

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CESAR AUGUSTO CANCE

PROJETO CANHÃO: O ENSINO DE FUNÇÕES
QUADRÁTICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE
GEOGEBRA

São Carlos
Mai 2015

CESAR AUGUSTO CANCE

**PROJETO CANHÃO: O ENSINO DE FUNÇÕES
QUADRÁTICAS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE
GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática, UFSCar, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa

**São Carlos
Maio 2015**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C215pc Cance, Cesar Augusto.
Projeto canhão : o ensino de funções quadráticas com o auxílio do software GeoGebra / Cesar Augusto Cance. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
86 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Funções. 3. GeoGebra (Software de computador). I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)



Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cesar Augusto Cance, realizada em 22/05/2015:

Grazielle F. Barbosa.

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
UFPB

Marcio Soares

Prof. Dr. Marcio de Jesus Soares
UFSCar

À minha esposa, por muito amor e incentivo, com grande paciência e sempre ao meu lado. Aos meus amigos. Ao meu padrinho, Sr Kalunga. À minha querida orientadora Profa. Grazielle Feliciani Barbosa pela paciência e motivação em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

A professora Grazielle Feliciani Barbosa, pela amizade, dedicação e grande orientação durante a elaboração do trabalho.

Registro minha imensa gratidão à Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, que foi de fundamental importância para a realização do meu trabalho, pois nessa instituição pude colocar em prática e observar os conceitos teóricos aprendidos durante o curso e a realização deste trabalho.

Registro também minha gratidão aos professores do curso, em especial, o professor Márcio de Jesus Soares pela dedicação à exposição dos conteúdos durante as aulas, que foram de fundamental importância para a minha formação.

A todos os colegas do Curso PROFMAT - 2013 em especial aos amigos Fernanda Maria Gomes Deangelis, Rosângela Rossi e Davidson Moura Lopes Silva, pelas horas de estudo, dificuldades e compreensão que passamos juntos e unidos durante todo o curso.

Por fim, registro minha imensa gratidão a minha esposa e aos meus filhos pelo incentivo constante e por acreditarem em mim.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento e a implementação de uma sequência didática a fim de motivar e ensinar os alunos do Ensino Médio o tema funções quadráticas. Para isto, construímos um canhão feito de latas de tiner e preparamos uma série de atividades que foram subdivididas em 3 fases: a construção, a competição e atividades com o uso do software GeoGebra. O trabalho realizado com os alunos despertou nestes um maior interesse pela matéria e foi de extrema valia, pois os alunos não se esqueceram do aprendizado adquirido.

Palavras-chaves: função quadrática; gráfico de função quadrática; atividades no GeoGebra.

ABSTRACT

This work presents the development and implementation of a didactic sequence in order to motivate and teach school students quadratic functions. To do this, we built a cannon made of tiner cans and prepared a serie of activities that have been subdivided into three phases: construction, competition and activities with the use of the software GeoGebra. The work done with students in these aroused a greater interest in the matter and was extremely valuable because students did not forget the acquired learning.

Key words: quadratic function; graph of a quadratic function; activities in GeoGebra.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Gráfico de uma função quadrática feito no GeoGebra.	23
Figura 2: Gráfico da função $f(y) = -y^2 - 1$, feito no GeoGebra.....	25
Figura 3: Gráfico da função $f(y) = y^2 + 1$, feito no GeoGebra.....	25
Figura 4: Gráfico da função $f(x) = x^2$, como feito geralmente pelos alunos pela 1ª vez, seguindo uma tabela.	26
Figura 5: Canhão	28
Figura 6: Procedimento realizado na lata de número 1	29
Figura 7: Procedimento realizado na lata de número 1	29
Figura 9: Procedimento realizado nas garrafas pet.....	30
Figura 8: Procedimento realizado nas latas de número 2 a 7.	30
Figura 10: Vassoura de fogo, (maçarico)	31
Figura 11: Posicionamento do canhão.....	33
Figura 12: Página inicial do GeoGebra.	36
Figura 13: Localização do campo Entrada.	36
Figura 14: Barra de Menu Principal	38
Figura 15: Localização do Controle Deslizante.	40
Figura 16: Janela de configuração do Controle Deslizante	41
Figura 17: Localização do Controle Deslizante na Janela de Visualização	42
Figura 18: Controles Deslizantes fixados a, b e c.....	43
Figura 19: Gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$	43
Figura 20: Localização da função na Janela de Álgebra	44
Figura 21: Localização da janela Mover.	45
Figura 22: Localização do Controle Deslizante a.....	46
Figura 23: Janela de configurações da Parábola.....	47
Figura 24: Localização da janela Mover.	47
Figura 25: Movimento descrito pela parábola.....	48
Figura 26: Parábola descrita pelo gráfico da função $fx = 2x^2 - 14x + 20$	49
Figura 27: Localização da função Interseção de Dois Objetos.	50
Figura 28: Barra de ferramentas	50
Figura 29: Interseção da Parábola com o EixoX.....	51
Figura 30: Pontos A e B na Interseção da parábola com o EixoX.	51
Figura 31: Coordenadas dos pontos A e B.	52
Figura 32: Janela de configurações da Parábola, Propriedades.....	52
Figura 33: Localização da função Cor.....	53
Figura 34: Alteração das configurações na janela do Controle Deslizante.	54
Figura 35: Parábolas distintas com as mesmas raízes	55
Figura 36: Localização das teclas cursoras no teclado.	55
Figura 37: Parábolas sobrepostas.	56
Figura 38: Captura de tela no Paint Brush.....	58
Figura 39: Localização da ferramenta Selecionar no Paint Brush.....	59
Figura 40: Salvar uma imagem no Paint no formato JPEG.....	60
Figura 41: Localização da função Inserir Imagem	61
Figura 42: Janela de configurações da função Inserir Imagem	62
Figura 43: Localização da função Novo Ponto	63
Figura 44: Tela no GeoGebra	63

Figura 45: Parábola descrita pelo gráfico da função fatorada	64
Figura 46: Alterando o valor do Controle Deslizante a.....	65
Figura 47: Alunos com o material separado	69
Figura 48: Separação dos grupos.....	70
Figura 49: Procedimentos realizados pelos grupos para a confecção do canhão	70
Figura 50: Realização do teste do canhão	72
Figura 51: Posicionamento dos grupos para a competição	73
Figura 52: Tela do GeoGebra feito na fase 3.....	74
Figura 53: Tela do GeoGebra feito na fase 3.....	75
Figura 54: Gráfico apresentado na reunião dos professores relacionando o número de acertos das questões da Prova Diagnóstica.....	77

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13	
Capítulo 1		
1 VIABILIDADE DO PROJETO	15	
1.1 Escolha do tema.....	15	
Capítulo 2		17
2 FUNÇÕES QUADRÁTICAS	18	
2.1 Caracterização das funções quadráticas.....	18	
2.2 O Gráfico da Função Quadrática	23	
Capítulo 3		
3 DESCRIÇÃO DAS FASES DO PROJETO CANHÃO	28	
3.1 Fase 1 - Confeção do canhão	28	
3.1.1 <i>Teste do canhão</i>	32	
3.2 Fase 2 – Competição.....	34	
3.3 Fase 3 – Atividades com o uso do software GeoGebra	35	
3.3.1 <i>Atividade 1</i>	35	
3.3.2 <i>Atividade 2</i>	40	
3.3.3 <i>Atividade 3</i>	49	
3.3.4 <i>Atividade 4</i>	57	
Capítulo 4		
4 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO PROJETO CANHÃO.....	66	
4.1 Descrição da Instituição de Ensino.....	66	
4.2 Os alunos e o conteúdo programático.....	67	
4.3 O Projeto Canhão.....	68	
4.4 O desenvolvimento de cada fase.....	68	
4.4.1 <i>Primeira Fase</i>	68	
4.4.2 <i>Segunda fase</i>	72	
4.4.3 <i>Terceira fase</i>	73	
Capítulo 5		
5 CONCLUSÃO.....	76	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78	
ANEXO I.....	79	
ANEXO II.....	81	

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática que tem por característica principal o ensino de funções quadráticas através de atividades práticas realizadas com os alunos por meio da construção de um canhão.

Este trabalho foi realizado em três fases: a primeira, a construção do canhão; a segunda, a competição, e, a terceira, atividades na sala de informática utilizando o software GeoGebra e uma filmagem de pelo menos um dos lançamentos do projétil.

Organizamos esta dissertação em cinco capítulos tendo como meta um produto didático. Segue abaixo uma breve descrição de cada capítulo.

No primeiro capítulo, vamos estudar a viabilidade do projeto, ou seja, a escolha do tema. Nós acreditamos que a escolha do tema ensino de funções quadráticas está bem fundamentado tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) como no Currículo do Estado de São Paulo.

No segundo capítulo, apresentamos uma caracterização das funções quadráticas. Na caracterização mostramos que uma função quadrática qualquer tem a propriedade de transformar uma progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem. No estudo do gráfico de uma função quadrática vamos determinar o lugar geométrico que é equidistante de uma reta e um ponto.

O objetivo do terceiro capítulo foi descrever todas as fases do Projeto Canhão; a construção do canhão, a competição, e as atividades na sala de informática utilizando o software GeoGebra.

No quarto capítulo, descrevemos o local da aplicação do projeto, ou seja, a escola; e também, cada fase do projeto, com as experiências observadas durante o processo de aplicação.

Na conclusão, exibida no quinto capítulo, foi feita uma análise quantitativa e qualitativa da aprendizagem dos alunos usando como referencial uma prova aberta, chamada; Avaliação da Aprendizagem em Processo, aplicada todos os anos pelo Governo do Estado de São Paulo e a Secretaria da Educação. Com a análise dos dados fornecidos pela coordenação da escola, observamos a concretização do conceito, função quadrática, através do alto nível de acertos das questões, que tratavam do assunto abordado neste projeto.

Capítulo 1

1 VIABILIDADE DO PROJETO

Neste capítulo mostraremos a importância do tema funções quadráticas e como o tema está fundamentado nos Parâmetros Curriculares.

1.1 Escolha do tema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) “A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos.”

A escolha do tema funções quadráticas está vinculada diretamente com o conteúdo de Matemática do 2º bimestre da 1ª série do Ensino Médio.

O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola, que, por definição, é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes a um ponto e a reta. Infelizmente esta definição na maioria das vezes não é apresentada aos alunos do Ensino Médio das escolas públicas, mas em alguns vestibulares, esse conceito pode ser cobrado como, por exemplo, em uma questão do tipo:

Considere a seguinte informação:

Num plano, chama-se *lugar geométrico* a um conjunto de pontos desse plano tais que:

- a) Todos satisfazem uma mesma propriedade;
- b) somente eles obedecem a essa propriedade no plano.

Essa propriedade é dita: propriedade característica do lugar geométrico.

Em Geometria Analítica, para obtermos a equação de um lugar geométrico, devemos proceder da seguinte maneira:

- a) Indicamos por $P(x, y)$ um ponto desse lugar geométrico.
- b) Por meio da propriedade característica desse lugar geométrico, estabelecemos uma equação em x e y .

A equação do lugar geométrico dos pontos do plano xOy equidistantes do ponto $A(2, 0)$ e do eixo y é

- a) $x - 1 = 0$
- b) $x = 2$
- ▶ c) $y^2 - 4x + 4 = 0$
- d) $x^2 - 4y + 4 = 0$
- e) $x - y = 0$

*Exercício retirado do exemplar do professor Anglo Vestibulares, Matemática 1 Álgebra, 2ª edição-2008.

Se os alunos tivessem a oportunidade de aprender algo um pouco mais aprofundado como a definição de parábola sendo um lugar geométrico, sem muitos esforços ficaria fácil de encontrar a resposta correta da questão acima.

No Ensino Médio da Rede Pública apenas somos apresentados às parábolas como o gráfico de uma função quadrática, e o aluno tem que esboçar o gráfico, não sendo apresentado o porquê disso, e não tendo nada de interessante, ou motivador para ele. Uma parábola pode definir desde gastos de uma empresa até a trajetória de um projétil. Dela, podemos retirar algumas informações úteis. Se nós pegarmos, por exemplo, a trajetória de um projétil saberemos sua altura em cada instante.

De acordo com a Proposta Pedagógica do Estado, (p. 65) o aluno cursando o 1º ano do Ensino Médio no 2º bimestre deveria ser capaz de:

Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo).

Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.
(<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>)

Complementando esta ideia, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (2000, p.43):

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999, p. 44):

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.
(<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>)

Capítulo 2

2 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

A referência principal para este capítulo é LIMA (1997), “A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1”. Tendo como objetivo demonstrar a caracterização das funções quadráticas nos \mathbb{N} e \mathbb{R} , e descrever o gráfico da função quadrática como um lugar geométrico.

2.1 Caracterização das funções quadráticas

Uma propriedade que caracteriza as funções quadráticas é a seguinte: dada uma função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, ela tem a propriedade de transformar uma progressão aritmética em uma outra sequência que é uma progressão aritmética de segunda ordem, ou seja, as diferenças sucessivas desta sequência formam uma nova sequência que é uma progressão aritmética.

Por exemplo, considere a função quadrática, $f(x) = x^2$, e a progressão aritmética $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}$, em que $x_n = n$. Logo, $\{f(x_1) = 1, f(x_2) = 4, f(3) = 9, \dots, f(x_n) = n^2, f(x_{n+1}) = n^2 + 2.n + 1, \dots\}$.

Esta nova sequência formada pelas imagens da progressão dada inicialmente; $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, n^2 + 2.n + 1, \dots\}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois suas diferenças sucessivas $\{4 - 1 = 3, 9 - 4 = 5, 16 - 9 = 7, 25 - 16 = 9, \dots, n^2 + 2.n + 1 - n^2 = 2.n + 1, \dots\}$ formam a sequência: $\{3, 5, 7, 9, \dots, 2.n + 1, \dots\}$ que também é uma progressão aritmética de razão 2.

Isto não é uma coincidência, se $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ é uma função quadrática qualquer e $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ é uma progressão aritmética de razão r , então a sequência $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$ goza da propriedade de que as diferenças sucessivas:

$d_1 = f(x_2) - f(x_1)$, $d_2 = f(x_3) - f(x_2)$, $d_3 = f(x_4) - f(x_3)$, ... formam uma progressão aritmética de razão, $2ar^2$. De fato, seja $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ e $x_{n+1} - x_n = r$. Temos que:

$$f(x_{n+1}) = ax_{n+1}^2 + bx_{n+1} + c$$

$$f(x_n) = ax_n^2 + bx_n + c$$

e ainda:

$$\begin{aligned} d_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) = a(x_{n+1}^2 - x_n^2) + b(x_{n+1} - x_n) \\ &= a(x_{n+1} + x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + br \\ &= ar(x_{n+1} + x_n) + br \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) \\ &= ax_{n+2}^2 + bx_{n+2} + c - (ax_{n+1}^2 + bx_{n+1} + c) \\ &= a(x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2) + b(x_{n+2} - x_{n+1}) \\ &= a(x_{n+2} + x_{n+1}) \cdot (x_{n+2} - x_{n+1}) + br \\ &= ar(x_{n+2} + x_{n+1}) + br. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= ar(x_{n+2} - x_n) \\ &= ar(x_1 + (n+2-1)r - (x_1 + (n-1) \cdot r)) \\ &= ar(2r) = 2ar^2 \end{aligned}$$

portanto a sequência $\{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$ tem razão $2ar^2$.

Sabendo que uma progressão aritmética é uma função afim restrita ao conjunto dos números Naturais a equação $x_n = x_1 + (n-1)r$, pode ser escrita na forma $x_n = a \cdot n + b$, sendo $a = r$ e $b = x_1 - r$. Quando a função $f(x) = a \cdot x + b$ é restrita aos números naturais nos fornece os termos $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $x_3 = f(3)$, ..., $x_n = f(n)$, ..., da progressão aritmética.

Ainda, se $\{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots\}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem então existem $a, b, c \in \mathbb{N}$, tais que $y = a.n^2 + b.n + c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, as diferenças sucessivas que chamaremos de $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n, \dots$ é uma progressão aritmética com primeiro termo d_1 e razão r . Assim temos:

$$d_n = d_1 + (n - 1).r$$

$$y_{n+1} - y_n = (y_2 - y_1) + (n - 1).r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \dots + (y_2 - y_1) + y_1 \\ &= (d_1 + (n - 1).r) + (d_1 + (n - 2).r) + \dots + d_1 + y_1 \\ &= n.d_1 + \frac{n.(n-1)}{2}.r + y_1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Esta igualdade é verdadeira quando $n = 0$, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} y_n &= (n - 1).d_1 + \frac{(n - 1).(n - 2)}{2}.r + y_1 \\ &= (n - 1).d_1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.r + y_1 \\ &= \frac{r}{2}.n^2 + \left(d_1 - \frac{3.r}{2}\right).n - d_1 + y_1 + r \\ &= a.n^2 + b.n + c, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com $a = \frac{r}{2}$, $b = \left(d_1 - \frac{3.r}{2}\right)$ e $c = r - d_1 + y_1$.

Teorema (Caracterização das Funções Quadráticas.) A fim de que a função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $\{y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots\}$.

Demonstração: Acabamos de demonstrar a necessidade. Para provar a suficiência, seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda P.A., não-constante numa P.A. de segunda ordem não-degenerada. Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x) - f(0)$, vemos que g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$.

Considerando a progressão aritmética $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ vemos que os valores $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ formam uma P.A. de segunda ordem não-degenerada. Logo existem constantes $a \neq 0$ e b tais que $g(n) = an^2 + bn$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Deveria ser $g(n) = an^2 + bn + c$, mas $g(0) = 0$ implica $c = 0$).

Em seguida, fixemos arbitrariamente um número $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a progressão aritmética $\left\{\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots, \frac{n}{p}, \dots\right\}$.

De modo análogo, concluímos que existem $a' \neq 0$ e b' tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} an^2 + bn &= g(n) \\ &= g\left(\frac{np}{p}\right) \\ &= a'(np)^2 + b'(np) \\ &= (a'p^2)n^2 + (b'p)n. \end{aligned}$$

Portanto, as funções quadráticas $ax^2 + bx$ e $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$ coincidem para todo $x = n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $a = a'p^2$ e $b = b'p$, ou seja, $a' = \frac{a}{p^2}, b' = \frac{b}{p}$. Logo, para quaisquer números n e p vale:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{p}\right) &= a'n^2 + b'n \\ &= \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n \\ &= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right). \end{aligned}$$

Vemos então que as funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$, para todo número racional positivo $r = \frac{n}{p}$. Segue que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real positivo x . De modo análogo, considerando a P.A. $\{-1, -2, -3, \dots\}$, concluímos que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x \leq 0$. Logo, pondo $f(0) = c$, temos $f(x) = g(x) + c$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.2 O Gráfico da Função Quadrática

Considere, num plano α , uma reta ℓ e um ponto fixo F não pertencente a ℓ . Uma Parábola \mathcal{P} é o lugar geométrico dos pontos de α que equidistam de F e ℓ .

A parábola possui um eixo de simetria que passa pelo foco F , e é perpendicular a reta diretriz ℓ . O ponto V chamado de vértice da parábola pertence ao eixo de simetria e é o ponto médio entre o foco F , e a interseção da reta diretriz ℓ com o eixo de simetria.

Sendo $2p$ a distância do foco a reta diretriz, chamado de parâmetro da parábola, vejamos um exemplo de uma parábola cujo eixo de simetria é o eixo x . (Ver Figura 1)

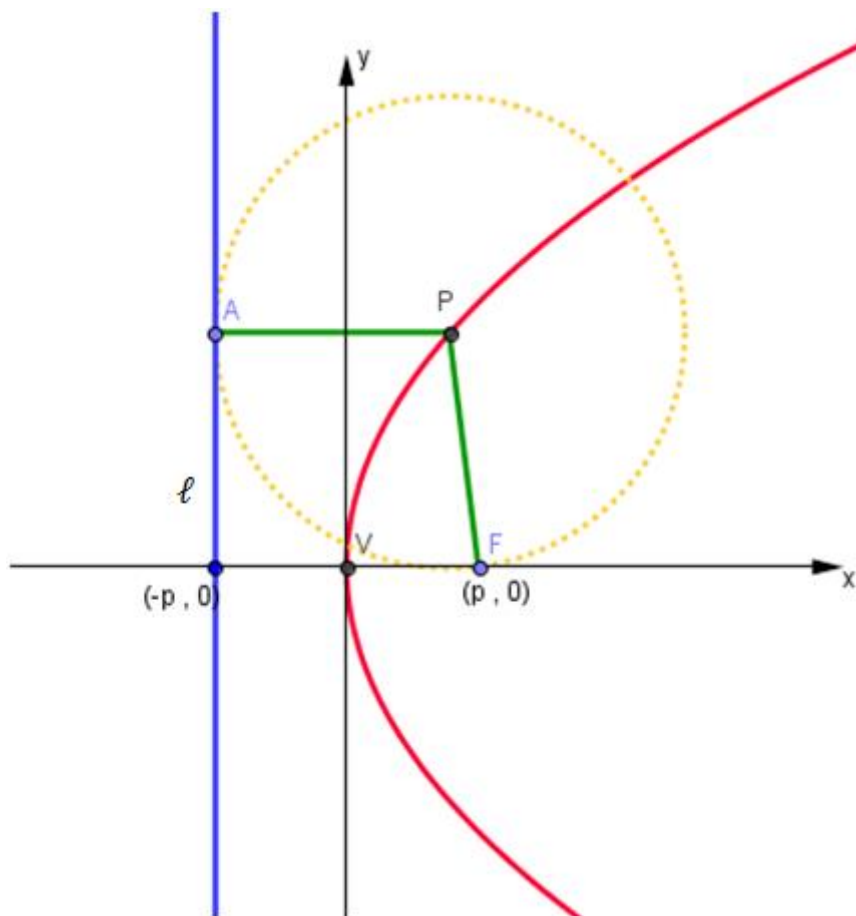


Figura 1: Gráfico de uma função quadrática feito no GeoGebra.

Vejamos agora como fica a equação da parábola:

$$d(P; F) = d(P; L)$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

$$(x + p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$-2px + y^2 = 2px$$

$$y^2 = 4px$$

Como dito anteriormente, no Ensino Médio apenas somos apresentados às parábolas como o gráfico de uma função quadrática, e o aluno tem de esboçar o gráfico, não sabendo como, nem porquê, o gráfico é daquela forma.

Desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, mais precisamente do 9º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, ensinamos, geralmente, traçar o gráfico ou fazer um simples esboço do gráfico de uma função do 2º grau apenas no caso $y = f(x)$.

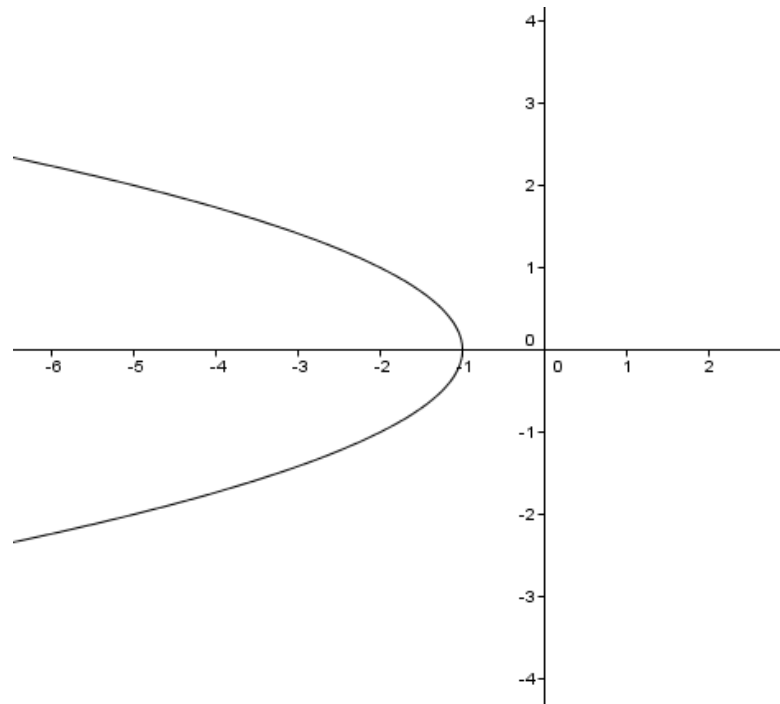


Figura 2: Gráfico da função $f(y) = -y^2 - 1$, feito no GeoGebra.

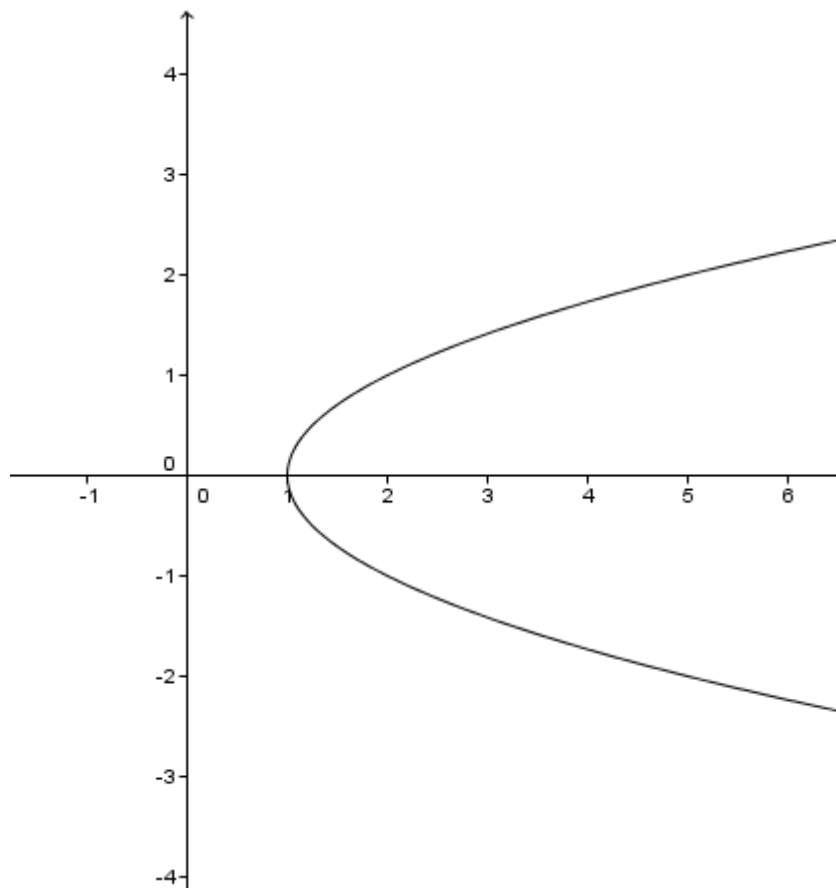


Figura 3: Gráfico da função $f(y) = y^2 + 1$, feito no GeoGebra.

O esboço de um gráfico de uma função do 2º grau é ensinado no Ensino Fundamental através de tabelas do estilo

x	$y = x^2$
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9

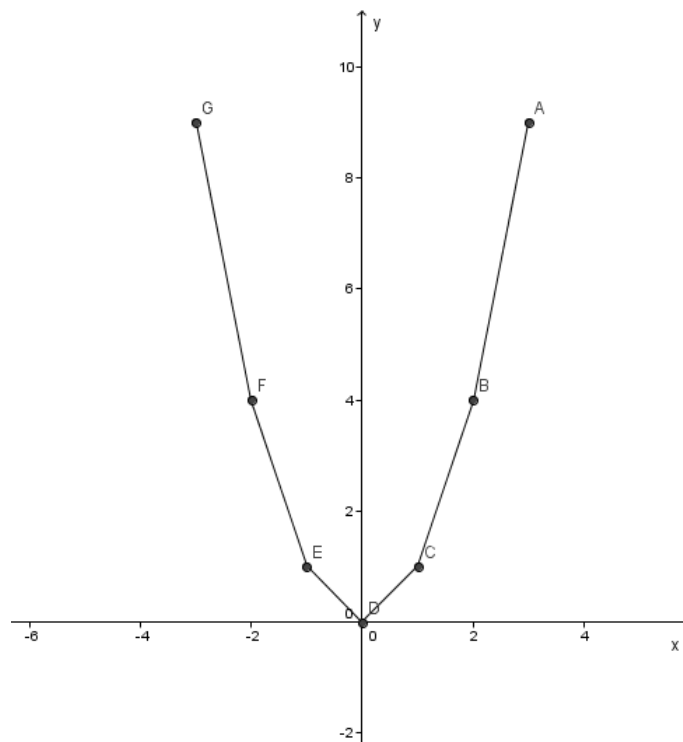


Figura 4: Gráfico da função $f(x) = x^2$, como feito geralmente pelos alunos pela 1ª vez, seguindo uma tabela.

Esse modelo oferece aos alunos apenas uma noção do que está acontecendo com a variável y quando variamos a variável x . Já no Ensino Médio são apresentados apenas 3 ou 4 pontos, no máximo, sendo eles : as raízes, se existirem, o vértice e a intersecção com o eixo y . Um modo bem interessante é fazer com que os alunos descubram por si a relação do y do vértice com $f(x_v)$ e x_v com a média aritmética das raízes, caso existam, desvinculando-os das fórmulas.

Infelizmente, existe o desinteresse dos alunos com relação à função do 2º grau e aos gráficos, justamente por não enxergarem uma relação entre esta matéria e as atividades do seu cotidiano. Devido a esse desinteresse, e com a experiência de ensinar função do 2º grau para os alunos da forma tradicional, tive a ideia de ensinar função do 2º grau usando o lançamento de projéteis cuja trajetória é descrita por uma parábola.

Capítulo 3

3 DESCRIÇÃO DAS FASES DO PROJETO CANHÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma sequência didática, dividida em três fases, que foi aplicada para quatro turmas do 1º ano do Ensino Médio da E. E. Dorival Alves, com o intuito de aprimorar o ensino de funções quadráticas .

3.1 Fase 1 - Confeção do canhão

Para a confecção do canhão são necessárias sete latas de tiner, o que é um pouco mais difícil de se encontrar do que as antigas latas de óleo de cozinha, que não existem mais. As latas de tiner geralmente são encontradas em lojas de tintas ou funilarias.

Também, são necessárias 15 garrafas pet, martelo, prego, abridor de latas e de uma vassoura de fogo, podendo esta ser substituída por uma boca de um fogão ou um soprador térmico.



Figura 5: Canhão

O canhão é constituído por sete latas de tiner empilhadas, sendo que na primeira lata (a de número 1) que já tem um furo central, foram feitos vários furinhos em volta desse furo (Figura 6), para dissipar melhor o álcool e apenas um orifício do outro lado da lata, (Figura 7) que servirá para a nossa ignição.



Figura 6: Procedimento realizado na lata de número 1



Figura 7: Procedimento realizado na lata de número 1

O restante das latas, ou seja, as outras seis foram abertas a tampa e o fundo.



Figura 8: Procedimento realizado nas latas de número 2 a 7.

A união dessas latas é feita com o auxílio de uma garrafa pet que deverá ser cortada a tampa e o fundo.

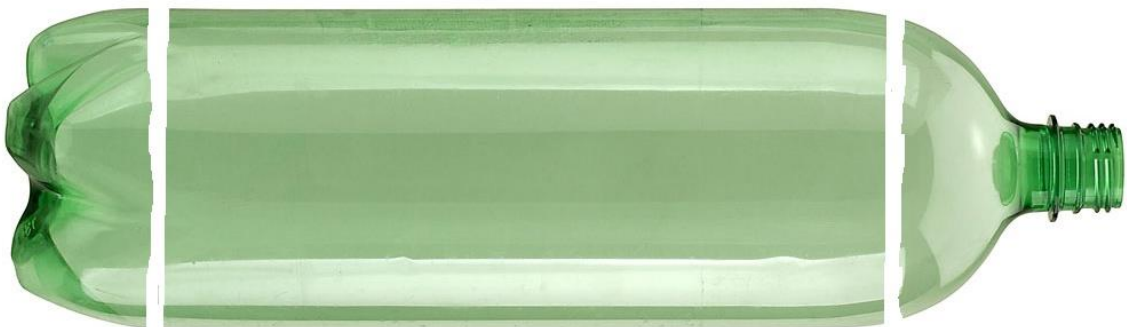


Figura 9: Procedimento realizado nas garrafas pet.

Coloca-se a garrafa pet sobre a união de duas latas, ou seja, na junção entre uma lata e outra e passa-se a vassoura de fogo sobre a garrafa pet (Figura 10). O plástico da garrafa pet gruda de tal forma nas latas que podemos falar que foi feito um tipo de solda plástica, repetimos o mesmo procedimento para as latas de numero 2 a 7, por último unimos a lata de numero 1.



Figura 10: Vassoura de fogo, (maçarico).

Uma observação muito importante principalmente por envolver segurança, o uso da vassoura de fogo para efetuar a solda das latas, deve ser realizada apenas pelo professor ou responsável pelo projeto, pois consideramos ser mais seguro de maneira alguma os alunos devem manusear o maçarico ou vassoura de fogo.

Também, por motivo de segurança deve ser realizada mais de uma solda plástica em cada junção das latas. Na primeira lata, onde a pressão exercida pelo disparo é maior, deve ser feito um revestimento total desta lata.

3.1.1 *Teste do canhão*

Nós acreditamos que, esta parte que parece tão simples, seja a mais complexa de todas.

Depois da confecção do canhão leve os alunos para o pátio da escola e peça para que cada grupo teste seu respectivo canhão. É imprescindível avisar a coordenação e a direção da escola antes da realização de tal teste, e pedir para que os colegas, professores, reservem apenas 5 minutos de suas aulas para que todos possam observar, para que não aja nenhum susto, ou euforia, por parte de todos os alunos.

Descreveremos agora, passo a passo, como realizar um disparo bem sucedido:

- a) Coloque uma quantidade pequena de etanol na boca do canhão, aproximadamente uma tampinha de garrafa pet, etanol este que deve ser providenciado e manuseado apenas pelo professor, ou responsável;
- b) Despeje a mesma quantidade de etanol no chão;
- c) Com o canhão vamos fazendo um movimento de pêndulo;
- d) Quando o etanol, que você jogou no chão, se evaporar por completo, verifique também se evaporou por completo o etanol do canhão;
- e) Um bom indício da evaporação completa do etanol é a mudança de temperatura do canhão, você sentirá o canhão gelado;
- f) Posicione o canhão, fazendo uma angulação com o chão, a horizontal, e principalmente com um apoio na primeira lata, pois toda a energia ali produzida empurrará o canhão para trás, (Figura 11);

- g) Feito isso basta ascender um palito de fósforo no local onde você fez um furo na primeira lata indicado na foto abaixo (figura 11). Por motivo de segurança é apropriado que esta ignição seja feita com um prolongador, ou seja, um palito grande.



Figura 11: Posicionamento do canhão.

3.2 Fase 2 – Competição

Nesta atividade, após ensinar os alunos a disparar o canhão, os grupos devem ser posicionados na mesma linha e cada grupo terá o direito a três lançamentos de um projétil. O projétil deve ser feito por cada grupo, o professor pode orientar os grupos, com exemplos, tais como: uma bolinha de tênis , uma bolinha de papel, deixando com que os alunos decidam qual o melhor projétil para o seu grupo.

Nesta etapa os alunos devem descobrir a melhor angulação para posicionar o canhão, o peso e o formato do projétil para garantir a vitória na competição. Também será necessário filmar pelo menos um dos lançamentos para ser utilizado na atividade 4 da fase 3. O grupo que lançar o projétil mais longe é o vencedor.

3.3 Fase 3 - Atividades com o uso do software GeoGebra

As atividades 1, 2 e 3 a seguir fazem parte da preparação para a atividade 4, em que nós estudaremos a trajetória descrita, quando lançamos um projétil. Utilizamos a versão GeoGebra 4.2 e sugerimos o link (geogebra.softonic.com.br) para o download do software GeoGebra.

3.3.1 Atividade 1

Nesta atividade vamos aprender a escrever funções quadráticas utilizando um software chamado GeoGebra e verificar o que acontece com o gráfico da função quando alteramos um determinado coeficiente.

As funções quadráticas da forma $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ devem ser escritas como no campo Entrada do GeoGebra, da seguinte forma:

$$y = a * x^2 + b * x + c$$

O símbolo * significa a multiplicação, e o símbolo ^ significa elevado à potência. Em algumas versões do GeoGebra não é necessário o uso do símbolo *, mas para evitarmos qualquer transtorno vamos utilizá-lo sempre.

Por exemplo, considere a função $f(x) = 2x^2 + 5x - 8$. Ela deve ser escrita da seguinte forma no campo Entrada do GeoGebra: $y = 2 * x^2 + 5 * x - 8$.

Vamos começar:

1. Abra o GeoGebra

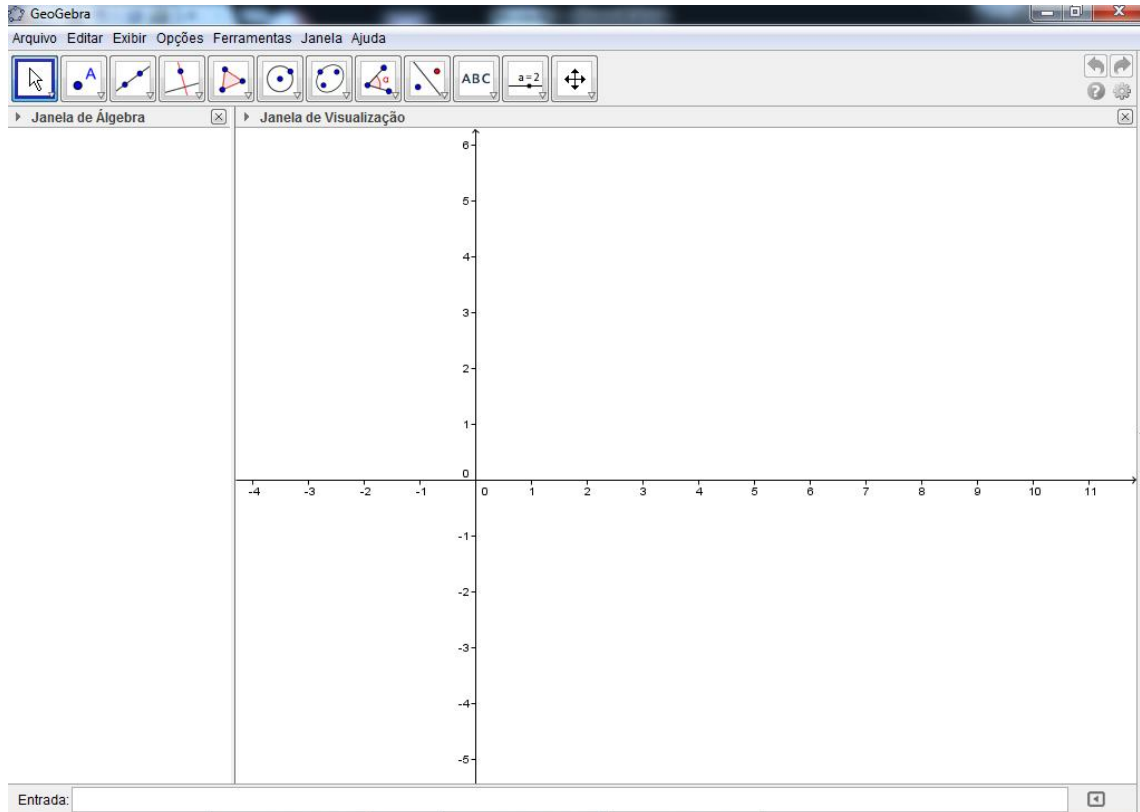


Figura 12: Página inicial do GeoGebra.

2. No campo Entrada:

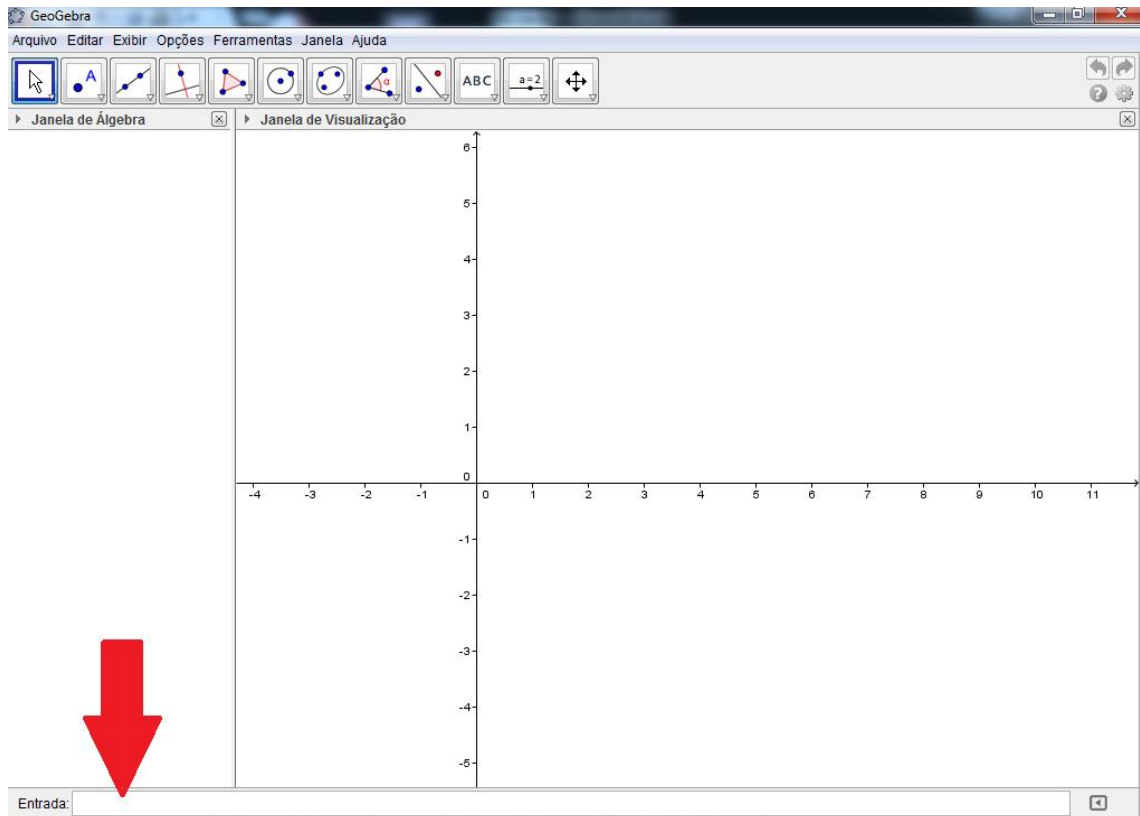


Figura 13: Localização do campo Entrada.

Digite as seguintes funções e tecle Enter após digitar cada uma delas:

a) $y = x^2 + 3x - 7$

b) $y = 2x^2 + 3x - 7$

c) $y = 3x^2 + 3x - 7$

d) $y = 8x^2 + 3x - 7$

e) $y = 20x^2 + 3x - 7$

f) $y = -x^2 + 3x - 7$

g) $y = -2x^2 + 3x - 7$

h) $y = -3x^2 + 3x - 7$

i) $y = -8x^2 + 3x - 7$

j) $y = -20x^2 + 3x - 7$

Perguntas:

- Qual coeficiente da função quadrática você alterou?
- As raízes destas equações são as mesmas?
- O que você percebeu com relação a parábola descrita pelo gráfico de cada uma das funções acima?

3. Na Barra de Menu Principal, de o comando: Arquivo; Novo; Não Gravar. Ver Figura 14

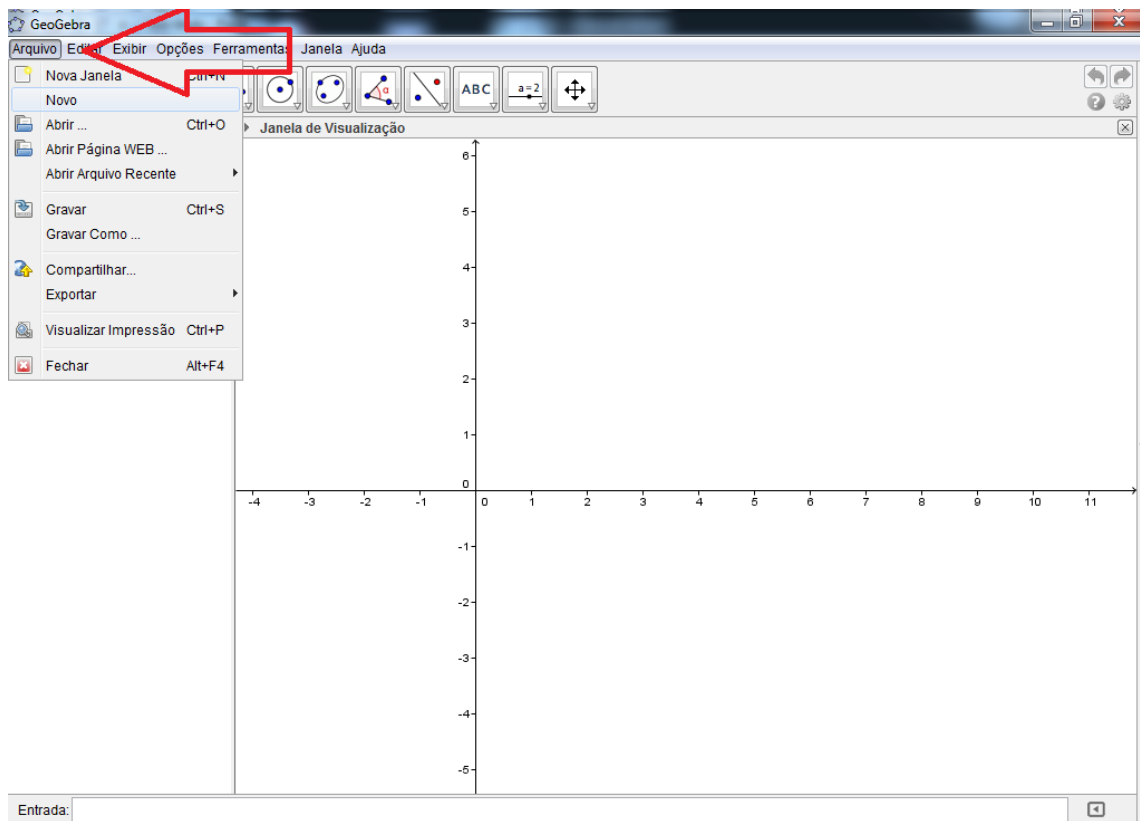


Figura 14: Barra de Menu Principal.

Digite as seguintes funções no campo Entrada e tecle Enter após digitar cada uma delas:

- a) $y = x^2 + 3x - 7$
- b) $y = x^2 + 4x - 7$
- c) $y = x^2 + 5x - 7$
- d) $y = x^2 + 13x - 7$
- e) $y = x^2 + 35x - 7$
- f) $y = x^2 - 3x - 7$
- g) $y = x^2 - 4x - 7$
- h) $y = x^2 - 5x - 7$
- i) $y = x^2 - 13x - 7$

$$j) y = x^2 - 35x - 7$$

Perguntas:

- a. Qual coeficiente da função quadrática você alterou?
- b. As raízes destas equações são as mesmas?
- c. O que você percebeu com relação a parábola descrita pelo gráfico de cada uma das funções acima?

4. Na Barra de Menu Principal, de o comando: Arquivo; Novo; Não Gravar.

Digite as seguintes funções no campo Entrada e tecle Enter após digitar cada uma

delas:

$$a) y = x^2 + 3x - 7$$

$$b) y = x^2 + 3x - 8$$

$$c) y = x^2 + 3x - 10$$

$$d) y = x^2 + 3x - 15$$

$$e) y = x^2 + 3x - 27$$

$$f) y = x^2 + 3x + 7$$

$$g) y = x^2 + 3x + 8$$

$$h) y = x^2 + 3x + 10$$

$$i) y = x^2 + 3x + 15$$

$$j) y = x^2 + 3x + 27$$

Perguntas:

- a. Qual coeficiente da função quadrática você alterou?
- b. As raízes destas equações são as mesmas?
- c. O que você percebeu com relação a parábola descrita pelo gráfico de cada uma das funções acima?

3.3.2 Atividade 2

Nesta atividade vamos escrever uma função do segundo grau utilizando os controles deslizantes, para uma melhor visualização do que acontece com uma parábola quando alteramos os seus coeficientes.

1. Abra o GeoGebra;
2. Na Barra de Ferramentas, clique no ícone Controle Deslizante;

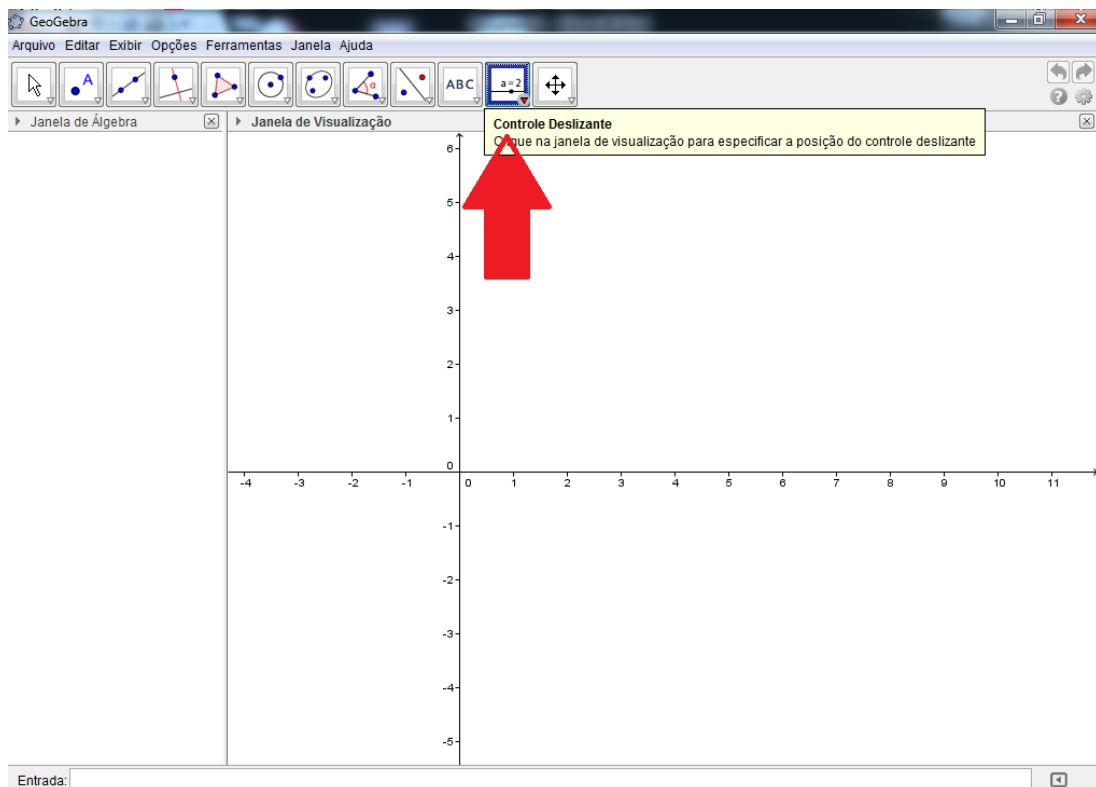


Figura 15: Localização do Controle Deslizante.

3. Na Janela de Visualização clique no lugar onde você queira que o Controle Deslizante fique fixado, feito isso, abrirá a janela de propriedades do Controle Deslizante, nesta janela clique em Aplicar, ver Figura 16;

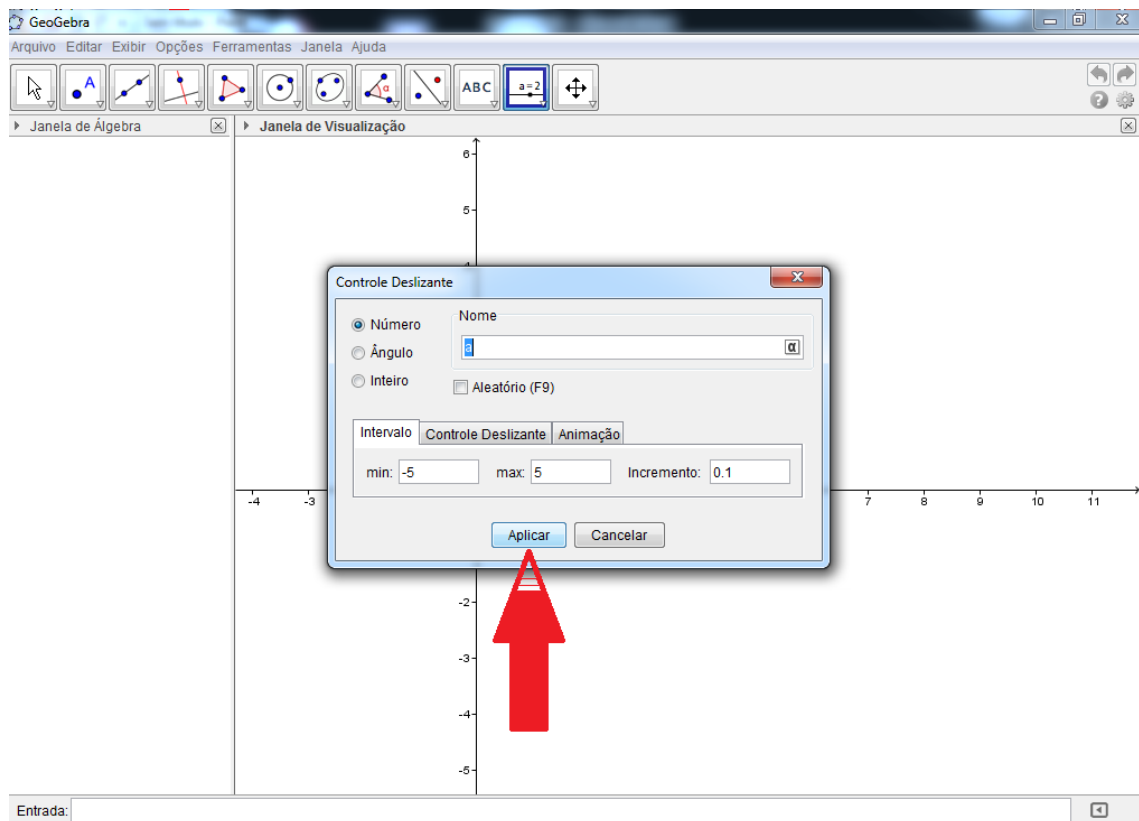


Figura 16: Janela de configuração do Controle Deslizante.

Em seguida, na Janela de Visualização, será fixado o seu controle deslizante “a”, conforme Figura 17;

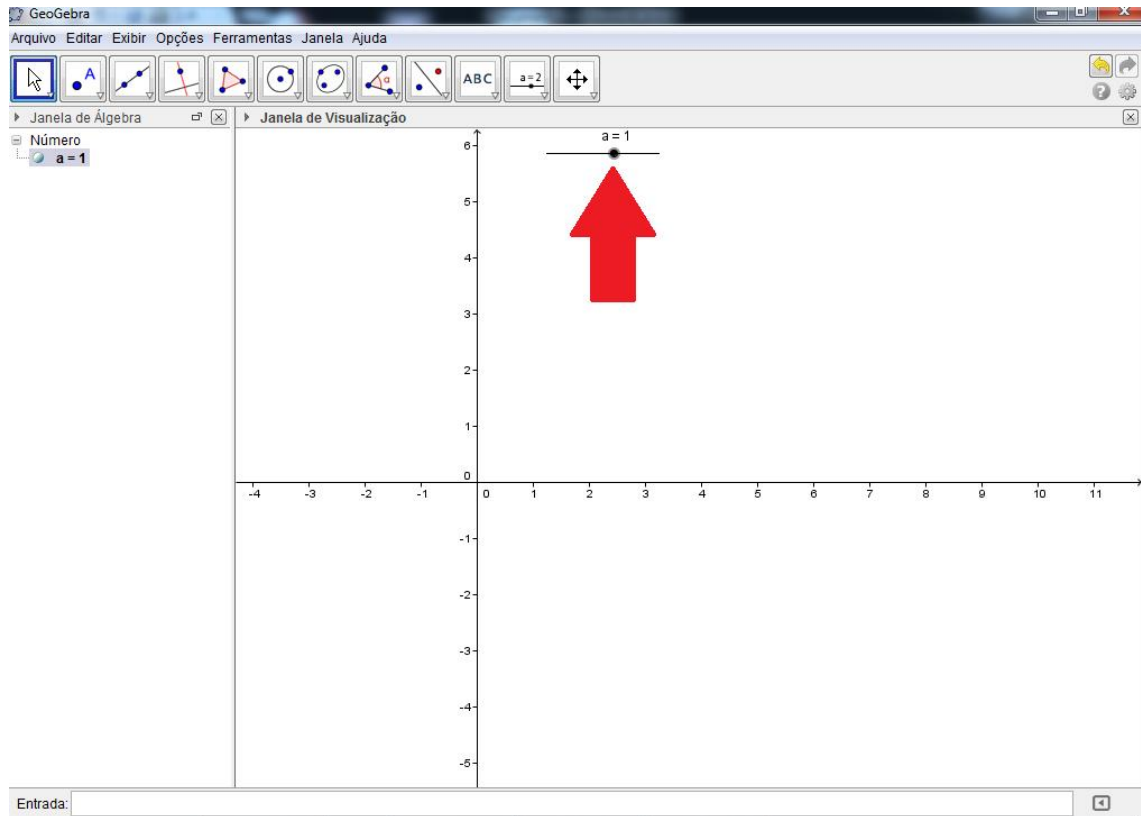


Figura 17: Localização do Controle Deslizante na Janela de Visualização.

4. Repita os itens 2 e 3 mais duas vezes seguidas para fixar os Controles Deslizantes b e c ;
5. Agora a Janela de Visualização deverá estar da seguinte forma:

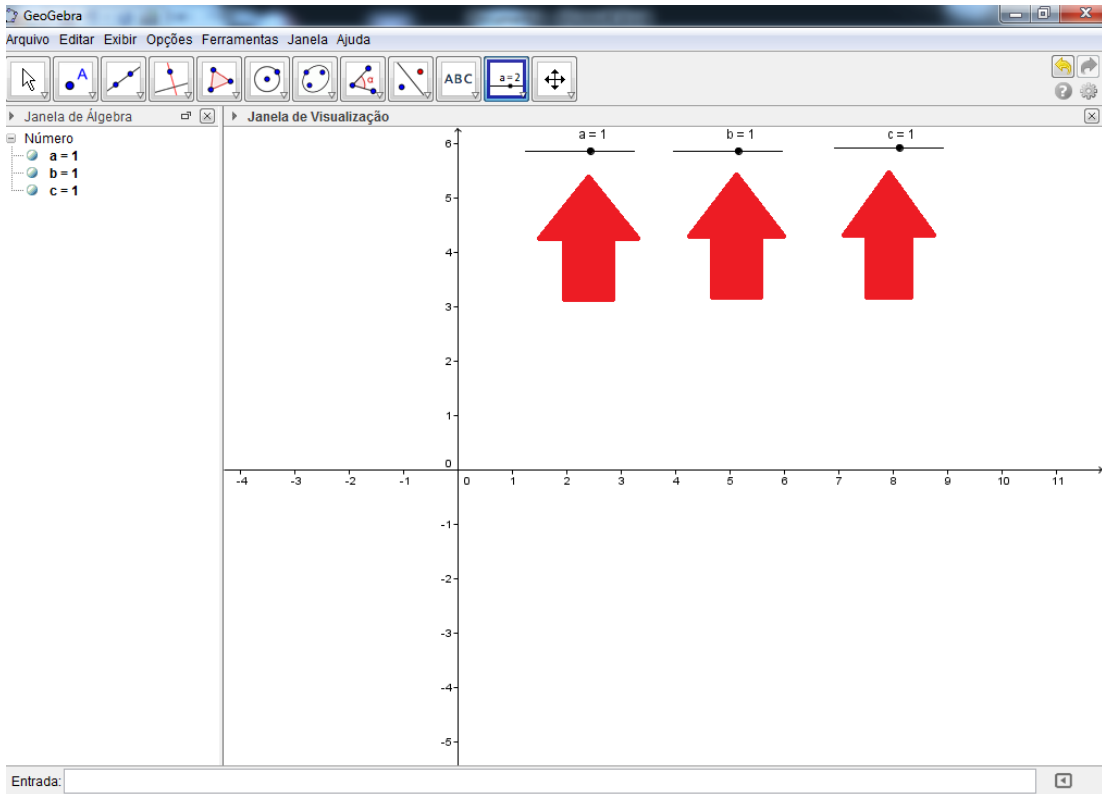


Figura 18: Controles Deslizantes fixados a, b e c.

6. Com os três Controles Deslizantes (**a**, **b** e **c**) determinados, no campo Entrada digite: $y = a * x^2 + b * x + c$ e tecle Enter, ver Figura 19;

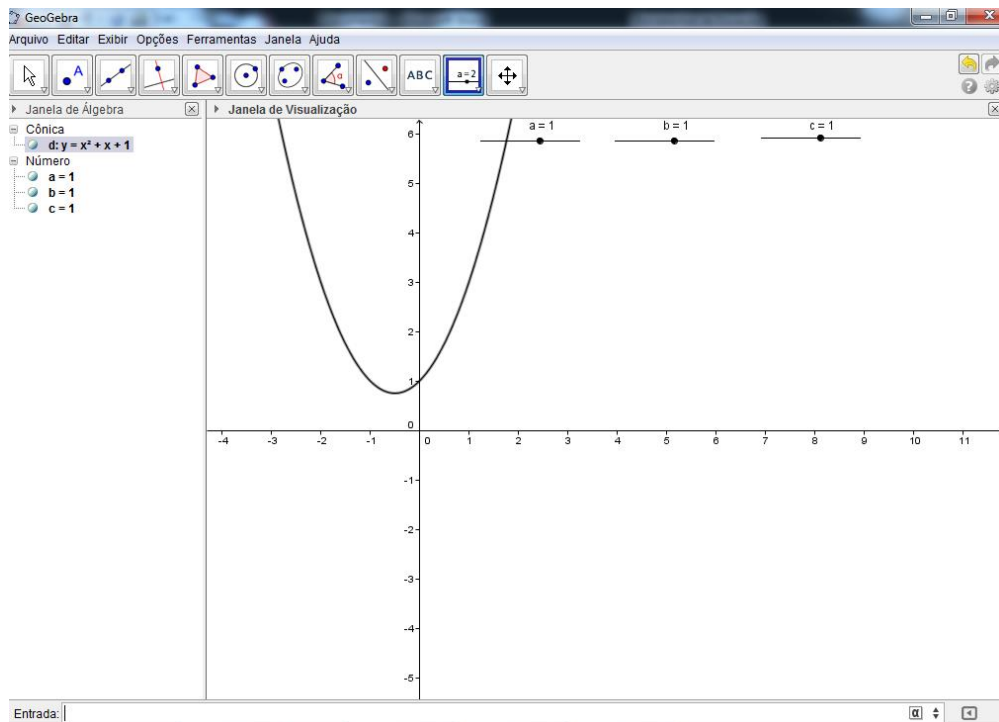


Figura 19: Gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$

7. Os valores iniciais dos Controles Deslizantes a, b e c são iguais a 1, portanto a parábola descrita, é referente a função que está escrita na janela de Álgebra, ver Figura 20;

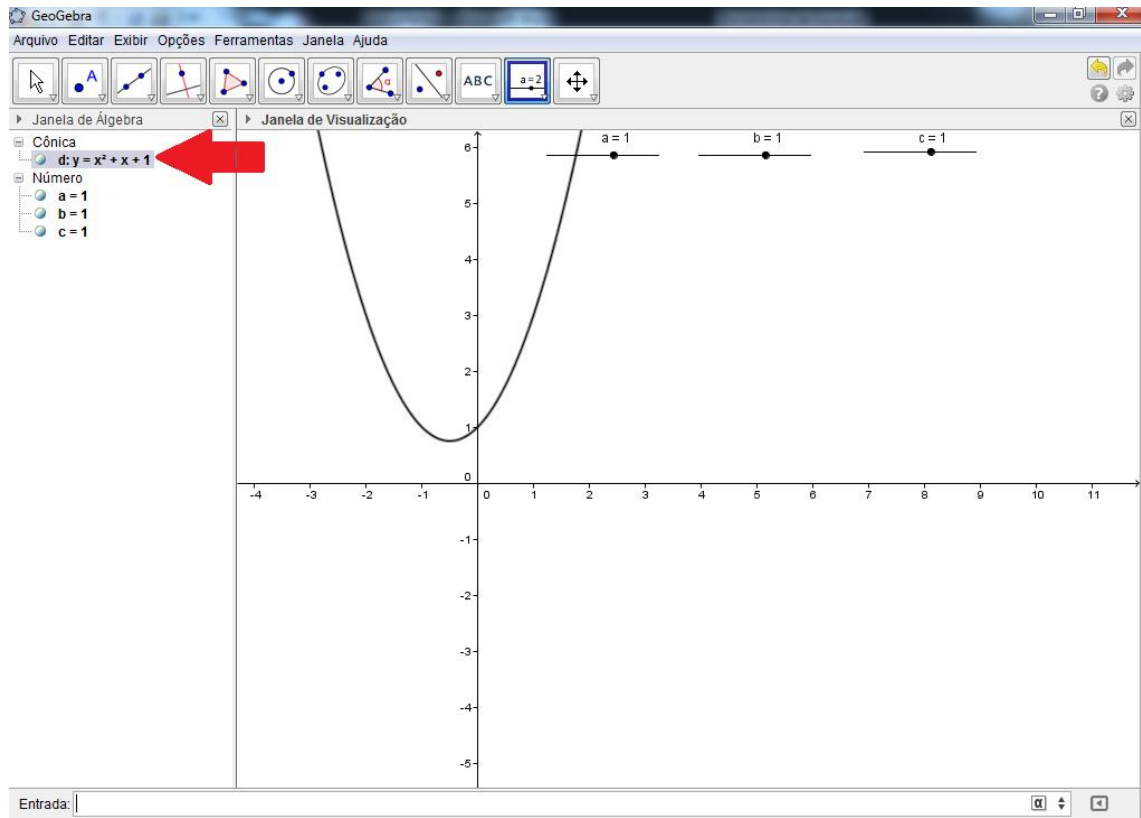


Figura 20: Localização da função na Janela de Álgebra

8. Na Barra de Ferramentas clique no ícone Mover;

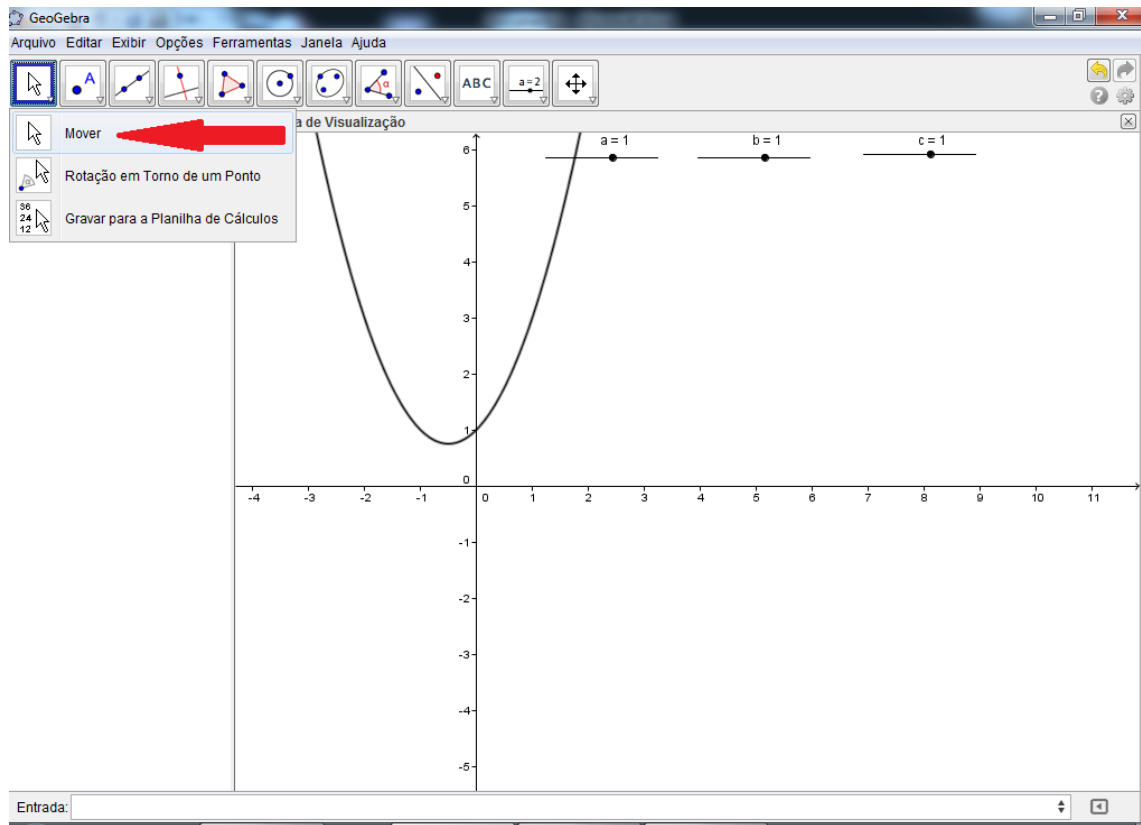


Figura 21: Localização da janela Mover.

9. Em seguida clique e mantenha clicado sobre o Controle Deslizante “a” e mova o mouse para a direita e depois para a esquerda suavemente observando ao mesmo tempo o que acontece com a parábola, ver Figura 22;

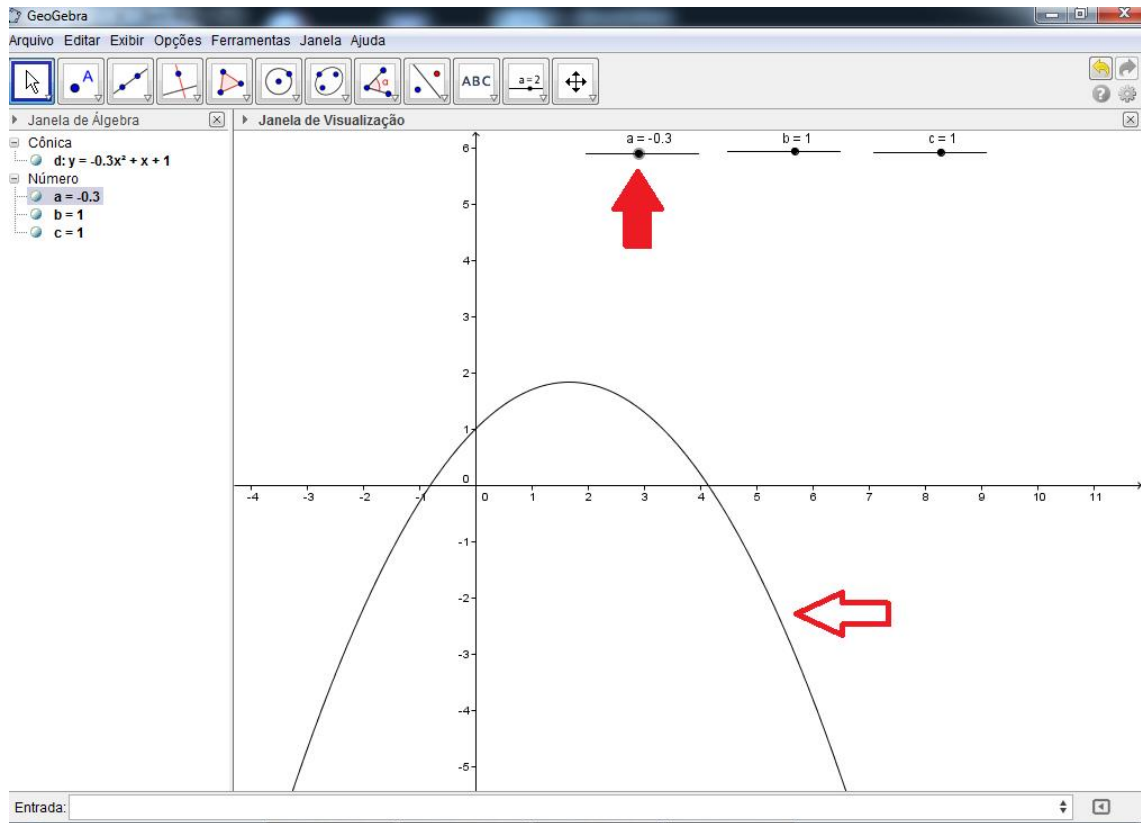


Figura 22: Localização do Controle Deslizante a .

Perguntas:

- a. O que você percebeu?
- b. Altere o Controle Deslizante “ a ” para zero. O que acontece com a parábola? Por quê?

10. Repita o item 9 com os outros dois Controles Deslizantes “ b e c ”;

Pergunta:

- a. O que você percebeu?

11. Posicione o mouse sobre a parábola e dê um clique com o botão direito, ver figura 23;

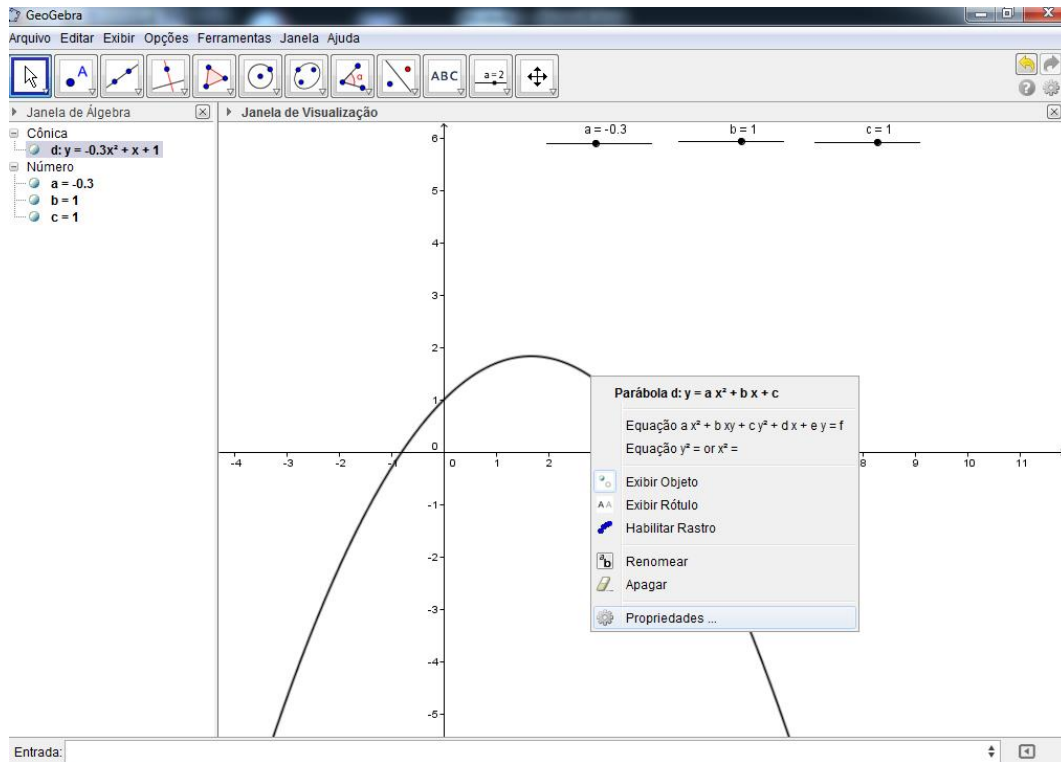


Figura 23: Janela de configurações da Parábola.

12. Nesta nova janela, clique em Habilitar Rastro;

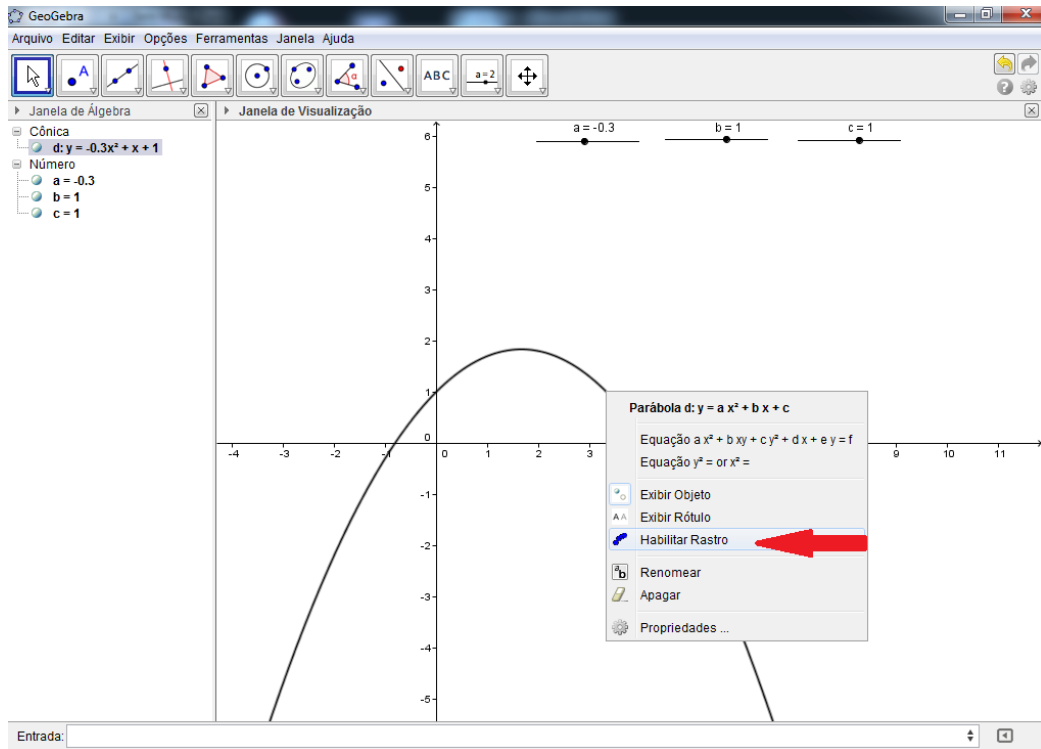


Figura 24: Localização da janela Mover.

13. Repita os passos 8, 9 e 10, ver figura 25;

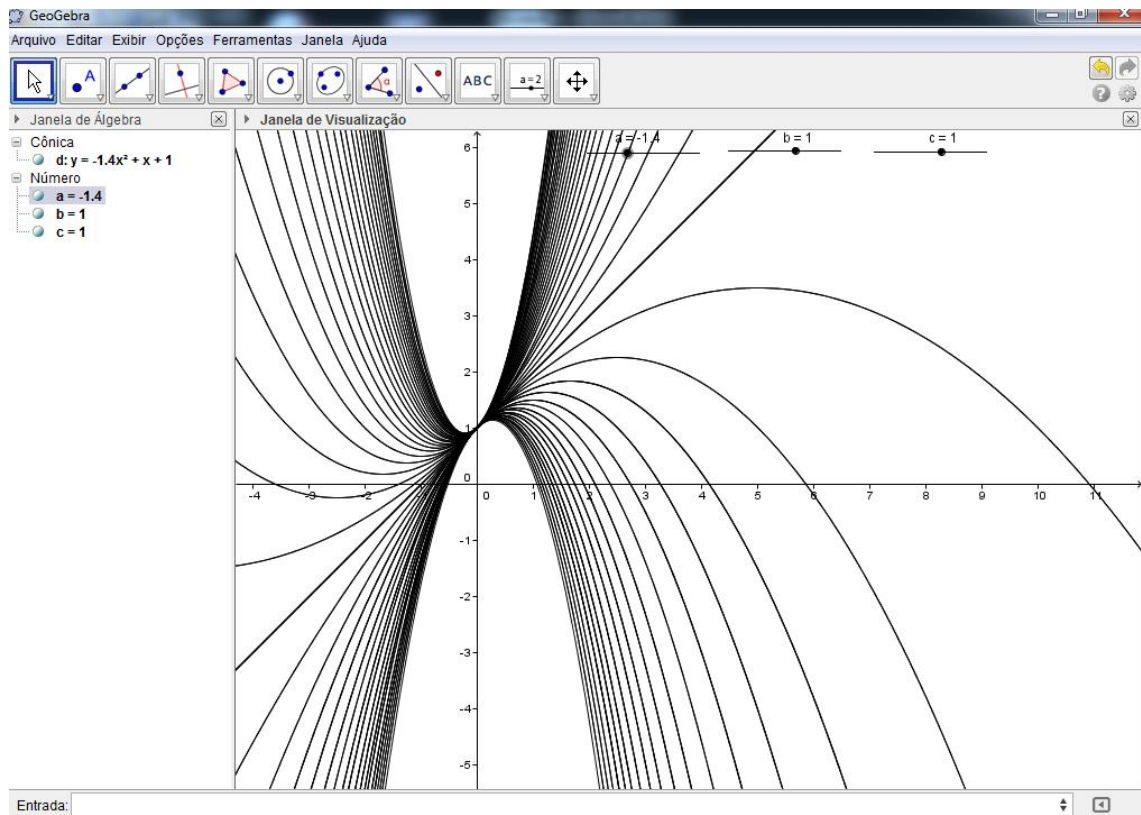


Figura 25: Movimento descrito pela parábola.

14. Pergunta:

Qual o ponto que pertence a todas as parábolas da figura acima?

15. Você gostou desta atividade?

3.3.3 Atividade 3

Nesta atividade, vamos estudar as equações do 2º grau que apresentam raízes \mathbb{R} , com o objetivo de reescrevê-las na forma fatorada.

1. Abra o GeoGebra;
2. No campo Entrada digite a seguinte função do segundo grau: $y = 2x^2 - 14x + 20$
Antes de teclar Enter, descubra as raízes desta função;
3. Descobriu? Quais os valores?
4. Tecele Enter;

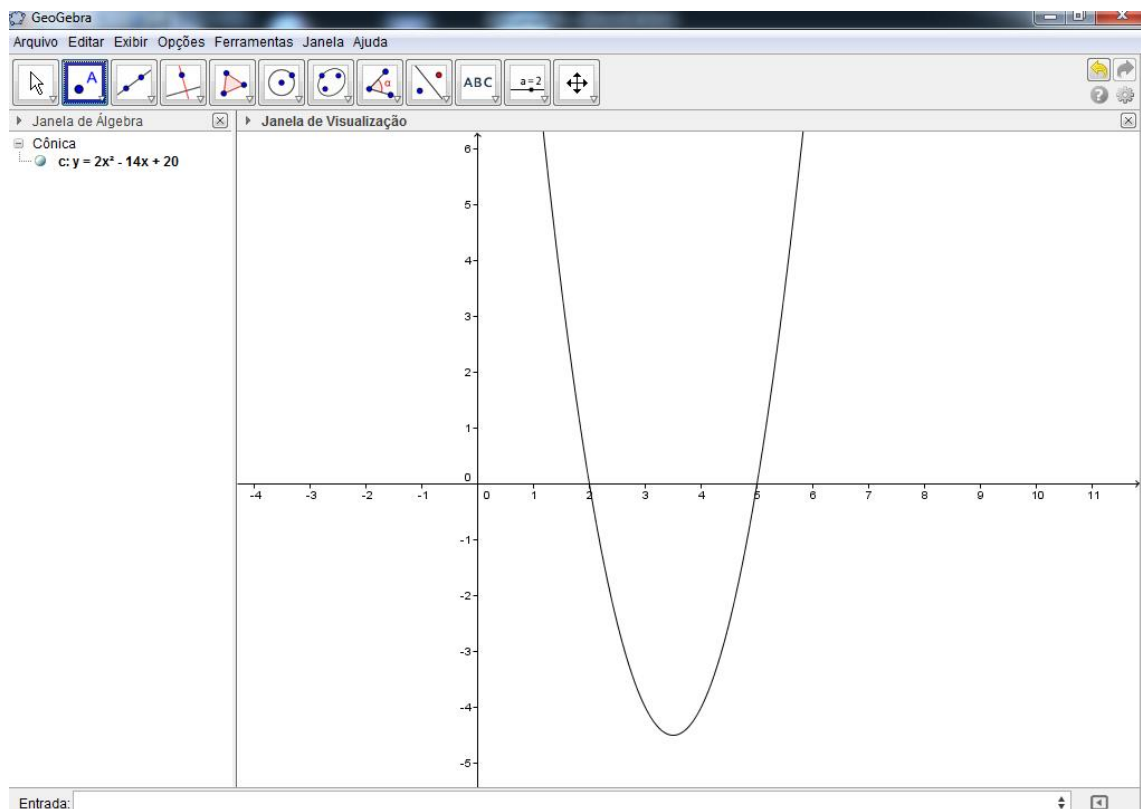


Figura 26: Parábola descrita pelo gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 14x + 20$

5. Na Barra de Ferramentas abra a segundo ícone e clique em Interseção de Dois Objetos;

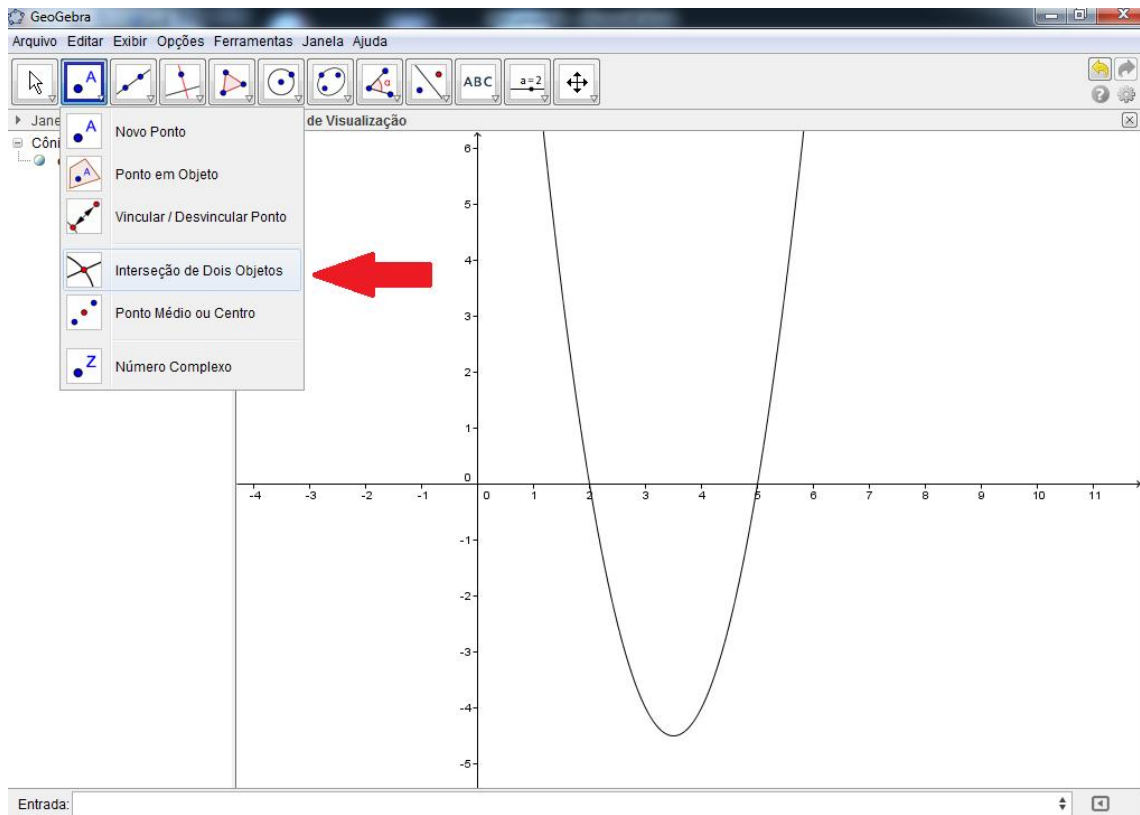


Figura 27: Localização da função Interseção de Dois Objetos.

- Para abrir os comandos da Barra de Ferramentas clique no *triângulo* que fica no canto inferior direito de cada ícone, ver Figura 28.



Figura 28: Barra de ferramentas.

6. Posicione o mouse na Interseção da parábola com o EixoX até abrir uma janela com essas duas informações, clique em seguida, ver Figura 29;

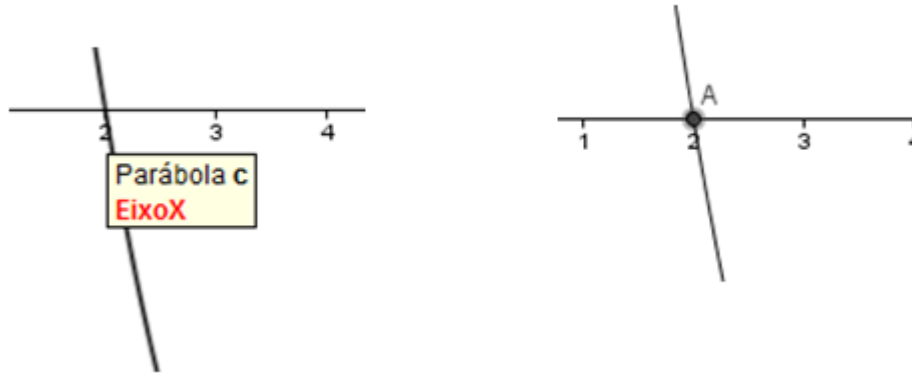


Figura 29: Interseção da Parábola com o EixoX.

7. Repita o passo 6 na outra interseção da Parábola com o EixoX;

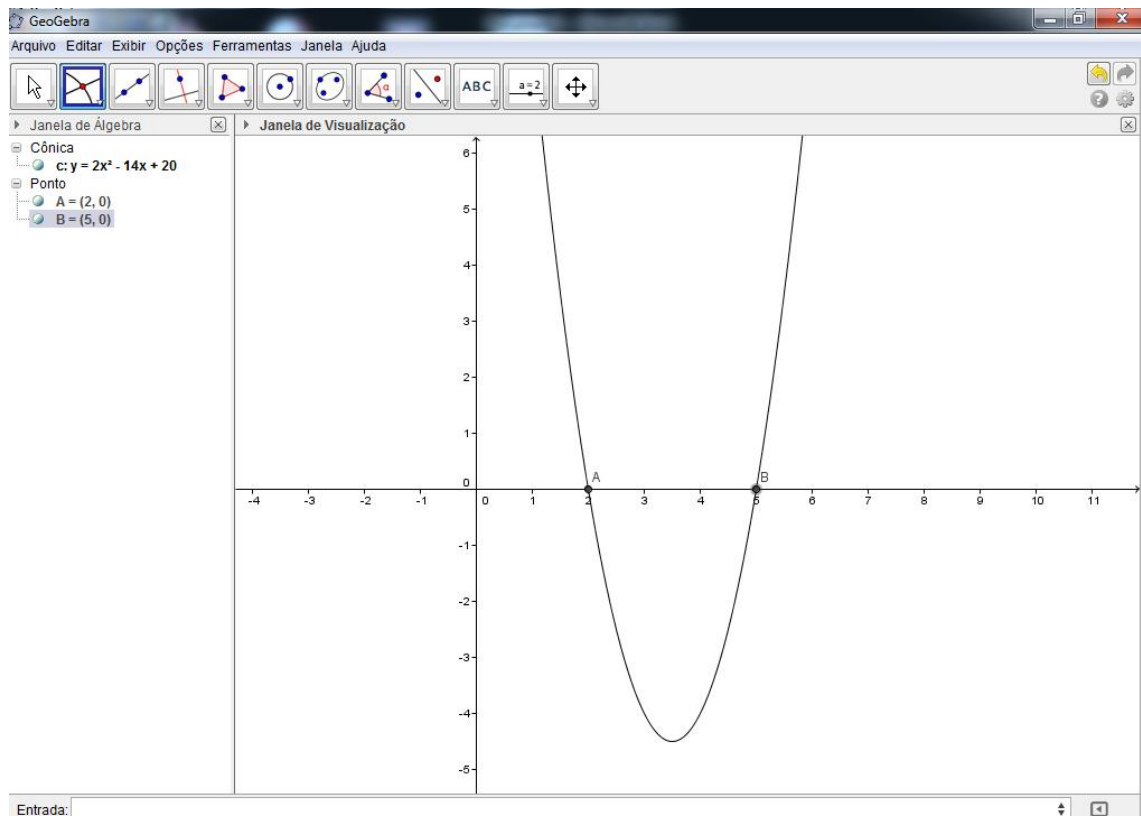


Figura 30: Pontos A e B na Interseção da parábola com o EixoX.

8. Repare na Janela de Álgebra as coordenadas referentes aos pontos A e B;

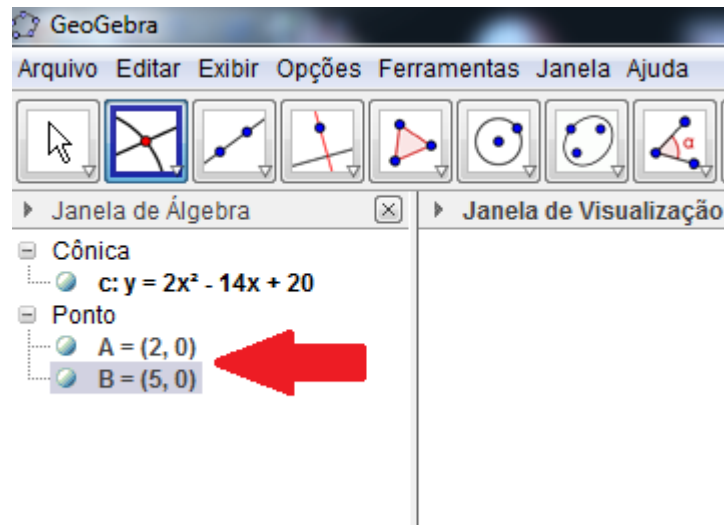


Figura 31: Coordenadas dos pontos A e B.

Pergunta:

As abscissas dos pontos A e B são os mesmos valores das raízes encontradas por você no item 3?

9. Posicione o mouse sobre a Parábola e dê um clique com o botão direito, e em seguida clique em Propriedades, ver Figura 32;

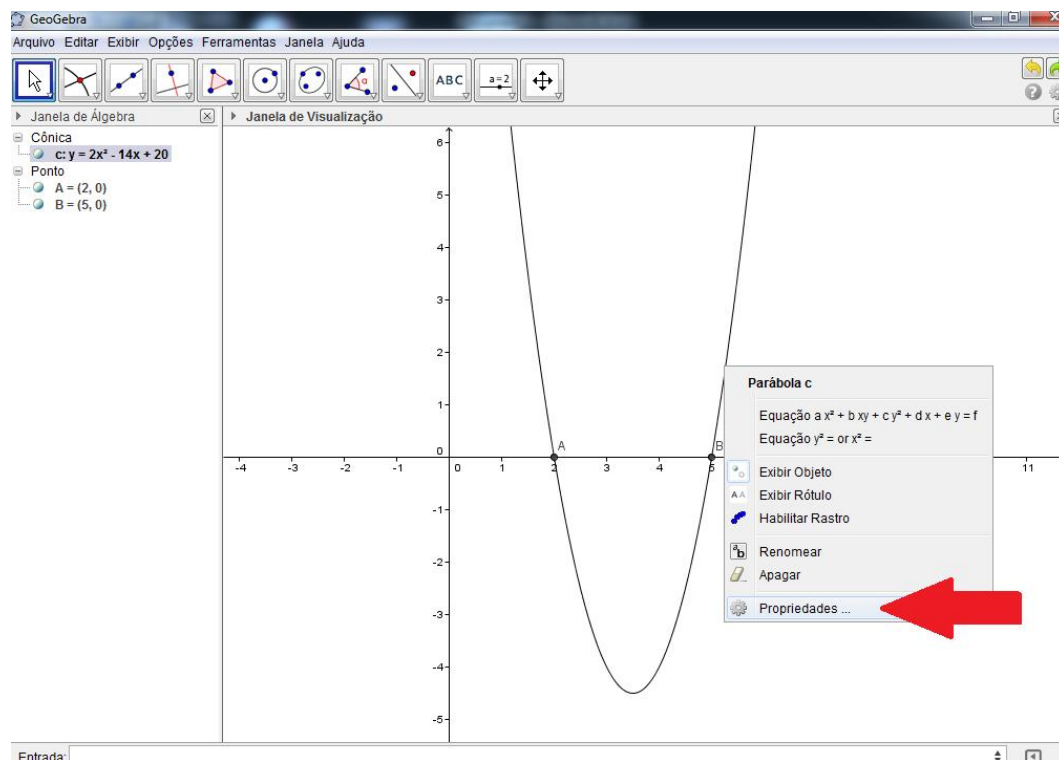


Figura 32: Janela de configurações da Parábola, Propriedades.

10. Clique em Cor e altere para Vermelho, para uma melhor visualização;

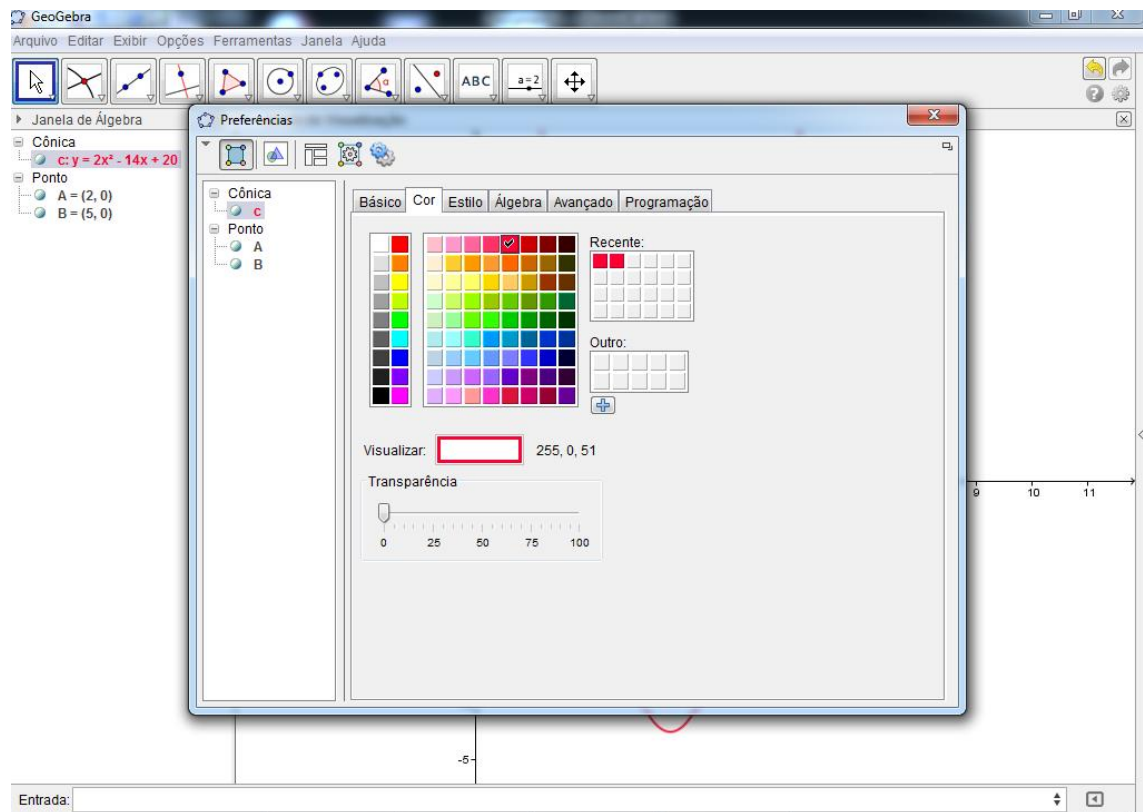


Figura 33: Localização da função Cor.

11. Feche a Janela de Propriedades;
12. Crie o Controle Deslizante “a” e altere as configurações de Min: de -5 para -25, de Max: de 5 para 25 e Incremento de 0,1 para 0,01, clique em Aplicar

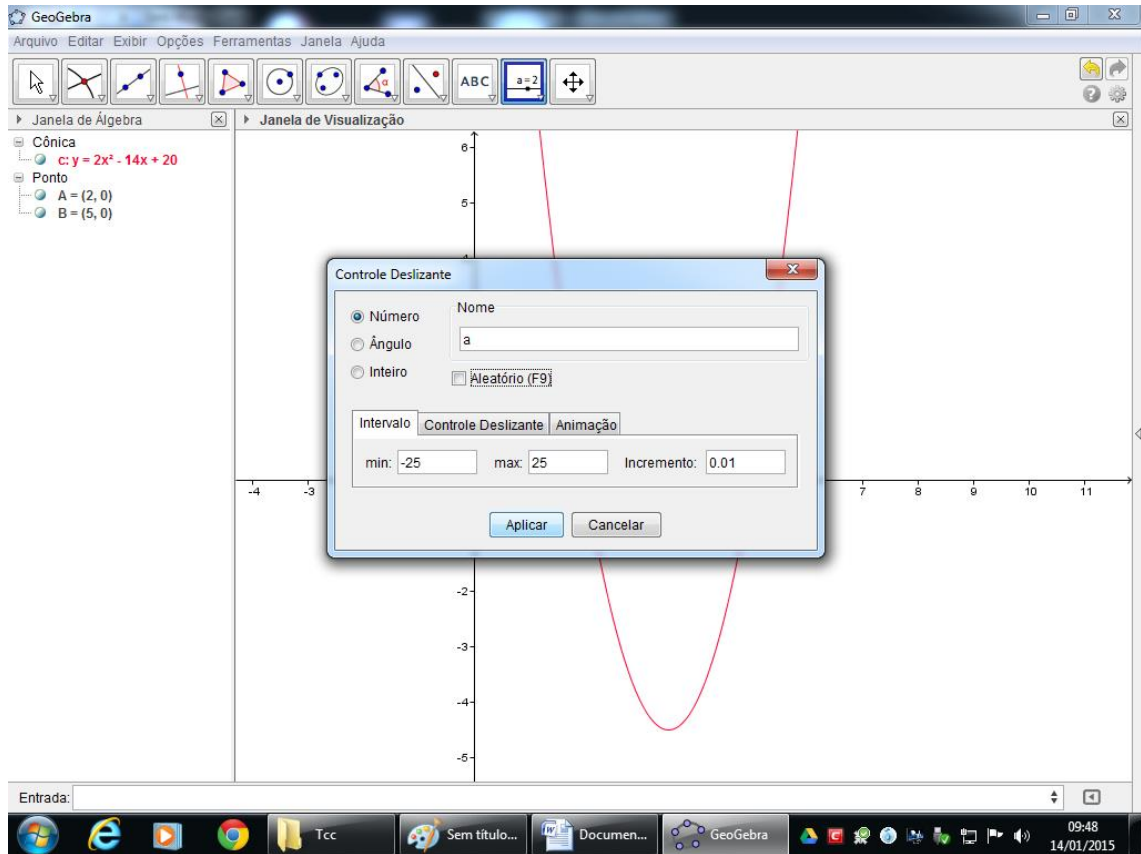


Figura 34: Alteração das configurações na janela do Controle Deslizante.

13. Sabendo que a forma fatorada de uma função do segundo grau é escrita na forma: $y = a \cdot (x - x') \cdot (x - x'')$, em que x' e x'' são as raízes da função. No Campo Entrada escreva a forma fatorada de uma função do segundo grau que tenha as mesmas raízes da função escrita no item 2, e para o coeficiente “a” utilize o seu Controle Deslizante, ver Figura 35;

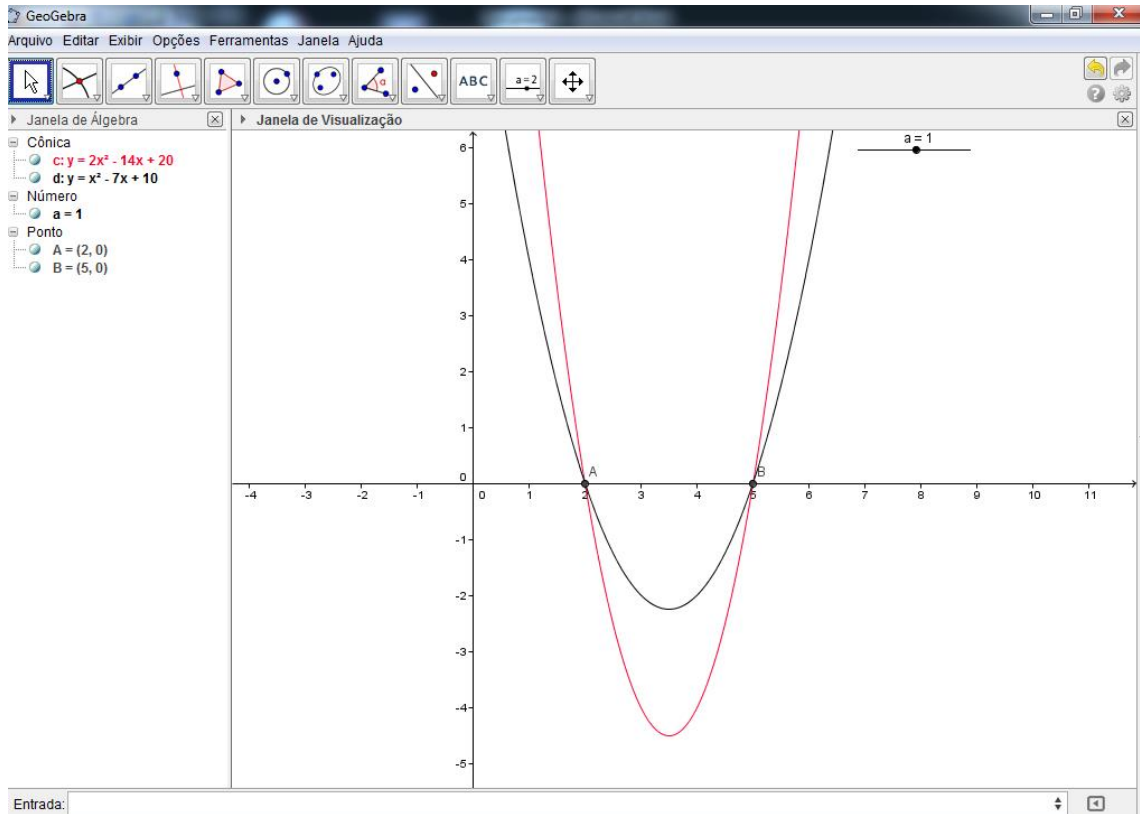


Figura 35: Parábolas distintas com as mesmas raízes.

14. Na Barra de Ferramentas clique em Mover, e clique e mantenha clicado sobre o Controle Deslizante “a” e com as teclas cursoras, ver Figura 36;



Figura 36: Localização das teclas cursoras no teclado.

movimente para a direita e para esquerda até que a parábola se encaixe sobre a parábola vermelha;

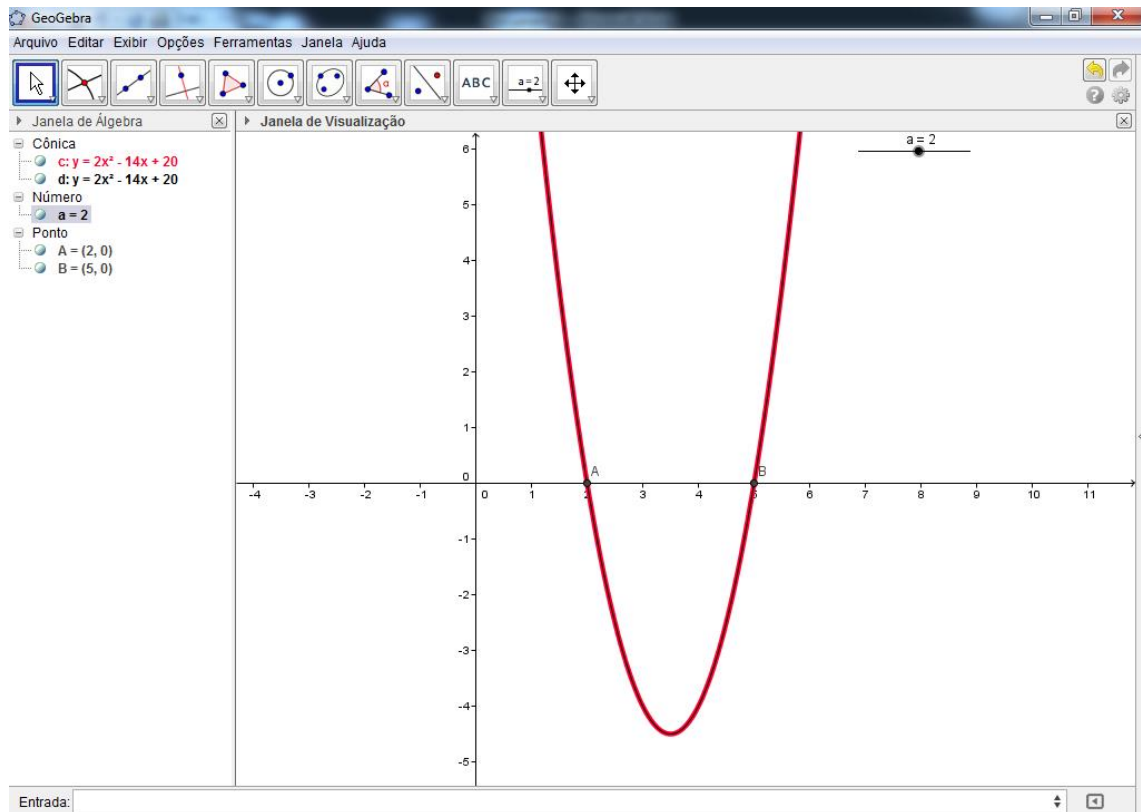


Figura 37: Parábolas sobrepostas.

Perguntas

- Dada uma parábola como interpretar as raízes?
- Escrevendo uma função do segundo grau na forma fatorada e alterando apenas o coeficiente “a” as raízes se alteram? Por quê?

3.3.4 Atividade 4

Nesta atividade, vamos precisar da gravação de um dos lançamentos do canhão, a partir de uma câmera fixada, a câmera não pode se movimentar durante captura da imagem; para isto, você pode utilizar um tripé. Nós capturaremos imagens do filme utilizando o software Paint e marcaremos a trajetória do projétil no software GeoGebra, através de pontos. Feito isso, vamos construir uma parábola, com os mesmos recursos aprendidos na atividade 3, e verificaremos se os pontos marcados estarão sobre a parábola descrita.

Para cada imagem capturada devemos proceder da seguinte forma:

1. Crie uma pasta para salvar as imagens, esta pasta será chamada aqui de Pasta 1;
2. Abra o filme, pause antes do lançamento do projétil e tecle **PrtSc**;
3. Abra o software Paint e tecle ao mesmo tempo as teclas: **Ctrl** e **V**;

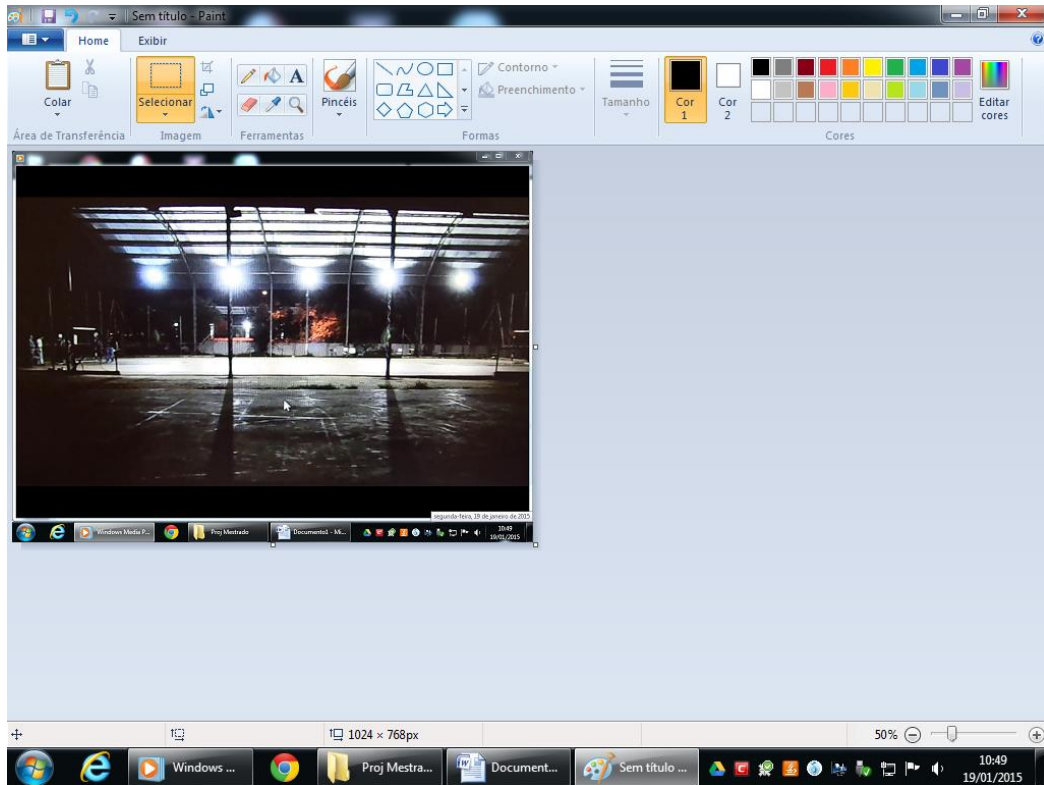


Figura 38: Captura de tela no Paint Brush.

4. No Paint selecione a imagem excluindo as barras de Menu, da seguinte forma: na Barra de Menu do Paint, clique em Home, e em seguida clique em Selecionar;
5. Selecione a imagem;

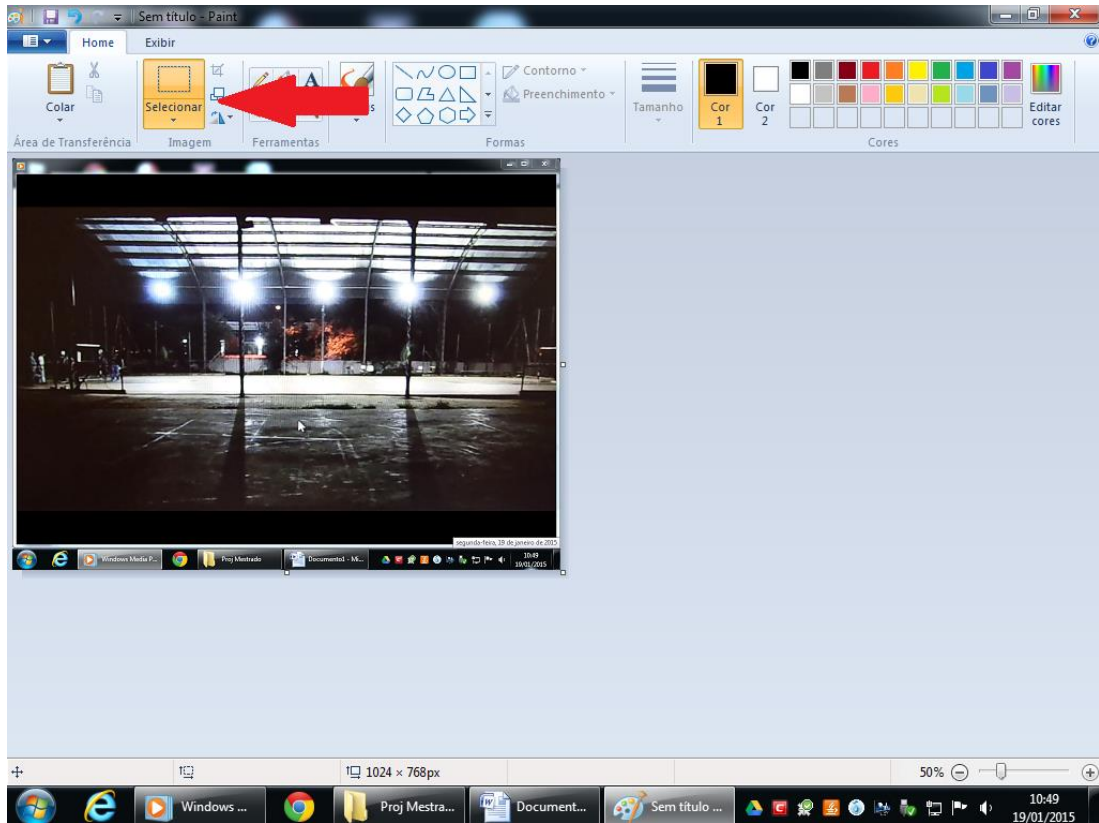


Figura 39: Localização da ferramenta Seleccionar no Paint Brush

6. Tecle Ctrl + C , Arquivo, Novo, clique em Não Gravar em seguida com a tela em branco no Paint tecle, Ctrl + V;
7. Grave esta imagem como JPEG, da seguinte forma: Arquivo, Salvar Como, Imagem JPEG.
Ver Figura 40;

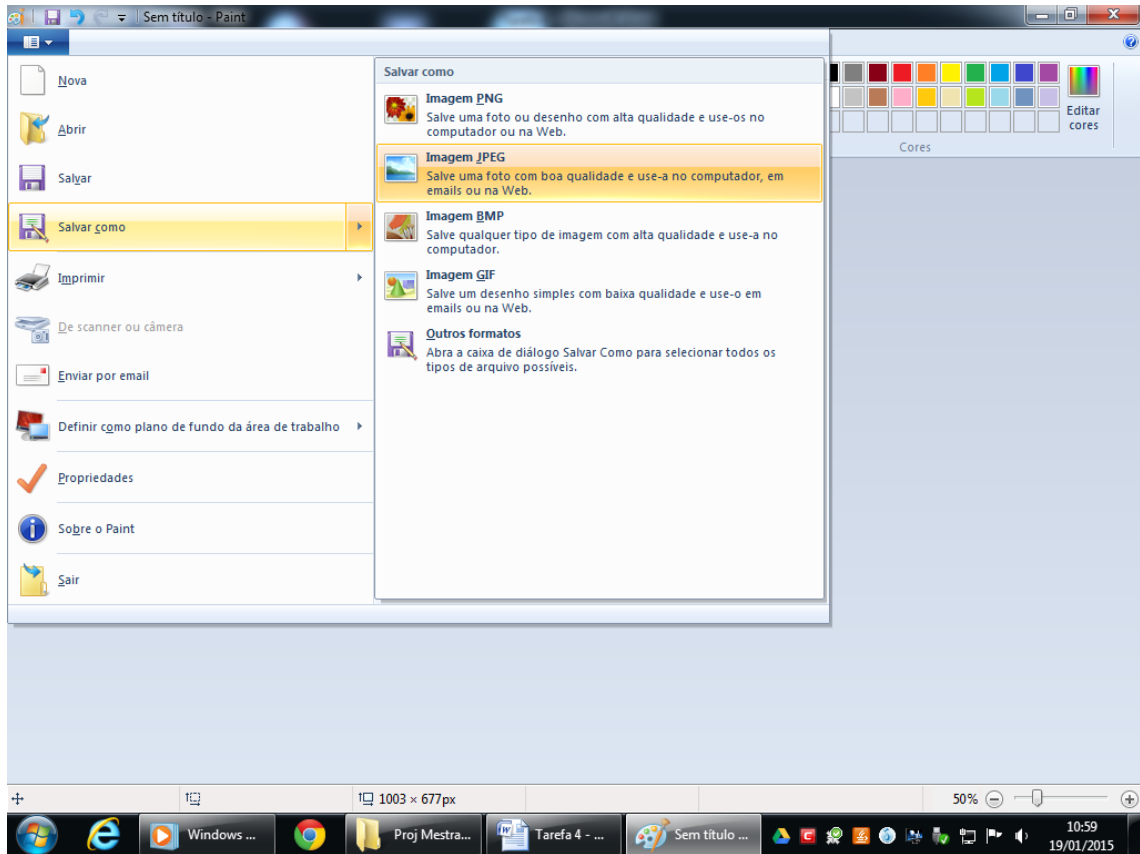


Figura 40: Salvar uma imagem no Paint no formato JPEG.

8. Salve a imagem na Pasta 1, criada no item 1. Uma dica é numerar as imagens de acordo com a sequência com números, para não nos perdermos na hora de colocar no GeoGebra;
9. Agora capture o máximo de imagens diferentes da trajetória do projétil, pausando o vídeo, e repita os passos de 2 a 7. Uma dica para capturar mais quadros é alterar o modo de reprodução do vídeo para lenta;
10. Abra o Geogebra;
11. Na Barra de Ferramentas clique em Inserir Imagem;

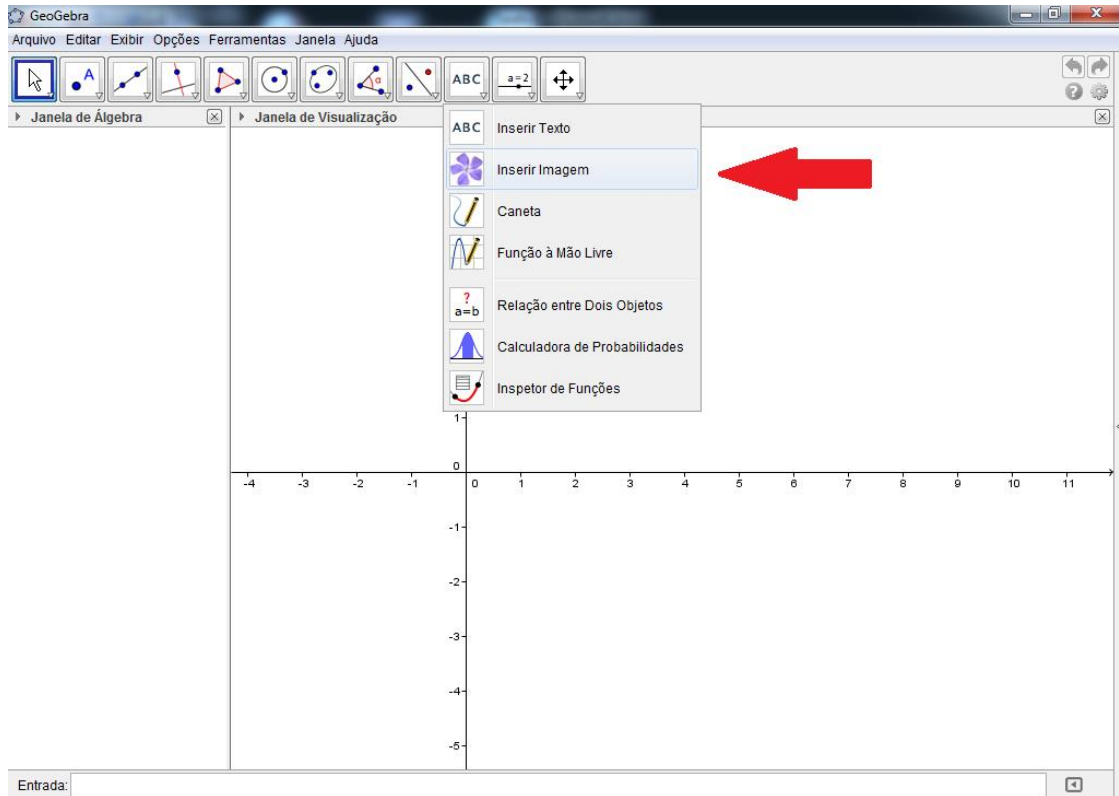


Figura 41: Localização da função Inserir Imagem

12. Clique com o mouse na origem do Plano Cartesiano da Janela de Visualização;
13. Abrirá uma nova janela, Abrir, procure a Imagem 1 da Pasta 1 que você salvou da gravação, e tecele em Abrir, ver figura 42;

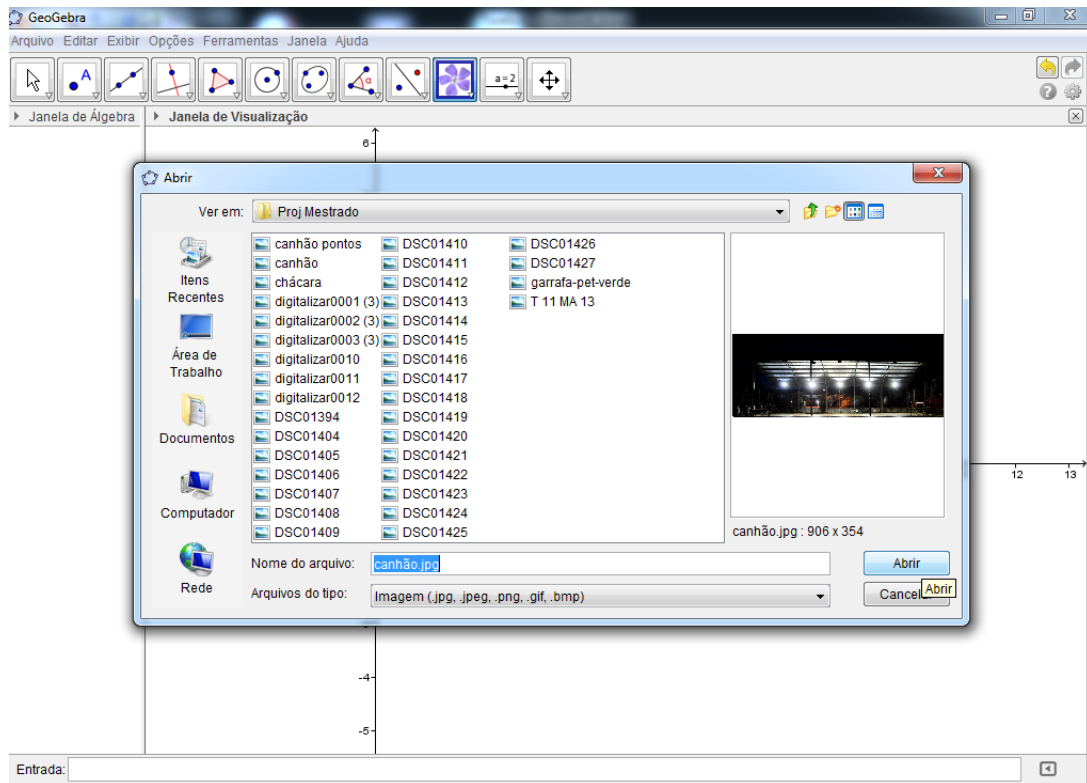


Figura 42: Janela de configurações da função Inserir Imagem.

Obs: A linha horizontal, ou seja, o chão, deve ficar rente ao EixoX.

Caso tenha que mover a Imagem 1 proceda da seguinte forma:

Clique com o botão direito do mouse sobre a Imagem 1; Propriedades; Posição; altere a coordenada do Canto 1 com relação ao EixoY;

Caso a Imagem abra grande demais siga o mesmo passo acima e altere Canto 2;

14. Minimize o Geogebra;
15. Abra a Pasta 1, abra a imagem 2, visualize o projétil;
16. Maximize o Geogebra, na Barra de Ferramentas clique em Novo Ponto;

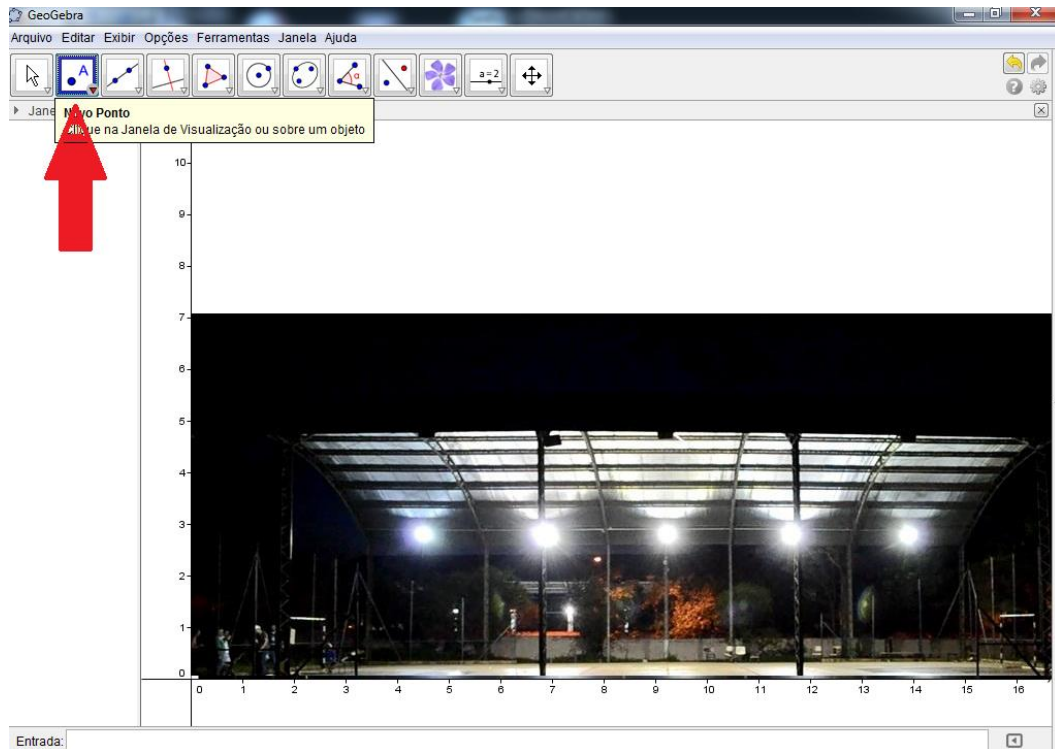


Figura 43: Localização da função Novo Ponto

17. Agora na mesma posição que o projétil se encontra na Imagem 2 coloque o ponto na imagem do Geogebra;
18. Repita os passos 14, 15 e 16 para todas as imagens salvas, ver Figura 44;

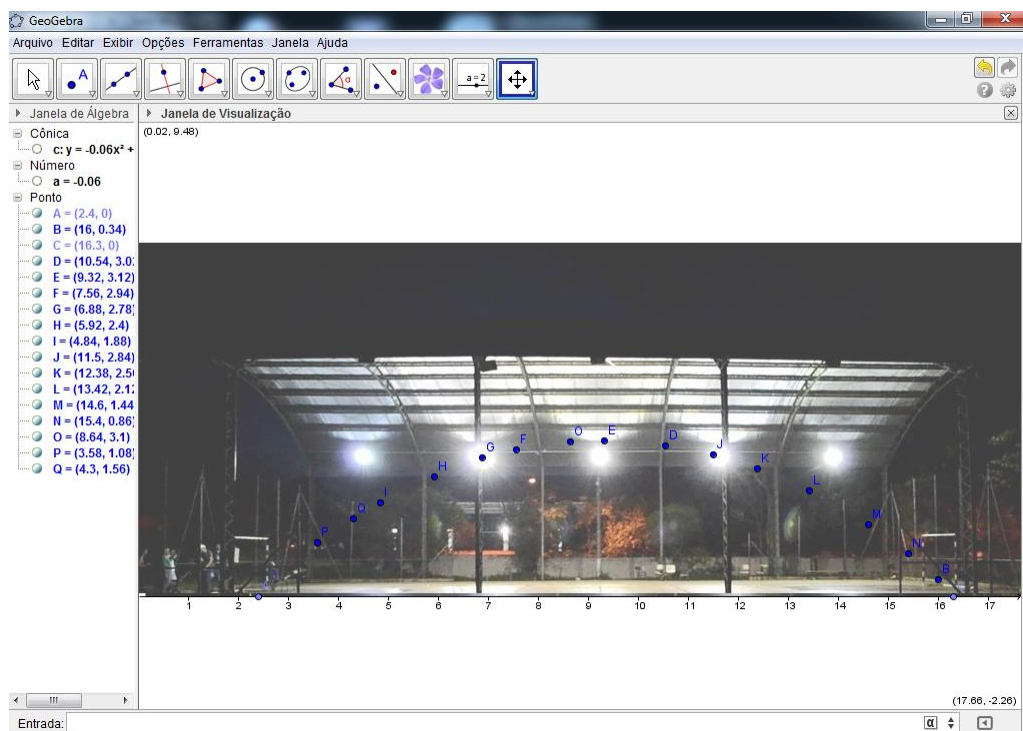


Figura 44: Tela no GeoGebra.

19. Na Barra de Ferramentas clique em Controle Deslizante alterando o Intervalo de Min: de -5 para -25, de Max: de 5 para 25 e de Incremento: de 0,1 para 0,001; Aplicar;
20. Repare nos pontos de interseção do Eixo X, no caso da figura 44, acima, os pontos A e C;
21. No campo Entrada digite a equação fatorada do segundo grau com o coeficiente a sendo o Controle Deslizante a e as raízes as coordenadas dos pontos de interseção com Eixo X, ver Figura 45;

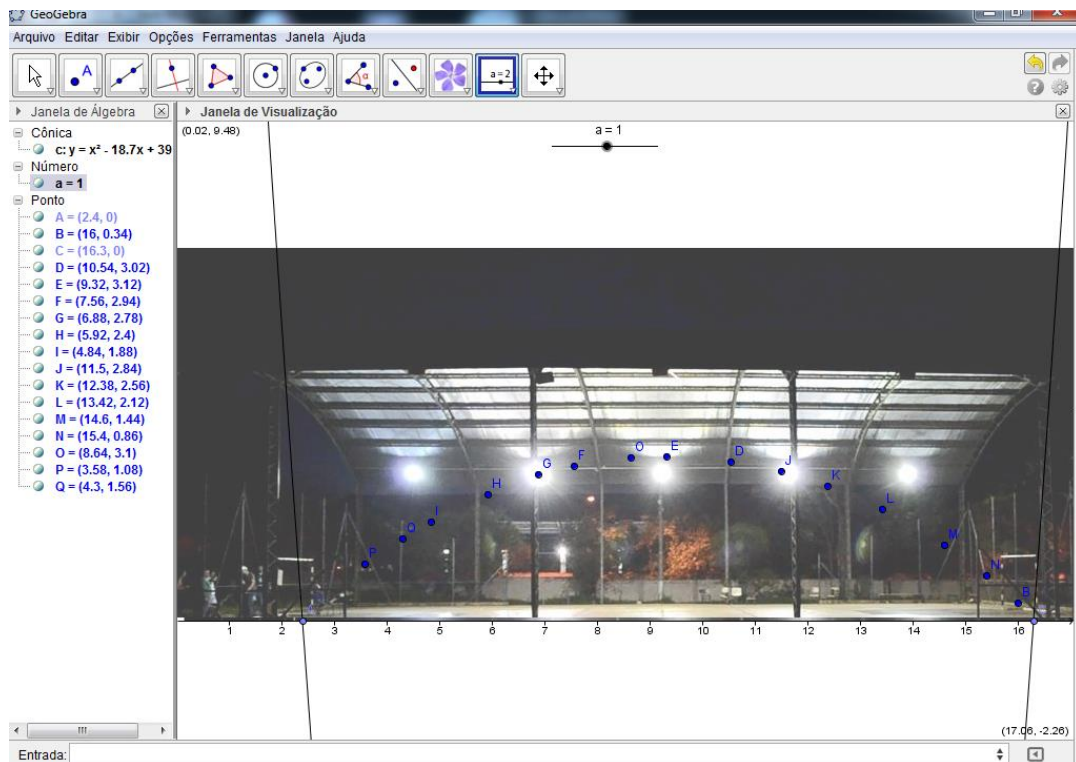


Figura 45: Parábola descrita pelo gráfico da função fatorada.

22. Na Barra de Ferramentas clique em Mover;
23. Clique sobre o Controle Deslizante a e mantenha pressionado;

Com as teclas cursoras do teclado altere o valor do Controle Deslizante, ou seja, do coeficiente a da parábola, até que ela intercepte o máximo de pontos da trajetória do projétil, ver Figura 46;

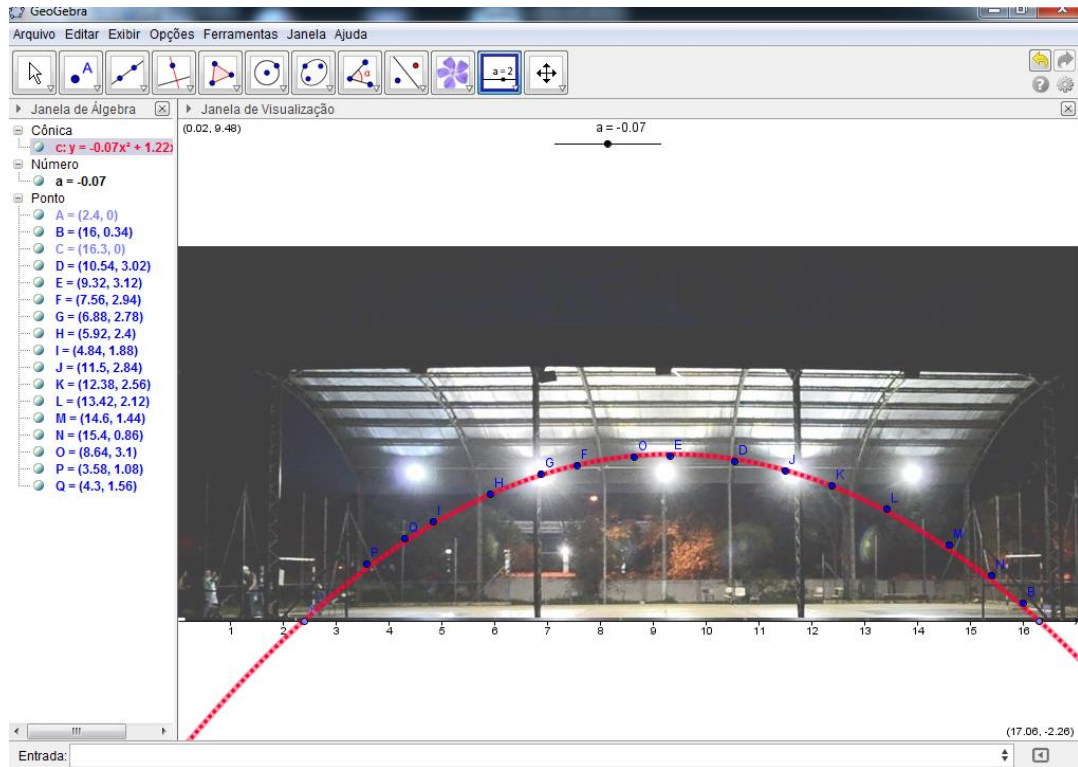


Figura 46: Alterando o valor do Controle Deslizante a.

Perguntas:

- O que você percebeu?
- O que você pode afirmar sobre o movimento descrito pelo projétil?
- Você gostou dessa atividade?

Capítulo 4

4 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO PROJETO CANHÃO.

O objetivo deste capítulo é descrever a instituição de ensino onde o projeto foi aplicado, as turmas e as fases do projeto.

4.1 Descrição da Instituição de Ensino.

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual Dorival Alves situada em Araraquara na rua Ceara, s/n, Vila Xavier. Esta escola teve sua data de fundação em 11/12/1960 e leva o nome do ex-prefeito Dorival Alves, uma pessoa ligada aos artistas da semana da arte moderna realizada em 1922. Amigo de Assis Chatobrian, possuía uma rica biblioteca que foi doada para a Biblioteca Municipal de Araraquara.

A escola oferece Ensino Fundamental, de 6º a 8º anos, no período da tarde e 9º ano no período da manhã, Ensino Médio no período da manhã e EJA - Educação de Jovens e Adultos apenas no Ensino Médio – presencial no período noturno. Atende hoje por volta de 900 alunos.

Por ser uma escola considerada de grande porte recebe alunos de vários bairros da cidade. Está situada em um bairro tradicional da cidade, considerado o maior e um dos mais antigos, o qual possui até uma sub-prefeitura. Atualmente, a escola conta com apenas 100 alunos de seu bairro, devido ao fato de que os moradores desse bairro, em sua maioria, são pessoas mais idosas.

Além de atender os próprios alunos nas mudanças de ciclos recebe alunos de escolas municipais e de outras escolas, vindos através de transferência. A escola conta também com

uma sala de informática com 18 computadores, uma biblioteca e 16 salas de aula com capacidade para até 40 alunos cada.

4.2 Os alunos e o conteúdo programático.

Nós percebemos ao analisar o nível de aprendizagem dos alunos de 4 turmas do 1º ano do ensino médio de 2012, uma grande defasagem de aprendizado. As salas têm em média 30 alunos cada. A maioria dos alunos com um grande déficit de aprendizagem e desinteresse pelos estudos.

Na rede pública temos que seguir o Currículo do Estado, [Anexo 1], para isto cada aluno recebe uma apostila e um livro. No primeiro mês de aula, fevereiro de 2012, foi necessário interromper o conteúdo que deveria ser trabalhado, e iniciamos uma revisão de conceitos básicos de Matemática, desde tabuada até produtos notáveis. A maior dificuldade de um professor ao entrar na sala de aula não é a indisciplina, o nível dos alunos, ou os problemas com a parte gestora e colegas de trabalho, mas sim a falta de motivação e o desinteresse dos alunos ali presentes.

Observando o desinteresse dos alunos, pensamos no que poderia motivá-los, então foram planejadas atividades que pudessem interessar a estes adolescentes e aliar atividades práticas com os conteúdos previstos para o ano correspondente. Como o assunto função do 2º grau estava previsto para o bimestre em questão, lembrei-me da construção de um canhão feito com latas de óleo, usado numa competição de quem lançava uma cabaça mais longe. Analisando, hoje com um outro olhar, percebi que deveríamos avaliar não a distância que a cabaça poderia percorrer e sim a sua trajetória. Este era exatamente o conteúdo programático do 2º bimestre das salas em que eu ministrava aulas, 1º ano do Ensino Médio. Foi daí que nasceu o Projeto Canhão.

4.3 O Projeto Canhão

O Projeto Canhão foi dividido basicamente em três fases: a primeira: a construção do canhão; a segunda, a competição; e, a terceira, atividades na sala de informática utilizando o software GeoGebra e uma filmagem de pelo menos um dos lançamentos do canhão.

As fases do projeto foram explicadas aos alunos de forma detalhada e, observamos a mudança de comportamento dos alunos através do interesse pela atividade. O projeto tomou o lugar de uma avaliação mensal, e atribui 3 pontos para a primeira e segunda fases, e 4 pontos para terceira fase, totalizando, assim, 10 pontos.

4.4 O desenvolvimento de cada fase

4.4.1 Primeira Fase

A primeira fase foi crucial para o projeto, pois havia pensado que os alunos não iriam trazer o material pedido, principalmente pela dificuldade de encontrar latas de tiner. Antigamente usávamos latas de óleo que eram muito mais fáceis de serem encontradas. Para minha surpresa, quando, entrei na sala de aula os grupos já estavam separados e todo o material em cima da minha mesa. Ver Figura 47. Com os grupos separados, entregamos o material necessário para cada um, com o cuidado de separar as melhores latas que foram usadas no início do canhão (lata de número 1), pois é nesta lata que a maior pressão é exercida.

A parte da solda das latas com a vassoura de fogo, ou com o soprador térmico, foi realizada apenas por mim com a ajuda de cada grupo. Nesta fase analisamos o comportamento em grupo, colaboração e as discussões.



Figura 47: Alunos com o material separado.



Figura 48: Separação dos grupos.



Figura 49: Procedimentos realizados pelos grupos para a confecção do canhão.

4.4.1.1 *Teste do canhão*

Assim que nós terminamos a primeira fase, descemos para o pátio para ensinar os alunos como dar ignição ao canhão. Particularmente, acredito que este processo seja o mais difícil, pois podem ocorrer alguns erros, tais como: a não explosão do canhão, um tiro que parece um sopro, etc. Esses erros podem ocorrer caso esteja um dia chuvoso ou muito úmido, excesso de etanol no canhão e o armazenamento do etanol por mais de dois ou três dias não é aconselhável.

Nós cometemos o erro de não avisar a coordenação no primeiro teste, e como as explosões (tiros), pois, são muito altos, a escola toda parou para ver o que estava acontecendo, atrapalhando os professores das outras salas. Enfim, todas as possíveis formas de evitá-los estão relacionados na seção 3.1.1. Com a segunda sala, em outro dia, nós não cometemos os mesmos erros, ocorridos no 1º teste. Nós avisamos a gestão da escola, que por sua vez avisou aos outros professores que em determinado momento iria haver algumas explosões.



Figura 50: Realização do teste do canhão.

4.4.2 Segunda fase

A segunda fase foi realmente a mais esperada pelos alunos, pois ali eles iriam colocar em prática todo o projeto, esforço com a construção de cada canhão e principalmente o espírito competitivo. Com cada grupo separado na mesma linha de lançamento, Figura 51, atribuímos a quantidade máxima de três disparos por grupo, lembrando que cada grupo elaborou o seu projétil.

Vale a pena lembrar que este projeto pode ser combinado com várias outras matérias como em Química, onde o professor pode falar sobre gases, mudança de estado físico, como é gerado uma explosão; em Física, por exemplo, contamos com a ajuda do professor para que os alunos conseguissem enxergar a melhor angulação do canhão para efetuar o disparo e o

projétil percorresse a maior trajetória possível, e também tentar projetar um canhão que dispare usando um processo mecânico.



Figura 51: Posicionamento dos grupos para a competição.

Antes de iniciar a terceira fase, um dos alunos filmou a trajetória do projétil com uma câmera a uma certa distância, no tripé, de modo que a câmera conseguisse capturar tanto a saída quanto a chegada do projétil ao solo sem mexer a câmera, ou seja, a câmera estava fixada.

4.4.3 Terceira fase

Na terceira, e última fase, realizada no laboratório de informática com o auxílio do software GeoGebra e com a filmagem salva em todos os computadores da sala de informática, os alunos realizaram uma série de atividades, quatro no total, lembrando que os alunos tiveram um contato prévio com o software GeoGebra antes de iniciarmos o projeto.

Conforme as atividades iam se desenrolando, percebemos que os alunos não conseguiam fazer uma relação com o projeto, até nós chegarmos na Atividade 4, na qual para a surpresa de todos a trajetória do projétil se encaixava perfeitamente em uma parábola, e a fala da maioria foi: “que loco, como isso é possível?” e como eu sempre digo aos meus alunos: “A matemática é bela.”

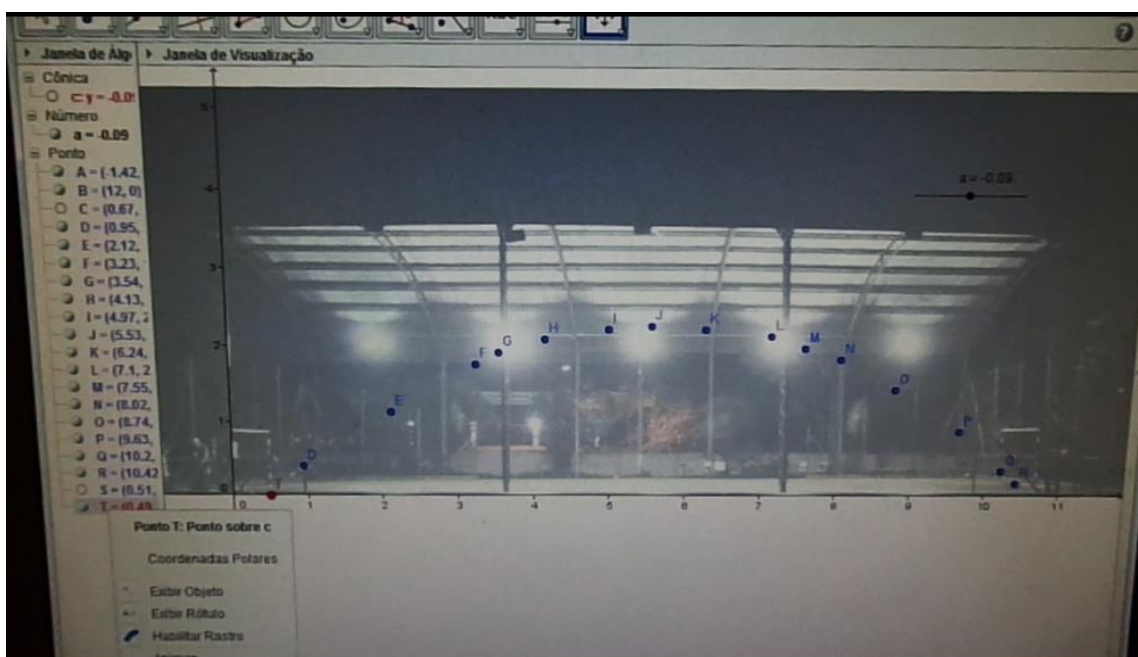


Figura 52: Tela do GeoGebra feito na fase 3.

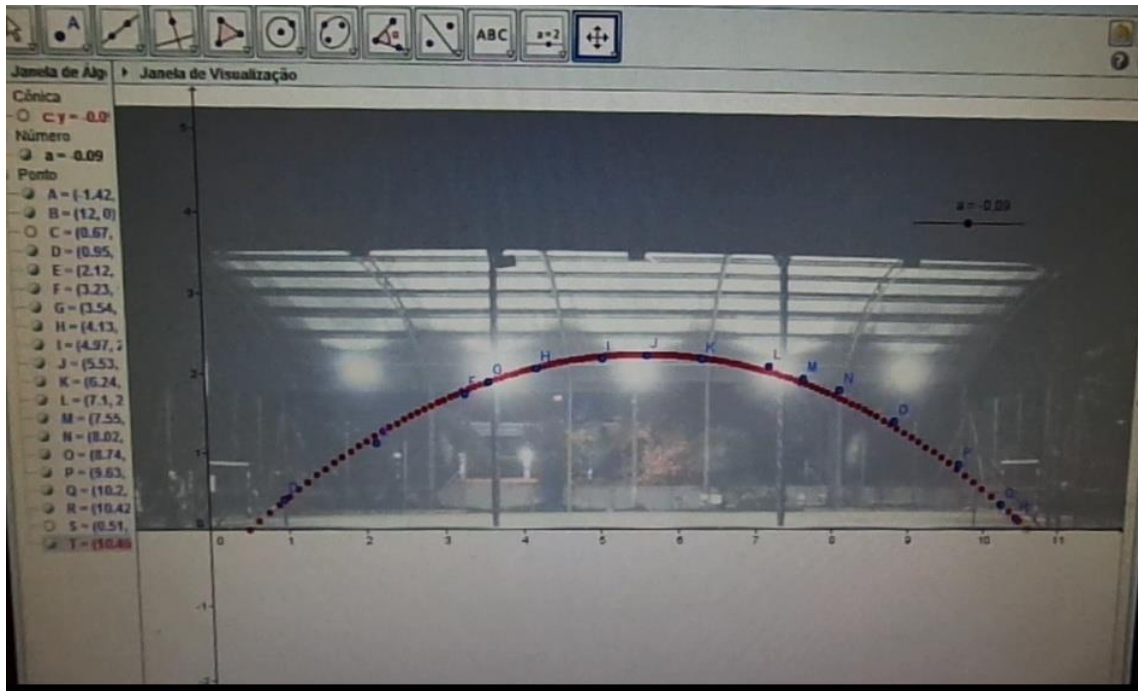


Figura 53: Tela do GeoGebra feito na fase 3.

Capítulo 5

5 CONCLUSÃO

Foi trabalhado com os alunos, em cada fase do projeto, além de conceitos matemáticos, o convívio em grupo, a divisão de tarefas, a socialização, a Matemática na percepção de um fenômeno, neste caso, o lançamento de um projétil, por meio de um gráfico de uma função do 2º grau. Através da realização dessa experiência os alunos foram capazes de observar alguns fenômenos da natureza e relacioná-los com a função quadrática, tais como o chute de uma bola, a trajetória de um projétil e muitos outros. Após o término do projeto observamos nos alunos mais interesse pela matéria e, principalmente, a tentativa dos alunos de relacionar o assunto abordado com as atividades cotidianas.

Em uma prova aberta que o Governo do Estado de São Paulo e a Secretaria da Educação aplicam na Rede Pública de Ensino, “Avaliação da Aprendizagem em Processo” ou Prova Diagnóstica, realizada em 2013 pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio, ou seja, os alunos que estavam cursando o 1º ano do Ensino Médio de 2012 e realizaram o Projeto Canhão, foram avaliados por esta prova, em 2013. (Modelo da Prova Diagnóstica – Anexo II).

As questões de número 5 e 7 da prova tratavam especificamente do assunto abordado no Projeto Canhão. De acordo com o gráfico apresentado em uma reunião de professores, ATPC, fica claro que o processo de Ensino Aprendizagem se concretizou com o auxílio do Projeto Canhão, pois o número de acertos das questões 5 e 7 foi acima da média. O que eles aprenderam durante essa experiência foi de extrema valia e os alunos não se esqueceram do aprendizado adquirido, o que nos leva a acreditar que nossos objetivos foram alcançados.

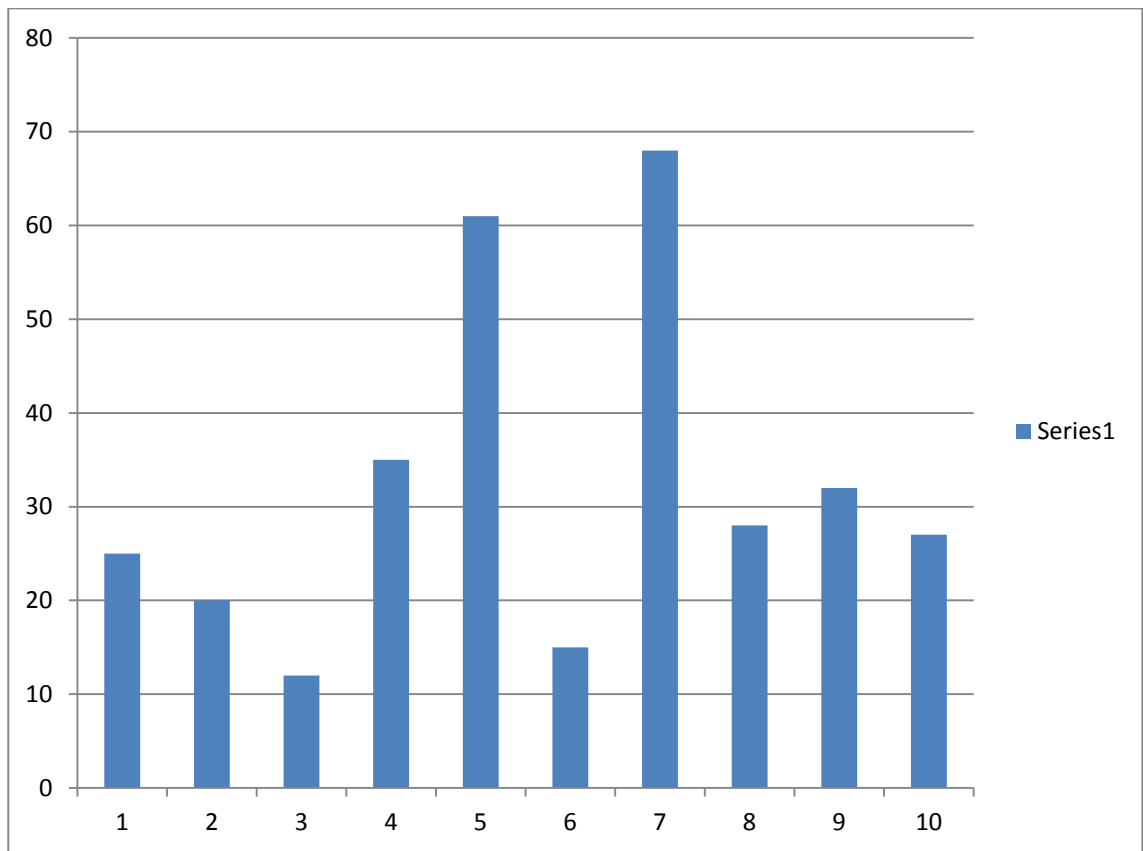


Figura 54: Gráfico apresentado na reunião dos professores relacionando o número de acertos das questões da Prova Diagnóstica.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, v.9, 1988. P. 281-308.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução. 3 ed. Brasília: MEC, vol 1, 1997.

LIMA, E.L., e outros, A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 9 ed. Rio de Janeiro, 2006.

Anexo I

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Números</p> <p>Números e sequências</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos numéricos • Regularidades numéricas: sequências • Progressões aritméticas e progressões geométricas 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível • Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos
2º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relação entre duas grandezas • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado • Função de 1º grau • Função de 2º grau 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções • Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decréscimo e a taxa de variação • Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decréscimo, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo) • Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Funções exponencial e logarítmica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações • Logaritmos: definição e propriedades • Função logarítmica: equações e inequações 	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos
4º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Geometria-Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies • Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos • Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos • Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais • Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies • Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas

(<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>, páginas 65 e 66.)

Anexo II

27



GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o
Professor de Matemática

2ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
2º Semestre de 2013

5ª Edição

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE MATEMÁTICA

2ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

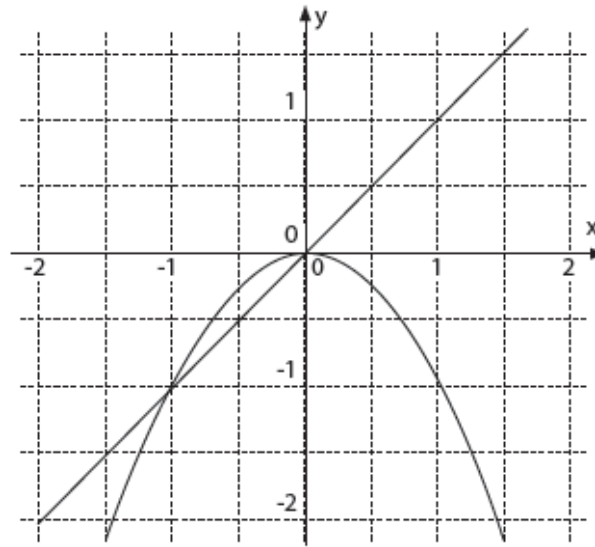
Nº do item	Habilidade
1	Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau
2	Resolver problemas em diferentes contextos, envolvendo as relações métricas dos triângulos retângulos. (Teorema de Pitágoras)
3	Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações
4	Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema
5	Reconhecer o comportamento de funções e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento
6	Aplicar os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema
7	Descrever as características fundamentais da função polinomial do 2º grau, relativas ao gráfico, crescimento, decrescimento, valores máximo e mínimo
8	Resolver problemas que envolvam probabilidades simples
9	Resolver problemas que envolvam porcentagem
10	Resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam triângulos semelhantes

Habilidade:

Reconhecer o comportamento de funções e suas propriedades relativas ao crescimento ou decréscimo.

Questão 05

Considere as funções (I) $y = x$ e (II) $y = -x^2$ cujos gráficos estão representados no plano cartesiano abaixo.



Comentários e Recomendações Pedagógicas / Avaliação de Matemática – 2ª série do Ensino Médio 15

Observando os gráficos, pode-se afirmar que, quanto ao comportamento dessas funções para $x < 0$,

- (A) (I) é crescente e (II) decrescente.
- (B) (I) é decrescente e (II) crescente.
- (C) (I) e (II) são crescentes.**
- (D) (I) e (II) são decrescentes.

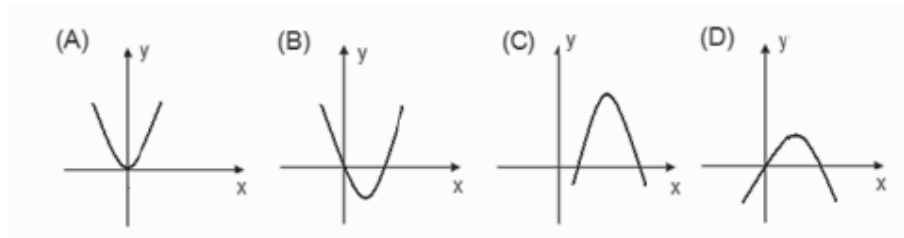
Grade de Correção

Alternativas	Justificativas
(A) (I) é crescente e (II) é decrescente.	Resposta incorreta. Se o aluno optou por esta alternativa, possivelmente ele interpreta corretamente a função (I), mas não observa que, na função (II) o valor de y aumenta quando o de x também aumenta, por não levar em conta que se deseja o comportamento para $x < 0$ ou por não saber ordenar corretamente números negativos.
(B) (I) é decrescente e (II) crescente.	Resposta incorreta. Se o aluno optou por esta alternativa, possivelmente ele interpreta corretamente a função (II), mas não observa que, na função (I) o valor de y aumenta quando o de x também aumenta.
(C) (I) e (II) são crescentes	Resposta correta. Se o aluno optou por esta alternativa ele demonstra ter domínio na habilidade solicitada.
(D) (I) e (II) são decrescentes	Resposta incorreta. Se o aluno optou por esta alternativa ele pode ter uma compreensão invertida sobre crescimento e decréscimo, ou interpretou incorretamente a questão.

Caso o aluno não apresente o domínio necessário dessa habilidade sugerimos recorrer às referências indicadas.

Questão 07

Os gráficos a seguir representam funções polinomiais do 2º grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Com relação aos coeficientes **a**, **b** e **c** e aos pontos de máximo e mínimo, pode-se afirmar que o gráfico que tem $c = 0$, $b \neq 0$ e apresenta um ponto de mínimo é:



Comentários e recomendações pedagógicas

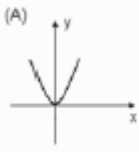
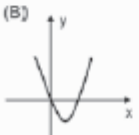


O estudo de funções é iniciado no 9º ano; mais especificamente no 2º bimestre, e neste momento é feita uma construção mais significativa da sua forma gráfica. De início é dada bastante ênfase à relação de proporcionalidade entre as variáveis **y** e **x** da forma " $y = kx$ ", (k constante) ao se tratar de funções polinomiais do 1º grau; da relação de proporcionalidade entre as variáveis **y** e o quadrado de **x** da forma " $y = kx^2$ " quando se trata de função polinomial do 2º grau.

É importante o aluno ter compreensão da variação da função polinomial do 2º grau e interpretar seu gráfico, reconhecendo pontos de máximo ou mínimo, raízes, coeficientes etc. A correta interpretação desses fatores permitirá que ele reconheça que há situações onde a relação entre as variáveis não são sempre diretas, além de que, os problemas que envolvem funções polinomiais do 2º

grau, como áreas, produção, equações de movimentos etc., podem ser mais bem compreendidas e analisadas a partir desses fatores.

Na questão apresentada o aluno deve saber que o problema trata de uma função polinomial do 2º grau e observar que, se a função tem um ponto de mínimo, então sua concavidade está voltada para cima, já eliminando as alternativas C e D. Em seguida, observando que, se $c = 0$, o gráfico da função deve cortar o eixo y na origem, condição atendida pelas alternativas A e B. A condição $b \neq 0$, entretanto, só aparece na alternativa B, pois o fato de o gráfico ser simétrico em relação ao eixo y implica em que $b=0$, eliminando assim a alternativa A, sendo B a resposta correta.

Grade de Correção

Alternativas	Justificativas
(A) 	Resposta incorreta. O aluno não faz todas as relações entre os coeficientes da função polinomial do 2º grau com seu gráfico. O aluno, possivelmente, percebe que gráfico procurado corresponde a uma parábola com a concavidade voltada para cima e que deve interceptar o eixo y na origem, mas não percebe que o fato de o gráfico ser simétrico em relação a y implica em $b=0$.
(B) 	Resposta correta. O aluno reconhece corretamente que o gráfico da função atende às três condições pedidas.
(C) 	Resposta incorreta. O aluno não relaciona o fato de que, se o coeficiente c é nulo implica numa raiz nula e que o gráfico neste caso passa, necessariamente, pelo centro do plano cartesiano e que, além disso, por ter um ponto de mínimo a função deve ter concavidade voltada para cima.
(D) 	Incorreta. O aluno, possivelmente, reconhece as condições $c = 0$ e $b \neq 0$, mas não percebe que a função apresentada tem ponto de máximo, e não de mínimo, como foi solicitado.