
Equações de diferenças de 1^a ordem e suas
aplicações

Fabício Raimundo Fernandes

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Fabício Raimundo Fernandes

Equações de diferenças de 1^a ordem e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Bená

USP – São Carlos
Outubro de 2015

Fabício Raimundo Fernandes

First-order difference equations and applications

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics Professional Master. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Maria Aparecida Bená

USP – São Carlos
October 2015

Dedico este trabalho às pessoas sem as quais eu não estaria aqui, aos meus pais, aos meus irmãos e aos meus amigos, que sempre me apoiaram incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por estar realizando mais este sonho. Só Ele sabe o quanto foi difícil superar todas as dificuldades para ingressar e conseguir terminar mais esta etapa. Foi Ele, que me fez acreditar na minha capacidade, quando eu já estava perdendo as esperanças.

Agradeço a Antônio Fernandes Neto e Maria de Lourdes Barbosa Fernandes, meus pais, por me mostrarem desde cedo que não há conquistas sem renúncias. Que os sonhos não dependem de bens materiais para se realizar, mas sim de empenho.

Agradeço aos meus irmãos, Flávia Helena Fernandes Capelli, Fabiana Cristina Fernandes e Fábio Henrique Fernandes, pelas parcerias estabelecidas que me permitiram uma maior dedicação aos estudos.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, sem exceção, por compartilharem suas experiências abrindo os meus olhos para o conhecimento. Em especial, agradeço a professora Dra Maria Aparecida Bená, minha orientadora, que me aceitou como orientando e dividiu comigo as alegrias, as angústias, o cansaço e orgulho provenientes deste trabalho.

Agradeço aos amigos do PROFMAT pelo companheirismo e paciência. Pelas mensagens trocadas durante o dia, outras, a grande maioria, à noite e por todos os sábados e almoços divididos.

Agradeço aos amigos Marcio Cattaneo, Eliana Spila, Guilherme Remotto e Maria Elisa Salvador por estarem ao meu lado nos momentos difíceis. Foram eles que me ouviram sem criticar, me consolaram e me acolheram em suas casas sem questionar o motivo, independentemente do dia ou da hora.

Agradeço a Guilherme Galdino e a Cláudio Henrique Machado Vasconcelos Filho, alunos do MAN - Matemática Aplicada a Negócios, por dividirem comigo suas experiências com o Matlab e gráficos dinâmicos.

Agradeço aos amigos da família e a todos os familiares pelas orações dedicadas a mim sempre que solicitadas. Em especial, Maria das Graças Gonçalves e João Pedro Gonçalves.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro que viabilizou o abandono de um emprego para me dedicar com mais afinco ao PROFMAT.

“Algo só é impossível até que alguém duvide e acabe provando o contrário.”
(Albert Einstein)

RESUMO

FERNANDES, F. R.. **Equações de diferenças de 1ª ordem e suas aplicações**. 2015. 104 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

As equações de diferenças (ou equações discretas) desempenham papel fundamental na modelagem de problemas em que o tempo é medido em intervalos discretos, por exemplo, dia, mês, ano. Elas estão presentes em sistemas físicos, químicos, biológicos, sociais e econômicos.

O objetivo desse trabalho é estudar as equações de diferenças de primeira ordem, focando aspectos teóricos, análise do comportamento assintótico das soluções através de técnicas analíticas (teoremas de estabilidade) e técnicas gráficas (diagramas de Cobweb). Também são desenvolvidas algumas aplicações. Além disso, são apresentadas três propostas didáticas relacionadas ao tema para serem trabalhadas no Ensino Médio.

Palavras-chave: Equação de diferenças, ponto de equilíbrio, diagrama de Cobweb, estabilidade.

ABSTRACT

FERNANDES, F. R.. **First-order difference equations and applications**. 2015. 104 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

The difference equations (or discrete equations) play a key role in shaping problems in which time is measured at discrete intervals, e.g., day, month, year. They may be applied to physical, chemical, biological, social and economic systems.

The aim of this work is to study the first-order difference equations, focusing on theoretical aspects, asymptotic behavior of solutions throughout analytical techniques (stability theorems) and graphical techniques (Cobweb diagrams). Some applications are also shown. Three teaching proposals related to the theme are presented in order to be developed in High School.

Key-words: Difference equation, equilibrium point, Cobweb diagram, stability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pontos fixos de $f(x) = x^2 - 2x - 3$	32
Figura 2 – Ponto fixo de $f(x) = 2x + 3$	33
Figura 3 – Ponto fixo de $f(x) = \sqrt{x}$	33
Figura 4 – Pontos fixos de $f(x) = \sqrt{4x - 3}$	34
Figura 5 – Pontos fixos de $f(x) = \frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x}$	35
Figura 6 – Ponto de equilíbrio estável	36
Figura 7 – Ponto de equilíbrio instável	37
Figura 8 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável	37
Figura 9 – Ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável	38
Figura 10 – Estabilidade de x_2^*	39
Figura 11 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^2$ e $x^* = 0$	39
Figura 12 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^2$ e $x^* = 1$	40
Figura 13 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ e $x^* = -1$	40
Figura 14 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ e $x^* = 0$	41
Figura 15 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ e $x^* = 1$	41
Figura 16 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}$ e $x^* = 1$	42
Figura 17 – Preço de equilíbrio assintoticamente estável	44
Figura 18 – Preço de equilíbrio estável	44
Figura 19 – Preço de equilíbrio instável	45
Figura 20 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \frac{2}{(1+x_n)^2}$ e $x^* = 0$	49
Figura 21 – Método de Cobweb para a equação $x_{t+1} = 2x_t - (x_t)^2$ e $x^* = 0$	49
Figura 22 – Método de Cobweb para a equação $x_{t+1} = 2x_t - (x_t)^2$ e $x^* = 1$	50
Figura 23 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = 1,63x_n - 0,9(x_n)^2$ e $x^* = 0$	50
Figura 24 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = 1,63x_n - 0,9(x_n)^2$ e $x^* = 1$	51
Figura 25 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$ e $x^* = 1$	51
Figura 26 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$ e $x^* = 3$	52
Figura 27 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3 + x_n$ e $x^* = 0$	53
Figura 28 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^2 - x_n + 1$ e $x^* = 1$	53
Figura 29 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^3 + x_n$ e $x^* = 0$	54
Figura 30 – Ponto de equilíbrio semiestável à esquerda	54
Figura 31 – Ponto de equilíbrio semiestável à direita	55
Figura 32 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ e $x^* = -1$	57
Figura 33 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ e $x^* = 1$	57

Figura 34 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -x_n^3 - x_n$ e $x^* = 0$	58
Figura 35 – População de Ribeirão Preto no período de 2000 a 2015	60
Figura 36 – Erro para o Modelo de Malthus	62
Figura 37 – Entrada dos valores de x e y para a realização do ajuste linear	64
Figura 38 – Gráfico e cálculo de a e b com LAB Fit	64
Figura 39 – Erro para o Modelo de Verhulst	67
Figura 40 – Previsões e erros - Malthus X Verhulst	67
Figura 41 – Taxa de Mortalidade Infantil no período de 2000 a 2013	72
Figura 42 – Número de nascimentos no período de 2000 a 2013	72
Figura 43 – População de crianças nascidas vivas que não chegaram a completar um ano de vida - Período de 2000 a 2013	73
Figura 44 – Gráfico Figura 35	73
Figura 45 – Tabela 01	79
Figura 46 – Planilha 01	86
Figura 47 – Planilha 03	87
Figura 48 – Tabela 01 utilizada pelo aluno "X"no começo do estudo	88
Figura 49 – Tabela 01 utilizada pelo aluno "X"após discussão Supérfluos X Essenciais	89
Figura 50 – Tabela 01 utilizada pelo aluno "Y"no começo do estudo	90
Figura 51 – Tabela 01 utilizada pelo aluno "Y"após discussão Supérfluos X Essenciais	91
Figura 52 – Tabela 02 - Dados referentes ao número de usuários de internet no Brasil	96
Figura 53 – Tabela 03 - Estimativa de erro através do modelo de Malthus	97
Figura 54 – Tabela 04 - Estimativa de erro através do modelo de Verhulst	99
Figura 55 – Tabela 05 - Comparativo entre os modelos de Malthus e Verhulst	100
Figura 56 – Pontos (data, valores arredondados)	102
Figura 57 – Tabela 05 - Estimativa de erro através do modelo de Malthus	104
Figura 58 – Considerações Finais	104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS	21
2.1	O Problema do Valor Inicial (P.V.I)	24
2.2	Equações de Diferenças Lineares de 1ª Ordem	24
2.2.1	<i>Solução Geral</i>	25
2.2.1.1	<i>Equação com Coeficientes Constantes</i>	26
2.3	Pontos de Equilíbrio e Estabilidade	32
2.4	Estabilidade de Pontos de Equilíbrio e Diagramas em “Teia de Aranha”	36
2.4.1	<i>Método de Cobweb – Diagrama em “Teia de Aranha”</i>	37
2.4.1.1	<i>Aplicação do Método de Cobweb em Economia</i>	40
3	APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS DE 1ª ORDEM - MODELOS DE DINÂMICA POPULACIONAL	59
3.1	Modelo de Malthus	59
3.2	Modelo Logístico (Verhulst)	62
4	PROPOSTAS DIDÁTICAS	69
4.1	Proposta 01 - Planejamento Financeiro	69
4.2	Proposta 02 - Utilização dos Modelos de Malthus e Verhulst na Modelagem do Aumento de Usuários de Internet no Brasil	70
4.3	Proposta 03 - Aplicação do Modelo de Malthus para Populações em Decrescimento - Mortalidade Infantil	71
	REFERÊNCIAS	75
	APÊNDICE A ORÇAMENTO FAMILIAR	77
A.1	Roteiro de aulas	78
A.1.1	<i>Aula 01 - O que é Educação Financeira</i>	78
A.1.2	<i>Aula 02 - Equacionando o Orçamento Mensal</i>	80
A.1.3	<i>Aulas 03 e 04 - Orçamento Calculado Mensalmente</i>	81
A.1.4	<i>Aula 05 - Orçamento Mensal Utilizando Planilha Eletrônica</i>	81
A.1.5	<i>Aula 06 - Solução para o Orçamento Familiar a Longo Prazo</i>	82

A.1.6	<i>Aula 07 - Essencial X Supérfluo</i>	84
A.1.7	<i>Aula 08 - Reflexões e Conclusões</i>	84

**APÊNDICE B UTILIZAÇÃO DOS MODELOS DE MALTHUS E VERHULST
NA MODELAGEM DO AUMENTO DE USUÁRIOS
DE INTERNET NO BRASIL 93**

B.1	Roteiro de aulas	94
B.1.1	<i>Aula 01 - Potenciação e suas Propriedades</i>	94
B.1.2	<i>Aula 02 - Função Exponencial e o Modelo de Malthus</i>	94
B.1.3	<i>Aulas 03 - Crescimento Populacional - Modelo de Verhuslt</i>	95
B.1.4	<i>Aula 04 - Utilização dos Modelos de Malthus e Verhulst para Modelar o Crescimento dos Usuários de Internet no Brasil</i>	95
B.1.5	<i>Aula 05 - Utilização do Modelo de Malthus para Retratar o Crescimento dos Usuários de Internet no Brasil</i>	96
B.1.6	<i>Aulas 06 e 07 - Utilização do Modelo de Verhulst para Retratar o Crescimento dos Usuários de Internet no Brasil</i>	97
B.1.7	<i>Aula 08 - Considerações Finais</i>	99

**APÊNDICE C APLICAÇÃO DO MODELO DE MALTHUS PARA
POPULAÇÕES EM DECRESCIMENTO - MORTALIDADE INFANTIL 101**

C.0.1	<i>Aulas 01 e 02 - Utilização do Modelo de Malthus para Retratar o Decrescimento da Mortalidade Infantil no Brasil</i>	101
C.0.2	<i>Aula 03 - Considerações Finais</i>	103

INTRODUÇÃO

A teoria de equações de diferenças é rica em aplicações para muitos ramos das ciências naturais. Estas equações, na generalidade dos casos, descrevem fenômenos ao longo do tempo. Este tempo é medido em intervalos regulares de modo a ser interpretado como uma variável discreta. Por exemplo, ao se estudar o efeito da administração de uma determinada dose de droga num indivíduo, cada unidade de tempo poderá ser algumas horas, para o cálculo do número de células numa cultura de bactérias, poderá ser dias, salários e prestações são pagos mensalmente, o imposto de renda é anual, o produto nacional bruto pode ser estipulado por um ano, o lucro líquido de aplicações financeiras pode ser trimestral, etc.

Nas equações de diferenças, informações no período vigente influenciam nas decisões do período posterior.

Este trabalho está voltado ao estudo de sistemas dinâmicos discretos, ou seja, aqueles nos quais as variações discretas são formuladas por equações de diferenças de 1ª ordem e está estruturado da seguinte forma:

O Capítulo 1 consiste na Introdução.

No Capítulo 2 são introduzidos conceitos básicos das equações de diferenças, são desenvolvidas técnicas para determinação das soluções das equações lineares de 1ª ordem e são apresentadas algumas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Também são introduzidos o conceito de ponto de equilíbrio e a teoria de estabilidade através de técnicas analíticas (teoremas) e de técnicas gráficas (método de Cobweb) para as equações de diferenças de 1ª ordem.

O Capítulo 3 introduz modelos de dinâmica populacional - Malthus e Verhulst, que são utilizados nas propostas didáticas constantes no Capítulo 4.

O Capítulo 4 apresenta três propostas didáticas que foram trabalhadas em uma escola pública da rede estadual no município de Ribeirão Preto, com os alunos da 1ª série do ensino

médio, abordando situações do cotidiano, nas quais foram utilizadas as equações de diferenças de 1^a ordem. Essas atividades foram realizadas no 2^o semestre de 2014 com a participação de 20 alunos por atividade e duração de 50 minutos por aula.

O Apêndice contém os roteiros detalhados de cada proposta didática.

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

As equações de diferenças (ou equações discretas) são frequentemente úteis em diferentes áreas do conhecimento e mais adequadas para modelagem em que o tempo é medido em intervalo discreto, como ocorre em Biologia nos modelos de dinâmica populacional (Malthus e Verhulst), em Medicina nos modelos epidemiológicos, na Física, em alguns processos físicos e em Economia, na análise de modelos econômicos.

Essa teoria pode ser encontrada com detalhes em (AGARWAL, 1992), (ELAYDI, 2005), (MICKENS, 1990) e (SHONE, 2002).

Vamos a um exemplo: Depósito R\$500,00 na poupança hoje. O banco paga juros de 0,6% ao mês. Atualmente o rendimento de nossa poupança é corrigido diariamente pela taxa Selic. Supondo que não ocorrerão novos depósitos e que a taxa permaneça fixa, quanto terei em 10 anos?

Chamando de Q_n a quantidade de dinheiro que tenho após n meses, podemos escrever

$$\begin{aligned} Q_0 &= 500 \\ Q_1 &= Q_0 + 0,006Q_0 = 1,006Q_0 \\ Q_2 &= Q_1 + 0,006Q_1 = 1,006Q_1 \\ Q_3 &= Q_2 + 0,006Q_2 = 1,006Q_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$Q_n = Q_{n-1} + 0,006Q_{n-1} = 1,006Q_{n-1}. \quad (2.1)$$

Quero calcular o valor de Q_{120} . Usando uma planilha, basta colocar 500 na célula A_1 e escrever em A_2 a expressão $= A_1 + 0,006 * A_1$, depois copiar e colar até a célula 121. Obtemos todos os valores, e o resultado final é que ao fim de 10 anos terei R\$1025,01.

Na verdade é fácil obter uma fórmula geral para Q_n . De fato,

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1,006Q_0 \\ Q_2 &= 1,006^2Q_0 \\ Q_3 &= 1,006^3Q_0 \\ &\vdots \\ Q_n &= 1,006^nQ_0. \end{aligned}$$

Logo $Q_{120} = 1,006^{120}500 = 1025,01$, calculado com a ajuda de um computador ou de uma calculadora científica.

A grande vantagem de uma fórmula geral como $Q_n = 1,006^nQ_0$ é que podemos fazer o limite quando n tende ao infinito e prever o comportamento de Q_n . No caso, temos uma expressão da forma a^n , com $a > 1$, que tende ao infinito, ou seja, a poupança cresce infinitamente, só que bem devagar.

A relação expressa em (2.1) é uma equação de diferenças de 1^a ordem. A ordem de uma equação de diferenças é determinada fazendo-se a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na equação.

As equações discretas também foram foco de estudo em (CIPOLLI, 2012), (LUÍS, 2006) e (MALIGERI, 2013).

Definição 1. *Um sistema dinâmico discreto de 1^a ordem é uma sequência de números x_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, que é definida recursivamente, i. e., existe uma regra relacionando cada número, após o primeiro, ao anterior através da equação*

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.2}$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função conhecida.

Exemplo 1. Considere o sistema dinâmico discreto

$$x_{n+1} = x_n + 2, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 2 \\ x_2 &= x_1 + 2 = (x_0 + 2) + 2 = x_0 + 2(2) \\ x_3 &= x_2 + 2 = (x_0 + 2(2)) + 2 = x_0 + 3(2) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2 = (x_0 + (n-1)(2)) + 2 = x_0 + n(2) = x_0 + 2n. \end{aligned}$$

Esta última equação indica o valor de x em qualquer período de tempo (incluindo $n = 0$) e constitui-se na solução de (2.3).

A sequência de números dada pela relação

$$\Delta x_{n+1} \equiv x_{n+1} - x_n = g(x_n) \quad (2.4)$$

é chamada de equação de diferenças de 1^a ordem. Se $f(x) = g(x) + x$, estes dois conceitos são equivalentes.

Em (ELAYDI, 2005), a equação (2.2) é chamada de equação de diferenças, independente de poder ser representada na forma (2.4). Aqui também não faremos distinção entre esses dois conceitos.

Uma equação de diferenças de 1^a ordem, em geral, pode ser escrita como

$$x_{n+1} = f(n, x_n), \quad (2.5)$$

onde f é uma função conhecida e pode não depender apenas de x_n , mas da variável n também.

Definição 2. A equação de diferenças (2.5) é dita linear se f for linear em x_n , isto é, $f(n, x_n) = a(n)x_n + b(n)$, onde $a(n)$ e $b(n)$ são funções conhecidas; $a, b : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $a(n) \neq 0$. Caso contrário, ela é não linear.

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2 + 3x_n && \text{(linear)} \\ x_{n+1} &= 6x_n(1 - x_n) && \text{(não linear)} \\ x_{n+1} &= n + 2x_n && \text{(linear)} \\ x_{n+1} &= 3n + (x_n)^2 && \text{(não linear)} \end{aligned}$$

Definição 3. A equação (2.5) é denominada não autônoma, pois a função depende explicitamente da variável n , enquanto a equação (2.2) é dita autônoma.

Exemplo 3. Os sistemas dinâmicos abaixo ilustram a Definição 3.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2 && \text{(autônoma)} \\ x_{n+1} &= 3x_n + 7 && \text{(autônoma)} \\ x_{n+1} &= x_n + 2n && \text{(não autônoma)} \\ x_{n+1} &= 3nx_n && \text{(não autônoma)} \end{aligned}$$

2.1 O Problema do Valor Inicial (P.V.I)

Dado um estado inicial x_0 , aplicações sucessivas da função f na equação $x_{n+1} = f(x_n)$, permitem obter facilmente a sequência de estados x_n . Em alguns casos, pode ser possível obter uma expressão geral para x_n em função da variável n , como visto na equação (2.3).

A evolução de um sistema discreto de 1ª ordem $x_{n+1} = f(x_n)$; x_0 em $n = 0$, tem a forma

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_n) = f(f^n(x_0)) = f^{n+1}(x_0), \end{aligned}$$

a qual também pode ser escrita como

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^{n+1}(x_0).$$

Definição 4. Chama-se a iterada de ordem k da função f no ponto x_0 à expressão $f^k(x_0) = \underbrace{f(f(\dots(f(x_0))))}_{k \text{ vezes}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

O valor $f(x_0)$ é conhecido como a primeira iterada de f no ponto x_0 .

O conjunto de todos os estados $\{f^n(x_0); n \geq 0\}$, onde $f^0(x_0) = x_0$, é chamado órbita de x_0 .

2.2 Equações de Diferenças Lineares de 1ª Ordem

Considere a equação de diferenças linear de 1ª ordem dada por

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n), \quad (2.6)$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções conhecidas, $f, g: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(n) \neq 0; \forall n \geq n_0 \geq 0$, para algum $n_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Se $g(n) \neq 0, n \geq n_0 \geq 0, n_0 \in \mathbb{Z}_+$, a equação é dita não homogênea. A equação homogênea associada à equação (2.6) é da forma

$$x_{n+1} = f(n)x_n. \quad (2.7)$$

2.2.1 Solução Geral

Para um determinado valor inicial x_{n_0} , $n \geq n_0 \geq 0$, pode se determinar o valor de x_n , $\forall n \geq n_0$, da equação (2.7), através do processo iterativo descrito abaixo:

$$\begin{aligned}x_{n_0+1} &= f(n_0)x_{n_0} \\x_{n_0+2} &= f(n_0+1)x_{n_0+1} = f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} \\x_{n_0+3} &= f(n_0+2)x_{n_0+2} = f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0}.\end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$x_n = f(n-1)f(n-2)\dots f(n_0+3)f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} = \prod_{i=n_0}^{n-1} f(i)x_{n_0}, \quad \forall n > n_0,$$

que é a solução da equação (2.7).

Aplicando o processo iterativo à equação (2.6), também se pode determinar o valor de x_n para um determinado valor inicial x_{n_0} . Com efeito,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(n)x_n + g(n) \\x_{n_0+1} &= f(n_0)x_{n_0} + g(n_0) \\x_{n_0+2} &= f(n_0+1)x_{n_0+1} + g(n_0+1) \\&= f(n_0+1)[f(n_0)x_{n_0} + g(n_0)] + g(n_0+1) \\&= f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1) \\x_{n_0+3} &= f(n_0+2)x_{n_0+2} + g(n_0+2) \\&= f(n_0+2)[f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1)] + g(n_0+2) \\&= f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+2)f(n_0+1)g(n_0) + f(n_0+2)g(n_0+1) + g(n_0+2) \\x_{n_0+4} &= f(n_0+3)x_{n_0+3} + g(n_0+3) \\&= f(n_0+3)[f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+2)f(n_0+1)g(n_0) \\&\quad + f(n_0+2)g(n_0+1) + g(n_0+2)] + g(n_0+3) \\&= f(n_0+3)f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+3)f(n_0+2)f(n_0+1)g(n_0) \\&\quad + f(n_0+3)f(n_0+2)g(n_0+1) + f(n_0+3)g(n_0+2) + g(n_0+3) \\&= \prod_{i=n_0}^{n_0+3} f(i)x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n_0+3} \left[\prod_{i=k+1}^{n_0+3} f(i) \right] g(k).\end{aligned}$$

Por indução, segue que:

$$x_n = \prod_{i=n_0}^{n-1} f(i)x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} f(i) \right] g(k). \quad (2.8)$$

Exemplo 4. Determine a solução da equação

$$x_{n+1} = (n+1)x_n - 3^n(n+1)!; \quad x_0 = 1.$$

Solução: Da fórmula (2.8), segue que

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{i=0}^{n-1} (i+1)x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} (i+1) \right] (-3^k)(k+1)! \\ &= n! - \sum_{k=0}^{n-1} (k+2)(k+3)\dots(n-1)n3^k(k+1)! \\ &= n! - n! \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = n! \left[1 - \frac{1-3^n}{1-3} \right] = n! \left[\frac{3-3^n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Observação: Embora a expressão (2.8) seja a solução de todas as equações de diferenças lineares de 1ª ordem, às vezes surgem equações de diferenças com um aspecto um pouco mais simples. Isto acontece, por exemplo, quando as funções f e g são constantes, ou quando apenas uma delas é constante. Nestes casos, um tratamento à parte pode tornar mais simples a tarefa de se encontrar a solução da equação. O estudo destes casos é importante na medida em que os mesmos aparecem muitas vezes associados a importantes problemas do cotidiano.

2.2.1.1 Equação com Coeficientes Constantes

Quando f e g são constantes em (2.6), tem-se uma equação de diferenças linear de 1ª ordem com coeficientes constantes.

Considere o caso em que $f(n) = a$, $a \neq 0$ constante e $g(n) = b$, b constante, isto é, a equação (2.6) tem a forma

$$x_{n+1} = ax_n + b. \quad (2.9)$$

Para um determinado valor inicial x_0 ,

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b \\ x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b \\ x_3 &= ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b = a^3x_0 + b(a^2 + a + 1) \\ x_4 &= ax_3 + b = a(a^3x_0 + a^2b + ab + b) + b = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b \\ &= a^4x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1) \\ &\vdots \\ x_n &= a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^2 + a + 1). \end{aligned}$$

A expressão entre parênteses representa a soma de uma Progressão Geométrica finita. Assim,

$$\text{Se } a \neq 1, x_n = a^n x_0 + b \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Se $a = 1$, $x_n = x_0 + nb$.

Portanto, a solução de (2.9) é

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b \frac{1-a^n}{1-a}; & a \neq 1 \\ x_0 + nb; & a = 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Observe que quando $b = 0$, a solução da equação (2.9) é $x_n = a^n x_0$.

Observação: No lugar da variável n , alguns autores optam por usar a variável t , como ocorre em (SHONE, 2002).

Exemplo 5. Resolva a equação $2x_{n+1} - x_n = 2$ com $x_0 = 4$.

Solução: Para esta equação, tem-se que $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$ e, portanto, $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. De (2.10) resulta que

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 4 + 1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{2^n} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 \frac{1}{2^n} + 2.$$

Quando $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, e assim, $x_n \rightarrow 2$.

Exemplo 6. Suponha que seja feito um depósito de R\$300,00 em uma poupança na data de hoje e, ao fim de cada mês, a partir de hoje, seja realizado um novo depósito de R\$450,00, cuja taxa de rendimento seja de 0,6 % ao mês. Qual será o valor acumulado nesta poupança daqui a dois anos?

Solução: Seja C_0 o capital depositado na data de hoje ($C_0 = 300$) e C_n o valor de capital acumulado até o mês n . A quantidade acumulada no fim do período $n + 1$ é igual à quantidade acumulada no período n com os juros ganho nesse período, mais o depósito efetuado. Assim,

$$C_{n+1} = C_n(1 + 0,006) + 450.$$

Observe que C_{n+1} satisfaz uma equação do tipo (2.10), com $a = 1,006$ e $b = 450$. Logo,

$$C_n = 1,006^n C_0 + 450 \frac{1 - 1,006^n}{1 - 1,006}.$$

Sabendo que $C_0 = 300$ e $n = 24$,

$$C_{24} = 1,006^{24} 300 + 450 \frac{1 - 1,006^{24}}{1 - 1,006} = 346,32 + 11579,05 = 11925,37.$$

Desta forma, um depósito inicial de R\$300,00, seguido de depósitos mensais de R\$450,00 proporcionará um valor acumulado ao fim de dois anos de R\$11925,37.

Exemplo 7. (Datação através do Carbono-14) Foi observado que a proporção de carbono-14 nas plantas e animais é a mesma que a da atmosfera, desde que a planta ou animal esteja vivo. Quando o animal ou a planta morre, o carbono-14 dos seus tecidos começa a decrescer segundo uma razão r .

1. A “meia-vida” do material radioativo é o tempo necessário para que metade do material se dissipe. Se a “meia-vida” do carbono-14 é de 5700 anos, qual é a razão de decrescimento?
2. Se a quantidade de carbono-14 observada num osso de um animal é 70% da quantidade original de carbono-14, que idade tem a ossada?

Solução: Seja Q_n a quantidade de carbono-14 que o osso contém no ano n . A quantidade de carbono-14 no ano n é igual a quantidade de carbono-14 do ano anterior menos a quantidade que o mesmo decresce sob a razão r . Desta forma,

$$Q_{n+1} = Q_n - rQ_n = Q_n(1 - r).$$

De (2.10), segue que a solução geral desta equação é da forma

$$Q_n = (1 - r)^n Q_0,$$

onde Q_0 é a quantidade de carbono-14 que o animal ou a planta possuía no momento de sua morte.

1. Para $n = 5700$, a quantidade de carbono-14 é a metade da quantidade inicial, ou seja,

$$\frac{1}{2}Q_0 = (1 - r)^{5700}Q_0 \Leftrightarrow r = 1 - \sqrt[5700]{0,5}.$$

2. Esta situação é descrita por

$$0,7Q_0 = (1 - r)^n Q_0 \Leftrightarrow 0,7 = (1 - r)^n,$$

ou seja,

$$\ln(0,7) = n \ln\left(0,5^{\frac{1}{5700}}\right),$$

isto é,

$$n = 5700 \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,5)} = 2933 \text{ anos.}$$

Exemplo 8. (Orçamento Familiar) – Considere uma família cuja renda mensal r_n é proveniente de um salário fixo r_0 , mais o rendimento de uma caderneta de poupança P_n do mês anterior. Suponha também que o consumo mensal C_n desta família seja proporcional à sua renda mensal.

O modelo que estabelece relações entre as variáveis *renda*, *poupança* e *consumo*, dependentes do tempo, tomadas em meses, é dado por:

a. poupança: $P_{n+1} = (\text{poupança do mês anterior } n) + (\text{sobra do mês } n + 1) \Rightarrow$

$$P_{n+1} = P_n + (r_{n+1} - C_{n+1}). \quad (2.11)$$

b. renda: $r_{n+1} = (\text{salário}) + (\text{rendimento da poupança do mês anterior}) \Rightarrow$

$$r_{n+1} = r_0 + \gamma P_n, \quad (2.12)$$

onde γ é o juro da poupança, $\gamma > 0$.

c. consumo:

$$C_{n+1} = \delta r_{n+1}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (2.13)$$

Com base no modelo dado, calcule P_n , r_n e C_n .

Solução: Substituindo as equações (2.12) e (2.13) em (2.11), segue que

$$P_{n+1} = (1 - \delta)r_0 + [(1 - \delta)\gamma + 1]P_n.$$

Considerando que P_0 é conhecido, pode-se usar a expressão para solução (2.10), onde $a = [(1 - \delta)\gamma + 1]$ e $b = (1 - \delta)r_0$ para escrever

$$P_n = [(1 - \delta)\gamma + 1]^n P_0 + (1 - \delta)r_0 \frac{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]^n}{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]}, \quad (2.14)$$

$$r_n = r_0 + \gamma P_0 [(1 - \delta)\gamma + 1]^{n-1} + \gamma(1 - \delta)r_0 \frac{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]^{n-1}}{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]}, \quad (2.15)$$

e

$$C_n = \delta r_0 + \gamma \delta P_0 [(1 - \delta)\gamma + 1]^{n-1} + \gamma \delta (1 - \delta)r_0 \frac{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]^{n-1}}{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]}. \quad (2.16)$$

Exemplo 9. Adaptando a situação do exemplo 8 a de uma família cuja renda fixa seja de R\$2000,00, que gaste em torno de 90% de sua renda mensal e tenha na data de hoje R\$10000,00 em uma caderneta de poupança, cujo rendimento mensal é de 0,6%, qual será o valor de:

- sua poupança daqui a 10 meses;
- sua renda daqui a 10 meses;
- seu consumo daqui a 10 meses.

Solução:

a. De (2.14), tem-se

$$P_{10} = [(1 - 0,9)0,006 + 1]^{10}10000 + (1 - 0,9)2000 \frac{1 - [(1 - 0,9)0,006 + 1]^{10}}{1 - [(1 - 0,9)0,006 + 1]}$$

$$P_{10} = 10060,16 + 2005,41 = 12065,57.$$

b. De (2.15), tem-se

$$r_{10} = 2000 + 0,006(10000)[(1 - 0,9)0,006 + 1]^9 + 0,006(1 - 0,9)2000 \frac{1 - [(1 - 0,9)0,006 + 1]^9}{1 - [(1 - 0,9)0,006 + 1]}$$

$$r_{10} = 2000 + 60,32 + 10,83 = 2071,15.$$

c. De (2.16), tem-se

$$C_{10} = 0,9(2000) + 0,006(0,9)10000[(1 - 0,9)0,006 + 1]^9$$

$$+ 0,006(0,9)(1 - 0,9)2000 \frac{1 - [(1 - 0,9)0,006 + 1]^9}{1 - [(1 - 0,9)0,006 + 1]}$$

$$C_{10} = 1864,04.$$

Exemplo 10. (Modelo de Harrod) Sejam S a poupança, I o investimento e Y a renda, todas funções do tempo t .

O modelo para a renda nacional proposto por Harrod consiste no sistema

$$\begin{cases} S_t = \alpha Y_t \\ I_t = \beta(Y_t - Y_{t-1}) \\ I_t = S_t. \end{cases}$$

Observe que tem-se a poupança proporcional à renda e o investimento proporcional à variação da renda.

Supondo Y_0 conhecido, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, quais são as equações de renda, poupança e investimento?

Solução: Das três equações, obtém-se a equação de renda

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha} \right) Y_{t-1},$$

cuja solução é dada por (2.10),

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha} \right)^t Y_0.$$

Portanto, obtém-se também

$$I_t = S_t = \alpha \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha} \right)^t Y_0.$$

Observe que este modelo clássico é usado para estudar a renda nacional numa economia em expansão, pois se $\beta > 0$ e $\beta > \alpha$, então $\frac{\beta}{\beta-\alpha} > 1$ e a solução Y_t diverge, o mesmo ocorrendo com os valores I_t e S_t .

Mais informações sobre o Modelo de Harrod podem ser encontradas em (BASSANEZI; JUNIOR, 1988).

Exemplo 11. (Modelo de Administração de Drogas) Tome-se como exemplo a administração de uma droga, medicamento, em intervalos constantes de tempo (de 6 em 6 horas, a cada 12 horas...). Sabemos que nosso organismo tende a eliminar parte dessa droga através da urina, suor, entre outras transformações e reações químicas e/ou fisiológicas de nosso organismo. Admite-se que essa eliminação seja constante. Sejam Q_0 a quantidade inicial de droga aplicada e reaplicada a cada intervalo de tempo, r a quantidade de droga eliminada por nosso organismo a cada intervalo de tempo e Q_n a quantidade de droga presente no organismo no instante de aplicação n . Nestas condições, qual é a quantidade de droga presente no organismo após n aplicações e qual será essa quantidade ao longo do tempo considerando que uma pessoa tenha que receber a droga pelo resto de sua vida?

Solução: No início da aplicação, tem-se Q_0 , para $n = 0$. Após o primeiro intervalo de tempo, tem-se $n = 1$ então $Q_1 = Q_0 - rQ_0 + Q_0$. Para $n = 2$ então $Q_2 = Q_1 - rQ_1 + Q_0$. E assim sucessivamente. Desta forma,

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 - rQ_0 + Q_0 \\ Q_2 &= Q_1 - rQ_1 + Q_0 \\ Q_3 &= Q_2 - rQ_2 + Q_0 \\ &\vdots \\ Q_{n+1} &= Q_n - rQ_n + Q_0 \\ Q_{n+1} &= (1-r)Q_n + Q_0, \end{aligned}$$

que tem solução dada por (2.10),

$$Q_n = \left(1 - \frac{1}{r}\right) (1-r)^n Q_0 + \frac{Q_0}{r}.$$

Observe que $0 < r < 1$, pois não se pode eliminar mais que 1 vez a quantidade de droga presente em nosso organismo.

Logo, quando n tende ao infinito, a quantidade de droga tende a se estabilizar, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{r}\right) (1-r)^n Q_0 + \frac{Q_0}{r} \right] = \frac{Q_0}{r}.$$

Exemplo 12. (Modelo de Financiamento) Na compra de um imóvel, é feito um financiamento de valor c_0 que deve ser pago em n meses, em parcelas mensais fixas e iguais a k . Seja c_0 a dívida inicial. Então, a dívida c_n num mês n é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja,

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n - k = (1 + \alpha)c_n - k.$$

Qual é o valor da dívida atualizada no mês n ?

Solução: A partir de (2.10), tem-se

$$c_n = (1 + \alpha)^n c_0 + k \frac{1 - (1 + \alpha)^n}{\alpha}.$$

2.3 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

O conceito de ponto fixo (ou ponto de equilíbrio) é de particular interesse no estudo de modelos regidos por equações de diferenças, as quais surgem em diversas áreas da física, biologia, engenharia e economia.

Um ponto fixo pode ser caracterizado de maneira simples como um ponto que não é alterado por uma aplicação.

Definição 5. Um ponto x^* pertencente ao domínio de f diz-se ponto de equilíbrio da equação (2.2) se é um ponto fixo de f , ou seja, $f(x^*) = x^*$.

A Definição 5 diz que x^* é um ponto iterado que permanece invariante. Graficamente, um ponto de equilíbrio é a abscissa do ponto onde o gráfico de f intercepta a reta $y = x$. (Figura 1)

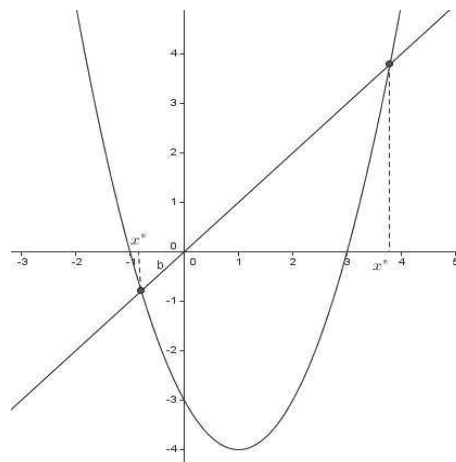


Figura 1 – Pontos fixos de $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Há autores que chamam x^* de ponto fixo e outros, de ponto ou estado de equilíbrio.

Exemplo 13. O ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = 2x_n + 3$ é $x^* = -3$.

De fato, considerando $f(x) = 2x + 3$ e resolvendo a equação $f(x^*) = x^*$, ou seja, $2x^* + 3 = x^*$, obtém-se $x^* = -3$.

Na Figura 2, pode-se visualizar a representação gráfica do ponto de equilíbrio.

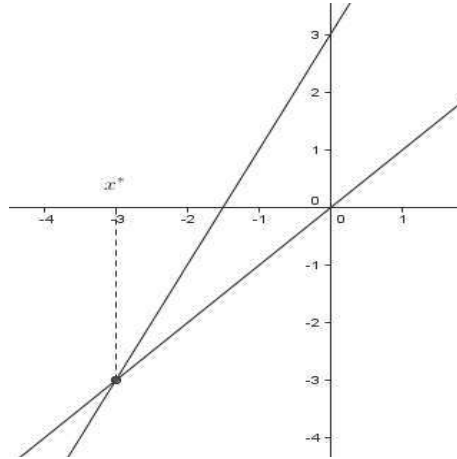


Figura 2 – Ponto fixo de $f(x) = 2x + 3$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 14. A equação $(x_{t+1})^2 = x_t$ possui dois pontos fixos, $x^* = 0$ e $x^* = 1$. (Figura 3)

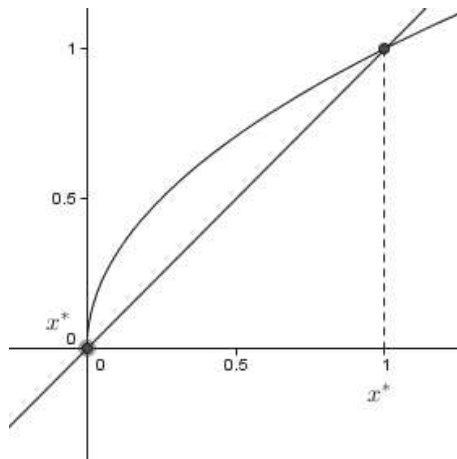


Figura 3 – Ponto fixo de $f(x) = \sqrt{x}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, resolvendo $f(x^*) = x^*$, tem-se

$$(x^*)^2 = x^* \Rightarrow (x^*)^2 - x^* = 0 \Rightarrow x^*(x^* - 1) = 0 \Rightarrow x^* = 0 \text{ ou } x^* = 1.$$

Exemplo 15. Considere a equação $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$. Seus pontos de equilíbrio são $x^* = 1$ e $x^* = 3$.

De fato, $f(x^*) = x^* \Rightarrow x^* = \sqrt{4x^* - 3}$, ou seja, $(x^*)^2 - 4x^* + 3 = 0 \Rightarrow x^* = 1$ e $x^* = 3$. (Figura 4)

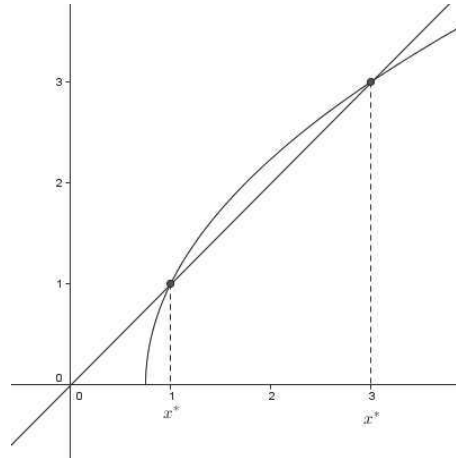


Figura 4 – Pontos fixos de $f(x) = \sqrt{4x - 3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 16. O ponto de equilíbrio da equação $x_{t+1} = ax_t + b$ é $x^* = \frac{b}{1-a}$; $a \neq 1$.

Com efeito, resolvendo a equação $f(x^*) = x^*$, obtém-se

$$\begin{aligned} ax^* + b &= x^* \\ x^*(a - 1) &= -b \\ x^* &= \frac{-b}{a - 1} = \frac{b}{1 - a}; \quad a \neq 1. \end{aligned}$$

Exemplo 17. Os pontos fixos de $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 2 - \frac{3}{2x_n}$ são $x^* = 1$ e $x^* = 3$. (Figura 5)

De fato, de $f(x^*) = x^*$, tem-se $x^* = \frac{x^*}{2} + 2 - \frac{3}{2x^*} \Rightarrow x^* = \frac{(x^*)^2 + 4x^* - 3}{2x^*} \Rightarrow (x^*)^2 - 4x^* + 3 = 0 \Rightarrow x^* = 1$ e $x^* = 3$.

É possível que uma solução de uma equação de diferenças não seja um ponto de equilíbrio, mas poderá vir a ser após um número finito de iterações, ou seja, um estado de não equilíbrio poderá passar para um estado de equilíbrio em tempo finito. Esta ideia leva à seguinte definição.

Definição 6. Seja x um ponto no domínio de f . Se existir um inteiro positivo k e um ponto de equilíbrio x^* de (2.2) tal que $f^k(x) = x^*$ e $f^{k-1}(x) \neq x^*$, então diz-se que x é um eventual ponto de equilíbrio.

Exemplo 18. Considere a equação $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = x^2$. As soluções de $f(x^*) = (x^*)^2 = x^*$ são os pontos de equilíbrio $x^* = 0$ e $x^* = 1$. Tem-se que para $x_0 = -1$ e $k = 1$, o ponto $x = -1$ é um eventual ponto de equilíbrio da equação.

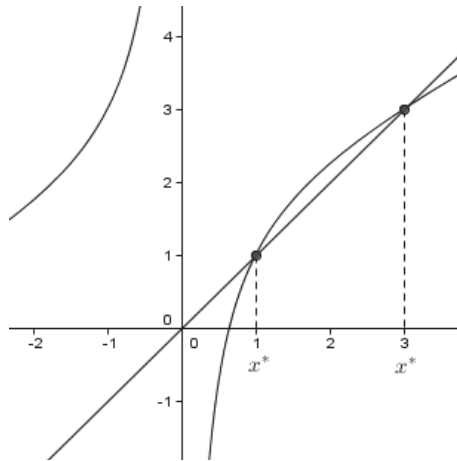


Figura 5 – Pontos fixos de $f(x) = \frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato,

$$f^{k-1}(x) = f^0(x) = x_0 = -1 \neq x^*$$

e

$$f^k(x) = f(-1) = (-1)^2 = 1 = x^*.$$

Exemplo 19. Seja $x_{n+1} = f(x_n)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio desta equação são $x^* = 0$ e $x^* = \frac{3}{4}$.

Para se encontrar um eventual ponto de equilíbrio, considere $x_0 = \frac{1}{9}$. Para este valor inicial, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = f\left(\frac{1}{9}\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \\ x_2 &= f(x_1) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \\ x_3 &= f(x_2) = f(1) = 3(1-1) = 0. \end{aligned}$$

Então $\frac{1}{9}$ é um eventual ponto de equilíbrio para $k = 3$.

Considerando-se $x = \frac{k}{3^n}$, com k e n inteiros positivos tal que $0 < \frac{k}{3^n} \leq 1$, tem-se que x é um eventual ponto de equilíbrio.

2.4 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio e Diagramas em “Teia de Aranha”

O estudo do comportamento assintótico das soluções de uma determinada equação nas proximidades dos pontos de equilíbrio é conhecido como teoria de estabilidade.

A análise da estabilidade consiste em dar uma condição inicial próxima a um ponto de equilíbrio x^* e observar a evolução do sistema, ou seja, analisar o comportamento das soluções de uma equação de diferenças próximas a esse ponto de equilíbrio.

Cabe ressaltar que nem sempre é possível obter uma expressão para a solução, mas existe a possibilidade de se dar uma noção geométrica de estabilidade.

Definição 7. Um ponto de equilíbrio x^* da equação (2.2) é chamado

I) Estável: se dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$, para todo $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (Figura 6). Se x^* não for estável, então x^* é denominado instável. (Figura 7)

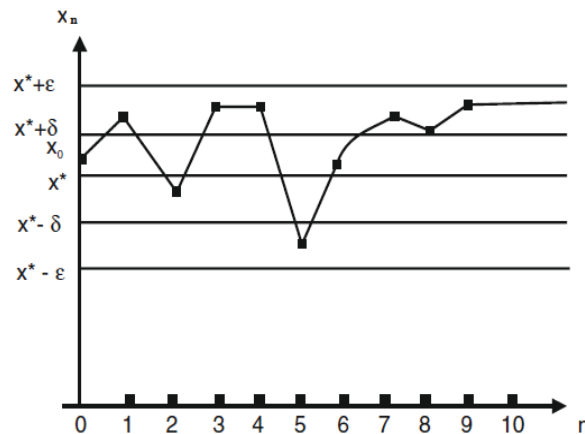


Figura 6 – Ponto de equilíbrio estável

Fonte: Elaydi (2005).

II) Atrator: se existir $\eta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \eta$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Se a definição de atrator for válida para todo $\eta > 0$, x^* é chamado atrator global.

III) Assintoticamente estável: Se for estável e atrator. Se a definição de atrator for válida para todo $\eta > 0$, x^* é denominado globalmente assintoticamente estável. (Figuras 8 e 9)

Observe que na definição de estabilidade assintótica, o ponto de equilíbrio atrai qualquer solução com condição inicial no intervalo $(x^* - \eta, x^* + \eta)$, enquanto na definição de estabilidade assintótica global, independente de onde se toma a condição inicial, a solução tende ao equilíbrio x^* .

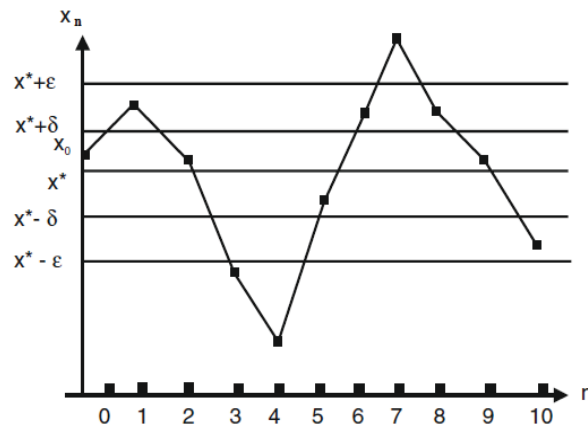


Figura 7 – Ponto de equilíbrio instável

Fonte: Elaydi (2005).

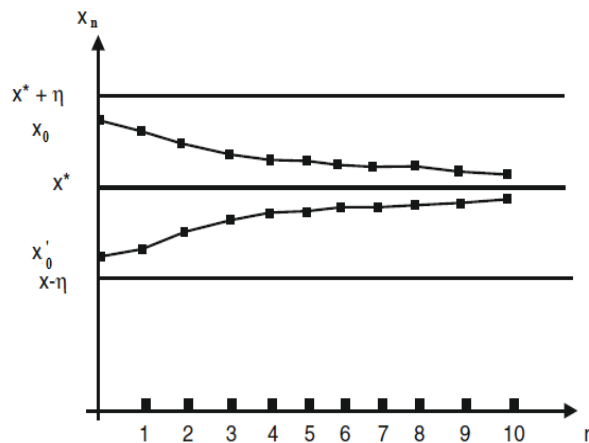


Figura 8 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável

Fonte: Elaydi (2005).

No caso de instabilidade, a solução poderá, por exemplo, oscilar em torno do equilíbrio, sem tender a ele.

2.4.1 Método de Cobweb – Diagrama em “Teia de Aranha”

O método de Cobweb ou teia de aranha, também conhecido como diagrama em degraus, é uma técnica gráfica utilizada para investigar a estabilidade ou instabilidade de pontos de equilíbrio. É uma ferramenta que auxilia na compreensão do comportamento da solução de uma equação de diferenças na vizinhança do ponto de equilíbrio dessa equação. Embora não seja uma ferramenta suficiente para provar se um ponto de equilíbrio é, ou não, estável, é um método rápido para visualizar geometricamente se um ponto de equilíbrio parece ser instável ou estável.

Dada uma equação de diferenças $x_{n+1} = f(x_n)$, representa-se o gráfico de f no plano (x_n, x_{n+1}) . Toma-se um valor inicial x_0 no eixo das abscissas. Traça-se uma linha vertical a partir

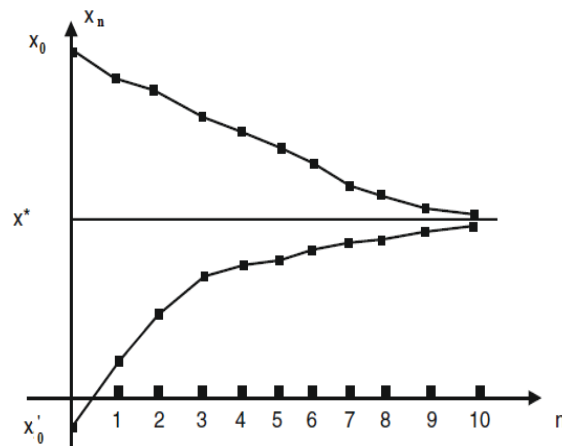


Figura 9 – Ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável

Fonte: Elaydi (2005).

de x_0 até se encontrar o gráfico de f e lê-se esse valor no eixo das ordenadas. Marca-se o valor de $f(x_0)$ encontrado no eixo das abscissas, $x_1 = f(x_0)$, para o qual se determina novamente o valor de f , e assim sucessivamente. Graficamente este ciclo pode ser feito traçando uma linha horizontal desde o ponto do gráfico $(x_0, f(x_0))$ até a função identidade $f(x) = x$ (a bissetriz do primeiro quadrante), e daí novamente uma linha vertical até o gráfico de f . Continuando este processo pode-se determinar a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$. Se x_0 for um ponto inicial suficientemente próximo de um ponto de equilíbrio x^* , a órbita de x_0 demonstra uma indicação clara da estabilidade de x^* , pois indica como evolui x_0 quando há um pequeno desvio de x^* . A Figura 10 apresenta um diagrama em “teia de aranha” para se estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio x_2^* de uma equação com três pontos de equilíbrio. Observa-se que x_2^* é instável, uma vez que, para qualquer valor x_0 , relativamente próximo de x_2^* , a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$ vai afastando-se, progressivamente, de x_2^* . Também se vê que no caso dos outros dois pontos de equilíbrio, a órbita converge para os mesmos. Maiores detalhes e informações, veja (LUÍS, 2006) e (MICKENS, 1990).

Exemplo 20. Os pontos fixos da equação $x_{n+1} = (x_n)^2$ são $x^* = 0$ e $x^* = 1$.

Observando o diagrama de Cobweb para $x^* = 0$, é sugerido que tal ponto de equilíbrio é estável, pois tomando-se x_0 numa vizinhança de x^* , a órbita de x_0 se aproxima de x^* . (Figura 11)

Para $x^* = 1$, o diagrama sugere que esse equilíbrio é instável, pois tomando-se x_0 na vizinhança desse x^* , a órbita de x_0 se afasta de x^* . (Figura 12)

Exemplo 21. A equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ tem como pontos fixos $x^* = -1$, $x^* = 0$ e $x^* = 1$.

Através dos diagramas de Cobweb, para cada caso, é possível inferir que $x^* = -1$ é instável (Figura 13), $x^* = 0$ é estável (Figura 14) e $x^* = 1$ é instável (Figura 15).

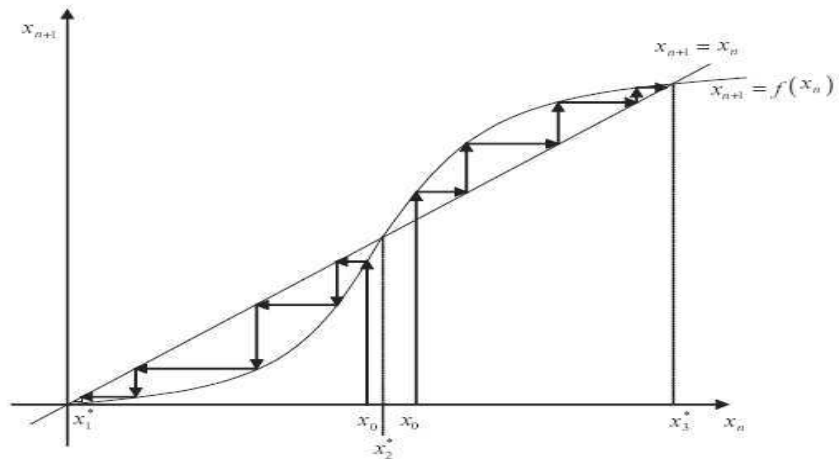


Figura 10 – Estabilidade de x_2^*

Fonte: Luís (2006).

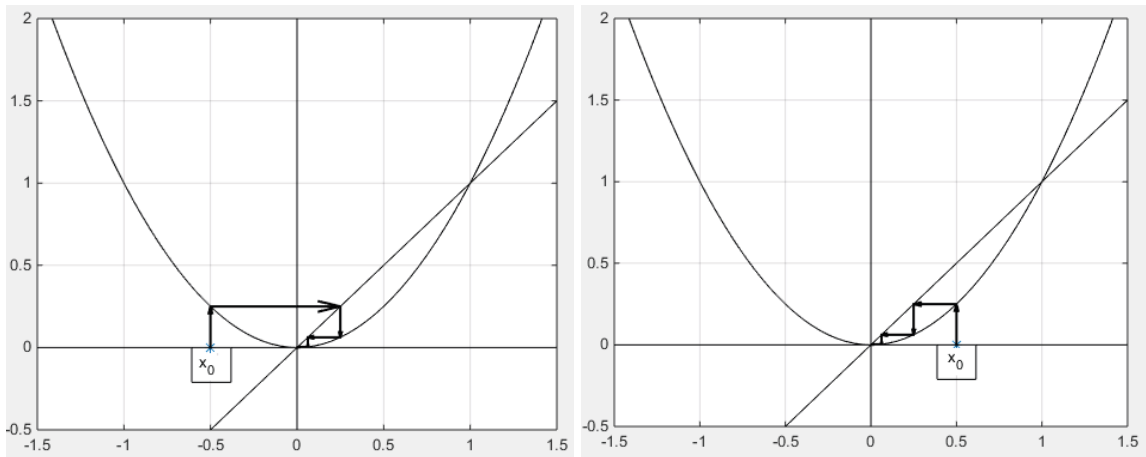


Figura 11 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^2$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 22. Considere a equação

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n} ; \alpha > 1, \beta > 0.$$

Através do diagrama de Cobweb, é possível concluir que o ponto de equilíbrio positivo da equação é estável quando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

De fato: Para se determinar o ponto de equilíbrio, resolve-se a equação

$$x^* = \frac{\alpha x^*}{1 + \beta x^*}$$

$$x^*(1 + \beta x^*) - \alpha x^* = 0$$

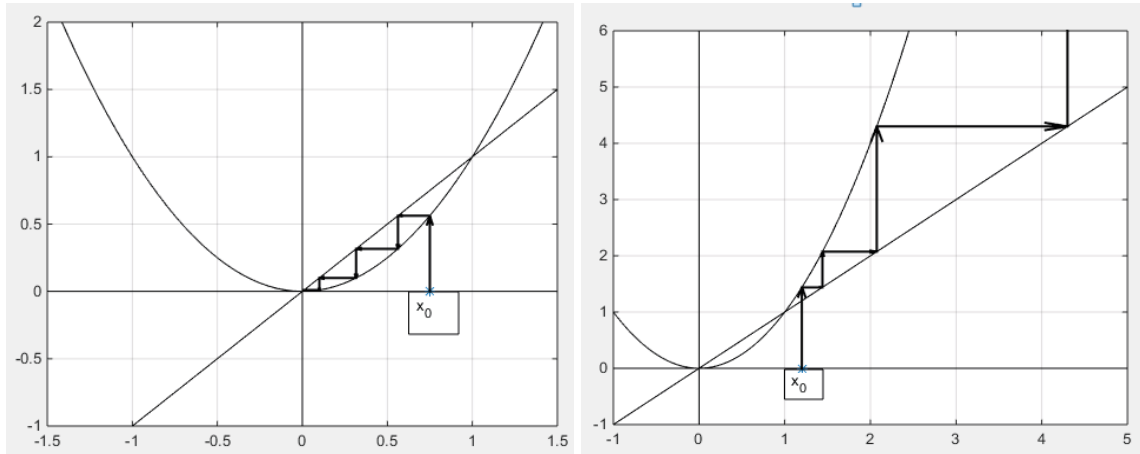


Figura 12 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^2$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

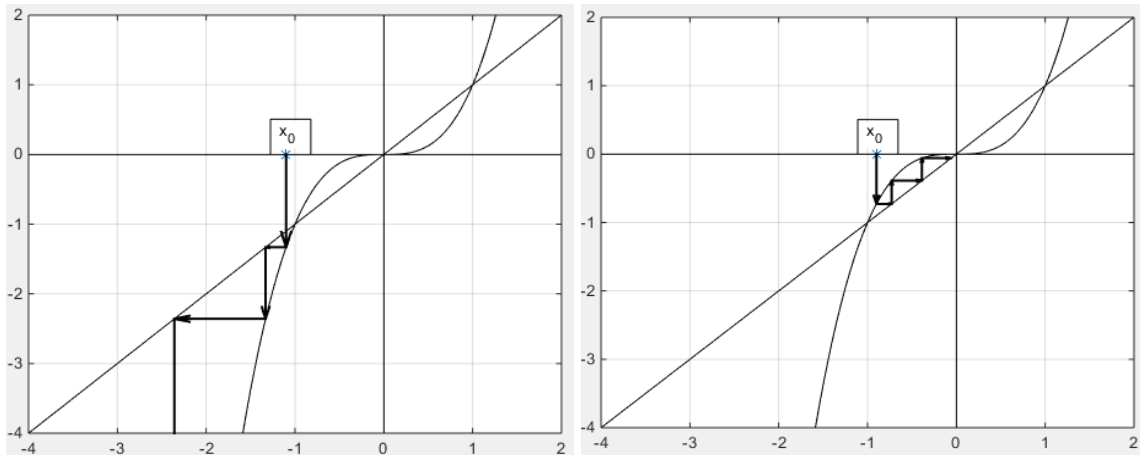


Figura 13 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ e $x^* = -1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O único ponto de equilíbrio positivo é $x^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$. Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, tem-se que $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}$, ou seja, $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f(x) = \frac{2x}{1+x}$. Observando o diagrama em "teia de aranha" (Figura 16), conclui-se que os valores das várias iterações convergem para o ponto de equilíbrio $x^* = 1$. Neste caso, o ponto de equilíbrio $x^* = 1$ é estável.

Posteriormente, através de teoremas, será possível concluir que tal ponto fixo é assintoticamente estável.

2.4.1.1 Aplicação do Método de Cobweb em Economia

Uma aplicação prática do modelo de Cobweb ocorre na constituição de estoques reguladores mantidos pelo governo para controlar o preço de alguns produtos agrícolas. Entende-se que uma oferta estável de tais produtos (especialmente alimentos) é socialmente desejável, cabendo

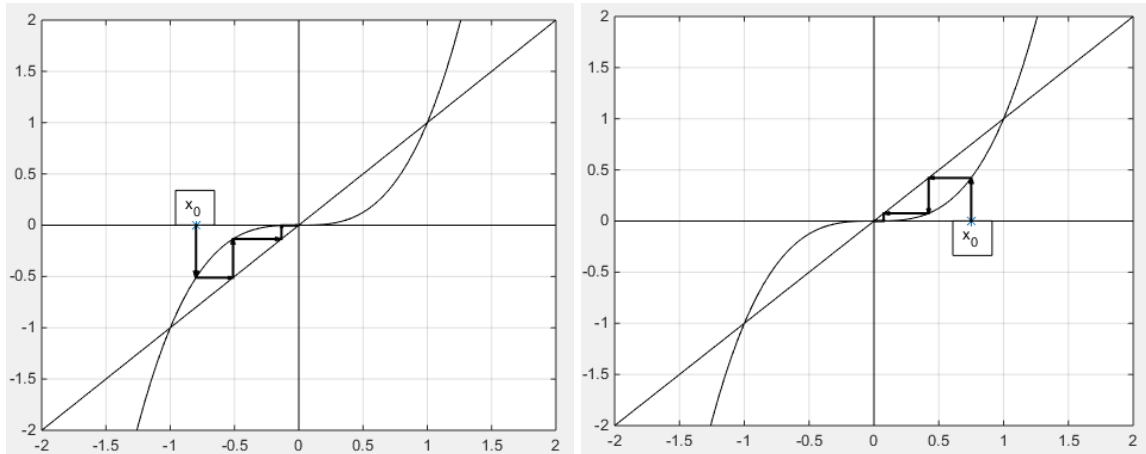


Figura 14 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

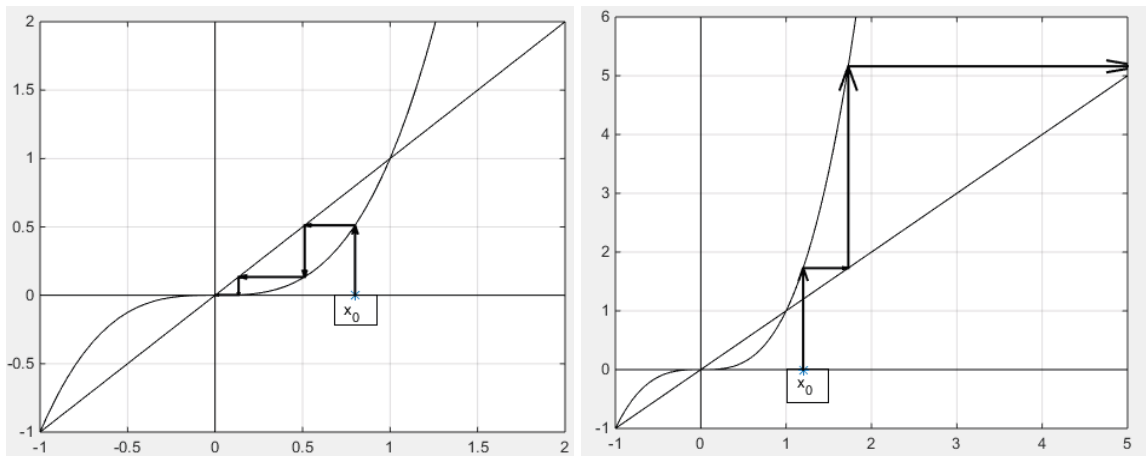


Figura 15 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

ao governo então amortecer as flutuações de preços e reduzir o risco de perda de capital dos agricultores na venda da safra anual. Os agricultores se espelham no mercado atual para decidir o que plantar de acordo com o preço de venda e tempo de cultivo.

Formalmente, a ação do governo constituirá uma lei de controle, cujo preço de *set up* (i.é. o valor que o controle “busca” atingir) é estimado como o preço que fecha o mercado e garantiria a venda de toda produção. O objetivo final é garantir-lhes uma margem de rentabilidade fixa, o que incentivaria o replantio ano após ano e manteria a oferta de produtos agrícolas (parte majoritária da cesta de consumo das classes baixas) relativamente constante, de acordo com (CHIANG; WAINWRIGHT, 2006) e (MICKENS, 1990).

Considera-se um modelo que envolve a quantidade ofertada ao mercado (a oferta de determinado produto), a quantidade demandada (tudo que o mercado está disposto a absorver,

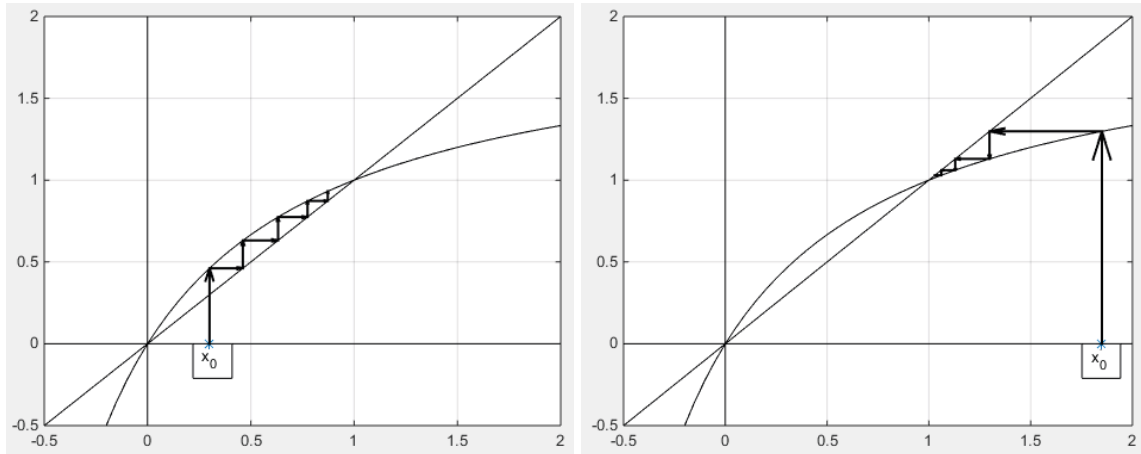


Figura 16 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

comprar) e o preço do produto em questão.

Suponha que a quantidade demandada no tempo t , (D_t) , é função do preço vigente em t , (p_t) , e a quantidade ofertada no tempo t , (S_t) , é função do preço esperado, (p_e) no tempo t . Diz-se preço esperado, e não preço vigente ou atual, pois a decisão de quanto será produzido deve ser tomada em tempos anteriores aos da venda, uma vez que o plantio ou a produção de algum produto necessita de tempo.

Supondo estas relações lineares, temos:

$$D_t = a - bp_t,$$

$$S_t = c + dp_e,$$

onde a , b , c e d são constantes positivas. Observe que a inclinação da reta demanda é negativa, pois um aumento no preço diminui a quantidade que o mercado está disposto a comprar. O coeficiente b representa a sensibilidade dos consumidores em relação ao preço. Logo, um aumento no preço da unidade refletirá em uma redução de b unidades na demanda. Já a reta de oferta apresenta inclinação positiva, pois o coeficiente d representa a sensibilidade dos fornecedores quanto ao preço esperado, i.e., quanto maior o preço esperado, maior será a disposição do mercado em produzir este produto. Em outras palavras, um aumento no preço esperado da unidade reflete em d unidades a mais na oferta.

Quanto ao preço esperado, p_e , vamos supor que todo fabricante/produtor faça suas projeções considerando que o preço se mantenha o mesmo de um período para o outro. Assim, p_e é o preço anterior a t , o que permite escrever

$$S_t = c + dp_{t-1}.$$

Suponha ainda como hipótese, que o preço ideal de venda de um produto é aquele que faz com

que o mercado absorva tudo que é produzido, ou seja,

$$D_t = S_t.$$

Para desenvolver esta igualdade, serão usados os índices t e $t + 1$, ao invés de t e $t - 1$ apresentados na equação da oferta, pois são mais usuais em equações de diferenças. Então,

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= c + dp_t, \\ D_{t+1} &= a - bp_{t+1}. \end{aligned}$$

Calculando o preço ideal,

$$\begin{aligned} a - bp_{t+1} &= c + dp_t, \\ p_{t+1} &= -\frac{d}{b}p_t + \frac{a-c}{b}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$p_{t+1} = Ap_t + B, \tag{2.17}$$

onde A e B são constantes tais que $A = -\frac{d}{b}$ e $B = \frac{a-c}{b}$.

O ponto de equilíbrio (preço de equilíbrio) dessa equação de diferenças linear de 1ª ordem é

$$\begin{aligned} p^* &= Ap^* + B, \\ p^*(1 - A) &= B, \\ p^* &= \frac{B}{1 - A}, \end{aligned}$$

que é o ponto de intersecção da curva de oferta e da curva de demanda. Neste ponto, a quantidade procurada é exatamente igual a quantidade oferecida. Para preços acima do preço de equilíbrio p^* , haverá excesso de oferta, enquanto que para preços abaixo do preço de equilíbrio haverá excesso de procura. Neste sentido, a razão entre os declives das curvas de fornecimento e procura determina o comportamento da sequência de preços, que neste caso é representado pela constante A . Assim, tem-se 3 casos a considerar, conforme o declive da curva de preços:

1. $-1 < A < 0$;
2. $A = -1$;
3. $A < -1$.

Analisando a órbita de p_0 na vizinhança de p^* através do diagrama de Cobweb, segue que:

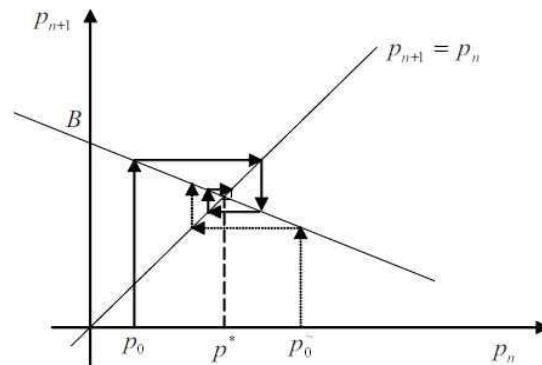


Figura 17 – Preço de equilíbrio assintoticamente estável

Fonte: Luís (2006).

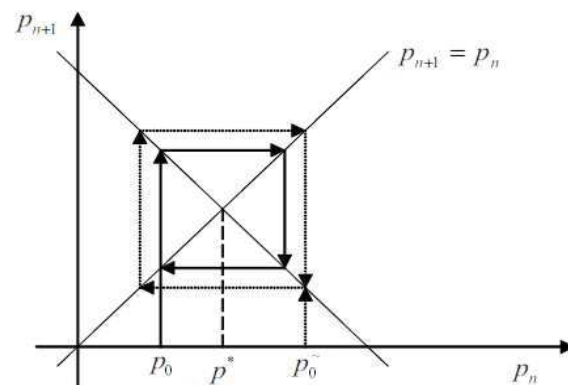


Figura 18 – Preço de equilíbrio estável

Fonte: Luís (2006).

1. O preço alterna, mas convergindo para o preço de equilíbrio p^* . Neste caso, p^* é assintoticamente estável (Figura 17). Note que este caso é equivalente a $-\frac{d}{b} > -1$, ou seja $c < a$, que se interpreta como um mercado onde a sensibilidade dos fornecedores ao preço é menor que a dos compradores.
2. Os preços oscilam entre dois valores, pois $p_1 = -p_0 + B$ e $p_2 = p_0$. Assim, o ponto de equilíbrio é estável (Figura 18). Neste caso, a sensibilidade dos fornecedores e compradores ao preço é a mesma.
3. Os preços oscilam indefinidamente à volta do ponto de equilíbrio p^* , mas afastando-se progressivamente deste. Neste caso, p^* é instável (Figura 19). Tem-se que a sensibilidade ao preço dos fornecedores é maior que a dos compradores.

A solução analítica da equação (2.17) com uma condição inicial p_0 , usando (2.10), é

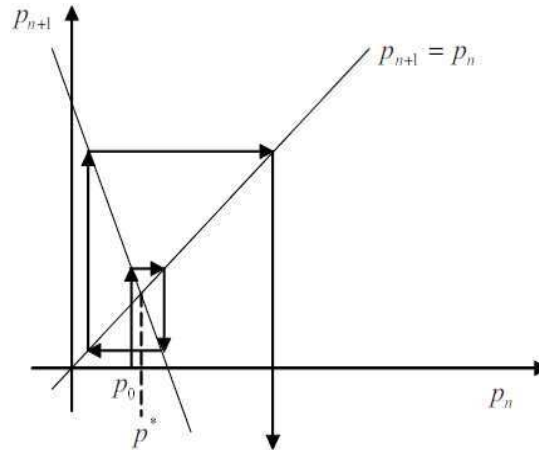


Figura 19 – Preço de equilíbrio instável

Fonte: Luís (2006).

$$p_n = \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^n + \frac{B}{1-A}.$$

Calculando o limite de p_n quando $n \rightarrow +\infty$, chegam-se às três conclusões tiradas a partir dos diagramas em “teia de aranha”. Assim, no 1º caso, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{B}{1-A} = p^*$; no 2º caso, se n é par, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p_0$ e se n é ímpar, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = B - p_0$ e, no 3º caso, p_n não tem limite.

O estudo do gráfico da estabilidade dos pontos de equilíbrio de uma equação de diferenças, através do diagrama em forma de “teia de aranha”, não fornece uma prova analítica da estabilidade das soluções.

A seguir, são apresentados alguns critérios para se determinar o comportamento assintótico dos pontos de equilíbrio.

As demonstrações dos teoremas abaixo podem ser encontradas em (ELAYDI, 2005).

Teorema 1. Suponha x^* um ponto de equilíbrio da equação (2.2) em que f é continuamente diferenciável em x^* . Se

1. $|f'(x^*)| < 1$, então x^* é assintoticamente estável;
2. $|f'(x^*)| > 1$, então x^* é instável;
3. $|f'(x^*)| = 1$, nada se pode afirmar.

Demonstração. 1. Considere uma constante M , tal que $|f'(x^*)| \leq M < 1$. Pelo Teorema da Conservação de Sinal, existe um intervalo $I = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ contendo x^* tal que $|f'(x)| \leq M < 1$, para todo $x \in I$.

Seja $x_0 \in I$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe c entre x_0 e x^* tal que

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(c)| \cdot |x_0 - x^*|.$$

Como $f(x_0) = x_1$ e $f(x^*) = x^*$, tem-se $|x_1 - x^*| = |f'(c)| \cdot |x_0 - x^*|$, ou seja, $|x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|$.

Esta desigualdade mostra que x_1 está mais próximo de x^* do que x_0 está de x^* . Consequentemente, $x_1 \in I$.

De modo análogo, tem-se que:

$$|x_2 - x^*| \leq M|x_1 - x^*|,$$

e assim x_2 está mais próximo de x^* do que x_1 está de x^* . Logo, $x_2 \in I$.

Mais geralmente, tem-se que:

$$|x_n - x^*| \leq M|x_{n-1} - x^*|.$$

Logo, x_n está mais próximo de x^* do que x_{n-1} está de x^* . Assim, $x_n \in I, \forall n \geq 0$.

Por indução, é possível mostrar que $|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*|, \forall n \geq 0$.

Para provar a estabilidade de x^* , dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Tem-se que:

$$\text{se } |x_0 - x^*| < \delta, \text{ então } |x_n - x^*| < M^n \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon, \forall n \geq 0,$$

ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2M} \text{ tal que se } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon, \forall n \geq 0.$$

Portanto, x^* é estável.

Além disso, $0 < |x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*|$, para todo $n \geq 0$.

Como $M < 1$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Portanto, x^* é assintoticamente estável.

2. Suponha que $|f'(x^*)| \geq M > 1$. Então existe um intervalo $I = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ contendo x^* tal que $|f'(x)| \geq M > 1$, para todo $x \in I$.

Seja $x_0 \in I$. Para demonstrar o resultado desejado, basta mostrar que existe algum número k tal que x_k não está no intervalo I .

Pelo Teorema do Valor Médio, existe c entre x_0 e x^* tal que

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(c)| \cdot |x_0 - x^*|,$$

ou seja,

$$|x_1 - x^*| \geq M|x_0 - x^*|,$$

e como $M > 1$, segue que

$$|x_1 - x^*| > |x_0 - x^*|,$$

ou seja, a distância de x_1 a x^* é superior à distância de x_0 a x^* .

Se x_1 não estiver em I , então está demonstrado. Se x_1 estiver em I , repete-se o processo.

Assim,

$$|x_2 - x^*| > M|x_1 - x^*| > M^2|x_0 - x^*| > |x_0 - x^*|.$$

Novamente por indução, tem-se: ou algum x_k não está em I ou $|x_k - x^*| > M^k|x_0 - x^*|$.

Suponha que $|x_{k-1} - x^*| > M^{k-1}|x_0 - x^*|$. Assim,

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &= |f(x_{k-1}) - x^*| = |f(x_{k-1}) - f(x^*)| \\ &= |f'(c_1)||x_{k-1} - x^*| > M|x_{k-1} - x^*| > MM^{k-1}|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|x_k - x^*| > M^k|x_0 - x^*|.$$

Como $M > 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| = \infty,$$

ou seja, x^* é instável.

□

Exemplo 23. Dada a equação $x_{n+1} = (x_n)^3 + x_n$, seu ponto de equilíbrio é $x^* = 0$. Pelo Teorema 1, trata-se de um ponto de equilíbrio sobre o qual nada se pode afirmar, pois

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 1 \\ f'(0) &= 1 \Rightarrow |f'(0)| = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 24. Conforme exemplo 20, a equação $x_{n+1} = (x_n)^2$ possui dois pontos de equilíbrio: $x^* = 0$ e $x^* = 1$. Tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \\ f'(0) &= 0 \Rightarrow |f'(0)| = 0 < 1 \\ f'(1) &= 2 \Rightarrow |f'(1)| = 2 > 1, \end{aligned}$$

ou seja, $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio instável, o que confirma a conclusão do diagrama de Cobweb (Figuras 11 e 12).

Exemplo 25. Conforme exemplo 21, a equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ possui três pontos de equilíbrio: $x^* = -1$, $x^* = 0$ e $x^* = 1$. Tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \\ f'(-1) &= 3 \Rightarrow |f'(-1)| = 3 > 1 \\ f'(0) &= 0 \Rightarrow |f'(0)| = 0 < 1 \\ f'(1) &= 3 \Rightarrow |f'(1)| = 3 > 1, \end{aligned}$$

ou seja, $x^* = -1$ é um ponto de equilíbrio instável, $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e, $x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio instável. Estes resultados reafirmam as conclusões da análise de Cobweb (Figuras 13,14 e 15).

Exemplo 26. A equação discreta

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}; \quad \alpha > 1, \beta > 0,$$

foi analisada no exemplo 22. Seus pontos fixos são $x^* = 0$ e $x^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$, os quais são, respectivamente, instável e estável quando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\alpha}{(1 + \beta x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2} \\ f'(0) &= 2 \Rightarrow |f'(0)| = 2 > 1 \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(1)| = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1, $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável e $x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, o que confirma a análise do diagrama de Cobweb (Figuras 16 e 20).

Além disso, pode-se afirmar que $x^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para quaisquer valores de $\alpha > 1$ e $\beta > 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\alpha}{(1 + \beta x)^2} \\ f'(x^*) &= \frac{\alpha}{(1 + \alpha - 1)^2} = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Como $\alpha > 1$, segue que $|f'(x^*)| < 1$. Portanto, x^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para quaisquer $\alpha > 1$ e $\beta > 0$.

Exemplo 27. Seja a equação $x_{t+1} = 2x_t - (x_t)^2$. Os pontos fixos são encontrados resolvendo-se a equação $x^* = 2x^* - (x^*)^2$, que são $x^* = 0$ e $x^* = 1$. Para estabelecer a estabilidade, seja $f(x) = 2x - x^2$. Então, $f'(x) = 2 - 2x$, $f'(0) = 2$ e $f'(1) = 0$. Assim,

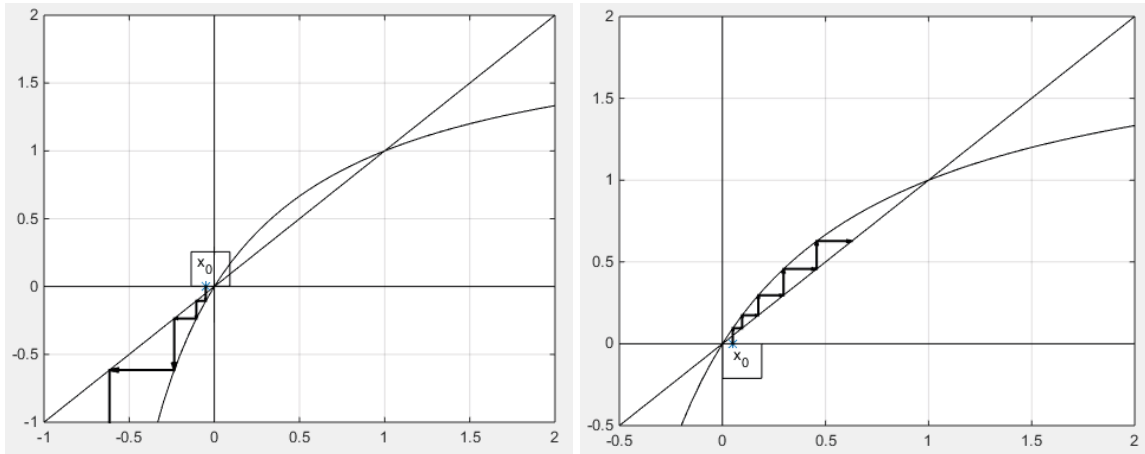


Figura 20 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \frac{2}{(1+x_n)^2}$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

$|f'(0)| > 1 \Rightarrow x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável (Figura 21),
 $|f'(1)| < 1 \Rightarrow x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (Figura 22).

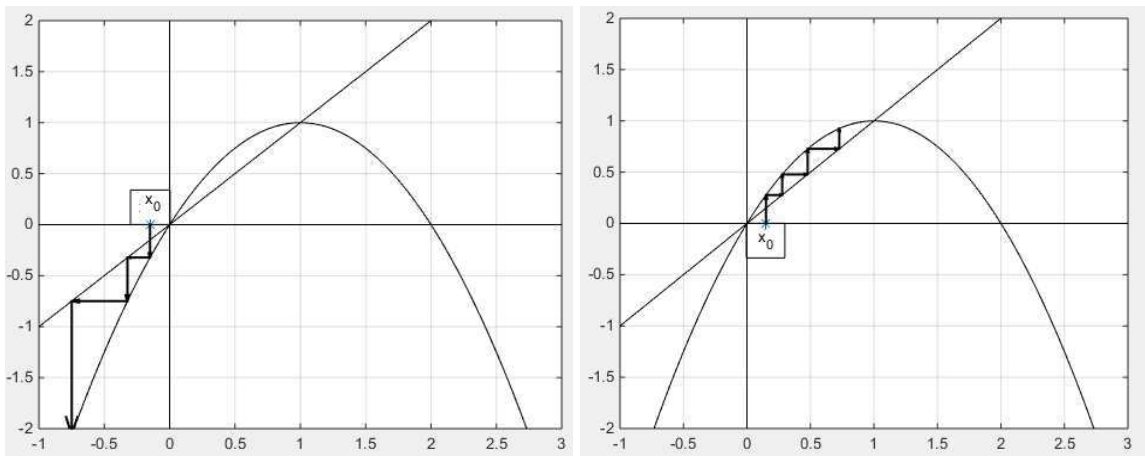


Figura 21 – Método de Cobweb para a equação $x_{t+1} = 2x_t - (x_t)^2$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 28. A equação $x_{n+1} = 1,63x_n - 0,9(x_n)^2$ tem como pontos fixos $x^* = 0$ e $x^* = 0,7$. Considerando $f(x) = 1,63x - 0,9x^2$, tem-se $f'(x) = 1,63 - 1,8x$, $f'(0) = 1,63$ e $f'(0,7) = 0,37$.

Como

$|f'(0)| > 1 \Rightarrow x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável (Figura 23),
 $|f'(0,7)| < 1 \Rightarrow x^* = 0,7$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (Figura 24).

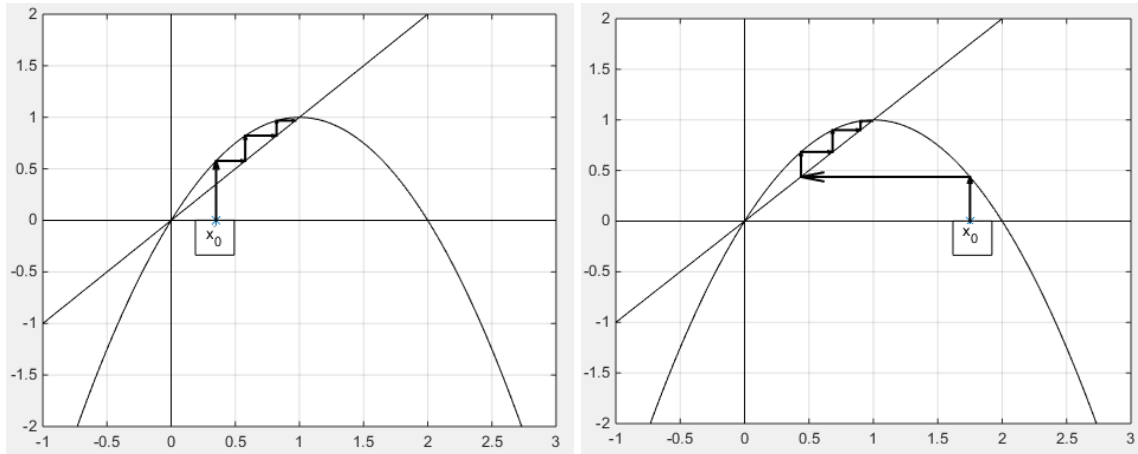


Figura 22 – Método de Cobweb para a equação $x_{t+1} = 2x_t - (x_t)^2$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

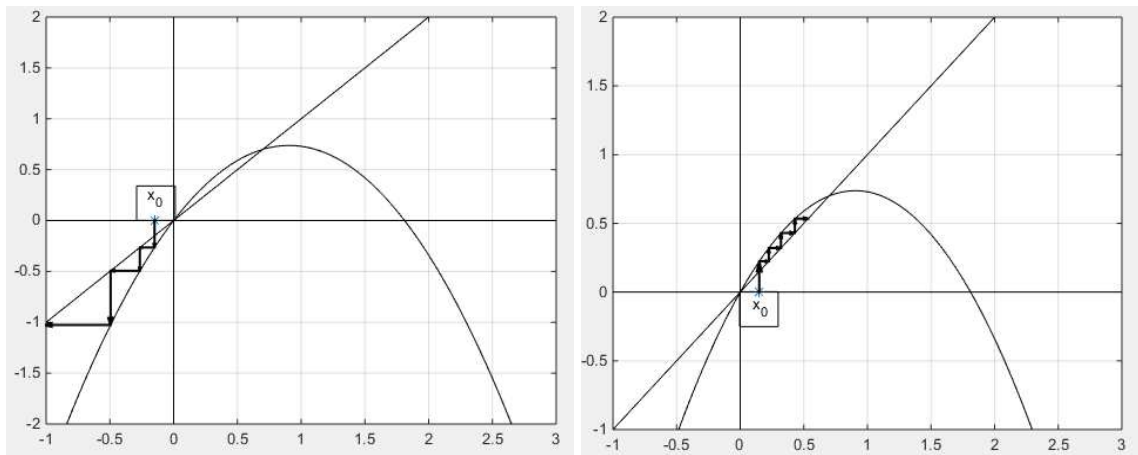


Figura 23 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = 1,63x_n - 0,9(x_n)^2$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 29. Considere a equação $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$ estudada no exemplo 15, com pontos de equilíbrio $x^* = 1$ e $x^* = 3$. Analisando $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, tem-se $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$, $f'(1) = 2$ e $f'(3) = \frac{2}{3}$. Como

$|f'(1)| = 2 > 1 \Rightarrow x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio instável. (Figura 25),

$|f'(3)| = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow x^* = 3$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (Figura 26).

Teorema 2. Suponha x^* um ponto de equilíbrio de (2.2), com $f'(x^*) = 1$ e f''' contínua em x^* . Segue que:

(i) Se $f''(x^*) \neq 0$, então x^* é instável;

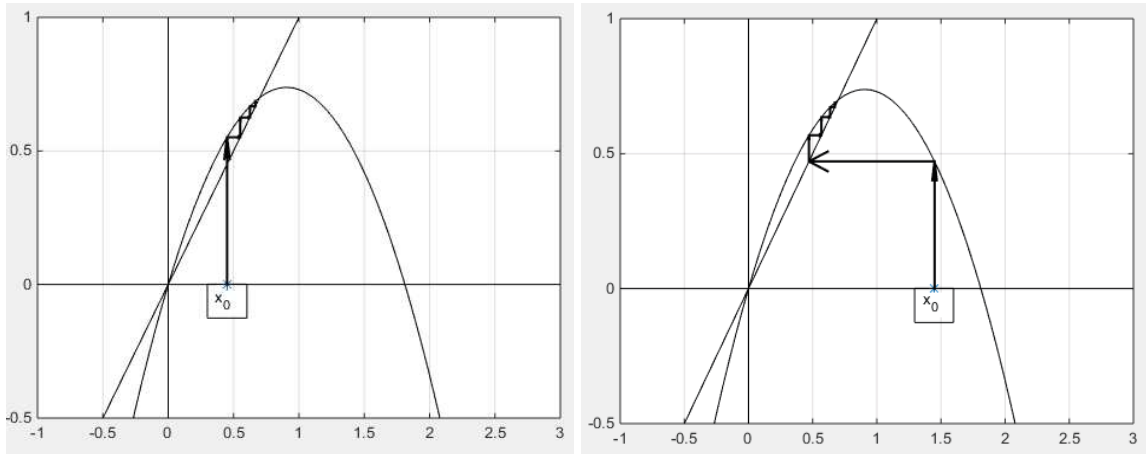


Figura 24 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = 1,63x_n - 0,9(x_n)^2$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

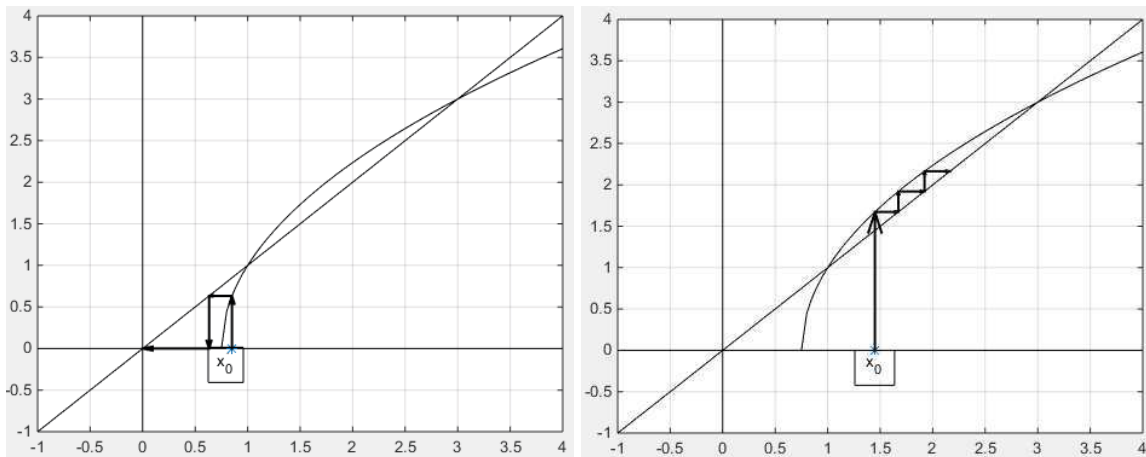


Figura 25 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

(ii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$, então x^* é instável;

(iii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$, então x^* é assintoticamente estável.

Demonstração. (i)

Se $f''(x^*) \neq 0$, temos dois casos a considerar: $f''(x^*) > 0$ ou $f''(x^*) < 0$.

Se $f''(x^*) > 0$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f'(x) > 1$ para todo x no intervalo $I = (x^*, x^* + \varepsilon)$, pois f' é crescente em I . Usando a mesma demonstração do Teorema 1, parte (2), prova-se que x^* é instável.

Por outro lado se $f''(x^*) < 0$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f'(x) < 1$ em $I = (x^* - \varepsilon, x^*)$, pois f' é decrescente em I e portanto, pelo mesmo teorema, x^* é estável.

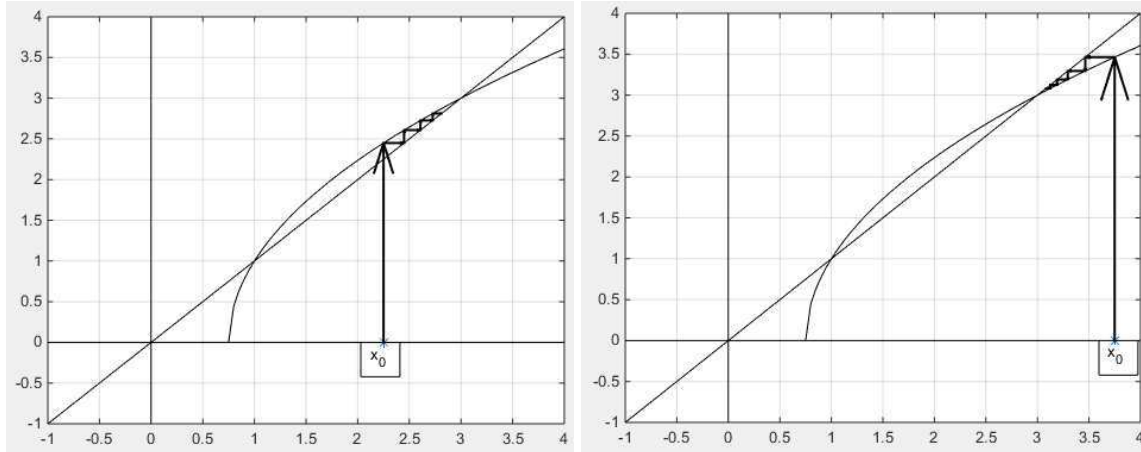


Figura 26 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$ e $x^* = 3$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em particular se $f''(x^*) > 0$, então x^* é denominado semiestável à esquerda (Figura 30) e se $f''(x^*) < 0$, x^* é denominado semiestável à direita (Figura 31).

Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) \neq 0$, então x^* é ponto de inflexão de f , de acordo com (GUIDO-RIZZI, 2001). Neste caso, podemos ter duas situações:

f tem concavidade voltada para cima à esquerda de x^* e concavidade voltada para baixo à direita de x^* , ou seja, $f''(x) > 0$ para $x < x^*$ e $f''(x) < 0$ para $x > x^*$ ou

f tem concavidade voltada para baixo à esquerda de x^* e concavidade voltada para cima à direita de x^* , ou seja, $f''(x) < 0$ para $x < x^*$ e $f''(x) > 0$ para $x > x^*$.

(ii)

Como $f'''(x) > 0$ numa vizinhança de x^* , $f''(x) < 0$ para $x < x^*$, $f''(x) = 0$ para $x = x^*$ e $f''(x) > 0$ para $x > x^*$, então $f'(x) > 1$ em $I = (x^* - \varepsilon, x^*) \cup (x^*, x^* + \varepsilon)$. Pela demonstração do Teorema 1, parte (2), segue que x^* é instável.

(iii)

Como $f'''(x) < 0$ numa vizinhança de x^* , $f''(x) > 0$ para $x < x^*$, $f''(x) = 0$ em $x = x^*$ e $f''(x) < 0$ para $x > x^*$, então $f'(x) < 1$ em $J = (x^* - \varepsilon, x^*) \cup (x^*, x^* + \varepsilon)$. Seguindo a demonstração do Teorema 1, parte (1), conclui-se que x^* é assintoticamente estável.

□

Exemplo 30. Dada a equação de diferenças $x_{n+1} = (x_n)^3 + x_n$, seu ponto de equilíbrio é $x^* = 0$. Tem-se $f'(x^*) = 3(x^*)^2 + 1$, $f'(0) = 1$ e $|f'(0)| = 1$. Através da primeira derivada de f , nada se conclui. Calculando-se $f''(x^*) = 6x^*$ e $f'''(x^*) = 6$, segue $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 6 > 0$. Pelo Teorema 2 (ii), $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

O método de Cobweb na Figura 27 confirma a instabilidade de $x^* = 0$.

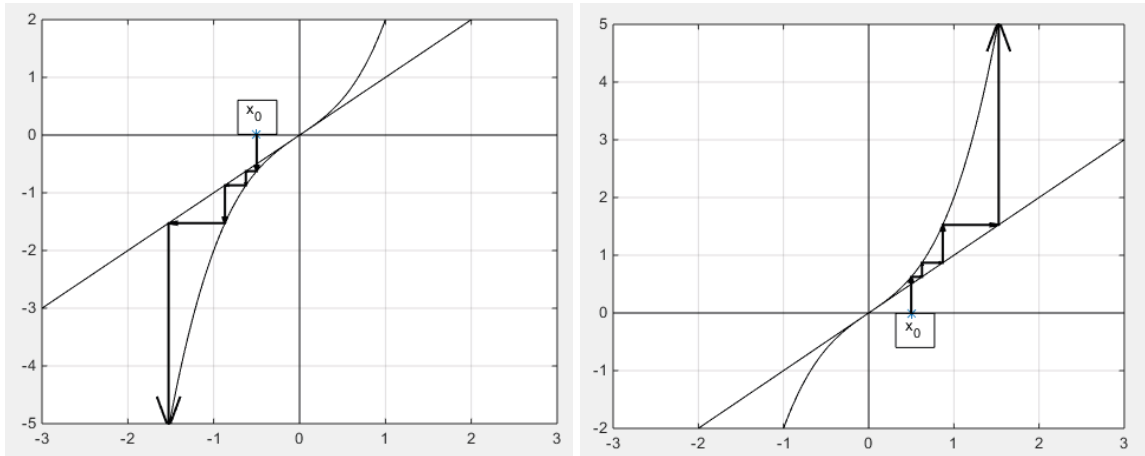


Figura 27 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^3 + x_n$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 31. Considere a equação de diferenças $x_{n+1} = (x_n)^2 - x_n + 1$. Seu ponto de equilíbrio é $x^* = 1$. Tem-se $f'(x^*) = 2x^* - 1$, $f'(1) = 1$, $|f'(1)| = 1$. Pelo Teorema 1, nada se pode concluir. Calculando-se $f''(x^*) = 2$, segue $f''(1) = 2$ e pelo Teorema 2 (ii), $x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio instável.

Pode se observar através do método de Cobweb na Figura 28, que o ponto de equilíbrio $x^* = 1$ é instável.

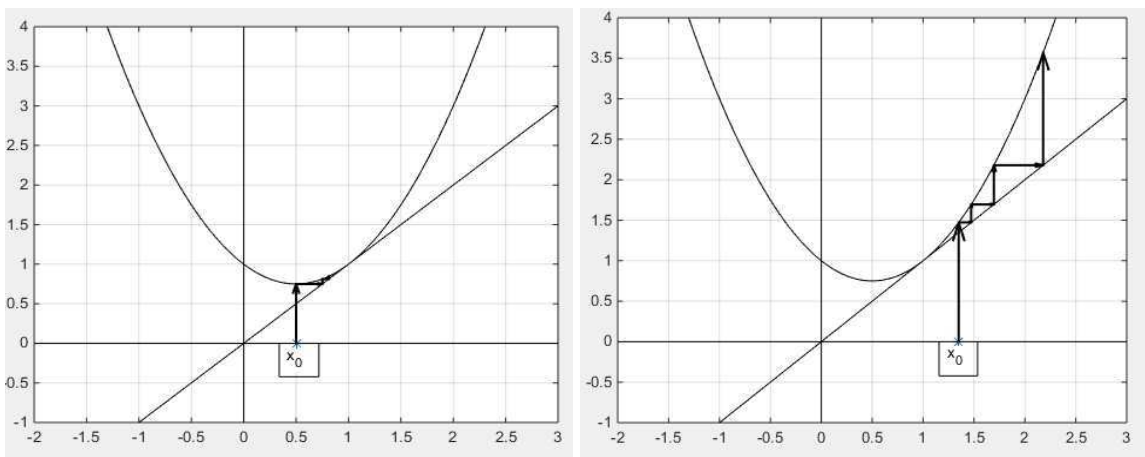


Figura 28 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = (x_n)^2 - x_n + 1$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 32. Dada a equação de diferenças $x_{n+1} = -(x_n)^3 + x_n$, seu ponto de equilíbrio é $x^* = 0$. Tem-se $f'(x^*) = -3(x^*)^2 + 1$, $f'(0) = 1$ e $|f'(0)| = 1$. Através da primeira derivada de f , nada

se conclui. Calculando-se $f''(x^*) = -6x^*$ e $f'''(x^*) = -6$, segue $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -6 < 0$. Pelo Teorema 2 (iii), $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Através do método de Cobweb na Figura 29, é possível observar que o ponto $x^* = 0$ é estável.

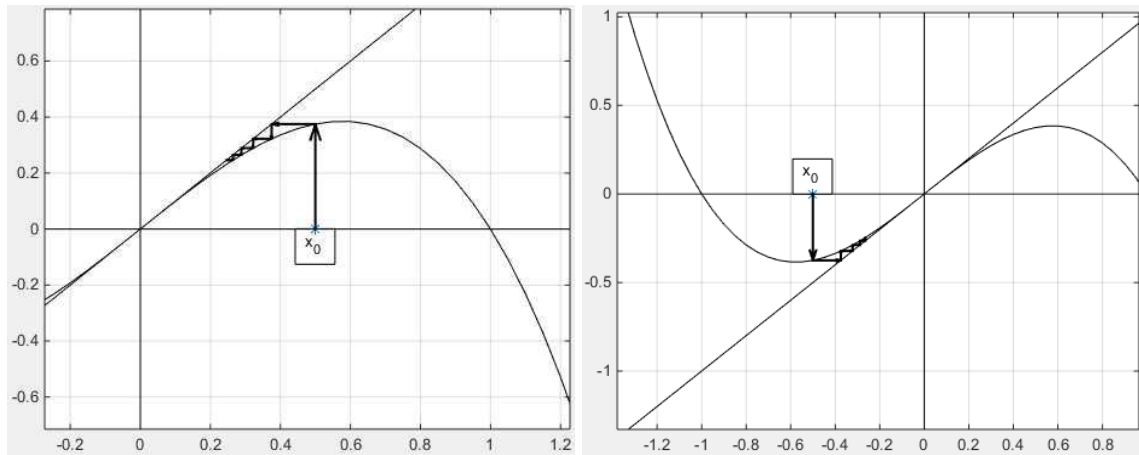


Figura 29 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^3 + x_n$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

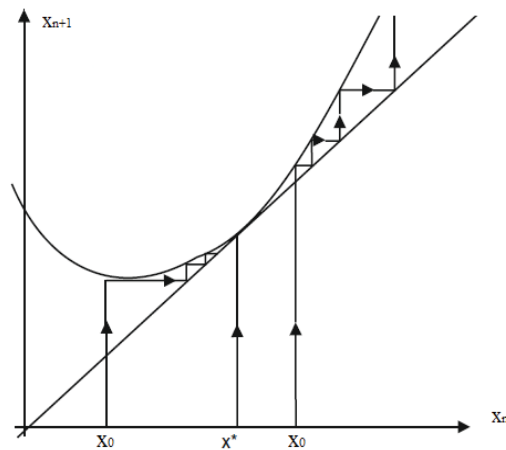


Figura 30 – Ponto de equilíbrio semiestável à esquerda

Fonte: Elaydi (2005).

Para analisar o caso $f'(x^*) = -1$, é necessário introduzir a definição de derivada Schwartzianna de uma função f e a definição de uma função de classe C^3 .

Definição 8. Diz-se que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo, é de classe C^3 e se escreve $f \in C^3$, quando f é três vezes derivável em I e $x \rightarrow f^{(3)}(x)$ é uma função contínua em I .

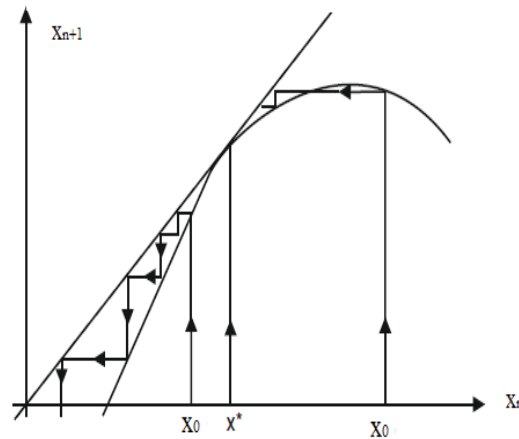


Figura 31 – Ponto de equilíbrio semiestável à direita

Fonte: Elaydi (2005).

Definição 9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 em um ponto x tal que $f'(x) \neq 0$. A derivada Schwartziana de f no ponto x é definida como

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Observe que quando $f'(x) = -1$,

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2. \quad (2.18)$$

O teorema a seguir analisa a questão de estabilidade de (2.2) em que $f'(x^*) = -1$.

Teorema 3. Suponha que x^* seja um ponto de equilíbrio de (2.2), com $f'(x^*) = -1$ e f''' contínua em x^* . Segue que:

- (i) Se $Sf(x^*) < 0$, então x^* é assintoticamente estável;
- (ii) Se $Sf(x^*) > 0$, então x^* é instável.

Demonstração. Considere a equação

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad g(y) = f^2(y). \quad (2.19)$$

Observe que o ponto de equilíbrio x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$ também é ponto de equilíbrio de $y_{n+1} = g(y_n)$, pois $f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$. Portanto, se x^* for um ponto fixo assintoticamente estável da equação $y_{n+1} = g(y_n)$, então também será assintoticamente estável em relação à equação $x_{n+1} = f(x_n)$.

Pela Regra da Cadeia, tem-se que

$$\frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}f(f(y)) = f'(f(y)) \cdot f'(y).$$

Como $f'(x^*) = -1$, segue que

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= f'(f(x^*))f'(x^*) = f'(x^*)f'(x^*) = 1, \\ g''(x^*) &= f''(f(x^*))f'(x^*)f'(x^*) + f'(f(x^*))f''(x^*) \\ &= f''(x^*)(-1)(-1) + f'(x^*)f''(x^*) \\ &= f''(x^*) - f''(x^*) = 0, \\ g'''(x^*) &= f'''(f(x^*))f'(x^*)[f'(x^*)]^2 + 2f''(f(x^*))f'(x^*)f''(x^*) \\ &\quad + f''(f(x^*))f'(x^*)f''(x^*) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 3f'(f(x^*))f''(x^*)f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 3f'(x^*)f''(x^*)f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 \\ &= 2\left(-f'''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2\right). \end{aligned}$$

Assim, por (2.18), $g'''(x^*) = 2Sf(x^*)$.

Observe que de acordo com o Teorema 2, a estabilidade assintótica de x^* dependerá do sinal de $Sf(x^*)$ e o teorema está demonstrado. \square

Para a demonstração dos teoremas de estabilidade, foram consultadas as referências (CIPOLLI, 2012), (ELAYDI, 2005) e (MALIGERI, 2013).

Exemplo 33. Considere a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$. Os pontos de equilíbrio são $x^* = -1$ e $x^* = 1$. Como $f'(x) = -2x + 1$, segue que $f'(-1) = 3$, $|f'(-1)| = 3 > 1$ e pelo Teorema 1, $x^* = -1$ é um equilíbrio instável (Figura 32).

Para $x^* = 1$, $f'(1) = -1$, e aplicando o Teorema 3, obtem-se $Sf(1) = -f'''(1) - \frac{3}{2}[f''(1)]^2 = -6 < 0$, e portanto, $x^* = 1$ é um equilíbrio assintoticamente estável.

Veja a análise gráfica (Cobweb) da equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ para $x^* = 1$ na Figura 33.

Exemplo 34. Seja a equação de diferenças $x_{n+1} = -x_n^3 - x_n$. O único ponto de equilíbrio é $x^* = 0$. Como $f'(x) = -3x^2 - 1$, $f'(0) = -1$ e $|f'(0)| = 1$, é necessário aplicar o Teorema 3. A derivada $Sf(0) = 6 > 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é instável. O método de Cobweb (Figura 34) reafirma a instabilidade de $x^* = 0$.

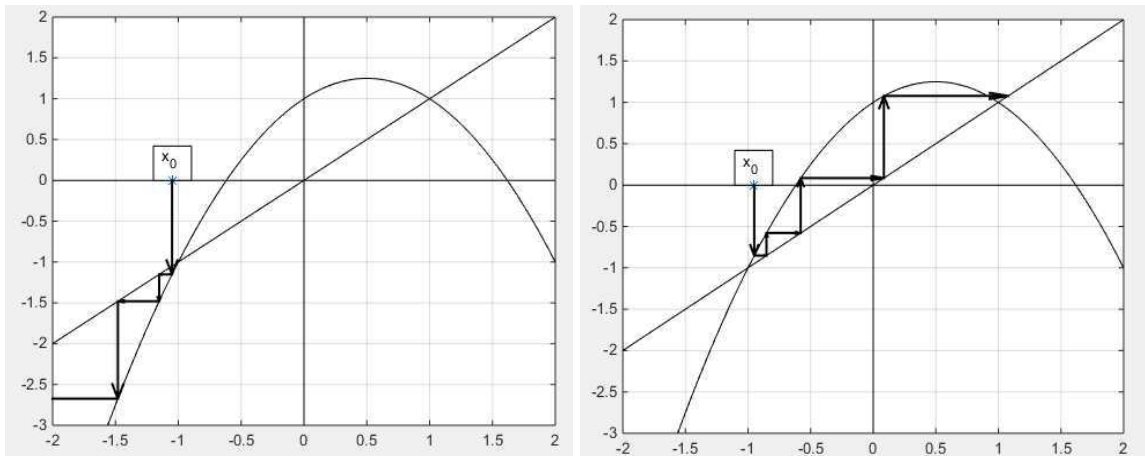


Figura 32 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ e $x^* = -1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

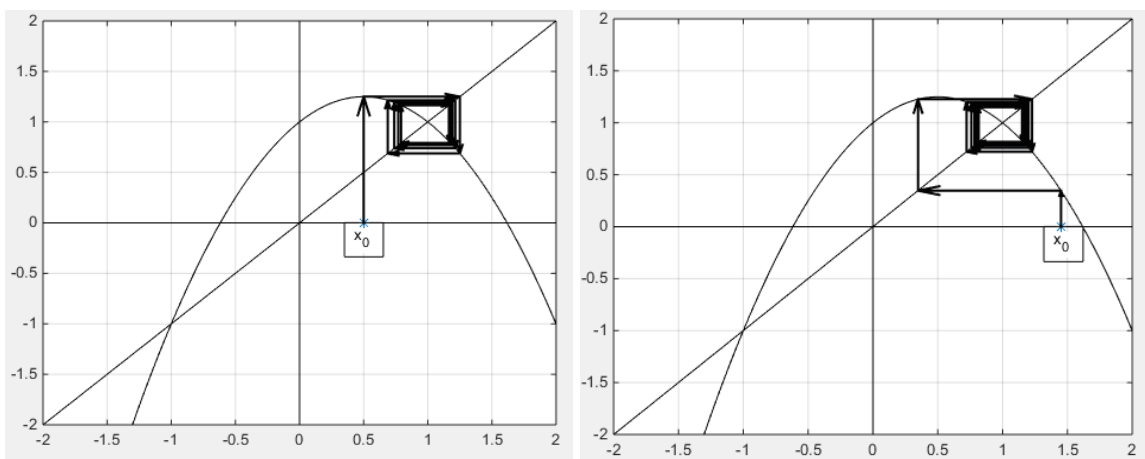


Figura 33 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ e $x^* = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

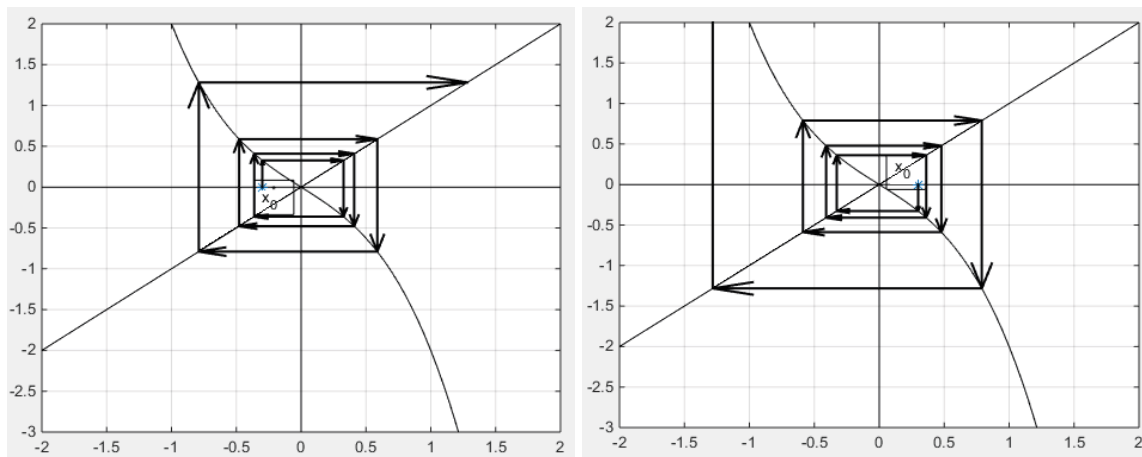


Figura 34 – Método de Cobweb para a equação $x_{n+1} = -x_n^3 - x_n$ e $x^* = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS DE 1^a ORDEM - MODELOS DE DINÂMICA POPULACIONAL

A teoria a seguir foi desenvolvida com base no texto de ([BASSANEZI, 2013](#)).

3.1 Modelo de Malthus

A dinâmica de populações no seu sentido mais amplo engloba o estudo de populações de moléculas, células, microorganismos, organismos superiores, enfermidades e sociedades humanas.

Uma pista para o entendimento da dinâmica populacional é considerar que *as populações interagem para persistirem, e para tal necessitam aumentar*.

A proposta de utilização da matemática para descrever o crescimento de uma população humana começou com o economista inglês T. R. Malthus (*An Essay on the Principle of Population - 1798*). Seu modelo assume que o *crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante*, e desta forma a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição.

O modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizada, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. O objetivo principal da introdução deste modelo foi o de causar espanto na opinião pública da época uma vez que estabelecia um crescimento em progressão geométrica para a população enquanto a alimentação crescia em progressão aritmética. A previsão da população mundial, segundo o modelo malthusiano, atingia números astronômicos em pouco tempo o que tornaria a Terra um planeta superlotado e inabitável.

Em termos de equação discreta, o modelo de Malthus é dado por

$$P_{n+1} - P_n = \alpha P_n, \quad (3.1)$$

onde P_n é a população no instante n e α é a taxa de crescimento ou decrescimento específico, dada pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, aqui considerada constante.

Considerando dada a população inicial P_0 , a solução de (3.1) é obtida por recorrência da expressão

$$P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n, \quad (3.2)$$

ou seja,

$$P_n = (\alpha + 1)^n P_0. \quad (3.3)$$

Assim, dados dois censos P_0 e P_n , a taxa de crescimento demográfico em n anos é obtida de (3.3) fazendo

$$(\alpha + 1)^n = \frac{P_n}{P_0} \Rightarrow \alpha = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1.$$

Utilizando os dados referentes à população de Ribeirão Preto (Figura 35), no período de 2000 a 2015, tem-se $P_0 = 504162$ e $P_{15} = 647862$.

Dados Oficiais	
Ano	População
2000	504162
2001	514481
2002	524714
2003	534828
2004	544897
2005	554996
2006	564808
2007	574315
2008	583910
2009	593710
2010	603774
2011	612346
2012	621038
2013	629855
2014	638796
2015	647862

Figura 35 – População de Ribeirão Preto no período de 2000 a 2015

Logo, α é dado por

$$\alpha = \sqrt[15]{\frac{647862}{504162}} - 1 = 0,01685921 \cong 0,017.$$

Assim, pelo modelo de Malthus, tem-se

$$\begin{aligned} P_n &= 504162(1 + 0,017)^n \\ P_0 &= 504162(1 + 0,017)^0 = 504162 \\ P_1 &= 504162(1 + 0,017)^1 = 512733 \\ P_2 &= 504162(1 + 0,017)^2 = 521449 \\ P_3 &= 504162(1 + 0,017)^3 = 530314 \\ P_4 &= 504162(1 + 0,017)^4 = 539329 \\ P_5 &= 504162(1 + 0,017)^5 = 548498 \\ P_6 &= 504162(1 + 0,017)^6 = 557822 \\ P_7 &= 504162(1 + 0,017)^7 = 567305 \\ P_8 &= 504162(1 + 0,017)^8 = 576949 \\ P_9 &= 504162(1 + 0,017)^9 = 586758 \\ P_{10} &= 504162(1 + 0,017)^{10} = 596732 \\ P_{11} &= 504162(1 + 0,017)^{11} = 606877 \\ P_{12} &= 504162(1 + 0,017)^{12} = 617194 \\ P_{13} &= 504162(1 + 0,017)^{13} = 627686 \\ P_{14} &= 504162(1 + 0,017)^{14} = 638357 \\ P_{15} &= 504162(1 + 0,017)^{15} = 649209. \end{aligned}$$

Fazendo uma projeção para os anos de 2020, 2025 e 2030, tem-se

$$\begin{aligned} P_{20} &= 504162(1 + 0,017)^{20} = 706300 \\ P_{25} &= 504162(1 + 0,017)^{25} = 768412 \\ P_{30} &= 504162(1 + 0,017)^{30} = 835985. \end{aligned}$$

Comparando com os dados oficiais, é possível estimar-se o erro (Figura 36).

O modelo malthusiano discreto, por ser simples, é frequentemente utilizado para se fazer previsões a curto prazo, sendo corrigido depois de cada censo.

Os dados de 2020, 2025 e 2030 foram coletados com bases nas projeções oficiais do site SEADE.

Dados Oficiais			População Calculada	Erro %
Ano	n	População		
2000	0	504162	504162	0
2001	1	514481	512733	-0,33976
2002	2	524714	521449	-0,62224
2003	3	534828	530314	-0,84401
2004	4	544897	539329	-1,02184
2005	5	554996	548498	-1,17082
2006	6	564808	557822	-1,23688
2007	7	574315	567305	-1,22058
2008	8	583910	576949	-1,19214
2009	9	593710	586758	-1,17094
2010	10	603774	596732	-1,16633
2011	11	612346	606877	-0,89312
2012	12	621038	617194	-0,61896
2013	13	629855	627686	-0,34436
2014	14	638796	638357	-0,06872
2015	15	647862	649209	0,207915
2020	20	683777	706300	3,29391
2025	25	709737	768412	8,267147
2030	30	726450	835985	15,07812

Figura 36 – Erro para o Modelo de Malthus

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Modelo Logístico (Verhulst)

Se observarmos os valores entre censos consecutivos de uma determinada população, verificamos que as taxas de crescimento relativo tendem a diminuir com o tempo. O primeiro modelo que atende à variação da taxa de crescimento (ou razão intrínseca de crescimento populacional) foi formulado pelo matemático belga Pierre F. Verhulst em 1837. O modelo de Verhulst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um *limite máximo sustentável*, isto é, ela tende a se estabilizar. Desta forma, a equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. Este modelo teve um impacto maior quando, no início do século XX, os pesquisadores americanos R. Pearl e L. Reed utilizaram-no para projetar a demografia americana.

O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando um termo inibidor de crescimento $-\beta(P_n)^2$, uma vez que os recursos naturais são limitados e por isso, sempre haverá competição por eles, proporcional ao número de disputa entre os seres, que é dado por $(P_n)^2$. Assim, fazendo $\mu = 1 + \alpha$ na equação (3.2) e considerando o fator inibidor,

tem-se

$$P_{n+1} = \mu P_n - \beta (P_n)^2, \quad (3.4)$$

onde μ e β são coeficientes a serem determinados.

Sendo K a capacidade de suporte de uma determinada população, r a taxa de crescimento intrínseca e considerando P_0 conhecido, a expressão P_n em função de P_0 é dada por

$$P_n = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rn}}, \quad (3.5)$$

que é solução de (3.4). Esses cálculos podem ser encontrados em (BASSANEZI, 2013).

Para a utilização da equação (3.5), é necessário que se conheça K e r .

A constante K pode ser calculada da seguinte forma: considere um conjunto de dados x_i , medidos nos tempos discretos n_i sobre o qual sabemos ser a sequência x_i convergente para K quando n_i cresce infinitamente, ajustados segundo uma função f contínua, tal que $f(x_i) = x_{i+1}$. Então,

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} f(x_i) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_i = K,$$

ou seja, a sequência de pontos (x_i, x_{i+1}) converge para o ponto (K, K) de modo que K é um ponto fixo da função f .

Uma maneira simplificada para tal cálculo pode ser encontrada em (MALIGERI, 2013). A constante K é o ponto fixo da equação da reta $y = ax + b$, onde y representa a população em P_{i+1} , x representa a população em P_i e os valores de a e b podem ser encontrados através de uma regressão linear realizada a partir dos dados de censos consecutivos.

Retomando os dados da Figura 35 referentes aos censos de Ribeirão Preto, pode-se ilustrar a utilização do modelo de Verhulst.

Utilizando o software LAB Fit, disponível para download em http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/index_p.htm, para realizar o ajuste linear, foram obtidos $a = 0,988020$ e $b = 16449,1$. Desta forma,

$$P_{n+1} = 0,988020P_n + 16449,1.$$

Resolvendo $x^* = 0,988020x^* + 16449,1$; $x^* = K = 1373047$.

As Figuras 37 e 38 ilustram a utilização do LAB Fit.

Figura 37 – Entrada dos valores de x e y para a realização do ajuste linear

Fonte: Elaborada pelo autor.

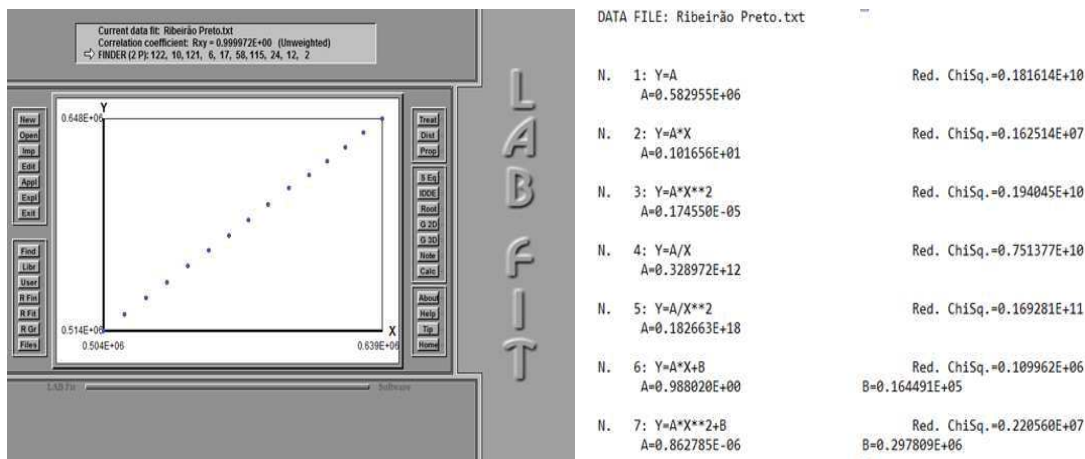


Figura 38 – Gráfico e cálculo de a e b com LAB Fit

Fonte: Elaborada pelo autor.

O cálculo da taxa r pode ser obtido de (3.5), ou seja,

$$P_n = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rn}} \Leftrightarrow P_n(P_0 + (K - P_0)e^{-rn}) = KP_0 \Leftrightarrow e^{-rn} = \frac{P_0 \left(\frac{K}{P_n} - 1 \right)}{K - P_0}.$$

Logo,

$$r_n = -\frac{1}{n} \left[\ln \left(P_0 \left(\frac{k}{P_n} - 1 \right) \right) - \ln(K - P_0) \right]. \quad (3.6)$$

Para estimar a taxa intrínseca de crescimento r , usa-se a equação (3.6) determinando r_i ano a ano. Considerando P_0 como a população de Ribeirão Preto no ano de 2000, a taxa r a ser considerada será a média aritmética dos valores r_i obtidos. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
r_n &= -\frac{1}{n} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{P_n} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_1 &= -\frac{1}{1} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{514481} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_2 &= -\frac{1}{2} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{524714} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_3 &= -\frac{1}{3} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{534828} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_4 &= -\frac{1}{4} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{544897} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_5 &= -\frac{1}{5} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{554996} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_6 &= -\frac{1}{6} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{564808} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_7 &= -\frac{1}{7} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{574315} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_8 &= -\frac{1}{8} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{583910} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_9 &= -\frac{1}{9} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{593710} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{10} &= -\frac{1}{10} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{603774} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{11} &= -\frac{1}{11} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{612346} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{12} &= -\frac{1}{12} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{621038} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{13} &= -\frac{1}{13} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{629855} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{14} &= -\frac{1}{14} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{638796} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{15} &= -\frac{1}{15} \left[\ln \left(504162 \left(\frac{1373047}{647862} - 1 \right) \right) - \ln(1373047 - 504162) \right] \\
r_{\text{m\u00e9dio}} &= 0,030467.
\end{aligned}$$

Sendo $K = 1373047$ e $r = 0,030467$, a equa\u00e7\u00e3o (3.5) pode ser reescrita como

$$P_n = \frac{1373047 \cdot 504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467n}}. \quad (3.7)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.0}} = 504162 \\
 P_1 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.1}} = 513921 \\
 P_2 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.2}} = 523755 \\
 P_3 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.3}} = 533660 \\
 P_4 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.4}} = 543633 \\
 P_5 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.5}} = 553669 \\
 P_6 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.6}} = 563765 \\
 P_7 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.7}} = 573915 \\
 P_8 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.8}} = 584117 \\
 P_9 &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.9}} = 594365 \\
 P_{10} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.10}} = 604655 \\
 P_{11} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.11}} = 614982 \\
 P_{12} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.12}} = 625342 \\
 P_{13} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.13}} = 635731 \\
 P_{14} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.14}} = 646142 \\
 P_{15} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.15}} = 656573.
 \end{aligned}$$

Fazendo projeções para os anos de 2020, 2025 e 2030, tem-se

$$\begin{aligned}
 P_{20} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.20}} = 708837 \\
 P_{25} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.25}} = 760843 \\
 P_{30} &= \frac{1373047.504162}{504162 + (1373047 - 504162)e^{-0,030467.30}} = 812000.
 \end{aligned}$$

Comparando com os dados oficiais, foi estimado o erro de aproximação (Figura 39).

Dados Oficiais			População Calculada	Erro %
Ano	n	População		
2000	0	504162	504162	0
2001	1	514481	513921	-0,10885
2002	2	524714	523755	-0,18277
2003	3	534828	533660	-0,21839
2004	4	544897	543633	-0,23197
2005	5	554996	553669	-0,2391
2006	6	564808	563765	-0,18466
2007	7	574315	573915	-0,06965
2008	8	583910	584117	0,035451
2009	9	593710	594365	0,110323
2010	10	603774	604655	0,145916
2011	11	612346	614982	0,430476
2012	12	621038	625342	0,693033
2013	13	629855	635731	0,932913
2014	14	638796	646142	1,149976
2015	15	647862	656573	1,344576
2020	20	683777	708837	3,664938
2025	25	709737	760843	7,200695
2030	30	726450	812000	11,77645

Figura 39 – Erro para o Modelo de Verhulst

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando as previsões realizadas, é possível observar que o modelo de Verhulst está mais próximo à realidade esperada, apresentando erros percentuais inferiores aos do modelo de Malthus, à medida que n aumenta (Figura 40).

Dados Oficiais			Modelo de Malthus		Modelo de Verhulst	
Ano	n	População	População Calculada	Erro %	População Calculada	Erro %
2020	20	683777	706300	3,29391	708837	3,664938
2025	25	709737	768412	8,267147	760843	7,200695
2030	30	726450	835985	15,07812	812000	11,77645

Figura 40 – Previsões e erros - Malthus X Verhulst

Fonte: Elaborada pelo autor.

PROPOSTAS DIDÁTICAS

Neste capítulo, são apresentadas três propostas didáticas que envolvem situações do cotidiano, nas quais fica claramente evidenciada a utilização das equações de diferenças de 1ª ordem.

4.1 Proposta 01 - Planejamento Financeiro

No desenvolvimento desse tema, foi utilizado o modelo de orçamento familiar, modelado pelas equações (2.14), (2.15) e (2.16) do Capítulo 2.

Para introduzir o assunto, inicialmente foi feita uma explanação sobre a inadimplência do Brasil comparada a de outros países, mostrando que embora o crescimento da inadimplência do Brasil tenha diminuído nos últimos dois anos, segundo estudo publicado pela Serasa Experian (empresa de informações de crédito), grande parte da população brasileira gasta mais do que ganha.

Tal estudo mostrou que, em 2013, 23,5 milhões de brasileiros estavam com dívidas vencidas com prazo superior a 90 dias.

Para se ter uma ideia, enquanto o Brasil fechou 2013 com inadimplência em 6,7%, os Estados Unidos e o Chile apresentaram índices de 2,4% e 2,1%, respectivamente.

Desta forma, propõe-se aqui um estudo de caso sobre orçamento familiar (renda, consumo e poupança) de cada residência.

Além de mostrar a aplicação de equações de diferenças de 1ª ordem, essa proposta teve como objetivo despertar nos alunos a importância da Educação Financeira.

Primeiramente os alunos fizeram a coleta de dados em sua residência. Cada aluno pôde recorrer a comprovantes de renda, holerites ou declarações de Imposto de Renda, além de documentos referentes às despesas da casa, tais como, água, luz, telefone, gastos com moradia,

financiamento de automóveis, seguros residencial e automotivo, entre outros. Para se ter um reflexo mais próximo à realidade estudada, quando possível, foi realizado uma média destes dados referentes aos últimos três meses.

A partir destas informações e dos exemplos 8 e 9 - Orçamento Familiar, foi elaborada uma planilha com previsões de renda e consumo para os próximos 12 meses. A análise completa desta planilha, dados coletados e previsões, propiciou a discussão de algumas questões:

O que posso fazer para melhorar a minha renda?

Quais custos podem ser reduzidos ou eliminados?

Quais as consequências da redução do fator de consumo?

Esta proposta será descrita com detalhes no Apêndice A.

4.2 Proposta 02 - Utilização dos Modelos de Malthus e Verhulst na Modelagem do Aumento de Usuários de Internet no Brasil

Nesta proposta, serão utilizados os modelos de Malthus e Verhulst para comprovar o aumento de usuários de internet no Brasil. A base de dados referente ao aumento de usuários de internet no Brasil abrangerá o período de 2006 a 2013.

Não há como negar a presença da internet em nosso dia a dia, seja ela para resolvermos questões profissionais, para respondermos e-mails, para estreitar laços entre amigos, através das redes sociais, ou para resolver questões cotidianas que até pouco tempo atrás eram resolvidas apenas pessoalmente; pagamentos de contas, compra de produtos em geral e até compras de supermercado.

O desenvolvimento de novas tecnologias móveis, o custo acessível de pacotes de internet para telefones e smartphones, cada vez mais presentes, têm contribuído significativamente para que o número de usuários deste tipo de serviço aumente a cada ano.

Os dados utilizados nesta proposta estão disponíveis em:

<http://www.teleco.com.br/internet.asp> e estão de acordo com o PNAD-Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios realizado pelo IBGE-Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística e a pesquisa TIC Domicílios (TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação), pesquisa realizada anualmente com o objetivo de mapear o acesso à infraestrutura TIC nos domicílios urbanos e rurais do Brasil e as formas de uso destas tecnologias por indivíduos de 10 anos de idade ou mais.

Uma vez que tais modelos são utilizados para retratar crescimentos exponenciais, com fatores limitantes ou não, esta proposta pode facilmente ser inserida nas atividades dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, ano em que as funções exponenciais são estudadas de acordo com a proposta curricular do Estado de São Paulo.

O roteiro completo para esta atividade encontra-se no Apêndice B deste trabalho.

4.3 Proposta 03 - Aplicação do Modelo de Malthus para Populações em Decrescimento - Mortalidade Infantil

Em várias situações do nosso dia a dia nos deparamos com problemas que envolvem o uso de funções exponenciais e logarítmicas. Exemplos de tais situações são: aplicações de valores em poupança, financiamentos e crescimento de populações. Ao falarmos de crescimento de populações, podemos estar falando da proliferação de uma bactéria em um alimento contaminado, do aumento de uma praga em determinada plantação, do crescimento de uma população humana com características específicas, entre outros.

Propõe-se aqui a utilização do modelo de Malthus, comumente utilizado para descrever crescimentos populacionais, para modelar uma população em decrescimento. Especificamente, iremos trabalhar com a Mortalidade Infantil.

Mortalidade Infantil consiste nas mortes de crianças no primeiro ano de vida (disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Mortalidade_infantil).

O cálculo é simples, observa-se a mortalidade infantil durante um ano a partir do número de nascidos vivos do mesmo ano. O valor médio encontrado ao dividirmos tal número por 1000 é denominado Taxa de Mortalidade Infantil.

Dados disponíveis no site do IPEA (<http://www.ipeadata.gov.br/>), referentes aos anos de 2000 a 2013 (Figura 41), demonstram um decrescimento da taxa de mortalidade infantil. Aplicando esta taxa ao número de nascidos vivos do mesmo período (Figura 42), usando os dados também disponíveis no site do IPEA, encontramos o número de crianças nascidas vivas que não chegaram a completar um ano de vida. Tal população é decrescente (Figuras 43 e 44).

A partir destes dados, foi proposta a verificação da fidelidade do Modelo Populacional de Malthus diante do decrescimento da população estudada.

Um roteiro detalhado para esta atividade encontra-se no Apêndice C deste trabalho.


Data		Taxa de mortalidade infantil
2000		29,02
2001		27,48
2002		26,04
2003		24,68
2004		23,39
2005		22,18
2006		21,04
2007		19,98
2008		18,99
2009		18,07
2010		17,22
2011		16,43
2012		15,69
2013		15,02

Figura 41 – Taxa de Mortalidade Infantil no período de 2000 a 2013

Fonte: <http://www.ipeadata.gov.br/>

Data		População - nascimentos
2000		3.617.436
2001		3.567.431
2002		3.517.035
2003		3.465.688
2004		3.413.378
2005		3.360.401
2006		3.307.338
2007		3.254.629
2008		3.202.937
2009		3.152.938
2010		3.104.970
2011		3.059.019
2012		3.015.052
2013		2.973.118

Figura 42 – Número de nascimentos no período de 2000 a 2013

Fonte: <http://www.ipeadata.gov.br/>

Data	Valores Arredondados
2000	1050
2001	981
2002	916
2003	856
2004	799
2005	746
2006	696
2007	651
2008	609
2009	570
2010	535
2011	503
2012	474
2013	447

Figura 43 – População de crianças nascidas vivas que não chegaram a completar um ano de vida - Período de 2000 a 2013

Fonte: Elaborada pelo autor.

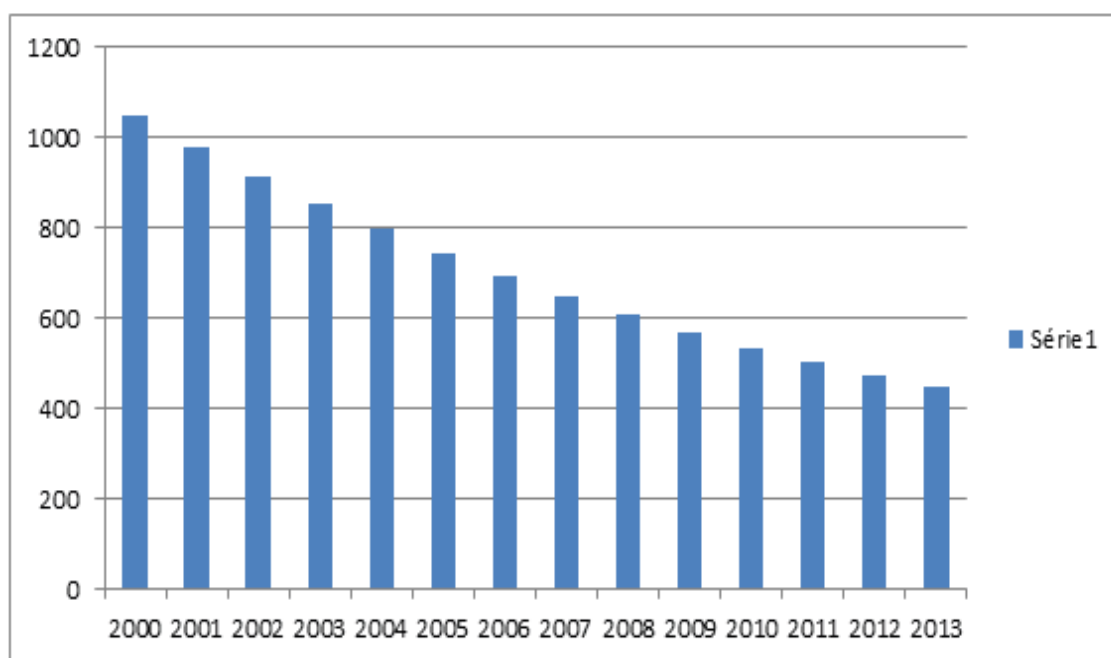


Figura 44 – Gráfico Figura 35

Fonte: Elaborada pelo autor.

REFERÊNCIAS

- AGARWAL, R. P. **Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications**. 2. ed. New York: Marcel Dekker, 1992.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2013.
- BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.
- CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Campus, 2006.
- CIPOLLI, V. G. **Sistemas Dinâmicos Discretos - Análise de Estabilidade**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2012.
- ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equations**. New York: Springer, 2005.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- LUÍS, R. D. G. **Equações de Diferenças e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Madeira - Departamento de Matemática e Engenharias, Funchal, 2006.
- MALIGERI, G. C. A. M. **Equações Discretas no Ensino Médio: Modelos de Dinâmicas Populacionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2013.
- MICKENS, R. E. **Difference Equations: Theory and Applications**. 2. ed. Nova York: Chapman & Hall, 1990.
- SHONE, R. **Economic Dynamics - Phase Diagrams and their Economic Applications**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- TAVONI, R.; OLIVEIRA, R. Z. G. de. **Os Modelos de Crescimento Populacional de Malthus e Verhulst - Uma Motivação para o Ensino de Logaritmos e Exponenciais**. [S.l.]: Revista Eletronica Pauista de Matemática C.Q.D., 2013.

ORÇAMENTO FAMILIAR

Público Alvo: Alunos da 1^a série do Ensino Médio

Recursos Pedagógicos:

- Material impresso;
- Giz e lousa (sala convencional);
- Laboratório de Informática;
- Sala de recursos multimídia;
- Kit com 30 calculadoras.

Objetivo Geral: Mostrar a aplicação de equações de diferenças de 1^a ordem em nosso dia-a-dia; familiarizar os alunos com termos e conceitos de educação financeira e despertá-los para a importância desse tipo de educação na vida pessoal.

Objetivos Específicos:

- Utilizar planilhas eletrônicas para organização de dados;
- Utilizar o modelo apresentado nos exemplos 8 e 9 para se fazer uma previsão financeira pelo período de um ano;
- Definir o que é essencial e o que é supérfluo na vida de cada um;
- Conscientizar os alunos a respeito das consequências em se reduzir o fator de consumo a curto, médio e longo prazo no modelo estudado;
- Verificar os reflexos que a redução do fator de consumo causará no modelo estudado.

Conteúdos:

- Educação Financeira;
- Orçamento Familiar.

A.1 Roteiro de aulas

A.1.1 Aula 01 - O que é Educação Financeira

(Sala de Recursos Multimídia)

Nesta primeira aula definiu-se o que é Educação Financeira.

Educação Financeira é buscar uma melhor qualidade de vida tanto hoje quanto no futuro, proporcionando a segurança material necessária para aproveitar os prazeres da vida e ao mesmo tempo obter uma garantia para eventuais imprevistos (disponível em <http://www.minhaseconomias.com.br/educacao-financeira>).

Neste momento, abriu-se espaço para que os alunos discutissem a definição acima.

Em seguida, foram exibidos alguns vídeos de curta duração, com os seguintes temas:

- A formiga e a cigarra (<http://www.youtube.com/watch?v=IezC651MZKY>);
- Trabalho em grupo (<http://www.youtube.com/watch?v=7G9jCmE1MdE>).

Após os vídeos, iniciou-se uma discussão sobre qual postura é a correta: aproveitar o dia ou morrer de trabalhar? Ser formiga ou cigarra? O que cada postura pode acarretar na vida de cada indivíduo a longo prazo?

Posteriormente às colocações dos alunos, foram ressaltados os pontos fortes de cada vídeo. No primeiro vídeo, temos os dois extremos, e como toda fábula, traz uma mensagem no final. No segundo vídeo, vemos a importância de se trabalhar em grupo. Durante a discussão dos vídeos, abordou-se também o significado do termo *work a holic* (viciado em trabalho), que facilmente poderia ser atribuído à formiga do primeiro vídeo.

Embora os vídeos não estejam diretamente ligados ao modelo que será estudado, estes serviram de link para se iniciar discussões relativas ao mundo “adulto”, uma vez que a maioria dos estudantes, neste caso, ainda não trabalham e têm uma participação pequena, ou nula, em questões relacionadas às despesas domiciliares.

Retomando a definição inicial de Educação Financeira e as ideias apresentadas pelos vídeos, conclui-se que a melhor saída para não sofrer necessidades futuras e nem se tornar um viciado em trabalho é um bom planejamento financeiro.

Esta primeira aula foi finalizada com a distribuição de uma cópia da Tabela 01 (Figura 45) para cada aluno. A Tabela 01 é um relatório financeiro onde cada aluno deveria preencher as informações de renda e de consumo de sua própria casa. Foi sugerido aos alunos, quando possível, que preenchessem a Tabela 01 utilizando as informações do mês atual, e dos dois meses anteriores também. Neste caso, o aluno levou para casa uma cópia da Tabela 01, para cada mês.

Orçamento Familiar		
Consumo (Despesas Mensais)	Aluguel/ Condomínio	R\$
	Financiamento da casa própria	R\$
	Prestações (Carro, Seguros, IPTU, Plano de Saúde, Faculdade)	R\$
	Contas (água, luz, telefone, celular, gás, internet)	R\$
	Alimentação (supermercado, padaria, açougue)	R\$
	Transporte (despesas com ônibus ou combustível)	R\$
	Despesas com roupas, calçados e acessórios	R\$
	Lazer (cinema, teatro, passeios)	R\$
	Farmácia, perfumaria, cosméticos	R\$
	Outros	R\$
		R\$
		R\$
		R\$
		R\$
Total	R\$	
Renda Fixa Mensal	Renda 1	R\$
	Renda 2	R\$
	Renda 3	R\$
	Renda 4	R\$
	Renda 5	R\$
	Renda 6	R\$
	Total	R\$
Poupança	R\$	

Figura 45 – Tabela 01

Fonte: Elaborada pelo autor.

A.1.2 Aula 02 - Equacionando o Orçamento Mensal

(Sala de Recursos Multimídia)

Nesta aula os alunos foram incentivados a refletir sobre o significado de planejamento financeiro, levando em conta os dados da Tabela 01. Após um breve diálogo, adotamos as seguintes definições:

Renda Fixa: Valor fixo de entrada de dinheiro mês a mês (salários e demais entradas fixas de dinheiro). A renda fixa foi denominada R_0 ;

Consumo: Total de todos os gastos do mês;

Fator de Consumo: Razão obtida entre a entrada e saída de valores;

Renda: Valor da renda fixa, acrescido do rendimento de uma possível poupança;

Poupança: Valor não gasto e investido em uma caderneta de poupança para prover rendimentos;

Taxa de juros: Fator aplicado sobre determinado valor para obtenção de rendimentos ou cobrança de juros sobre um montante devido.

Foi proposto que os alunos discutissem entre si os três principais pontos: Poupança, Renda e Consumo. Quais as relações existentes entre eles? Como estimar valores futuros baseados nos dados da Tabela 01?

Após apreciação a respeito das conclusões dos alunos, propôs-se as generalizações abaixo, as quais foram apresentadas em slides, com as devidas explicações.

Considerando n o tempo em meses, denominou-se:

P_n - Valor da poupança no mês n ;

P_{n-1} - Valor da poupança no mês anterior a n ;

R_n - Valor da renda no mês n ;

C_n - Valor do consumo no mês n ;

γ - Taxa de juros praticada pelo banco;

δ - Fator de consumo.

Assim,

- Poupança

$$\text{Poupança do mês} = (\text{Poupança do mês anterior}) + [(\text{Renda do mês}) - (\text{Consumo do mês})]$$

$$P_n = P_{n-1} + (R_n - C_n). \quad (\text{A.1})$$

- Renda

Renda do mês = (Renda Fixa)+(Taxa de Juros)(Poupança do mês anterior)

$$R_n = R_0 + \gamma P_{n-1}. \quad (\text{A.2})$$

- Consumo

Consumo do mês = (Fator de Consumo)(Renda do mês)

$$C_n = \delta R_n, \quad 0 < \delta < 1. \quad (\text{A.3})$$

Assim,

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + (R_n - C_n), \\ R_n = R_0 + \gamma P_{n-1}, \\ C_n = \delta R_n. \end{cases}$$

A.1.3 Aulas 03 e 04 - Orçamento Calculado Mensalmente

(Laboratório de Informática e Calculadoras)

Nesta aula os alunos foram instigados a apresentar um relatório financeiro, utilizando os dados da Tabela 01 e as equações de diferença sobre orçamento familiar apresentadas na aula anterior, pelo período de um ano.

Para tal tarefa, os alunos puderam utilizar a Planilha 01 (Figura 46), as ferramentas da planilha eletrônica e calculadoras simples ou científicas.

Nesta atividade, o professor foi apenas o mediador. Cada aluno foi atendido individualmente para auxílio e preenchimento de pelo menos um mês. À medida que alguns alunos se mostraram aptos, os mesmos auxiliaram os colegas com maior dificuldade.

No preenchimento da Planilha 01, foram utilizadas duas aulas. A mesma poderá ser desenvolvida com duração maior ou menor, de acordo com cada caso.

A.1.4 Aula 05 - Orçamento Mensal Utilizando Planilha Eletrônica

(Laboratório de Informática)

Nesta aula, em conjunto com os alunos, foi construída uma planilha semelhante à Planilha 01, porém utilizando-se apenas os recursos da planilha eletrônica. O intuito desta atividade foi mostrar aos alunos que uma vez que o primeiro e o segundo mês estavam preenchidos, utilizando as equações de diferença, o preenchimento do restante seria otimizado copiando a fórmula para

as células abaixo. Neste momento, construiu-se com os alunos a Planilha 02. A diferença entre as Planilhas 01 e 02 é que a Planilha 02 está editada com as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} C18 &= \text{SOMA}(C3 : C17) \\ C25 &= \text{SOMA}(C19 : C24) \\ N3 &= C18/C25 \\ N5 &= 0,006 \\ H3 &= C26 + (I3 - J3) \\ I3 &= C25 + (N5 * C26) \\ J3 &= I3 * \$N\$3 \\ H4 &= H3 + (I4 - J4) \\ I4 &= \$C\$25 + (\$N\$5 * H3) \\ J4 &= I4 * \$N\$3. \end{aligned}$$

Os valores das colunas I, J e H das linhas de 5 a 14 foram obtidos copiando-se as fórmulas de H4, I4 e J4, respectivamente.

Feito isso, a Planilha 02 foi transferida para todos os computadores do laboratório, solicitando que todos inserissem os seus dados na Planilha 02 e comparassem os resultados encontrados nesta planilha com os resultados calculados individualmente na Planilha 01. Em seguida, iniciou-se uma discussão motivada pelas seguintes perguntas:

Quais são as vantagens da nova planilha?

Supondo que a taxa de juros e o fator de consumo de cada família se mantivessem constantes, quais seriam os valores de renda, poupança e consumo daqui a 3 anos?

Será que existe uma forma mais rápida para realizar tal cálculo ou sempre teríamos que calcular todos os valores intermediários entre o mês que temos como referência e o mês em que queremos saber?

A aula foi encerrada após as colocações dos alunos, e não foram dados esclarecimentos à respeito das duas últimas perguntas, instigando a curiosidade dos mesmos. Estas questões ficaram como tarefa de casa para a próxima aula.

A.1.5 Aula 06 - Solução para o Orçamento Familiar a Longo Prazo

(Laboratório de Informática)

Esta aula foi iniciada tomando-se como base as equações de diferenças utilizadas na construção das planilhas anteriores. A partir delas, realizou-se a substituição das equações de renda (A.2) e consumo (A.3) na equação (A.1) referente à poupança, o que permitiu que o cálculo

da mesma fosse feito para qualquer período n ,

$$P_n = P_{n-1} + ((R_0 + \gamma P_{n-1}) - \delta(R_0 + \gamma P_{n-1})). \quad (\text{A.4})$$

Mas, tal fato ainda não respondeu às questões levantadas na aula anterior. Utilizando a equação (A.4), através de iterações, foram calculados os valores de P_n para $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Após alguns ajustes, os alunos foram estimulados a identificar a soma de uma PG (Progressão Geométrica) presente na nova equação, calculá-la e substituí-la na equação (A.4), obtendo

$$P_n = [(1 - \delta)\gamma + 1]^n P_0 + (1 - \delta)r_0 \frac{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]^n}{1 - [(1 - \delta)\gamma + 1]}. \quad (\text{A.5})$$

A partir de (A.5) e dos valores da Tabela 01, foi solicitado aos alunos que calculassem os valores para a poupança em $n = 5$ (quinto mês), $n = 12$ (um ano) e $n = 36$ (três anos).

Posteriormente aos cálculos, os alunos puderam comparar os “novos” valores com os valores calculados nas Planilhas 01 e 02 e verificaram que o modelo apresentado torna dispensável os cálculos período a período.

Para dinamizar a aula, a Planilha 03 (Figura 47) foi apresentada aos alunos. Tal planilha foi previamente editada, de modo a ser necessário apenas a inserção dos dados da Tabela 01 e do mês em que se desejasse conhecer os valores da poupança, renda e consumo, para que tudo fosse calculado automaticamente.

As células da Planilha 03 foram editadas com as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} C18 &= \text{SOMA}(C3 : C17) \\ C25 &= \text{SOMA}(C19 : C24) \\ G3 &= C25 \\ G5 &= C26 \\ G7 &= 0,006 \\ G9 &= C18/C25 \\ G13 &= (1 - ((1 - G9) * G7 + 1)^{G11}) * G5 \\ &+ (G3 * (1 - G9)) * (1 - ((1 - G9) * G7 + 1)^{G11}) / (1 - ((1 - G9) * G7 + 1)) \\ G15 &= G3 + G7 * ((1 - ((1 - G9) * G7 + 1)^{G11-1}) * G5 \\ &+ (G3 * (1 - G9)) * (1 - ((1 - G9) * G7 + 1)^{G11-1}) / (1 - ((1 - G9) * G7 + 1))) \\ G17 &= G9 * G15 \\ G11 &\rightarrow \text{preenchido com o valor desejado de } n. \end{aligned}$$

A.1.6 Aula 07 - Essencial X Supérfluo

(Sala de Recursos Multimídia)

A aula foi iniciada com as seguintes questões:

- O que é *supérfluo*?
- O que é *essencial*?

Em um primeiro momento, buscou-se descobrir nos alunos quais eram os conceitos e ideias que eles tinham a respeito dessas definições. A aula foi ilustrada a partir de imagens/exemplos de exageros do consumismo e em seguida, propôs-se uma discussão referente ao tema.

Posteriormente, a Tabela 01 foi retomada e foi solicitado aos alunos que verificassem o que era *essencial* e o que era *supérfluo* em seus consumos familiares. A utilização de imagens caricatas de pessoas consumistas contrastadas com a de pessoas das quais lhes faltam o *essencial* foi um recurso fortemente explorado.

Após a discussão diante de seus consumos, os alunos receberam a tarefa de discutir tais conceitos com seus pais em casa, com a Tabela 01 em mãos, e decidir quais despesas consideradas *supérfluas* poderiam ser reduzidas, ou até extintas, para os próximos meses, visando à melhoria da renda e poupança no período estudado.

A.1.7 Aula 08 - Reflexões e Conclusões

(Laboratório de Informática)

Nesta aula, a Tabela 01 que cada aluno levou para casa na aula anterior, retornou com alguns itens riscados, outros alterados e a partir dessas informações, foi aberta uma discussão onde eles expuseram quais foram os critérios utilizados por cada família para diminuir os valores de consumo. Os valores riscados ou alterados representavam os custos que as famílias consideraram *supérfluos*.

Encerrada a socialização, foram retomadas as definições de *essencial* e *supérfluo* e dos critérios utilizados por cada aluno e suas famílias, de modo a promover uma redução em seus consumos mensais.

Em seguida, foi solicitado aos alunos que realimentassem a Planilha 03 com os novos dados da Tabela 01 e comparassem os resultados obtidos anteriormente.

A seguir, foi proposto também, que os alunos alterassem o valor inicial de consumo para 90% da renda, 75% da renda e 60% da renda e verificassem o que aconteceria após 01 ano. Abriu-se espaço para que os alunos socializassem suas conclusões a respeito desta última etapa.

Ao final da aula, a discussão foi encerrada pelo professor, plantando em cada um a semente da importância de um bom planejamento financeiro ao longo de suas vidas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
							n	Poupança após n meses	Renda após n meses	Consumo após n meses					
2															
3		Aluguel/Condomínio					1								
4		Financiamento de casa própria					2								
5		Prestações (Carro, Seguros, IPTU, Plano de Saúde, Faculdade)					3								
6		Contas (Água, Luz, Telefone, Celular, Gás, Internet)					4								
7		Alimentação (Supermercado, Padaria, Apougue)					5								
8		Transporte (despesas com ônibus ou combustível)					6								
9		Despesas com roupas, Calçados e acessórios					7								
10		Lazer (cinema, teatro, passeios)					8								
11		Farmácia, perfumaria, cosméticos					9								
12		Doutros					10								
13							11								
14							12								
15															
16															
17															
18		Total													
19		Renda 1													
20		Renda 2													
21		Renda 3													
22		Renda 4													
23		Renda 5													
24		Renda 6													
25		Total													
26		Poupança													
27															

Figura 46 – Planilha 01

Fonte: Elaborada pelo autor.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Orçamento Familiar						
2								
3		Aluguel/Condominio				$R_0 =$		
4		Financiamento de casa propria						
5		Prestações (Carro, Seguros, IPTU, Plano de Saúde, Faculdade)				$P_0 =$		
6		Contas (Água, Luz, Telefone, Celular, Gás, Internet)				$\gamma =$		
7		Alimentação (Supermercado, Padaria, Açougue)						
8		Transporte (despesas com onibus ou combustivel)				$\epsilon =$		
9		Despesas com roupas. Calçados e acessórios						
10		Lazer (cinema, teatro, passeios)				$n =$		
11		Farmacia, perfumaria, cosméticos						
12		Outros				$p_c =$		
13								
14								
15						$R_{c1} =$		
16								
17						$C_c =$		
18		Total						
19		Renda 1						
20		Renda 2						
21		Renda 3						
22		Renda 4						
23		Renda 5						
24		Renda 6						
25		Total						
26		Poupança						

Figura 47 – Planilha 03

Fonte: Elaborada pelo autor.

Orçamento Familiar			
Consumo (Despesas Mensais)	Aluguel/ Condomínio	R\$	
	Financiamento da casa própria	R\$	
	Prestações (Carro, Seguros, IPTU, Plano de Saúde, Faculdade)	R\$ 852,00	300,00
	Contas (água, luz, telefone, celular, gás, internet)	R\$ 513,00	364,00
	Alimentação (supermercado, padaria, açougue)	R\$ 330,00	200,00
	Transporte (despesas com ônibus ou combustível)	R\$ 150,00	
	Despesas com roupas, calçados e acessórios	R\$ 80,00	
	Lazer (cinema, teatro, passeios)	R\$ 150,00	50,00
	Farmácia, perfumaria, cosméticos	R\$ 80,00	
	Outros	R\$	
		R\$	
		R\$	
		R\$	
		R\$	
Total	R\$ 2.155,00	1.724,00	
Renda Fixa Mensal	Renda 1	R\$ 3.400	
	Renda 2	R\$ 1.500	
	Renda 3	R\$	
	Renda 4	R\$	
	Renda 5	R\$	
	Renda 6	R\$	
	Total	R\$	
Poupança	R\$ 4.900		

Figura 49 – Tabela 01 utilizada pelo aluno "X" após discussão Supérfluos X Essenciais

Fonte: Elaborada pelo autor.

UTILIZAÇÃO DOS MODELOS DE MALTHUS E VERHULST NA MODELAGEM DO AUMENTO DE USUÁRIOS DE INTERNET NO BRASIL

Público Alvo: Alunos da 1^a série do Ensino Médio

Recursos Pedagógicos:

- Material impresso;
- Giz e lousa (sala convencional);
- Laboratório de Informática;
- Sala de recursos multimídia;
- Kit com 30 calculadoras.

Objetivo Geral: Mostrar que a matemática está presente em diversas situações de nosso cotidiano e que o devido uso de suas ferramentas permite uma melhor interpretação de fatos atuais e futuros.

Objetivos Específicos:

- Utilizar recursos interativos para o desenvolvimento do conteúdo estudado;
- Utilizar planilhas eletrônicas para organização de dados;
- Utilizar recorrências, processos iterativos para modelar a população estudada segundo os modelos de Malthus e Verhulst;

- Utilizar as equações discretas de Malthus e Verhulst para modelar a população estudada;
- Discutir os resultados obtidos e fazer previsões.

Conteúdos:

- Potenciação;
- Função exponencial;
- Crescimento populacional;
- Modelos populacionais.

B.1 Roteiro de aulas

B.1.1 Aula 01 - Potenciação e suas Propriedades

(Sala de Recursos Multimídia)

Nesta primeira aula, foi realizada uma revisão geral do tópico: potenciação e suas propriedades, necessário ao desenvolvimento desta atividade.

B.1.2 Aula 02 - Função Exponencial e o Modelo de Malthus

(Laboratório de Informática)

Nesta aula, o tópico “Função Exponencial” foi trabalhado a partir de uma situação problema, de forma dinâmica e interativa utilizando o software "Crescimento Populacional da UNICAMP - M^3 - Matemática e Multimídia", disponível em: <http://www.m3.ime.unicamp.br>, citado em (TAVONI; OLIVEIRA, 2013).

Durante a realização da Atividade 01, proposta pelo software, foram feitas pequenas intervenções do professor, especialmente a partir da questão 4, quando foram apresentados o modelo de Malthus e a função exponencial.

A Atividade 01, proposta pelo software citado acima, é introduzida a partir do estudo do crescimento populacional da bactéria “*Escherichia coli*”, responsável por metade dos casos de intoxicação alimentar. Tal bactéria possui taxa de crescimento populacional constante. Propõe-se, na atividade, que seja calculada a população bacteriana após alguns intervalos de tempo e a partir dos dados calculados traça-se a curva característica do crescimento populacional estudado.

A Atividade 01 encontra-se completa, inclusive com dicas, imagens e sugestões de intervenções, em (TAVONI; OLIVEIRA, 2013).

B.1.3 Aulas 03 - Crescimento Populacional - Modelo de Verhulst

(Laboratório de Informática)

Conforme aula anterior, foi utilizado novamente o software da Unicamp, com a execução da Atividade 02. Esta atividade inicia-se descrevendo a diferença entre os modelos de Malthus (função exponencial) e Verhulst, e aponta que tal diferença se dá pelo fato de que a taxa de crescimento populacional relativo em um instante n , no modelo de Verhulst, não é constante. Esta atividade é desenvolvida a partir de um exemplo envolvendo uma população de bactérias, cujos valores foram determinados empiricamente através de observações em laboratório. Neste exemplo são fornecidos alguns valores de P_n que possibilitam a verificação da desaceleração do aumento populacional a cada n subsequente. A partir destes dados, é solicitado ao aluno que calcule a taxa de crescimento populacional relativo n , r_n , explicitando $r_{n+1} < r_n$.

Ao fim da atividade, é exibido o gráfico que relaciona P_n em cada instante n segundo o modelo de Verhulst. Diante do gráfico, é possível observar crescimentos que ocorrem em um ritmo cada vez menor, tendendo a estabilizar-se. Neste ponto, foi salientado aos alunos que tal desaceleração ocorre devido a limitadores do meio, motivo pelo qual este modelo é mais próximo à realidade.

A Atividade 02 encontra-se completa, inclusive com dicas, imagens e sugestões de intervenções, em (TAVONI; OLIVEIRA, 2013).

B.1.4 Aula 04 - Utilização dos Modelos de Malthus e Verhulst para Modelar o Crescimento dos Usuários de Internet no Brasil

(Sala de Recursos Multimídia e calculadoras)

Nesta aula, o Capítulo 3 deste trabalho foi projetado em sala para leitura, discussão e compreensão dos alunos afim de torná-los aptos a trabalhar com as equações de diferenças propostas nos modelos de Malthus e Verhulst.

Em seguida, definiu-se usuário de internet como *aquela que acessou a internet, pelo menos um vez, nos 90 dias que antecederam à entrevista, com idade a partir de 10 anos*.

De acordo com PNADE – Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – realizada pelo IBGE e a pesquisa TIC Domicílios, o número de usuários deste serviço tem aumentado (Tabela 02 - Figura 52). Dados disponíveis em <http://www.teleco.com.br/internet.asp>.

Foi fornecida uma cópia da Tabela 02 a cada aluno e solicitou-se aos mesmos que verificassem, em suas casas, a fidelidade da equação do modelo de Malthus em descrever esta população.

Ano	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Nº de usuários (em milhões)	35,3	44,9	53,9	63	66,4	76,6	80,9	85,8

Figura 52 – Tabela 02 - Dados referentes ao número de usuários de internet no Brasil

Fonte: Elaborada pelo autor.

B.1.5 Aula 05 - Utilização do Modelo de Malthus para Retratar o Crescimento dos Usuários de Internet no Brasil

(Sala Convencional)

Já era esperado nesta aula que grande parte dos alunos não tivessem concluído sua tarefa com êxito, ou tivessem cometido algum erro pelo caminho. A aula foi iniciada retomando a Tabela 02 com as informações dos usuários de internet no Brasil.

De posse da equação (3.3), os alunos foram questionados a respeito de suas dificuldades e também se discutiu qual deveria ser o ponto de partida para que se verificasse se a equação discreta do modelo de Malthus modelaria esta população.

Considerando o número de usuários em 2006 como P_0 , foi necessário determinar o valor de α (taxa de crescimento). Isolando α na equação (3.3),

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1 = \sqrt[7]{\frac{85,8}{35,3}} - 1 = 0,13527689.$$

Logo,

$$P_1 = 35,3(1 + 0,13527689)^1 = 40,075$$

$$P_2 = 35,3(1 + 0,13517689)^2 = 45,497$$

$$P_3 = 35,3(1 + 0,13517689)^3 = 51,651$$

$$P_4 = 35,3(1 + 0,13517689)^4 = 58,638$$

$$P_5 = 35,3(1 + 0,13517689)^5 = 66,571$$

$$P_6 = 35,3(1 + 0,13517689)^6 = 75,576$$

$$P_7 = 35,3(1 + 0,13517689)^7 = 85,800.$$

Tais valores são expressos em milhões.

Foi solicitado aos alunos que comparassem os valores obtidos com os dados oficiais e estimassem o erro encontrado na modelagem desta população através do modelo de Malthus (Figura 53).

Dados Oficiais			População Calculada (em milhões)	Erro %
Ano	n	População (em milhões)		
2006	0	35,3	35,3	0
2007	1	44,9	40,07527423	-10,7455
2008	2	53,9	45,49653271	-15,5908
2009	3	63	51,65116218	-18,014
2010	4	66,4	58,63837079	-11,6892
2011	5	76,6	66,57078725	-13,093
2012	6	80,9	75,57627635	-6,58062
2013	7	85,8	85,8	1,66E-14

Figura 53 – Tabela 03 - Estimativa de erro através do modelo de Malthus

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, foi solicitado aos alunos que calculassem a população prevista pelo modelo de Malthus para os anos de 2020 e 2030, obtendo-se assim os valores 208,5450425 milhões e 741,6821812 milhões, respectivamente.

B.1.6 Aulas 06 e 07 - Utilização do Modelo de Verhulst para Retratar o Crescimento dos Usuários de Internet no Brasil

(Laboratório de Informática e Calculadoras)

Esta aula foi destinada a um estudo similar ao da aula anterior, porém utilizando o modelo de Verhulst. Foram retomados a Tabela 02 e a equação discreta de Verhulst.

Tomando o número de usuários em 2006 como P_0 , foi necessário determinar o valor de r (taxa de crescimento intrínseca) e K (capacidade de suporte da população), presentes na equação de Verhulst (3.5).

Conforme subseção 3.2, o valor de K pode ser calculado através da regressão linear para $P_{t+1} = aP_t + b$. Novamente, utilizando o aplicativo LAB Fit, foi possível explicitar a lei de formação da função $P_{t+1} = f(P_t)$ que, neste caso, foi dada por $P_{t+1} = 0,886P_t + 14,063$, cujo ponto fixo é $x^* = 123,36$ (valores expressos em milhões).

Através da equação (3.6), foi possível calcular o valor de r_n período a período e o valor médio desses valores para que fosse utilizado na equação discreta de Verhulst, como explicitado a seguir.

$$\begin{aligned}
 r_1 &= -\frac{1}{1} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{44,9} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429 \\
 r_2 &= -\frac{1}{2} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{53,9} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429 \\
 r_3 &= -\frac{1}{3} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{63} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429 \\
 r_4 &= -\frac{1}{4} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{66,4} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429 \\
 r_5 &= -\frac{1}{5} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{76,6} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429 \\
 r_6 &= -\frac{1}{6} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{80,9} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429 \\
 r_7 &= -\frac{1}{7} \left[\ln \left(35,3 \left(\frac{123,36}{85,8} - 1 \right) \right) - \ln(123,36 - 35,3) \right] = 0,35598429.
 \end{aligned}$$

A média aritmética desses valores é dada por $r_{\text{médio}} = 0,294576356$.

Assim, a equação de Verhulst, para este caso, assume a forma:

$$P_n = \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356n} + 35,3}. \tag{B.1}$$

Até aqui, todos os cálculos foram realizados pelo professor e projetados para que os alunos pudessem acompanhar o que acontecia. A partir deste ponto, os alunos foram convidados a verificar a fidelidade da equação (B.1) para descrever a população em estudo.

Calculando os valores de P_n em milhões, tem-se:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 1} + 35,3} = 43,161 \\
 P_2 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 2} + 35,3} = 51,745 \\
 P_3 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 3} + 35,3} = 60,742 \\
 P_4 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 4} + 35,3} = 69,780 \\
 P_5 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 5} + 35,3} = 78,477 \\
 P_6 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 6} + 35,3} = 86,508 \\
 P_7 &= \frac{35,3 \cdot 123,36}{(123,36 - 35,3)e^{-0,294576356 \cdot 7} + 35,3} = 93,646.
 \end{aligned}$$

Os alunos puderam utilizar os recursos disponíveis na planilha eletrônica, bem como calculadoras simples ou científicas.

Em seguida, foi solicitado que comparassem os valores obtidos com os dados oficiais e estimassem o erro encontrado nessa modelagem através do modelo de Verhulst (Figura 54).

Dados Oficiais			População Calculada (em milhões)	Erro %
Ano	n	População (em milhões)		
2006	0	35,3	35,3	0
2007	1	44,9	43,16141125	-3,87214
2008	2	53,9	51,74482026	-3,99848
2009	3	63	60,74233988	-3,58359
2010	4	66,4	69,77995204	5,090289
2011	5	76,6	78,47699604	2,450386
2012	6	80,9	86,50788883	6,931877
2013	7	85,8	93,64590206	9,144408

Figura 54 – Tabela 04 - Estimativa de erro através do modelo de Verhulst

Fonte: Elaborada pelo autor.

As populações previstas para os anos de 2020 e 2030 foram, respectivamente, 118,57442 e 123,0988628.

Essa atividade teve duração de duas aulas. O professor deve analisar o perfil de seus alunos e verificar a necessidade e/ou disponibilidade de realizá-la em uma aula ou duas.

B.1.7 Aula 08 - Considerações Finais

(Sala de Recursos Multimídia)

A aula foi iniciada com a projeção da Tabela 05 (Figura 56), que contém todas as informações oficiais, os valores calculados segundo os modelos de Malthus e Verhulst, além de todos os parâmetros que foram calculados ao longo do estudo.

A partir da tabela e dos dados oficiais, é fácil notar que ambos os modelos retrataram a população em questão com erro inferior a 15%. Porém, o foco principal desta aula foi mostrar aos alunos que a diferença encontrada nos valores calculados é um valor significativo quando estamos trabalhando em milhões. Desta forma, qual seria o melhor modelo a ser usado, caso eles quisessem fazer um estudo populacional futuro, utilizando apenas os dados referentes aos anos de 2006 a 2013?

Dando espaço para que seu aluno pudesse opinar, o professor interveio apenas corrigindo-os nas interpretações incorretas de valores.

Posteriormente, o professor tomou a frente da discussão e pediu para que seus alunos calculassem, segundo o modelo de Malthus, o número de usuários de internet no Brasil daqui a 100 anos, 200 anos, 300 anos... Os valores cresceram absurdamente e quando foram questionados

Dados Oficiais			Modelo de Malthus		Modelo de Verhulst	
Ano	n	População (em milhões)	População Calculada (em milhões)	Erro %	População Calculada (em milhões)	Erro %
2006	0	35,3	35,3	0	35,3	0
2007	1	44,9	40,07527423	-10,7455	43,16141125	-3,87214
2008	2	53,9	45,49653271	-15,5908	51,74482026	-3,99848
2009	3	63	51,65116218	-18,014	60,74233988	-3,58359
2010	4	66,4	58,63837079	-11,6892	69,77995204	5,090289
2011	5	76,6	66,57078725	-13,093	78,47699604	2,450386
2012	6	80,9	75,57627635	-6,58062	86,50788883	6,931877
2013	7	85,8	85,8	1,66E-14	93,64590206	9,144408
2020	14		208,5450425		118,57442	
2030	24		741,6821812		123,0988628	

Figura 55 – Tabela 05 - Comparativo entre os modelos de Malthus e Verhulst

Fonte: Elaborada pelo autor.

se a população humana teria o mesmo potencial de crescimento, levando em consideração escassez de recursos naturais, problemas sociais, políticos e territoriais, tomaram consciência que a longo prazo os valores de P_n tendem a se tornar infinitamente grandes em situações de crescimento, o que levaria a uma população maior que a própria população humana. Tal fato é decorrente de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^n P_0 = \infty,$$

quando $\alpha > 0$, pois $1 + \alpha > 1$.

Não coube aqui uma exposição formal do conceito de limite aos alunos. Mas, alguns exemplos com n grande foram suficientes para convencê-los a respeito do comportamento de P_n quando n tende ao infinito. O modelo de Malthus cresce aceleradamente, ultrapassando a população limite proposta por Verhulst, que neste caso foi de 123,36 milhões, enquanto o modelo de Verhulst desacelera este crescimento, tendendo a se estabilizar à medida que o tempo passa.

Desta forma, o modelo de Verhulst se mostra mais eficiente a curto e longo prazo, apresentando erros menores que os do modelo de Malthus.

APLICAÇÃO DO MODELO DE MALTHUS PARA POPULAÇÕES EM DECRESCIMENTO - MORTALIDADE INFANTIL

A Proposta 3 trabalha os mesmos tópicos e conteúdos da Proposta 2, porém com enfoque em populações com decréscimo. Por serem atividades semelhantes, o início do roteiro é o mesmo e as aulas 1, 2 e 4 do Apêndice B podem ser utilizadas, caso o professor opte por trabalhar apenas a Proposta 3.

C.0.1 Aulas 01 e 02 - Utilização do Modelo de Malthus para Retratar o Decréscimo da Mortalidade Infantil no Brasil

(Laboratório de Informática)

A aula foi iniciada com a definição de Mortalidade Infantil. Entende-se por Mortalidade Infantil o número de crianças nascidas vivas, que não chegam a completar um ano de vida.

Após um breve espaço para discussão e repercussão do tema, cada aluno recebeu uma cópia da Figura 43, seção 4.3 do Capítulo 4, contendo os dados referentes aos números da mortalidade infantil no Brasil, dos anos de 2000 a 2013.

Foi solicitado aos alunos que inserissem no plano cartesiano, através do Geogebra, os pontos (Data, Valores Arredondados) e verificassem se o gráfico obtido (Figura 56) assemelhava-se ao gráfico da Atividade 01 da referência (TAVONI; OLIVEIRA, 2013), do software da UNICAMP.

Após análises, o professor chamou a atenção de seus educandos para as curvas descritas pelos gráficos - ambas apresentam o comportamento de funções exponenciais. A diferença entre as curvas é que a curva descrita na Atividade 01 da referência (TAVONI; OLIVEIRA, 2013) retrata o comportamento de uma função exponencial crescente, enquanto a curva retratada no

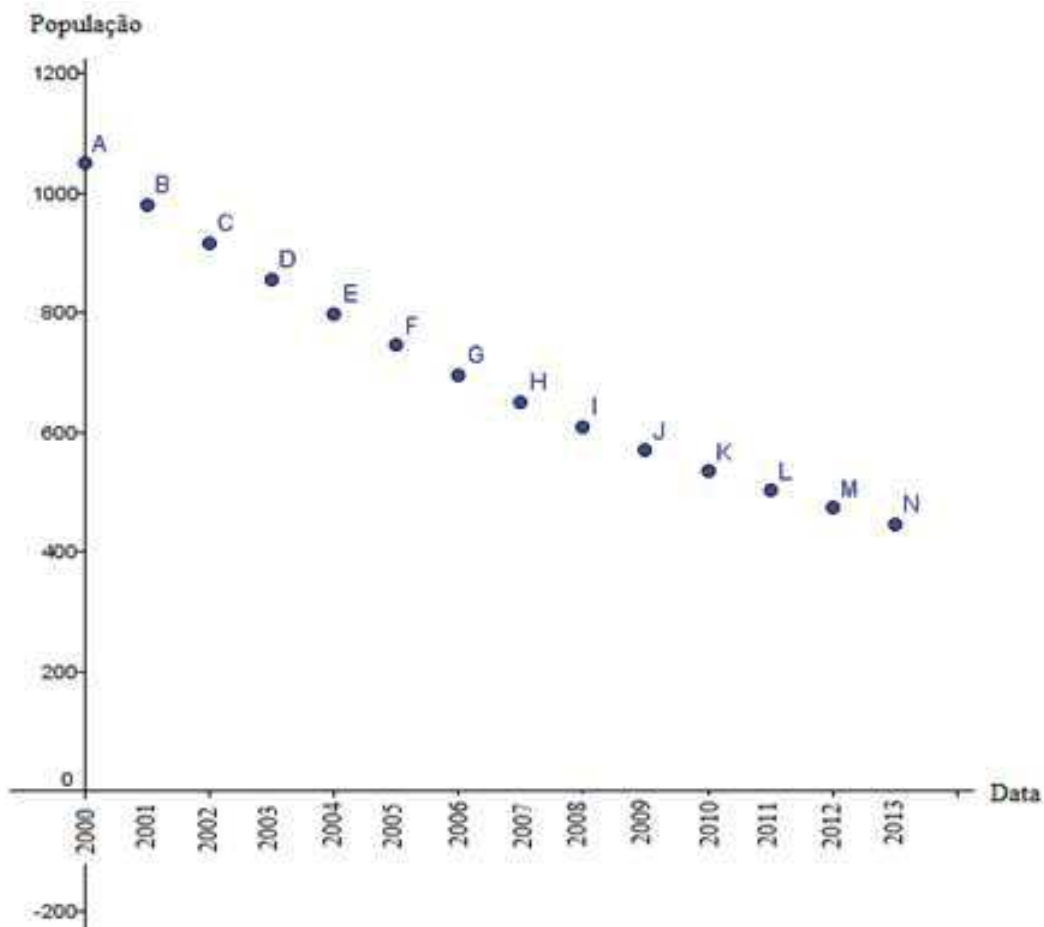


Figura 56 – Pontos (data, valores arredondados)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Geogebra apresentou o comportamento de uma função exponencial decrescente.

Neste momento, foi solicitado aos alunos que recalculassem os valores de P_n para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ e 13 , utilizando a equação (3.3).

O valor de α , neste caso, é:

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1 = \sqrt[13]{\frac{447}{1050}} - 1 = -0,06358.$$

e

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1050 \\
P_1 &= 1050(1 - 0,06358)^1 = 983,24 \\
P_2 &= 1050(1 - 0,06358)^2 = 920,73 \\
P_3 &= 1050(1 - 0,06358)^3 = 862,19 \\
P_4 &= 1050(1 - 0,06358)^4 = 807,37 \\
P_5 &= 1050(1 - 0,06358)^5 = 756,04 \\
P_6 &= 1050(1 - 0,06358)^6 = 707,97 \\
P_7 &= 1050(1 - 0,06358)^7 = 662,95 \\
P_8 &= 1050(1 - 0,06358)^8 = 620,80 \\
P_9 &= 1050(1 - 0,06358)^9 = 581,33 \\
P_{10} &= 1050(1 - 0,06358)^{10} = 544,37 \\
P_{11} &= 1050(1 - 0,06358)^{11} = 509,76 \\
P_{12} &= 1050(1 - 0,06358)^{12} = 477,35 \\
P_{13} &= 1050(1 - 0,06358)^{13} = 447.
\end{aligned}$$

Durante os cálculos, os alunos estavam livres para utilizarem os recursos da planilha eletrônica e/ou calculadoras simples ou científicas.

Foi solicitado aos alunos que comparassem os valores obtidos com os dados oficiais e estimassem o erro encontrado quando modelaram esta população através do modelo de Malthus (Figura 57) e também que calculassem a população prevista para os anos de 2020, 2025 e 2030. Os valores obtidos foram 282,23, 203,21 e 146,32, respectivamente.

C.0.2 Aula 03 - Considerações Finais

(Laboratório de Informática)

Nesta aula, foi analisada a planilha da Figura 58, comparando-se os dados oficiais com os dados gerados pelo modelo de Malthus, os erros percentuais cometidos na utilização do modelo e as previsões para 2020, 2025 e 2030.

Concluiu-se que, embora o modelo tenha sido eficiente no período estudado, o mesmo não pode ser tomado como válido a longo prazo, pois os valores de P_n tendem a se tornar infinitamente pequenos em situações de decrescimento, podendo levar à extinção da população P_n a longo prazo. Tal fato decorre de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^n P_0 = 0,$$

Dados Oficiais			População Calculada	Erro %
Ano	n	População		
2000	0	1050	1050	0
2001	1	981	983,240891	0,228429
2002	2	916	920,7263331	0,515975
2003	3	856	862,1864573	0,722717
2004	4	799	807,3685528	1,047378
2005	5	746	756,0359765	1,345305
2006	6	696	707,9671306	1,719415
2007	7	651	662,9545069	1,83633
2008	8	609	620,8037906	1,938225
2009	9	570	581,3330211	1,988249
2010	10	535	544,3718073	1,75174
2011	11	503	509,7605913	1,344054
2012	12	474	477,34996	0,706743
2013	13	447	447	0

Figura 57 – Tabela 05 - Estimativa de erro através do modelo de Malthus

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dados Oficiais			População Calculada	Erro %
Ano	n	População		
2000	0	1050	1050	0
2001	1	981	983,240891	0,228429
2002	2	916	920,7263331	0,515975
2003	3	856	862,1864573	0,722717
2004	4	799	807,3685528	1,047378
2005	5	746	756,0359765	1,345305
2006	6	696	707,9671306	1,719415
2007	7	651	662,9545069	1,83633
2008	8	609	620,8037906	1,938225
2009	9	570	581,3330211	1,988249
2010	10	535	544,3718073	1,75174
2011	11	503	509,7605913	1,344054
2012	12	474	477,34996	0,706743
2013	13	447	447	0
Previsões para 2020, 2025 e 2030	20		282,2292044	
	25		203,2146973	
	30		146,3215448	

Figura 58 – Considerações Finais

Fonte: Elaborada pelo autor.

quando $\alpha < 0$, pois $0 < 1 + \alpha < 1$.

Desta forma, a aula foi encerrada enfatizando a eficiência do modelo em retratar populações num intervalo de valores conhecidos, o mesmo não ocorrendo para previsões a longo prazo.