúdos matemáticos, apresentar de que maneiras estes estão inseridos em nossa realidade, colabora significativamente para a aprendizagem dos estudantes. Na situação que acabamos de apresentar, é necessário que o estudante saiba o que significa cada elemento do algoritmo que está sendo realizado, pois desta compreensão depende a resolução correta da questão. Se o estudante não sabe que o quociente indica a quantidade de ônibus completos e que o resto significa a quantidade de pessoas que sobraram sem ficar em nenhum destes ônibus completos, ele não compreenderá que é preciso adicionar uma unidade no quociente para determinar a solução do problema. Esta é uma situação em que o resto influenciou diretamente na resolução da questão. Podemos trabalhar outras situações em que a interferência do resto se dá de outra maneira. Situações em que a resposta parte do resto, situações em que a solução é o resto, além de questões em que é necessário utilizar a ideia de deixar mesmo resto para se alcançar o resultado. A última citada, são questões que utilizam a ideia de congruência. Sabemos que o conteúdo congruência não faz parte da grade curricular do ensino fundamental e do ensino médio. Entretando, vamos discutir a viabilidade de trabalhar com questões que utilizem esta ideia, principalmente no ensino fundamental, mais especificamente na quinta série (sexto ano). Todas situações citadas, necessitam de leitura e interpretação para serem resolvidas, e o estudante precisa compreender o que é solicitado para então refletir sobre quais caminhos percorrer para se obter a solução. Ou seja, notamos o quanto situações desde tipo colaboram não apenas com a aprendizagem, mas também com a construção de um sujeito crítico.

Outras situações, nem sempre contextualizadas, mas que também favorecem com um posicionamento reflexivo do estudante para determinar seus resultados, são as que trabalham com a divisão na forma de divisão euclidiana. Nessas questões há uma analise acerca da relação entre os termos da divisão, que nem sempre é possível visualizar no algoritmo da divisão.

A importância de se trabalhar com questões que envolvem a divisão euclidiana foi discutida na reportagem intitulada "Aprender divisão é mais que dividir". Pinheiro [37] ressalta a importância de trabalhar o estudo das relações entre os termos da divisão e realizar o estudo do resto. Na primeira etapa da reportagem ela destaca o quanto é interessante não apenas apresentar, mas também propor aos estudantes questões que trabalhem com a divisão na forma de divisão euclidiana. Além de poder utilizá-la com o propósito de auxiliar na visualização do algoritmo da divisão, é viável a elaboração de questões com distintos objetivos. Um dos quais podemos destacar, é a propostas de questões em que é necessário analisar o valor do resto, e que são resolvidas por meio da apresentação da divisão na forma de divisão euclidiana.

Quem demonstrou este teorema, que permite dividir qualquer número natural por outro, foi Euclides. Apesar da grande relevância deste matemático grego pouco se sabe de sua vida, como por exemplo onde e quando nasceu, e como se deu seu falecimento. Há evidências de que ele "viveu no século III a.C. em Alexandria, durante o reinado de Ptolemeu I, e que esteve dentre os estudiosos que foram convidados para trabalhar no Museu de Alexandria" ([25], p. 46). Sua produção mais relevante foi os *Elementos*, de acordo com Mol [25]

Os Elementos, de Euclides, representaram o apogeu da produção matemática na Grécia *clássica. Esta foi a mais brilhante obra matemática grega e um dos textos que mais influenciaram o desenvolvimento da matemática e da ciência. Foi um dos livros mais editados e lidos em toda a história, tendo sido usado como livro-texto no ensino de matemática até o final do século XIX e início do século XX.*

([25], p. 45)

Três, dos treze capítulos, tratam da teoria dos números, que para os gregos eram inteiros e positivos. Dentre as valiosas contribuições de Euclides, podemos destacar, a já citada, descoberta do teorema da divisão euclidiana. Que em alguns trabalhos recebe outras denominações.

Vamos apresentar alguns exemplos com os quais visualizamos aplicações do teorema do Algoritmo da divisão euclidiana.

Exemplo 2.1. ([16], p.33, exemplo 2) Vamos aplicar o algoritmo aos números $a = 35$ e $b = 8$. Observemos que 35 está entre os múltiplos 32 e 40 de 8:

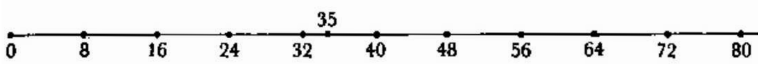

Figura 2.4: Reta numérica apresentada em [16]

$8.4 < 35 < 8.(4{+}1)$. Logo $q = 4$ e $r = 35 - 8.4 = 3$. Isso explica o algoritmo

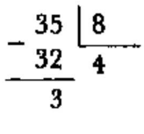

Figura 2.5: Algoritmo apresentado em [16]

Exemplo 2.2. ([16], p.33, exemplo 3) Procuraremos explicar agora o algoritmo usual prático da divisão, calculando o quociente e o resto quando $a = 351$ e $b = 8$. Numa primeira etapa, quando se faz

$$\begin{array}{r|l} 351 & 8 \\ \cline{2-2} 31 & 4 \end{array}$$

Figura 2.6: Algoritmo apresentado em [16]

na verdade o 4 não passa do algoritmo das dezenas do quociente procurado, como se pode verificar a seguir:

$$35 = 8 \cdot 4 + 3 \text{ (algoritmo da divisão para 35 e 8) } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 350 = 8 \cdot 40 + 30$$
$$\Rightarrow 351 = 8 \cdot 40 + 31$$

Figura 2.7: Igualdades apresentadas em [16]

Usando agora o algoritmo com os números 31 e 8 temos:

$$31 = 8 \cdot 3 + 7$$

Figura 2.8: Algoritmo com os números 31 e 8 [16]

Logo,

$$351 = 8 \cdot 40 + 8 \cdot 3 + 7 = 8 \cdot 43 + 7$$

Figura 2.9: Conclusão [16]

Voltando ao dispositivo prático,

$$\begin{array}{r|l} 351 & 8 \\ \cline{2-2} 31 & 43 \\ 7 & \end{array}$$

Figura 2.10: Algoritmo [16]

Os exemplos apresentados por Domingues [16] são muito interessantes, e vislumbram uma possibilidade da aboradagem do tema em sala de aula. Apesar da possível dificuldade que os estudantes possam apresentar. Por exemplo, no que se refere ao terceiro exemplo, os estudantes nesta série não estão acostumados a lidarem com a apresentação das situações em forma de equação. Normalmente, nas situações propostas aos estudantes de quinta série eles parte de uma expressão e chegarão a um resultado. Em síntese, parte de um valor, que operado com outro vai ser igual ao resultado. Parece ser algo simples, mas a ideia de igualdade é complexa para os estudantes.

Na literatura, encontramos algumas apresentações do teorema da divisão euclidiana, com pequenas diferenças de enunciado, contudo com o mesmo significado como vamos verificar. Dentre os quais podemos citar, Oliveira e Fernández [34] em seu trabalho intitulado *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*; Hefez [21] em *Curso* *de Algebra, volume I*; e Coutinho [15], que o enuncia como Teorema da divisão, em sua obre cujo título é *Números Inteiros e Criptografia RSA*.

Além de destacar a relevância do trabalho com a divisão na forma de divisão euclidiana, Pinheiro [37] ainda discute o quanto o resto é importante na resolução das questões e a relevância de trabalhar com situações em que o resto interfere na resolução. Além de uma situação similar à apresentada no exemplo dado na seção anterior, o texto traz uma questão em que o valor do resto será utilizado, observe a seguir:

Exemplo 2.3. ([37], p. 60) A escola recebeu 87 lápis para serem distribuídos igualmente a 23 alunos. Quantas unidades ainda são necessárias para que todos recebam a mesma quantidade e não sobre nenhuma? Para resolver a questão, é preciso relacionar o resto ao divisor. Dividindo o total (87) pelo número de alunos (23), restam 18 lápis. Para formar um novo grupo de 23, bastam mais 5 unidades.

Retomamos assim a fala da seção anterior, onde argumentamos a necessidade de propor aos estudantes questões em que o resto interfere de alguma maneira no resultado da questão, dentre as quais destacamos as que utilizam a ideia de congruência. Devido a relevância deste tópico para nosso trabalho, o próximo capítulo tem por objetivo apresentar discussões mais aprofundadas acerca da congruência.

2.3 O ensino da aritmética e a congruência

Nosso objetivo nesta seção é apresentar a ideia de congruência como uma possibilidade de se trabalhar com questões envolvendo a divisão. Queremos evidenciar que utilizando a ideia de deixar mesmo resto algumas questões possam ser respondidas, e desta forma trabalhar com situações que favoreçam uma aprendizagem significativa. A congruência é um conteúdo que em nenhum momento do ensino fundamental ou médio é citado ou trabalhado, ele não faz parte do curriculo da escola básica. Entretanto, quando pensamos no conceito da congruência, e sua ideia básica de que números côngruos são aqueles que quando divididos pelo mesmo valor possuem o mesmo resto, vislumbramos diversas possibilidades de utilização deste tema no ensino fundamental. Nosso intuito não é apresentar aos estudantes mais um conteúdo, mas sim auxiliar em problemas de aprendizagem encontradas neste nível de conhecimento. Por exemplo, trabalhar questões que utilizam a ideia de deixar mesmo resto para serem resolvidas por estudantes da 5ª série (6º ano) do ensino fundamental, pode favorecer a aprendizagem da divisão a medida que são situações contextualizadas em que há uma necessidade de compreender o significado das informações apresentadas e os procedimentos que deverão ser adotados para alcançar o resultado solicitado. Além disso, ainda podemos citar o quando situações deste tipo contribuem para a construção de um sujeito crítico.

De que maneira o estudo da congruência pode colaborar com a aprendizagem da aritmética e mais especificamente com a aprendizagem do algoritmo da divisão? A seguir, discutiremos acerca do ensino da aritmética, quais são as propostas e de que maneira a ideia de deixar mesmo resto da congruência pode contribuir para alcançar os objetivos propostos.

O estudo da aritmética não se restringe a conhecer os sistemas de numerações e operar com os números. Como afirma Lorensatti [24], "a Aritmética faz parte do dia a dia de qualquer cidadão. Planejar com racionalidade aritmética parece imprescindível para a sobrevivência" ([24], p. 9). Estes conteúdos, a aritmética dos números e dos cálculos, são primários, e exatamente por tal motivo está presente em qualquer currículo escolar. O autor ainda destaca o quanto o estudo da aritmética colabora com nossa compreensão de mundo. O estudo deste campo da matemática é tão essencial, que seu ensino é obrigatório em todos os países [23].

No nosso cotidiano, a todo momento nos deparamos com situações que envolvem números em diversos contextos. Assim sendo, há uma grande necessidade de compreender o sentido que os números possuem em nosso dia a dia. Ou seja, mais que conhecer os números e saber operar é necessário que os estudantes sejam numeralizados. Quando discutimos acerca da alfabetização dos estudantes, compreendemos que, mais que saber decodificar os símbolos (no nosso caso, o alfabeto) e formar as palavras, é necessário compreender o que significa aquela palavra, e ainda mais importante, seu significado no contexto no qual está inserido. A ideia de numeralização é similar, para o estudante ser numeralizado não basta saber ler os números, ele precisa compreender os diversos usos, significados e funções que estes valores podem exercer nas diversas situações apresentadas, seja no seu dia a dia, ou no contexto escolar. O conceito formal de numeralizado é apresentado por Nunes e Bryant [28]

> *É ser capaz de pensar sobre e discutir relações numéricas e espaciais utilizando as conversões (ou seja, sistema de numeração e medida, terminologia como volume de área, ferramentas como calculadora e transferidos, etc.) da nossa própria cultura.*
>
> ([28], p. 18)

Spinillo [42] ressalta a necessidade de que o ensino da matemática possibilite a formação de sujeitos numeralizados. Observe a seguir o que a autora compeende por ser numeralizado,

> *ser numeralizado relaciona-se ao pensar matematicamente em situações diversas, empregando sistemas eficientes de representação e compreendendo as regras lógicas que regem os conceitos matemáticos inseridos nessas situações*

([42], p. 85)

Lins e Gimenez [23], discutem a importância de desenvolver o *sentido numérico* nos estudantes, e afirmam que este é formado a partir de diversas experiências com os números. Eles questionam se a escola está propondo a construção de um sentido numérico abrangente, ou apenas um "sentido numérico escolar", ou seja, que não contempla todas as possibilidades da realidade, e se restringe ao contexto escolar. A proposta dos autores, no que se refere a construção do sentido numérico, perpassa pela compreensão dos distintos significados dos números e operações em situações cotidianas, assim como as diferentes maneiras que tais situações podem ser resolvidas. Em sua grande maioria essas realidades não são trabalhadas em sala. Por exemplo, na escola em uma questão que solicite como resposta o troco, o estudante vai pegar o valor que o comprador possui e subtrair o valor do objeto comprado, resultando assim no valor do troco. Mas normalmente, as pessoas que trabalham no dia a dia passando troco, que não utilizam instrumentos ou recursos como uma calculadora por exemplo, pegam o valor do objeto comprado e vão acrescentando ou completando este valor até chegar ao total pago pelo comprador. Vamos acompanhar uma situação para compreender melhor.

Exemplo: Lucas comprou um livro que custou $R\$$ $22,70$. Ele pagou a compra com uma nota de $R\$$ $50,00$, quanto recebeu de troco?

Solução "contexto escolar"
Para determinar qual vai ser o troco vamos subtrair do valor total que ele possui o valor que custou o livro.

$$\begin{array}{r} 50,00 \\ -\ 22,70 \\ \hline 27,30 \end{array}$$

Figura 2.11: Resolução "contexto escolar"

Solução "contexto de rua":
A ideia é ir completando o valor até chegar nos cinquenta reais. Inicialmente será dado trinta centavos, completando vinte e três reais. Em seguida, acrescenta sete reais, formando trinta reais; e finalmente acrescenta os vinte reais, completando finalmente os cinquenta reais. Vamos visualizar a situação por meio das operações da figura 2.12.

Em síntese, o livro sugere que a maneira como a matemática é trabalhada na rua, seja trazida para a sala de aula. Precisamos ressaltar que nosso trabalho não se propõe a sugerir situações que atendam esta demanda. Concordamos com os autores da relevância do trabalho com situações oriundas diretamente da realidade, e não apenas baseada nela. Contudo, acreditamos que trabalhar com situações contextualizadas também favorece o

$$
\begin{array}{r} 22{,}70 \\ +\ 0{,}30 \\ \hline 23{,}00 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 23 \\ +\ 7 \\ \hline 30 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 30 \\ +\ 20 \\ \hline 50 \end{array}
$$

Figura 2.12: Resolução "contexto de rua"

desenvolvimento do sujeito numeralizado, mesmo que não de maneira tão abrengente e completa como propõe os autores.

Além de buscar este sentido numérico, o livro discute sobre a educação aritmética e a necessidade de uma nova leitura acerca desta, e da educação algébrica também. Como nosso trabalho discute sobre divisão, vamos nos restringir a tratar sobre a educação aritmética, apresentando as perspectivas expostas pelos autores para o ensino da aritmética. Nossa proposta em apresentar este panorama acerca do ensino da aritmética sob a perspectiva apresentada por Lins e Gimenez, é refletir o quanto trabalhar com situações que utilizam a ideia de congruência está em consonancia com esta proposta. Vamos observar a seguir, nos pontos destacados, a relação entre o que os autores apresentam e as situações envolvendo congruência.

No que se refere à educação aritmética, os autores ressaltam o quanto ainda é limitada o seu ensino. Para eles "a educação aritmética precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades que considera" ([23], p. 160), afim de garantir que o estudante desenvolva este sentido numérico. Eles analisam cinco pontos importantes que o vem sendo deixado de lado no desenvolvimento do ensino-aprendizagem da aritmética nas salas de aula. Destes, destacaremos o último citado pelos autores, o que se refere às "novas visões integradas que permitem falar de problemas diversos com um mesmo tipo de técnicas" ([23], p. 34). O ponto, quando amplamente discutido apresenta que "a aritmética propõe um sentido integrador que permite resolver problemas diversos com um mesmo tipo de técnicas e não somente ensinar técnicas por si mesmas. Assim, as regras ou técnicas servem à resolução de problemas" ([23], p. 38). As questões que envolvem a ideia de congruência, muitas vezes serão resolvidas apenas utilizando o algoritmo da divisão. Entretanto, devido à sua contextualização, e muitas vezes à sua complexidade, visto que os estudantes normalmente não trabalham com situações deste tipo, eles precisam compreender o contexto para elaborar estratégias afim de alcançar o resultado. Ou seja, a técnica aqui, neste caso o algoritmo da divisão, será utilizada se o estudante compreender a situação apresentada. Como os autores destacaram, ela não é ensinada por ela mesma, mas com o objetivo de solucionar uma problema.

Neste trabalho [23], ainda são apresentados seis dificuldades específicas no trabalho com os números naturais, dentre as quais destacaremos novamente a última, a que trata dos "erros associados à ineficácia operativa por falta de significação ou erros na execução de algoritmos clássicos". Já destacamos neste trabalho o quanto o propor situações contextualizadas podem favorecer a aprendizagem do algoritmo da divisão, à medida que, para a construção do algoritmo ele precisa compreender o significado de cada termo ali envolvido.

Na perspectiva da necessidade de propor aos estudantes situações contextualizadas, que busquem referências na realidade, os autores também argumentam que

> *... muitas pesquisas estão mostrando que existem elementos referenciais exteriores (núcleos "concretos") que participam da produção dos alunos, o que sugere fortemente que a aprendizagem pode ser fomentada na medida em que se ofereça a possibilidade de o aluno afirmar coisas e justificar suas afirmações. Parece-nos que o problema não é, então, encontrar boas "representações" (materiais manipulativos, desenhos, jogos etc.), mas promover experiências e reflexões.*
>
> ([23], p.55 − 56)

Acreditamos que as experiêcias e reflexões às quais os autores se referem podem ser possibilitadas por meio de situações problema contextualizados, como são as propostas das atividades que envolvem a ideia de congruência. Seguindo a linha de raciocínio apresentada, os autores ainda destacam que,

> *Até há pouco parecia que em aritmética não se podia fugir dos preços como "o" palpável do cotidiano, e, fora disso, devia-se usar elementos manipulativos. A pesquisa recente, no entanto, fala de um ensino realista de diversos pontos de vista. Há abordagens que propõem a apresentação de situações "realistas" - parecidas o bastante com situações reais -, elaboradas de modo a permitir que se entreveja uma certa estrutura matemática*
>
> ([23], p.56)

Enfim, os autores apresentam os que eles consideram como os principais objetivos a que se propõe o ensino da aritmética.. Dos seis objetivos apresentados pelos autores, destacaremos quatro. O primeiro se refere a "desenvolver uma capacidade mínima de interpretar o que há de aritmético em determinadas situações reais"; a terceira a "dominar algumas bases conceituais importantes, reconhecendo sua aplicação em situações concretas"; a quarta a "adquirir um sentido numérico o mais geral possível, que permita flexibilizar as técnicas e os conteúdos que se conhecem e reconhecer quando cada uma é mais útil e adequada"; e a quinta a " ser capaz de produzir hipóteses diante de problemas vinculando as justificações necessárias a diversos raciocínios (aditivo, multiplicativo, proporcional, etc.). Todos os objetivos citados se encontram em [23], na página 86. E pelo que já foi apresentado e discutido no corpo deste trabalho, acreditamos que propor situações que envolvam a ideia de congruência favorece que tais objetivos sejam alcançados.

Diante do objetivo do nosso trabalho, de propor situações para a quinta série do ensino fundamental, e tendo conhecimento da grande relevancia dos livros didáticos no processo de ensino e aprendizagem, no próximo capítulo apresentaremos um levantamento realizado com nove livros didáticos. Alguns destes foram disponibilizados aos professores da rede pública de ensino do estado da Bahia, como possível opção de escolha do livro didático a ser adotado pela escola. Outros, são edições mais antigas. A principal finalidade é analisar de que maneira vem sendo abordado o conteúdo de divisão na quinta série (sexto ano) do ensino fundamental, e apresentar o panorama das questões que estão sendo propostas.

Capítulo 3

Análise da abordagem da divisão nos livros didáticos

A importância do livro para a humanidade é indiscutível! Podemos citar, dentre tantas outras funções, a maneira como o conhecimento e a informação é transmitida de geração em geração, por meio deste simples objeto. Apesar de tantas tecnologias a quais temos acesso no mundo moderno, sem dúvida o livro didático ainda é um dos recursos mais utilizados em sala de aula. Diante de tal relevância, neste capítulo analisaremos como tem sido a abordagem do conteúdo da divisão de números naturais nos livros destinados a 5ª série (6º ano) do ensino fundamental. Nosso objetivo inicial é apresentar um panorama geral de como este conteúdo está sendo apresentado nos livros didáticos. Além disso, observar se vem sendo propostas questões que colaboram com uma aprendizagem significativa, ou seja, situações em que não seja simplesmente cobrado o valor do quociente. Observar como as questões estão sendo abordadas nos livros didáticos é interessante, uma vez que este é um recurso tão importante no processo de ensino e de aprendizagem. Nos restrigimos a analisar aquelas que trabalham com a a divisão na forma de divisão euclidiana, que utilizam o resto de algumas maneira e dentre as últimas citadas e as que utilizam a ideia de congruência para serem respondidas. Verificamos em cada livro se ele possuia questões envolvendo estas ideias e como se dá a sua abordagem.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, iniciamos discutindo acerca dos PCNs e a proposta destes documentos no que se refere ao trabalho com a divisão no ensino fundamental. Logo após, apresentamos os dados coletados de nove livros didáticos da quinta série (sexto ano) do ensino fundamental. Nosso objetivo é averiguar de que maneira vem sendo abordado o conteúdo de divisão nesta série. Finalizamos com a análise dos dados coletados. Na segunda seção, apresentaremos exemplos das questões que são encontradas nos livros didáticos atuais, classificando-as nos tipos de questões identificadas, com relação a situações que envolvem o resto de alguma maneira na solução.

3.1 Como a divisão é apresentada nos livros didáticos atuais

A partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, aprovada em 20 de dezembro de 1996, o poder público consolidou e ampliou seu dever com a educação, reforçando a necessidade de proporcionar uma formação básica comum a todos. Para tal, foi necessário haver um conjunto de diretrizes que norteasse o currículo e os conteúdos básicos a serem trabalhados em cada seguimento. Essa base nacional comum foi concluída no ano de 1997, com o lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que são a referência básica para a elaboração e construção do currículo do ensino básico. Os PCN são compostos por dez volumes, onde um destes é o documento de introdução [10]; seis são referentes às áreas de conhecimento e três dizem respeito aos Temas Transversais. Todas estas informações de histórico e estrutura geral dos PCN são encontrados no documento de introdução [10]. Os PCN que discutem a área específica de matemática do ensino fundamental está dividida em dois documentos, um que diz respeito às referências de 1ª à 4ª série do ensino fundamental [11], denominados primeiro ciclo e segundo ciclo do ensino fundamental; e o que se refere às diretrizes de 5ª à 8ª série [12], denominados terceiro ciclo e quarto ciclo do ensino fundamental. Analisando o documento, podemos observar que os conteúdos conceituais e procedimentais, são divididos em quatro blocos, a saber: números e operações, espaço e forma, grandeza e medida, e tratamento da informação. Tanto no documento referente do primeiro ciclo e segundo ciclo, quanto no do terceiro ciclo e quarto ciclo, estes quatro blocos estão presentes, e assim apresentados. Como nossa proposta é discutir acerca da divisão, vamos nos aprofundar no primeiro bloco, o referente a NÚMEROS E OPERAÇÕES. Esse bloco, em cada documento, já apresenta suas especificidades. No documento do primeiro e segundo ciclo, ele é dividido em duas partes: Números Naturais e Sistema de Numeração Decimal; e Operações com Números Naturais. Este último é dividido em quatro grupos, a discussão sobre divisão é encontrado no grupo MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: SIGNIFICADOS. Já no documento do terceiro e quarto ciclo o mesmo bloco, números e operações, está dividido em três partes: Números; Operações; e Álgebra. A parte que discute sobre Operações é dividida em cinco grupos, encontramos orientações referentes a divisão no grupo com a mesma denominação que o encontrado no documento do primeiro e segundo ciclo, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: SIGNIFICADOS. São apresentados quatro sinificados para a divisão, nos dois documentos. A seguir os apresentaremos, com seus respectivos exemplos. Vamos numerá-los com algarismos romanos apenas a título de organização, eles não são apresentados enumerados nos PCN.

(I) Situações de multiplicação comparativa (é possível formular situações que envolvem à divisão).

Exemplo ([11], p. 72): "Lia tem $R\$ \ 10,00$. Sabendo que ela tem o dobro da quantidade de Pedro, quanto tem Pedro?"

(II) Situações de proporcionalidade "repartir igualmente" e "determinar quanto cabe".

Exemplo 1 **([11], p. 72):** (Associado a ideia de "repartir igualmente") "Marta pagou $R\$ \ 24,00$ por 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote? (A quantia em dinheiro será repartida igualmente em 3 partes e o que se procura é o valor de uma parte.)"

Exemplo 2 **([11], p.** 72): (Associado a ideia de "determinar quanto cabe") "Marta gastou $R\$ \ 24,00$ na compra de pacotes de chocolate que custavam $R\$ \ 3,00$ cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou? (Procura-se verificar quantas vezes 3 cabe em 24, ou seja, identifica-se a quantidade de partes.)"

(III) Situações associadas à configuração retangular.

Exemplo ([11], p. 73): "As 56 cadeiras de um auditório estão dispostas em fileiras e colunas. Se são 7 as fileiras, quantas são as colunas?"

(IV) Situações associadas a ideia de combinatória.

Exemplo ([11], p. 73): "Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?"

As orientações didáticas relativo aos significados da multiplicação e divisão, ou seja, os quatro significados acima elencados, são exatamente as mesma nos dois documentos, a diferença é o conjunto numérico com o qual está trabalhando. De 1ª à 4ª ele apresenta questões apenas envolvendo números naturais, e no de 5ª à 8ª trabalha com números decimais, fracionários, inteiros e não-racionais. As orientações dos PCN (1ª à 4ª) é de iniciar os trabalhos com os racionais, contudo ao que diz respeito às operações, as orientações de se trabalhar é apenas com a adição e subtração. Em síntese, podemos observar essas diferenças nos exemplos dados em cada significado. Os exemplos apresentados neste trabalho estão todos presentes no documento que se refere ao primeiro ciclo e segundo ciclo. Do levantamento apresentado, podemos constatar que não há uma ênfase acerca da importância de trabalhar com questões em que o resto influência no resultado. A possibilidade de trabalhar questões que utilizem a ideia de congruência, de deixar mesmo resto, também não é citada. Estas são as informações encontradas no documento de referência para a construção do curriculo. E nos livros didáticos, como vem sendo abordado o conteúdo de divisão na quinta série (sexto ano) do ensino fundamental? Analisando nove livros didáticos do ensino fundamental levantamos algumas características referente ao estudo da divisão com números naturais. As edições dos livros analisados variam entre os anos 2006 a 2012. Em todos eles o único capítulo analisado foi o que diz respeito ao estudo da DIVISÃO COM NÚMEROS NATURAIS. Observamos cinco características da maneira como os conteúdos são apresentados, conforme elencadas a seguir.

CARACTERÍTICA 1 : o livro didático apresenta a divisão associada a duas ideias. A primeira ideia é a de repartir em partes iguais, e a segunda é a de quantas vezes cabe (ideia de medir).
CARACTERÍSTICA 2 : o livro apresenta a divisão na forma de divisão euclidiana.
CARACTERÍSTICA 3 : o livro apresenta questões em que o resto interfere no resultado da questão.
CARACTERÍSTICA 4 : o livro didático apresenta situações em que o resto é a solução.
CARACTERÍSTICA 5 : o livro didático apresenta situações em que a ideia de congruência, de deixar mesmo resto, é necessária para a resolução.

Vamos dar exemplos de cada situação, afim de que haja uma melhor compreensão sobre o que entendemos de cada característica citada.

CARACTERÍTICA 1
Se refere às ideias associadas à divisão que normalmente são apresentadas nos livros didáticos. Observamos se na apresentação do conteúdo o livro apresenta, por meio de exemplos ou de texto, essas duas ideias associadas à divisão. Ou seja, mesmo que o livro apresente questões que envolvem tais ideias, caso ele não as tenham apresentado dando enfâse a elas, na tabela este livro estará associado a esta característica com um "não".
A ideia de repartir pode ser observada na seguinte questão:
Exemplo 1: Dona Joaquina tem $R\$12,00$ que vai distribuir igualmente entre seus três sobrinhos. Quanto cada sobrinho receberá?
Já a ideia de quantas vezes cabe, ou ideia de medir pode ser verificada na situação:
Exemplo 2: Estou organizando minha coleção de livros, quero colocá-los em pratileiras. Se em cada pratileira cabem 12 livros, quantas serão necessárias para organizar minha coleção que contém 84 livros?

CARACTERÍSTICA 2
Verificamos se o livro apresenta a divisão na forma de divisão euclidiana $D = d.q+r$, onde D é o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto, conforme teorema 1.4.

CARACTERÍSTICA 3
Nesta característica observamos se o livro didático apresenta questões em que o resto vai interferir no resultado, como o exemplo apresentado na seção anterior:

Exemplo: Haverá uma excursão com um grupo da terceira idade. Para levar os animado grupo e os organizadores da viagem serão contratados ônibus com capacidade de transportar 32 passageiros. Participarão da viagem 12 organizadores e 175 idosos que fazem parte do grupo. Quantos ônibus serão necessários contratar para que todos participem da excursão?
Em síntese, o que observaremos é se na questão o resto interfere no valor do quociente, para que a solução seja determinada.

CARACTERÍSTICA 4
Diferente da característica 3, aqui o resto não interfere no resultado, seu valor é o resultado. Ou, o resultado depende diretamente do valor do resto. Vamos considerar algumas questões:
Exemplo 1: Sabendo que em uma divisão o dividendo é 197, o divisor 6 e o quociente 32, determine o valor do resto.
Exemplo 2 ([6], p. 61) (questão 1, Faça mais!): Uma pista de corrida circular tem 420 metros de extensão. Um corredor já percorreu 1390 metros.
(a) Quantas voltas completas ele já deu?
(b) A quantos metros da posição de partida ele se encontra?
(c) Quantos metros faltam para completar mais uma volta?

CARACTERÍSTICA 5
Observamos se os livros didáticos selecionados apresentam questões em que a ideia de congruência é utilizada para resolver a questão. Como no problema:
Exemplo: Sabendo que o primeiro dia deste ano de 2015 foi uma quinta-feira, determine daqui a quantos anos isso acontecerá novamente, ou seja, em que o primeiro dia do ano será uma quinta-feira. (Lembre-se de que 2016 é ano bissexto).

Todos os livros analisados dos anos 2010, 2011 e 2012, foram disponibilizados aos professores da rede pública de ensino do estado da Bahia, como possível opção de escolha do livro didático a ser adotado pela escola. Esta escolha ocorreu no ano 2013, para que no ano de 2014 o livro escolhido chegasse às unidades escolares. Nosso interesse nesta análise é verificar se os livros utilizados neste estudos apresentam uma ou mais das características 1 a 5 apresentadas anteriormente.

Livro 1 : Matemática: teoria e contexto. [13]
Livro 2 : Projeto Araribá: matemática. [2]
Livro 3 : Matemática: Imenes e Lellis. [22]

Livro 4 : Projeto Araribá: matemática. [3]
Livro 5 : A conquista da matemática. [20]
Livro 6 : Matemática: fazendo a diferença. [6]
Livro 7 : Matémática: Bianchini. [5]
Livro 8 : Matemática: ideias e desafios. [27]
Livro 9 : Vontade de saber matemática. [41]

Os dados coletados foram organizados na tabela a seguir. A primeira coluna indica cada um dos livros, usando a numeração atribuida acima, e na primeira linha as características, mencionadas anteriormente. Cada célula que associa um livro a uma característica foi completada com “sim”, se o livro possui tal característica, ou “não”, caso contrário. Observe os resultados encontrados na tabela.

	Carac. 1	Carac. 2	Carac. 3	Carac. 4	Carac. 5
Livro 1	sim	sim	sim	sim	sim
Livro 2	sim	sim	sim	sim	não
Livro 3	não	sim	sim	sim	sim
Livro 4	sim	sim	sim	sim	não
Livro 5	sim	sim	não	sim	não
Livro 6	sim	sim	não	sim	sim
Livro 7	sim	sim	sim	sim	não
Livro 8	sim	sim	sim	sim	não
Livro 9	não	sim	não	sim	não

A seguir apresentaremos uma análise mais detalhada dos dados coletados de cada uma das características observadas.

Inicialmente, tratemos da CARACTERÍSTICA 1. Note que na tabela o Livro 4 e 9 são os únicos que não apresentam a presença das duas ideias. Como já ressaltado, isso não significa que os livros não trabalhem com questões que aplicam tais ideias, eles apenas não dão o destaque dado pelo outros livros, por meio de um subtítulo, por exemplo. Analisando de maneira ampla os dados coletados referentes à CARACTERÍSTICA 1, notamos a limitação de como são apresentadas as ideias associadas a divisão nos livros didáticos, pois não exibem todas as retratadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Em cada um dos ciclos citados anteriormente, são elencados os conteúdos conceituais e procedimentais, dos quais destacaremos o que trata das *operações*. Mencionamos ainda que o conjunto numérico com o qual vamos operar, vai depender do ciclo que estou analisando, por exemplo, no primeiro ciclo será discutido sobre as operações com os números naturais; já no quarto ciclo as operações serão realizadas já se estendem aos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. De acordo com os objetivos deste trabalho, analisamos a seção do livro que trata apenas da divisão com números naturais, vamos nos limitar a discorrer e propor situações considerando apenas este conjunto numérico como o nosso conjunto universo. Os PCN apresentam quatro ideias associadas a divisão, como exemplificamos no início da seção. Destas, os livros didáticos analisados apresentam apenas uma, já que a ideia de repartir em partes iguais e a de medir quantas vezes cabe, estão em uma das ideias citadas, a de situações de proporcionalidade. As outras três ideias apresentadas nos PCN, as situações de multiplica comparativa (que é possível formular situações que envolvem a divisão), as situações associadas à configuração retangular, e as situações associadas a ideia de combinatória, não são destacadas, nem apresentadas com um subtítulo ou um exemplo específico. Alguns dos livros apresentam questões que trabalham com tais ideias, mas como mencionamos não lhes é dado o devido destaque. Nas questões que seguem, retiradas dos livros didáticos analisados, podemos identificar as ideias exibidas nos PCN.

A ideia de multilplicação comparativa, onde também é possível formular situações que envolvem a divisão, é encontrada na seguinte questão:

Exemplo 1 (**[41], p.** 71) **(questão** 72**, Desafio):** Em uma loja de instrumentos musicais, o preço de uma guitarra, que custa $R\$ \ 530,00$, é o quíntuplo do preço de um afinador de instrumentos e o dobro do preço de um pedal para guitarra. Nessa loja, quantos reais custa o pedal para guitarra? E o afinador?

No exemplo a seguir, a questão descrita é uma situação associada à configuração retangular, observe:

Exemplo 2 (**[22], p.** 67) **(questão** 36**, Problemas para casa):** No chão retângular de um terraço, há 308 ladrilhos. São 22 ladrilhos enfileirados no comprimento. Quantos estão alinhados na largura?

Não encontramos em nenhum dos livros didáticos analisados uma questão envolvendo a ideia de combinatória, na seção que trata de divisão. Encontramos questões utilizando esta ideia, apenas envolvendo multiplicação.

A CARACTERÍSTICA 2 trata de averiguar se os livros didáticos apresentam a divisão na forma de divisão euclidiana. Em nossa proposta de trabalho é importante observar a presença da divisão euclidiana nos livros, visto que, esta maneira de apresentar a divisão favorece a visualização de cada termo da divisão e algumas relações entre eles, o que nem sempre é possível notar no algoritmo da divisão, como podemos observar na figura 2.1:

Constatamos na tabela, que todos os livros didáticos pesquisados trazem a divisão na

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \qquad a = q.b + r$$

Figura 3.1: Representação da divisão pelo algoritmo e pela divisão euclidiana

forma de divisão euclidiana. Além da questão da visualização, após apresentar a divisão euclidiana, alguns destes exemplares trazem questões que trabalham com resto. Em algumas situações o propósito não é determinar o resto, mas um outro termo desconhecido, como o dividendo ou o divisor. Observe alguns exemplos:

Exemplo 1 (**[5], p.** 62) (**questão** 81**, exercícios propostos):** Dividindo 42 por 6, o quociente é 7 e o resto é zero. Somando 1 ao dividendo e tornando a dividir por 6, o quociente continua 7 e o resto passa a ser 1. Qual o maior número que podemos somar ao 42 para que a divisão por 6 continue tendo quociente 7?

Exemplo 2 (**[20], p.** 71) (**questão** 4**, exercícios):** Uma escola recebeu uma caixa com uma certa quantidade de laranjas para merenda das crianças. Essa quantidade foi repartida igualmente entre as 6 salas da escola, sendo que cada sala recebeu 35 laranjas e ainda restaram 5 laranjas na caixa. Quantas laranjas havia inicialmente na caixa?

Na divisão euclidiana a igualdade que apresenta as relações entre os termos nos possibilita distinguir operações que o algoritmo não nos permite. Com o algoritmo da divisão apresentado como a "conta armada" não se nota de maneira objetiva que o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente somado ao resto, como é apresentado na divisão euclidiana. Como citado, todos os livros analisados apresentam a divisão na forma de divisão euclidiana. Entretanto, é imporante salientar que os livros didáticos não se referem a divisão euclidiana com esta nomenclatura. Alguns livros simplesmente apresentam a divisão como podendo ser escrita da seguinte maneira:

$$dividendo = divisor.quociente + resto$$

Sem atribuir nenhum nome a esta equação. Os livros que apresentam a divisão Euclidiana assim são: Livro 3, Livro 8, Livro 9. Dois livros apresentam denominações únicas, só encontrados neles, para tratar deste tema. O Livro 7 designa a divisão euclidiana como **propriedade fundamental da divisão**, e o livro 1 como **relações entre dividendo, divisor, quociente e resto**. E o subtítulo **relação fundamental da divisão** é utilizado pelos Livro 2, Livro 4, Livro 5 e Livro 6.

Vale salientar o quanto estas propostas auxiliam os estudantes a refletir sobre qual estratégia utilizar para obter o resultado. Visto que, quando trabalhamos apenas com questões em que o resultado que precisamos encontrar é o quociente, o aluno pode realizar o algoritmo de maneira mecânica, e não necessariamente compreender o significado dos procedimentos que estão sendo realizados para se obter o resultado.

No que diz respeito à CARACTERÍSTICA 3, a crítica realizada aos PCNs também devemos fazer aos livros analisados, em nenhum deles é dado um destaque às questões em que a resolução da atividade depende do resto. Inclusive, o Livro 3 [22] apresenta em um de seus exemplos iniciais, onde está sendo apresentado o conteúdo, uma questão em que o resto interfere no resultado, observe:

Exemplo 1 (**[22],p.** 60 − 61) **(O caso dos micro-ônibus):** Os alunos de um colégio vão fazer uma excursão. São 168 pessoas entre alunos e professores. Quantos micro-ônibus de 22 lugares eles deverão alugar?

Resolução

Para saber quantos grupos de 22 pessoas podem ser formados num total de 168, ou seja, para saber quantas vezes 22 “cabe” em 168, dividimos 168 por 22:

$$\begin{array}{r|l} 168 & 22 \\ \cline{2-2} 14 & 7 \end{array}$$

Figura 3.2: Algoritmo apresentado na resolução da questão

São formados 7 grupos completos e restam ainda 14 pessoas. Portanto, eles deverão alugar 8 micro-ônibus: 7 para os grupos completos e mais 1 para as 14 pessoas restantes. Poderíamos então afirmar que o livro deu destaque a situação em que o resto interfere no resultado, entretanto, observe a conclusão apresentada à questão:

Conclusão ([22],p. 61) **(O caso dos micro-ônibus):** a divisão não serve só para **repartir** em partes iguais. Nesse exemplo, ela serviu para **descobrir quantos grupos** de 22 pessoas são formados com 168 pessoas.

Com a análise da tabela, podemos concluir que nem todos os livros didáticos apresentam questões em que o resto interfere no resultado. Aqui é válido salientar, estes três livros com o “não” na CARACTERÍSTICA 3 não possui um tipo de questão específica, aquelas em que o resto interfere no valor do quociente, para que a solução seja determinada. Como discutiremos na análise da próxima característica, todos os livros apresentam questões que envolvem o resto de alguma maneira. Não nos prolongaremos na discussão do quanto trabalhar com situações deste tipo é relevante, pois acreditamos que nos repetiríamos nas falas, visto que tratamos deste tema no capítulo anterior.

Na CARACTERÍSTICA 4 observamos se o livro apresentava situações em que o resto era a resposta, de alguma maneira, e notamos que todos os livros didáticos apresentam questões deste tipo. As questões observadas, não necessariamente são contextualizadas, na verdade observamos três tipos de questões em que a resposta está no resto. O primeiro tipo são aquelas onde são dadas as informações do dividendo, divisor e quociente, e solicita o resto; ou apresenta o dividendo e o divisor e solicita o quociente e o resto. Ou ainda, questões com o objetivo do estudante perceber que o resto deve sempre ser menor que o divisor, como na questão a seguir:

Exemplo 1 (**[41], p.** 72)(**questão** 75, **Tratando a informação**): Determine o resto em cada cálculo.

(I) 236 : 4

(II) 237 : 4

(III) 238 : 4

(IV) 239 : 4

(V) 240 : 4

(VI) 241 : 4

(a) Agora, observe os cálculos realizados e determine o resto em:

- 242 : 4
- 243 : 4
- 244 : 4
- 245 : 4
- 246 : 4
- 247 : 4

(b) Quais os possíveis restos da divisão de um número natural por 4? E por 5?

O segundo tipo que observamos são questões em que o resultado depende diretamente do resto, mas não é o resto. E o terceiro tipo, são questões em que o resto é o resultado. No exemplo apresentado quando explicamos a CARACTERÍSTICA 4, deixa bem clara a distinção entre os dois tipos. Vamos relembrá-lo:

Exemplo 2 (**[6], p.** 61) **(questão** 1, **Faça mais!):** Uma pista de corrida circular tem 420 metros de extensão. Um corredor já percorreu 1390 metros.

(a) Quantas voltas completas ele já deu?

(b) A quantos metros da posição de partida ele se encontra?

(c) Quantos metros faltam para completar mais uma volta?

Realizando a divisão do que ele percorreu pela quantidade de metros de extensão que a pista tem, o quociente será a quantidade de voltas completas, e o resto determinará a quantos metros da posição de partida ele se encontra, ou seja, a resposta da opção (b) é o próprio resto da divisão. E ainda, para determinar a resposta da letra (c), precisamos considerar quantos metros de extensão tem a pista no total e retirar o valor do resto, que foi o que ele já percorreu, ou seja, a resposta da opção (c) depende diretamente do valor do resto. Em todos os livros didáticos haviam questões envolvendo pelo menos um dos três tipos citados, como podemos observar na tabela. Este dado é relevante, pois questões que trabalham com o resto colaboram com uma reflexão do estudante, são questões em que o estudante não irá simplesmente aplicar o algoritmo e ver qual é o resultado, ele precisa compreender o que significa cada termo para responder o que é solicitado na questão.

Finalmente, analisaremos a CARACTERÍSTICA 5. A última característica observada foi se os livros apresentavam situações em que, a ideia de congruência fosse necessária para se obter o resultado. Em três dos livros identificamos a presença de questões deste tipo, no Livro 1 [13] duas questões, e nos outros dois livros, uma questão em cada. No Livro 1 [13], uma das questões não é contextualizada. Na verdade, o objetivo da atividade é que o estudante perceba que existem infinitas divisões por determinado valor com o mesmo resto. No caso da questão ele apresenta o divisor 15 e o resto 10, inicialmente, requisita três exemplos em que isso ocorra, em seguida questiona quantas divisões existem como essa. Ou seja, o livro apresenta de maneira intuitiva dc conceito de congruência. Já a segunda questão utilizará a ideia de deixar mesmo resto em uma situação envolvendo uma pista de corrida. A questão apresentada no Livro 3 [22] e no Livro 6 são situações contextualizadas. Faremos uma análise mais detalhada desta proposta na próxima seção. Enfim, verificamos que a ideia de congruência parece estar começando a ser introduzida nos livros didáticos. Claro que considerando os números, de nove apenas três apresentaram, ainda é pouco. Entretanto, vemos como um avanço já constatar a presença, mesmo que ainda "tímida". É importante lembrarmos que estes livros fazem parte do rol dos disponibilizados ao docentes para a escolha do livro didático da rede pública de ensino do estado da Bahia, conforme já mencionamos.

O estudo dos dados coletados nos permite afirmar que a abordagem dada ao conteúdo de divisão com números naturais nos livros didáticos ocorre de maneira limitada. As ideias apresentadas nos PCN não estão sendo trabalhadas em sua totalidade, além de não ser dada a ênfase necessária, mesmo quando trabalham com questões envolvendo a ideia. Contudo, precisamos destacar um dado observado. Na análise das questões, notamos que alguns livros trazem questões envolvendo algumas razões, como para determinar a velocidade média (quilômetro dividido por hora), densidade demográfica (número de habitantes dividido pela extensão em quilômetros quadrados), dentre outras. Neste ponto, cabe uma segunda crítica aos PCN. Em nenhum momento os PCN dão destaque a importância de trabalhar com estas razões, quando a proposta é o trabalho com os números naturais. Alguns livros não se aprofundam na discussão acerca da divisão euclidiana, além de não propor questões que explorem todo o potêncial deste conteúdo. Precisamos destacar, o que na nossa opinião, vem ocorrendo de maneira adequada. O fato de todos os livros didáticos apresentarem questões que trabalham com o resto, de alguma maneira, e importante, pois normalmente tratam de questões em que o estudante precisa de uma reflexão para alcançar a solução. Nos surpreendeu o fato de três dos livros já apresentarem questões envolvendo a ideia de congruencia. Talvez a surpresa venha da experiencia de sala de aula, pois até então, os materiais com os quais havia trabalhado não apresentavam questões deste tipo. Mas, os números falam por si. Dentre os nove livros, apenas três apresentam esta ideia, além disso, uma das questões apenas solicita que sejam apresentadas situações em que o resto seja o mesmo. Ou seja, é uma questão que apresenta a ideia de congruencia, entretanto não a utiliza para resolver um problema. Enfim, devido a grande dificuldade apresentada pelos estudantes com a aprendizagem deste conteúdo, como já foi discutido neste trabalho, esta seção do livro didático deve ser munida de propostas que favoreçam a aprendizagem da divisão. Propondo situações com uma nova perspectiva, das que normalmente vem sendo apresentadas, ampliam-se as possibilidades. Como já argumentamos, questões contextualizadas colaboram com a aprendizagem significativa, a medida em que o estudante sente a necessidade de compreender a situação para poder resolvé-la. Daí nossa proposta de que questões envolvendo a ideia de congruência sejam inseridas nos livros didáticos.

3.2 Como e quais questões vem sendo apresentadas?

As situações propostas aos estudantes no processo de ensino e aprendizagem, pode coloborar significativamente neste processo, como já discutimos em seções anteriores. Por tal motivo, para realizar o estudo dos nove livros didáticos, citados na seção anterior, fizemos um levantamento detalhado das questões em que o resto, de alguma maneira, interfere no resultado. Observamos ainda suas abordagens, principalmente se estas se dão de maneira contextualizadas. Apresentaremos nesta seção o resultado deste levantamento. Vale ressaltar que nos restringimos em analisar apenas as questões em que o resto é utilizado de alguma maneira. Quando examinamos as questões em que o resto de alguma maneira faz parte do resultado, notamos que poderíamos classificá-las em cinco casos:

1º caso : o resto interfere no resultado, mas a solução principal parte do quociente

2º caso : solicita para identificar o resto

3º caso : o resultado depende do valor do resto

4º caso : o resto é o resultado em uma situação contextualizada

5º caso : é utilizada a ideia de deixar mesmo resto (ideia de congruência)

Podemos ainda fazer uma relação entre estes casos diagnosticados e as características citadas na seção anterior, observamos que o 1º caso está associado à CARACTERÍSTICA 3, os 2º, 3º e 4º casos à CARACTERÍSTICA 4 e o 5º caso à CARACTERÍSTICA 5.

Afim de uma melhor compreensão, apresentaremos uma breve explanação acerca de nossa compreensão de cada caso supracitado. Exibiremos ainda questões encontradas nos livros didáticos nas quais identificamos o caso do qual estaremos tratando. Por fim, apresentaremos uma tabela com o levantamento da presença de questões que se enquadra em cada caso, além de nossas conclusões.

O 1º CASO que identificamos se refere àquelas questões em que o resto interfere no resultado, contudo, a solução principal parte do quociente. Em situações deste tipo, para determinar a solução do problema, o estudante vai realizar o algoritmo da divisão com o objetivo de encontrar o valor do quociente. Entretanto, diante da situação o resto vai interfir no valor do quociente. Observe os exemplos encontrados em alguns dos livros didáticos analisados.

Exemplo 3.1. ([2], p. 58) **(questão** 4**, Atividade/ Vamos praticar)** Para organizar seus 54 CDs, Paula distribuiu-os igualmente em porta-CDs que comportam, no máximo, 12 CDs. De quantos desses porta-CDs Paula precisou?

Exemplo 3.2. ([5], p. 60) **(questão** 75**, Exercícios propostos)** Quantos garrafões de 4 litros são necessários para engarrafar 74 litros de água?

Exemplo 3.3. ([13], p. 29) **(questão** 9**, Pensando em casa)** Os 290 alunos da escola em que Beto estuda vão fazer um passeio ao zoológico. O transporte será em ônibus escolares com 36 lugares cada um. Três professoras também irão, para cuidar da garotada. Quantos ônibus escolares serão necessários para o passeio?

O 2º CASO detectado, diz respeito às questões que solicitam para identificar o resto. Estas são situações não contextualizadas, em que é apresentada uma expressão e solicita que determine o valor do resto. Em alguns casos, solicita que determine e quociente e o resto. Em síntese, o estudante vai resolver o algoritmo da divisão e identificar qual é o resto. Note que nesta situação, o resultado é o valor do resto. Questões deste tipo também podem ser utilizadas com o objetivo de mostrar ao estudante que o resto sempre

Figura 3.3: Figura apresenta na questão 9, Livro 1

deve ser menor que o divisor, como já comentado na seção anterior, na análise da CARACTERÍSTICA 4. Outros exemplos são àquelas que trabalham com a ideia de divisão euclidiana. Neste segundo caso a resposta da questão é o resto, isto que este se difere do primeiro caso, em que o resto foi utilizado para determinar a solução. Vamos observar as questões apresentadas nos livros.

Exemplo 3.4. ([2], p. 61**) (questão** 3 **(d), Atividades/ Vamos praticar)** Calcule e responda as questões em seu caderno.

(a) Em uma divisão o quociente é 16 e o dividendo é 32. Qual é o divisor?

(b) Em uma divisão em que o resto é zero e o dividendo é igual ao divisor, qual é o quociente?

(c) Em uma divisão exata, o divisor é 13 e o quociente é 21 Qual é o dividendo?

(d) Em uma divisão não-exata em que o divisor é 9, quais são os possíveis restos?

Exemplo 3.5. ([27], p. 74**) (questão** 63**, Fazer e aprender)** Determine o quociente e o resto de cada divisão.

(a) 264 : 22

(b) 3168 : 134

(c) 1608 : 134

(d) 253 : 18

(e) 1242 : 23

(f) 1208 : 23

(g) 5306 : 48

(h) 3353 : 11

Exemplo 3.6. ([3], p. 65) (questão 2, Vamos fazer) Reúna-se com um colega e, com o auxílio de uma calculadora, encontrem os números que substituem cada "quadradinho". Descrevam, no caderno, as operações que vocês usaram para encontrar cada número.

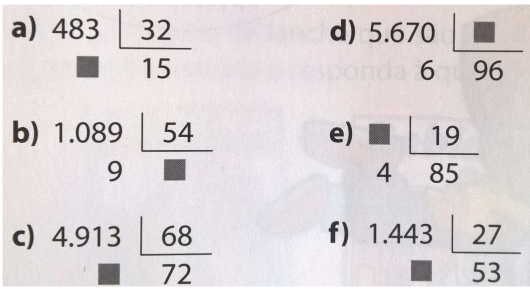

Figura 3.4: Figura apresenta na questão 2, Livro 4

No 3º CASO o resultado depende do valor do resto, significa que este será utilizado diretamente para determinar o valor da solução da questão. Uma pergunta natural é: no que este caso se diferencia do primeiro? No primeiro caso, o valor do resto interfere no resultado do quociente. Por exemplo, participarão de uma viagem 169 pessoas, em ônibus que cabem 30 pessoas em cada. Fazendo a divisão da quantidade de pessoas que viajarão pela quantidade de pessoas que cabem em cada ônibus, encontraremos como resposta cinco ônibus cheios e sobram 19 pessoas. Ou seja, será necessário alugar mais um ônibus. Se sobrar vinte ou vinte e uma pessoas, também vai ser necessário alugar mais um ônibus. O valor do quociente nesta situação é 5, como precisamos de mais um ônibus, a resposta da questão é 6. No terceiro caso, o valor do resto é utilizado diretamente na solução. Por exemplo, um corredor percorreu 2220 metros, em uma pista de 300 metros. Fazendo a divisão do que ele percorreu pelo valor do percurso da pista encontraremos que ele deu 7 voltas completas (quociente) e percorreu mais 120 metros (resto). Para determinar quantos metros ainda faltam para ele completar mais uma volta, vamos subtrair do valor total do percurso da pista pelo valor do resto, encontrando assim quantos metros ainda falta percorrer. Note que neste exemplo o valor do resto foi utilizado diretamente para obter o resultado, se o resto fosse 130 metros, a solução da questão seria outra. Entretanto seu valor não é o resultado, ele é utilizado para obter a solução. Vamos observar alguns exemplos encontrados nos livros didáticos.

Exemplo 3.7. ([6], p. 61) (questão 24**, Faça mais!)** Uma pista de corrida circular tem 420 metros de extensão. Um corredor já percorreu 1390 metros.

(a) Quantas voltas completas ele já deu?

(b) A quantos metros da posição de partida ele se encontra?

(c) Quantos metros faltam para completar mais uma volta?

Exemplo 3.8. ([41], p. 72**) (questão** 76**, Atividades/Tratando a informação)** Em certo jogo de videogame, para passar cada fase é necessário obter 65 pontos. Sabendo que Hélio conquistou, até certo momento do jogo, 570 pontos, responda às seguintes questões.

(a) Em que fase do jogo Hélio está?

(b) Quantos pontos são necessários para Hélio passar para a próxima fase?

(c) Sabendo que o jogo é composto de 18 fases, quantos pontos ainda são necessários para Hélio terminar todas as fases?

Exemplo 3.9. ([20], p. 69**) (questão** 5**, Exercícios)** Glaúcia fez compras na loja Compra Feliz e gastou 476 reais.

Figura 3.5: Figura apresenta na questão 5, Livro 5

Quantos cupons Glaúcia ganhou e quantos reais ela precisa gastar para receber um novo cupom?

O 4º CASO se diferencia do terceiro pois trata-se de questões contextualizadas. O objetivo é o mesmo, o resto é o resultado. Contudo nestas situações cada termo da divisão terá um significado dentro do contexto apresentado. Um exemplo que podemos citar é o que apresentamos no 2º CASO. Se ao invés de questionar quantos metros faltam para ele completar a pista, perguntássemos a quantos metros ele está da posição de partida, o resultado seria exatamente o valor do resto. Este é um exemplo que se encaixa neste caso, o 4º, mas que também se encaixa no 5º, como discutiremos a seguir, algumas situações do 5º caso se encaixam no 4º, e este é um exemplo. Contudo, como consideramos existir o 5º caso, pelos motivos explicitados na próxima análise, todos as situações que atenderem aos dois casos, serão apresentadas na tabela **apenas** no quinto caso. A seguir, também apresentaremos exemplos que se referem **apenas** ao quarto caso, observe:

Exemplo 3.10. ([13], p. 30) **(questão** 6**, Desafios e surpresas)** A luz percorre 300000 quilômetros a cada segundo. A distância entre o Sol e a Terra é de 150000000 de quilômetros.

(a) Quantos segundos a luz do Sol leva para chegar à Terra?

(b) Esse tempo corresponde a um certo número de minutos, mais alguns segundos. Quantos são esses minutos e segundos?

Exemplo 3.11. ([2], p. 61) **(questão** 7**, Vamos aplicar)** Calcule a quantidade de dias e de páginas. Débora deverá ler um livro de 267 páginas para fazer um trabalho de Arte. Ela pretende ler 17 páginas por dia até terminar o livro.

(a) Em quantos dias Débora terminará de ler o livro?

(b) Quantas páginas ela lerá no último dia?

Exemplo 3.12. ([27], p. 84) **(questão** 20**, Revisão cumulativa e testes)** A escola de Samba da Vila desfila com várias alas, contendo, cada uma, 45 pessoas. No carnaval passado, havia 749 canditados para desfilar nessa escola. Alguns deles não puderam desfilar nesse ano com a Samba da Vila por não terem conseguido formar uma ala com 45 integrantes. O número de pessoas que não puderam desfilar é:

(a) 29

(b) 2

(c) 20

(d) 1

Exemplo 3.13. ([22], p. 62) **(questão** 14**, Problemas)** Certa máquina empacota chicletes em cartelas com uma dúzia deles. Se você colocar 2416 chicletes na máquina, quantos sobrarão fora das cartelas?

O 5º CASO poderia ser classificado como um subcaso do 4º CASO, afinal a resposta é o resto. Entretanto, o classificamos como outro caso por dois motivos. Primeiro motivo: a ideia de deixar mesmo resto se difere, em sua essência, de simplesmente identificar o valor do resto e dar a solução da questão, há uma maior necessidade de analise e reflexão por parte do estudante para compreender e conseguir identificar a solução. Além disso em algumas situações é utilizada a ideia de deixar mesmo resto para encontrar a solução, que não necessariamente é o resto. Segundo motivo: queremos dar destaque a este caso, visto que um dos objetivos de nosso trabalho é propor a implementação de situações que envolvam a ideia de congruência em sua resolução no ensino fundamental. Principalmente questões que utilizam a ideia de deixar mesmo resto, mas que a resposta não é o resto. A diferença essencial entre casos que atendem a ideia de congruência de deixar mesmo resto é quando a situação pode ser descrita por meio da divisão euclidiana e o valor do quociente pode variar. São situações que normalmente há um ciclo que se repete. Podemos citar alguns exemplos, quando tratamos de dias da semana, a cada sete dias temos o mesmo dia da semana novamente; quando trabalhamos com situações envolvendo um pista, a cada volta completa teremos resto zero; e outras situações como por exemplo a da fita que a cada quatro cores há uma repetição das mesmas cores, na mesma ordem. Em nenhum dos livros didáticos identificamos questões que utilizam a ideia de congruência, de deixar mesmo resto, para determinar a solução, que não seja o valor do resto, como algumas questões que apresentaremos na seção de Sugestões de atividades do próximo capítulo.

Exemplo 3.14. ([13], p. 29) (questão 7, Pensando em casa) Uma corrida de 1500 metros será realizada numa pista que tem 400 metros. Os atletas darão um certo número de voltas e ainda percorrerão o trecho indicado em amarelo.

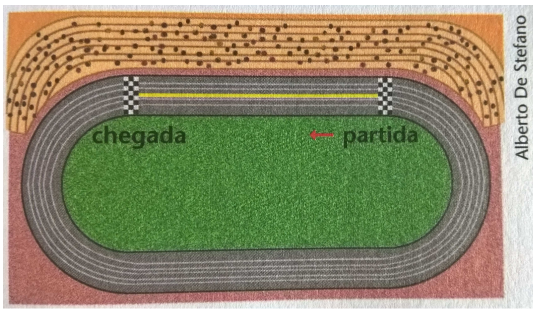

Figura 3.6: Figura apresenta na questão 7, Livro 1

(a) Quantas voltas completas cada atleta terá de dar?

(b) Quantos metros tem o trecho indicado em amarelo.

Exemplo 3.15. ([13], p. 34) (questão 9, Desafios e surpresas) Na divisão de um número natural por 15, o resto é 10.

(a) Dê três exemplos de divisões como essa.

(b) Quantas divisões se encaixam na situação apresentada?

Exemplo 3.16. ([22], p. 63) (questão 24, Problemas para casa) Este problema também é desafiador. Aqui, você está vendo somente o começo da fita. Ela tem 1000 partes e 6 cores que se repetem sempre na mesma ordem. Qual é a cor da última parte?

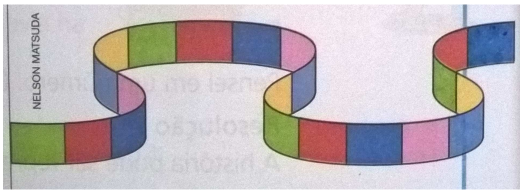

Figura 3.7: Figura apresenta na questão 24, Livro 3

O levantamento da presença destes casos nos livros didáticos foi organizado, e será apresentado na tabela a seguir. A primeira coluna indica cada um dos livros, e na primeira linha os casos identificados. A célula que associa um livro a um caso foi completada da seguinte maneira: se identificamos questões que atendem o caso, apresentamos na célula o número da questão, abreviada com a letra "q.", e a página do livro em que a questão se encontra, abreviada pela letra "p."; se não identificamos nenhuma questão com o caso, completamos a célula com um "não". Observe os dados obtidos na tabela que segue:

	1º caso	2º caso	3º caso	4º caso	5º caso
Livro 1	q.9, p.29	não	não	q.6, p.30	q.7, p.29, q.9, p. 34
Livro 2	q.4, p.58; q.7(a), p.61	q.1,2,3, p.61	não	q.7(b), p.61	não
Livro 3	q.*ex.*, p.60; q.21, p.63	não	não	q.14, p.62	q.24, p.63
Livro 4	q.1, p.64	q.1, 2, p.65	não	não	não
Livro 5	não	não	q.5, p.69	não	não
Livro 6	não	q.1, p.63	q.1(b), p.61	não	q.1(c), p.61
Livro 7	q.75, p.60	q.79, 80, p.62	não	não	não
Livro 8	q.86, p.78	q.68, p.74; q.83,84, p.78	não	q.79, 87, p.78; q.20, p.84	não
Livro 9	não	q.67, p.70; q.75, p.72	q.76, p.72	não	não

Existem situações que estão presentes em mais de um caso. Como na questão apresentada na seção anterior na explicação e análise da CARACTERÍSTICA 4, proposta no Livro 6 ([6], p. 61) (questão 1, Faça mais!), em que notamos a presença do 3º e do 5º caso. É interessante notarmos, que algumas das questões que trabalham com o resto são apresentados como desafios, o que nos revela que são questões que os autores acreditam requisitar uma reflexão maior por partes dos estudantes para alcançar o resultado. Observamos que apesar de não ser dado uma ênfase à questões em que o resto interfere no resultado e em que ele é o resultado, elas vem sendo propostas nos livros. Questões deste tipo, dos casos apresentados, colaboram com a reflexão dos alunos a medida que ele precisa definir quais estratégias adotar para obter o resultado. Mesmo quando as situações não são contextualizadas, como as do segundo caso, notamos esta necessidade de definir estratégias para alcançar a solução. Entretanto, ressaltamos o quanto é imprescindível que situações contextualizadas sejam propostas aos estudantes. A resolução de tais questões requer outros saberes, outras habilidades e competências.

No que se refere às questões que envolvem a ideia de congruência, observamos que ainda são pouco apresentadas. Apenas três dos nove livros analisados apresentaram questões envolvendo esta ideia. Ainda assim, notamos que as questões propostas são limitadas, com respeito as possibilidades que existem de se utilizar a ideia da congruência de deixar mesmo resto para elaborar questões. No próximo capítulo veremos alguns exemplos.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, nos propomos a apresentar sugestões de atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula. As questões sugeridas abaixo utilizam a ideia de congruência, ou seja, a ideia de deixar mesmo resto. Nossa proposta, é que as resoluções destas questões sejam realizadas utilizando apenas a divisão. Apesar de utilizar o algoritmo da divisão, questões que abordam a ideia de congruência, colaboram na construção de novas habilidades, a medida que é necessário que novos saberes sejam mobilizados, afim de atingir o resultado da questão. Em cada um dos cinco casos identificados na seção 3.2 , é necessário um saber distinto para alcançar a solução da questão. Diante da relevância das questões envolvendo a ideia de congruência, para o ensino da aritmética, como destacado na seção 2.2, vamos sugerir questões que podem ser aplicadas na quinta série (sexto ano) do ensino fundamental.

As questões serão apresentadas em duas seções, a primeira intitulada *Sugestões de atividades* e a segunda *Sugestão de investigação.* A primeira seção se refere àquelas questões que normalmente são apresentadas nos livros didáticos como "atividades" ou "exercícios". Na segunda seção vamos propor uma atividade que requer mais tempo e um maior acompanhamento do professor para que seja desenvolvida. Vale ressaltar que a proposta de nosso trabalho não é modificar o que vem sendo apresentado, e sim sugerir uma nova perspectiva que complemente. Inclusive sugerindo questões mais aprofundadas no tema, que mesmo de maneira "tímida", já vem sendo apresentado em alguns livros.

4.1 Sugestões de atividades

Nesta primeira seção, apresentaremos algumas sugestões de atividades que acreditamos que poderiam ser inseridas nos livros didáticos. São atividades que normalmente são denominadas como "atividades" ou "exercícios".São questões mais fechadas e pontuais. Entretanto, vale ressaltar que, de acordo com os diferentes tipos de atividades apresentadas em Ponte [38], as questões que aqui serão apresentadas, neste primeiro bloco, são *problemas*. Neste trabalho [38], o autor classifica as questões de matemática à partir de quatro dimensões básicas: dificuldade, estrutura, contexto referencial e tempo utilizado para resolução. Partindo das duas primeiras dimensões, o autor constroi o seguinte esquema, que podemos observar na figura 4.1:

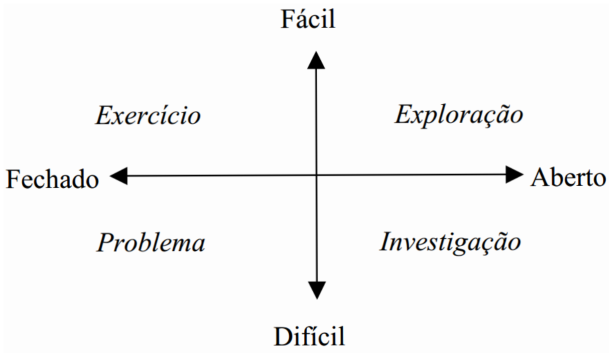

Figura 4.1: Esquema apresentado por Ponte [38]

Em análise ao trabalho de Ponte, Corradi destaca que,

> *Uma clara distinção entre problema e exercício é que o primeiro se trata de uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, ao passo que um exercício pode ser resolvido usando um método ou algoritmo já conhecido.*
>
> ([14], p. 168)

Diante do exposto, podemos classificar as questões que apresentaremos no primeiro bloco como *problemas*. Na resolução das questões que vamos propor, em sua grande maioria, as soluções são obtidas por meio do algoritmo da divisão. Entretanto, quando tais situações são apresentadas aos estudantes, a percepção do que deve ser realizado para que se obtenha o resultado não é imediata. Isto se deve a sua contextualização e, como Ponte [38] destaca, à estrutura e ao grau de dificuldade. Ou seja, o que queremos dizer é que, apesar da resposta ser obtida pelo algoritmo da divisão, compreender que é dessa maneira que obteremos a resposta não é tão simples. A seguir, apresentaremos as questões desta seção.

PRIMEIRA QUESTÃO: Sabendo que o primeiro dia deste ano de 2015 foi uma quinta-feira, determine daqui a quantos anos isso acontecerá novamente, ou seja, em que ano o primeiro dia será uma quinta-feira. (Lembre-se de que 2016 é ano bissexto).

Discussão da questão: Cada ano possui 365 dias, com exceção dos anos bissextos que possuem um dia a mais, ou seja, 366 dias. Queremos determinar se 1^o de janeiro de 2016 é uma quinta, para isso vamos determinar a quantidade de dias entre 1^o de janeiro de 2015 e 1^o de janeiro de 2016, dividir esta quantidade por 7, e se a divisão for exata, significa que 1^o de janeiro de 2016 é uma quinta feira. Por que isso acontece? Cada semana tem sete dias, ou seja, a cada sete dias é o mesmo dia da semana novamente. Então, para determinar que dia da semana será daqui a uma determinada quantidade de dias, basta dividir esta quantidade de dias por sete.

Pode surgir uma dúvida interessante no desenvolvimento da questão, que influenciará diretamente no resultado. O ano possui 365, então de 1^o de janeiro de 2015 até 31 de dezembro de 2015 são 365 dias. Algum estudante pode questionar que, do dia 1^o de janeiro de 2015 até o dia 1^o de janeiro de 2016 são 366 dias. Caso isso ocorra, deve haver uma mediação do professor. A situação pode ser explicada da seguinte maneira, se hoje é uma quinta, dia 1^o, daqui a sete dias será que dia? E neste momento é interessante que o estudante elabore a resposta, deixar que ele conte no dedo, ou construa uma pequena tabela, isso se a resposta não for imediata. De posse da resposta 8, fica claro que, a quantidade de dias de 1^o a 8 são oito dias, mas que a quantidade de dias transcorridos do dia 1^o até o dia 8 foram sete dias. Um exemplo claro é do dia 2 para o dia 3 passaram quantos dias? Apenas um, o dia três é o dia seguinte ao dia dois, e é essa quantidade que precisamos considerar para resolver nossas questões. Enfim, para determinar a quantidade de dias transcorridos, pegamos o valor final e subtraimos do inicial.

Voltando à questão, para determinar seu resultado, vamos descobrir a quantidade de dias entre o 1^o de janeiro de 2015 e os anos seguintes e dividir esta quantidade por 7. Quando encontrarmos o resto zero, significa que neste ano o primeiro dia vai ser em uma quinta-feira. Acompanhe a seguir os cálculos.

Solução: Primeiro verificaremos 1^o de janeiro de 2016 é uma quinta. Para isso vamos dividir 365 por 7, como podemos observar na figura 4.2.

$$\begin{array}{r|l} 365 & 7 \\ \cline{2-2} 15 & 52 \\ 1 & \end{array}$$

Figura 4.2: divisão de 365 por 7

Pela figura 4.2 verificamos que o dia 1^o de janeiro de 2016 não é uma quinta. Vamos então averiguar se 1º de janeiro de 2017 é uma quinta ou não. Do dia 1º de janeiro de 2015 até o dia 1º de janeiro de 2017, serão transcorridos os 365 dias do ano de 2015 mais os 366 dias do ano de 2016, então vamos somar os dias transcorridos, em seguida dividir o resultado por sete, acompanhe os cálculos na figura 4.3:

$$\begin{array}{r} 365 \\ +\,366 \\ \hline 731 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 731 & 7 \\ \cline{2-2} 031 & 104 \\ 3 & \end{array}$$

Figura 4.3: divisão de 731 por 7

Vamos continuar com o mesmo procedimento, até encontrar uma divisão em que o resto seja zero. Lembrando que a cada quatro anos temos ano bissexto, então adicionaremos 366 dias, e não 365. A seguir, apresentaremos os resultados na tabela. Na primeira coluna (C1) teremos o ano que estamos analisando. Na segunda coluna (C2), a quantidade de dias entre o ano de 2015 e o ano que estamos analisando. Na terceira coluna (C3), apresentaremos o valor do resto da divisão da quantidade de dias entre 2015 e o ano analisado (valor apresentado na segunda coluna) por sete. Observe os resultados:

C1	C2	C3
2016	365	1
2017	731	3
2018	1096	4
2019	1461	5
2020	1826	6
2021	2192	1
2022	2557	2
2023	2922	3
2024	3287	4
2025	3653	6
2026	4018	0

Então, pelo resultado expresso na tabela, podemos concluir que o próximo ano em que o primeiro dia do ano será uma quinta-feira, será 2026. Note que, em dado momento, alguns estudantes podem perceber durante a resolução que os restos vão aumentando de um em um, e no caso de ano bissexto, o resultado do ano seguinte será duas unidades a mais que o anterior. Se eles conseguirem chegar a esta conclusão, nem será necessário realizar mais as divisões.

SEGUNDA QUESTÃO ([30], p. 49) (questão 4, Sexta-feira 13): Qual o número máximo de sexta-feiras 13 que podem ocorrer num ano não bissexto? Neste caso, qual é o 10^{o} dia do ano?

Discussão sobre a questão: A ideia principal para a resolução desta questão é que, a cada sete dias retornamos ao mesmo dia da semana. Se, por exemplo, janeiro começa em uma terça, depois de sete dias será terça novamente, depois de mais sete dias será terça-feira novamente, e assim com todos os múltiplos de sete. Então se dividirmos a quantidade de dias entre 13 de janeiro e 13 de fevereiro por sete, poderemos determinar em que dia da semana o dia 13 de fevereiro cairá. Perceba, se a divisão da quantidade de dias por 7 for exata, ou seja, o resto zero, significa que o dia da semana é o mesmo. Se o resto for diferente de zero, é possível identificar o dia da semana pelo valor do resto. Por exemplo, se 13 de janeiro é uma terça-feira, pegamos a quantidade de dias entre 13 de janeiro e 13 de fevereiro, dividimos por 7 e encontramos resto 2, significa que 13 de fevereiro é uma quinta-feira. A cada sete dias é terça novamente, se dividi por 7 e sobrou 1 significa que chegou na terça novamente e sobrou um dia, ou seja, é quarta. Se divido por 7 sobra 2, significa que chegou na terça de novo e sobrou dois dias, ou seja, quinta-feira.

Contudo, o dia 13 de janeiro ser uma terça-feira é uma das possibilidades, afinal temos sete dias na semana, e como a questão não informou em qual dia da semana está o 13 de janeiro, então poderá ser qualquer uma das sete possibilidades. Desda forma a ideia é a seguinte, como o objetivo é determinar o máximo de sexta-feiras 13, vamos encontrar qual é o dia mais recorrente durante o ano, para tal, uma das possibilidades é observar a quantidade de dias entre o 13 de um mês e de outro e dividir por sete. Acompanhe a resolução da questão.

Solução (primeira pergunta): Entre o dia 13 de janeiro e 13 de fevereiro, são 31 dias. Então 13 de fevereiro ocorre três dias da semana depois do dia da semana de 13 de janeiro, observe:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array}$$

Figura 4.4: determinação do dia da semana de 13 de fevereiro

Já entre 13 de fevereiro e 13 de março, como o ano não é bissexto, serão 28 dias. Como queremos uma referência com relação ao dia 13 de janeiro, contaremos quantos dias foram transcorridos de 13 de janeiro até 13 de março. Ou seja, para saber com relação ao dia em que o 13 de janeiro caiu, o 13 de março vai cair em que dia, precisamos dividir por sete a quantidade de dias entre janeiro e março. Então, como podemos observar pelos cálculos, o 13 de março também será três dias semana depois do dia da semana de 13 de janeiro.

$$\begin{array}{r} 31 \\ +\ 28 \\ \hline 59 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 59 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 8 \end{array}$$

Figura 4.5: divisão dos dias entre 13 de janeiro e 13 de fevereiro

A ideia será a mesma para os outros meses. Vamos apresentar resumidamente todos os resultados na tabela a seguir. As linhas se referem aos meses. Na primeira coluna encontramos a abreviação entre os dois meses, na segunda coluna (C2), o intervalo de tempo que estamos considerando, de 13 de um dado mês a 13 de um outro mês. Na terceira coluna (C3), indicamos entre os dois meses apresentados na coluna anterior. Já na quarta coluna (C4), apresentamos a quantidade de dias entre janeiro e o último mês, dos dois apresentados na coluna dois. Por exemplo, na linha que trata de 13 de março a 13 de abril, na quarta coluna encontraremos o valor da quantidade de dias de 13 de janeiro a 13 de abril. E finalmente na quinta coluna (C5) apresentaremos a divisão deste total de dias, apresentado na quarta coluna, por sete.

C1	C2	C3	C4	C5
j-f	de 13 de janeiro a 13 de fevereiro	31	31	3
f-m	de 13 de fevereiro a 13 de março	28	59	3
m-a	de 13 de março a 13 de abril	31	90	6
a-m	de 13 de abril a 13 de maio	30	120	1
m-j	de 13 de maio a 13 de junho	31	151	4
j-j	de 13 de junho a 13 de julho	30	181	6
j-a	de 13 de julho a 13 de agosto	31	212	2
a-s	de 13 de agosto a 13 de setembro	31	243	5
s-o	de 13 de setembro a 13 de outubro	30	273	0
o-n	de 13 de outubro a 13 de novembro	31	304	3
n-d	de 13 de novembro a 13 de dezembro	30	334	5

Note que em três meses o dia 13 vai cair em um mesmo dia da semana, os dias 13 de fevereiro, 13 de março e 13 de novembro vão ser três dias da semana depois que o dia da semana que o 13 de janeiro. Ou seja, esta é a quantidade máxima de sexta-feiras 13 que podem ocorrer.

Solução (segunda pergunta): Devemos agora determinar qual é o 10^{o} dia do ano, ou seja, em que dia da semana cai o 10^{o} dia? Encontramos que as sexta-feiras 13 vão ser três dias da semana depois que o dia da semana que o 13 de janeiro. Então para que o dia 13 de fevereiro seja uma sexta-feira, o dia 13 de janeiro deve ser uma terça. Como a questão quer saber sobre o dia 10, este é três dias antes do dia 13 de janeiro, ou seja, sábado. Logo, podemos concluir que o 10^{o} dia é sábado.

A solução apresentada no banco de questões da OBMEP segue a mesma linha de raciocínio, contudo de maneira mais concisa, acompanhe a seguir:

Solução apresentada no banco de questões da OBMEP:

Dado que os dias da semana se repetem a cada 7 dias, então a diferença entre os dias da semana é dada pelo resto ao dividir por 7 o número de dias transcorridos. Na tabela seguinte temos:

- na primeira linha o número de dias entre o dia 13 de um mês e o dia 13 do mês seguinte;
- na segunda linha o resto quando dividimos esse número por 7;
- na terceira linha o resto quando dividimos por 7 o número de dias entre o 13 de janeiro e o 13 do mês correspondente, ou seja, é obtida somando os resultados obtidos na linha anterior desde janeiro até o mês correspondente e depois calculando o resto ao dividir por 7.

Os valores iguais na última linha, significam que nestes meses o dia 13 caiu no mesmo dia da semana. Em particular esta última linha nos diz que 13 de fevereiro, 13 de março e 13 de novembro correspondem ao mesmo dia da semana. Logo, temos no máximo três sexta-feiras treze. Nesse caso temos que 13 de janeiro ocorreu 3 dias antes de sexta-feira, isto é terça-feira e o dia 10 de janeiro aconteceu 3 dias antes, isto é, no sábado.

Observação: Note que a 6^{a}-feira 13 ocorre apenas quando o 1^{o} dia do mês é um domingo. Assim, uma outra maneira, talvez mais simples, de resolver o problema é determinar o

J-F	F-M	M-A	A-M	M-J	J-J	J-A	A-S	S-O	O-N	N-D
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2
3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Figura 4.6: Tabela apresentada na resolução da questão 4, Sexta-feira 13

número máximo de vezes em que o 1º dia do mês é um domingo num ano não bissexto.

TERCEIRA QUESTÃO ([31], p. 5) (questão 26, Ano bissexto): Um ano comum tem 365 dias e um ano bissexto, 366 dias. O ano bissexto, quando o mês de fevereiro tem 29 dias, ocorre a cada quatro anos.

(a) Com frequência dizemos "Um ano comum tem 52 semanas". Será correta essa afirmação? E para um ano bissexto? Justifique suas respostas.

(b) Se um ano comum inicia numa terça-feira, então o ano seguinte iniciará em qual dia da semana?

(c) Responda a pergunta anterior para um ano bissexto.

Resolução apresentada no banco de questõe da OBMEP:

(a) Uma semana tem sete dias. Na divisão de 365 por 7 encontramos quociente 52 e resto 1. Logo, o ano comum tem 52 semanas e 1 dia. Portanto, a frase correta é "O ano comum tem sete semanas e um dia". Como o ano bissexto tem 366 dias, ele possui 52 semanas e 2 dias. Portanto, o correto é dizer "O ano bissexto tem sete semanas e dois dias".

(b) Se um ano comum inicia numa terça-feira, então a sua 52ª semana inicia numa terça e termina numa segunda, ou seja, a 52ª semana é dada por terça - quarta - quinta - sexta - sábado - domingo - segunda. Como esse ano tem 52 semanas e mais 1 dia, o último dia deste ano será uma terça. Logo, o ano seguinte iniciará numa quarta.

(c) No caso do ano bissexto, devemos considerar um dia a mais do que no item anterior. Logo, o seu último dia será uma quarta e, portanto, o ano seguinte iniciará numa quinta-feira.

Solução alternativa para a letra (b): Poderíamos resolver esta alternativa utilizando o mesmo médoto da primeira questão e da segunda questão. Ou seja, entre o primeiro dia de um ano e o primeiro dia do ano seguinte temos 365 dias, caso o ano não seja bissexto, então basta dividir por sete que o valor do resto da divisão nos dirá que dia da semana será o primeiro dia do ano seguinte. Na questão um ano inicia na terça, então entre este dia e o primeiro dia do ano seguinte temos 365 dias, então realizando a divisão de 365 por 7, como já apresentado em questão anterior, o quociente será 52 e o resto 1, o que significa que é a terça mais um dia, ou seja é uma quarta feira.

QUARTA QUESTÃO: A cada 5 anos, leitores apaixonados se reunem para trocar livros e compartilhar as experiências das leituras realizadas. No último encontro, comparecem 357 leitores! Este encontro foi em 2014, e ele já existe a 100 anos. Com base nessas informações, responda.

(a) No ano 1987 houve esse encontro?

(b) Considerando que esse encontro continuará acontecendo durante muitos anos, ele acontecerá no ano de 2079?

Discussão da questão: Essencialmente podemos resolver a questão de duas maneiras. A primeira é dividir o 2014 por 5 e ver qual é o seu resto, e para que o encontro tenha ocorrido em 1987, a divisão desse número por 5 também deve dar o mesmo resto que o enontrado na divisão que acabamos de citar. Entretanto, esta ideia está muito ligada com o conceito de congruência, que precisamos lembrar que não será trabalhado com os estudantes da quinta série (sexto ano). Então vamos a segunda proposta de resolução. Como o encontro acontece de 5 em 5 anos, vamos calcular quantos anos temos entre 1987 e 2014, e dividir por 5. Se a divisão for exata, significa que em 1987 houve encontro. De maneira bem informal, a ideia é que eu estou partindo do 1987 e "andando" de cinco em cinco para ver se "chego" no 2014, para não precisar fazer essa soma, faço a divisão. Se a divisão dá exata, significa que "andei" de cinco em cinco e não sobrou nada. Se a divisão não dá exata, significa que "andei" de cinco em cinco, mas não "cheguei" no 2014. Esta ideia pode também ser utilizada como se estivesse voltando de cinco em cinco anos para ver se chega no ano de 1987. Utilizaremos a mesma linha de raciocínio para a resolução da letra (b). Observe a seguir.

Solução:

(a) Primeiro vamos determinar a quantidade de dias entre 1987 e 2014.

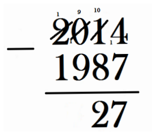

Figura 4.7: determinação da quantidade de anos entra 1987 e 2014

Em seguida vamos dividir essa quantidade por cinco, para observar se houve ou não o encontro.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

Figura 4.8: divisão de 27 por 5

Como houve resto diferente de zero, podemos então concluir que no ano de 1987 não houve encontro.

(b) A linha de raciocínio é a mesma da letra (a). Inicialmente vamos determinar quantos anos tem entre 2014 e 2079. Em seguida, calcular se o resultado dividido por 5. Então, entre 2014 e 2079 temos 65 anos. Esse valor dividido por cinco apresenta quociente 13 e resto 0. Ou seja, se o encontro continuar acontecendo, em 2079 haverá mais uma edição do encontro.

QUINTA QUESTÃO ([46]), p. 53) (questão apresentada na introdução da reportagem): Este ano, 2012 é bissexto, pois fevereiro tem 29 dias. Esse fenômeno ocorre a cada 4 anos. É possível dizer se 1982 foi bissexto? E 2024?

Discussão sobre a questão: A linha de raciocínio é exatamente a mesma da quarta questão, a diferença é que na quarta questão o período de acontecimento do encontro era de cinco em cinco anos, e aqui o período é de quatro em quatro anos. Observe a solução.

Solução da primeira pergunta: Vamos determinar a quantidade de anos entre 1982 e 2012, ou seja, 2012 - 1982 = 30. Esse valor dividido por 4 resultará em 7 e terá como resto 2. Ou seja, podemos concluir que 1982 não foi um ano bissexto.

Solução da segunda pergunta: Vamos determinar a quantidade de anos entre 2012 e 2024, ou seja, 2024 - 2012 = 12. Esse valor dividido por 4 resultará em 3 e terá como resto 0. Ou seja, podemos concluir que 2024 será um ano bissexto.

SEXTA QUESTÃO ([19]), p. 4) (questão apresentada na introdução do artigo): Você pode dizer se o 264º e o 118º dias do ano ocorrem num mesmo dia da semana?

Solução: Assim como na quarta questão, poderíamos verificar se os dois valores são côngruos à 7. Entretanto, pensando no trabalho com a quinta série, vamos aplicar a mesma ideia utilizada nas questões anteriores. Entre o 118º dia e o 264º dia, temos 146 dias. Esse valor dividido por 7 resulta no quociente 20 e tem como resto 6. Ou seja, eles não ocorrem em um mesmo dia da semana.

Com este resultado ainda poderíamos determinar uma relação entre o dia da semana do 118º dia e o 264º. Por exemplo, se a questão informasse que o 118º dia é uma sábado, e solicitasse que dia da semana é o 264º, bastaria observar o valor do resto. O 264º dia cairá seis dias depois do sábado, ou seja, será uma sexta-feira. De maneira informal, o 118º dia irá de sábado em sábado (de sete em sete dias), até chegar no 258º dia, depois percorrerá mais seis dias para chegar ao 264º dia, ou seja, seis dias depois de sábado será uma sexta.

SÉTIMA QUESTÃO ([18]), p. 31) (questão baseada na introdução do artigo): A cena é bastante comum. Ao ter que escolher entre um laço de fita azul ou vermelha para colocar no cabelo, a menina começa a recitar em voz alta: Ma-mãe man-dou eu es-co-lher es-ta da-qui, mas co-mo sou que-ri-da vou es-co-lher es-ta da-qui! Apontando o dedo alternadamente para o laço azul e para o vermelho ao ritmo cadenciado das sílabas. O laço escolhido é aquele apontado por último. Será que essa escolha, realmente foi aleatória? A recitar a cantiga, a menina aponta alternadamente para as duas fitas. Como a quantidade de sílabas da cantiga é 27, então a menina escolhe a primeira fita, pois 27 é ímpar, ou seja, deixa resto 1 quando dividido por 2. De um modo geral, a fita escolhida será sempre a primeira, caso o número de objetos seja dois. E se ela utilizar o método do "mamãe mandou..." com 5 objetos, qual deles seria o escolhido? O 1^o, 2^o, 3^o, 4^o ou 5^o?

Discussão sobre a questão: O mais interessante desta questão, no nosso ponto de vista, é fornecer aos estudantes a possibilidade de perceber que a matemática está presente em situações do nosso cotidiano que nem imaginaríamos que ela poderia estar. A ideia de resolução desta questão já está expressa em seu enunciado, acreditamos que a mediação do professor seja em colaborar com a compreensão do enunciado, caso haja dúvidas.

Solução: Como são cinco objetos, temos que a cada 5 sílabas cantadas, a menina estará no quinto objeto. Então para determinar em qual objeto ela estará no final da cantiga, vamos pegar o total de sílabas e dividir por cinco. O resto indicará em qual objeto ela parou.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{27} & \mathbf{5} \\ \cline{2-2} \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{array}$$

Figura 4.9: Divisão de 27 por 5

Pelo resultado, podemos concluir que ela parou no segundo objeto. Independente de quais sejam os objetos, sempre que ela estiver utilizando o método do "mamãe mandou..." para escolher entre cinco objetos, o resultado será sempre o segundo objeto.

OITAVA QUESTÃO ([29], p. 56) **(questão** 1, **2^a lista):** A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura (4.10). A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118 ?

A resolução apresentada no banco de questões deixa bem clara a ideia de congruência, acompanhe.

Resolução apresentada no banco de questõe da OBMEP: Observe que são 8 fios de apoio que a aranha utiliza, numerados a partir do fio A iniciando com 0. Logo:

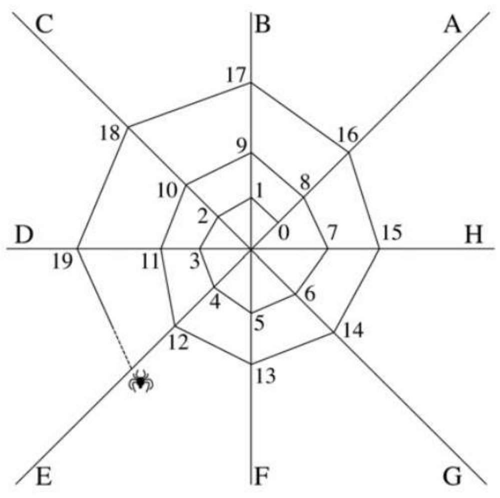

Figura 4.10: Figura apresentada na questão 1, 2ª lista

- sobre o fio A aparecem os múltiplos de 8
- sobre o fio B aparecem os (múltiplos de 8) + 1
- sobre o fio C aparecem os (múltiplos de 8) + 2
- sobre o fio D aparecem os (múltiplos de 8) + 3
- sobre o fio E aparecem os (múltiplos de 8) + 4
- sobre o fio F aparecem os (múltiplos de 8) + 5
- sobre o fio G aparecem os (múltiplos de 8) + 6
- sobre o fio H aparecem os (múltiplos de 8) + 7

Na divisão de 118 por 8 encontramos resto 6 , o que significa que 118 = (múltiplo de 8) + 6. Portanto, 118 está sobre o fio G.

Resolução utilizando apenas o algoritmo da divisão: Podemos ainda pensar a resolução da seguinte maneira. A cada volta completa, que passa por oito pontos, a aranha volta para o fio "A". Ou seja, se dividirmos o valor total das voltas por oito, encontraremos no quociente o total de voltas completas que a aranha deu e no resto por quantos fio a mais ela caminhou. Acompanhe os cálculos:

Ou seja, ela deu 14 voltas completas e caminhou por mais 6 fios. Portanto, ela vai parar no fio G.

$$\begin{array}{r|l} 118 & 8 \\ \cline{2-2} 38 & 14 \\ 6 & \end{array}$$

Figura 4.11: Divisão de 118 por 8

NONA QUESTÃO ([33], p. 80) **(questão** 20**, Contando chocolates):** João possui mais que 30 e menos que 100 chocolates. Se ele organizar os chocolates em linhas de 7, sobrará um. Caso ele os organize em linhas de 10, sobrarão 2. Quantos chocolates ele possui?

Solução apresentada no banco de questões da OBMEP: Na primeira organização, sendo x o número de linhas, o número de chocolates de João é da forma 7x +1. Na segunda organização, sendo y o número de linhas, o número de chocolates de João será 10y +2. Ou seja, o número de chocolates de João deixa resto 1 na divisão por 7 e resto 2 na divisão por 10. No intervalo entre 30 e 100, existem 7 números que deixam resto 2 por 10: 32, 42, 52, 62, 72, 82 e 92. Dentre esses números, apenas um deixa resto 1 na divisão por 7: 92. Portanto, o número de chocolates de João é 92.

DÉCIMA QUESTÃO ([31], p. 105) **(questão 7, Siga a pista):** Na pista de corrida dada, os sete pontos de referência são marcados a cada 50 m. Os atletas devem fazer 2 km no sentido indicado pela flecha, partindo do ponto P. Marque o ponto C de chegada.

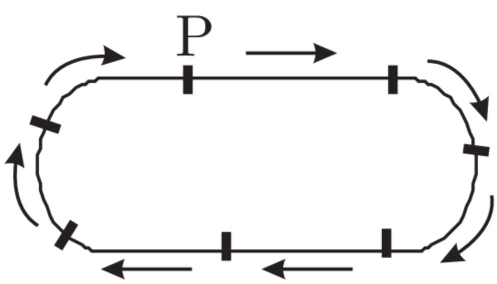

Figura 4.12: Figura apresentada na questão 7, Siga a pista

Discussão sobre a questão: A ideia desta questão é similar à da oitava questão, em que a aranha após percorrer determinar quantidade de fios voltava para o mesmo ponto. A pista tem no total 350 metros, se o atleta parte do ponto P, a cada 350 metros percorridos ele volta para o ponto P. Contudo, a análise do resto desta questão deve ser feita com mais cuidado, visto que cada ponto está distante 50 metros do anterior. Então, após dividir o total percorrido por 350, o resto ainda deverá ser dividido por 50 para encontrarmos quantos pontos mais o atleta percorreu. Vamos aos cálculos!

Solução: Primeiro precisamos determinar quantos metros os atletas percorrerão, visto que esta informação foi dada em quilômetros. Realizando esta transformação de km para metros, basta multiplicar por 1000. Logo de 2 km encontraremos 2000 metros. Em seguida, precisamos determinar a quantidade total de metros que a pista possui. Como a distância entre dois pontos é de 50 metros e temos sete destes espaços, podemos determinar o valor que a pista posusi pela conta 50 x 7 = 350, ou seja, a pista possui 350 metros no total.

Para encontrar o ponto C solicitado, vamos dividir o total que deve ser percorrido pelo valor de uma volta completa, dividir 2000 por 350, como podemos observar a seguir

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 350 \\ \cline{2-2} 250 & 5 \end{array}$$

Figura 4.13: Divisão de 2000 por 350

Do resultado podemos concluir que os atletas vão dar seis voltas completas, e ainda percorrerão mais duzentos metros. Como cada ponto está a 50 mestros de distância do anterior, vamos dividir 250 por 50 para determinar quantos pontos o atleta percorrerá após o ponto P.

$$\begin{array}{r|l} 250 & 50 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

Figura 4.14: Divisão de 250 por 5

Note que este resultado pode também ser determinado acrescentando de 50 em 50, partinto do ponto P, até chegar nos 250 metros. De qualquer maneira, encontraremos a seguinte posição para o ponto C:

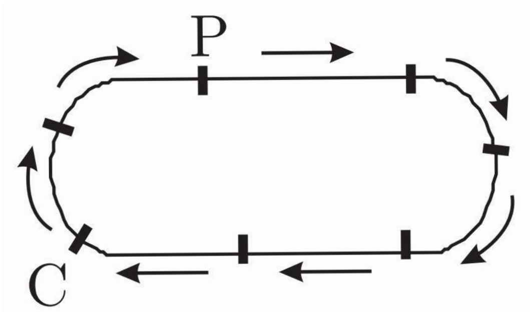

Figura 4.15: Pista com o ponto C marcado

DÉCIMA PRIMEIRA QUESTÃO ([32], p. 12) **(questão** 12**, Correndo na medida certa):**

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.

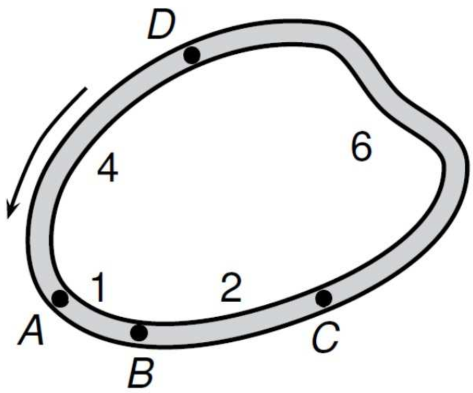

Figura 4.16: Figura apresentada na questão 12, Correndo na medida certa

Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução apresenta no banco de questões da OBMEP:

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão 1km + 2km + 6km + 4km = 13km. Por isso, para percorrer 14km é preciso dar uma volta completa e percorrer mais 1km. A única forma de percorrer 1km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

(b) Como 100 = 7 x 13 + 9, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9km. A única forma de percorrer 9 km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "dar uma certa quantidade de voltas" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "distância restante". Do ponto de vista matemático, esse procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13, ou seja, a escrever dividendo (comprimento da corrida) = 13 (divisor) x quociente (número de voltas) + resto (distância restante), sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Por inspeção direta podemos verificar como realizar corridas com qualquer extensão de 1km a 13km. Os resultados estão dispostos na seguinte tabela:

Extensão em km	**Ponto de partida**	**Ponto de chegada**
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
11	C	B
12	B	A
13	**Qualquer um**	**O mesmo da partida**

Figura 4.17: Tabela apresentada na questão 12, Correndo na medida certa

Vejamos agora que é possível realizar corridas com qualquer comprimento inteiro maior do que 13km. Para isso basta ver que temos duas possibilidades:

(1) Primeiro caso: a extensão é um múltiplo de 13km. Nesse caso, basta escolhermos qualquer posto e então realizarmos uma corrida que começa e termina nesse posto dando o número de voltas completas que é o quociente entre a extensão da corrida e 13.

Por exemplo, se a extensão da corrida é de 208km = 16 x 13 km, basta dar 16 voltas completas na pista.

(2) Segundo caso: a extensão não é um múltiplo de 13km. Nesse caso, calculamos o quociente e o resto da divisão da extensão da corrida por 13. O resto será um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. A tabela acima fornece os postos de partida e de chegada da corrida. O número de voltas será igual ao quociente.

Por exemplo, se a extensão da corrida é 109km = (8 x 13 + 5)km, ela deve começar no posto D, dar 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorrer o trecho de D a B.

4.2 Sugestão de investigação

Existe a possibilidade de elaborarmos questões com maior contextualização do tema. Para tal, é necessário uma proposta diferente daquelas que, em geral, são apresentadas nos livros didáticos, questões com um breve enunciado e em seguida a proposição indicando o que deve ser apresentado como solução. Apresentaremos neste bloco uma proposta de atividade, que requer mais tempo para implementação. Dentre os tipos de atividades apresentadas por Ponte [38], citadas no início desta seção, acreditamos que ela se configura como uma *investigação*.

A atividade, trata da criptografia. A proposta é apresentar uma breve contextualização do tema, para que os estudantes compreendam o significado desta palavra e conheçam um pouco sobre o tema. O intuito nesta etapa é que cada estudante receba uma folha contendo a atividade. No primeiro momento, sentados em grupo realizarão a leitura e a discussão sobre o tema. Quando chegarem à parte da atividade que apresenta a proposta do código, talvez eles não compreendam e solicitem o auxilio do(a) professor(a) para explicar. Caso muitos estudantes solicitem esta ajuda, cabe ao docente iniciar um momento coletivo e explicar a toda turma a ideia do código, e como codificar uma mensagem. Como citado, é importante que cada estudante tenha em mãos sua folha contendo a atividade, pois ela vai auxiliá-lo a elaborar e contruir seu código em casa. A seguir descreveremos com detalhes a atividade que será entregue aos estudantes.

ATIVIDADE: Descifre a mensagem

"Criptografia (Do Grego kryptós, "escondido", e gráphein, "escrita") é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais a informação pode ser transformada da sua forma original para outra ilegível, de forma que possa ser conhecida apenas por seu destinatário (detentor da "chave secreta"), o que a torna difícil de ser lida por alguém não autorizado. Assim sendo, só o receptor da mensagem pode ler a informação com facilidade. É um ramo da Matemática. Uma informação não-cifrada que é enviada de uma pessoa (ou organização) para outra é chamada de "texto claro" (plaintext). Cifragem é o processo de conversão de um texto claro para um código cifrado e decifragem é o processo contrário, de recuperar o texto original a partir de um texto cifrado. De fato, o estudo da criptografia cobre bem mais do que apenas cifragem e decifragem. É um ramo especializado da teoria da informação com muitas contribuições de outros campos da matemática e do conhecimento, incluindo autores como Maquiavel, Sun Tzu e Karl von Clausewitz. A criptografia moderna é basicamente formada pelo estudo dos algoritmos criptográficos que podem ser implementados em computadores.

O chamado "Codificador de Júlio César" ou "Cifra de César" que apresentava uma das técnicas mais clássicas de criptografia, é um exemplo de substituição que, simplesmente, substitui as letras do alfabeto avançando três casas. O autor da cifragem trocava cada letra por outra situada a três posições à frente no alfabeto. Segundo o autor, esse algoritmo foi responsável por enganar muitos inimigos do Império Romano; no entanto, após ter sido descoberta a chave, como todas, perdeu sua funcionalidade."

(Disponível em < https://pt.wikipedia.org/wiki/Criptografia >) [48]

Vamos criar um código para transmitir mensagens aqui na nossa turma? Nosso código vai ser formado por números. Cada número, que corresponde a uma letra da nossa mensagem, vai ser separada por um ponto e o código referente a cada palavra por um tracinho. Para decifrar o código vamos pegar o número da mensagem e dividir por 26, o resto desta divisão será o valor que deve ser olhado na tabela, para identificarmos por qual letra substituir. O interessante é que como existem infinitos números que dividido por 26 deixam o mesmo resto, a mesma mensagem pode ser transmitida de várias maneiras diferentes! Vamos observar a tabela com os números correspondentes a cada letra do alfabeto:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Vamos ver um exemplo de como decifrar um código? Imagine que você recebeu o seguinte código:

79.65.119-27-74.87.108.27

Como nos foi orientado, vamos dividir cada valor do código por 26, o resto desta divisão vai nos fornecer o valor que devemos olhar na tabela para encontrar a letra para substituir no código. Acompanhe os cálculos:

NÚMERO 79 $\rightarrow$ dividindo 79 por 26 encontramos quociente 3 e resto 1. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 1 está a letra **A**.
Logo, a letra associada ao número 79 será **A**

NÚMERO 65 $\rightarrow$ dividindo 65 por 26 encontramos quociente 2 e resto 13. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 13 está a letra **M**.
Logo, a letra associada ao número 65 será **M**

NÚMERO 119 $\rightarrow$ dividindo 119 por 26 encontramos quociente 4 e resto 15. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 15 está a letra **O**.
Logo, a letra associada ao número 119 será **O**

NÚMERO 27 $\rightarrow$ dividindo 27 por 26 encontramos quociente 1 e resto 1. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 1 está a letra **A**.
Logo, a letra associada ao número 27 será **A**

NÚMERO 74 $\rightarrow$ dividindo 74 por 26 encontramos quociente 2 e resto 22. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 22 está a letra **V**.
Logo, a letra associada ao número 74 será **V**

NÚMERO 87 $\rightarrow$ dividindo 87 por 26 encontramos quociente 3 e resto 9. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 9 está a letra **I**.
Logo, a letra associada ao número 87 será **I**

NÚMERO 108 $\rightarrow$ dividindo 108 por 26 encontramos quociente 4 e resto 4. Voltando

na tabela, encontramos que associado ao resto 4 está a letra **D**.
Logo, a letra associada ao número 108 será **D**

NÚMERO 27 $\rightarrow$ dividindo 27 por 26 encontramos quociente 1 e resto 1. Voltando na tabela, encontramos que associado ao resto 1 está a letra **A**.
Logo, a letra associada ao número 27 será **A**

Assim decodificamos o código que nos foi transmitido, e a mensagem encontrada foi

AMO A VIDA

Agora vamos aprender como contruir um código? Vamos considerar a mensagem que acabamos de decodificar:

AMO A VIDA

Para construir o código, vamos considerar a divisão em sua forma Euclidiana:

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \; . \; \text{quociente} + \text{resto}$$

Para atribuir um código a cada letra da nossa mensagem será fácil! Para cada letra de nossa mensagem, observemos que o divisor será sempre 26 e que o resto será determinado pela tabela. O valor do quociente será por livre escolha de cada um de nós. Lembra que falamos que poderíamos encontrar vários códigos para a mesma mensagem? O código que ficará na mensagem vai ser o valor do dividendo que vamos descobrir, observe:
PARA ENCONTRAR A LETRA "A":
Bom, o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "A" o resto deve ser 1; vou **escolher** o número 3 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana teremos:
dividendo = divisor . quociente + resto
código $= 26.3 + 1$
código $= 78 + 1$
código $= 79$
Logo, a informação do código referente a letra **A** será: 79

Vamos determinar então o código das outras letras:
LETRA M $\rightarrow$ o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "M" o resto deve ser 13; vou **escolher** o número 2 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana:
dividendo = divisor . quociente + resto
código $= 26.2 + 13$
código $= 52 + 13$
código $= 65$

Logo, a informação do código referente a letra **M** será: 65

LETRA O $\rightarrow$ o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "O" o resto deve ser 15; vou **escolher** o número 4 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana:
dividendo = divisor . quociente + resto
código $= 26.4 + 15$
código $= 104 + 15$
código $= 119$
Logo, a informação do código referente a letra **O** será: 119

Já escolhemos um código referente a letra A, mas como dissemos, podemos encontrar infitos códigos para a mesma letra, então para essa segunda letra A vou escolher outro quociente, na última, vou repeti o mesmo código que encontrei no início.
LETRA A $\rightarrow$ o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "A" o resto deve ser 1; vou **escolher** o número 1 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana:
dividendo = divisor . quociente + resto
código $= 26.1 + 1$
código $= 26 + 1$
código $= 27$
Logo, a informação do código referente a letra **A** será: 27

LETRA V $\rightarrow$ o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "V" o resto deve ser 22; vou **escolher** o número 2 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana:
dividendo = divisor . quociente + resto
código $= 26.2 + 22$
código $= 52 + 22$
código $= 74$
Logo, a informação do código referente a letra **V** será: 74

LETRA I $\rightarrow$ o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "I" o resto deve ser 9; vou **escolher** o número 3 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana:
dividendo = divisor . quociente + resto
código $= 26.3 + 9$
código $= 78 + 9$

código = 87
Logo, a informação do código referente a letra **I** será: 87

LETRA D $\rightarrow$ o divisor deve ser sempre 26; como a letra é "D" o resto deve ser 4; vou **escolher** o número 4 como quociente, então substituindo esses valores na divisão euclidiana:
dividendo = divisor . quociente + resto
código = $26.4 + 4$
código = $104 + 4$
código = 108
Logo, a informação do código referente a letra **D** será: 108

Como já escolhemos dois códigos diferentes para a letra A, vamos escolher um dos dois. Para a última letra A vamos colocar o código 27.

E então construimos nosso código, ele será

79.65.106-27-74.87.108.27

Agora é a sua vez!

PRIMEIRA MISSÃO: Considere a mesma mensagem que usamos no exemplo (AMO A VIDA) e construa um novo código para ela. Lembre-se que é possível construir infinitos códigos, basta escolher um quociente diferente.

SEGUNDA MISSÃO: Escolha uma mensagem e a codifique. Na próxima aula entregue seu código e os cálculos realizados para codificá-lo ao(a) professor(a).

TERCEIRA, E ÚLTIMA MISSÃO: Você vai receber do(a) professor(a) um código, contruido por algum colega de sala. Sua missão é decodificar o código. Entregue ao professor (a professora) a mensagem encontrada e os cálculos que você realizou para decodificar o código recebido.

SUCESSO EM SUAS MISSÕES!

Capítulo 5

Conclusão

Diante das discussões realizadas, vamos elencar algumas considerações finais. Com base no referencial teórico estudado, verificamos que ainda há um grande défict do conhecimento da divisão, e assim sendo, a relevância de refletir acerca de propostas didáticas que favoreçam a aprendizagem deste conteúdo.

Com a análise dos dados coletados nos livros didáticos, notamos que apesar de não haver um destaque, os livros tem apresentado questões em que o resto interfere de alguma maneira no resultado. Inclusive, em alguns exemplares encontramos questões utilizando a ideia de congruência. Entretanto, a abordagem do conteúdo ainda ocorre de maneira limitada, não contemplando todas as ideias associadas à divisão que são propostas nos PCN.

No que se refere a análise das questões dos livros didáticos, classificamos as questões em que o resto interfere de alguma maneira no resultado, em cinco casos. Entretanto, nenhum dos livros contemplou os cinco casos identificados em nossa análise. Acreditamos que é importante que os estudantes tenham a oportunidade de trabalhar com todos os casos que identificamos na seção 2.2. Consideramos que, cada um deles requer um tipo de raciocínio para se obter as respostas. Propor aos estudantes questões que exigem raciocínios distinto favorece à construção do sujeito crítico, a medida que ele precisa refletir e elaborar estratégias de como resolver o problema.

No capítulo que apresenta as sugestões de atividades notamos que há uma vasta gama de possibilidades de elaboração e construção de atividades que utilizam a ideia de congruência. E pelas resoluções apresentadas observamos a viabilidade de implementação destas atividades na quinta série (sexto ano).

No que se refere a possibilidades de investigações futuras, no desenvolvimento do trabalho, refletimos sobre o quanto algumas etapas são relevantes para uma aprendizagem efetiva e significativa do algoritmo da divisão. Acreditamos existir três etapas essenciais que colaboram e interferem diretamente na aprendizagem do algoritmo, que é estremamente abstrato para o estudante da quinta série. Pensamos em três etapas: manipulação, registro e resolução do algoritmo. Entendemos que, para afirmar que tais etapas de fato interferem na aprendizagem do algoritmo da divisão, se faz necessário realizar uma pesquisa acompanhando grupos de estudantes que vivenciam tais etapas, e grupos de estudantes que não as vivenciam, para, analisando os dados coletados, averiguar se realmente há uma colaboração para a aprendizagem. Pela descrição, é possível notar que tal pesquisa levaria alguns anos, pois, para averiguar se de fato tais etapas colaboram com a aprendizagem, haveria a necessidade de acompanhar estudantes vivendo ou não as etapas citadas em seus respectivos níveis cognitivos. Por exemplo, a etapa de manipulação deve ser vivenciada na Educação infantil, a etapa de registros no início das séries iniciais, e a etapa de introdução ao algoritmo no final das séries iniciais. Vale ressaltar que as séries iniciais compreende do 1º ao 5º ano.

Como uma continuidade desta pesquisa, acreditamos que seja interessante que as questões propostas neste trabalho sejam implementadas com estudantes do ensino fundamental, até mesmo com intuito de verificar se de fato estas podem contribuir para a aprendizagem do algoritmo da divisão e se favorece a construção do sujeito crítico.

Referências Bibliográficas

[1] ———- . Ministério da Educação. **Manual do pacto: Pacto pela Alfabetização na Idade Certa: o Brasil do futuro com o começo que ele merece**. Brasília, DF, 2012.

[2] ———- . **Projeto Araribá: Matemática**. 6º ano. 2. ed, São Paulo. Moderna, 2007.

[3] ———- . **Projeto Araribá: Matemática**. 6º ano. 3. ed, São Paulo. Moderna, 2010.

[4] AGRANIONIH, N. T.; ENRICONE, J. R. B; ZATTI, F.. Dificuldades no cálculo de divisão na 5ª série do ensino fundamental. **In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, *X*. 2009, Rio Grande do Sul.

[5] BIANCHINI, E. **Matemática**. 6º ano. 7. ed. São Paulo. Moderna, 2011.

[6] BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A.. **Matemática: fazendo a diferença**. 6º ano / 5ª série. São Paulo. FTD, 2006.

[7] BORGES, C. C.. Conversas sobre o ensino da matemática. **Folhetim de Educação Matemática**. Feira de Santana. Ano 14, n. 143. Abr, 2008.

[8] BOYER, C. B. **Historia da matematica**. 2. ed, Sao Paulo. Edgard Blucher, 1996. 496*p*.

[9] BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Apresentação**. Brasília: MEC, SEB, 2014.

[10] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Secretatira de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.

[11] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º e 2º ciclos do ensino fundamental)**. v. 3. Brasília: MEC, 1997.

[12] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 1998.

[13] CENTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática: teoria e contexto**. 6º ano. 1. ed, São Paulo. Saraiva, 2012.

[14] CORRADI, D. K. S. Investigações Matemáticas **Revista de Educação Matemática da UFOP**. Volume I, XI Semana de Matemática e III Semana da Estatística, 2011. ISSN 2237 − 809X.

[15] COUTINHO, S. C. **Números Inteiros e Criptografia RSA**, Rio de Janeiro, IMPA, 2013, 226 páginas(Coleção Matemática e Aplicações)

[16] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo, Atual, 1991.

[17] FERNANDES, E. Passagem segura. **Nova escola**, $n°257$, $p.42 - 49$, novembro 2012.

[18] FILHO, A. A. D. "Mamãe mandou...", números aleatórios e restos da divisão. **Revista do Professor de Matemática**, $n°74$, $p.31 - 34$, 2011.

[19] FREIRE, B. T. V. Congruência, divisibilidade e adivinhações. **Revista do Professor de Matemática**, $n°22$, $p.4 - 10$, 1992.

[20] GIOVANNI, J. R.;GIOVANNI, J. **A conquista da Matemática**. 6º ano / 5ª série. Edição renovada, São Paulo. FTD, 2007.

[21] HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2. ed, Rio de Janeiro. SBM, 2011. 176*p*.

[22] IMENES, L. M.; LELLIS, M.. **Matemática: Imenes e Lellis**. 6º ano. 2. ed, São Paulo. Moderna, 2012.

[23] LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e algebra para o século XXI**. Campinas, São Paulo. Papirus, 1997 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

[24] LORENSATTI, E. J. C. Aritmética: um pouco de história. **In: ANPED SUL Seminário de pesquisa em educação da região Sul**, n. IX, 2012, Caxias do Sul.

[25] MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo horizonte, CAED, 2013.

[26] MORENO, A. C.; GUILHERME, P..**'Nobel' de matemática contrasta com baixo índice de aprendizado no Brasil**. G 1. 2014. Disponível em

<http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/nobel-de-matematica-contrasta-com-baixo-indice-de-aprendizado-no-brasil.html>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

[27] MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: ideias e desafios**. 6º ano. 17. ed. São Paulo. Saraiva, 2012.

[28] NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

[29] OBMEP. **Banco de questões**. obmep. Disponível em <http://www.obmep.org.br/bq/bq2006.pdf>. Acesso em: 07 de julho de 2015.

[30] OBMEP. **Banco de questões**. obmep. Disponível em <http://www.obmep.org.br/bq/bq2007.pdf>. Acesso em: 07 de julho de 2015.

[31] OBMEP. **Banco de questões**. obmep. Disponível em <http://www.obmep.org.br/bq/bq2010.pdf>. Acesso em: 07 de julho de 2015.

[32] OBMEP. **Banco de questões**. obmep. Disponível em <http://www.obmep.org.br/bq/bq2012.pdf>. Acesso em: 07 de julho de 2015.

[33] OBMEP. **Banco de questões**. obmep. Disponível em <http://www.obmep.org.br/bq/bq2015.pdf>. Acesso em: 07 de julho de 2015.

[34] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[35] PELIZZARI, A. et al.. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. **Revista PEC**, $v.2$, $n°1$, $p.37 - 42$, julho 2001 – julho 2002.

[36] PIAGET, J. **Epistemologia genética**. Tradução Álvaro Cabral; revisão da tradução Wilson Roberto Vaccari. São Paulo: Martins Fontes, 2007. (Universidade hoje)

[37] PINHEIROS, T.. Aprender divisão é mais que dividir. **Nova escola**, $n°250$, $p.58-60$, março 2012.

[38] PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. In: Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 25 – 39). Lisboa: APM.

[39] SANTOS, J. P. O. **Introdução a Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[40] SHINE, C. Y. 21 **Aulas de Matemática Olímpica**. Rio de Janeiro, SBM, 2009, 280p. (Coleção Olimpíadas de Matemática)

[41] SOUZA, J. R.; PATARO, P. M.. **Vontade de saber matemática**. 6^o ano. 2. ed. São Paulo. FTD, 2012.

[42] SPINILLO, A. G. **O sentido de número e sua importância na educação matemática**. In: BRITO, M. R. F. de (org.). Solução de problemas e a matemática escolar. Campinas, SP: editora Alínea, 2006.

[43] TODOS PELA EDUCAÇÃO. **O TPE**. Todos pela Educação.Disponível em <http://www.todospelaeducacao.org.br/quem-somos/o-tpe/>. Acesso em: 02 de julho de 2015.

[44] TOKARNIA, M. Mais de 90 % concluem ensino médio sem aprendizado adequado de matemática. Agência Brasil. 2014. Disponível em <http://www.agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2014 – 12/mais-de-90-concluem-ensino-medio-sem-aprendizado-adequado-de-matematicam>. Acesso em: 15 de abril de 2015.

[45] VASCONCELLOS, Celso dos S. Metodologia Dialética em Sala de Aula. **In: Revista de Educação AEC**. Brasília: abril de 1992 (n. 83).

[46] VICHESSI, B. Divisibilidade Como ensiná-la à garotada. **Nova escola**, $n°251$, $p.53-55$, abril 2012.

[47] WINKEL, S. A conta armada além da decoreba. **Nova escola**, $n°279$, $p.38-41$, fevereiro 2015.

[48] WIKIPEDIA. **Criptografia**. Wikipedia .Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Criptografia>. Acesso em: 04 de julho de 2015.

(