UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCELO CARDOZO DE MORAES

O funcionamento do GPS e a matemática do Ensino Médio

SÃO CARLOS
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCELO CARDOZO DE MORAES

O funcionamento do GPS e a matemática do Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação:
Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

SÃO CARLOS
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

M827fg

Moraes, Marcelo Cardozo de.
O funcionamento do GPS e a matemática do ensino médio / Marcelo Cardozo de Moraes. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
94 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Superfícies (Matemática). 3. Sistemas lineares. 4. Sistema de posicionamento global. 5. Tecnologia - estudo e ensino. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcelo Cardozo de Moraes, realizada em 21/08/2015:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

Prof. Dr. Silvia Cristina Martini Rodrigues
UMC

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

AGRADECIMENTOS

O que seriamos de nós se Deus não estivesse presente? Por isso começo agradecendo a Ele por tudo que proporcionou na minha vida. E, mais precisamente, na força que moveu para que eu pudesse terminar esse mestrado e produzisse essa dissertação.

À minha amada esposa Letícia, que em todos os momentos esteve presente e me ajudou. E, que principalmente nos momentos mais difíceis, sempre vinha com uma palavra de apoio.

Aos meus queridos e amados pais, Elizeu Cardozo de Moraes e Maria Therezinha Ferreira de Moraes, que sempre foram exemplos de pessoas batalhadoras, sempre éticos e companheiros que proporcionaram, modelos que serão seguidos a minha vida toda.

Às minhas queridas filhas, Eduarda e Julia, que sempre com muito carinho, entenderam a importância desse momento e os vários momentos de ausência.

Aos irmãos, sogros, cunhados e amigos que, mesmo de longe, sempre me incentivaram. Em especial, a minha irmã Andréia e a minha filha Eduarda que fizeram a correção ortográfica e gramatical.

Ao querido professor orientador Pedro Luiz Aparecido Malagutti, que além das grandes aulas durante a graduação e pós graduação, sempre me dirigiu para o pensamento de que a Matemática é mais do que as coisas que observamos nos livros. E, também, pela ótima orientação e pela paciência com essa dissertação.

À professora Mary Ellen Camarinho Terroni que me ajudou com a tradução do Inglês para o Português.

Ao Colégio que autorizou a pesquisa e aos queridos alunos que participaram da aplicação dessa atividade, com muita dedicação e seriedade.

RESUMO:

O principal objetivo desse trabalho é fazer com que os alunos entendam os fundamentos matemáticos para o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS). A pesquisa foi feita numa escola no interior do Estado de São Paulo, com alunos do 2º ano do Ensino Médio e a análise dos resultados foi feita de maneira qualitativa e também quantitativa. Por meio de duas folhas de atividades dirigidas, os alunos foram induzidos a entenderem o que acontece na intersecção de superfícies esféricas. Durante a primeira atividade, os alunos revisaram as ideias de intersecção de circunferências, tanto geometricamente como algebricamente. Na segunda atividade, estas ideias foram extrapoladas para esferas. O funcionamento do GPS foi exposto na atividade três, por meio de *slides* em *Power Point*, com o objetivo de que os alunos aprendessem um pouco sobre a história da criação do GPS, do seu funcionamento e sobre o teorema central desse trabalho: "Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste de um único ponto". A Engenharia Didática foi a metodologia utilizada para a pesquisa. O resultado final indica que, apesar de muitos alunos apresentarem dificuldades durante as atividades, todos entenderam os princípios matemáticos por trás do funcionamento do GPS.

Palavra chave: Superfícies Esféricas. Sistemas Lineares. GPS. Ensino sobre Tecnologia.

ABSTRACT:

The main objective of this work is to make students understand the mathematical foundations for the operation of Global Positioning System (GPS). The research was done in a school in the state of São Paulo with students of the second year of high school and the analysis was done in a qualitative as well as quantitative manner. Two sheets of directed activities, were used so students were induced to understand what happens at the intersection of spherical surfaces and this was carried out in three stages. During the first activity, students reviewed the circles of intersection of ideas, both geometrically and algebraically. In the second activity, these ideas were enlarged to spheres. The operation of the GPS was exposed in the activity three using PowerPoint slides, so goal that students learned a little about the history of the GPS creation and its operation, and the central theorem of this work: "If four spherical surfaces intersect and their centers are not coplanar, then this intersection is a single point." The Didactic Engineering was the methodology used for the survey. The result indicates that although many students present difficulties during the activities, everyone understood the mathematical principles behind the GPS operation.

Key word: Spherical surfaces. Linear Systems. GPS. Education for Tecnology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS E TABELAS:

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GPS: Sistema de Posicionamento Global.
EUA: Estados Unidos da América.
NAVSTAR: NAVigation Satellite with Time and Ranging – Programa americano de posicionamento global.
RPM: Revista do Professor de Matemática.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO:

1.1 – Breve relato do desenvolvimento Profissional

Comecei a pensar em trabalhar como professor quando ainda frequentava a 1ª série do Ensino Médio; lá tive um professor de Química que me fez ver a profissão de forma diferente. O professor Mauro Ribeiro era meu tio e o jeito como ele tratava as aulas e os alunos me fizeram ter os primeiros lampejos sobre o assunto. O professor mostrava a área de Química mais próxima da realidade do aluno, fazendo experiências em laboratório e em sala e, com isto, sempre incentivava os alunos a quererem aprender cada vez mais. O seu relacionamento com os alunos era muito bom, se comunicavam bastante, sem perder o respeito, e as aulas eram muito alegres.

Fiz toda a minha Educação Básica em escolas públicas, sendo que o 2º e 3º ano do Ensino Médio frequentei no Curso Noturno, pois trabalhava oito horas por dia. Quando resolvi que era Matemática que gostaria de fazer, tive certeza de que queria ser professor. A entrada na Universidade ocorreu em 1991, após aprovação nos vestibulares. Tive três opções de escolha: USP – São Carlos, UFSCar e UNICAMP. A escolha pela UFSCar deu-se pelo fato de que nesta instituição teria a opção de fazer Licenciatura. Naquele ano, aconteceu uma longa greve de professores que me ajudou muito, pois como a minha base trazida da escolarização básica era muito fraca, tive condições de estudar bastante durante aqueles quase quatro meses de duração da greve. Após uma nota baixa, na primeira prova feita, o professor Pedro Malagutti, que ministrava a disciplina Geometria Euclidiana, me indicou dois livros de geometria básica e, durante a greve, resolvi todos os exercícios daqueles livros.

Já no 2º ano do curso, em 1992, tive minhas primeiras experiências com aulas particulares e, no ano seguinte, comecei a lecionar em escolas públicas. No início, minhas aulas eram ministradas seguindo modelos que tinha visto como aluno. Muitas vezes, como muitos professores que tive, estava mais preocupado em cumprir o programa do que realmente ensinar, apontava os alunos como os únicos culpados pela não aprendizagem e lamento ter repetido esse modelo. Com o passar do tempo, entendi que a aula era uma troca entre professor e aluno. O professor deve ter a obrigação de preparar suas aulas sempre pensando no seu aluno e como incentivá-lo a querer aprender mais.

Em 1994, as escolas particulares entraram na minha vida, tive o prazer de começar a trabalhar em uma escola que leciono até hoje, denominado nessa dissertação como Colégio 1.

Essa escola foi à principal responsável pelo aprendizado que tenho até hoje em sala de aula, a qualidade dos colegas professores e de seus alunos fizeram com que eu sempre me motivasse a procurar meios diferentes de ensinar. Tive experiência, de 1999 até 2005, de lecionar em outro colégio particular, que aqui será chamado de Colégio 2, onde trabalhei com 3º ano do Ensino Médio e cursos pré-vestibulares. Saindo do Colégio 2, comecei a trabalhar em 2006 em outras duas escolas particulares, onde estou também até hoje. Em todas as escolas citadas trabalhei com o Ensino Médio ou cursos pré-vestibulares. Em 2011, tive minha primeira experiência no Ensino Fundamental 2, trabalhando com a Geometria nos nonos anos no Colégio 1. Na Escola Pública, trabalhei de 1993 até 2008, com alguns poucos períodos de ausência, voltando em 2014, quando fui aprovado em concurso público. De 2006 até 2010, concomitantemente com as aulas, tive uma experiência de Coordenação Pedagógica do nono ano ao Ensino Médio do Colégio 1. Essa foi uma experiência única, em que aprendi a olhar a sala de aula de outra maneira e também a necessidade de, pedagogicamente, se reinventar sempre.

O trabalho na Coordenação Pedagógica me fez entender a importância que cada professor tem em um trabalho coletivo. Ele deve ensinar com a maior excelência possível, mas precisa entender que há outros professores caminhando ao seu lado. O individualismo deixa os alunos confusos e, muitas vezes, cansados e desanimados. É importante que cada professor, avalie a quantidade e profundidade das tarefas de casa e das provas, para evitar que os alunos fiquem desinteressados, e acabem não dando conta de tudo que lhe é pedido. Além disso, existe a necessidade de projetos interdisciplinares, com situações cotidianas e aplicadas por diversos professores em trabalho coletivo.

A minha vida acadêmica universitária começou em 1992 e, por causa da quantidade de aulas que ministrava na Educação Básica durante o curso, acabei fazendo o curso de licenciatura em Matemática um pouco mais devagar do que o previsto. Na época em que cursei a Universidade, optei por cursar uma quantidade menor de disciplinas a fim de fazê-las com mais dedicação. Terminei a graduação em 1997 e, desde então, fiz alguns cursos de verão na UFSCar, propostos para professores das escolas de Educação Básica. Em 2012, recebi um panfleto para prestar a prova de acesso ao PROFMAT e decidi aceitar. Fiz a prova de ingresso, obtive acesso, e percebi que não deveria ter ficado tanto tempo longe da universidade, pois o curso me motivou a querer estudar mais e mais.

Durante todos esses anos lecionando, participei de algumas aulas “diferentes” e vi que eram mais empolgantes e com aprendizados mais efetivos. As atividades que mais me marcaram, foram as chamadas aulas de aplicação que, na verdade, são aulas interdisciplinares com mais um ou dois professores na mesma aula, em que versávamos sobre um assunto comum, cada um dando ênfase nos conteúdos de sua disciplina específica. Tenho certeza que aprendi bastante com a atividade.

O Mestrado Profissional foi, uma excelente opção que encontrei para melhorar minhas aulas e produzir materiais diferenciados, próprios para despertar o interesse dos alunos nos conteúdos de Matemática na Educação Básica que tenho ministrado.

1.2 – Organização da dissertação

Depois de cursar boa parte das disciplinas do ProfMat, optei por fazer minha dissertação em um tema bastante atual e que está presente no cotidiano dos alunos, o GPS.

O tema GPS foi escolhido para essa dissertação, pois é preciso levar aos alunos cada vez mais informações sobre o uso da Matemática nas questões tecnológicas que nos envolvem. O tema é bastante rico, pois envolve conteúdos de geometria (plana, espacial e analítica), matrizes, determinantes, sistemas lineares, trigonometria, álgebra e outros conteúdos de outras disciplinas, como Física e Geografia.

Neste contexto, procurarei responder à seguinte pergunta de pesquisa:

"O estudo da tecnologia ligada ao GPS pode efetivamente contribuir para a melhoria do processo de ensino aprendizagem de alunos do Ensino Médio?"

Para responder a esta indagação, realizei experimentos pedagógicos em sala de aula que serão relatados nessa dissertação. A seguir, está descrito a organização desta dissertação.

O capítulo 2 apresenta, um resumo comentado de parte do Capítulo 1 do Livro Mathematics and Technology, de Christiane Rousseau e Yvan Saint-Aubin, que nos proporciona conhecimento histórico e tecnológico para a aplicação da matemática nas questões tecnológicas e que, com adaptações às séries escolares trabalhadas, podem ser utilizadas em sala. No Capítulo 3, são apresentadas as atividades de aplicação sobre as teorias descritas no livro citado acima, as quais foram aplicadas com os alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio 1. A atividade foi desenvolvida e adaptada, a partir da publicação, na revista *The Mathematics Teacher* (vol. 90, número 6, de Setembro de 1997), obedecendo os padrões da NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), com o Título *The Mathematics of the Global Positioning System* dos autores Gail D. Nord, David Jabon e John Nord. Em um breve resumo, podemos dizer que a atividade foi desenvolvida em três momentos. Na primeira parte, os exercícios inicialmente propostos, foram feitos individualmente pelos alunos; teve como principal objetivo, fazer com que eles pensassem sobre as várias posições relativas entre duas ou três circunferências, tanto geométrica como algebricamente. Na segunda parte, analogamente ao que foi feito na primeira aula, os alunos desenvolveram a atividade 2, cujo maior objetivo foi a análise das várias posições relativas entre superfícies esféricas e também, a escrita de suas equações. Ainda, na atividade 2, os alunos resolveram um sistema de equações lineares para elucidar a matemática que existe por trás do funcionamento do GPS; em outras palavras, o trabalho foi conduzido para que entendessem o significado do seguinte teorema:

"Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste de um único ponto"

Este será, como veremos, o resultado matemático central dessa dissertação. Em uma terceira aula, foi feita uma apresentação para os alunos em *Power Point,* com os aspectos teóricos mais importantes ligados ao funcionamento do GPS e foi possível mostrar, com a ajuda de um globo terrestre, como ele realmente funciona.

Neste capítulo, além das atividades e seus objetivos, encontram-se exemplos de outras atividades correlatas que também podem ser aplicadas em sala de aula. O Capítulo 4 é dedicado às análises quantitativas e qualitativas dos resultados das atividades desenvolvidas pelos alunos. Por fim, no Capítulo 5, está a conclusão do trabalho, uma avaliação do trabalho realizado e, consequentemente, uma resposta da pergunta colocada nessa introdução.

Capítulo 2

TRECHOS COMENTADOS DE PARTES DO CAPÍTULO 1 DO LIVRO MATEMÁTICA E ATUALIDADES – VOLUME 1 – COLEÇÃO PROFMAT

O livro citado acima é de autoria de Christiane Rousseau e Yvan Saint-Aubin, publicado em 2008 em Inglês e traduzido esse ano para o Português pela Coleção PROFMAT. Esse material foi utilizado como principal referência nesse trabalho devido à qualidade apresentada.

Neste capítulo, faremos um levantamento de partes importantes do Capítulo 1 do livro, para que sejam conhecidos, o histórico da criação do GPS, o seu funcionamento e as suas aplicações. Serão acrescentados ainda alguns dados mais atuais.

De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 2), na introdução, o homem sempre se interessou em se localizar sobre o Planeta Terra utilizando inicialmente instrumentos primitivos como bússola magnética, astrolábio e sextante. Ainda, relata a preocupação com o desenvolvimento de novas técnicas de navegação como o GPS e com a representação desses dados pela Cartografia.

Sobre isso, o texto diz:

> Já que tais técnicas de navegação são verdadeiramente úteis apenas se tivermos mapas precisos do mundo, dedicaremos uma seção à cartografia. Como a Terra é esférica, é impossível representá-la numa folha de papel numa forma que preserve ângulos, distâncias relativas, e áreas relativas. As concessões escolhidas dependem largamente da aplicação. O Atlas Peters, escolheu usar projeções que preservam a área relativa (A. Peters, editor. Peter World Atlas. Turnaround Distribution, 2002). Cartas marítimas, por outro lado, têm adotado projeções que preservam ângulos.

Na verdade, a Terra não é uma Esfera. Na seção “Alguns Refinamentos”, os autores do livro falam um pouco mais sobre o formato do nosso planeta. E, nessa dissertação, não abordaremos a seção sobre cartografia citada acima.

A seguir, Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 3), explicam um pouco mais sobre a geometria da localização em órbitas do GPS.

> A constelação de satélites GPS foi terminada em julho de 1995 pelo Departamento de Defesa dos EUA, e seu uso foi autorizado pelo público em geral. Quando foi entregue, o sistema consistia em 24 satélites desenhados de forma que pelo menos 21 deles funcionariam 98% do tempo. Em 2005, o sistema consistia em 32 satélites, dos quais pelo menos 24 estariam em funcionamento, enquanto os outros encontravam-se prontos para entrar em ação caso algum satélite falhasse. Os satélites estão posicionados a 20 200 km da superfície da Terra. Estão distribuídos por seis planos orbitais, cada um inclinado a 55 graus em relação ao plano equatorial (ver figura 1). Existem pelo menos quatro satélites em cada plano orbital, aproximadamente equidistantes uns dos outros. Cada satélite completa uma órbita circular ao redor do globo em 11 horas e 58 minutos. Os satélites estão situados de forma que, a qualquer momento e em cada localização na Terra, podemos observar pelo menos quatro satélites.

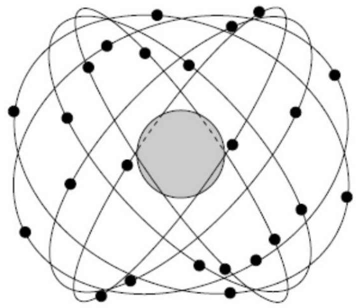


Figura 1 Os 24 satélites sobre as seis órbitas planas

Segundo Monico (2000, p.2), o Sistema NAVSTAR – GPS, como é chamado o programa, resultou da fusão de dois programas financiados pelo governo americano e que estavam sob a responsabilidade da marinha e da força aérea americana.

O projeto GPS teve início em 1973 e o principal objetivo era ajudar o Departamento de Defesa Americano a localizar seus navios e aviões, principalmente em combate. O texto original de Rousseau e Saint-Aubin é datado do ano 2008 e, após esta data, algumas coisas mudaram. Em Junho de 2011, a força aérea americana concluiu com muita eficiência uma expansão na constelação de satélites. Foram realocados seis dos 24 satélites, afim de que fosse possível colocar mais três satélites nas órbitas principais, passando de 24 para 27 satélites. Em 2015, já são 31 satélites que estão nas seis órbitas que chamaremos aqui de A, B, C, D, E e F. As órbitas denominadas por A e C, possuem 4 satélites, já as órbitas B, D e E possuem seis satélites, enquanto que a órbita F possui cinco satélites. Dos 31 satélites listados, 3 são tipo IIA (2ª geração) que foram lançados entre

1990 e 1997, 12 são do tipo IIR (chamados de "reposição") lançados de 1997 até 2004, 7 são do tipo IIR M(chamados de "modernizados") que foram lançados entre 2005 e 2009 e, ainda, os 9 do tipo IIF que foram ou estão sendo lançados a partir de 2010. O penúltimo satélite que foi lançado em 29 de outubro de 2014 e colocado em operação no dia 12 de dezembro de 2014 é o GPS IIF-8 e o último lançamento em 25 de Março de 2015, no Cabo Canaveral, nos Estados Unidos da América, foi do GPS II-9, que entrou em funcionamento a partir de 20 de abril de 2015. Os dados acima, foram coletados a partir dos sites citados abaixo, com acesso no dia 10 de maio de 2015: http://www.gps.gov/applications/ e http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus.

A figura abaixo foi retirada de Monico (2000, p. 4) e ajuda na ilustração de como eram as órbitas no ano de 1993.

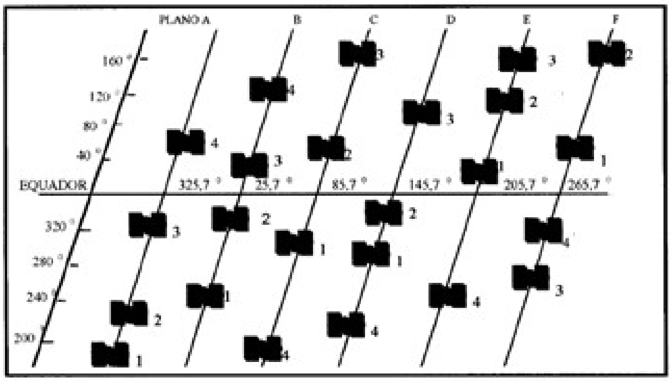


Figura 2: Ilustração sobre as órbitas em 1993 (Seeber,1993)

Continuando com Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 3):

> Os 24 satélites emitem um sinal que se repete periodicamente, o qual é recebido com a ajuda de um receptor especial. Quando compramos um GPS, na verdade, estamos comprando um dispositivo (que chamaremos de receptor) que recebe os sinais GPS e usa a informação neles para calcular sua localização. O sinal contém um conjunto de informações astronômicas (um almanaque) com as quais somos capazes de calcular a posição absoluta de cada satélite em cada momento. No entanto, como pequenos erros na órbita são inevitáveis, informações sobre correções para cada satélite são codificadas diretamente no sinal emitido (essas correções são atualizadas a cada hora). Cada satélite emite seu sinal continuamente. O período do sinal é fixo, e o tempo de início do ciclo pode ser determinado pelo uso do almanaque. Adicionalmente, cada satélite é equipado com um relógio atômico extremamente preciso, que lhe permite ficar sincronizado aos tempos de início no almanaque. Quando o receptor grava o sinal do satélite,

> imediatamente começa a compará-lo com outro ele que gera e com o qual supõe que deva bater exatamente. Em geral, os sinais não baterão imediatamente. Então, o receptor desloca o sinal gerado até que esteja em fase com o sinal recebido, o que determina, por cálculos, a correlação entre os dois. Dessa maneira, o dispositivo é capaz de calcular o tempo que leva para o sinal chegar do satélite. (...)
>
> O sistema descrito acima é o sistema de precisão padrão do GPS. Na ausência de correções mais sofisticadas desde o solo, permite o cálculo da posição do receptor com precisão de até 20 metros. Antes de maio de 2000, o Departamento de Defesa, intencionalmente, introduziu imprecisões nos sinais dos satélites de modo a reduzir a precisão do sistema para 100 metros.

O sistema GPS é composto por três partes importantes que são denominadas por segmento espacial, segmento de controle e segmento do usuário.

A figura a seguir, foi retirada do texto "Curso Básico de GPS" com autoria de Divino Cristino Figueirêdo, publicado em setembro de 2005.

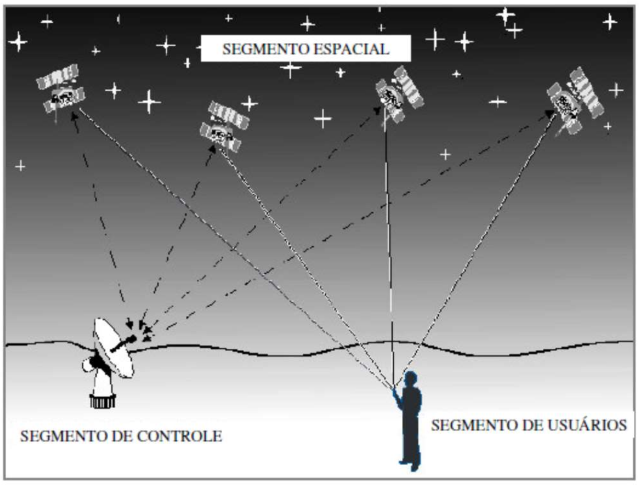


Figura 3: Ilustração sobre a divisão do sistema G. P. S.

O segmento espacial é o satélite, que já foi aqui citado, eles possuem osciladores de frequência (relógio atômico), sendo que os mais antigos são constituídos por Rubídio e Césio; outros utilizam o Quartzo e os mais recentes, além de Rubíbio e de Césio, utilizam Maser Hidrogênio também. Os satélites emitem sinais de dois tipos, um com comprimento de onda igual a 19 cm e de 1575,42 MHz e outro de 24 cm de comprimento de onda e de 1227,60 MHz (MONICO, 2000, p. 5).

O satélite também emite as efemérides, que são as posições de um objeto em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cuja origem é o centro da Terra.

O segmento de controle tem por objetivo monitorar os satélites, ajustar o tempo, corrigir posições e atualizar os dados emitidos. Ele é constituído de uma estação Mestre que está localizada no Colorado, nos Estados Unidos da América, mais outras dezesseis estações de monitoramento e ainda, doze antenas espalhadas pelo planeta. Veja a seguir um mapa da operação de controle.

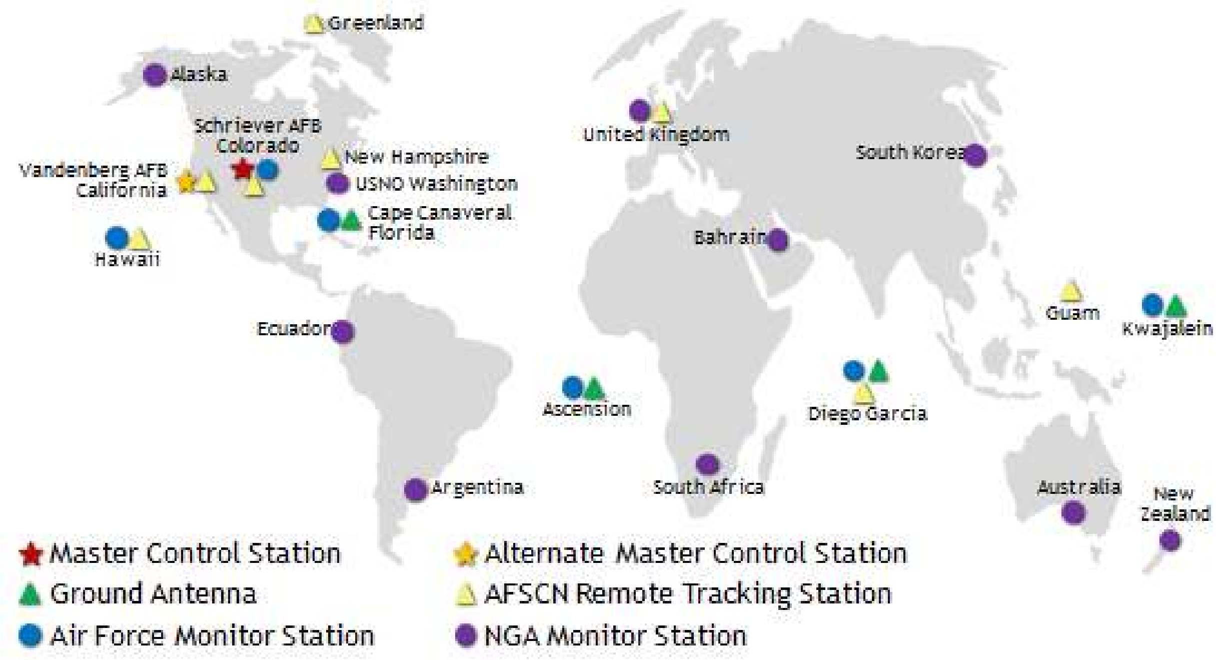


Figura 4: Mapa de orientação dos segmentos de controle

Fonte: http://www.gps.gov/systems/gps/control/ acesso em 10 de Maio de 2015

Tradução da legenda: 1ª coluna: Estação de controle mestre; Antena no chão; Estação de monitoramento da Força Aérea. 2ª coluna: Estação de controle Mestre suplente; AFSCN Estação de monitoramento remoto; Estação de monitoramento NGA.

O segmento do usuário é um aparelho que recebe o sinal vindo do satélite, ele mede o tempo do percurso desse sinal e, em seguida, calcula a distância que esse segmento espacial está do receptor. Esse aparelho não tem a mesma precisão de tempo que têm o satélite, mas com uma combinação de fatores ele se torna extremamente útil, pois consegue corrigir algumas falhas.

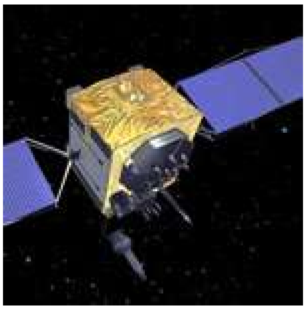


Figura 5: Imagem do satélite Bloco IIF

Fonte: http://www.gps.gov/systems/gps/space/imagem do satélite Bloco IIF que é o mais novo modelo de satélite utilizado com acesso em 10 de Maio de 2015

No item 1.2.2, Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 4), destacam a teoria por trás do GPS mostrando como o receptor calcula a sua posição. Segundo o texto e, assumindo que os relógios do receptor e de todos os satélites envolvidos estejam perfeitamente sincronizados, a determinação da posição do receptor é feita por triangulação. Ou seja:

> O princípio básico dos métodos de triangulação é determinar onde a pessoa (objeto) está usando algum conhecimento da posição da pessoa (objeto) relativo a objetos cujas posições são conhecidas. No caso do GPS, ele calcula sua distância aos satélites, cujas posições são conhecidas.

Vamos relembrar duas ideias importantes para a matemática do processo:

- definição matemática: Superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos no espaço que são equidistantes de um ponto dado (essa distância é chamada de raio da esfera e o ponto é chamado de centro da Esfera).
- determinação da equação de uma superfície esférica:

  No sistema ortogonal da figura 6 a seguir, com origem em O = (0, 0, 0) e raio r > 0, vamos considerar o ponto A com coordenadas (x, y, 0) e o ponto P(x, y, z) sobre a superfície esférica de centro O e raio r = OP. Utilizando o Teorema de Pitágoras, o segmento AO mede $\sqrt{x^2+y^2}$ e o raio da esfera (igual ao segmento PO) mede $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e daí, todos os pontos da superfície esférica satisfazem a equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Se, em outro exemplo, deslocarmos a origem para um ponto (a, b, c) teremos que a equação da esfera de centro (a, b, c) de raio r será dada por:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

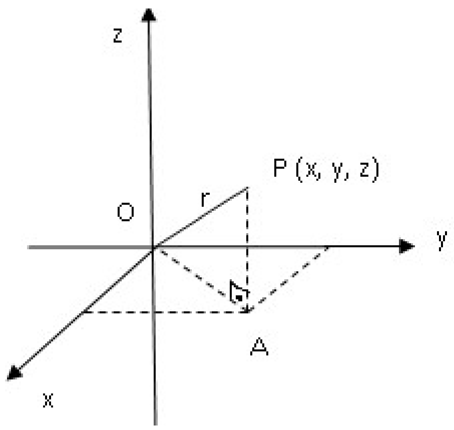


Figura 6: Sistema Ortogonal e um ponto P sobre a superfície da Terra

Utilizando os conceitos acima, podemos determinar a posição do receptor. O satélite será o centro dessa superfície esférica e, a partir disso, calcula-se a distância R entre o satélite e o receptor por meio do produto (c.t) da velocidade da luz (c) pelo tempo (t) que o sinal leva para chegar até o receptor. O valor encontrado é o raio da superfície esférica para todos os pontos que estão à mesma distância do satélite considerado, inclusive, o receptor está em um desses pontos.

Generalizando para um sistema de eixos ortogonais OXYZ, chamando de P = (x, y, z) a posição do receptor e, $O_i = (a_i, b_i, c_i)$, a posição conhecida do satélite P_i, no mesmo sistema de coordenadas, então temos que $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2 = R_i^2 = (c.t_i)^2 = c^2.t_i^2$ Supondo que os satélites P_1, P_2 e P_3, estejam localizados num ponto do espaço, onde o sinal chegue com qualidade no receptor. O receptor grava o tempo t_i que cada um dos sinais emitidos pelos satélites para chegar e calcula a sua distância R_i.

A partir do Satélite:

- P_1, de centro (a_1, b_1, c_1) e raio R_1, a equação seria

$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = R_1^2 = (c.t_1)^2 = c^2.t_1^2$ (1.1).

- P_2, de centro (a_2, b_2, c_2) e raio R_2, a equação seria

$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = R_2^2 = (c.t_2)^2 = c^2.t_2^2$ (1.2).

- P_3, de centro (a_3, b_3, c_3) e raio R_3, a equação seria

$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = R_3^2 = (c.t_3)^2 = c^2.t_3^2$ (1.3).

Com isso, sabemos que o receptor está em S_1, S_2 e S_3, que são as respectivas superfícies esféricas geradas a partir dos satélites P_1, P_2 e P_3.

Considerando apenas a equação de P_1, podemos ilustrar a situação com a figura abaixo. Observemos que isto é insuficiente para determinar P, pois sabemos que S_1 tem infinitos pontos na superfície da Terra.

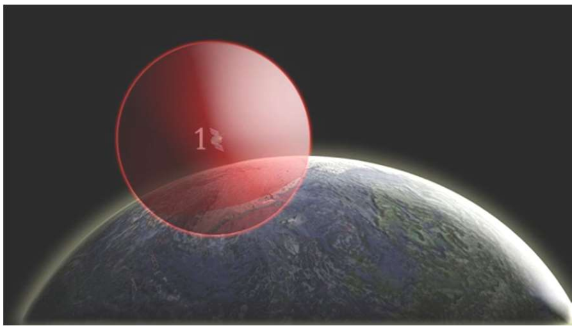


Figura 7: Ilustração da interceptação da Terra pelo sinal de um único satélite

Fonte: http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b.html com acesso em 10 de Maio de 2015.

Como a intersecção das superfícies esféricas S_1 e S_2 é uma circunferência, também é insuficiente utilizar apenas essas duas superfícies para determinar P. Sabemos apenas que o receptor está nessa circunferência.

A seguir, temos a ilustração da circunferência λ formada pelo cruzamento entre as duas superfícies esféricas sobrepostas.

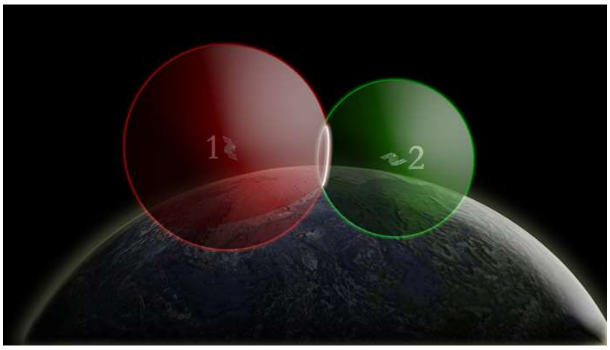


Figura 8: Ilustração da interceptação da Terra pelo sinal de dois satélites
Fonte: http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b2.html acesso em 10 de Maio de 2015.

Fica claro, que é importante que seja utilizado um terceiro satélite, no caso P_3. A intersecção entre a circunferência λ e os pontos da superfície esférica S_3 é restrito a apenas dois pontos, logo P é um desses dois pontos. Mas um desses pontos deve ser descartado, pois os satélites são colocados em posição que um dos pontos determinados está localizado numa posição em que o receptor não poderia estar. Daí, P será a solução do sistema (*) formado pelas equações (1.1), (1.2) e (1.3), eliminando a solução espúria. Assim fica determinada a posição exata do receptor. Na sequência, temos uma figura ilustrativa da situação descrita.

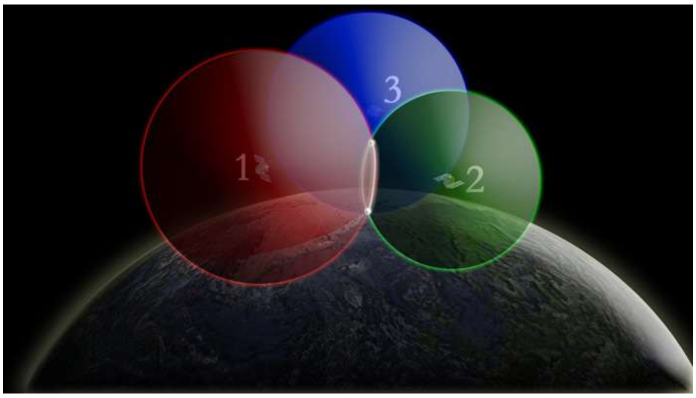


Figura 9: Ilustração da interceptação da Terra pelo sinal de três satélites
http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b3.html com acesso em 10 de Maio de 2015.

Para a resolução algébrica do sistema (*), reparamos que alguns termos são quadráticos, o que dificultaria a determinação de sua solução. Desenvolvendo os quadrados da diferença em cada uma das equações, formamos equações ainda quadráticas e, portanto, não lineares. Porém, dessa maneira os termos quadráticos em x, y e z se repetem e, daí surge a ideia, de fixarmos uma equação e subtrairmos das outras uma a uma. Com isso obtém-se um sistema de equações lineares.

Observemos a resolução apresentada por Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 5):

> O sistema de equações (*) é quadrático, não linear, o que complica a solução. Você pode ter observado, no entanto, que se nós subtrairmos uma das equações das outras, obtemos equações lineares, já que os termos x^2, y^2, z^2 cancelam. Logo, substituímos o sistema (*) por um sistema equivalente obtido substituindo-se a primeira equação por (1.1) - (1.3) e a segunda equação por (1.2)-(1.3), mantendo a terceira equação. Isto resulta no sistema:
>
> $$S': \begin{cases} (1.1) - (1.3) \\ (1.2) - (1.3) \\ \quad (1.3) \end{cases}, \qquad \text{ou ainda,}$$
>
> $$S': \begin{cases} 2.(a_3 - a_1).x + 2.(b_3 - b_1).y + 2.(c_3 - c_1).z = A_1 \\ 2.(a_3 - a_2).x + 2.(b_3 - b_2).y + 2.(c_3 - c_2).z = A_2 \\ (1.3) \end{cases} \qquad (1.4)$$
>
> em que:
>
> $$A_1 = c^2(t_1^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_1^2) + (b_3^2 - b_1^2) + (c_3^2 - c_1^2)$$
> $$A_2 = c^2(t_2^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (c_3^2 - c_2^2) \qquad (1.7)$$
>
> Os satélites foram posicionados de tal forma que nunca três satélites serão colineares. Esta propriedade garante que pelo menos um dos determinantes 2 × 2:
>
> $$\begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & c_3 - c_1 \\ a_3 - a_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}$$
>
> é não nulo.
>
> Com efeito, se todos os três determinantes fossem nulos, então os vetores (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1) e (a_3 - a_2, b_3 - b_2, c_3 - c_2) seriam colineares (seu produto vetorial seria zero), implicando que os três pontos P_1 , P_2 e P_3 estariam alinhados.
>
> Suponha que o primeiro determinante seja não nulo. Usando a regra de Cramer, as primeiras duas equações de (1.4) dão nos soluções para x e y, em função de z :
>
> $$x = \frac{\begin{vmatrix} A_1 - 2.(c_3 - c_1).z & 2.(b_3 - b_1) \\ A_2 - 2.(c_3 - c_2).z & 2.(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.(a_3 - b_1) & 2.(b_3 - b_1) \\ 2.(a_3 - b_2) & 2.(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2.(a_3-a_1).z & A_1-2.(c_3-c_1).z \\ 2.(a_3-a_2).z & A_2-2.(c_3-c_2).z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.(a_3-b_1) & 2.(b_3-b_1) \\ 2.(a_3-b_2) & 2.(b_3-b_2) \end{vmatrix}} \qquad (1.5)$$

Substituindo estes dois valores na terceira equação de (1.4), obtemos uma equação quadrática em z, a qual podemos resolver e encontrar duas soluções: z_1 e z_2. A substituição de z pelos valores de z_1 e z_2 nas duas equações acima leva-nos aos valores correspondentes x_1, x_2, y_1 e y_2. Poderíamos facilmente encontrar fórmulas fechadas para tais soluções, mas as mesmas rapidamente ficam muito grandes para oferecer-nos alguma compreensão ou conveniência.

Escolhendo os eixos do nosso sistema de coordenadas:

Em nenhum momento nas discussão anteriores nós mencionamos ou fomos forçados a escolher um conjunto de eixos para o nosso sistema de coordenadas. No entanto, para facilitar a tradução de coordenadas absolutas à latitude, a longitude, e altitude faremos a seguinte escolha:

- o centro de nosso sistema de coordenadas será o centro da Terra;
- o eixo z passa pelos dois pólos, orientados em direção ao polo Norte;
- os eixos x e y ficam ambos no plano equatorial;
- o eixo x positivo passa pelo ponto de longitude 0 grau;
- o eixo y positivo passa pelo ponto de longitude 90 graus oeste.

Como o raio R da Terra é aproximadamente 6365 km, uma solução (x_i , y_i , z_i) é considerada aceitável se $x^2_i + y^2_i + z^2_i \approx (6365 \pm 50)^2$. A incerteza de 50 km permite uma janela de altitude para montanhas e aviões. Um sistema de coordenadas natural para expressar pontos na superfície da terra é a longitude L, a latitude l e a distância h entre o centro da Terra (a altura acima do nível do mar é, portanto, é dada por h - R). Latitude e longitude são ângulos que serão expressas em graus. Se um ponto (x , y , z) está exatamente na esfera de raio R (em outras palavras, se o ponto está na altitude zero), sua longitude e latitude podem ser encontradas resolvendo-se o sistema de equações seguinte:

$$\begin{aligned} x &= R.\cos(L).\cos(l) \\ y &= R.\text{sen}(L).\cos(l), \\ z &= R.\text{sen}(l). \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Como $l \in [-90^\circ, 90^\circ]$, obtemos: $l = \arcsen(z/R)$, (1.7)

Permite-nos calcular cos l. A longitude L é, portanto, determinada univocamente pelas duas equações.

$$\begin{cases} \cos(L) = \dfrac{x}{R.\cos(l)} \\ \text{sen}(L) = \dfrac{y}{R.\cos(l)} \end{cases} \qquad (1.8)$$

Justificando os cálculos acima: Dados: O(0, 0, 0), A(x, y, z), B(0, 0, z), C(x, 0, 0), D(0, y, 0), ângulo (AÔC) = L e ângulo (PÂO) = l.

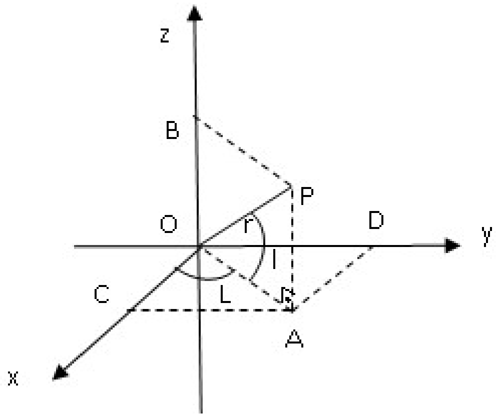


Figura 10: Sistema Ortogonal para cálculos de latitude e longitude de um ponto P(x, y, z) sobre a superfície da Terra

Chamaremos de L, o ângulo medido no sentido anti-horário (positivo) e horário a partir da reta Ox, que será denominada longitude de P, ($0 \leq L \leq 360^o$). Denominaremos por l, o ângulo medido no sentido anti-horário a partir de AO no plano (A,P,O) a partir de AO, como latitude do ponto P (*$l \in [\,-90^\circ, 90^\circ]$*).

No triângulo AOC, temos que $\mathrm{sen}\,(\mathrm{L}) = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{OA}}$ e $\cos\,(\mathrm{L}) = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{OA}}$ então,

$$y = OA.sen(L) \quad \text{e} \quad x = OA.cos(L).$$

No triângulo OPA, temos que $\mathrm{sen}\,(\mathrm{l}) = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}}$ e $\cos(\mathrm{l}) = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{r}}$ e daí, temos que: z = r.sen(l) e que: AO = r.cos(l) e substituindo nas equações encontradas acima: y = OA.sen(L) = r.cos(l).sen(L) e x = OA.cos(L) = r.cos(l).cos(L).

Voltando para o texto de referência, de Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 7), veremos o cálculo da posição do receptor:

> Seja (x , y , z) a posição do receptor. Começamos por calcular a distância h do receptor ao centro da Terra, dada por $\mathrm{h} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}$.
>
> Agora temos duas escolhas para calcular a latitude e a longitude: adaptar as fórmulas (1.7) e (1.8) substituindo todas as ocorrências de R por h, ou

projetando a posição (x , y , z) na superfície da esfera, e usando esses valores na equação (1.7) e (1.8):

$$(x_0,\ y_0, z_0) = \left(x\frac{R}{h}, y\frac{R}{h}, z\frac{R}{h}\right)$$

A altitude do receptor é dada por h - R.

Outra maneira de calcular a latitude e a longitude:

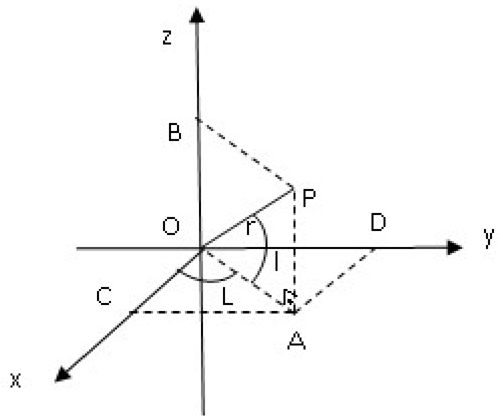


Figura 11: Sistema Ortogonal para cálculos de latitude e longitude de um ponto P sobre a superfície da Terra

Utilizando (1.10) e que l é a longitude de P, temos que: $sen(l) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *em que l ∈ [-90◦ , 90◦]*

Por (1.11), temos:

$$cos\ (L) = \frac{x}{r.cosl} = \frac{x}{r.\frac{OA}{r}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$sen\ (L) = \frac{y}{r.cosl} = \frac{y}{r.\frac{OA}{r}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Como os valores são únicos, temos que:

y > 0: longitude de P é Leste e y < 0: longitude de P é Oeste

z > 0: latitude de P é Norte e z < 0: latitude de P é Sul

Em mais um trecho de Rousseau e Saint-Aubin (2008, p.6), veremos algumas dificuldades que serão apresentadas a seguir sobre a imprecisão em um mundo real.

Acabamos de apresentar a teoria por trás do cálculo da posição, que funcionaria num mundo perfeito. Infelizmente, a vida real é muito mais complicada, já que os tempos medidos são extremamente curtos e devem ser medidos com alta precisão. Cada um dos satélites é equipado com um relógio atômico extremamente preciso (e caro!), que lhes permite estarem em sincronia (quase que) perfeita. Ao mesmo tempo, o receptor médio, típico, está equipado com um relógio medíocre, permitindo-o caber no orçamento das pessoas. Assumindo que os relógios dos satélites estão sincronizados, o receptor fica facilmente capacitado a calcular com precisão os tempos de trânsito dos sinais dos satélites. No entanto, dado que o receptor não está em perfeita sincronia, ele estará calculando três tempos de trânsito fictícios T_1, T_2 e T_3. Como podemos lidar com essas medidas imprecisas? Quando tivemos três incógnitas, x, y , z, necessitamos de três tempos t_1, t_2, t_3, para encontrar as incógnitas. Agora, o tempo fictício T_i medido pelo receptor é dado por:

Ti = (tempo de chegada do sinal no relógio do receptor) - (tempo de partida do sinal no relógio do satélite).

A solução vem do fato de que o erro entre o tempo fictício Ti, calculado pelo receptor, e o tempo real t_i , é o mesmo, independentemente do satélite com o qual a medição é feita. Isto é, $T_i = \tau + t_i$, para i = 1 , 2 , 3 , onde:

t_i = (tempo de chegada do sinal no relógio do satélite) - (Tempo de partida do sinal no relógio do satélite)

e τ é dada pela equação:

τ = (tempo de chegada do sinal no relógio do receptor) - (Tempo de chegada do sinal de relógio do satélite) (1.9)

Para justificar os cálculos, vamos considerar que:

Cr: tempo de chegada do sinal no relógio do receptor;

Sr: horário de saída do relógio do receptor;

Cs: tempo de chegada do sinal no relógio do satélite;

Ss: horário de saída do relógio do satélite;

Temos que: $T_i - t_i = (Cr - \cancel{Ss}) - (Cs - \cancel{Ss}) = Cr - Cs = \tau$

Voltando para o texto:

A constante τ representa o atraso entre os relógios nos satélites e o relógio do receptor. Isso inclui uma quarta incógnita, τ, ao nosso sistema original de incógnitas x , y , z. Para resolver o sistema de equações a um conjunto finito de soluções, devemos obter uma quarta equação. Isso é simples de ser feito em nosso contexto: o receptor simplesmente mede o tempo atrasado T_4 de trânsito do sinal entre ele mesmo e um quarto satélite. Como $t_i = T_i - \tau$, para i = 1, . . . , 4 , nosso sistema ficará então:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = c^2.(T_1 - \tau)^2 ,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = c^2.(T_2 - \tau)^2 ,$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = c^2 .(T_3 - \tau)^2 ,$$
$$(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 = c^2 .(T_4 - \tau)^2 \quad (1.10)$$

Agora temos quatro incógnitas, x, y, z e τ. Como anteriormente, podemos usar operações elementares para substituir três dessas equações quadráticas por equações lineares. Para isto, subtraímos a quarta equação de cada uma das três primeiras, resultando em:

$$2.(a_4 - a_1) + 2.(b_4 - b_1) y + 2.(c_4 - c_1) z = 2c^2\tau .(T_4 - T_1) + B_1 ,$$
$$2.(a_4 - a_2) + 2. (b_4 - b_2) y + 2.(c_4 - c_2) z = 2c^2\tau .(T_4 - T_2) + B_2 ,$$
$$2.(a_4 - a_3) + 2. (b_4 - b_3) y + 2.(c_4 - c_3) z = 2c^2\tau. (T_4 - T_3) + B_3 ,$$
$$(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4).^2 = c^2 (T_4 - \tau)^2 , \quad (1.11)$$

em que:

$$B_1 = c^{2.}(T_1^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_1^2) + (b_4^2 - b_1^2) + (c_4^2 - c_1^2),$$
$$B_2 = c^{2.}(T_2^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_2^2) + (b_4^2 - b_2^2) + (c_4^2 - c_2^2),$$
$$B_3 = c^{2.}(T_1^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_3^2) + (b_4^2 - b_3^2) + (c_4^2 - c_3^2), \quad (1.12)$$

No sistema de equações (1.11), a regra de Cramer, aplicada às três primeiras equações, permite-nos determinar os valores de x , y , e z como funções de τ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2.c^2\tau.(T_4 - T_1) + B_1 & 2.(b_4 - b_1) & 2.(c_4 - c_1) \\ 2.c^2.\tau(T_4 - T_2) + B_2 & 2.(b_4 - b_2) & 2.(c_4 - c_2) \\ 2.c^2.\tau(T_4 - T_3) + B_3 & 2.(b_4 - b_3) & 2.(c_4 - b_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.(a_4 - a_1) & 2.(b_4 - b_1) & 2.(c_4 - c_1) \\ 2.(a_4 - a_2) & 2.(b_4 - b_2) & 2.(c_4 - c_2) \\ 2.(a_4 - a_3) & 2.(b_4 - b_3) & 2.(c_4 - b_3) \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2.(a_4 - a_1) & 2.c^2\tau.(T_4 - T_1) + B_1 & 2.(c_4 - c_1) \\ 2.(a_4 - a_2) & 2.c^2.\tau(T_4 - T_2) + B_2 & 2.(c_4 - c_2) \\ 2.(a_4 - a_3) & 2.c^2.\tau(T_4 - T_3) + B_3 & 2.(c_4 - b_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.(a_4 - a_1) & 2.(b_4 - b_1) & 2.(c_4 - c_1) \\ 2.(a_4 - a_2) & 2.(b_4 - b_2) & 2.(c_4 - c_2) \\ 2.(a_4 - a_3) & 2.(b_4 - b_3) & 2.(c_4 - b_3) \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2.(a_4 - a_1) & 2.(b_4 - b_1) & 2.c^2\tau.(T_4 - T_1) + B_1 \\ 2.(a_4 - a_2) & 2.(b_4 - b_2) & 2.c^2.\tau(T_4 - T_2) + B_2 \\ 2.(a_4 - a_3) & 2.(b_4 - b_3) & 2.c^2.\tau(T_4 - T_3) + B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.(a_4 - a_1) & 2.(b_4 - b_1) & 2.(c_4 - c_1) \\ 2.(a_4 - a_2) & 2.(b_4 - b_2) & 2.(c_4 - c_2) \\ 2.(a_4 - a_3) & 2.(b_4 - b_3) & 2.(c_4 - b_3) \end{vmatrix}} \quad (1.13)$$

Nada disso faz sentido, a menos que o denominador seja não nulo. Entretanto, o denominador é zero, se e somente se, os quatro satélites estão num mesmo plano. Novamente, os satélites foram posicionados de tal forma que quatro daqueles que são visíveis de um dado ponto da Terra nunca são coplanares. Agora, substituímos essas soluções das três primeiras equações de (1.11) na quarta equação, obtendo uma equação quadrática final em τ, que nos darão duas soluções τ_1 e τ_2 . A substituição destas, de volta em (1.13), leva-nos a duas soluções possíveis para o receptor, e usamos o mesmo truque de antes para eliminar a solução espúria.

O texto utilizou um teorema que necessita ser provado:

Teorema: *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros não estão no mesmo plano, então a intersecção sempre será um único ponto.*

Demonstração: Devemos mostrar que se existe um ponto P que pertence às quatro superfícies esféricas S_1, S_2, S_3 e S_4, de centros, C_1, C_2, C_3 e C_4, não coplanares, então P é o único ponto de intersecção das quatro superfícies esféricas.

Considere a equação reduzida de uma esfera S_k de centro (u_k, v_k, z_k) e raio R, $(x - u_k)^2 + (y - v_k)^2 + (z - w_k)^2 = R_k^2$.

Definindo $a_k = -2.u_k$, $b_k = -2.v_k$, $c_k = -2.w_k$ e $d_k = u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 - R_k^2$ para k = 1, 2, 3, 4, obtemos o sistema de equações:

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$S_3: x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$
$$S_4: x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

Subtraindo as equações duas a duas, teremos outro sistema, só que agora linear. Veja:

$$S_1 - S_2: (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = d_2 - d_1$$
$$S_1 - S_3: (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3) = d_3 - d_1$$
$$S_1 - S_4: (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4) = d_4 - d_1$$

Devemos mostrar que o sistema linear acima tem solução única e disto podemos concluir que o sistema não linear tem solução única. Trata-se apenas da unicidade já que existe raiz e é garantida por hipótese.

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2.u_1 + 2.u_2 & -2.v_1 + 2.v_2 & -2.w_1 + 2.w_2 \\ -2.u_1 + 2.u_3 & -2.v_1 + 2.v_3 & -2.w_1 + 2.w_3 \\ -2.u_1 + 2.u_4 & -2.v_1 + 2.v_4 & -2.w_1 + 2.w_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -8.\begin{vmatrix} u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & w_1 - w_2 \\ u_1 - u_3 & v_1 - v_3 & w_1 - w_3 \\ u_1 - u_4 & v_1 - v_4 & w_1 - w_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

O determinante é diferente de zero pois C_1, C_2, C_3 e C_4 são não coplanares e, portanto, o sistema tem solução única.

Ainda sobre o teorema: como os centros são não coplanares, então os vetores $C_1 - C_2$, $C_1 - C_3$ e $C_1 - C_4$ são linearmente independentes então o determinante é diferente de 0.

O problema é que a solução do sistema linear pode não ser solução do sistema não linear (intersecção das superfícies esféricas). Para que ele seja solução o ponto deve pertencer às 4 esferas.

Todo ponto na intersecção de duas esferas deve ser solução da equação linear. A recíproca não é verdadeira.

Mas, se o ponto está na superfície deve ser solução do sistema linear. Se tivesse um segundo ponto ele também seria solução do sistema linear, o que não pode acontecer, pois o determinante é diferente de zero.

Na aplicação do GPS o problema não linear tem solução, pois ela é garantida com a presença física do usuário. Logo esta solução é única, desde que os centros das esferas sejam não coplanares (o que é garantida pelas órbitas dos satélites, controladas em terra).

Demonstração baseada em A Matemática do GPS (Sérgio Alves, RPM 59).

Outro problema que surge: Sabendo que em alguns pontos da Terra, mais de quatro satélites emitem sinais para o receptor, como ele deveria proceder para fazer a escolha dos quatro satélites necessários para determinar sua localização?

A resposta deve levar em conta a tentativa de minimizar o erro. Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015, p.10), *Na realidade, os tempos medidos são todos aproximados. Isto implica serem as distâncias calculadas aos satélites apenas aproximadas.*

Graficamente, representaríamos a área de incerteza aumentando a grossura da casca de cada esfera. A intersecção das esferas engrossadas passa a ser um conjunto, cujo tamanho é relacionado à incerteza da solução.

Pensando geometricamente, é fácil nos convencermos de que, quanto maior o ângulo entre as superfícies de duas esferas engrossadas secantes, menor será o volume do espaço ocupado pela interseção. No caso oposto, se as esferas intersectarem-se quase tangencialmente, o volume de intersecção (e portanto a incerteza) será maior.

Concluímos que devemos escolher as esferas S_i, que intersectam umas com as outras, com o maior ângulo possível (ver figura 12).

Figura 12: *Um pequeno ângulo de intersecção na parte esquerda (a perda de precisão) e um grande ângulo para a direita .*

Isto foi a intuição geométrica por trás da nossa escolha. Algebricamente, vemos que os valores de x , y e z , em termos de τ são obtidos pela divisão por:

$$\begin{vmatrix} 2.(a_4 - a_1) & 2.(b_4 - b_1) & 2.(c_4 - c_1) \\ 2.(a_4 - a_2) & 2.(b_4 - b_2) & 2.(c_4 - c_2) \\ 2.(a_4 - a_3) & 2.(b_4 - b_3) & 2.(c_4 - b_3) \end{vmatrix}$$

Quanto menor o denominador, maior será o erro. Logo, devemos escolher os quarto satélites que maximizam esse denominador.

Investigações mais avançadas neste tópico encaixariam facilmente num projeto de curso.

A geometria dos satélites em relação ao usuário é muito importante para uma precisão melhor, podemos ver abaixo que a primeira geometria é boa e a segunda é ruim. Como foi citado acima, a configuração dos quatro satélites é melhor quando os satélites estão espaçados, pois provoca um ângulo menor entre as superfícies esféricas.

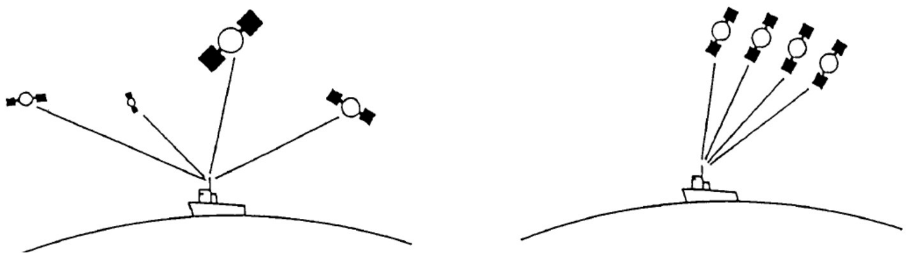


Figura 13: Escolha dos melhores sinais para localização. Fonte: Navegação: A ciência e a arte. Cap. 37: Navegação eletrônica e em condições especiais.

A seguir, seguem alguns refinamentos importantes apresentados por Rousseau e Saint-Aubin (2015, p.11).

• GPS diferencial (DGPS): Uma fonte de imprecisão no GPS vem do fato de que as distâncias são calculadas usando a constante c, que é a velocidade da luz no vácuo. Na realidade, o sinal viaja e refrata pela atmosfera, o que tanto aumenta sua trajetória quanto diminui sua velocidade. Para obter uma melhor aproximação à velocidade média do sinal no caminho do satélite ao receptor, podemos dispor de um sistema de GPS Diferencial. A ideia é refinar o valor de c a ser usado no cálculo da distância do satélite. Fazemos isto comparando o tempo de trânsito do sinal medido pelo receptor e o tempo de trânsito medido por outro numa posição conhecida precisamente. Isto nos permitiria calcular com precisão a velocidade média da luz ao longo do caminho de um dado satélite ao receptor, o que, por sua vez, resultaria em cálculos de distância mais precisa. Quando ajudados por uma estação fixa, a precisão do GPS passa a ser da ordem de centímetros.

• O sinal enviado por cada satélite é um sinal aleatório que se repete em intervalos de tempos regulares. O período do sinal é relativamente curto, de forma que a distância coberta pelo sinal num período é da ordem de uns poucos milhares de quilômetros. Quando o receptor vê o início de um período do sinal, ele deve determinar em que momento precisamente este período foi emitido pelo satélite. *A priori*, temos uma incerteza de um número inteiro de períodos.

• Receptor GPS em alta velocidade: Instalar um receptor de GPS num objeto em alta velocidade (um avião, por exemplo) é uma aplicação bastante natural: se uma aeronave precisa pousar em condições climáticas adversas, o piloto precisa saber a sua posição exata a todo instante, e o tempo para calcular a posição que deve ser reduzido a um mínimo absoluto.

• A Terra não é realmente redonda! Na verdade, a terra é mais uma elipsóide que é ligeiramente achatada nos polos e saliente no equador (um " esferóide oblato"). O raio da Terra é de aproximadamente 6356 km nos polos e 6378 km no equador. Portanto, os cálculos para traduzir coordenadas cartesianas (x , y, z) em latitude, longitude e altitude devem ser refinados para acomodar esse fato.

• correções relativísticas. A velocidade dos satélites é suficientemente alta, de modo a que todas as contas devam ser adaptadas para levar em conta os efeitos da relatividade especial. De fato, os relógios dos satélites estão andando muito rapidamente, se comparados com aqueles na Terra. Por esta razão, a teoria da relatividade especial prevê que tais relógios correrão mais devagar que aqueles na Terra. Além disso, os satélites estão em relativa proximidade da Terra, que tem massa significativa. A Teoria da Relatividade Geral prediz um pequeno incremento na velocidade dos relógios a bordo dos satélites. Como uma primeira aproximação, podemos modelar a Terra como uma imensa massa esfera não rotativa sem nenhuma carga elétrica. O efeito é relativamente fácil de calcular usando a métrica de Schwarzschild, que descreve o efeito da relatividade geral nestas condições simplificadas. Acontece que tal simplificação é suficiente para capturar o efeito real com alta precisão. Os dois efeitos devem ambos ser considerados porque, ainda que em direções opostas, eles só se cancelam apenas parcialmente. Para maiores detalhes veja: E. F. Taylor and J. A. Wheeler. Exploring Black Holes: Introduction to General Relativy. Addison Wesley Logman, New York, 2000. (Chapters 1 and 2 and project on GPS.)

Aplicações de GPS. As aplicações do GPS são inúmeras, e nomearemos apenas algumas:

• Um receptor GPS permite que uma pessoa a encontrar facilmente sua posição numa área externa. Desta maneira, é imediatamente útil a trilheiros, canoístas, caçadores, marinheiros, velejadores, etc.

• Mais e mais veículos (especialmente táxis) estão equipados com sistemas de navegação GPS que permitem aos seus motoristas encontrar o caminho até um endereço dado. Na Europa Ocidental e na América do Norte existem inúmeros produtos que fornecem direções precisas a praticamente qualquer endereço.

• Imagine que tenha um mapa antigo no qual queira desenhar uma rota que tenha seguido. A rota pode ter sido salva num GPS enquanto você segue, e mais tarde carregada a um computador com um programa apropriado. Tal programa pode sobrepor a rota seguida no mapa digitalizado. Se ainda não tem uma versão digital do mapa, pode primeiro escaneá-lo e (com o auxílio de um programa adequado) marcá-lo com um sistema de coordenadas, simplesmente, ao mostrar a localização de três pontos conhecidos.

• O uso onipresente do GPS em aeronaves permite a diminuição do tamanho de corredores aéreos (seguidos por aviões entre duas posições), garantindo, ainda, que aviões em diferentes corredores permaneçam a uma distância segura entre eles.

• Uma frota de veículos de entregas podem ser equipados com receptores GPS, permitindo o rastreamento simultâneo de todos os veículos. Um sistema desses é usado nos táxis de Paris. Nesta aplicação, o sistema GPS deve ser acoplado a um sistema de comunicação, permitindo que as coordenadas de cada veículo sejam transmitidas (um exemplo de sistema deste tipo é o GSM [Sistema Global para Comunicações Móveis], do Inglês Global System for Mobile Communication]). Sistemas semelhantes são usados para rastrear a vida selvagem em estudos ambientais. Não é difícil imaginar o impacto em nossas vidas, se exemplificarmos com uma companhia de aluguel de veículos e sua frota equipada com um sistema GPS-GSM, o que lhe permite controle quanto a limites territoriais impostos no contrato.

• O GPS pode ser usado por pessoas cegas para caminhar.

• Geógrafos usam o GPS para medir o crescimento do Monte Everest: esta montanha continua crescendo lentamente enquanto que sua geleira, o Khumbu, desce. Da mesma forma, a cada dois anos, uma expedição sobe ao Mont Blanc para atualizar a altura de seu pico. Nos anos 1990, geógrafos, se perguntaram se, de fato, o K2 era de fato mais alto do que o Monte Everest. Desde de sua expedição em 1998, quando usaram o GPS, o assunto está definitivamente encerrado: o Monte Everest é a montanha mais alta da Terra, com 8830 metros. Em 1954, a altura do Everest foi estimada em 8848 metros por B. L. Gulatee. Na época, a estimativa foi feita com medições por teodolito, tomadas de seis estações no Norte nas planícies da Índia (um teodolito é um instrumento óptico para medir ângulos utilizados no campo da Topologia).

• Há muitas aplicações militares, considerando-se que o sistema foi originalmente desenhado para o uso dos militares estadunidenses. Um uso é a orientação precisa de bombas.

A velocidade da luz no vácuo é de aproximadamente $2{,}99792.10^8$ m/s.

Além das citadas no texto, apresentamos outras aplicações do GPS: Monitoramento de relâmpagos e cálculo de áreas para certas regiões.

Abaixo, a última parte utilizada de Rousseau e Saint-Aubin (2015, p.13).

O futuro: GPS e Galileo.

Até agora, os Estados Unidos tiveram um monopólio neste mercado. Tendo em conta que eles mantêm controle exclusivo sobre GPS, o governo americano pode optar por embaralhar o sinal GPS para bloquear o acesso a ele ou degradar sua precisão sobre uma determinada região por razões militares (no âmbito do programa NAVWAR, para a guerra de navegação). Em março de 2002, a União Européia e a Agência do Espaço Europeu concordaram em financiar o desenvolvimento e a implantação do Galileo, um sistema de posicionamento concebido como uma alternativa ao sistema GPS. Dois satélites de teste foram lançados em 2005 com os restantes 28 satélites a serem lançados antes do final de 2010. Os satélites GPS não transmitem informação sobre o estado do satélite ou a qualidade do próprio sinal. Assim, pode levar várias horas antes de ser detectado um satélite avariado e, desligar com a precisão do sistema a ser severamente degradada durante esse tempo.

Isso restringe as aplicações de GPS para guiar os aviões no tempo inclemente. Os Satélites do Galileo são projetados para transmitir informações constantemente da qualidade do sinal, permitindo receptores para ignorar o sinal de satélites com defeito. Isto é feito através de um sistema de estações terrestres que permite medir com precisão a posição real do satélite e compará-lo com a posição calculada do satélite. Esta informação é enviada para o satélite avariado, que por sua vez transmite-o de volta para os receptores. O governo dos EUA está planejando uma melhoria semelhante no sistema GPS.

Ainda sobre o sistema Galileo: no mundo atual, sabemos que informação é poder. Pensando nisso e também numa independência em relação aos sistemas já existentes, a Comunidade Européia e a Agência Espacial Européia criaram o Sistema Galileo, totalmente de controle civil. Segundo o site http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/The_future_-_Galileo/Galileo_a_constellation_of_30_navigation_satellites, em 2014, a Comunidade Européia, estimou que 6 a 7% do PIB europeu já era dependente de navegação por satélites.

Comparando o sistema Galileo com o GPS americano, podemos dizer que seus satélites ficaram um pouco mais altos (23222 km) e suas três órbitas têm inclinação de 56 graus em relação ao plano equatorial, um pouco maior que o americano. A trajetória de um satélite deste sistema leva 14h, quase duas horas a mais que o americano para dar uma volta completa no globo.

Os satélites começaram a ser lançados em 2011 e, quando completo, o sistema terá 30 satélites.

Capítulo 3

EXPERIMENTO COM OS ALUNOS

A metodologia escolhida para referenciar o trabalho foi a Engenharia Didática. O método criado na França, na década de 80, baseado no trabalho do Engenheiro, é usado para validar um experimento didático prático. As fases desse método são:

- Levantamento de análises prévias;
- Análises *a priori* das atividades que serão desenvolvidas;
- Aplicação do Experimento;
- Análises *a posteriori* dos resultados encontrados;
- Validação do trabalho pedagógico.

Os textos lidos sobre Engenharia Didática indicam ARTIGUE (1988, 1994, 1996) como ótima referência de estudo desse tema.

A primeira etapa dessa metodologia é o estudo das análises prévias, que foi facilitada pelo fato do pesquisador conhecer a turma que trabalhava e o material didático de apoio a esses alunos.

3.1 – A Escolha da turma e análises prévias.

A turma que foi escolhida para a aplicação dessa atividade é muito heterogênea, alguns alunos possuem ótimo conhecimento matemático, e outros, apresentam muitas dificuldades até com pré-requisitos, incluindo nesses, os produtos notáveis. A escolha foi feita por causa dessa diversidade de conhecimentos apresentada pelos alunos e pela seriedade e dedicação que empregam em todas as atividades que fazem. Eles demonstraram muito interesse no desenvolvimento dessas atividades.

Os alunos que participaram dessas atividades já tinham aprendido toda a teoria de trigonometria e também de sistemas lineares. A trigonometria foi importante para que os alunos entendessem os cálculos da terceira aula desse trabalho (apresentação feita pelo professor sobre o funcionamento do GPS), em que foi calculado o ângulo de visualização da Terra a partir do satélite e também a fração da área de visualização da Terra. Os sistemas lineares foram utilizados pelos alunos para determinar o ponto de interceptação entre as três circunferências na Atividade 1, e as quatro superfícies esféricas da Atividade 2. Os métodos de resolução de sistemas lineares aprendidos pelos alunos são: o Método de Escalonamento e a Regra de Cramer.

Os assuntos sistemas lineares e trigonometria possuem uma vasta gama de aplicações, e, nesse experimento, a ideia era aplicá-los a um assunto ligado à tecnologia. O livro didático utilizado pela turma (IEZZI, 2011), utiliza uma sequência bem tradicional de tópicos dentro desses assuntos. Há muitos exercícios de fixação e complementados com alguns exercícios de aplicação. Em nenhum dos dois conteúdos há aplicações tecnológicas próximas ao experimento aplicado.

O conteúdo Geometria Analítica, no Colégio 1, é sempre trabalhado na 3ª série do Ensino Médio e, portanto, não havia sido trabalhado até o momento de aplicação das atividades. Apesar disso, como eles já tinham aprendido sobre a representação de algumas curvas no plano cartesiano durante a teoria de funções, não foi tão difícil explicar para os alunos como determinar a equação de uma circunferência. Para escrever a equação da circunferência foi utilizado o Teorema de Pitágoras, conteúdo visto no nono ano do Ensino Fundamental.

A seguir, mostramos uma tabela com os conteúdos programáticos da grade do Colégio 1, necessários para entendimento dessa atividade, separados por ano de aprendizado nessa Escola e utilizada na aplicação desta atividade.

Ensino Fundamental	Ensino Médio		
9º ANO	1ª SÉRIE	2ª SÉRIE	3ª SÉRIE
Triângulo retângulo: Teorema de Pitágoras e trigonometria; circunferência e seus elementos.	As diversas funções matemáticas	Trigonometria: circunferência; matrizes; determinantes e sistemas lineares.	Geometria Espacial (Posição e Métrica); Geometria Analítica

As atividades com GPS unificam e dão sentido aos conteúdos estudados, nas diversas séries.

3.2 – O desenvolvimento do Experimento.

Na semana anterior à aplicação dessa pesquisa, foi conversado com os alunos, sobre o que eles sabiam à respeito do GPS. Todos conheciam, alguns citaram a triangulação, mas ninguém sabia muito bem como era o seu funcionamento.

O material da revista americana *The Mathematics Teacher* foi escolhido porque apresenta uma sequência interessante de atividades, para entendimento sobre o funcionamento do GPS.

As atividades foram feitas individualmente e os alunos não tiveram permissão para troca de informações entre eles. A calculadora simples, com apenas as quatro operações, pôde ser utilizada.

A aplicação das atividades foi dividida em três aulas, sendo que as duas primeiras de 45 minutos cada e uma terceira, de aproximadamente 60 minutos.

3.2.1 – Aplicação da primeira parte da atividade.

Na aplicação dessa atividade, cujo título era "Circunferência" (apresentada no anexo), os alunos tinham que analisar as posições relativas entre circunferências distintas e coplanares, equacionar essas figuras e determinar pontos de intersecção entre elas. Nas duas primeiras questões, os vinte e oito alunos que participaram dessa atividade, deveriam enumerar a quantidade de intersecções entre duas circunferências e depois, entre três circunferências. Além disso, deveriam retratá-las com desenhos.

Apesar de não estar escrito na folha de atividades, algumas outras orientações foram passadas oralmente aos alunos, como por exemplo, considerar a figura geométrica circunferência distinta de círculo e, para evitar confusão, foi orientado que não trabalhassem com figuras coincidentes na resolução das duas primeiras questões.

O quadro anterior sobre conteúdos programáticos mostra que os alunos já trabalharam com circunferência e, como uma análise *a priori*, era possível ponderar que os alunos não teriam dificuldades com as primeiras questões da primeira atividade.

Na sequência, durante aproximadamente 5 minutos, foi mostrado como fazer a determinação da equação de uma circunferência no plano cartesiano.

No restante dessa atividade, os alunos deveriam escrever as equações de três circunferências dadas de forma reduzida e geral, para que, em seguida, fixando uma das equações e subtraindo-o das outras, uma a uma, chegassem a um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas. Numa análise *a priori*, esperava-se que para um sistema linear elementar, os alunos utilizassem os métodos de substituição ou o método de adição.

Quando o sistema foi resolvido, a solução do sistema deveria ser o ponto de encontro das três circunferências. Por meio de uma verificação rápida, os alunos que chegaram até aquele momento sem apresentar erros, deveriam concluir que sim.

Os alunos tiveram um intervalo de 15 minutos entre a primeira e a segunda atividade. Um dos alunos teve problema particular e não participou da segunda parte.

3.2.2 – Aplicação da segunda parte da atividade.

No desenvolvimento dessa atividade, intitulada "Esferas", os vinte e sete alunos que participaram, tinham que avaliar as posições relativas entre esferas, sendo que na primeira questão analisaram a posição relativa entre duas esferas, na questão seguinte, entre três esferas e na terceira questão, entre quatro. Foi orientado que os alunos considerassem superfície esférica onde tivesse escrito esfera. A quarta questão foi cancelada por falta de tempo.

Como análise *a priori*, era esperado que os alunos apresentassem dificuldades nessa atividade, afinal ainda não tinham trabalhado com Geometria Espacial durante o Ensino Médio.

Antes da quinta questão, o professor mostrou como chegar na equação de uma esfera, utilizando-se um paralelepípedo reto retângulo e o Teorema de Pitágoras. Essa questão solicitava a escrita da equação reduzida de uma esfera, sendo dado o seu centro e o seu raio. Em uma análise *a priori*, mesmo sem experiência com o assunto, esperava-se que os alunos chegassem à resposta certa, mesmo que mecanicamente.

Na questão seis, os alunos deveriam transformar as equações reduzidas de superfícies esféricas encontradas nas equações gerais dessas figuras. Nesse formato, todas as equações teriam a parte quadrática $x^2 + y^2 + z^2$ igual para todas e, fixando uma das equações gerais e subtraindo das outras três, deveria ser criado um sistema linear de três equações e três incógnitas. Na resolução desse sistema na questão sete, apareceriam conceitos importantes, para entender como o GPS determina a localização de um ponto sobre o nosso planeta.

Os alunos que resolvessem corretamente a questão perceberiam que a solução desse sistema linear é o ponto de encontro das quatro esferas.

As cópias das duas primeiras atividades estão no Anexo desse trabalho.

3.2.3 – Desenvolvimento da terceira parte da atividade.

No dia seguinte, foi ministrada a terceira aula dessa atividade. Houve uma apresentação em *Power Point* mostrando um pouco do histórico e funcionamento do GPS.

A seguir segue a descrição desses *slides* utilizados em aula.

SLIDE 1: Continha apenas o Título da atividade.

SLIDE 2: Nesse *slide*, foi feita uma discussão sobre o formato da Terra. Seria uma esfera ou não? Na discussão chegaram a conclusão que não, pois ela era achatada nos pólos. A informação que a Terra então era um Elipsóide foi analisada. Além disso, foram mostrados, para comparação, os valores para os raios das circunferências do equador e do meridiano máximo.

SLIDE 3: Os alunos tiveram acesso às informações sobre o histórico do GPS americano NAVSTAR, desde as necessidades militares até o uso civil. Para que pudessem entender um pouco sobre o funcionamento do GPS, foi apresentado também os três segmentos importantes para a determinação da posição de um indivíduo sobre o nosso Planeta. Esses segmentos são: o Segmento Espacial, o Segmento de Controle e Segmento do Usuário.

SLIDE 4: Nesse *slide*, havia informações já descritas no capítulo dois dessa dissertação, como por exemplo: a quantidade de satélites orbitando a Terra, localização desses satélites, ângulo e área de visualização por parte do satélite em relação a Terra. Tudo relativo ao ano de 1995.

SLIDE 5: Chegando a 2005, foram atualizados os dados sobre a quantidade de satélites e seu funcionamento. Foi discutido também sobre a precisão do relógio atômico e seus elementos.

SLIDE 6: Nesse *slide* foi analisada a criação de outros sistemas de satélites, como o Galileo, o Compass e Glonass.

SLIDE 7: O funcionamento do G. P. S. começou a ser discutido nesse slide. Temas como precisão, erros e triangulação.

SLIDE 8: Foi apresentada a fórmula Deslocamento = Tempo x Velocidade média, a fórmula da física utilizada na determinação das distâncias dos satélites em relação ao segmento do usuário.

SLIDE 9: Nesse *slide* foi explicada a teoria das efemérides e apresentado o sistema ortogonal de coordenadas.

SLIDE 10: Para avançar, era necessário retomar as duas primeiras atividades desse experimento, confrontando as respostas dadas pelos alunos e as respostas esperadas, sobre as interceptações entre circunferências e entre superfícies esféricas. Nesse *slide*, foram mostradas figuras que apresentavam a circunferência como intersecção de duas esferas e, também dos dois pontos como intersecção de três superfícies esféricas.

SLIDE 11: Foi mostrado um sistema ortogonal de coordenadas e apresentadas as equações da superfície esférica, fazendo um parênteses com as respostas dadas nas questões cinco e seis da Atividade 2.

SLIDE 12: O Teorema: "Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste de um único ponto" foi apresentado e discutido.

SLIDE 13: Para demonstração do Teorema anterior, foram apresentadas quatro equações genéricas de esferas: S_1, S_2, S_3 e S_4 na forma geral. Fixando S_1, e subtraindo $S_1 - S_2$, $S_1 - S_3$ e $S_1 - S_4$, foi obtido um sistema linear com três equações e três incógnitas.

SLIDE 14: Uma demonstração do teorema, usando-se a Regra de Cramer, foi mostrada nesse *slide*.

SLIDE 15: Nesse *slide*, foi feita uma discussão sobre a unicidade da resposta e a garantia de solução, já que a existência do usuário era a prova de que haveria ponto de intersecção das esferas.

SLIDE 16: Atualmente, mais de quatro satélites em órbita visualizam o mesmo ponto. A pergunta que fica é: Como o receptor escolhe os melhores satélites para os cálculos? Nesse *slide* foi feita uma discussão sobre a relação entre ângulos, áreas e erros na precisão.

SLIDES 17, 18 e 19: Usando a trigonometria, foi mostrado aos alunos os cálculos da área visual do satélite observando o planeta Terra (aproximadamente, 37% da área da superfície toda) e do ângulo visual (aproximados, 28º).

SLIDE 20: Foi apresentada a transformação das coordenadas cartesianas para coordenadas geográficas.

SLIDE 21: Superfície esférica em coordenadas cartesianas.

SLIDES de 22 ao 27: Nesses slides foram retomados os conceitos de Geometria, ligados a Latitude e Longitude. Foi mostrado aos alunos como calculá-los matematicamente.

SLIDES de 28 ao 37: Resolução de Problemas com dados reais foram apresentados nesses *slides*.

SLIDE 38: Outras aplicações do G. P. S. foram discutidas nesse slide.

SLIDE 39: Nesse *slide* foi apresentada uma relação bibliográfica.

3.2.4 – Exemplos de Outras atividades interessantes

Durante a pesquisa para a escolha das atividades, foram encontradas algumas atividades interessantes para aplicação com os alunos.

Uma das atividades mais interessantes encontradas, é a proposta pelos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, José Antonio Salvador e João Carlos Vieira Sampaio, num texto denominado "Sobre a matemática das medidas no Planeta Terra: dos gregos às novas tecnologias”, mostrada no VI Colóquio de História e Tecnologias no Ensino de Matemática (15 – 19 de julho de 2013, UFSCar, São Carlos, SP. Brasil). Segue abaixo, uma atividade adaptada:

ATIVIDADE COM ÁREAS:

Os alunos do 1º ano do Ensino Médio poderiam calcular áreas de regiões utilizando o Google Earth e o GeoGebra.

Objetivo: Os alunos, reunidos em grupos, podem calcular a área de regiões conhecidas por eles – Escola, condomínio, Universidades, Estádios de Futebol ou outro lugar importante para eles.

Descrição: Acessar o Google maps, localizar a imagem do lugar que o aluno deseja calcular a área. Em seguida, copiar a imagem para o *Software* GeoGebra e, com as ferramentas disponíveis, quadricular a figura com a maior quantidade possível de pontos. Marcar todos os pontos de fronteira e formar um polígono com ela. Contar todos os pontos internos i e todos os pontos de fronteira f. Com a ajuda de alguma distância conhecida no Google Earth, podemos descobrir a escala do mapa e utilizando o Teorema de Pick, calcular a área da figura.

O Teorema de Pick, permite calcular a área de um polígono no plano e tem o seguinte enunciado: A área de uma figura poligonal com vértices em uma malha quadriculada é dada por: $i+\frac{f}{2}-1$ em que, i é a quantidade de pontos interiores do polígono que estão na malha considerada e f é a quantidade de pontos que estão na malha e sobre a fronteira do polígono.

<u>Capítulo 4</u>

ANÁLISE DO EXPERIMENTO:

Utilizando a Engenharia Didática, vamos analisar os itens das atividades realizadas pelos alunos, verificando o que deu certo e o que precisa ser melhorado, afim de propor mudanças.

Numa análise *a priori*, as duas primeiras atividades deveriam ser trabalhadas tranquilamente no tempo estipulado. As folhas de atividades foram entregues em duas partes, pois, acreditava-se que os alunos não teriam tantas dificuldades. Pelo nível médio dos alunos, o tempo seria suficiente para quase a totalidade dos alunos.

O tempo ideal de aplicação da Atividade 1 para esse trabalho deveria variar de 45 a 60 minutos, dependendo dos pré-requisitos dos alunos envolvidos. Caso eles já tivessem visto e aprendido o conteúdo circunferência na Geometria Analítica, o tempo poderia ser minimizado.

Como análise *a posteriori*, para melhor visualização nas duas primeiras questões, o professor, poderia entregar aos alunos, um *kit* com algumas argolas, com raios diferentes, de modo que eles pudessem representar todas as posições relativas entre as circunferências. E ainda, verificar situações que não percebessem nas respostas dadas.

4.1 - Análises das respostas por questões

4.1.1 – Atividade 1

<u>Questão 1</u>: Quais são as possibilidades para o número de pontos de intersecção de duas circunferências em um plano? Retrate-as.

A resposta correta e esperada para essa questão era: Nenhum ponto, um ponto ou dois pontos.

Mesmo os alunos que responderam corretamente a questão, não mostraram todas as situações para as posições relativas entre essas circunferências. Por exemplo, quando o aluno diz que não há intersecção entre duas circunferências, ele desenha apenas a situação com uma ao lado da outra sem se tocar e, não mostra a situação em que uma delas pode ser interna à outra. Observe a situação na resolução dos alunos na próxima figura. Para cada questão apresentada na atividade, faremos uma tabela, igual a que vem a seguir, para mostrar quantitativamente, como foram às respostas dos alunos.

Quantidade de alunos	**Análise da Resposta**
07	Completa com as três possibilidades.
15	Esqueceram da possibilidade delas não se interceptarem
01	Não levou em conta a situação de tangência
05	Chegaram apenas a uma possibilidade

Vejamos a seguir, alguns exemplos de respostas dos alunos para a primeira questão.

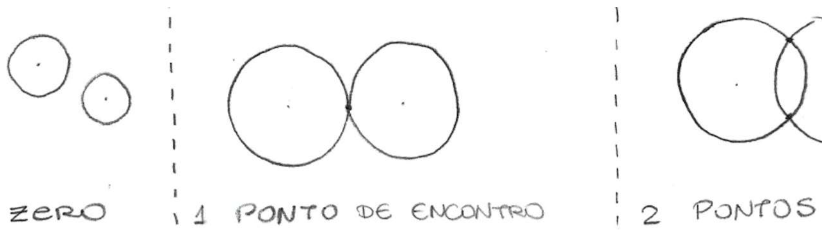


Figura 14: Primeiro exemplo de resposta correta

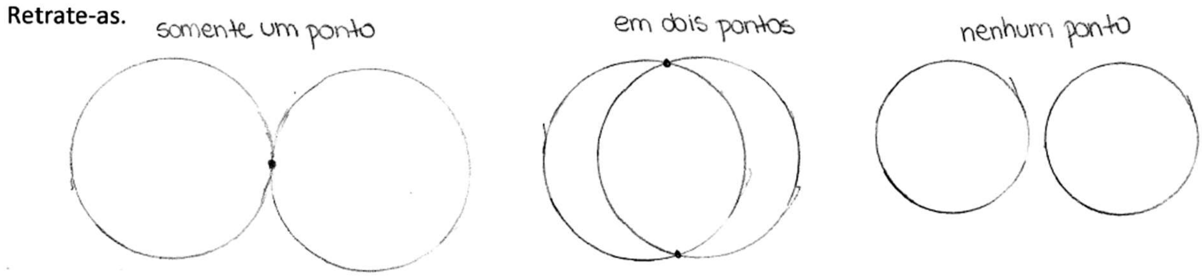


Figura 15: Segundo exemplo de resposta correta

Apareceram também algumas respostas incompletas, praticamente a metade dos alunos, não conseguiram chegar à resposta completa. Alguns deles esqueceram de analisar a situação em que não havia intersecção. Como o enunciado pedia a quantidade de intersecções entre as duas circunferências, eles entenderam que deveria haver pelo menos uma.

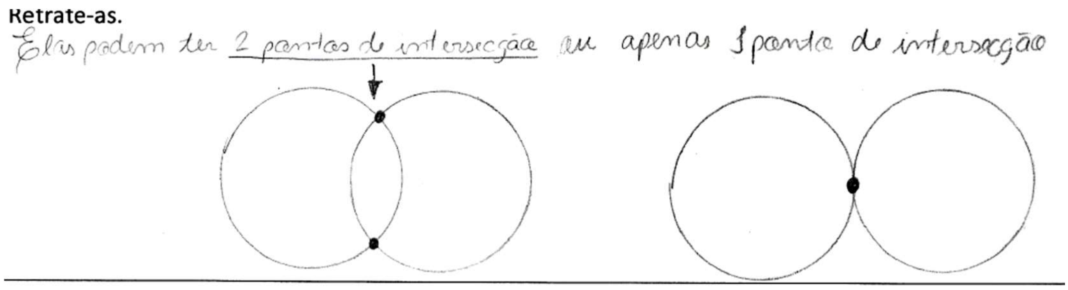


Figura 16: Exemplo de resposta incompleta

Analisando *a posteriori* a atividade, percebe-se com os resultados apresentados pelos alunos, que o enunciado da questão 1, poderia conter algumas mudanças. Uma nova versão poderia ser:

Questão 1: Considerando duas circunferências distintas e coplanares, desenhe, todas as posições relativas entre elas. Indique abaixo de cada desenho, a quantidade de pontos de intersecções entre elas.

Análise da Questão 2 da primeira atividade.

Questão 2: Quais são as possibilidades para o número de pontos de intersecção simultânea para as três circunferências em um plano? Retrate-as.

A resposta correta e esperada para essa questão seria: Nenhum ponto, um ponto ou dois pontos.

Da tabulação dos dados temos:

Quantidade de alunos	**Análise da Resposta**
Nenhum	Completa com as três possibilidades.
03	Encontraram a resposta nenhum ou um ponto
05	Encontraram a resposta um ou dois pontos
19	Chegaram apenas à possibilidade de um ponto
01	Errou completamente a questão

A posição em que as três circunferências se encontram em apenas um ponto foi desenhada por vinte e sete dos alunos, desses, três pensaram também em nenhuma possibilidade de encontro simultâneo e, cinco levaram em consideração dois pontos de encontros. A seguir estão algumas respostas apresentadas pelos alunos:

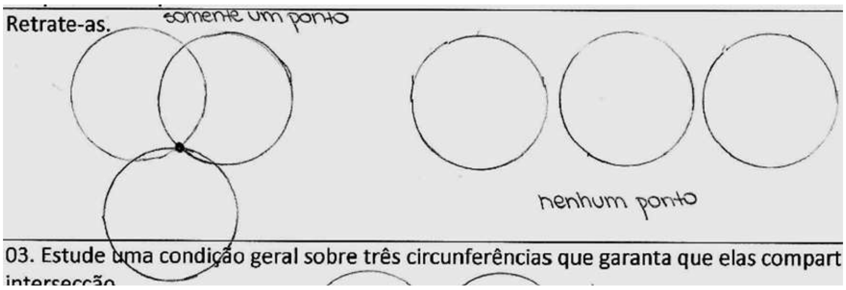


Figura 17: Primeiro exemplo de resposta incompleta

Na situação acima, está uma resolução incompleta em que o aluno não levou em consideração a situação de encontro em dois pontos. Já abaixo, segue uma resposta em que o aluno não pensou na situação de nenhum ponto de encontro simultâneo entre elas.

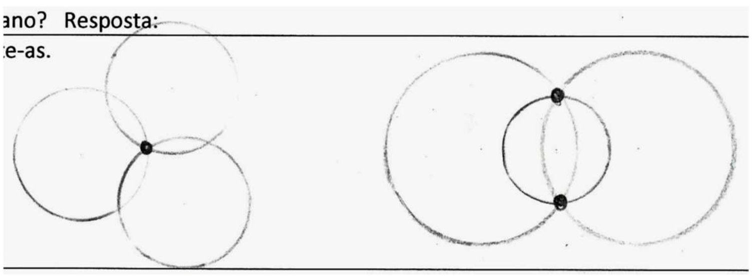


Figura 18: Segundo exemplo de resposta incompleta

O aluno abaixo apresenta apenas uma das respostas. Apenas um ponto de encontro.

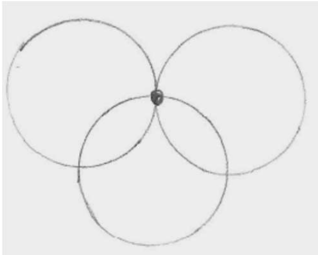


Figura 19: Terceiro exemplo de resposta incompleta

Na situação a seguir, o aluno não conseguiu retratar o que o enunciado pedia.

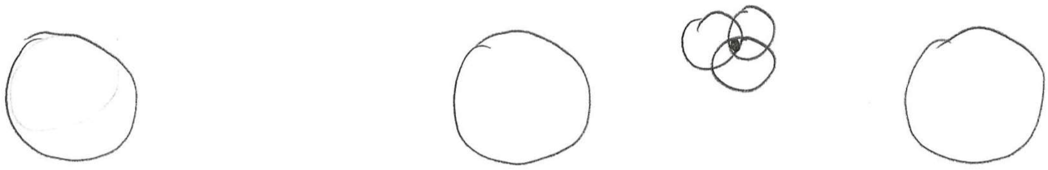


Figura 20: Exemplo de resposta incorreta

Numa analise *à posteriori*, o enunciado poderia ser melhorado, vários alunos não entenderam bem o que era pedido. Por isso, talvez fosse melhor mudar para:

<u>Questão 2</u>: Estude todas as possibilidades das posições relativas de três circunferências. Desenhe-as.

<u>Questão 3</u>: Estude uma condição geral sobre três circunferências que garanta que elas compartilhem apenas um ponto de intersecção.

A questão 3 foi cancelada, pois os alunos tiveram muita dificuldade de analisar a questão e o pesquisador pediu para que pulassem e fosse para outra por falta de tempo.

Nas próximas questões, os enunciados não deveriam ser modificados, pois cumprem o objetivo de fazer com que os alunos pratiquem e concluam que o ponto de encontro das três circunferências pode ser único. E serve também, como preparação para a Atividade 2.

A questão 4, teve alto índice de acerto. Os principais erros foram de falta de atenção e experiência, já que nunca tinham trabalhado com essas equações.

Agora vamos analisar os dados para a questão 4. Vejamos seu enunciado:

> Questão 4: Dê a equação das circunferências, usando o formulário de centro-raio, determinada por
>
> C_1: centro (0 , 1) e raio 5
>
> $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$, ou ainda, $x^2 + (y - 1)^2 = 25$
>
> C_2:centro(2 , -1) e raio $\sqrt{37}$.
>
> ____
>
> C_3: centro de (3, 2) e raio 3
>
> ____

Seguindo orientação inicial e o exemplo dado, a resposta correta seria: C_2: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 37$ e C_3: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

A seguir, veja a tabulação dos resultados encontrados nessa questão.

Quantidade de alunos	Análise da Resposta
24	Fizeram a resolução correta
03	Por falta de experiência e atenção na escrita, esqueceram de elevar a medida do raio da circunferência ao quadrado
01	Esqueceu de elevar apenas um dos elementos numa das equações ao quadrado

Segue a seguir, dois exemplos de resoluções corretas para essa questão.

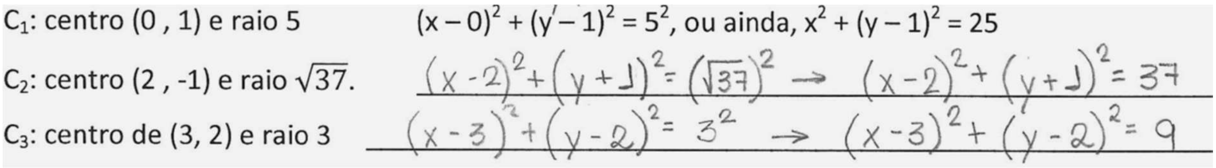


Figura 21: Primeiro exemplo de resolução

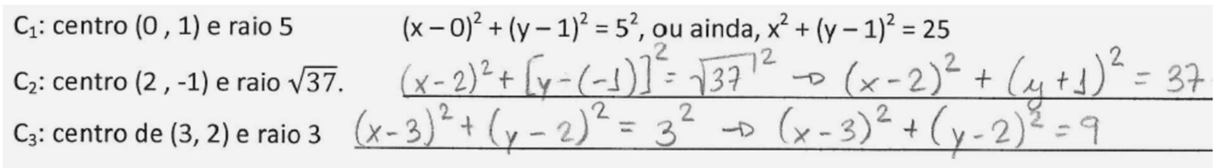
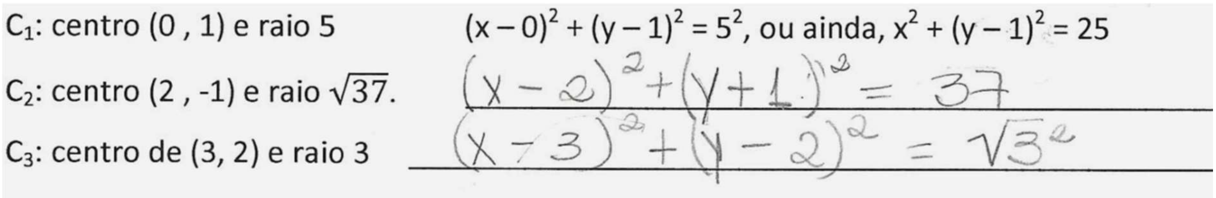


Figura 22: Segundo exemplo de resolução

Na resolução abaixo, o erro cometido pelo aluno foi ter elevado o $\sqrt{3}$ ao quadrado e não o 3 como deveria ser. Aparentemente foi induzido ao erro pela raiz quadrada em C_2.



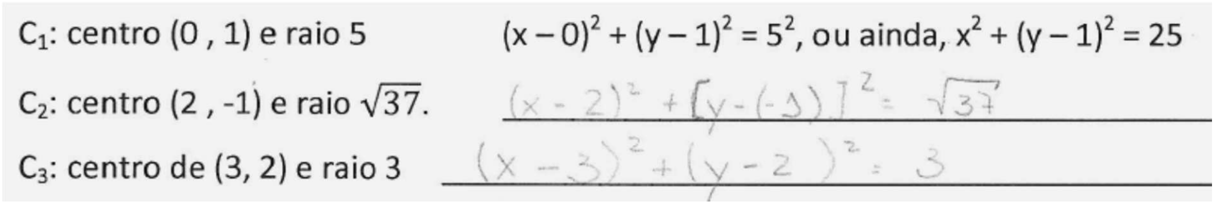
C_1: centro (0 , 1) e raio 5 $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 5^2$, ou ainda, $x^2 + (y-1)^2 = 25$

C_2: centro (2 , -1) e raio $\sqrt{37}$. $(x-2)^2+(y+1)^2 = 37$

C_3: centro de (3, 2) e raio 3 $(x-3)^2+(y-2)^2 = \sqrt{3}^2$

Figura 23: Terceiro exemplo de resolução

O próximo aluno, esqueceu, de elevar os raios ao quadrado.



C_1: centro (0 , 1) e raio 5 $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 5^2$, ou ainda, $x^2 + (y-1)^2 = 25$

C_2: centro (2 , -1) e raio $\sqrt{37}$. $(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = \sqrt{37}$

C_3: centro de (3, 2) e raio 3 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3$

Figura 24: Quarto exemplo de resolução

A questão 5 apresenta respostas corretas para 50% dos alunos e os outros 50% cometeram alguns erros de cálculos. Vamos observar e comentar algumas dessas resoluções.

Questão 5: Reescreva as equações de C_1(já feito), C_2 e C_3 na forma geral.
C_1: $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$
C_2: ____
C_3: ____

A resposta esperada era:

C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 32 = 0$ e C_3: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

Observe a análise dos resultados dessa questão no quadro a seguir:

Quantidade de alunos	**Análise da Resposta**
14	Acertaram todos os passos da resolução
14	Erraram em contas

No primeiro exemplo de resolução apresentado a seguir, e resolvido corretamente, observemos que o aluno, fez o quadrado da diferença de dois números, multiplicando (y + 1).(y + 1) ao invés de utilizar o famoso "quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo e mais o quadrado do segundo". Para $(x + 3)^2$, também ocorreu o mesmo erro.

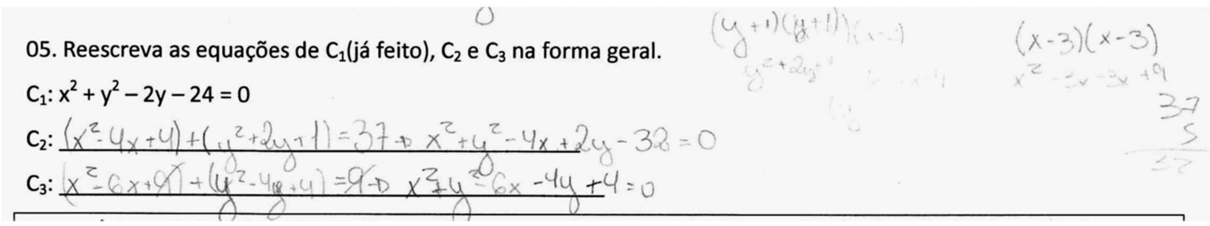


Figura 25: Primeiro exemplo de resolução correta

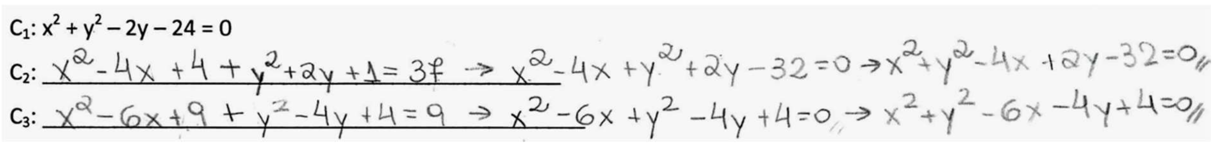


Figura 26: Segundo exemplo de resolução correta

Veremos agora mais algumas resoluções de alunos, que contêm erros. Reparemos que na resolução apresentada pelo aluno (a seguir), ele tentou decorar o quadrado da soma e se equivocou, claramente não entendeu que o sinal na frente do "dobro do primeiro pelo segundo" é o sinal do segundo número. Acabou colocando o sinal duas vezes e daí ele ficou positivo equivocadamente.

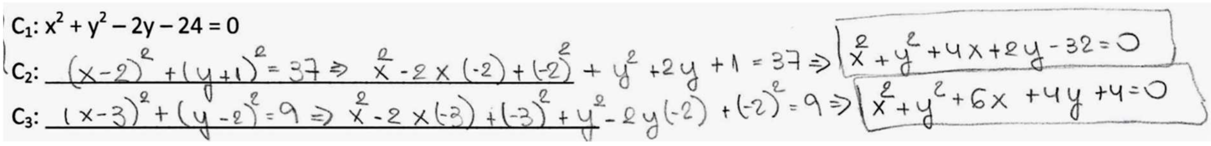


Figura 27: Primeiro exemplo de resolução incorreta

Alguns alunos cometeram o erro acima. Já na resolução abaixo, outro aluno, tentou dar as respostas mais diretas e acabou errando na equação de C_3. Observe:

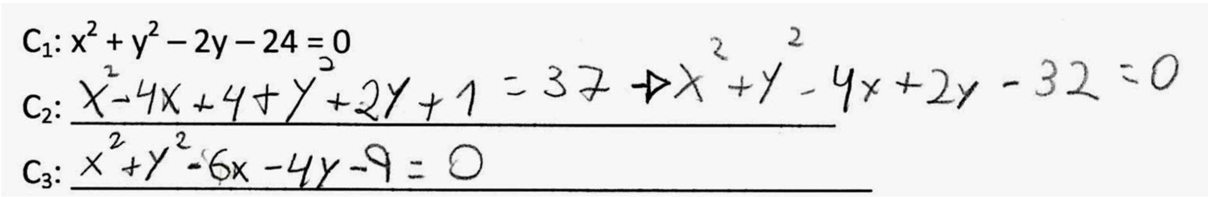


Figura 28: Segundo exemplo de resolução incorreta

Esse aluno, esqueceu, de somar $3^2 = 9$, no desenvolvimento $x^2 - 2.x.3 + 3^2$ e $2^2 = 4$, no desenvolvimento de $y^2 - 2.y.2 + 2^2$ na equação, portanto o termo independente de x e de y ficaria $9 + 4 - 9 = 4$ e não -9 que foi a resposta apresentada por ele.

O principal problema apresentado pelos alunos nessa questão, foi o erro de sinal (principalmente no quadrado da diferença). Também houve muitos (problemas de) erros de cálculos.

Para a próxima questão, foram analisados apenas os catorze alunos que acertaram a questão anterior pois ela dependia da resposta na questão anterior, e desses, oito deles conseguiram, acertar a questão seis. Vejamos a seguir o enunciado e o quadro quantitativo de análise das respostas dos alunos.

Questão 6: Encontre as equações das linhas determinado subtraindo as equações dos círculos dados:

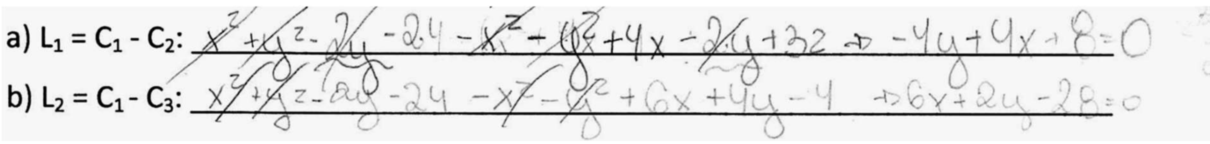
a) $L_1 = C_1 - C_2$: ______________________________________

b) $L_2 = C_1 - C_3$: ______________________________________

A resposta Correta é: $L_1 = 4x - 4y + 8$ e $L_2 = 6x + 2y - 28$

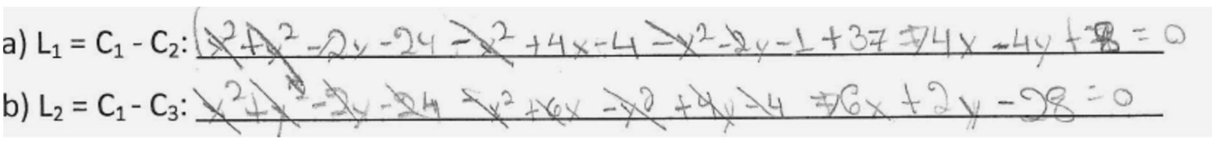
Quantidade de alunos	Análise da Resposta
08	Acertaram todos os passos da resolução
06	Erraram em contas, principalmente sinais
14	Respostas não puderam ser analisadas, pois erraram a questão anterior

Veja dois exemplos de cálculos:


a) $L_1 = C_1 - C_2$: $x^2+y^2-2y-24-x^2-y^2+4x-2y+32 \Rightarrow -4y+4x+8=0$

b) $L_2 = C_1 - C_3$: $x^2+y^2-2y-24-x^2-y^2+6x+4y-4 \Rightarrow 6x+2y-28=0$

Figura 29: Primeiro exemplo de resolução correta


a) $L_1 = C_1 - C_2$: $x^2+y^2-2y-24-x^2+4x-4-y^2-2y-1+37 \Rightarrow 4x-4y+8=0$

b) $L_2 = C_1 - C_3$: $x^2+y^2-2y-24-x^2+6x-y^2+4y-4 \Rightarrow 6x+2y-28=0$

Figura 30: Segundo exemplo de resolução correta

a) $L_1 = C_1 - C_2$: $\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y - 24 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 4x - 2y + 32 \Rightarrow 4x - 4y + 8 \Rightarrow x + y = -2$ $(\div 4)$

b) $L_2 = C_1 - C_3$: $\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y - 24 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 6x + 4y - 4 \Rightarrow 2y + 6x - 28 \Rightarrow y + 3x = 14$ $(\div 2)$

Figura 31: Exemplo de resolução incorreta

Na resposta acima, antes de simplificar, o sinal de 4y era negativo, mas o aluno trocou o sinal depois, sem motivo. A falta de atenção fez com que o aluno não chegasse na resposta correta.

Passemos a análise da questão 7. Dos oito alunos, que chegaram com chance de resolver e acertar o sistema da questão 7, sete deles chegaram ao ponto de encontro das circunferências. Dois desses, não verificaram que o ponto encontrado era o ponto de intersecção simultânea das três circunferências. A seguir, temos o enunciado da questão e a tabulação dos resultados.

Questão 7: Resolva este sistema resultante de duas equações lineares em duas incógnitas e verifique se o ponto (x, y) é o ponto de intersecção simultânea de C_1, C_2 e C_3.

A solução do sistema linear era igual a {(x ; y) = (3 ; 5)} e o ponto (3 ; 5) pertence às três circunferências dadas.

Quantidade de alunos	Análise da Resposta
07	Resolveram o sistema corretamente e chegaram ao ponto de intersecção.
01	Não chegou a resposta correta, pois copiou errado o sinal da questão 6 para a 7
20	Respostas não analisadas pois erraram a questão anterior

Dos sete que chegaram à solução correta do sistema dois não tiveram tempo de verificar, de acordo com o pedido no enunciado, se o ponto era ou não, solução simultânea da intersecção das três circunferências. Os outros cinco fizeram corretamente.

A seguir são apresentadas algumas respostas encontradas.

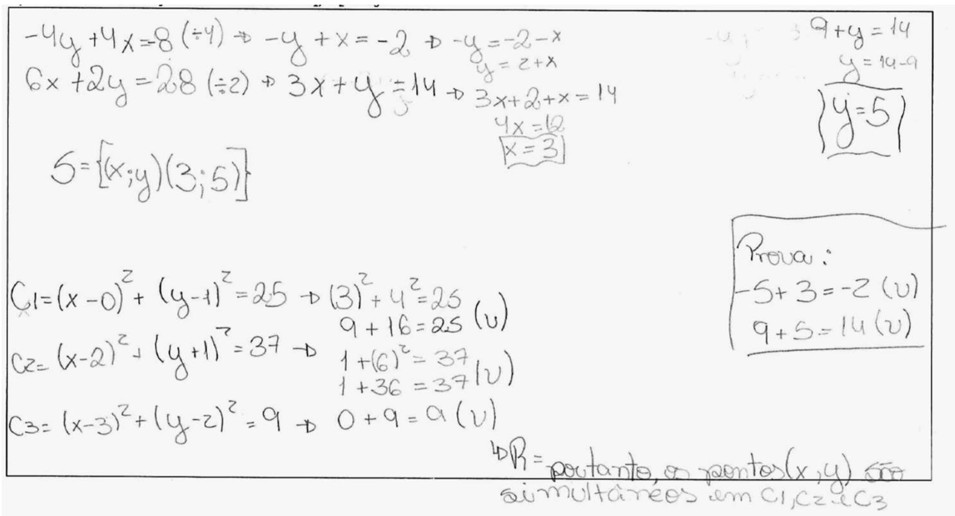


Figura 32: Exemplo de resolução correta

O aluno que errou, copiou da questão 6 para a questão 7, o número 8 com sinal errado na 1ª equação. Vejamos a resposta abaixo.

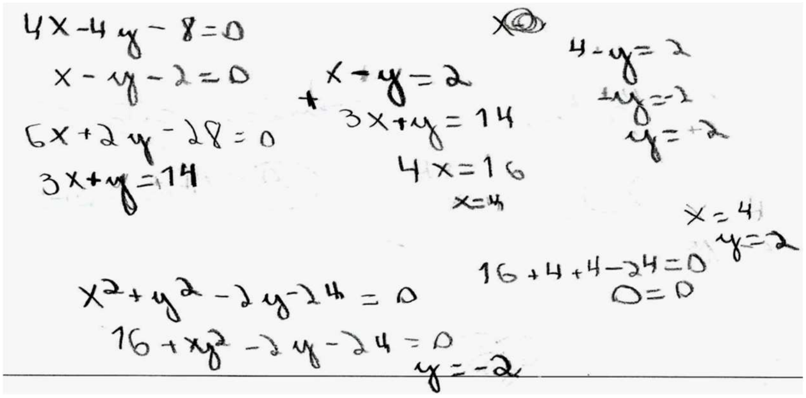


Figura 33: Exemplo de resolução incorreta

Com estas observações finalizando a análise da atividade 1.

Após um intervalo de quinze minutos, os alunos voltaram para resolver as questões da segunda atividade.

4.1.2 – Atividade 2

Em uma análise *a priori*, apesar dos alunos não terem visto alguns conteúdos (citados a seguir), esperava-se que eles não tivessem muitas dificuldades, pois eram alunos dedicados que se esforçaram para resolver outras atividades desenvolvidas durante o ano.

Mas, não foi bem assim o que aconteceu. Nessa atividade, os alunos tiveram dificuldade de enxegar espacialmente. Analisando *a posterior*, fica claro que essa atividade deveria ser apresentada aos alunos, somente após aprender os conceitos da Geometria Espacial de Posição.

Nas duas primeiras questões, o percentual de acerto foi extremamente baixo e, quando observavam figuras geométricas, alguns alunos pensavam em circunferência ao invés de esfera; isso significa que alguns chegaram a visualizar os encontros entre elas como se fossem diagramas.

Talvez, deva-se fazer a atividade em algum *software* que trabalhe geometria espacial. Como por exemplo, o GeoGebra 5.0\GeoGebra.exe que possui um sistema de coordenadas 3D.

Veja a seguir, o enunciado e a tabulação dos resultados apresentados pelos alunos nas duas primeiras questões.

<u>Questão 1</u>: Quais são as possibilidades para a quantidade de pontos de intersecção entre duas esferas? Retrate-os.

A resposta correta seria: nenhum ponto, um ponto ou infinitos pontos.

Quantidade de alunos	**Análise da Resposta**
03	Completa com as três possibilidades.
06	Esqueceram da possibilidade delas não se interceptarem
01	Não percebeu que poderia haver infinitos pontos nas intersecções
08	Responderam que haveria apenas um ponto na intersecção
02	Responderam que haveriam infinitos pontos na intersecções
07	Erraram completamente a questão

Fica claro que a maioria dos alunos interpretou que haveria pelo menos uma intersecção, já que só quatro pensaram nessa possibilidade. Por outro lado, dezoito alunos pensaram na possibilidade da tangência.

Questão 2: Quais são as possibilidades para a intersecção simultânea de três esferas?

A resposta correta seria nenhum, um, dois ou infinitos pontos que pode ocorrer nas intersecções.

Quantidade de alunos	Análise da Resposta
00	Completa com as quatro possibilidades.
04	Responderam um ou dois pontos de intersecções
13	Responderam que seria apenas uma intersecção
03	Deixaram em branco o espaço da resolução
07	Erraram completamente a questão

Questão 3: Desenhe um arranjo de quatro esferas para que o cruzamento seja um único ponto.

Quantidade de alunos	Análise da Resposta
24	Desenho correto
03	Não desenharam a resposta corretamente

Questão 4: Estude uma condição geral que garantam que quatro esferas compartilhem apenas um ponto de intersecção.

O pesquisador pediu para que os alunos não resolvessem a essa questão. O principal motivo seria a falta de tempo.

Na quinta questão, apesar da falta de visão espacial, todos entenderam o que tinha que ser feito. Mecanicamente, escreveram as equações de circunferências e apenas dois alunos colocaram a resposta no lugar errado, trocando a S_2 e S_3 de lugar. A seguir, temos o enunciado da questão e depois a tabulação dos dados.

<u>Questão 5</u>: Para esfera S_1, a equação é dada por:

$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 15)^2 = 169$. Encontre as outras equações para cada uma das outras esferas:

a) S_2: ____________________________________

b) S_3: ____________________________________

c) S_4: ______________________________________

A resposta correta é:

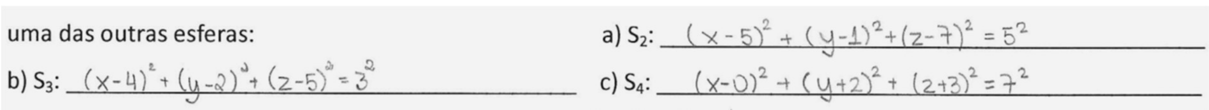
S_2: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 9$,

S_3: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z - 7)^2 = 25$ e

S_4: $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 49$

Seguem-se algumas respostas dos alunos.

Vejamos a resolução de um dos alunos que trocou S_2 e S_3 de lugar.



uma das outras esferas:

a) S_2: $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-7)^2 = 5^2$

b) S_3: $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3^2$

c) S_4: $(x-0)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 7^2$

Figura 34: Primeiro exemplo de resolução

Na folha de atividade replicada abaixo, os itens a e b levaram o aluno acima à confusão devido à diagramação.

Problema de intersecção de quatro esferas: Quatro esferas são dadas pelas seguintes características:

S_1: com centro (5, 5,15) e raio 13

S_2: com centro (4, 2, 5) e um raio 3

S_3: com centro (5, 1, 7) e raio 5

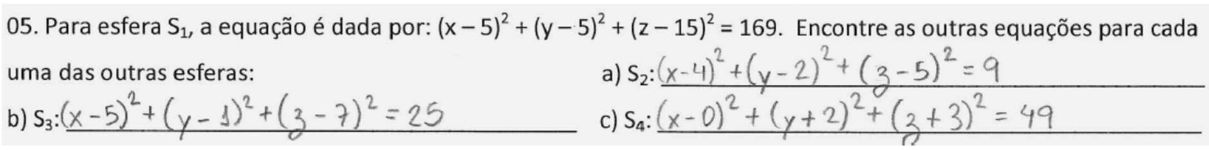
S_4: com o centro (0, -2, -3) e raio 7

05. Para esfera S_1, a equação é dada por: $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-15)^2 = 169$. Encontre as outras equações para cada uma das outras esferas: a) S_2: ________________________________

b) S_3: ________________________________ c) S_4: ________________________________

No problema, S_2 está na primeira coluna e S_3, na segunda. No quadro de resolução, eles estão invertidos, induzindo ao erro dois dos alunos.

Agora, vejamos um exemplo de uma resolução correta.



05. Para esfera S_1, a equação é dada por: $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-15)^2 = 169$. Encontre as outras equações para cada uma das outras esferas:

a) S_2: $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=9$

b) S_3: $(x-5)^2+(y-1)^2+(z-7)^2=25$

c) S_4: $(x-0)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=49$

Figura 35: Segundo exemplo de resolução

O mesmo que aconteceu na primeira atividade se repetiu nessa atividade, muitos erros de sinais nos produtos notáveis e em outras contas, atrapalharam a resolução da sexta questão.

Vejamos o enunciado e também a tabulação dos dados dessa questão.

Questão 6: Convertendo a equação para a forma geral, temos: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 30z + 106 = 0$. Encontre a equação forma geral para as outras esferas: a) S_2: ________________________________ b) S_2: ________________________________ c) S_2: ________________________________

A resposta correta é:

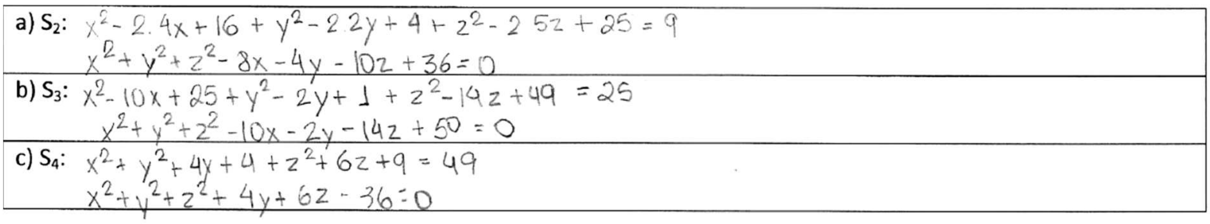
a) S_2: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 10z + 36 = 0$,

b) S_3: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y - 14z + 50 = 0$ e

c) S_4: $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 6z - 36 = 0$

Quantidade de alunos	**Análise da Resposta**
14	Chegaram à resposta correta
12	Erraram nos cálculos
01	Deixou a resposta em branco

Na resolução abaixo, o aluno mostrou o raciocínio das contas e a resposta correta.



a) S_2: $x^2 - 2.4x + 16 + y^2 - 2.2y + 4 + z^2 - 2\,5z + 25 = 9$
$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 10z + 36 = 0$

b) S_3: $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = 25$
$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y - 14z + 50 = 0$

c) S_4: $x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 49$
$x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 6z - 36 = 0$

Figura 36: Primeiro exemplo de resolução

A resolução do aluno abaixo está incompleta, os passos são precisos, mas ele não terminou.

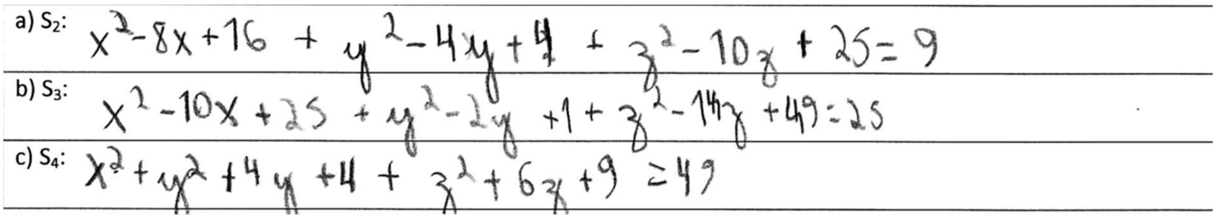


Figura 37: Segundo exemplo de resolução

Já a próxima resolução, apresenta uma falta de atenção na resolução de S_2, o aluno trocou $(z - 5)^2$ por $(z - 15)^2$.

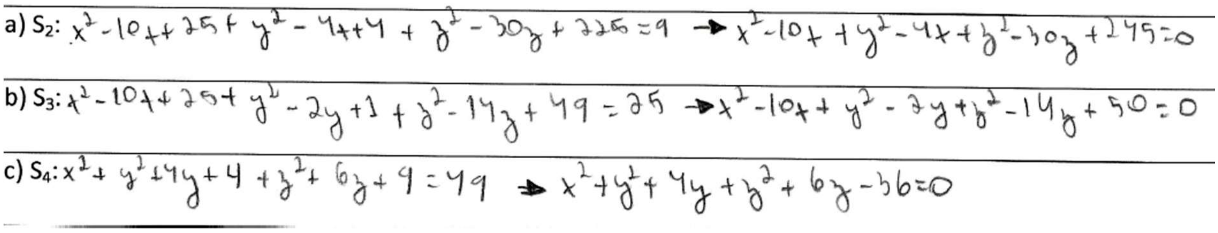


Figura 38: Terceiro exemplo de resolução

A resolução abaixo mostra que o aluno ainda não entendeu os sinais no desenvolvimento do produto notável (quadrado da soma).

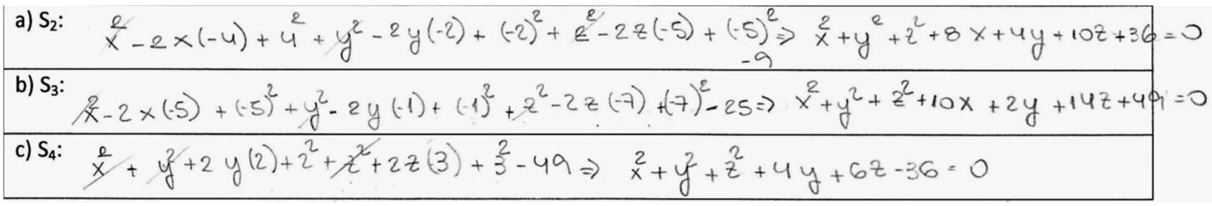


Figura 39: Quarto exemplo de resolução

Para a resolução da sétima questão, foram analisadas catorze respostas, escritas por alunos que tinham acertado o passo anterior, desses, apenas quatro alunos conseguiram concluir a resposta corretamente. Os alunos cometeram muitos erros de atenção, como será mostrado nos dois exemplos após a tabulação dos dados.

Questão 7: Subtraindo as equações das esferas em pares aparecerão equações lineares, uma vez que os termos x^2, y^2, z^2 serão eliminados. Se duas esferas se sobrepõem, elas se cruzam em um círculo, o que determina um plano.

Encontre as equações dos planos determinado subtraindo as equações das esferas dadas:

a) $P_1 = S_1 - S_2$: ______________________________________

b) $P_2 = S_1 - S_3$: ______________________________________

c) $P_3 = S_1 - S_4$: ______________________________________

A resposta correta é:

a) $P_1 = S_1 - S_2$: $-2x - 6y - 20z + 70 = 0$

b) $P_2 = S_1 - S_3$: $-8y - 16z + 56 = 0$

c) $P_3 = S_1 - S_4$: $-10x - 14y - 36z + 142 = 0$

Quantidade de alunos	**Análise da Resposta**
04	Chegaram a resposta correta
10	Erraram nos cálculos
13	Respostas não analisadas, pois erraram a questão anterior

Seguem a seguir, alguns erros cometidos pelos alunos. No primeiro exemplo, na P_2, -8y – 14z é -16z e não -14z como o aluno colocou. No segundo exemplo, por falta de atenção, na P_1, copiou errado do verso da sua folha de atividade, trocou 70 por 7.

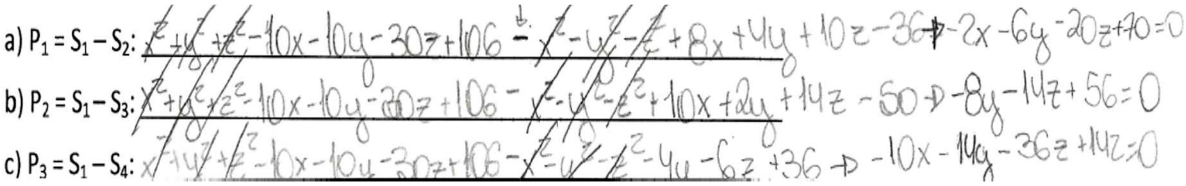


Figura 40: Primeiro exemplo de resolução

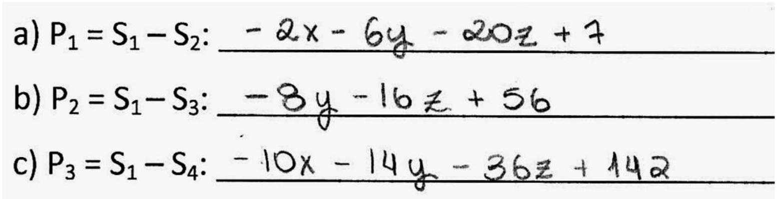


Figura 41: Segundo exemplo de resolução

Passemos agora, ao enunciado e à análise quantitativa da oitava questão.

<u>Questão 8</u>: Resolva este sistema (por qualquer método que você já tenha aprendido) resultante para encontrar o ponto de intersecção dos três planos.

A seguir, temos a análise quantitativa.

Quantidade de alunos	Análise da Resposta
02	Chegaram à resposta correta, por escalonamento
02	Erraram nos cálculos
23	Respostas não analisadas, pois erraram a questão anterior

A resposta correta é S = {(x, y, z) = (2, 1, 3)}.

Na questão 8, apenas cinco alunos tiveram suas respostas analisadas, pois os outros não chegaram à resposta correta na questão anterior. Os dois estudantes que acertaram usaram o método de escalonamento. Analisando a resolução do primeiro aluno, vemos que ele simplificou as equações antes de resolver, já o segundo aluno fez direto com os números dados.

Para maior clareza, deveria ser acrescentado na oitava questão, a verificação de que a solução do sistema é o ponto de intersecção das esferas.

São apresentadas, a seguir, alguns exemplos de resolução:

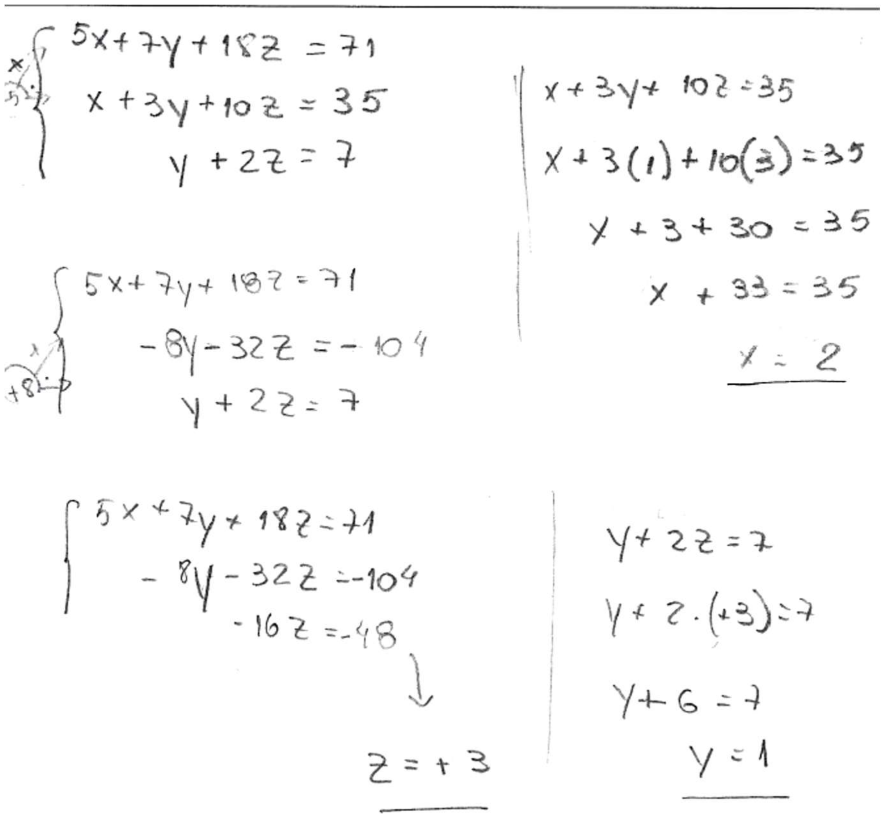


Figura 42: Primeiro exemplo de resolução

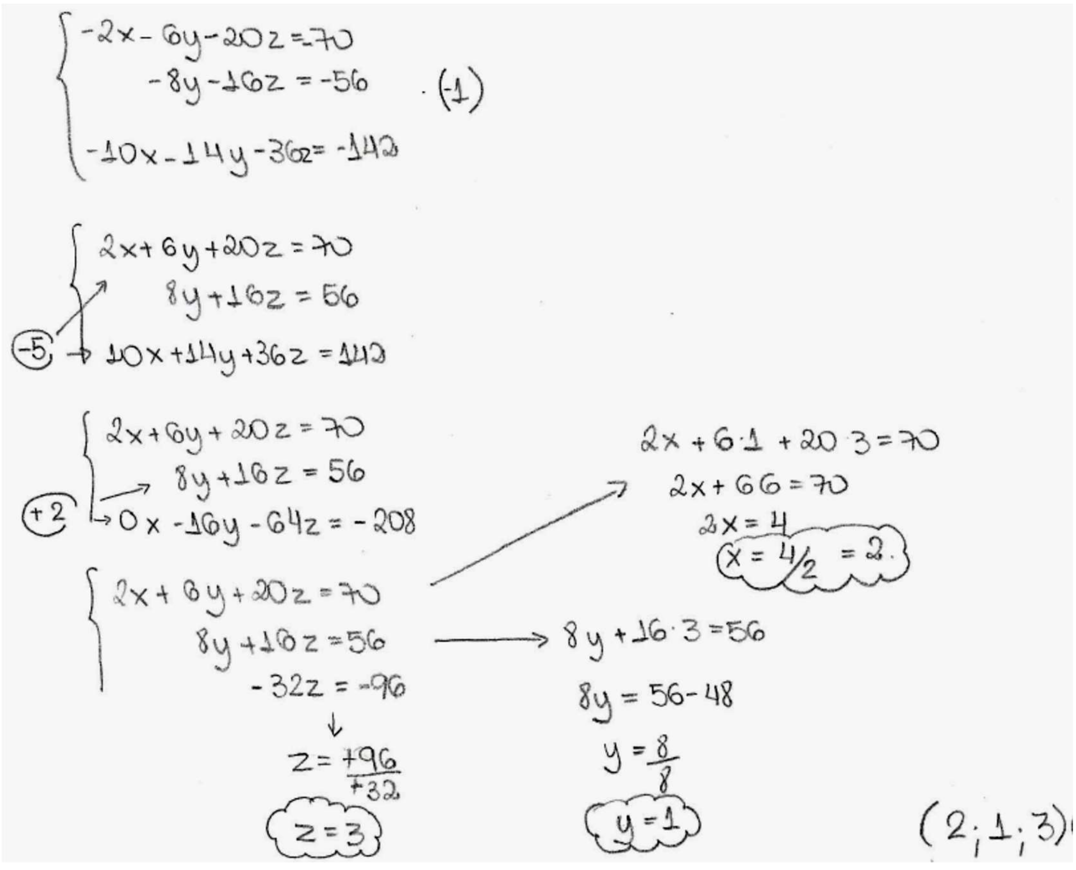


Figura 43: Segundo exemplo de resolução

A resolução a seguir, mostra que o aluno confundiu-se na resolução, substituindo, uma certa equação nela mesmo, e mais ainda, errou os cálculos.

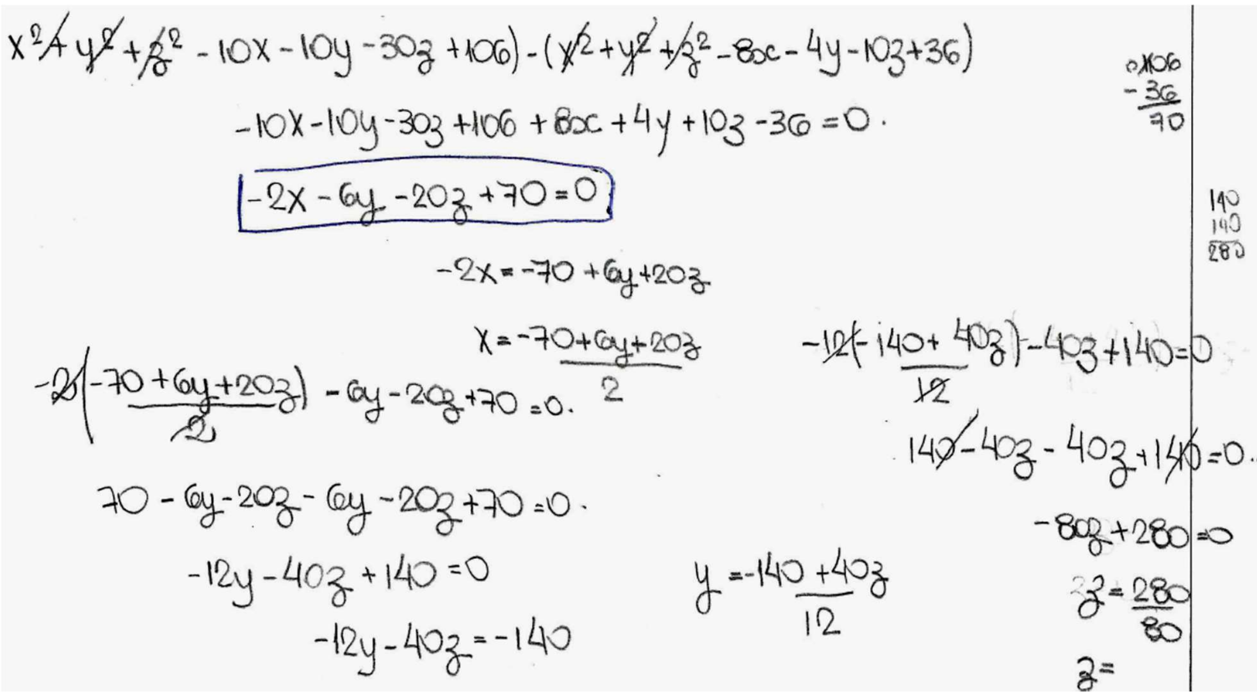


Figura 44: Terceiro exemplo de resolução (incompleta)

Já na próxima resolução, o aluno não terminou a resolução por falta de tempo.

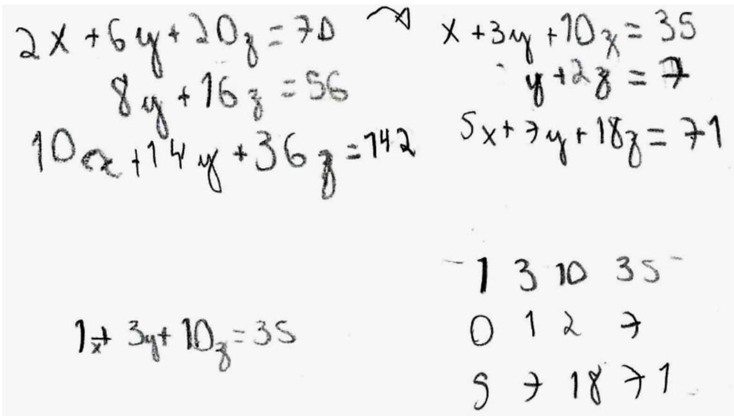


Figura 45: Quarto exemplo de resolução (incompleta)

4.1.3 – Proposta de melhoria dessa atividade

Pensando na aplicação das atividades, numa análise *a posteriori*, acreditamos que devemos reescrever as atividades de forma diferente. Apresentamos a seguir, uma sugestão de mudança de cronograma e uma proposta de novas atividades mais adequadas aos alunos e sua faixa etária.

4.1.3.1 – Proposta para atividades em aulas de 45 minutos.

Uma aula antes de começar a aplicar dessa atividade, seria importante fazer uma aula dialogada com os alunos revisando todas as posições relativas entre retas, entre retas e planos e também, entre dois planos.

Primeira aula:

Os alunos deverão responder as questões abaixo sem nenhuma informação extra. O tempo para essa resolução deve ser de, no máximo, 20 minutos.

<u>Questão 1</u>: Considerando duas circunferências distintas e coplanares, desenhe, todas as posições relativas entre elas. Indique abaixo de cada desenho, a quantidade de pontos de intersecções entre elas.

<u>Questão 2</u>: Responda: a) É possível que três circunferências distintas e coplanares passem pelo mesmo ponto? b) E por dois pontos distintos? Em que situações isso ocorre? Retrate-as.

Após a resolução e entrega das respostas, o professor deverá no tempo restante da aula, responder às duas questões, abrir a discussão para que os alunos levantem as suas respostas e analisar possíveis respostas diferentes dadas pelos alunos.

Segunda aula:

Esta atividade é proposta supondo que os alunos tenham apreendido Geometria Analítica, principalmente, a determinação da equação de uma circunferência, conhecidos centro e raio. Os alunos terão, no máximo 15 minutos para responder as três próximas questões.

01. Dê a equação das circunferências, usando o formulário de centro-raio, determinada por:
C_1: centro (0 , 1) e raio 5 Resposta: $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$, ou ainda, $x^2 + (y - 1)^2 = 25$
C_2: centro (2 , -1) e raio $\sqrt{37}$. Resposta:
C_3: centro de (3, 2) e raio 3 Resposta:

02. Reescreva as equações de C_1(já feito), C_2 e C_3 na forma geral.
C_1: $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$
C_2:
C_3:

Nas próximas linhas desse formulário utilizaremos as formas gerais da equação da circunferência. Equações lineares serão geradas, subtraindo as equações da circunferência, uma vez que os termos em x^2 e y^2 serão eliminados por subtração. Duas circunferências sobrepostas geram dois pontos de intersecção e dois pontos distintos determinam uma única reta.

03. Encontre as equações das linhas determinada subtraindo as equações dos círculos dados:
a) $L_1 = C_1 - C_2$: Resposta:
b) $L_2 = C_1 - C_3$: Resposta:

Consideremos fundamental apresentar as respostas esperadas das questões anteriores e reforçar a importância dos cálculos e sinais, fazer uma análise das respostas dadas pelos alunos em aproximadamente 15 minutos. Na sequência, pedir para que os alunos resolvam a última questão dessa atividade com as equações corretas.

07. Resolva este sistema resultante de duas equações lineares em duas incógnitas e verifique se o ponto (x, y) é o ponto de intersecção simultânea de C_1, C_2 e C_3.

Terceira aula:

Discutir com os alunos, em no máximo 10 minutos, o resultado da última questão da atividade anterior e, em seguida, pedir para que resolvam as três próximas questões:

01. Quais são as possibilidades para a quantidade de pontos de intersecção entre duas superfícies esféricas? Retrate-os.

02. Quais são as possibilidades para a intersecção simultânea de três superfícies esféricas? Retrate-as.

03. Desenhe um arranjo de quatro superfícies esféricas para que o cruzamento seja um único ponto.

É importante que os alunos saibam os conceitos de Geometria Espacial de Posição para responder essas três questões. O tempo máximo para resolver essas questões deve ser de aproximadamente 20 minutos.

No restante do tempo, o professor deverá discutir os resultados encontrados pelos alunos nessas três questões.

Quarta aula:

Durante aproximadamente 20 minutos e utilizando o Teorema de Pitágoras, o paralelepípedo reto retângulo, um sistema de coordenadas xyz; sugerimos mostrar como determinar a equação de uma superfície esférica.

Após essa primeira parte, pedir para que no restante da aula os alunos resolvam as questões a seguir:

Problema de intersecção de quatro superfícies esféricas:

Quatro esferas são dadas com as seguintes características:

S_1: com centro (5, 5,15) e raio 13;

S_2: com centro (4, 2, 5) e um raio 3;

S_3: com centro (5, 1, 7) e raio 5 e

S_4: com o centro (0, -2, -3) e raio 7

01. Para a superfície esférica S_1, a equação é dada por: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 15)^2 = 169$. Encontre as outras equações para cada uma das outras superfícies esféricas:
a) S_2:
b) S_3:
c) S_4:

02. Convertendo a primeira equação para a forma geral, temos: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 30z + 106 = 0$. Encontre a equação forma-geral para as superfícies esféricas:
a) S_2:
b) S_3:
c) S_4:

03. Subtraindo as equações das esferas em pares aparecerão equações lineares, uma vez que os termos x^2, y^2, z^2 serão eliminados. Se duas superfícies esféricas se intersectam, elas se cruzam em uma circunferência, o que determina o plano que as contém. Encontre as equações dos planos determinados desta maneira, subtraindo as equações das esferas dadas:
a) $P_1 = S_1 - S_2$:
b) $P_2 = S_1 - S_3$:
c) $P_3 = S_1 - S_4$:

Quinta aula:

Discutir os resultados encontrados até aqui e na sequência, apresentar as equações lineares com dados corretos da terceira questão da atividade anterior. Pedir para que os alunos resolvam o sistema linear com essas equações.

Questão: Resolva este sistema obtido (por qualquer método que você já tenha aprendido) para encontrar o ponto de intersecção dos três planos.

Sexta Aula:

O professor deverá apresentar a resolução do sistema linear anterior e sugerimos utilizar o GeoGebra 3D. Abra o GeoGebra e siga o seguinte roteiro:

1º Clique em EXIBIR e escolha a JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D;

2º Para desenhar as esferas, vá ao campo ENTRADA que fica na parte inferior esquerda e digite a equação das quatro esferas que serão denominadas a, b, c e d. Por exemplo, para desenhar a esfera a de centro (5; 5; 15) e raio 13, entre com a equação (x – 5)^2 + (y – 5) ^2 + (z – 15)^2 = 169 e clique em ENTER:

3º Após escrever as quatro equações e desenhá-las, clique na equação com o botão direito do mouse e troque a cor das esferas;

4º Na 14ª janela do MENU, denominada GIRAR JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D, você pode, utilizando o mouse virar a figura para melhor visualização;

5º Na 7ª janela do MENU, clique e INTERSEÇÃO DE DUAS SUPERFÍCIES para encontrar as cônicas e, f e g que são as interseções respectivas de a com b, de a com d. Por exemplo, clique na esfera a, na esfera b e na 7ª janela para desenhar a cônica e;

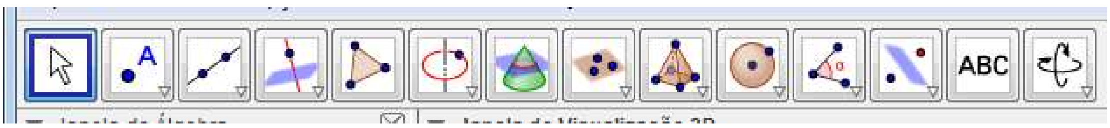
6º Desmarque a, b, c e d e deixe apenas as cônicas e, f e g;

7º Se necessário, repita a orientação em 3º);

8º Clique na 2ª janela do MENU, denominada INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, após clicar em e e f , para determinar os pontos A e B. Repetindo o processo, encontramos os pontos C e D para interseção de e e f, e ainda, E e F para interseção de f e g.

9º) Três dos pontos serão iguais (2;1;3) que será a solução do sistema.

Abaixo, segue o Menu utilizado no roteiro acima.



No Anexo 3, segue o resultado da aplicação desse roteiro. Na sequência, o professor pode resolver por algum dos métodos trabalhados.

Sétima Aula:

Nessa aula, o professor deverá, através de *slides*, apresentar o funcionamento e a história do GPS. Sugerimos utilizar os *slides* de 1 a 11, já citados nesse capítulo.

Em seguida, retomar o sistema da aula 5 e mostrar os *slides* de 12 a 16, demonstrando o Teorema central dessa dissertação.

Teorema: *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros não estão no mesmo plano, então a intersecção sempre será um único ponto.*

Verificar que o ponto encontrado é o ponto de encontro das quatro superfícies esféricas dadas.

Oitava Aula:

Mostrar os outros *slides* e terminar a apresentação. No final, cada aluno deve entregar um comentário, avaliando a atividade realizada, destacando, principalmente sua compreensão de como a Matemática está intimamente ligada à tecnologia.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO:

Em relação ao Currículo do Estado de São Paulo para a Matemática e suas Tecnologias, na sua 1ª edição atualizada em 2012, o Colégio 1 apresenta apenas uma inversão de conteúdos. O conteúdo Geometria Espacial é trabalhado na 3ª série do Ensino Médio, ao invés de no 4º bimestre da 2ª série. Há vários limitadores que influenciam no processo de ensino/aprendizagem.

Apesar da ideia de trabalho ser feita sempre em relação às competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos é necessário também completar todo o conteúdo previsto para o Ensino Médio. O currículo é extenso e o tempo necessário para aprendizado de cada conteúdo não é tão grande.

O ideal seria que pudéssemos trabalhar os currículos com mais calma, com tempo para aplicar várias atividades motivadoras e empíricas, mas em escolas com quatro aulas semanais de matemática é quase impossível. No Colégio 1, são cinco aulas semanais de Matemática, o que propicia o desenvolvimento de situações de aprendizagem, como a que se refere esta dissertação.

As atividades propostas foram aplicadas em aproximadamente três aulas e meia, ela poderia ser melhorada se o tempo fosse ampliado. O trabalho teria um resultado melhor se fossem aplicadas segundo a proposta descrita em 4.1.3.1, pois todos teriam condições de resolver os dois sistemas lineares que aparecem nas atividades e concluir a essência desse trabalho (unicidade da localização de qualquer posição no globo terrestre por meio de sinais de satélites).

É evidente que temos um grande problema, pois se fizéssemos isso a atividade levaria oito aulas, mais do que o dobro da aplicação feita, o que diminuiria o tempo de trabalho em algum outro conteúdo.

O PROFMAT me fez repensar mais os conteúdos trabalhados em sala de aula para as diversas escolas que leciono e principalmente a forma que eles devem ser trabalhados. Um exemplo foram as atividades descritas nesta dissertação.

Complementarmente, vários objetivos secundários foram alcançados, como por exemplo:

- A observação da interação entre Geometria e Álgebra, que será um grande motivador para conteúdos novos;
- a necessidade de analisar as posições relativas entre figuras geométricas de maneira mais completa;
- a importância de fazer os cálculos de modo mais preciso e sem erros;
- o protagonismo dos alunos em relação à construção do conhecimento;

Além disso, conseguimos aplicar os conteúdos sistemas lineares e sistemas não lineares nos problemas tecnológicos do nosso tempo, tanto na resolução deles, quanto na análise de classificação desses sistemas.

A atividade melhorada, proposta em 4.1.3.1, seria ideal, pois os alunos construiriam o conhecimento mais efetivamente. No modelo aplicado, muitas das questões eram pré-requisitos para outras e, com isso, alguns alunos se perderam. Outros alunos só foram entender o objetivo principal na atividade três, na explanação do professor.

Outro ponto importante a destacar: se essa atividade fosse feita em parceria com os professores de Geografia e de Física, os alunos poderiam aprender muito mais. Além disso, ela deveria ser feita para alunos do 3º ano do Ensino Médio, durante o desenvolvimento da Geometria Analítica.

A pergunta feita no início dessa dissertação era: " O estudo da tecnologia ligada ao GPS pode efetivamente contribuir para a melhoria do processo de ensino aprendizagem de alunos no Ensino Médio?".

A resposta para tal pergunta é afirmativa, pois conseguimos desenvolver e mostrar a aplicação de vários conceitos nas atividades. Eis alguns pontos que merecem destaque:

- Proporcionalidade: velocidade, tempo, distância e função linear;
- Sistemas Lineares: utilização dos métodos de resolução e classificação dos sistemas lineares;
- Sistemas não-lineares: definição e método de resolução por simplificação;

- Determinantes de matrizes: utilização no entendimento das demonstrações;
- Trigonometria plana e esférica no triângulo retângulo: cálculos utilizados na determinação de latitude, longitude, elevação de um ponto sobre o planeta e, ainda, no cálculo da área de visualização do planeta a partir de um dos satélites;
- Geometria Espacial: definição de Esfera e Superfícies Esféricas, com seus elementos.
- Geometria Analítica: retas, introdução às equações de circunferências. O assunto Geometria Analítica Espacial não é trabalhado no Ensino Médio e os alunos puderam ter um contato preliminar com ele.

O objetivo principal desse trabalho foi alcançado, pelos itens levantados anteriormente e também por tratarmos de GPS que é um assunto que desperta muita atenção por parte dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS:

ALMOULOUD, S. A; COUTINHO, C. Q. S., **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPed**, 2008

Alves, Sergio. **A Geometria do globo terrestre**. IME/USP, in Apostila PIC OBMEP disponível em www.obmep.org.br/docs/apostila6.pdf

BRASIL. Recomendações para levantamentos Relativos Estatísticos – GPS – IBGE – abril, 2008

FIGUEIRÊDO, D. C. **Curso Básico de GPS**. Setembro de 2005. Disponível em: http://www.leb.esalq.usp.br/disciplinas/Topo/leb450/Angulo/Curso_GPS.pdf. Acesso em 06/10/2015.

Gail D. Nord, David Jabon and John Nord Source: **The Mathematics of the Global Positioning System** The Mathematics Teacher, Vol. 90, No. 6 (SEPTEMBER 1997), pp. 455-462, 469-470Published by: National Council of Teachers of MathematicsStable.

MIGUENS, A. P.; **Navegação: Ciência e arte – Navegação eletrônica e em condições especiais – Capítulo 37: Navegação por satélites.** 2000

MONICO, J.F.G., **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS Descrição, fundamentos e aplicações 1.** Ed. Presidente Prudente. Editora UNESP, 2000

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. **Matemática e atualidade volume 1,** tradução de Miguel V. S. Frasson, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. **Mathematics and Technology, Springer undergraduate texts in mathematics and technology, springer,** New York, 2008.

SALVADOR, J. A.; SAMPAIO, J. C. V., **"Sobre a matemática das medidas no Planeta Terra: dos gregos às novas tecnologias".** Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM) 15-19 de julho de 2013, UFSCar, São Carlos, SP, Brasil. 2013. Acesso em 10/05/2015

VÍDEOS:

As aventuras do Geodetetive 6. Matemática Multimídia - Unicamp

The Mathematics of the Global Positioning System

Física às 19 horas (USP – São Carlos) – Palestrante Dr. Paulo Murilo de Castro (UFF-Física) http://www.ifsc.usp.br/index.php?option=com_content&view=article&id=1540:ciencia-as-19-horas-qcomo-funciona-o-gps-e-o penduloq&catid=4:eventos&Itemid=225 em 09/04/2013

Sites da Internet

http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/The_future_-_Galileo/Galileo_a_constellation_of_30_navigation_satellites com acesso em 17 de Julho de 2015.

http://www.gps.gov/applications/ com acesso em 10/05/2015.

http://www.gps.gov/systems/gps/control/ com acesso em 10/05/2015.

http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus. Com acesso em 10/05/2015.

http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b.html com acesso em 10/05/2015.

http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b2.html com acesso em 10/05/2015.

http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b3.html com acesso em 10/05/2015.

http://oceanservice.noaa.gov/education/kits/geodesy/media/supp_geo09b4.html com acesso em 10/05/2015.

ANEXO 1: ATIVIDADE 1: CIRCUNFERÊNCIAS

PROFESSOR/PESQUISADOR:	**MARCELO C. DE MORAES**	**DATA: 05/11/2014**
2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO	**ASSUNTO: G. P. S.** ***ATIVIDADE 1: CIRCUNFERÊNCIAS***	

01. Quais são as possibilidades para o número de pontos de intersecção de duas circunferências em um plano? Resposta:

Retrate-as.

02. Quais são as possibilidades para o número de pontos de intersecção simultânea para as três circunferências em um plano? Resposta:

Retrate-as.

03. Estude uma condição geral sobre três circunferências que garanta que elas compartilhem apenas um ponto de intersecção.

04. Dê a equação das circunferências, usando o formulário de centro-raio, determinada por:

C_1: centro (0 , 1) e raio 5 $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 5^2$, ou ainda, $x^2 + (y-1)^2 = 25$

C_2: centro (2 , -1) e raio $\sqrt{37}$. ____

C_3: centro de (3, 2) e raio 3 ____

05. Reescreva as equações de C_1(já feito), C_2 e C_3 na forma geral.

C_1: $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$

C_2: ____

C_3: ____

Nas próximas linhas desse formulário utilizaremos as formas gerais da equação da circunferência. Equações lineares serão geradas, subtraindo as equações da circunferências, uma vez que os termos em x^2 e y^2 serão eliminados. Duas circunferências sobrepostas geram dois pontos de intersecção e dois pontos distintos determinam uma única reta.

06. Encontre as equações das linhas determinado subtraindo as equações dos círculos dados:

a) $L_1 = C_1 - C_2$: ____

b) $L_2 = C_1 - C_3$: ____

07. Resolva este sistema resultante de duas equações lineares em duas incógnitas e verifique se o ponto (x, y) é o ponto de intersecção simultânea de C_1, C_2 e C_3.

ANEXO 2: ATIVIDADE 2: ESFERAS

PROFESSOR/PESQUISADOR:	**MARCELO C. DE MORAES**	**DATA:05/11/2014**
2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO	**ASSUNTO: G. P. S.** ***ATIVIDADE 2: ESFERAS**** *** Nessa atividade, quando for dito ESFERA, estamos nos referindo a superfície esférica.**	

01. Quais são as possibilidades para a quantidade de pontos de intersecção entre duas esferas? Retrate-os.

02. Quais são as possibilidades para a intersecção simultânea de três esferas?

03. Desenhe um arranjo de quatro esferas para que o cruzamento seja um único ponto.

04. Estude uma condição geral que garantam que quatro esferas compartilhem apenas um ponto de intersecção.

<u>Problema de intersecção de quatro esferas:</u> Quatro esferas são dadas pelas seguintes características:

S_1: com centro (5, 5,15) e raio 13

S_2: com centro (4, 2, 5) e um raio 3

S_3: com centro (5, 1, 7) e raio 5

S_4: com o centro (0, -2, -3) e raio 7

05. Para esfera S_1, a equação é dada por: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 15)^2 = 169$. Encontre as outras equações para cada uma das outras esferas: a) S_2: ___________________________________

b) S_3: _______________________________________ c) S_4: ____________________________________

06. Convertendo a equação para a forma geral temos: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 30z + 106 = 0$.

Encontre a equação forma-geral para as outras esferas:

a) S_2:
b) S_3:
c) S_4:

07. Subtraindo as equações das esferas em pares aparecerão equações lineares, uma vez que os termos x^2, y^2, z^2 serão eliminados. Se duas esferas se sobrepõem, elas se cruzam em um círculo, o que determina um plano.
Encontre as equações dos planos determinado subtraindo as equações das esferas dadas:

a) $P_1 = S_1 - S_2$: ____

b) $P_2 = S_1 - S_3$: ____

c) $P_3 = S_1 - S_4$: ____

08. Resolva este sistema (por qualquer método que você já tenha aprendido) resultante para encontrar o ponto de intersecção dos três planos.

ANEXO 3: GeoGebra – resolução da questão 8 da atividade 2

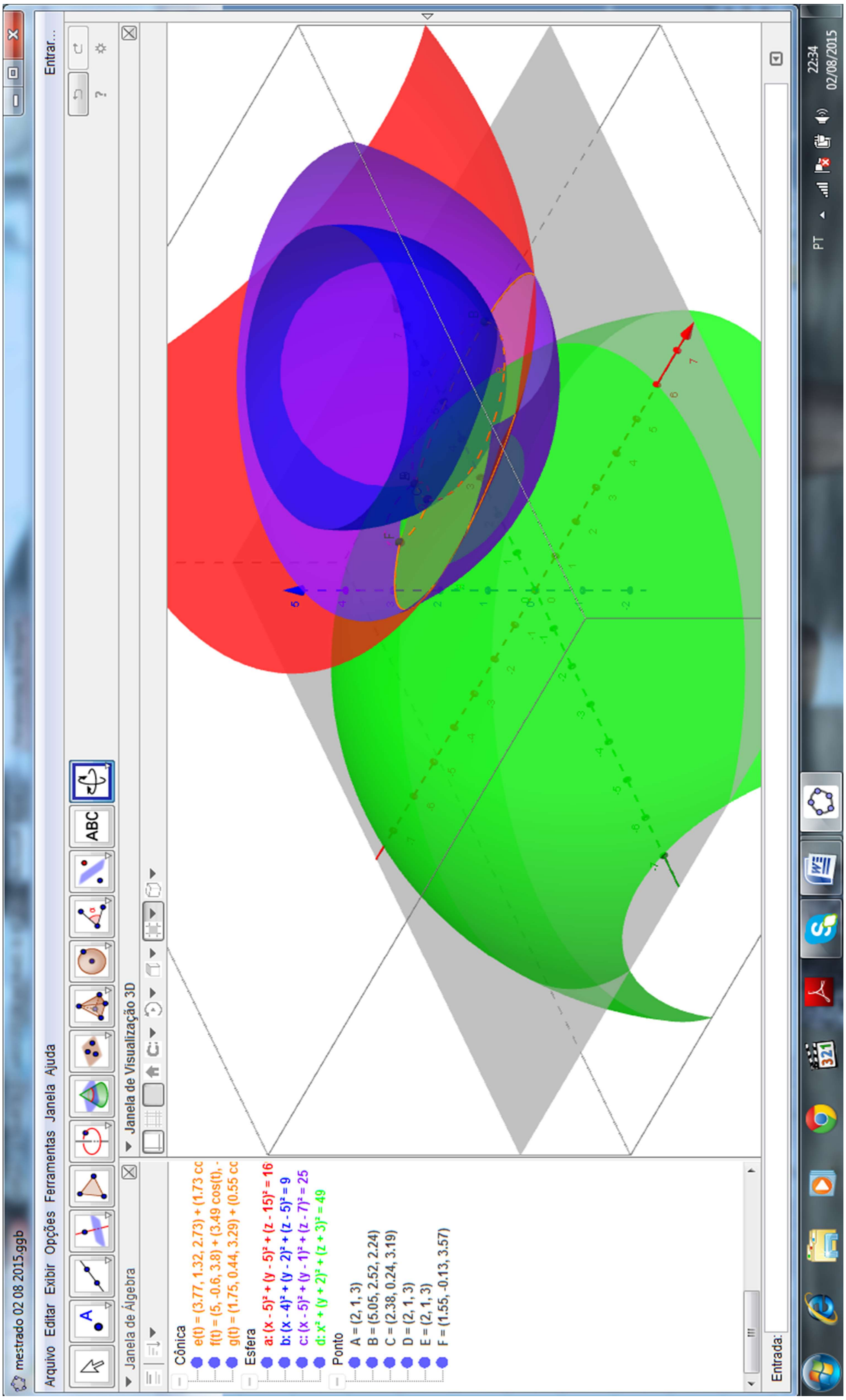


Figura 46: GeoGebra (Esferas)

ANEXO 4: GeoGebra – resolução da questão 8 da atividade 2

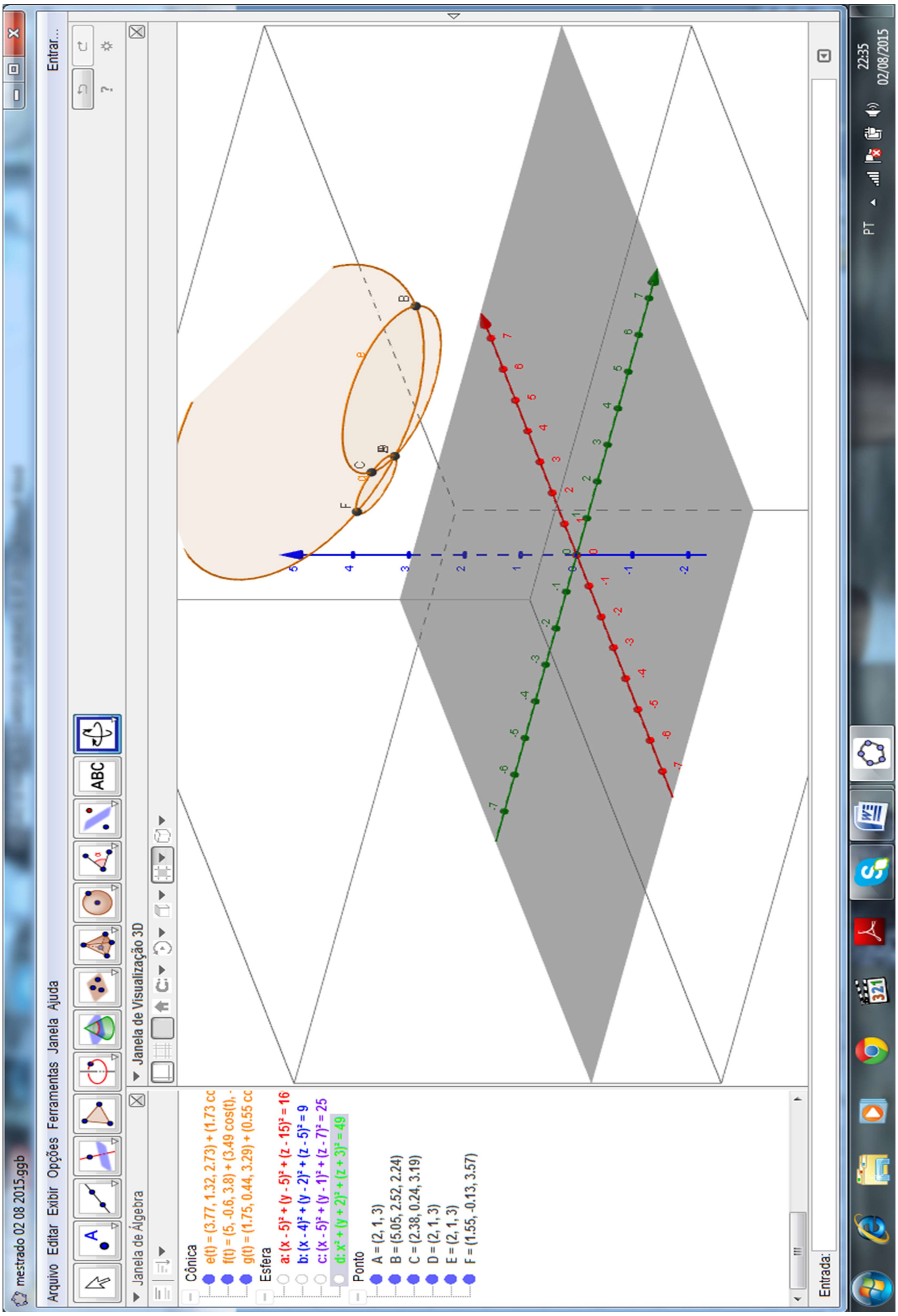


Figura 47: GeoGebra (Cônicas)