UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

UTILIZANDO O MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Diego Suzano Ferreira Jacinto

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UTILIZANDO O MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

DIEGO SUZANO FERREIRA JACINTO

Sob a Orientação do Professor

André Luiz Martins Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Seropédica, RJ

Junho de 2015

UFRRJ / Biblioteca Central / Divisão de Processamentos Técnicos

515.107
J12u
T

Jacinto, Diego Suzano Ferreira, 1984-

Utilizando o material concreto para o ensino de análise combinatória / Diego Suzano Ferreira Jacinto. – 2015.

77 f.: il.

Orientador: André Luiz Martins Pereira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Bibliografia: f. 74-77.

1. Análise combinatória – Estudo e ensino - Teses. 2. Construtivismo (Educação) – Teses. 3. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 4. Material didático – Teses. I. Pereira, André Luiz Martins, 1980- II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Pós-Graduação em em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

Agradecimentos

A minha futura esposa Josana, sem a qual não teria ingressado no meu curso de mestrado e que tanto contribuiu para minha pesquisa. Esta que sempre esteve ao meu lado nos momentos bons e ruins, me incentivando a superar mais esta etapa da minha vida.

Agradeço aos meus Pais, Marli e Plautidio, que me educaram e me ensinaram com amor, carinho e respeito. Não posso expressar toda essa gratidão, tudo o que posso fazer é repassá-la a meus futuros filhos.

Aos professores da Universidade Federal Rural pela dedicação com todos os mestrandos e aos colegas professores que, apesar da distância sempre estavam dispostos pra ajudar durante todo o curso.

A professora Aline Maurício pela orientação minuciosa durante a construção dos projetos de pesquisa, e ao professor orientador André Luiz, pela orientação, paciência e apoio durante toda a construção desta dissertação.

Resumo

Este trabalho pretende apresentar e avaliar uma proposta de ensino de análise combinatória, baseada no uso de materiais concretos, a qual esperamos ser relevante no aprendizado deste conteúdo. Para isto, será apresentado um material bem ilustrado e manipulativo, onde o educando terá a oportunidade de observar e construir possibilidades, de dispor os elementos dentro de problemas reais. Esta pesquisa usará como fundamento, a teoria construtivista, em que nesta concepção, o desenvolvimento do aluno se dará pelas relações entre suas construções, observações, e em suas ações perante a situação problema proposta. Este trabalho será construído em partes, onde inicialmente apresentaremos a teoria construtivista e sua influência na educação, os estudos realizados para a construção do material didático, seguida dos conceitos teóricos pertinentes à análise combinatória e por último, as avaliações realizadas por questionário para apresentar os resultados das atividades aplicadas, comprovando a eficiência da proposta.

Palavras-chaves: análise combinatória, teoria do construtivismo, educação, materiais concretos.

Abstract

This paper aims to present and evaluate a combinatorial analysis of teaching proposal, based on the use of concrete materials, which we hope to be relevant in this learning content. For this, you'll see a well illustrated and manipulative material, where the student will have the opportunity to observe and build possibilities, to have the elements within real problems. This research will use as a basis, the theory of constructivism, in which this conception, the development of the student will be given by the relationship between its buildings, observations, and in their actions before the situation problem proposal. This work will be built in parts, which initially will present the constructivist theory and its influence on education, studies for the construction of teaching materials, followed by theoretical concepts relevant to combinatorial analysis and finally, the evaluations conducted by questionnaire to present the results the activities implemented, proving the proposed efficiency.

Keywords: combinatorial analysis, constructivism theory, education, concrete materials.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os métodos de contagem surgiram há muitos séculos em problemas que tornaram-se históricos por serem extremamente difíceis de se obter conclusões devido às variadas possibilidades que estes apresentavam. Tais problemas influenciaram vários pensadores na possibilidade de se obter artifícios que pudessem enumerar todos os resultados.

A análise combinatória teve origem no estudo dos chamados “jogos de azar”, que eram jogos relacionados a lançar dados ou com o uso de cartas. Nestes jogos, a habilidade dos jogadores dependia exclusivamente do acaso, ou mesmo do fator “sorte”. O desenvolvimento dos conceitos utilizados nas contagens, e aplicadas à probabilidade provinda desses jogos impulsionou muitos matemáticos a estudarem as teorias da contagem.

Atualmente, os conceitos combinatórios possuem inúmeras funcionalidades, que permitem ao homem fazer cálculos e ter importantes noções sobre probabilidades, possibilidades de construções, confecção de materiais eletrônicos e outros, permitindo que se consigam formas de obter a maior eficiência possível, ou ainda realizar uma tarefa com o menor custo.

O aprendizado dos conceitos de análise combinatória é um grande desafio para professores e alunos. Os métodos de ensino tradicionais sobre os conceitos de contagem, são baseados na abstração e na exemplificação de problemas. Um aprendizado mais eficiente precisa fazer o aluno desenvolver formas de raciocínio com maior clareza.

O interesse em trabalhar e pesquisar neste tema surgiu logo após a minha entrada no magistério onde pode-se constatar a enorme dificuldade existente, não só por parte dos alunos, mas também de professores quanto ao conteúdo referente aos conceitos de combinatória. Observa-se também, a falta de artigos e materiais didáticos relevantes para este fim, motivando assim elaboração deste trabalho.

Como se sabe, a infraestrutura das escolas, na grande maioria das regiões brasileiras, é deficiente , não permitindo o uso de recursos tecnológicos, como aulas *online* e uso de *softwares* educativos. Outro problema que surge no ensino de análise combinatória é a diminuta quantidade de *software* educativos que abordam esse assunto; basta comparar a quantidade de *softwares* existentes para o estudo de funções e de geometria com a quantidade de *softwares* de análise combinatória.

De acordo com a teoria construtivista, o saber é construído perante a interação do ser com o objeto de estudo. Assim, permitir ao aluno visualizar e manipular o seu problema para construir sua resposta poderá ser uma ótima alternativa para superar dificuldades. Deste modo, propomos que a utilização de material concreto (uso de pinturas, formas de construções com ênfases visuais, manipulação de objetos) para o ensino de análise combinatória terá impacto positivo na compreensão do conceito.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método alternativo para o ensino da análise combinatória e avaliá-lo quanto a sua eficiência. Busca-se também estimular a adoção dessa prática por professores do Ensino Médio, e incentivar esses docentes a pesquisar outras alternativas pedagógicas para os diferentes campos do ensino da matemática.

Em consonância com a teoria construtivista, será feito um planejamento de aulas com aplicações de atividades focadas no uso do concreto e com a construção dos conceitos de análise combinatória a serem realizadas pelos alunos, com a devida orientação e estimulação do professor. Estas atividades serão focadas ao ensino dos conceitos de permutação, arranjo, combinação e princípio multiplicativo. Após serem realizadas, será avaliada a proposta em questionário comparando turmas do ensino tradicional com a turma que realizou o planejamento proposto.

Espera-se que tal contribuição possa ser útil para uma reflexão pedagógica em sala de aula dos atuais e futuros professores, incentivando o debate e a participação dos alunos dentro do processo de aprendizagem.

A busca por novas alternativas mais eficientes é um estudo constante que educadores devem realizar durante toda a carreira. A partir destes estudos que abrem-se as portas para uma profunda mudança no sistema educacional das escolas brasileiras e consequente melhoria do ensino.

Capítulo 1 - História do Construtivismo

1.1. Origens do Construtivismo

Construtivismo é uma corrente teórica surgida no século XX, que diz que o conhecimento é algo que está em constante expansão, ou seja, nada está terminado ou construído completamente. De acordo com esta teoria, o conhecimento é algo formado pela interação entre o ambiente e o meio social. Em síntese, o homem não nasce com habilidades específicas, mas as desenvolve de acordo com o que possui contato, o que pode observar, com o que interage e manipula concretamente.

O início do Construtivismo é atribuído a dois autores que são considerados os precursores: Piaget e Vygotsky. Ambos realizaram estudos em que afirmaram que o conhecimento é constituído pelas relações entre sujeito e objeto (Piaget), ou pelo sujeito e o contexto social em que vive (Vygotsky). A partir de suas pesquisas, se desenvolveram novas formas de análise do comportamento cognitivo humano nos campos da psicologia.

Por realizarem grande parte de suas pesquisas a respeito do desenvolvimento do aprendizado em crianças, as teorias destes autores impulsionaram fortemente a área da educação, desenvolvendo a criação de novas práticas pedagógicas originando o chamado “ensino Construtivista”. É importante deixar bem claro que o Construtivismo não é um método de ensino propriamente dito, mas sim uma concepção sobre como irá se construir o aprendizado nas escolas.

Educadores adeptos desta teoria buscam propor uma interação mais efetiva entre o aluno e o objeto de estudo em sala de aula, proporcionando o debate, a análise crítica e aprimorando os conceitos ao invés de colocá-los “prontos à mesa”. O aluno não é tratado como um recipiente vazio e nem o professor como um detentor do conhecimento, esta relação é formada como um ser em construção (o aluno) e um orientador desse processo (professor).

Para isto, ocorrer de modo eficiente se fazem necessários alguns elementos como; a análise cognitiva dos indíviduos, o reconhecimento de aprendizados anteriores, recursos pedagógicos e ambientes propícios para a prática educacional. Atualmente, onde se encontra fortemente a influência do Construtivismo no Brasil é na alfabetização infantil, que durante a década de 80 sofreu fortes mudanças impulsionadas principalmente pelas obras da psicolinguista argentina Emilia Ferreiro, que originou novas mudanças nas normas curriculares propostas pelo governo.

Outro importante destaque na área da educação, principalmente no ensino de jovens e adultos, foi o brasileiro Paulo Freire, que criou importantes obras que retratam o papel da educação e suas funções sociais e políticas. Apesar do seu nome não estar fortemente ligado ao construtivismo, suas obras e trabalhos na área da educação enfatizam a importância do professor em estimular o aluno a desenvolver práticas pedagógicas que o libertem do modelo tradicional e o incentivem a participar do seu meio social.

A seguir serão descritos alguns destes importantes autores e suas importantes contribuições, que impactaram drasticamente nos modelos de educação da época, geraram críticas e confrontos à sociedade e governos, e possibilitaram o surgimento de inúmeros campos de pesquisa ao longo dos anos no Brasil e no mundo.

1.2. Principais nomes do Construtivismo

Jean Piaget (1896-1980)

(Foto retirada do site: http://www.infoescola.com/pedagogia/metodo-de-educacao-piagetiano/)

Jean Piaget foi um biólogo e filósofo nascido em Neuchâtel, na Suiça. Sua principal obra foi a Teoria da Epistemologia genética (PIAGET, 1990). Seus estudos revolucionaram a área da educação e originaram o que se chama atualmente como a “Teoria do Construtivismo”.

Partindo dos conceitos preexistentes sobre a adaptação biológica dos seres vivos, Piaget aplicou esta teoria em análise ao desenvolvimento cognitivo do ser humano, principalmente na faixa infantil. Seus estudos analisaram o desenvolvimento da criança, desde o seu nascimento até a adolescência, concluindo que o conhecimento é construído nas interações do sujeito com o ambiente em que vive.

Segundo Piaget, o processo natural de adaptação do organismo pode ser aplicado ao processo de aprendizagem, ou seja, que o desenvolvimento cognitivo se constrói mediante o conhecimento obtido pela interação e busca do indivíduo em se adaptar ao meio ambiente.

Esta teoria, chamada de “Epistemologia Genética” (PIAGET, 1990), aponta os estágios de desenvolvimento em que as crianças vão se tornando aptas a conceberem novos aprendizados. Piaget classificou em 4 níveis:

sensório motor, pré operacional, operacional concreto, operacional lógico-formal.

As teorias do biólogo suiço impulsionaram a pesquisa em muitas áreas da Psicologia e no campo da Educação, promovendo novos modelos educacionais em todo o mundo, baseadas na nova idéia da "Teoria Construtivista".

Lev Vygotsky (1896-1934)

(Foto retirada do site: http://revistaescola.abril.com.br/formacao/lev-vygotsky-teorico-423354.shtml)

Psicólogo bielo-russo, nascido em Orsha. Suas contribuições foram muito significativas para o desenvolvimento da Psicologia moderna e para a criação de novos modelos educacionais. Afirmava que a aprendizagem se dava principalmente pelas relações dentro do contexto social em que o indivíduo nascera. Em seus estudos, sobre o desenvolvimento intelectual da criança, definiu que a idade mental pode ser separada em zonas de desenvolvimento (VYGOTSKY, 1998).

- **Zona de Desenvolvimento Real** – neste nível estão as capacidades mentais que a criança já desenvolveu, e é capaz de realizar de forma autônoma;
- **Zona de Desenvolvimento Potencial** – caracterizada pelas funções que a criança pode realizar com a ajuda de outro indivíduo mais experiente;

- **Zona de Desenvolvimento Proximal** – é o “elo” entre, o que a criança já aprendeu e o que ainda não está completamente desenvolvido em sua aprendizagem. Nas palavras de Vygotsky, "a zona proximal de hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã".

A partir disto, educadores e psicólogos passaram a buscar novas funções que a escola e o sistema social devem exercer para favorecer o pleno desenvolvimento do sujeito, reconhecendo a importância do ensino na formação do cidadão.

Segundo Jófili (2002),

> O aspecto mais relevante da aprendizagem escolar parece ser o fato de criar zonas de desenvolvimento proximal, estimulando o crescimento intelectual da criança a novos aprendizados e, que a partir de suas experiências adquiridas possa contribuir socialmente com outros. (JÓFILI ,2002, p.194)

Emilia Ferreiro (1936 – até os dias atuais)

(Foto retirada do site : http://www.ceconviver.com.br/construtivismo.html)

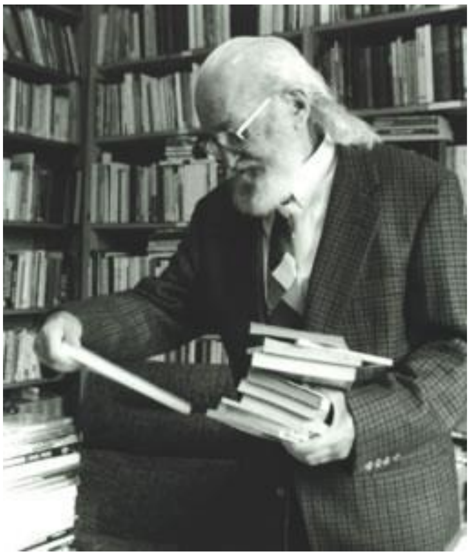
Emília Ferreiro é uma psicolinguísta argentina que provocou grandes mudanças ao questionar o método tradicional de ensino da escrita nas escolas. Foi o nome mais influente na educação brasileira durante a década de 80, influenciando a profundas modificações no cenário educacional da alfabetização e na construção dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Em suas obras relata os processos psicogênicos da aprendizagem na leitura e na escrita. Emília Ferreiro foi aluna de Jean Piaget e também realizou pesquisas juntamente com o biólogo suíço. Mas, seu foco foi voltado para a parte do desenvolvimento da leitura e escrita. Uma de suas principais obras foi a “psicogênese da língua escrita” (FERREIRO e TEBEROSKY, 1999), onde aponta que o desenvolvimento de aprendizagem da criança deve ser construído de forma gradual e com efetiva participação da criança dentro do processo.

Ao colocar em contraste a alfabetização tradicional que era oferecida nas escolas, com a sua teoria de construção do conhecimento por parte dos alunos, Ferreiro se tornou uma referência no processo de alfabetização e passaram a atribuir o seu nome a teoria do Construtivismo que estava começando a se difundir no Brasil.

Segundo Emilia Ferreiro, a construção do conhecimento passa por etapas que variam de acordo com a mentalidade e os conhecimentos anteriores de cada criança. Cada uma possui o seu tempo em cada etapa, em que este tempo precisa ser respeitado e valorizado. Professores não podem seguir um padrão criterioso, pois cada criança apresenta um nível de maturidade diferenciado. O convívio social também é importante, pois nesta construção troca experiências, descobre seus erros, e pode “recriar” seus conceitos.

Paulo Freire (1921-1977)



(Foto retirada do site : http://www.projetomemoria.art.br/PauloFreire/)

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção". (Paulo Freire)

Paulo Freire foi o principal educador brasileiro, conhecido internacionalmente por seus métodos de alfabetização. Nascido em Pernambuco, pesquisou e realizou experiências no campo educacional por mais de 15 anos, em áreas urbanas e rurais junto a educadores do Movimento de Cultura Popular do Recife (MCP). Criador do revolucionário método de alfabetização para adultos intitulado "Método Paulo Freire", descrito no livro "Educação como Prática da Liberdade" (FREIRE, 1967).

Afirmou que a educação de adultos precisa estar relacionada ao seu cotidiano e trabalho, para que possa conhecer sua realidade e sua postura crítica perante a sociedade e a política. Em uma de suas principais obras, de nome "Pedagogia do Oprimido" (FREIRE, 1969), caracteriza o método em que foi capaz de alfabetizar vários adultos em apenas 45 dias, além de suas teorias educacionais.

Pregava que a função da educação é despertar a consciência crítica do aluno em relação à sociedade. As idéias de Freire foram consideradas uma “afronta” à ordem social pelos militares, razão a qual levou ao seu exílio durante o regime da Ditadura no Brasil. Durante este período, passou pelo Chile, Estados Unidos e Suíça, onde lecionou, construiu várias obras e recebeu diversos títulos e reconhecimento internacional por suas contribuições no campo educacional.

> Paulo Freire revelou ao mundo uma educação para além da sala de aula, da educação formal, capaz não só de ensinar conteúdos e comportamentos socialmente esperados e aceitos, mas também capaz de conscientizar a todos e a todas. Mais objetivamente pensou nos jovens e adultos trabalhadores, homens do campo e da cidade para abrir-lhes a possibilidade de enfrentarem a opressão e as injustiças. (trecho retirado do site http://www.projetomemoria.art.br/PauloFreire)

Dentre os inúmeros feitos de Paulo Freire no Brasil, foram muito significativos seus esforços para uma prática de ensino voltada para jovens e adultos, que eram excluídos socialmente pelo analfabetismo, e que não eram capazes de desempenhar sua função como cidadão, principalmente em relação a política.

Uma das principais contribuições de Paulo Freire foi pregar que a educação deve ter um aspecto de conscientização política, conduzindo o cidadão à liberdade individual. Em suas obras Freire dizia que a educação deve possibilitar o conhecimento da realidade, para que a partir desta, possa transformá-la e favorecer a construção de uma sociedade mais justa. As obras de Paulo Freire e sua história completa podem ser encontradas no site: **Projeto Memória 2005 - Paulo Freire - Educar para transformar**, disponível em <http://www.projetomemoria.art.br/PauloFreire/>.

Capítulo 2 - Construtivismo e a Matemática

2.1. Teoria do Construtivismo

O Construtivismo é uma concepção acerca de como desenvolver o aprendizado, construindo-o nas relações entre o indivíduo e o ambiente que o cerca. Esta concepção é baseada nas teorias epistemológicas do biólogo Piaget e do psicólogo Vygotsky. A expressão "Construtivismo" ficou conhecida no Brasil, após a publicação da pesquisa e dos livros da psicolinguista argentina Emilia Ferreiro durante a década de 80.

Emilia Ferreiro, que foi pupila de Jean Piaget, se empenhou em analisar o comportamento mental de crianças durante a fase de alfabetização. Utilizando-se da teoria psicogênica de Piaget, Emilia desenvolveu uma pesquisa sobre a aprendizagem infantil durante o desenvolvimento da leitura e da escrita, a partir da análise de suas capacidades mentais, obtendo ótimos resultados (FERREIRO e TEBEROSKY, 1999).

A partir da teoria de Emilia, educadores desenvolveram novas propostas de ensino, passando a utilizar o Construtivismo como base científica:

> [...]o Construtivismo é uma das correntes teóricas compelidas em explicar como a inteligência humana se desenvolve tendo como subsídio o desenvolvimento da inteligência alicerçado pelas interações entre o ser humano e o meio, incluindo as idéias de descobrir, inventar, redescobrir, criar .[...] O Construtivismo parte da idéia de que nada, está pronto e acabado, e o conhecimento não é algo terminado, destacando o papel ativo da criança no aprendizado, onde os conhecimentos são construídos pelos alunos mediante o estímulo ao desafio, ao desenvolvimento do raciocínio, à experimentação, à pesquisa e ao trabalho coletivo. (HANZE, 2010)

O construtivismo sequencial, denotado por Piaget, sugere que o desenvolvimento do raciocínio se faz por etapas, aonde para se atingir níveis mais altos de inteligência, é necessário a compreensão de níveis anteriores. Estes níveis são chamados de estágios de desenvolvimento.

Piaget classificou os estágios de desenvolvimento cognitivo em níveis, nos quais as crianças atingem a capacidade genética, adequada para atingir novos níveis de aprendizado. Ele denominou estas etapas de fases de transição (Piaget, 1975):

- **sensório motor** (até os 2 anos)-período em que a criança desenvolve seus primeiros reflexos, reconhece objetos, e se comunica por pequenos gestos;
- **pré operacional** (de 2 a 7 anos)- período em que se torna capaz de criar imagens, se expressar, questionar e fantasiar;
- **operacional concreto** (7 aos 12 anos)- a partir desta, a criança já pode se comunicar e compreender o mundo a partir da manipulação do concreto;
- **operacional lógico-formal** (12 anos em diante)- a partir de onde se desenvolverá totalmente seu intelecto, inteligência e a lógica.

A Teoria da Epistemologia Genética que analisa o comportamento humano influenciou muitos estudos nas áreas da Psicologia e da Pedagogia, embora o objetivo de Piaget fosse obter um fundamento científico biológico a respeito da construção do conhecimento no ser humano. Seus estudos, juntamente com os do psicólogo bielo-russo Lev Vygotsky (1896-1934), são utilizados atualmente em diversas áreas educacionais, psicológicas e sociais.

Vygotsky por outro lado, enfatiza a importância que tem o contexto sóciocultural no processo. Para ele, o aprendizado depende principalmente das ferramentas que o ambiente proporcione. O modo que a criança irá aprender é marcado fortemente pela influência da sociedade que a rodeia. As diferenças entre a teorias de Piaget e Vygotsky diferenciam-se fundamentalmente neste ponto.

Ambos afirmavam que o conhecimento se dá pelas relações obtidas do indivíduo com o meio, mas um acredita que o desenvolvimento cognitivo tem relação ao fator genético e o outro ao fator social. Segundo Marques (2007):

> O que verdadeiramente distingue Vygotsky de Piaget é a descrença do primeiro em relação a uma hierarquia de estádios do desenvolvimento cognitivo tão estanque e determinista como a que Piaget desenvolveu. Vygotsky [...], dá, igualmente, maior relevo aos contextos culturais e ao papel da linguagem no processo de construção de conhecimento e de desenvolvimento cognitivo. (MARQUES, 2007)

Independente das diferenças é notável a importância de Piaget e Vygotsky para a educação. Eles causaram impactos enormes aos modelos tradicionais de educação da época, promovendo novas propostas de ensino que passaram então, a basear-se em modelos científicos e não mais em técnicas enrijecidas e depositantes de conteúdos sobre o aluno. A adoção do modelo pelas escolas e políticas públicas de educação incentivou muitas pesquisas acerca de inovações pedagógicas, mas também foi alvo de muitas críticas por não propor um modelo definido.

No Brasil, tais mudanças iniciaram-se pela década de 30, durante o movimento Escola Nova, um movimento de renovação do ensino surgida no fim do século XIX. “O movimento educacional denominado Escola Nova surgiu no início do século, em conseqüência da democratização e universalização do ensino, assim como do desenvolvimento das ciências auxiliares.” (trecho retirado do site: http://www.escolanova.com.br/).

Os educadores da época procuravam novas práticas de ensino, juntamente quando a teoria de Piaget estava chegando ao Brasil:

> A crítica aos métodos tradicionais e as novas propostas implicaram na revisão e na alteração dos pressupostos científicos de fundamentação das atividades pedagógicas. O movimento da Escola Nova buscou na Biologia e na Psicologia bases de sustentação para uma ação pedagógica que privilegiou o aluno no processo educacional.(NIEMANN e BRANDOLI, 2012)

Apesar deste avanço, o construtivismo no Brasil somente se difundiu de fato nas escolas e nas políticas públicas várias décadas depois com a chegada de novas práticas no ensino da alfabetização oriundas dos livros da argentina Emilio Ferreiro.

2.2. Construtivismo na Educação

A teoria construtivista têm influenciado a reflexões sobre a prática pedagógica no Brasil, a partir da década de 80. As primeiras escolas a se basearem em teorias construtivistas se situavam em São Paulo, aplicando novas maneiras para alfabetizar crianças. Neste âmbito, também têm destaque os trabalhos do educador brasileiro Paulo Freire (1921-1977).

O seguinte trecho elucida partes da luta de Freire a favor da educação:

> Ele foi quase tudo o que deve ser como educador, de professor de escola a criador de idéias e "métodos". Sua filosofia educacional expressou-se primeiramente em 1958 na sua tese de concurso para a universidade do Recife, e, mais tarde, como professor de História e Filosofia da Educação daquela Universidade, [...]. A coragem de pôr em prática um autêntico trabalho de educação que identifica a alfabetização com um processo de conscientização, capacitando o oprimido tanto para a aquisição dos instrumentos de leitura e escrita quanto para a sua libertação fez dele um dos primeiros brasileiros a serem exilados. (trecho retirado do site http://www.projetomemoria.art.br/PauloFreire)

Para Freire, o maior objetivo da educação é conscientizar o aluno, ao qual ele chamava de “Educação Libertadora”. Logo, uma escola de cunho construtivista precisa proporcionar condições diferentes do modelo tradicional:

> É por meio da escola que os seres humanos entram em contato com uma cultura determinada. Nesse sentido, a concepção construtivista compreende um espaço importante à construção do conhecimento individual e interação social, não contrapondo aprendizagem e desenvolvimento. Aprender não é copiar ou reproduzir, mas elaborar uma representação pessoal da realidade a partir de experimentações e conhecimentos prévios. É preciso aprender significativamente, ou seja, não apenas acumular conhecimentos, mas construir significados próprios a partir do relacionamento entre a experiência pessoal e a realidade. (MAZUCHELI, 2009)

Um dos fatores necessários para um ensino eficiente nessa perspectiva, é a construção de um ambiente construtivista, onde professor e aluno possam refletir sobre suas ações e interagir com o foco de estudo:

> A primeira das exigências é que o ambiente permita, e até obrigue, uma interação muito grande do aprendiz com o objeto de estudo, integrando o objeto de estudo à realidade do sujeito, dentro de suas condições, de forma a estimulá-lo e desafiá-lo, mas ao mesmo tempo permitindo que as novas situações criadas possam ser adaptadas às estruturas cognitivas existentes, propiciando o seu desenvolvimento. (ARGENTO, 2008)

O professor deve incentivar a exploração e o questionamento por parte dos alunos. Segundo Argento (2008): "Cada aluno constrói seu próprio aprendizado num processo de dentro para fora baseado em experiências de fundo psicológico". A avaliação e o erro são partes fundamentais para o desenvolvimento intelectual do indivíduo:

> Em uma abordagem construtivista, o erro é uma importante fonte de aprendizagem, o aprendiz deve sempre questionar-se sobre as conseqüências de suas atitudes e a partir de seus erros ou acertos ir construindo seus conceitos, ao invés de servir apenas para verificar o quanto do que foi repassado para o aluno foi realmente assimilado, como é comum nas práticas empiristas. (Argento, 2008)

Um fator importante, é fazer uma reflexão a respeito da relação entre o Construtivismo e a Pedagogia, que estuda os ideais e os processos do ensino e educação:

> [...] cabe à Pedagogia, como um saber de fronteira, desenvolver pesquisas que contribuam para a inovação das práticas pedagógicas à luz das teorias de diferentes áreas, em busca de um agir pedagógico que leve os educadores e educandos a questionarem-se sobre a construção, desconstrução e a provisoriedade do conhecimento. (Niemann e Brandoli, 2012)

De acordo com Niemann e Brandoli (2012), as teorias desenvolvidas a partir dos estudos na área da Psicologia influenciam a construção das teorias pedagógicas relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem na escola. Portanto, faz-se necessário analisar e aperfeiçoar as práticas pedagógicas com a concepção construtivista de acordo com os objetivos didáticos definidos.

2.3. Construtivismo e a Educação Matemática

Uma aprendizagem construtivista não é um método de ensino propriamente dito, mas sim uma concepção de ensino baseada nos preceitos de Piaget com a prática pedagógica. Não encontramos estudos relevantes sobre uma “educação matemática construtivista”, somente poucas pesquisas acerca do assunto. A importância das teorias construtivistas no ensino de matemática referem-se as formas de se construir o raciocínio lógico-formal, possibilitando que o aluno seja posto a abstrair quando sua mentalidade estiver pronta para desenvolver esse nível de aprendizado.

Nas palavras de Piaget sobre a Matemática:

> O papel inicial das ações e das experiências lógico matemáticas concretas é precisamente de preparação necessária para chegar-se ao desenvolvimento do espírito dedutivo, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais que intervém nestas deduções posteriores derivam justamente das ações: ações interiorizadas, e quando esta interiorização, junto com as coordenações que supõem, são suficientes, as experiências lógico matemáticas enquanto ações materiais resultam já inúteis e a dedução interior se bastará a si mesmo. A segunda razão é que a coordenação de ações e as experiências lógico matemáticas dão lugar, ao interiorizar-se , a um tipo particular de abstração que corresponde precisamente a abstração lógica e matemática. (Piaget, 1973)

Muitos educadores tratam a matemática como uma série de conceitos que devem ser assimilados, ao invés de serem construídos pelos alunos. Muitas noções matemáticas, são aprendidas durante o desenvolvimento da criança pela sua interação com o ambiente em que foi criada, como a noção de proporção, quantidade, formas, volume, etc.

> Os professores que acreditam na aritmética como uma aplicação de técnicas como o uso dos algoritmos não veem a Matemática como um conhecimento em construção pelos sujeitos, mas um saber pronto à espera de uma única resposta, sem levar em consideração as habilidades e estratégias utilizadas pela criança para chegar ao resultado que apresentou. (Sanches, 2012)

O professor deve propor situações de construção do próprio conhecimento, a partir dos obtidos anteriormente, promovendo a investigação, a pesquisa, o debate em grupo (Hanze, 2010). Este ambiente colocará o aluno a participar ativamente do próprio aprendizado, encontrar respostas a partir de seus próprios conhecimentos e do compartilhamento com os outros colegas.

No ensino de Matemática deverá ocorrer o contato visual, a experimentação de idéias e a importante análise do erro. Dentro de suas aulas, o professor deve explorar o concreto, a manipulação, o lúdico buscando problemas que façam parte do dia-a-dia dos alunos:

> O professor atua para a construção do conhecimento matemático pelas crianças quando suas atividades ocorrem pela ação real e material que a realidade propõe.[...] Trabalhar com as coisas concretas contribuem para evitar as dificuldades de aprendizagem responsáveis pelo fracasso escolar de grande parcela de crianças. (Sanches 2012)

E quanto a sala de aula, deve se tornar um ambiente agradável a debater novas ideias:

> Desta forma, as salas de aula construtivistas devem proporcionar um ambiente onde os estudantes confrontam-se com problemas cheios de significado porque estão vinculados ao contexto de sua vida real. Resolvendo estes problemas, os estudantes são encorajados a explorar possibilidades, inventar soluções alternativas, colaborar com outros estudantes ou especialistas externos, tentar novas idéias e hipóteses, revisar seus pensamentos e finalmente apresentar a melhor solução que eles puderam encontrar. (Argento, 2008)

Também é fundamental que o aluno entenda em sua consciência, que realizar as situações propostas é desenvolver sua compreensão sobre o mundo em que vive. No ambiente da sala de aula, está em busca de solucionar problemas semelhantes ao seu cotidiano, e com isto, promovendo o avanço de seu raciocínio e o significado lógico da matemática.

Cabe ao professor propor as situações aprendizagem em consonância com a realidade e o saber matemático, pois a essência da matemática está na busca pela resolução de problemas, e a partir dos procedimentos realizar o estudo de suas estruturas e funcionalidades.

Capítulo 3 - Atividades e Planejamento

3.1. Local de realização da pesquisa

O trabalho de pesquisa foi realizado no Colégio Estadual Clodomiro Vasconcelos, localizado no Centro do município de Itaguaí. Este município está localizado a oeste da cidade do Rio de Janeiro, tendo limites com a capital na Zona Industrial de Santa Cruz e a Baía de Sepetiba. Possui uma rica história e muitas particularidades, como destacado no trecho seguir:

> Município-sede do Porto de Sepetiba e vizinho da maior área industrial da Capital, Santa Cruz, Itaguaí é considerado o Município de maior potencial industrial da Região Metropolitana [...] o Município foi escolhido para sediar a ZPE do Estado, ou seja, um Distrito Industrial cercado e alfandegado, aberto às indústrias que se destinam ao mercado internacional. É como uma área de livre comércio com o exterior. O turismo na região se desenvolve devido à existência de praias. Seu nome tem origem na língua Tupi e significa "Rio de Água Amarela" ou, em outra versão, "Lago entre Pedras". Seu padroeiro é São Francisco Xavier. (trecho retirado do site agenciários.com/agência Rio de Notícias)

O Colégio Clodomiro faz parte da rede pública de ensino e atende às 3 séries do ensino médio nos turnos da manhã, tarde e noite. A aplicação das atividades e do questionário foram realizadas nas turmas de formação geral 2001, 2002 e 2003 nos meses de Outubro e Novembro do ano de 2014. Foram um total de 6 semanas, sendo realizadas 2h/aulas por semana em cada turma. A escolha de turmas foi feita pela disponibilidade apresentada pela Escola e pela professora regente da turma.

As três turmas utilizadas para a elaboração do trabalho faziam parte do turno matutino, e quanto aos alunos, eram em sua totalidade moradores do próprio município, e na maioria oriundos de escolas públicas nas séries fundamentais. Este fato tem importância, pois assegurava que os alunos tiveram um mesmo padrão a respeito de seus aprendizados, ou seja, não houve casos de divergência de conceitos anteriores entre alunos por serem oriundos de outro lugar que pudesse apresentar características inferiores ou superiores de ensino.

3.2. Construção da pesquisa

Durante a construção das atividades que seriam trabalhadas foi necessário realizar uma grande análise a respeito de como se deveria abordar o conteúdo, de forma que estivessem presentes os seguintes itens:

- a questão deve proporcionar uma reflexão sobre o conteúdo, que possibilite a exploração do problema de várias maneiras;
- deve ter um efeito visual marcante, com cores, figuras, formas e organização para anotações;
- Um material flexível e firme que faça com que o aluno sinta-se a vontade ao manipulá-lo;
- Possibilidade de expandir o raciocínio construído, facilitando a compreensão dos casos mais complexos e a aplicação das fórmulas.

Com base nesses pontos, foram analisados em vários livros como são feitas as abordagens iniciais na análise combinatória, os planejamentos escolares de ensino em diferentes regiões do país, *sites* educacionais (*<www7.educacao.pe.gov.br/oje/app/index/>,<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769>*), *softwares* para o ensino ou cálculo de possibilidades e as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 2000). Vale ressaltar que cada questão deve abrir caminho a novos conhecimentos e à formalização posterior do conceito envolvido. Para isto, cada questão foi dividida em diferentes níveis com crescente grau de dificuldade, explorando a situação e colocando o solucionador do problema a ‘’pensar um pouco mais’’ sobre novas possibilidades.

Pesquisou-se várias vezes questionamentos acerca de como fazer com que o desenvolvimento cognitivo pudesse ser atingido de maneira gradual, estimulando a criar estratégias, organizar ideias e visualizar possibilidades não observadas no início do problema. É necessário que o aluno não somente reproduza exercícios, mas também que possa refletir e analisar a situação-problema.

O seguinte trecho, retirado dos PCN sobre a educação no Ensino médio, elucida as competências que o aluno deve atingir durante a aprendizagem: “Mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos, [...], ser capaz de elaborar críticas ou propostas e, especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado.” (BRASIL, 2000, p.3-4)

E este outro trecho é relativo as competências para o processo de contagem:

> A contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório.[...] não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas sim como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2000, p.174)

Todas as questões iniciam-se a partir de um problema simples que deve ter sua solução construída, e assim expor o raciocínio combinatório pretendido, para então, formalização, e nos casos pertinentes a muitas possibilidades, o desenvolvimento das fórmulas. Os critérios para o uso de fórmulas, segundo os PCN são:

> As fórmulas devem ser conseqüência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. (BRASIL, 2000, p.174)

Nesta perspectiva, o uso das fórmulas será feito somente após a formalização de cada conceito. Deve estar evidente que seu uso é para os casos que se torna inviável a contagem pela grande quantidade de possibilidades. Exercícios e exemplos onde se utilizam as fórmulas, serão aplicados após cada série de conceitos ser introduzida.

Também serão utilizadas na realização das atividades ferramentas tecnológicas. Cada vez mais os professores e profissionais de educação precisam estar preparados, para tirar o melhor proveito do material que estiver ao seu alcance. Vale ressaltar que estas ferramentas devem ser de apoio ao ensino, sendo utilizadas de forma a ampliar e facilitar a aprendizagem, e não para serem utilizadas como um meio de ensino. Para Ribeiro (2013), o uso de *softwares* deve ser usado exclusivamente como apoio didático:

> É um papel do professor inserir as ferramentas computacionais em suas práticas em sala de aula, que deve adequá-las à sua realidade e de seus alunos. O professor deve encarar tais ferramentas como apoios de ensino, não deixando que o computador exerça seu papel exclusivamente.(Ribeiro, 2013-p.36)

Há muitos *softwares* que podem ser aplicados em sala de aula, principalmente sobre funções e espaços geométricos. Em análise combinatória, o número de *softwares* é escasso. Entre estes poucos, pode-se citar o ***COMBS*** e o ***COMBINA***, que são programas capazes de calcular e até mesmo listar com elementos o total de possibilidades.

O ***COMBS*** é um *software* de licença *freeware,* desenvolvido por Igor Schmidke Ribeiro. Entre suas diversas funções, é possível visualizar a composição de sequências de elementos, dentro de um conjunto universo. Para saber mais sobre o trabalho deste autor, o leitor poderá acessar em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/264>.

O ***COMBINA*** é um *software* desenvolvido por Adísio Anatoli Ribeiro, que é capaz de calcular combinações, arranjos e permutações. O leitor pode adquirir uma versão DEMO deste *software,* de forma gratuita, mas que possui limitações quanto à capacidade. O programa está disponível, por completo, somente em sua versão paga. Mais informações sobre como adquirir o programa, podem ser encontradas no *website* do autor em: <http://www.adisioribeiro.com.br/Combina.htm>.

É importante considerar que, no cenário educacional atual, não é todo ambiente de ensino que possui as ferramentas necessárias pra uso de tecnologias, como o computador. Regiões menos favorecidas estão muito distantes de recursos se comparadas aos grandes centros urbanos. Algumas regiões do interior do Brasil ainda trabalham com condições mínimas, nas quais ficam totalmente inviabilizado o uso de determinados recursos.

De acordo com o Censo Escolar de 2013 (INEP, 2013), somente 45% das escolas possuem laboratório de informática, e destas 58% com acesso à internet de banda larga. Ainda, a partir das informações obtidas do Censo Escolar 2013, temos que menos de 2% das escolas brasileiras tem uma infraestrutura considerada ideal.

Dentro desses contextos sociais distintos, o ensino de matemática deve se adequar as realidades locais e aos recursos que forem possíveis. A partir do Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino médio, a escola deve ter a função de preparar o indivíduo para exercer a sua cidadania:

> O novo ensino médio, nos termos da lei, de sua regulamentação e encaminhamento, deixa de ser, portanto, simplesmente preparatório para o ensino superior ou estritamente profissionalizante, para assumir necessariamente a responsabilidade de completar a educação básica. Em qualquer de suas modalidades, isso significa preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho.(BRASIL, 2000, p.3)

Diversas áreas do conhecimento matemático estão em constante busca por novos métodos e materiais que facilitem a compreensão do assunto, desde a sua teoria até a sua aplicação. O ensino em matemática passa por reformulações de seu currículo com objetivo de atender as necessidades de cada região ou país baseadas no que for primordial em ser aprendido. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Vivemos numa era marcada pela competição e pela excelência, onde progressos científicos e avanços tecnológicos definem exigências novas para os jovens que ingressarão no mundo do trabalho. Tal demanda impõe uma revisão dos currículos, que orientam o trabalho cotidianamente realizado pelos professores e especialistas em educação do nosso país. (BRASIL, 2000, p.5)

> [...] adquirir uma atitude de permanente aprendizado. Uma formação com tal ambição exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam comunicar-se e argumentar, deparar-se com problemas, compreendê-los e enfrentá-los, participar de um convívio social que lhes deem oportunidade de se realizar como cidadãos, fazer escolhas e proposições, tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender. (BRASIL, 2000, p.4)

Ao lecionar o conteúdo de análise combinatória deve-se ter em mente que este é um processo de construção e busca por formas de raciocínio aplicados a contagem. O desenvolvimento terá como base formas de pensar que não induzam a um erro e que não permitam o esquecimento de nenhuma possibilidade.

Nesta proposta pretende-se mostrar que independente da prática utilizada, o ensino de combinatória é reforçado com muita eficiência ao se aplicar materiais simples que permitam ao aluno visualizar e manipular o seu problema. A construção de um ambiente de aprendizagem construtivista é uma grande ferramenta para o desenvolvimento intelectual.

3.3. Descrição e Planejamento das Atividades

Descreveremos a seguir as atividades que foram aplicadas aos alunos na pesquisa, bem como o material utilizado e o objetivo a ser atingido em cada uma das etapas. Para a realização das atividades, dividiu-se a turma em grupos, e cada um destes recebeu uma folha de questões, que descreve o que deverá ser realizado, e o material complementar respectivo necessário para desenvolvê-las.

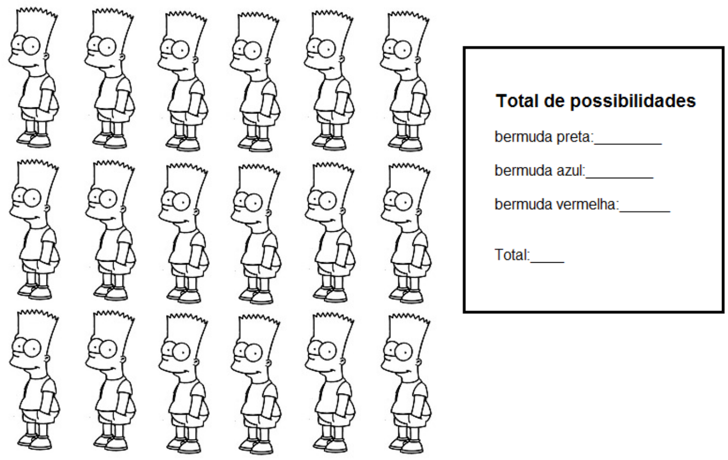
Ao iniciar o conteúdo com análise combinatória, o primeiro passo é o princípio multiplicativo que servirá de base para os outros temas (permutações, arranjos e combinações).

Atividade 1- Princípio Multiplicativo – Pintura em figuras

1) Um jovem possui 5 camisas e 3 bermudas de cores diferentes
   - Cores de camisas – amarela, verde, vermelha, branca, azul claro;
   - Cores de bermudas – preta, azul, vermelha.

   Pinte as figuras fazendo todas as combinações possíveis

   Atividade 1- colorir bermudas e blusas



   Dica: escolha uma cor de bermuda e combine com todas as camisas, após troque a cor da bermuda e faça o mesmo processo.

   a) Qual o número total de vestimentas que encontrou? Você(s) acha(m) que existem mais possíveis?

   b) Qual o total de possibilidades se contar somente as bermudas preta e azul?

   c) Seria capaz de responder qual o total de vestimentas, se fossem 5 bermudas e 8 camisetas?

Material Utilizado: Para o desenvolvimento deste problema, utilizou-se uma folha extra com tamanho ampliado do desenho (fig.1) e objetos pra colorir as possibilidades. Estes objetos podem ser lápis de cor, giz de cera ou até mesmo pintura como guache.

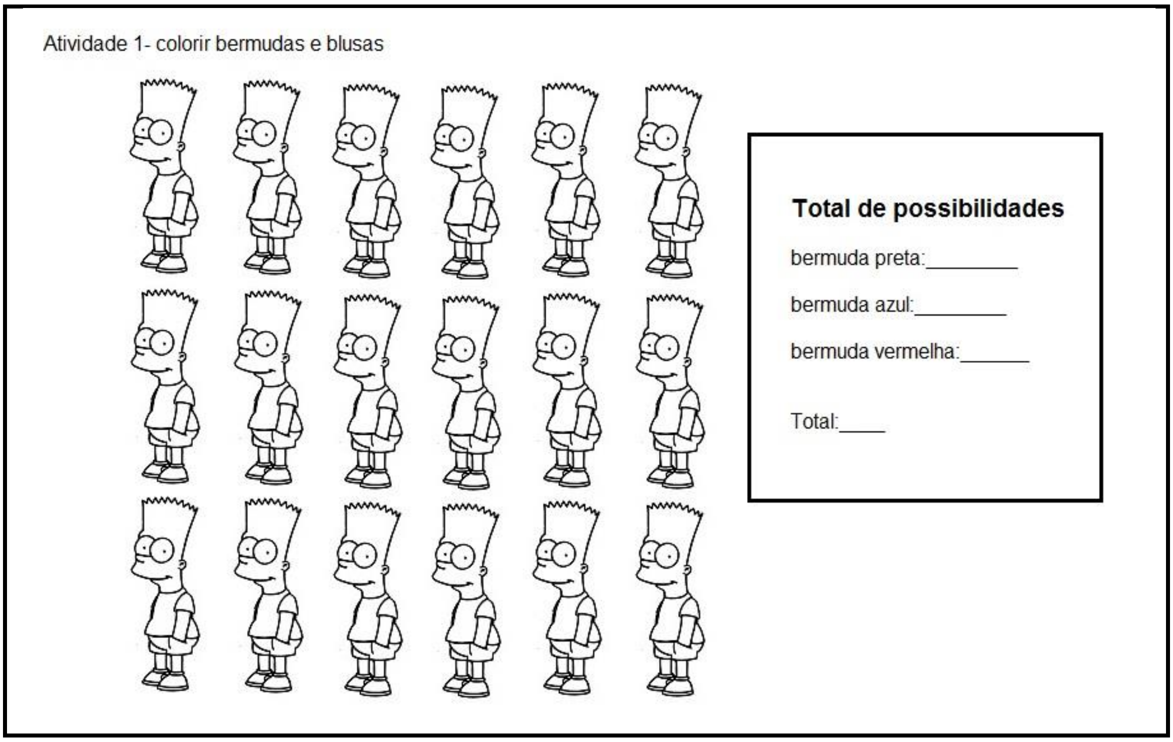


Figura 1 - folha de pinturas da atividade 1

Os alunos devem colorir todas as possíveis combinações[1] praticando sua percepção visual (sem sobrar nenhuma possibilidade) e iniciando o conceito multiplicativo. Note que, foi dada uma dica para facilitar a construção. Pretende-se que, ao seguir esta dica, seja formada uma organização na realização das pinturas, estimulando a obter uma boa estratégia ao colocar em ordem uma mesma cor de bermuda.

As perguntas no item (a) propõem uma reflexão sobre a solução encontrada. Deve-se dar atenção às respostas dadas pelos alunos. Um detalhe que será observado, é que foi colocado propositalmente um número maior de figuras que o de possibilidades de vestimenta. São 18 bonecos em branco e pelo princípio multiplicativo o total de maneiras são 3 x 5 = 15 maneiras, logo haverá 3 que não serão coloridos.

[1] Utilizou-se o termo combinação de forma usual, pois este conceito ainda será definido adiante.

No item (b) bastará que visualizazem e enumerem na folha de pinturas. Aos que seguiram a dica, torna-se mais fácil, em vista que, estará em determinada ordem facilitando a contagem. No item (c), o aluno será estimulado a usar suas primeiras noções de abstração, pois deverá ampliar a quantidade de possibilidades. Se foi capaz de encontrar que na primeira situação ao combinar 3 calças com 5 camisas, o resultado foi 3 x 5 = 15, o esperado é que com a noção formada possa responder de uma forma intuitiva de multiplicação de possibilidades. Ou ainda poderá imaginar uma folha "ampliada" e constatar que para cada blusa há 8 bermudas e atingir o resultado esperado.

O acompanhamento durante a execução desta atividade deve ser constante para garantir que cheguem ao objetivo. É fundamental que o aluno construa o problema tendo clareza no seu raciocínio independente de atingir os resultados corretos. A construção do trabalho é essencial para que a compreensão dos conceitos aconteça de forma mais efetiva.

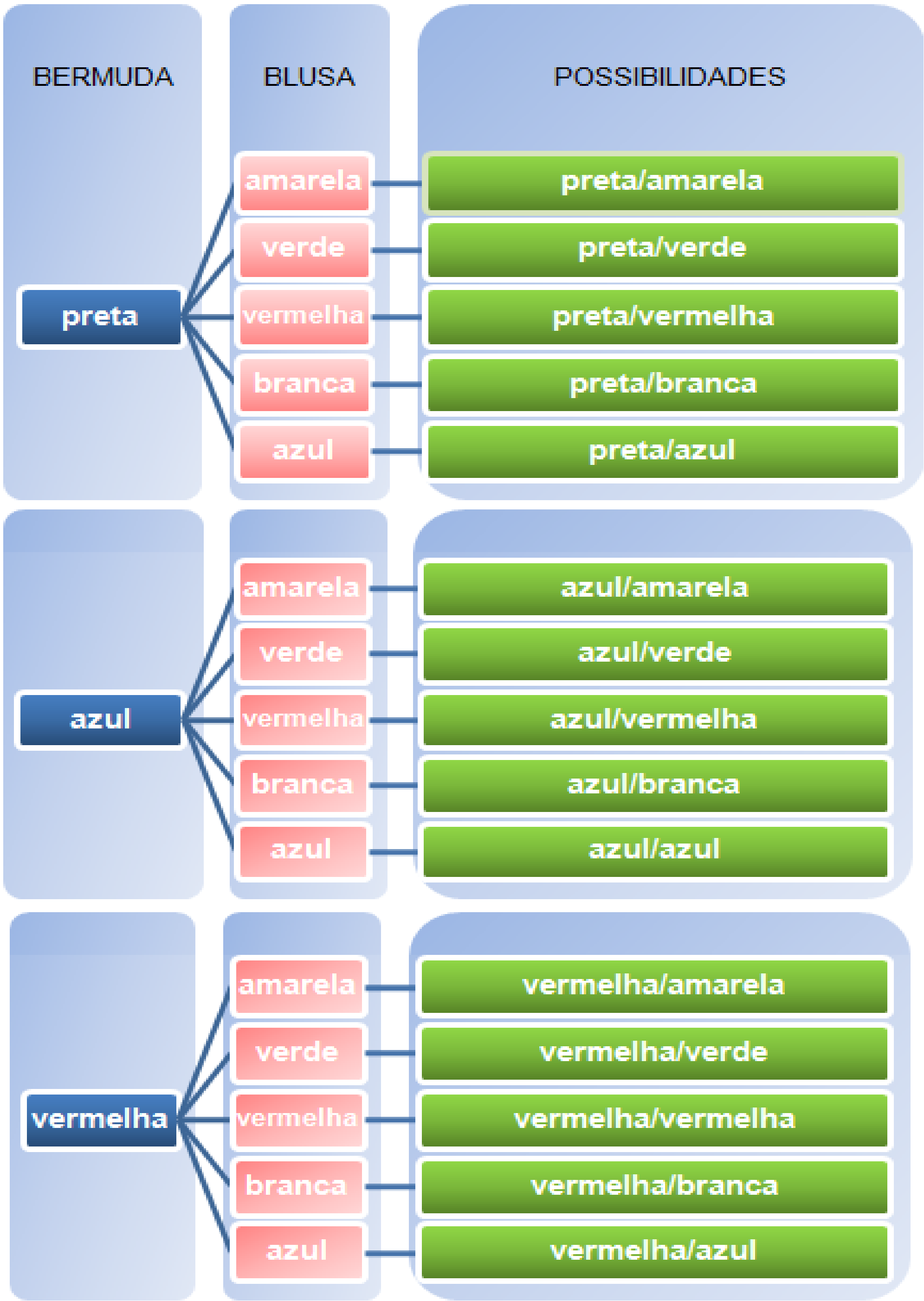
Após a atividade 1 formalizaremos o Princípio Multiplicativo:

Se uma ação é composta de duas etapas sucessivas, sendo que a primeira é feita de m modos e, para cada um destes, a segunda pode ser feita de n modos, então o número de modos de realizar a ação é m.n.[2]

Esse princípio pode ser generalizado para ações compostas de mais de duas etapas.

Aconselha-se neste momento mostrar mais exemplos e expor a construção da árvore de possibilidades. Pode-se usar o próprio exemplo realizado na atividade 1 relacionando o conceito com a organização feita ao realizar as pinturas. Considerando a 1ª etapa como a escolha da cor da bermuda e a 2ª etapa na escolha da cor de blusa temos:

[2] Definição do Princípio Multiplicativo retirado do livro Matemática na Escola do segundo grau, 1994.



BERMUDA
BLUSA
POSSIBILIDADES
preta
amarela
verde
vermelha
branca
azul
preta/amarela
preta/verde
preta/vermelha
preta/branca
preta/azul
azul
amarela
verde
vermelha
branca
azul
azul/amarela
azul/verde
azul/vermelha
azul/branca
azul/azul
vermelha
amarela
verde
vermelha
branca
azul
vermelha/amarela
vermelha/verde
vermelha/vermelha
vermelha/branca
vermelha/azul

Atividade 2 – Princípio multiplicativo - Pintura em figuras

2) A Bandeira abaixo deverá ser colorida usando somente as cores amarelo, azul e verde, nas seguintes condições:
   - Duas faixas consecutivas não podem ter uma mesma cor;
   - Pode ser usada uma mesma cor desde que não sejam consecutivas.

a) Pinte 3 possibilidades usando todas as 3 cores.

b) Construa 3 possibilidades usando somente 2 cores.

c) Usando o princípio multiplicativo, você(s) consegue(m) calcular o total de bandeiras que podem ser construídas?

1ª faixa	2ª faixa	3ª faixa	total
________ X	________ X	_______ =	_______

Material Utilizado: Folha complementar parar colorir todas as possibilidades e lápis de colorir.

De forma semelhante da atividade 1, com o uso das cores, os alunos irão confeccionar possíveis bandeiras prestando atenção nas condições propostas no início. O objetivo é aprender a encontrar possibilidades obedecendo regras. O item (c) põe em prática o raciocínio do Princípio da Contagem.

Neste problema, é de extrema importância que não se violem as condições impostas. Então realizar um exemplo de pintura que fuja das condições dadas é um ótimo exemplo para que os alunos não cometam este erro.

No item (a), poderá ocorrer por parte dos alunos um pensamento no qual, para construir 3 possibilidades distintas, cada cor deve estar em um lugar diferente, como mostrado na ilustração abaixo:

Figura 2 - bandeiras com 3 cores trocadas alternando suas posições

Mas há mais possibilidades, sendo que uma mesma faixa possua mesma cor. Na verdade são 6 possibilidades utilizando 3 cores distintas:

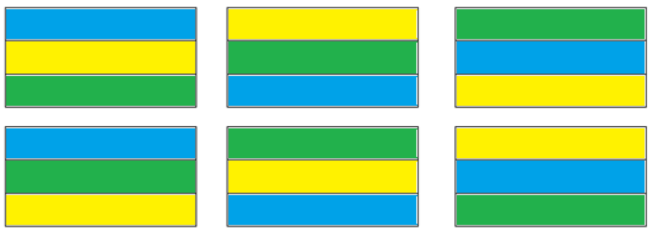


Figura 3 - bandeiras com 3 cores

Este fato foi pensado com antecedência, pois trata-se de um engano muito comum neste conceito. É importante observar a ocorrência deste detalhe durante a execução da tarefa para posterior correção.

No item (b), após poucas tentativas perceberão que a única possibilidade de usar 2 cores sem estarem justapostas, são estando estas nas 1ª e 3ª faixas.

O item c, ao realizar o cálculo encontramos o produto:

$$\boxed{\underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 2\ } = 12 \text{ possibilidades}}$$

- a 1ª etapa consiste em escolher qual a primeira cor, que poderá ser qualquer uma das 3, logo são 3 possibilidades;
- a 2ª etapa é escolher a cor da faixa central, que não poderá ser a cor escolhida anteriormente, logo são 2 opções;
- a 3ª etapa é escolher a última faixa, que pode ser a cor restante entre as 3, ou ainda a mesma cor utilizada na 1ª etapa, logo são 2 opções;

Esta 3ª etapa pode gerar dúvidas a quem não conseguir visualizar estas possibilidades. Como exercício para esta situação, foi proposto a construção de todas as 12 bandeiras na folha de pinturas da atividade 2:

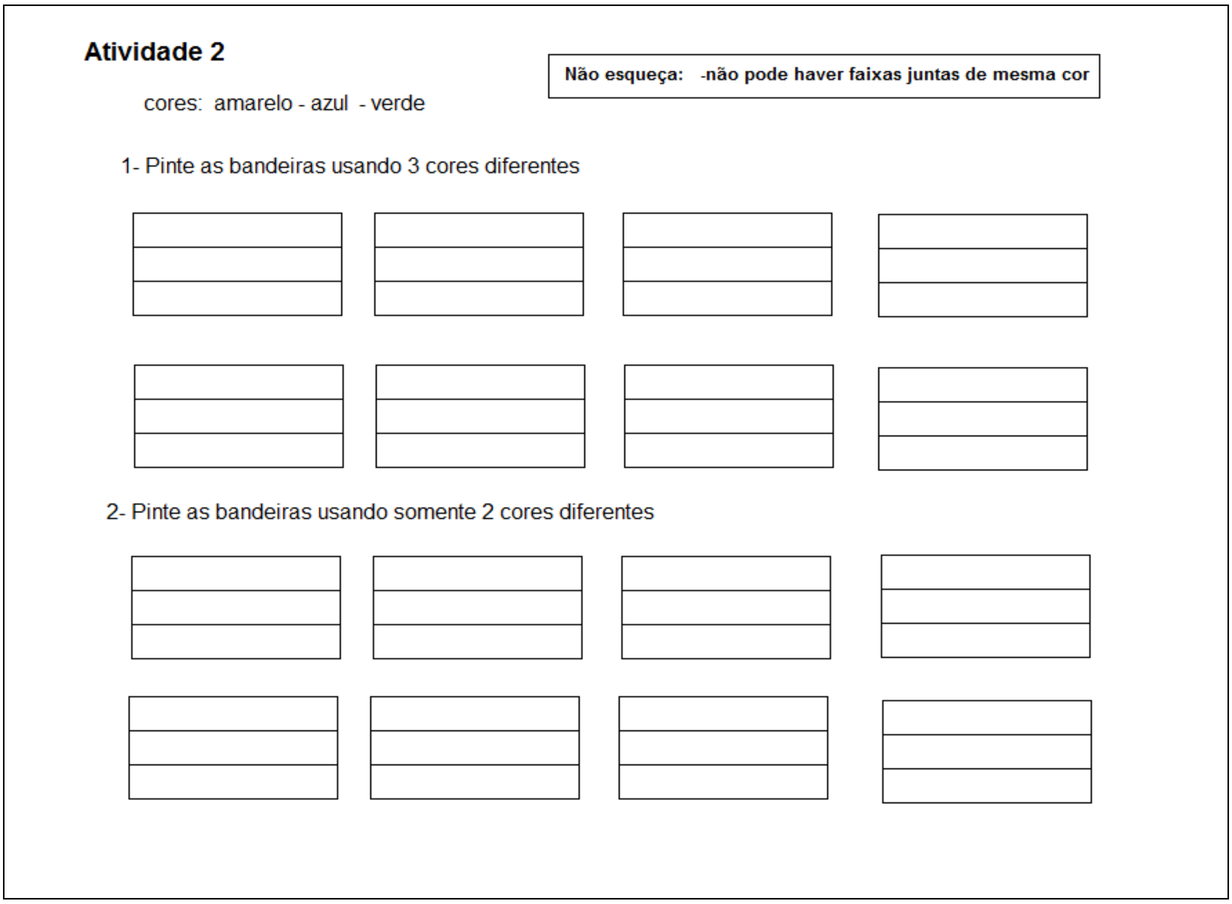
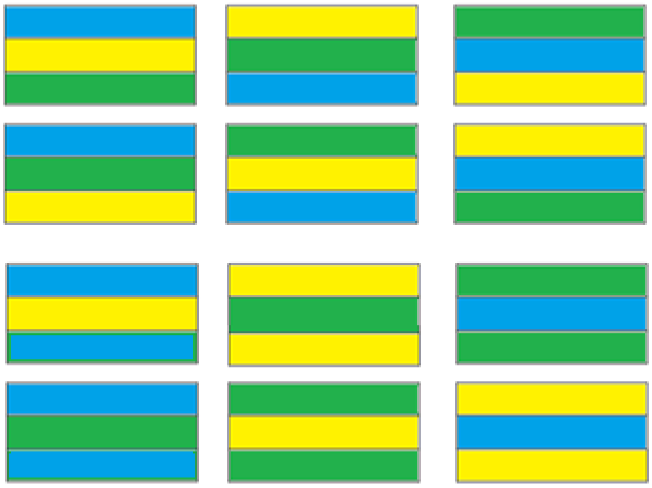


Figura 4 - folha de pinturas da atividade 2

Realizar a construção de todas as bandeiras será um bom teste na capacidade perceptiva dos indivíduos em ação. E também eliminará a possível dúvida citada anteriormente a respeito da pintura no item (a), no qual equivocadamente muitas pessoas imaginam que todas as cores precisam ser mudadas:



3 cores distintas

2 cores distintas

Figura 5 – todas as possibilidades de confecção das pinturas

A construção de tais tarefas se faz uma ferramenta fundamental para o aprendizado. Através da forma concreta a mente abre espaços a forma abstrata evoluindo a novos níveis de conhecimento.

Atividade 3 - Árvore de possibilidades

3) Um restaurante oferece as seguintes opções em seu cardápio

Cardápio da Semana

GUARNIÇÂO +

CARNES	SALADAS	SOBREMESA
• filé mignon • peixe frito • frango assado • carré suíno	• salada de ovos • salada de tomate	• mousse • sorvete • torta (pedaço)

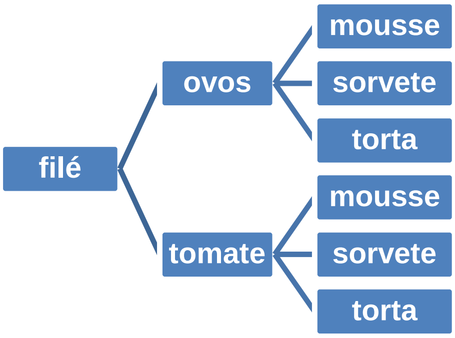
a) Construa 3 possibilidades de pedidos, incluindo carne, salada e sobremesa.

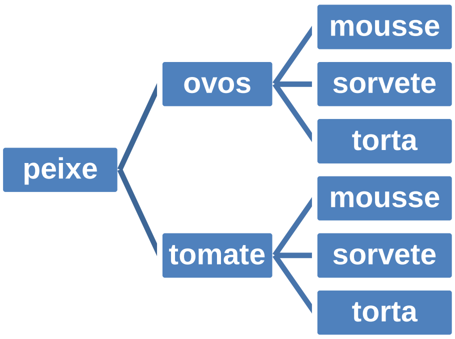
1ª			
2ª			
3ª			

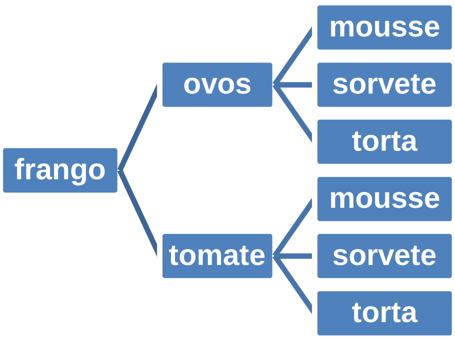
b) Qual o total de possibilidades que um freguês têm para escolher o seu prato?

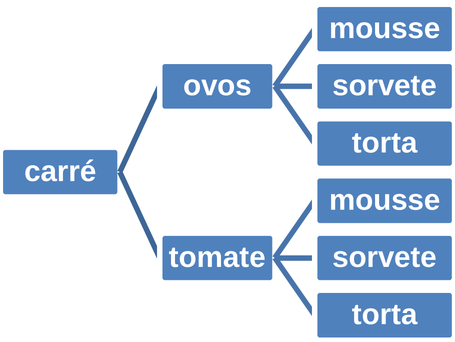
c) Suponha que um freguês esteja decidido a pedir peixe. Quantas possibilidades tem de escolha agora?

No primeiro item basta escolher 3 possibilidades, explicitando com clareza que cada pedido deve conter uma única opção das listadas nos grupos que compõem a refeição. Para esta questão, é proposto que façam uma árvore de possibilidades (em uma folha grande como uma cartolina ou A3). Os itens b e c são solucionados facilmente após a montagem da árvore.


filé
ovos
tomate
mousse
sorvete
torta
mousse
sorvete
torta

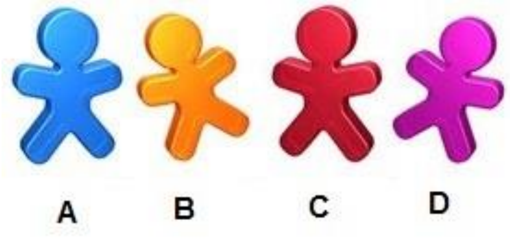

peixe
ovos
tomate
mousse
sorvete
torta
mousse
sorvete
torta

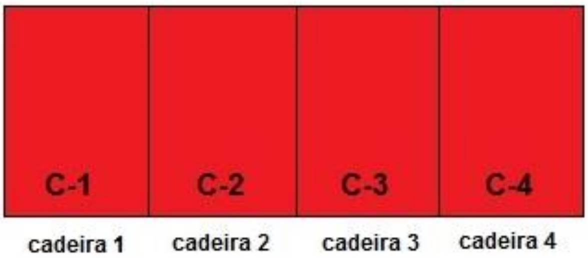

frango
ovos
tomate
mousse
sorvete
torta
mousse
sorvete
torta


carré
ovos
tomate
mousse
sorvete
torta
mousse
sorvete
torta

Atividade 4 – Permutação

4) Suponha que 4 amigos: Ana, Beatriz, Carlos e Daniel, compraram 4 ingressos em cadeiras numeradas para um filme no cinema.





a) Construa usando o material, 5 possibilidades diferentes que o grupo pode se sentar nas cadeiras. Anote-as aqui.

possibilidades	Ordem das pessoas
1ª	- - -
2ª	- - -
3ª	- - -
4ª	- - -
5ª	- - -

b) Construa 3 possibilidades, de modo que nenhum dos amigos fique numa mesma cadeira. Anote-as.

1ª	- - -
2ª	- - -
3ª	- - -

c) Calcule o total de maneiras possíveis que o grupo pode se sentar.
Dica: pense em quantas possibilidades o primeiro terá como escolha, depois o segundo, o terceiro e o último.

d) Imagine que Carlos queira se sentar na cadeira 1, de quantas maneiras o grupo poderá fazer deste jeito?
Dica: deixe Carlos na posição 1 e manipule somente os outros 3

Com esta atividade inicia-se o conceito de permutação. Para realizá-la será utilizado um objeto concreto representando cada pessoa e uma folha com divisões em formas retangulares vermelhas, para simular as opções de escolha das cadeiras. O objetivo é que, através da manipulação do concreto, possam descobrir que o processo de permutar consiste em trocar os elementos de posição. Outro ponto a se alcançar é o cálculo do fatorial que aqui será utilizado a partir do princípio multiplicativo.

Material Utilizado: Folha de figuras e 12 bonecos de recorte de borracha (3 de cada cor). A cor atribuída a cada boneco têm a função de auxiliar no processo de permutar, e representa um personagem diferente no problema. Utilizou-se recortes de borracha, mas pode-se utilizar bonecos de brinquedo, botões com o nome especificado em cada um ou qualquer objeto que sirva para que o aluno manuseie durante o desenvolvimento da questão.

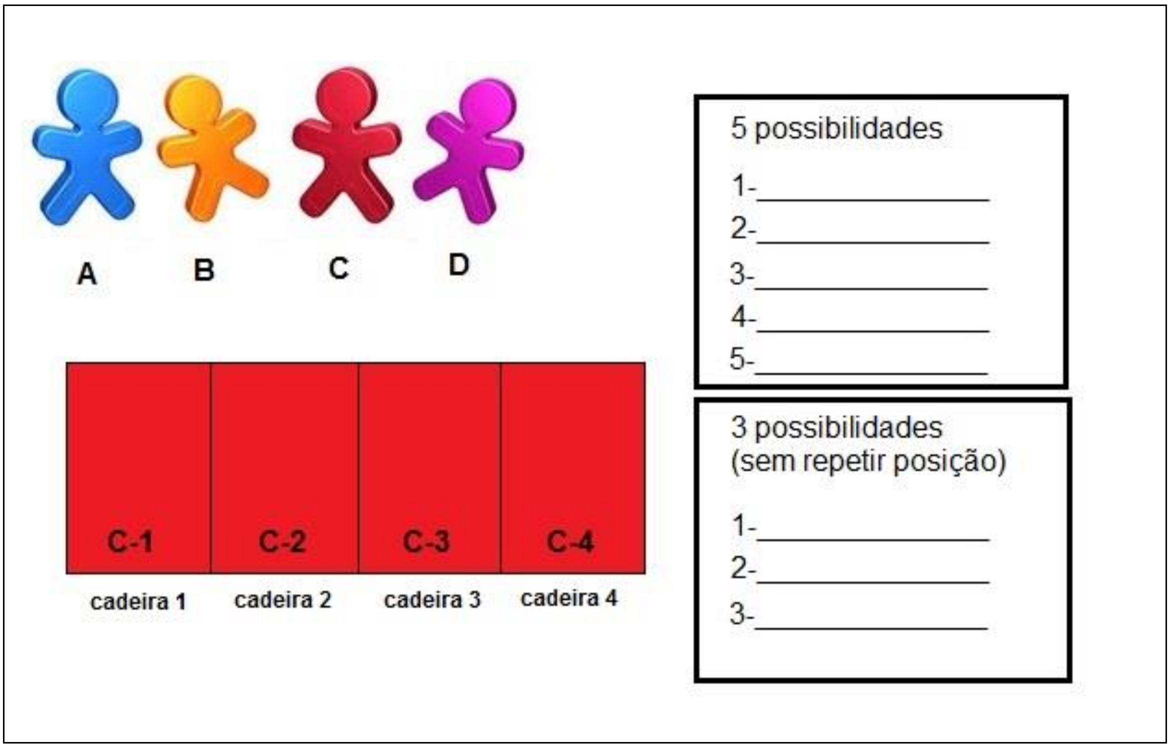


Figura 6 – folha de resolução da atividade 4

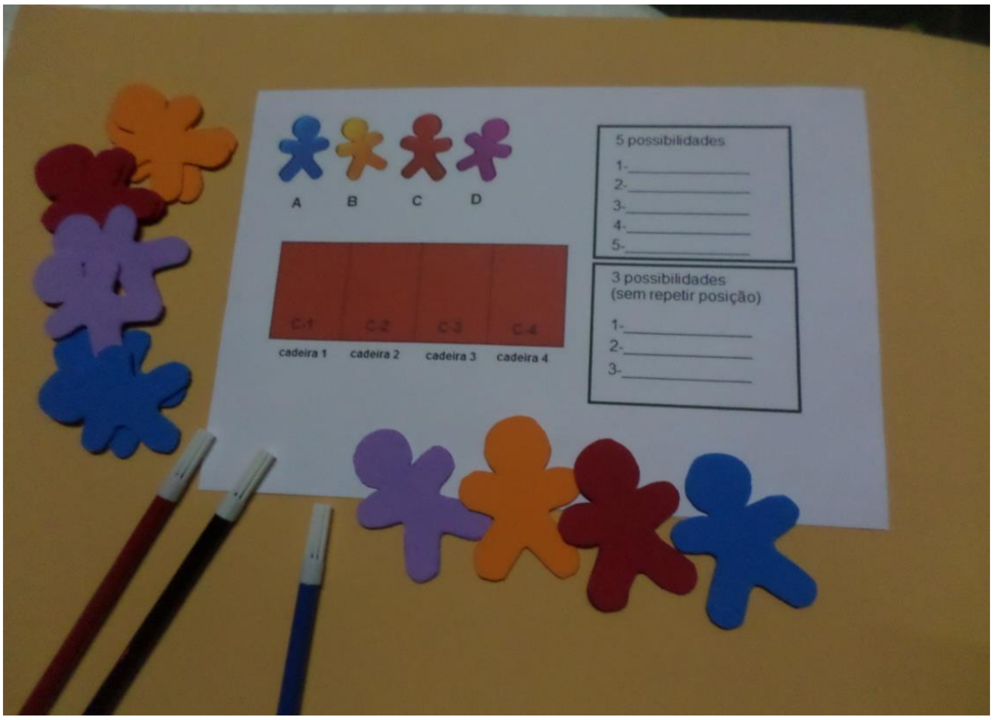


Figura 7 - ilustração do material da atividade 4

Os itens (a) e (b) consistem em trocar de posição e servirão pra ter clareza do que ocorre no processo de permutar, e no (c) será necessário trabalhar com o raciocínio do fatorial. Chega-se a este processo com facilidade usando a estratégia do número de escolhas que cada um terá:

- o 1º a se sentar terá 4 opções de escolha;
- o 2º não poderá escolher o que foi escolhido pelo 1º, logo sobram 3 opções de escolha;
- o 3º terá somente 2 opções, pois 2 assentos já foram tomados;
- o 4º e último só possuirá como escolha a cadeira que restou.

Totalizando:

$\underline{\ 4\ } \times \underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 1\ } = 24$ possibilidades

Uma outra excelente opção é simular esta situação com 4 cadeiras na própria sala de aula, aonde um grupo dos alunos seriam os “elementos” do problema e seriam colocados a fazer as suas escolhas.

Ao fim desta atividade é o momento de definir o fatorial:

Fatorial

Seja n um número natural. O fatorial de n, representado por n!, é o produto de n por seus antecessores até 1. Ou seja:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Poderemos também conceituar a permutação:

Permutações

Denominamos permutação de n elementos dados a toda sucessão de n termos formada com os n elementos dados.

É imprescindível a aplicação de exercícios para fixação dos conceitos. A intenção da proposta de trabalho é mostrar que uma aplicação baseada no ilustrado e manipulativo tem maior ênfase no aprendizado do aluno, mas os exercícios no período apropriado sempre são necessários para um bom ensino, além de auxiliar a verificar o aprendizado.

Atividade 5 – Anagramas

5) Quantos anagramas pode-se construir com a palavra: **MAIS**

M A I S

_____ _____ _____ _____

Resposta:________

Material utilizado: O material de apoio a ser usado são letras de forma, feitas de plástico ou recortadas de emborrachado, e a folha de anotações dos anagramas que possui os espaços em branco para a montagem das palavras.

Para o desenvolvimento desta questão deve-se explicar previamente em que consiste um anagrama, realizar exemplos, e definir que as palavras não precisam propriamente fazer sentido na escrita. Manipulando as letras formar-se-ão as palavras que devem ser anotadas no quadro existente na folha de anotações:

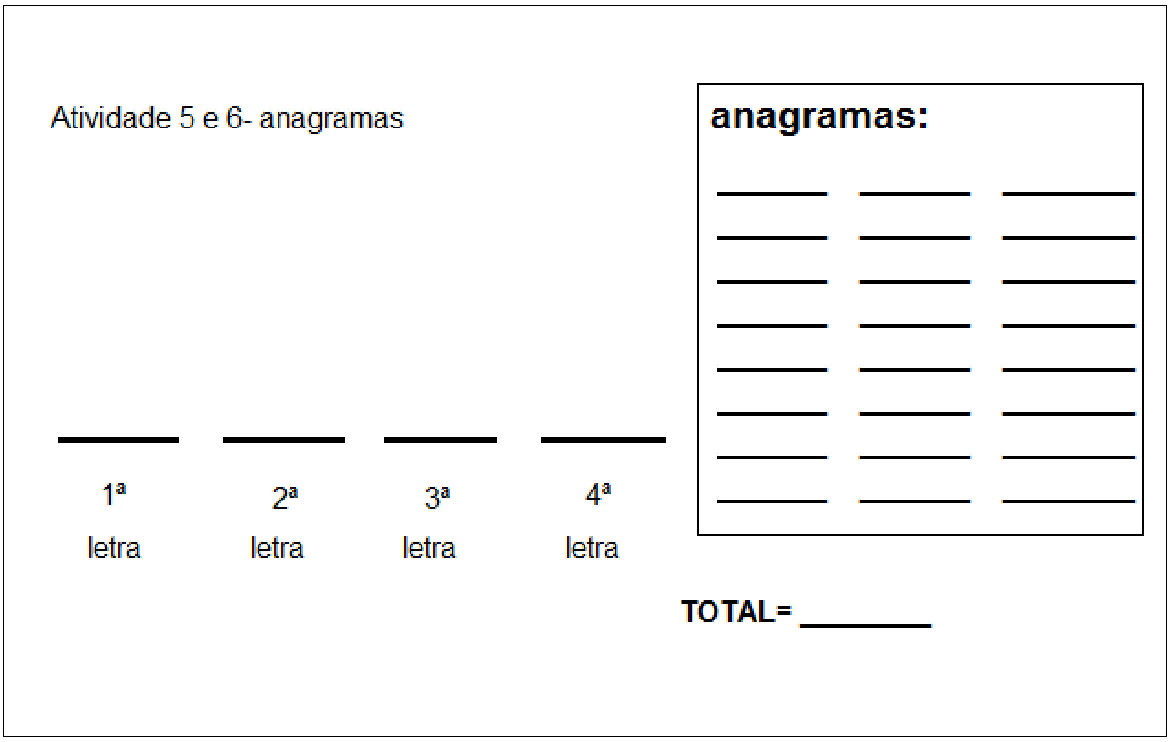


Figura 8 – folha de anagramas

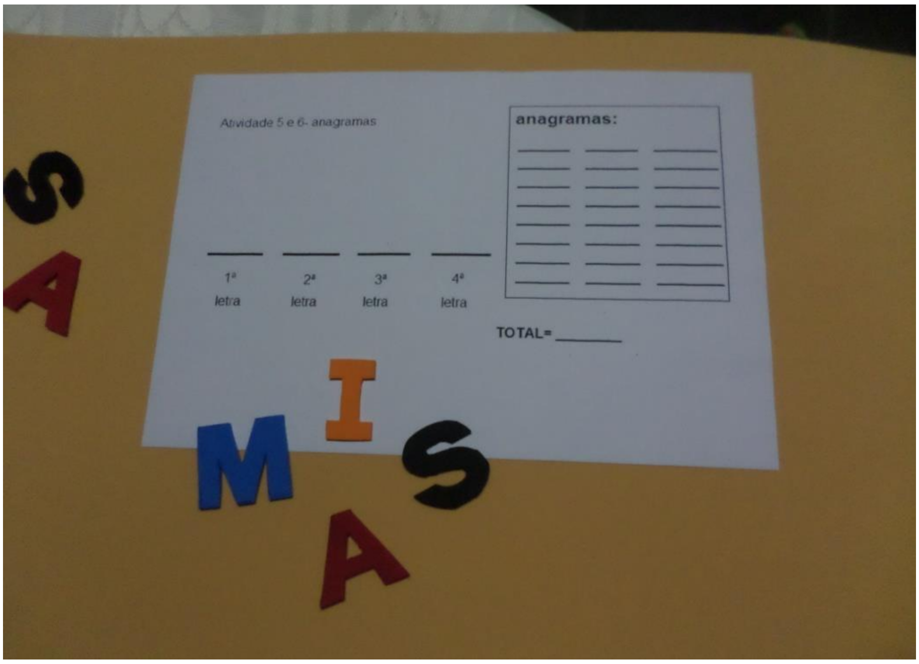


Figura 9 - ilustração do material da atividade 5

Nesta atividade é aconselhável não intervir durante a realização. Deixar os alunos criarem suas próprias estratégias e promover o diálogo entre os grupos. Provavelmente as quantidades encontradas serão diferentes, mas entre as discussões podem surgir boas idéias para descobrir as palavras que faltarem. O trabalho em grupo neste exercício é muito eficiente pro desenvolvimento dos alunos.

Para calcular a quantidade de permutações de n elementos distintos, aplica-se o princípio fundamental da contagem e obtêm-se:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Atividade 6 – Permutações com repetição

6) Quantos anagramas pode-se construir com as palavra: **CASA**

C A S A

_____ _____ _____ _____

Resposta:________

De modo análogo à questão anterior, devem-se construir todas as palavras possíveis, mas desta vez há a existência de uma letra repetida. As letras iguais foram colocadas em outra cor propositalmente para diferenciá-las e podermos identificar as repetições. O objetivo é atingir a mesma quantidade do exemplo anterior, mas ao compará-las ao final e excluir as repetições, observar que a metade dos casos são repetidos.

Material específico são canetas azuis e vermelhas que serão usadas nas demarcações das palavras, letras de forma nas cores correspondentes e uma folha de anotações igual a utilizada na atividade 5.

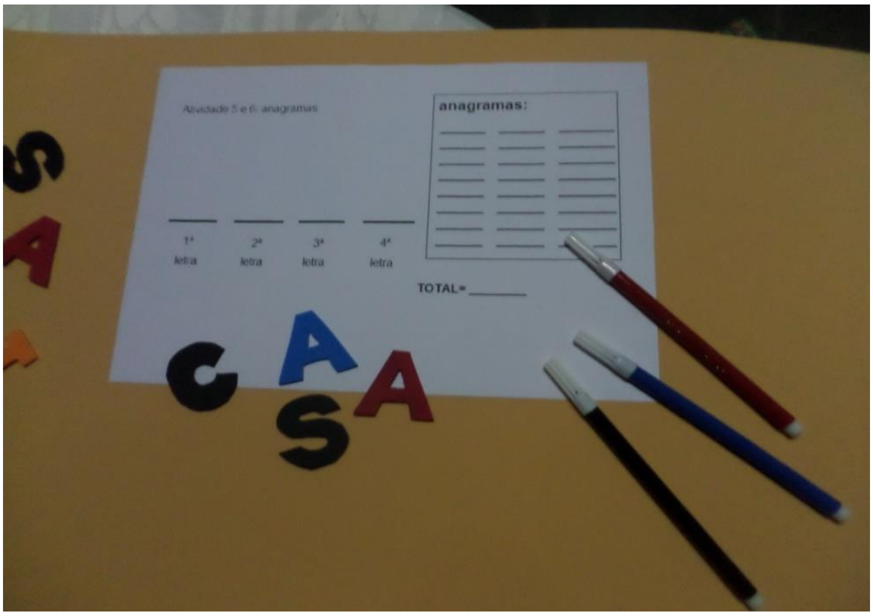


Figura 10 - ilustração do material da atividade 6

Cada anagrama deve ser formado respeitando a cor das letras repetidas. Serão 24 ao todo:

CASA	**CASA**	**CSAA**	**CSAA**	**CAAS**	**CAAS**
ACSA	**ACSA**	**ACAS**	**ACAS**	**AASC**	**AASC**
ASCA	**ASCA**	**AACS**	**AACS**	**ASAC**	**ASAC**
SCAA	**SCAA**	**SACA**	**SACA**	**SAAC**	**SAAC**

E suprimindo as repetições:

CASA	~~**CASA**~~	**CSAA**	~~**CSAA**~~	**CAAS**	~~**CAAS**~~
ACSA	~~**ACSA**~~	**ACAS**	~~**ACAS**~~	**AASC**	~~**AASC**~~
ASCA	~~**ASCA**~~	**AACS**	~~**AACS**~~	**ASAC**	~~**ASAC**~~
SCAA	~~**SCAA**~~	**SACA**	~~**SACA**~~	**SAAC**	~~**SAAC**~~
		Total = 12			

O importante não é que os alunos consigam construir todos os anagramas, mas sim que se convençam de que a repetição de uma letra faz com que cada montagem fique repetida pela troca de posição destas. Com isto, perceber que nestes casos basta dividir o total por 2.

Fazer um exercício com palavras que possuam 3 letras repetidas será muito dispendioso, mas pode-se fazer um exemplo somente com 4 letras: **AAAS** (todas de mesma cor)**,** onde facilmente eles encontrariam somente 4 possibilidades: **AAAS, AASA, ASAA e SAAA.** Então, mostrar que essas 4 formas são equivalentes a 24/6, e inserir o conceito de que deve-se dividir o total de permutações pelo fatorial da quantidade dos elementos repetidos.

Aos ambientes de ensino com acesso as tecnologias com o computador, é uma boa oportunidade para utilizar o *software* do ***COMBS*** ou o ***COMBINA*****,** auxiliando a construção e listagem do total de palavras, e também poderá ser muito prático para construir palavras com muitas letras ou com muitas repetições, e comparar os resultados obtidos pelo programa ao cálculo do fatorial.

Mais uma vez, a aplicação de exercícios será necessária para o fortalecimento do conteúdo. Exemplificar e praticar com várias palavras, estando sempre atento as repetições. Algumas palavras propostas foram:

PORTA PAREDE CANETA QUADRADO

O desenvolvimento das palavras sairá mais rápido após terem realizado construção semelhante na questão anterior.

Atividade 7 – Combinações

7) Entre os 5 melhores alunos de uma turma, 2 serão sorteados para receber um prêmio cada um.

Alunos

Ana	**A**
Beatriz	**B**
Carlos	**C**
Daniel	**D**
Eduardo	**E**

prêmio - 1 tablet pra cada aluno

a) Construa no material e escreva todas as duplas possíveis de sorteados.

Total encontrado = _______

b) Calculando pela fórmula:
N – número de elementos que podem ser escolhidos - ______
P – número de elementos que serão escolhidos - _______

$$C_{N,P} = \frac{N!}{P!\,(N-P)!}$$

Material utilizado: Para a realização desta atividade, será utilizada uma folha com espaços para o preenchimento dos agrupamentos formados. Os elementos podem ser colados ou simplesmente postos nos espaços apoiando sobre a superfície da mesa. Para isto, poderão ser usados letras de forma, canetas coloridas, pequenos botões ou recortes que sirvam para indicar qual pessoa (elemento) está sendo escolhido no agrupamento.

Atividade 7 - Combinações

Alunos

Ana	**A**
Beatriz	**B**
Carlos	**C**
Daniel	**D**
Eduardo	**E**

prêmio - 1 tablet pra cada aluno

1º	2º
___	___

Complete todas as duplas possíveis

Total ________

figura 11 – folha de construções de combinações

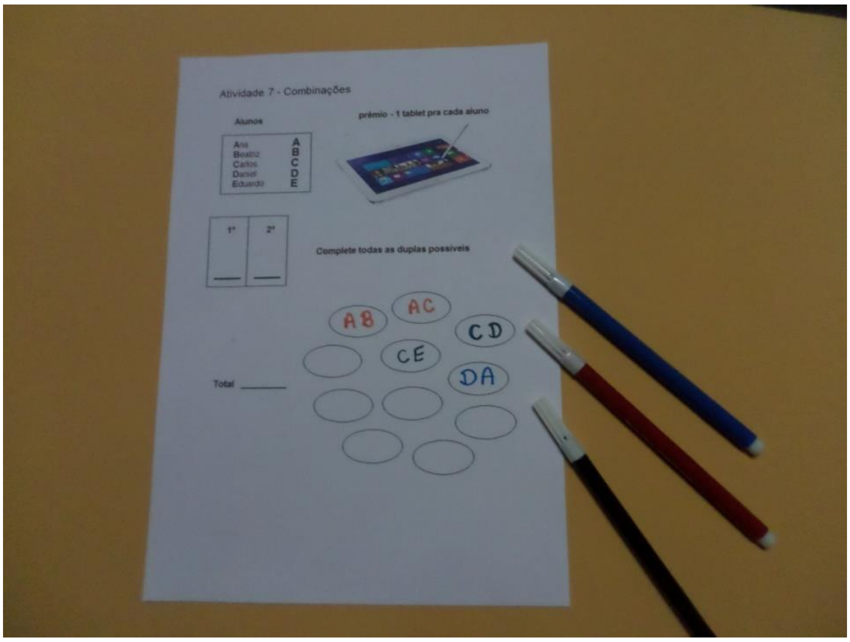


Figura 12 - ilustração do material da atividade 7

Antes de dar início a atividade 7, é necessário introduzir a ideia de agrupamento que consiste em formar um grupo de elementos que são escolhidos dentro de um outro grupo maior de elementos chamado de universo. Combinações e arranjos são formas de agrupamento distintas, em que é preciso saber realizar a distinção nos mais variados problemas que possam ocorrer.

Nesta atividade deve-se simplesmente construir possibilidades de agrupamentos (agrupar 2 elementos de um total de 5 elementos). A seguir, apresenta-se a fórmula para conferência do resultado encontrado. É importante que primeiramente se defrontem com o problema, observando o que acontece no processo de combinar, para então utilizar a fórmula. Como se tratam de prêmios iguais, não haverá a necessidade de enfatizar a ordem dos elementos, embora ainda possa surgir esta pergunta durante a realização da atividade. O objetivo de colocar os espaços para preenchimento espalhados é mostrar subliminarmente que a ordem dos elementos não tem influência alguma já que ambos receberão o mesmo prêmio.

Atividade 8 – Arranjos

8) Considere os 5 alunos da atividade anterior, mas desta vez os 2 sorteados ganharão os prêmios abaixo:

Alunos

Ana	**A**
Beatriz	**B**
Carlos	**C**
Daniel	**D**
Eduardo	**E**

1º prêmio

2º prêmio

a) Construa todas as possíveis duplas de vencedores.

Total=_______

b) A quantidade de duplas foi a mesma encontrada na atividade anterior? Porque?

c) Calculando pela fórmula:

N – número de elementos que podem ser escolhidos - ______
P – número de elementos que serão escolhidos - _______

$$A_{N,P} = \frac{N!}{(N-P)!}$$

Material utilizado: uma folha complementar onde se realizarão as anotações dos arranjos formados e canetas coloridas para anotá-las.

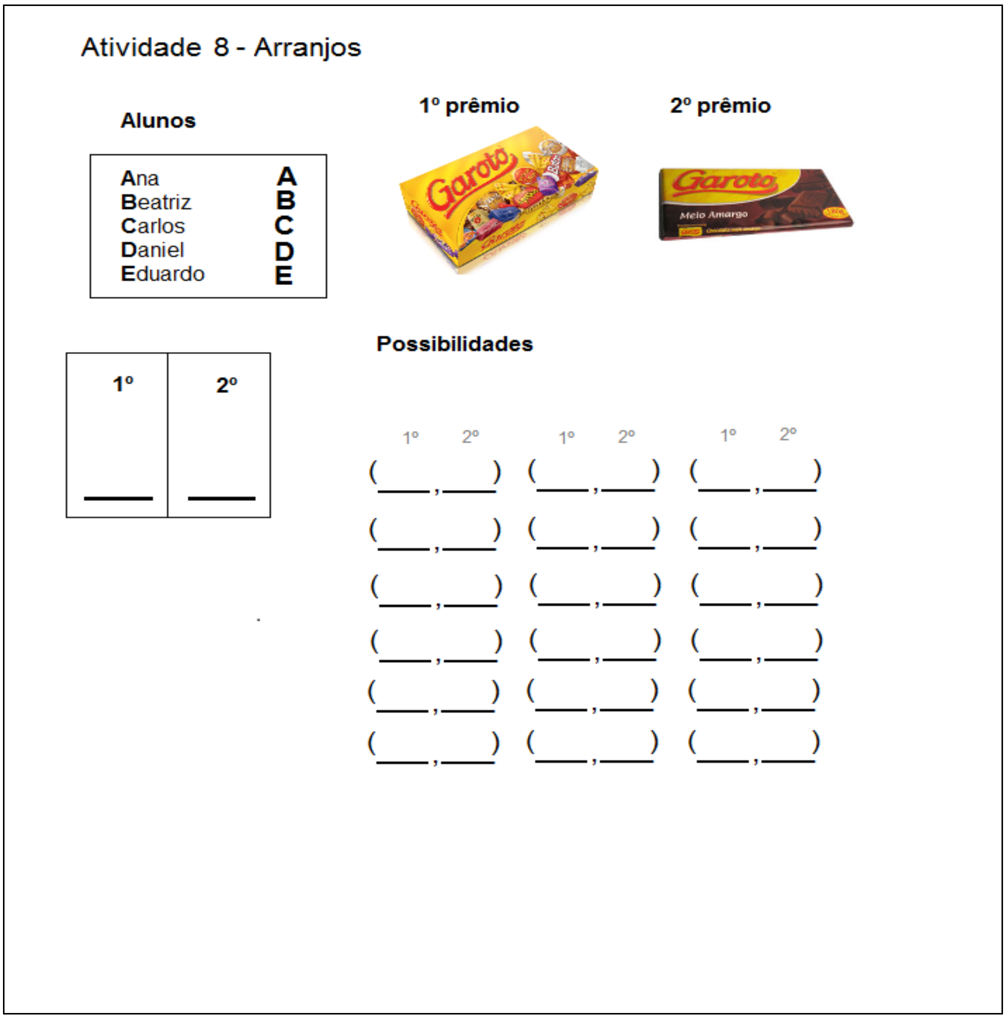


figura 13 – folha de construções de arranjos

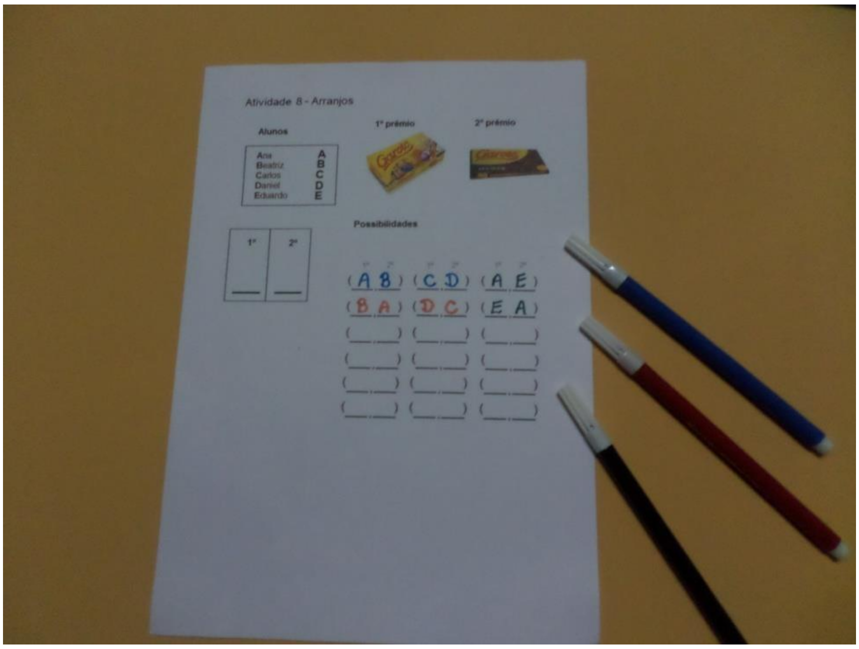


Figura 14 - ilustração do material da atividade 8

A partir do momento que já foi elucidado em que consiste realizar agrupamentos, é hora de mostrar que a ordem em que os elementos estiverem dispostos pode ter relevância na situação. Esta atividade mostra muito bem isso, pois fica claro que os prêmios serão definidos considerando a ordem do 1º e do 2º aluno. Semelhante à atividade anterior, deverão construir os agrupamentos na folha complementar, considerando a ordem. A fórmula para cálculo de arranjos também deverá ser feita ampliando a idéia para maiores quantidades de elementos e agrupamentos. O fato de ter a distinção visual dos prêmios deve levar os alunos a perceber que para uma mesma possiblidade passam a valer 2 hipóteses. Uma boa estratégia seria utilizar o resultado anterior e apenas “trocar” a ordem dos elementos.

As atividades 7 e 8 são boas opções para utilização dos *softwares* citados, permitindo comparar as listagens de arranjos e combinações, levando o aluno a constatar visualmente que a diferença entre os tipos de agrupamentos resumem-se na eliminação das repetições obtidas pelos grupos de elementos diferenciados somente pela ordem.

Capítulo 4 - Análise dos Resultados

4.1. Metodologia da pesquisa

Será visto a partir de agora, como foi desenvolvido o modelo de avaliação para esta proposta de ensino. O objetivo é analisar se o desempenho obtido nas turmas que realizaram o projeto se mostra superior ao das outras. Para isto, há fatores que se devem observar com atenção e que podem ser preponderantes para a coleta de informações.

A avaliação do trabalho foi feita por aplicação de questionário sobre o conteúdo abordado. Tais questões foram retiradas de exames de acesso a instituições de ensino superior (vestibulares), livros didáticos especializados em análise combinatória e *sites* educacionais, como os dois a seguir: (<*http://melissamatematica.blogspot.com.br/2011_10_01_archive.html*>,<*http:// portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769*>).

Algumas destas questões foram adaptadas ou modificadas para melhor se adequarem a realidade da região. As questões estão em diferentes níveis de dificuldade para proporcionar ao máximo, a análise direta sobre o desenvolvimento obtido. Acrescenta-se que, não é objetivo a verificação de grandes cálculos, logo as questões enfatizam principalmente a teoria e a correta aplicação do raciocínio combinatório. As questões que são relativas ao uso de fórmulas estão com representação em notação fatorial, pois pretende identificar o correto uso dentro da situação-problema, e não o resultado numérico em si.

Este questionário foi aplicado em todas as 3 turmas selecionadas (turmas de formação geral 2001, 2002 e 2003) para análise de comparação. A turma participante diretamente na pesquisa (desenvolveu as atividades e o planejamento das aulas) foi a 2001, enquanto que nas outras duas, foram trabalhadas os mesmos conteúdos pelo método tradicional, durante o mesmo período em que foi desenvolvido o projeto na turma 2001.

A cada semana em que se desenvolveu o projeto foi traçado um mesmo planejamento de conteúdo sobre o que seria abordado nas turmas. Por exemplo, na 1º semana foi mostrado o princípio multiplicativo utilizando o material para pinturas, enquanto que nas outras turmas foi abordado o mesmo conteúdo, mas pelo modelo tradicional de ensino.

Um requisito de relevância a se investigar foi a faixa etária. Neste caso, foram turmas do turno da manhã, no qual todos os alunos estavam devidamente seguindo o fluxo ideal, relativo ao seu desenvolvimento cognitivo. Eram todos jovens entre 15 e 18 anos, não havendo então indivíduos que estivessem em outra zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky) que necessitasse de observação especial por estar em outra faixa de desenvolvimento. Outro fator importante foi a aplicação dos exercícios propostos para complementação da aprendizagem. Foram os mesmos para todas as turmas, ou seja, a diferença foi simplesmente a estratégia de ensino praticada.

Os motivos para a construção de um questionário desta maneira são simples, pois constituem um dos principais modos que os alunos usarão o aprendizado ao terminarem o Ensino Médio. Provas de concursos para o mercado de trabalho ou exames para ingressos nas Instituições de nível superior são alguns dos principais meios em que necessitarão demonstrar o seu conhecimento.

É um grande desafio buscar uma maneira de avaliar a eficiência de uma pesquisa. O modo de avaliar pode influenciar diretamente no resultado, logo optou-se por utilizar a maneira que casualmente estes necessitarão mostrar nas etapas adiante de suas vidas.

4.2. Coleta de dados

A coleta foi realizada com todas as turmas envolvidas na pesquisa. Não houve nenhum tipo de escolha amostral nesta etapa, sendo aplicada a todos os alunos, pois trata-se de uma coleta quantitativa. Foi solicitado que realizassem todas as questões propostas sem nenhum tipo de consulta ao que já fora estudado (cadernos, anotações, livros ou exercícios resolvidos).

Como o objetivo é uma avaliação de uma proposta de ensino, não serão apresentados os nomes dos indivíduos, somente suas respostas. Assinalações feitas em rascunhos, os cálculos e estratégias observados nas resoluções das questões serão discutidos mais adiante. A seguir, apresentaremos o questionário, para sua posterior análise em cada questão e os resultados obtidos.

Questionário de avaliação

Responda às questões a seguir assinalando apenas uma opção por questão.

1- (UFES)-Um shopping center possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro andar e 3 elevadores que conduzem do primeiro, para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do shopping pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

a- 12 b- 17 c- 19 d- 23 e- 60

2- Existem quatro estradas ligando duas cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. De quantos modos diferentes uma pessoa pode se deslocar da cidade A até a cidade C?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 12 e) 20

3- (UFSC) Uma pessoa possui 5 camisas de cores diferentes entre si e 3 calças também de cores diferentes entre si. Sabendo-se que existem 3 camisas da mesma cor que as 3 calças, determine o número de trajes completos (calça e camisa) com que essa pessoa poderá se vestir, considerando somente calças e camisas de cores diferentes.

a) 5 b) 6 c) 8 d) 9 e)15

4- Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados?

a) 5 b) 4! c) 5! d) 6!

5- De quantas maneiras diferentes podemos organizar em fila, quatro DVDs diferentes em uma prateleira?

a) 12 b) 15 c) 20 d) 24

6- O número de anagramas que podem ser formados com as letras do nome **ALEMANHA**:

a) A palavra tem 8 letras, logo são **8!**
b) A palavra tem 8 letras, mas 3 são repetidas, logo são **6!**
c) A palavra tem 8 letras, mas possui letras repetidas, logo são **8!** dividido por **2!**
d) A palavra tem 8 letras, mas possui 3 letras repetidas, logo são **8!** dividido por **3!**

7- (UFRRJ – 2003) Caroline vai todos os dias à sorveteria para saborear um "sorvetão" (um sorvete formado por duas bolas de sabores diferentes). Sabe-se que há um total de 15 sabores diferentes de sorvetes na sorveteria. Se Caroline saborear apenas 1 "sorvetão" por dia, e se considerarmos que a ordem das bolas não importa, ela terá experimentado todos os possíveis "sorvetões" em quantos dias?

Para se calcular o número de possibilidades nesta questão, devemos:

a) calcular o produto **15 x 2**.
b) calcular o número de combinações $\mathbf{C_{15,2}}$.
c) calcular o número de arranjos $\mathbf{A_{15,2}}$.
d) calcular o valor de **15!.**

8- (UFF - 05) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

Para se determinar o número de possibilidades de escolha, devemos:

a) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3 não importando a ordem, logo são $\mathbf{C_{8,3}}$
b) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3 de acordo com uma ordem, logo são $\mathbf{A_{8,3}}$
c) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3 em ordem, logo são **3!**
d) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3, logo são apenas 5 possibilidades.

9- Quantos anagramas pode-se formar com a palavra "**Palmeira**"?

a) 6!   b) 7!   c) 8!   d) 8!÷2!   e)7!÷2!

4.3. Resultados

Serão apresentados agora os resultados quantitativos da coleta, discriminados por turma, quanto aos erros e acertos em cada uma das questões. Estes resultados foram separados em 2 grupos: o 1º é referente ao desempenho na turma 2001, que foi a participante no processo da pesquisa, e no 2º grupo estão os resultados das turmas 2002 e 2003. Estes 2 últimos, foram agrupados devido ao mesmo método de ensino aplicado e que estas 2 turmas possuíam um número de alunos relativamente inferior ao da 2001. Logo, optou-se por fazer essa distribuição para construir uma comparação entre quantidades semelhantes de alunos. E quanto ao professor, era o mesmo nas 2 turmas que procedeu com o mesmo planejamento de aulas.

A tabela nº 1 apresenta os quantitativos de acertos nas turmas 2002 e 2003 em comparativo com a 2001:

Tabela resumo – resultados gerais em porcentuais

	Turma: FG 2001 Uso do material concreto			Turma: FG 2003/2002 Método tradicional		
Questão	acertos	Erros	%	acertos	erros	%
1	**33**	**0**	**100**	**28**	**15**	**65,1**
2	**31**	**2**	**93,9**	**23**	**20**	**53,5**
3	**14**	**19**	**42,4**	**15**	**28**	**34,9**
4	**29**	**4**	**87,9**	**39**	**4**	**90,7**
5	**22**	**11**	**66,6**	**19**	**24**	**44,2**
6	**25**	**8**	**75,7**	**28**	**15**	**65,1**
7	**31**	**2**	**93,9**	**7**	**36**	**16,3**
8	**21**	**12**	**63,6**	**12**	**31**	**27,9**
9	**22**	**11**	**66,6**	**30**	**13**	**69,7**
Total de alunos	**33**		Média=76,7	**43**		Média=51,9

Tabela 1- resultados

Para efeito de uma análise visual mais rápida, apresentaremos também estes dados na forma de gráfico na figura abaixo:

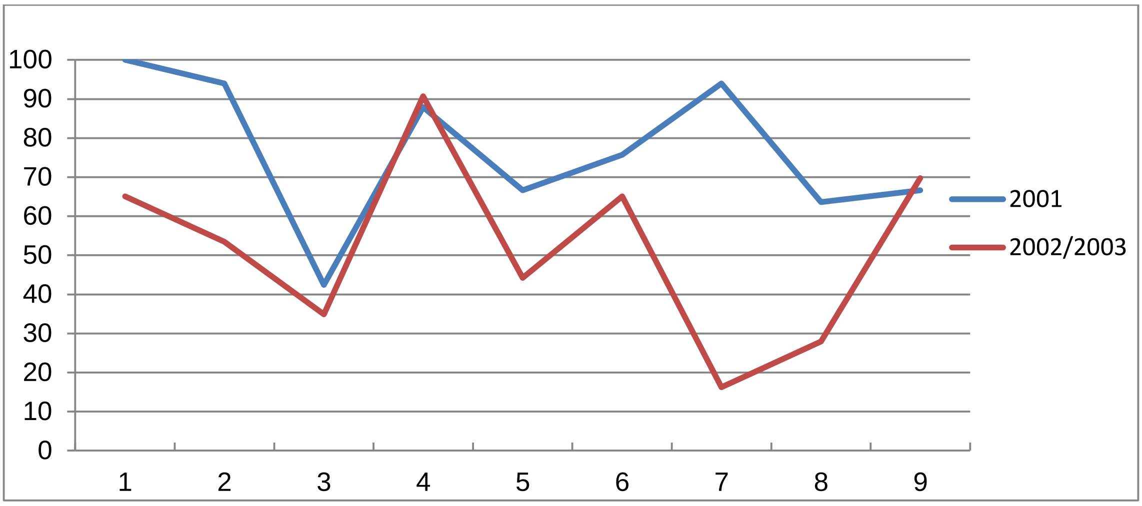


Figura 8- Gráfico de resultados de desempenho do questionário.

Ao observar, repara-se uma aproximação de acertos nas questões 4 e 9, com ligeira diferença porcentual, e quanto as restantes um melhor rendimento da turma 2001. Ocorreu ainda acertos na faixa de 90% a 100% em determinadas questões. Faremos uma análise mais profunda mais adiante.

4.4. Análise das soluções apresentadas

Serão analisadas agora a cada questão, o perfil traçado por cada turma avaliada.

Questão 1

1- (UFES)-Um shopping center possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro andar e 3 elevadores que conduzem do primeiro, para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do shopping pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

a- 12 b- 17 c- 19 d- 23 e- 60

Nível: fácil

Esta questão aborda uma aplicação simples do princípio multiplicativo. O aluno deve identificar que a cada etapa do percurso corresponde um certo número de escolhas possíveis, e multiplicando estas possibilidades, determinar o número de caminhos a se realizar o trajeto.

Portas de entrada → escada rolante → elevador

$$\underline{4} \quad \times \quad \underline{5} \quad \times \quad \underline{3} \quad = \quad 60$$

Análise do grupo 1: Os resultados na turma 2001 foram de 100% de acerto nesta questão, o que indica uma total assimilaçao do conceito multiplicativo.

Grupo 2: Nas outras turmas houve um acerto de 65%. Ao analisar as respostas assinaladas incorretamente, observou-se que a grande maioria tentou realizar um cálculo da soma dos caminhos, chegando a resposta de 12 possibilidades. (Esta opção correspondeu a 80% dentre os que erraram). Houveram somente 3 casos atribuídos a marcação de outras opções em que não se encontrou nenhum tipo de tentativa de construção da solução. Identificou-se uma relevante parcela que não conseguiu aplicar corretamente o conceito básico da combinatória.

Questão 2

2- Existem quatro estradas ligando duas cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. De quantos modos diferentes uma pessoa pode se deslocar da cidade A até a cidade C?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 12 e) 20

Nível: fácil

Também se trata de uma aplicação direta do princípio multiplicativo. Da cidade A até a B podem ser feitos 4 caminhos, e a partir de B mais outros 3 caminhos para se chegar até C, totalizando 4 x 3 = 12 maneiras.

Análise do grupo 1: 93,9% responderam corretamente. Um fato interessante nos 6,1% que responderam de forma errada (2 indivíduos), foi que ambos anotaram em seus rascunhos a construçao correta da solução: o produto de 4 por 3, mas chegando a um resultado errado na multiplicação. Atribuindo isto, como um “lapso de atenção”, reforça-se a conclusão obtida na questão 1, de que atingiu-se um efetivo êxito no conceito multiplicativo.

Grupo 2: somente 53,5% acertaram na contagem das possibilidades. Muitos assinalaram erroneamente que o total correspondia a 7 possibilidades, recorrendo a soma das estradas de acesso existentes. Houveram indivíduos que tentaram desenhar a situação e enumerá-las, mas que também concluíam que eram ao todo 6 ou 7 caminhos possíveis. Ocorreu ainda, justificativas quanto a resposta, que pra se chegar até a cidade B são 4 caminhos, e que estando na cidade B, para ir até C só restaria mais 3 possibilidades, ou seja, não apresentando uma correta compreensão de que cada possibilidade corresponde a uma composição escolhida em cada etapa do caminho.

Questão 3

3- (UFSC) Uma pessoa possui 5 camisas de cores diferentes entre si e 3 calças também de cores diferentes entre si. Sabendo-se que existem 3 camisas da mesma cor que as 3 calças, determine o número de trajes completos (calça e camisa) com que essa pessoa poderá se vestir, considerando somente calças e camisas de cores diferentes.

a) 5 b) 6 c) 8 d) 12 e)15

Nível : difícil

A compreensão total do enunciado é o principal destaque neste problema. Ao enfatizar a existência de 3 camisas com a mesma cor de 3 calças, deve-se concluir que há a possibilidade de se formar 3 trajes de mesma cor, e que estes não devem ser contados. O total de possibilidades é 3 x 5 = 15 e, eliminando os 3 casos de repetição de cores obtêm-se 15 – 3 = 12 possibilidades.

Análise do grupo 1: com 45,5% de acertos, foi possível constatar muitas assinalações em que obtinham o número 15, correspondente ao total, mas sem uma eliminação correta dos casos que poderia haver a repetição de cores. Alguns procederam eliminando 3 das camisas, obtendo 5 - 3 = 2 camisas, e multiplicando por 3 (referente ao nº de calças), chegaram ao resultado 6. Por este processo de construção elimina-se todas as construções com as blusas que possuem cores repetidas com calças, ao invés de eliminar somente o conjunto blusa-calça com mesmas cores.

Grupo 2: índice inferior de acertos, em 34,9%. Dentre os erros, foram os mais comuns o produto 2 x 3 = 6 (semelhante ao grupo 1), e a adição das camisas com as calças resultando em 8 possibilidades. Muitos atingiram o total, mas não foram capazes de eliminar os casos com repetição. Entre os acertos, observou-se em alguns casos a tentativa através da árvore de possibilidades. Todos que assim o fizeram, tiveram êxito na solução.

Questão 4

4- Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados?
a) 5   b) 4!   c) 5!   d) 6!

Nível : fácil

O objetivo é determinar a quantidade possível de anagramas. Fica inviável realizar estas possibilidades por escrito, logo coloca o aluno a utilizar uma técnica de contagem adequada. A quantidade de anagramas simples podem ser obtidas pelo cálculo do número de permutações simples (no qual não há repetições), através da forma: $P_n = n!$, Então para 5 elementos (letras) temos $P_5 = 5!$, opção c.

Análise do grupo 1: 87,9% de acertos, havendo somente 4 que responderam incorretamente, todos assinalando que haveria apenas 5 possibilidades. Entre estes, houve tentativa de construção de todos os anagramas, sendo cometido o equívoco de mudar todas as letras a cada nova formação, atingindo deste modo somente 5 construções possíveis.

Grupo 2: acertos em 90,7%, e como no grupo 1 somente 4 responderam incorretamente, havendo entre os erros, 2 casos de marcação da resposta 5 e outros 2 que assinalaram 6!, mas sem qualquer forma de rascunho ou construção de tentativa.

Questão 5

5- De quantas maneiras diferentes podemos organizar em fila, quatro DVDs diferentes em uma prateleira?
a) 12   b) 15   c) 20   d) 24

Nível: médio

A proposta dessa questão consiste em determinar de quantos modos diferentes pode-se dispor 4 elementos distintos. Este caso, consiste em uma permutação de 4 elementos. O número de permutações é dado por $P_n = n!$, logo consistem em $P_4 = 4!$ permutações:

$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Análise do grupo 1: apresentou 66,6% de acertos. No que se refere aos acertos, a grande maioria aplicou corretamente o uso do fatorial. Somente um indíviduo, dentre os que acertaram o problema, realizou a solução permutando elementos, atribuindo os números 1, 2, 3 e 4 como cada dvd, e para obter a solução, este fixou o número 1 e permutou o restante, chegando em 6 formações diferentes: 1234,1243,1324,1342,1423,1432, e então multiplicou por 4, abstraindo o raciocínio para os restantes, pois iniciando a fila com cada um dos dvds restantes, também se formariam 6 possibilidades. Quanto aos que erraram, houveram tentativas de construção permutando os números 1, 2, 3 e 4 (com os números representando cada dvd), mas nenhum conseguiu atingir o total corretamente, devido a grande quantidade, quase sempre chegando em 12 ou 15 possibilidades distintas.

Grupo 2: realizou acertos na faixa de 44%, e de forma semelhante ao grupo 1, os acertos foram exclusivos aos que conseguiram conciliar o problema á aplicação do fatorial. Muitos tentaram a construção das permutações, mas falharam em conseguir o total correto. Alguns casos com tentativa por aplicação do princípio multiplicativo, mas com falhas na execução dos cálculos.

Questão 6

6- O número de anagramas que podem ser formados com as letras do nome **ALEMANHA**:

a) A palavra tem 8 letras, logo são **8!**
b) A palavra tem 8 letras, mas 3 são repetidas, logo são **6!**
c) A palavra tem 8 letras, mas possui letras repetidas, logo são **8!** dividido por **2!**
d) A palavra tem 8 letras, mas possui 3 letras repetidas, logo são **8!** dividido por **3!**

Nível : médio

Nesta, o aluno deve associar corretamente, o número de anagramas a quantidade de permutações de 8 elementos. Uma atenção especial precisa ser dada a existência da repetição de elementos (no caso, incidência de três letras “A”). Assim, trata-se de uma permutação de elementos com repetição. Aplicando-se a teoria formulada de permutações com repetição, deve-se suprimir tais repetições, dividindo a quantidade de permutações de todos os elementos, pelo fatorial da quantidade de elementos em repetição. Obtemos, assim:

$P_8 = 8!$

Temos a repetição de elementos, na forma de 3 elementos iguais, logo 3!. Então, o total de anagramas é 8!/3!.

Análise do grupo 1: Obteve um bom índice de 75,7%. Se notou que, o erro mais comum foi assinalar 8!:2!, não percebendo a existência de 3 elementos repetidos. Uma pequena parcela que não marcou de forma correta, responderam somente 6!, provavelmente por eliminar as repetições do total de letras a serem permutadas.

Grupo 2: Obteve um índice de 65,1% de acertos, sendo um pouco inferior ao grupo 1. Nos erros, foram muito comuns as respostas de 8! ou de 8!:2!, indicando o não reconhecimento das repetições existentes. Os rascunhos feitos não foram suficientes para mais observações.

Questão 7

7- (UFRRJ – 2003) Caroline vai todos os dias à sorveteria para saborear um “sorvetão” (um sorvete formado por duas bolas de sabores diferentes). Sabe-se que há um total de 15 sabores diferentes de sorvetes na sorveteria. Se Caroline saborear apenas 1 “sorvetão” por dia, e se considerarmos que a ordem das bolas não importa, ela terá experimentado todos os possíveis “sorvetões” em quantos dias?

Para se calcular o número de possibilidades nesta questão, devemos:

a) calcular o produto **15 x 2**.
b) calcular o número de combinações **$C_{15,2}$**.
c) calcular o número de arranjos **$A_{15,2}$**.
d) calcular o valor de **15!.**

Nível : difícil

O primeiro passo é identificar que o número de dias corresponde ao número de possibilidades de sorvetes. A seguir, observar que consiste em determinar todas as possibilidades de um agrupamento de 15 elementos tomados 2 a 2. No enunciado, explicita claramente que a ordem não tem relevância, tratando-se então de uma combinação. Logo, basta determinar o valor de $C_{15,2}$.

Análise do grupo 1: Com uma grande taxa de acerto (93,9%), souberam reconhecer com clareza a formação de agrupamento e da não importância da ordem na situação. Somente 2 indivíduos não conseguiram acertar, no qual ambas respostas dadas foram referentes ao produto 15 x 2.

Grupo 2: O porcentual de acerto foi de 16,3%. Foi a questão com a menor taxa de acertos, em que muitos compreenderam que se tratava de uma questão multiplicativa (37% das respostas), não reconhecendo a formação de agrupamento dentro do problema. Outros apesar de, identificar se tratar de agrupamentos, não identificaram corretamente a relação entre arranjo ou combinação. A opção mais assinalada, com 44% dos indivíduos, foi como se tratando de um arranjo de 15 elementos 2 a 2.

Questão 8

8- (UFF - 05) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

Para se determinar o número de possibilidades de escolha, devemos:

a) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3 não importando a ordem, logo são $\mathbf{C_{8,3}}$
b) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3 de acordo com uma ordem, logo são $\mathbf{A_{8,3}}$
c) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3 em ordem, logo são **3!**
d) Entre 8 pontos, serão escolhidos 3, logo são apenas 5 possibilidades.

Nível : médio

É necessário determinar de quantas maneiras pode-se escolher 3 locais entre um total de 8, o que constitui num agrupamento de 8 elementos tomados 3 a 3. Sendo assim, basta identificar se esta situação forma uma combinação ou um arranjo. Como independe da ordem escolhida, corresponde a uma combinação $C_{8,3}$.

Análise do grupo 1: Os acertos na taxa de 63,9% mostra que apresentaram maior dificuldade na identificação da combinação. Todos que acertaram este problema, também responderam corretamente a questão anterior. O fato de mencionar no enunciado que independe da ordem escolhida, teve relevância, pois não houve nenhuma resposta referente ao cálculo de um arranjo. A quantidade dos erros ficaram divididos entre as 2 últimas opções.

Grupo 2: semelhante a questão anterior, este grupo apresentou muita dificuldade na identificação do problema. Entre as tentativas de solução encontrou-se, combinações, arranjos e cálculos com fatoriais. As quantidades de marcações em cada resposta foram bem divididas: 27,9% assinalaram na 1ª opção (correta), 30,2% escolheram 2ª opção, 25,5% marcaram a 3ª opção e 16,4% na última opção.

Questão 9

9- Quantos anagramas pode-se formar com a palavra "**Palmeira**"?
a) 6! b) 7! c) 8! d) 8!/2! e)7!/2!

Nível : fácil

Trata-se de uma permutação de 8 elementos com repetição. Aplicando-se a teoria formulada de permutações com repetição, deve-se suprimir tais repetições, dividindo a quantidade de permutações de todos os elementos, pelo fatorial da quantidade de elementos em repetição. Obtemos, assim:

$P_8 = 8!$

Temos a repetição de 2 elementos, logo 2!.

Então, o total de anagramas é 8!/ 2!

Grupo 1: realizou um desempenho semelhante ao obtido na questão 6, com 66,6% de acertos. Os erros se deram, em sua totalidade as marcações das opções b e c. Aos indivíduos que assinalaram como resposta 7!, demonstram que excluíram a letra repetida do total de 8 letras. Apesar de observar a existência da repetição, procedeu de forma errada quanto ao raciocínio da contagem. Em contrapartida, os que marcaram como resposta o 8!, relativo a permutação das 8 letras, negligenciaram a repetição de elementos.

Grupo 2: obtiveram um índice de acertos pouco superior ao grupo 1 com 69,7%. Da mesma forma que ocorreu na questão 6, muitos demonstraram que souberam aplicar corretamente o raciocínio fatorial em anagramas, enquanto os indivíduos que responderam de forma errada se dividiram entre as opções restantes, mostrando muita dificuldade na forma de reduzir as repetições.

5 - Considerações Finais

A prática pedagógica é um exercício em constante transição, disposta a sofrer alterações para melhor adequar-se aos objetivos que se almejam atingir. O ensino da matemática não é diferente, apesar de ser um campo com raras mudanças conceituais provindas de novas descobertas. Outras áreas do saber como a linguagem, são constantemente reescritas por novas alterações, pesquisas, reformas ortográficas ou mesmo atualizações do idioma.

O ensino básico proposto pelas normas curriculares brasileiras deve ser efetivo, evidenciando a compreensão por parte do discente, ao saber resolver situações vivenciadas no mundo ao seu redor, ao invés de ser massivo, focado na aplicação de conceitos rígidos e formulados. Orientar o saber buscando que o aluno saiba desenvolver o raciocínio matemático torna-se a verdadeira função do professor. Realizar esta tarefa é dar sentido à essência da matemática.

Ao realizar este trabalho, me deparei com situações que a muito tempo não observava. Uma delas foi o gosto de ver os alunos realizarem atividades como se estivessem em uma oficina de arte. As tarefas realizadas, que a um grosso modo eram atividades simples de fazer, não necessitando de nenhuma habilidade artística específica, foram muito bem aceitas no grupo. Surgiu o comentário de que “não se parecia uma aula de matemática”, onde imediatamente me debati com a seguinte resposta: “Mas você está calculando coisas que não sabia fazer antes!”. Tais situações, me levaram a observar que estaria conseguindo os resultados desejados.

Logo nas primeiras atividades pude confirmar que os conceitos sobre o princípio multiplicativo passaram a fazer sentido para os alunos, quando um deles tentou se justificar de que não haveria mais pinturas possíveis construindo com os dedos uma espécie de árvore, ou seja, construiu seu próprio método de demonstrar a inexistência de outras formas de construção. Não creio que este conseguiria chegar a tal conclusão por abstração, se não tivesse feito atividades de construção manualmente aplicadas em uma situação problema.

Outra frase dita pelos alunos durante a realização das atividades que envolviam arranjo e combinação foi: “A diferença entre combinação e arranjo é que em uma delas você conta também com os grupos trocados.”. Mostrando que as atividades cumpriram plenamente seus objetivos, tendo em vista a grande dificuldade dos alunos compreenderem a diferença entre esses conceitos.

Estou convencido de que um aluno irá fazer determinada tarefa com gosto, a partir do momento em que tenha sentido o que está realizando. Esta oportunidade de realizar um processo de ensino construtivo aonde possa ver um aluno definir um conceito antes mesmo de apresentá-lo formalmente, torna-se muito gratificante profissionalmente.

Quanto à avaliação, obteve-se diferença significativa nos resultados quanto a compreensão dos conceitos. A parte onde houve mínima diferença percentual nos resultados consistiu na permutação de letras, corresponde exatamente a parte em que é mais simples conceber o processo de troca de elementos. Anagramas podem ser construídos mais facilmente na lousa ou nos rascunhos levando a uma rápida capacidade de abstrair para diferentes casos.

Acredito que devido aos resultados obtidos, possam ser impulsionados mais educadores a praticarem a construção dos conceitos matemáticos por uso de objetos concretos.

Como todo processo, este trabalho não está isento de melhorias, as quais já pretendo incorporar em projetos futuros, mas abro as portas para novas possibilidades de ensino que enfatizem a participação construtiva do aluno dentro da sala de aula nos conceitos matemáticos.

6 - Referências

[1] Agenciários.com/ agência Rio de Notícias – disponível em: <http://www.agenciario.com/municipios/fichaMun.asp?codMunic=37>. Acesso em: 10 de janeiro de 2015.

[2] ALVIM, Karina Guerra Cardoso. **Análise combinatória: Uma Questão de Lógica e Linguagens**. 2013. 56 f. Dissertação – Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Goiânia-GO, 2013.

[3] ARGENTO, Heloisa**. Teoria construtivista**. 2008. Disponível em: <http://www.robertexto.com/archivo5/teoria_construtivista.htm/>. Acesso em: 24 de abril de 2015.

[4] Azevedo, Guila Eitelberg. **Estágios do Desenvolvimento Segundo Piaget**. Disponível em: <http://www.aticaeducacional.com.br/htdocs/pcn/pcns.aspx?cod=54>. Acesso em 11 de abril de 2015.

[5] BIASOTO, José Eduardo. **Abordagem construtivista da aprendizagem da matematica**, 2011. Disponível em: <http://cienciabiasoto.com.br/abordagem-construtivista-da-aprendizagem-da-matematica/>. Acesso em: 17 de maio de 2015.

[6] BRASIL**. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries):** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC /SEF, 1998. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12657:parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series&catid=195:seb-educacao-basica>. Acesso em: 17 de maio de 2014.

[7] BRASIL**. Parâmetros Curriculares Nacionais Para O Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 18 de maio de 2014.

[8] CENSO Escolar 2013 - **QEdu-Meritt Informação Educacional**- Fundação Lemann disponível em: <http://www.qedu.org.br/brasil/censo-escolar>. Acesso em: 20 de maio de 2014.

[9] Centro Educacional Conviver, uma escola de olho no futuro. **Construtivismo.** Disponível em: <http://www.ceconviver.com.br/construtivismo.html>. Acesso em: 11 de abril de 2015.

[10] FERREIRO, Emilia e TEBEROSKY, Ana. **Psicogênese da Língua Escrita**. Artmed Editora. Porto Alegre. 1999.

[11] FREIRE, Paulo. ***Pedagogia do Oprimido****.* Rio de Janeiro. Paz e Terra, 1987.

[12] GASPAROTO, Lutécia. **Portal do Professor: Espaço da aula**, 2012. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769>. Acesso em: 13 de abril de 2014.

[13] HAMZE, Amélia. **Construção da aprendizagem**. 2010. Disponível em: <http://www.educador.brasilescola.com/gestao-educacional/construcao-da-aprendizagem.htm>. Acesso em: 22 de abril de 2015.

[14] INEP, 2013 - **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/basica-censo>. Acesso em: 20 de maio de 2014.

[15] JÓFILI, Zélia. **Piaget, Vygotsky, Freire e a construção do conhecimento na escola**. 2002. Disponível em: <http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/7560/7560.PDF>. Acesso em: 24 de abril de 2015.

[16] MACHADO, Antonio Dos Santos. **Matemática na escola do 2º grau** / Antonio dos Santos Machado: volume 2. São Paulo. Editora Atual, 1994.

[17] MARQUES, Ramiro - **A Pedagogia construtivista de Lev Vygotsky (1896-1934).** 2007. Disponível em: <http://www.eses.pt/usr/Ramiro/docs/etica_pedagogia/A%20Pedagogia%20construtivista%20de%20Lev%20Vygotsky.pdf> Acesso em: 17 de maio de 2015.

[18] Metodologia - Escola Nova. Disponível em: <http://www.escolanova.com.br/>. Acesso em: 17 maio 2015.

[19] MORO, Maria Lucia Faria - **Construtivismo e educação matemática** - Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 11, n. 1, pp. 117-144, 2009. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/2135/1659>, acesso em 11 abril 2015.

[20] NIEMANN, Flávia de Andrade; BRANDOLI, Fernanda - **Jean Piaget: um aporte teórico para o construtivismo e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Língua Portuguesa e da Matemática.** 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/770/71>. Acesso em: 17 de maio de 2015.

[21] OJE-Olimpíadas de Jogos Digitais e Educação, Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. Disponível em: <www7.educacao.pe.gov.br/oje/app/index/>. Acesso em: 15 de maio de 2014.

[22] Pacievitch, Thais. **Teoria cognitiva**. Disponível em: <http://www.infoescola.com/educacao/teoria-cognitiva>. Acesso em 11 de abril de 2015.

[23] PIAGET, Jean. **A equilibração das estruturas cognitivas**. Rio de Janeiro : Zahar, 1975.

[24] PIAGET, Jean. **Epistemologia genética**. São Paulo: Martins Fontes, 1990. Portal Educação – Cursos Online. Disponível em <http://www.portaleducacao.com.br/pedagogia/artigos/32647/as-contribuicoes-teoricas-de-jean-piaget#!1#ixzz3aPL7g3Ix>. Acesso em: 17 de maio de 2015.

[25] Projeto Memória Paulo Freire. Disponível em: <http://www.projetomemoria.art.br/PauloFreire/>. Acesso em: 11 de abril de 2015.

[26] Revista Escola Abril. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/>. Acesso em: 11 de abril de 2015.

[27] RIBEIRO, Adísio Anatoli. Adisio Ribeiro Web Site - **Programando e integrando pessoas**. Disponível em: <http://www.adisioribeiro.com.br/ Combina.htm>. Acesso em: 8 de julho de 2014.

[28] RIBEIRO, Igor Schmidke. **COMBS, Um Software de Apoio ao Ensino de Análise Combinatória**. 2013. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Matemática)- Departamento de ciências Exatas e Tecnológicas- Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, 2013.

[29] ROCHA, Enrique. **Raciocínio lógico para concursos: você consegue aprender: teoria e questões**. - 4. ed. rev. – Niterói, RJ: Impetus, 2012.

[30] SANCHES, Daiane Gomes. **Uma perspectiva construtivista para a superação das dificuldades de aprendizagem no ensino da Matemática.** 2012. 64 f. Monografia - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação Campinas-SP, 2012.

[31] SANTOS, Patrick Ferreira. **Uma Abordagem da Análise Combinatória Sem o Uso Abusivo de Fórmulas**. 2013. 55 f. Dissertação – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG, 2013.

[32] SILVA, Fernando Hugo Martins da. **O uso de objetos de aprendizagem como instrumento diferenciado para o ensino de Análise Combinatória**. 2013. 54 f. Dissertação de Mestrado – Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de pós-graduação em Matemática em rede nacional, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2013.

[33] VIGOTSKY, Lev Semenovich, 1896-1934. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem** – São Paulo – Ícone – Ed. Universidade de São Paulo – 1998.

[34] VILLANI, Alberto; PACCA, Jesuina Lopes de Almeida. **Construtivismo, conhecimento científico e habilidade didática no ensino de ciências.** Revista da faculdade de educação Scielo. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-255519970001 00011&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em 10 de abril de 2015.