A razão áurea e a sequência de Fibonacci

Marcelo Manechine Belini

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Marcelo Manechine Belini

A razão áurea e a sequência de Fibonacci

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA.*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
Novembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B431r

Belini, Marcelo Manechine
A razão áurea e a sequência de Fibonacci / Marcelo Manechine Belini; orientador Marcio Fuzeto Gameiro. -- São Carlos, 2015.
67 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Razão áurea. 2. Sequência de Fibonacci. I. Gameiro, Marcio Fuzeto, orient. II. Título.

Marcelo Manechine Belini

The golden ratio and the Fibonacci sequence

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*.

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
November 2015

A meus pais,
minha esposa
e minha filha.

"Não há ramo da matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa um dia
vir a ser aplicado aos fenômenos da vida real."
(Lobachevsky)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por todas as oportunidades que Ele me ofereceu e por todos os dias renovar em mim uma determinação que só Ele poderia me dar.

À minha esposa e minha filha, que sempre permaneceram ao meu lado, apoiando e incentivando. Que nos momentos mais difíceis me ofereceram carinho e amor para continuar a caminhada. Pela compreensão em relação ao pouco tempo que pude dedicar a elas e aos finais de semana que passei estudando.

Aos meus pais, que desde criança me incentivaram a estudar e não mediram esforços para que eu pudesse receber uma boa educação.

Ao professor Marcio, que me orientou com muita dedicação e paciência. Que soube esclarecer todas as minhas dúvidas com muita clareza e sempre se mostrou pré-disposto a me atender independente do horário ou do dia da semana.

À comissão organizadora do Profmat. A todos os demais professores do programa que mostraram um profissionalismo e uma dedicação muito grande.

Aos meus colegas de turma pelos dias que passamos juntos, pelas horas afins de estudo e pela família que no tornamos.

Resumo

A razão áurea e a sequência de Fibonacci

O presente trabalho irá abordar dois temas matemáticos de diferentes contextos históricos mas que apresentam uma relação intrínseca com o número ϕ, mais conhecido como número de ouro.

Partiremos de uma breve descrição dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e algumas propriedades dos números racionais para, em seguida, deduzirmos os números irracionais $\mathbb{I}$ e, enfim, os números reais $\mathbb{R}$.

Na sequência vamos trabalhar com dois problemas muito antigos: o primeiro aparece na coletânea de livros *Os Elementos* do matemático grego Euclides, 300 anos a.C., e diz respeito à divisão de um segmento em média e extrema razão e, o segundo, foi publicado no livro *Liber Abaci* do matemático italiano Leonardo Fibonacci, século XIII, e trata da reprodução de coelhos e a sequência a qual ela origina.

Veremos que o número de ouro aparece em ambos os problemas e vem ao longo dos séculos desencadeando muitas teorias que tratam de padrões e beleza. Abordaremos situações do passado e do presente que fazem uso desses padrões, além de fenômenos da natureza.

Também apresentaremos um conjunto de atividades para orientar professores do ensino médio de como trabalhar, numa perspectiva interdisciplinar com vários conteúdos da matemática, e o número ϕ.

Palavras chaves: Razão áurea, sequência de Fibonacci.

Abstract

The golden ratio and the Fibonacci sequence

This work addresses two mathematical topics from different historical contexts but that have an intrinsic relationship with the number ϕ, better known as the golden number.

We start with a brief description of the numerical sets $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and some properties of rational numbers, and then deduct the set of irrational numbers $\mathbb{I}$ and, finally, the set of real numbers $\mathbb{R}$.

In the sequence we work with two very old problems: the first appears in the collection of books *The elements* of the Greek mathematician Euclid, 300 years BC, and concerns the division of a segment in extreme and mean ratio, and the second, published in the book *Liber Abaci* of the Italian mathematician Leonardo Fibonacci, in the thirteenth century, and deals with the breeding of rabbits and the sequence which it originates.

We will see that the golden number appears on both problems and has over the centuries triggering many theories dealing with standards and beauty. We discuss situations of past and present that makes use of these standards, as well as natural phenomena.

We also present a set of activities to guide middle school teachers on how to work in an interdisciplinary perspective with various mathematical content, and the number ϕ.

Key words: Golden ratio, Fibonacci sequence.

Sumário

Introdução

Sousa (2004) [31] define a busca da humanidade como sendo uma eterna resolução de problemas, que possibilitam compreender e interferir no mundo a sua volta; Caraça (apud Souza, 2004) afirma que o conhecimento matemático está ligado à busca de soluções de problemas e isso faz com que o homem adquira conhecimento de natureza física e social.

Atualmente, as escolas públicas e, principalmente particulares, apresentam um currículo de matemática cada vez mais fragmentado e na contramão do que defendem os autores citados acima. Os livros didáticos analisados se enquadram nessa mesma perspectiva. Geralmente, trazem no início do capítulo uma situação problematizadora relacionada a temas atuais com o intuito de mobilizar os alunos, mas depois abordam o conteúdo de maneira desarticulada da realidade e terminam com uma lista de exercícios e problemas. Este trabalho tem por objetivo a elaboração de um conjunto de atividades que relacione diferentes conteúdos matemáticos através de um tema central, pelo próprio desenvolvimento histórico da matemática e com a abordagem de situações cotidianas.

Para Sousa (2004) [31], os conceitos matemáticos surgem a todo o momento e a humanidade usa o novo e o velho para que o homem possa compreender melhor o mundo. Esse constante movimento faz com que os conceitos sempre se aprimorem. Porém, D'ambrósio (1989) [10], em seus estudos, afirma que os alunos acreditam que a matemática é um apanhado de fórmulas e algoritmos e pensam que fazer matemática é seguir e aplicar regras.

Queremos aqui desconstruir esse pré-conceito de que a matemática não pode ser modelada e fazer parte do cotidiano dos alunos. Vale lembrar que a grande maioria dos alunos do ensino médio gostam de filmes e livros de fantasia e ficção, em que os personagens principais são vampiros, mutantes, super-heróis, criaturas místicas, etc. Por que não moldar a matemática assim? O número de ouro e a sequência de Fibonacci nos dão essa possibilidade. Muitas teorias e vídeos da internet tratam desse tema de maneira fantasiosa e até mesmo divina, com certo caráter provocador à imaginação. Cabe a cada um dos alunos definir o nível de crença e veracidade dos assuntos e ao professor mediar tudo isso.

Para conseguirmos trabalhar com as atividades propostas, começaremos com o estudo dos conjuntos numéricos. Para tal, sugere-se o uso de uma linguagem menos formal que contemple a construção histórica desses conjuntos através das situações que mobilizaram o surgimento dos novos números, inclusive fazendo uso do teorema de Pitágoras e de propriedades aritméticas. Depois, vamos trabalhar com conceitos geométricos da Grécia Antiga, que retrata a razão áurea e o número de ouro, fazendo relação com a resolução de equações do 2º grau e cálculo de potências; também vamos analisar o uso da razão áurea em construções arquitetônicas, nas obras de arte e na música. Por fim, vamos abordar a construção de sequências numéricas e, em particular, a sequência de Fibonacci, estudar algumas propriedades importantes e observar como os números de Fibonacci aparecem em fenômenos naturais.

Enfim, esperamos proporcionar mais uma possibilidade de trabalho para a sala de aula e ajudar na prática de professores do ensino médio.

Capítulo

1

Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$

Este capítulo tem por objetivo descrever os conjuntos numéricos, de maneira intuitiva, fazendo uso do contexto histórico e, ao mesmo tempo, fazer a análise formal da definição de cada conjunto e de suas propriedades, respeitando sempre o grau de complexidade aceitável para alunos do ensino médio.

1.1 Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$

Caraça (1959) [7] relaciona o surgimento dos números naturais à necessidade do homem de contar objetos.

"... esse conceito deve, durante muitos séculos, ter estado identificado, por assim dizer, com os objetos a que dizia respeito; só muito mais tarde adquiriu o caráter de generalidade e abstração com que hoje o usamos. Foi certamente assim para os primeiros matemáticos gregos... Em Euclides (cerca de 300 a.C.) encontra-se já uma noção de um número natural mais elaborada sem, no entanto, possuir o caráter de generalidade que lhe damos hoje." (Caraça, 1959, p. 4)

De modo "bem simples"definimos os números naturais como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}. \tag{1.1}$$

É possível estabelecermos que o conjunto $\mathbb{N}$ é o conjunto de números que satisfaz os axiomas de Peano:

Axioma 1.1. *Todo número natural tem um sucessor. Este sucessor também é um número natural. Números diferentes tem sucessores diferentes.*

Axioma 1.2. *Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este é o número* 1*.*

Axioma 1.3. *Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e o sucessor de todos os seus elementos, então esse conjunto é o próprio* $\mathbb{N}$*.*

Note que o conjunto dos números naturais é fechado para as operações de adição e multiplicação, ou seja, quaisquer dois números naturais que somarmos ou multiplicarmos resultará em um novo número natural. O mesmo não podemos afirmar em relação as operações de subtração e divisão, por exemplo, não conseguimos realizar as operaçõoes $2-3$ ou $2 \div 3$, desta forma, há a necessidade de se criar um novo conjunto numérico.

1.2 Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$

Com o desenvolvimento do raciocínio matemático e de suas aplicações, surgiram algumas situações ainda não definidas na perspectiva de se trabalhar somente com os números naturais. Foi o que ocorreu na China antiga. Eles operavam com os números naturais precedidos por uma barra vermelha ou por uma barra preta, que tinham significados opostos. Era a ideia "primitiva" de números negativos e positivos, usados em situações diversas para representar excesso e falta. Apesar de operar facilmente com esses novos "entes" matemáticos, os chineses, assim como aconteceu com Diofanto de Alexandria (século III), não os consideravam verdadeiros para solucionar algumas equações. Nestas situações, Diofanto limitava-se a classificar o problema como absurdo. Já os europeus, nos séculos XVI e XVII, admitiam que esses problemas tinham soluções falsas ou impossíveis. Assim o fez Michael Stifel (1487-1567) que se negou a admitir os números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurd". Cardano chamou-os de "numeri ficti". Apenas no século XVIII, houve uma interpretação dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas. Assim, o 1 seria um segmento de uma unidade para a direita enquanto que o -1 seria um segmento de uma unidade para a esquerda. Agora sim, fazia sentido pensarmos no elemento neutro:

Caraça (1959) [7] atribui a existência de um símbolo para o zero (0) às exigências da numeração escrita.

"Se bem que a ideia de zero, de não-existência, esteja sem dúvida ligada à noção de quantidade, a verdade é que, nem nas mais antigas civilizações conhecidas, nem nos povos mais primitivos de hoje, se encontra o zero tomado como número nem o uso de um símbolo para o zero. Este é relativamente recente e a sua introdução foi devida às exigências da numeração escrita." (Caraça, 1959, p. 15)

Seguindo a ideia do autor citado, o zero será considerado um número inteiro, o elemento neutro separador dos números positivos e negativos. Teremos, então, o conjunto dos números inteiros como o conhecemos hoje:

$$\mathbb{Z} = \{... - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}. \tag{1.2}$$

Comparando-o com o conjunto dos números naturais, vemos que apesar dos números realmente usados no processo de contagem natural serem os inteiros positivos, os inteiros negativos conseguiram preencher uma lacuna que existia, quando se pensava em comparação de medidas e grandezas. Esta criação humana dos inteiros foi, portanto, fundamental para o desenvolvimento não só da matemática, mas de toda a ciência de uma maneira geral, pois hoje, vemos com muita naturalidade uma representação numérica negativa quando analisamos a temperatura de um local ou um extrato bancário.

Também podemos entender os inteiros negativos como o conjunto de todos os números opostos dos inteiros positivos, assim -1 é o oposto de 1, -2 é o oposto de 2 e etc. Note que a soma de dois números interios opostos resultará no elemento neutro da adição, o número zero.

O conjunto $\mathbb{N}$, portanto, está contido no conjunto $\mathbb{Z}$, representamos por $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Assim, podemos afirmar que $\mathbb{Z}$ é fechado para as operações de adição, multiplicação e, também, para a subtração, no entanto, a divisão entre dois números inteiros nem sempre resultará em um novo número inteiro. Outro fator que impulsionou o surgimento de um novo conjunto numérico, foi a falta do inverso multiplicativo, ou seja, um número inteiro que multiplicado por outro número inteiro ressultasse em 1.

1.3 Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

De acordo com Caraça (1959) [7], os números fracionários surgiram naturalmente.

"O conhecimento dos números fracionários é muito remoto. Eles introduziram-se naturalmente no cálculo pela necessidade de exprimir numericamente a medida de certas grandezas." (Caraça, 1959, p. 35)

Segundo o conhecimento histórico questões envolvendo números fracionários já apareciam no "Papiro de Rind" documento egípcio datado de 1500 a 2000 a.C. Na Grécia, os números fracionários eram determinados pela razão entre dois segmentos. Já nos dias atuais trabalhamos no Ensino Médio com uma definição mais formal. É comum apresentarmos aos alunos a seguinte definição do conjunto dos números racionais.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x\colon x = \frac{p}{q}, \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}. \tag{1.3}$$

Podemos definir também o conjunto $\mathbb{Q}$ como sendo o corpo de frações de $\mathbb{Z}$.

A seguir é possível explorar algumas propriedades dos números racionais.

Propriedade 1.4. *(Igualdade dos números racionais) Vamos considerar dois números racionais, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Então, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \times d = b \times c$.*

Propriedade 1.5. *(Representação dos números racionais) Todo número racional pode ser escrito na forma de fração, ou seja, todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde a é um número inteiro e b é um número natural. Podemos formalizar ainda mais essa propriedade dizendo que todo número racional pode ser escrito na forma de fração irredutível, ou seja, na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si.*

Abaixo, vamos definir a soma e a multiplicação de números racionais por:

- Considerando $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais, definimos a operação de adição da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) + (b \times c)}{b \times d}$$

- Considerando $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais, definimos a operação de multiplicação da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Agora listaremos as propriedades, associativa, comutativa, do elemento neutro e do simétrico para a adição e as propriedades associativa, comutativa, do elemento neutro e do inverso para a multiplicação.

Adição

1. Associativa.

   Quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$.

2. Comutativa.

   Quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.

3. Elemento Neutro.

   Temos que $0 \in \mathbb{Q}$. Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tem-se que $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$.

4. Simétrico.

   Todo elemento $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tem um simétrico $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$.

Multiplicação

1. Associativa.

   Quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$.

2. Comutativa.

   Quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

3. Elemento Neutro.

   Temos que $1 \in \mathbb{Q}$. Para todo $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tem-se que $\dfrac{a}{b} \times 1 = \dfrac{a}{b}$.

4. Inverso.

   Todo elemento $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $a \neq 0$ tem um inverso $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = 1$.

Dizemos que o conjunto dos números racionais é fechado para as operações de adição e multiplicação, possui inverso aditivo e multiplicativo e, portanto, $\mathbb{Q}$ é um corpo.

Pelo fato de todo número inteiro poder ser representado na forma de fração, por exemplo: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$..., é possível afirmar que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais e, representamos por $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Mesmo o conjunto dos números racionais contendo tantas propriedades e representando um corpo no que diz respeito a Análise Real, ele tornou-se vulnerável para as necessidades dos homens e suas descobertas. Sendo assim, um novo conjunto numérico, diferente de tudo que havia até então, se fez necessário. A esse conjunto se deu o nome de conjunto dos números irracionais.

1.4 Conjunto dos Números Irracionais $\mathbb{I}$

Para Caraça (1959) [7], os números irracionais tiveram origem na geometria e na aritmética.

"A origem histórica da necessidade da criação dos números irracionais deve-se simultaneamente a fatos, intimamente relacionados, de ordem geométrica e aritmética." (Caraça, 1959, p. 87)

Do ponto de vista geométrico, a escola pitagórica tratava os números irracionais como o resultado da divisão de segmentos incomensuráveis entre si, ou seja, segmentos que não possuem uma medida comum entre si. Já na ótica da aritmética, os números irracionais representam a impossibilidade da existência de números racionais para tais segmentos.

O fato dos pitagóricos conhecerem os números irracioanais não implicou na construção de um novo conjunto numérico. Eles continuaram considerando apenas os números racionais para a evoluação de suas teorias geométricas. Porém os segmentos incomensuráveis mostravam que existiam outros números além dos números racionais. Em uma linguagem mais simples, significa dizer que os números racionais apresentam "buracos" quando se tenta estabelecer uma relação biunívoca entre eles e os pontos de uma reta.

Figueiredo (1996) [14] também aborda a incomensurabilidade da diagonal do quadrado da seguinte forma:

"... a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento 1, então a hipotenusa não é racional. Portanto, o ponto P da reta r, obtido traçando-se a circunferência centrada em 0 e raio igual à hipotenusa, não corresponde a um racional." (Ver Figura 1.1) (Figueiredo, 1996, p. 4)

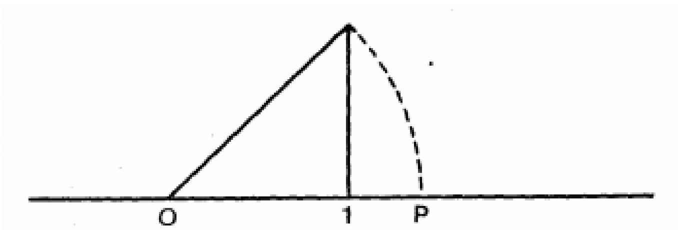


Figura 1.1: Hipotenusa do triângulo isósceles de lado 1.

É fácil de compreender que esse processo geométrico gera uma infinidade de segmentos incomensuráveis. Ora, basta tomarmos um triângulo retângulo isósceles e teremos a hipotenusa em função da $\sqrt{2}$. Generalizando para um triângulo retângulo isósceles de lado l, temos que a medida da hipotenusa é $l\sqrt{2}$.

Agora para que não reste dúvidas de que o número $\sqrt{2}$ não é um número racional, vamos fazer uso da aritmética. Vejamos duas propriedades dos númeos naturais:

Propriedade 1.6. *O quadrado de todo número natural par também é par.*

Demonstrção: De fato, se $n \in \mathbb{N}$ é par, então existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2m$. Daí $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot 2m^2$, sendo $2m^2 \in \mathbb{N}$. Portanto n^2 é par. $\square$

Propriedade 1.7. *O quadrado de todo número natural ímpar também é ímpar.*

Demonstração: De fato, se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2m + 1$. Daí $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2 \cdot (2m^2 + 2m) + 1$, sendo $2m^2 + 2m \in \mathbb{N}$. Portanto n^2 é ímpar. $\square$

Proposição 1.8. *O número $\sqrt{2}$ não é um número racional.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então existem $a, b \in \mathbb{N}$, com $mdc(a,b) = 1$, tal que $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$. Daí, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$
$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$
$$a^2 = 2b^2$$

Então a^2 é par e pelas Propriedades **1.7** e **1.8** a também é par. Consequentemente, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2m$. Logo:

$$(2m)^2 = 2b^2$$
$$4m^2 = 2b^2$$
$$2m^2 = b^2$$

Então b^2 é par e, novamente pelas Propriedades **1.7** e **1.8** , b também é par.

Como a é par e b também é par, podemos afirmar que o $mdc(a,b) \geq 2$, contrariando a hipótese.

Portanto $\sqrt{2}$ é um número **irracional**. $\square$

A formalização do conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$, que também representamos por $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, foi feita por Eudoxo em sua obra intitulada *Teoria das Proporções*.

Vale resaltar que o conjunto dos números irracionais não apresenta uma estrutura, ou seja, não é fechado para nenhuma das operações. Podemos observar dois exemplos bem simples: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$.

1.5 Conjunto dos Números Reais $\mathbb{R}$

Ávila (2006) [2] destaca que o desenvolvimento matemático ocorreu naturalmente, mesmo não havendo a formalização dos conjuntos numéricos.

"A Matemática desenvolveu-se extensamente nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XIX, mesmo sem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos. Trabalhavam-se livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento." (Ávila, 2006, p. 55)

Conforme a citação do autor, os números irracionais não foram um impecilho para o desenvolvimento da matemática. Na verdade eles vierem trazer um certo conforto, pois finalmente tinha-se criado um conjunto completo. A união dos números racionais com os números irracionais deu origem ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Pela primeira vez o homem havia criado um conjunto numérico sem "buracos", onde cada número real se corresponde biunivicamente com os pontos de uma reta. (Ver Figura 1.2 abaixo)

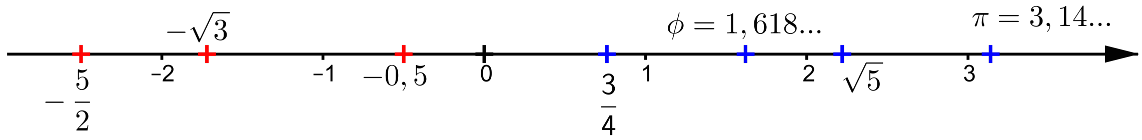


Figura 1.2: Representação dos números reais na reta.

Capítulo 2

A razão áurea e o número de ouro

Segundo Livio (2011) [21], a razão áurea representa uma jóia preciosa.

"A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro a Proporção Áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa" (LIVIO, 2011, p. 79).

A matemática é uma ciência em constante construção e abre cada vez mais um leque de aplicações. Apesar dessa imensidão de números e conceitos, há alguns que nos surpreendem e aparecem nas situações mais diversas. Só para citar um exemplo, vejamos o número π (pi). Ele é obtido pela razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida de seu diâmetro. Não é difícil de entender que esse número apareça no cálculo da área do círculo e no cálculo da superfície e volume da esfera, uma vez que essas formas possuem circunferências. Agora, como explicar a existência desse número em estatística, na função exponencial e ainda em soma de séries numéricas como $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ...$?

Outro desses números surpreendentes, e foco desse estudo, é o número de ouro, também conhecido como razão áurea ou proporção divina. Há séculos este número vem sendo objeto de estudos acadêmicos ou protagonista em contos da literatura. Mario Livio, astrônomo norte americano do Instituto Científico do Telescópio Espacial Hubble, escreveu um livro inteiramente sobre ele: *A Razão Áurea* (*The Golden Ratio*, Review, Londres) [21]. Já Dan Brown, outro escritor norte americano, cita por várias vezes o número de ouro em seu livro *O Código Da Vinci*.

O número de ouro é um número irracional representado pela letra ϕ e equivale ao valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, aproximadamente 1,618 (veremos a demonstração desse resultado na página 16). A letra ϕ só começou a ser usada no século XX pelo matemático norte-americano Mark Barr, em honra a Phídias, arquiteto do Partenon. As designações "razão áurea" e "número de ouro" aparecem pela primeira vez em meados do século XIX em trabalhos alemães. A expressão "proporção divina" se deve a Fra Luca Pacioli (1445 - 1517).

Comecemos pelo princípio. Há relatos que os egípicios usaram a razão áurea durante a construção de suas pirâmides 2500 anos a.C. e que o pentagrama, símbolo dos pitagóricos, foi escolhido por apresentar a proporção divina 500 anos a.C.

Figura 2.1: As pirâmides do Egito.

Figura 2.2: Pentagrama: símbolo dos pitagóricos.

No final deste capítulo, veremos dez passos para se construir um pentagrama e analisaremos a proporção áurea existente entre os vários segmentos do símbolo dos pitagóricos. Também iremos demonstrar que a razão entre a medida do apótema da pirâmide e a medida de sua altura resulta em um número muito próximo de ϕ.

Na mesma época, os arquitetos de Péricles, construíram o Partenon, ou Templo da Deusa Atenas. Quando seu frontispício ainda estava intacto, a razão entre a largura e a altura era um número que muito se aproximava do número ϕ. Isto nos faz perceber a preocupação do arquiteto em construir uma obra com proporções harmônicas.

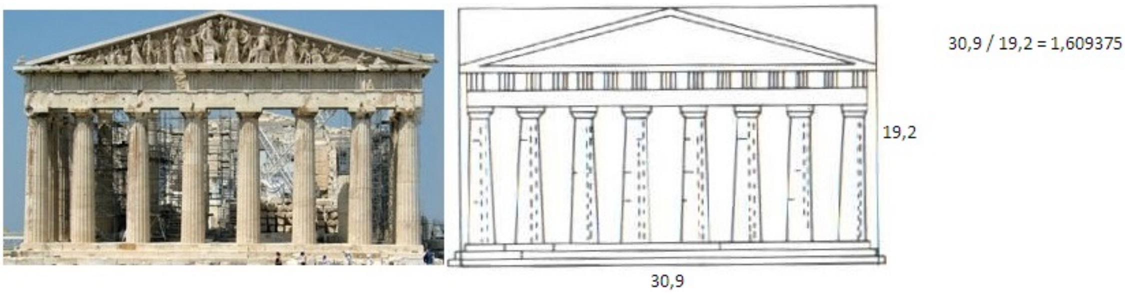


Figura 2.3: Partenon: construção do arquiteto grego Phídias. Modelo matemático.

No entanto, não há evidências históricas de que esses povos conheciam e trabalhavam com a razão áurea. O primeiro registro que se tem desse número nos leva a coletânea *Os Elementos* de Euclides, uma das obras mais influentes da matemática.

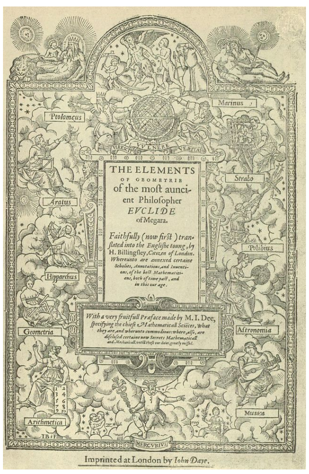


Figura 2.4: Ilustração da capa da primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa do livro *Os Elementos* de Euclides, de 1570.

Em seu livro, Euclides define a "divisão de um segmento em média e extrema razão" como a divisão de um segmento em duas partes desiguais com uma propriedade bem particular: o quociente entre o segmento inteiro e a parte maior é igual ao quociente do segmento maior pelo segmento menor.

Proposição 2.1. *A divisão de um segmento em média e extrema razão determina o valor de ϕ.*

Demonstração: Vamos supor que o segmento inteiro tenha medida igual a 1. (Ver Figura 2.5)

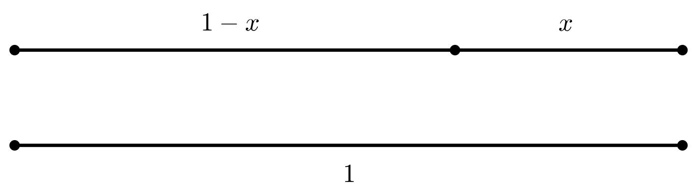


Figura 2.5

Efetuando os cálculos, temos que essa proporção corresponde precisamente a ϕ. Vejamos:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{x} = \phi \tag{2.1}$$

Sendo assim, é possível afirmar que:

$$\phi = \frac{1}{1-x}$$

$$\phi = \frac{1-x+x}{1-x}$$

$$\phi = \frac{1-x}{1-x} + \frac{x}{1-x}$$

$$\phi = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\phi = \frac{\phi + 1}{\phi}$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, determinamos o valor numérico de ϕ.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{2.2}$$

$\square$

A outra raiz da equação $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, não será solução do problema porque representa um número negativo, porém essa raiz pode ser escrita na forma $1 - \phi$ já que $1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e será utilizada no Capítulo 3.

Manipulando um pouco a equação $\phi^2 = \phi + 1$ obtida acima, é possível encontrar algumas propriedades interessantes e importantes para a representação do número de ouro.

2.1 Diferentes formas de representação do número de ouro

Dividindo todos os termos da equação $\phi^2 = \phi + 1$ por ϕ, obtemos:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \tag{2.3}$$

Ora, se $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, então podemos tornar esse processo infinito e teremos o número de ouro representado por uma série de frações contínuas.

Proposição 2.2. *O número ϕ pode ser escrito pela expressão:*

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1...}}}$$

Demonstração: Seja n o número de parcelas que compõe a série de frações contínuas que representa ϕ. Denote esta série por $\phi(n)$. Podemos verificar que:

$$\phi(1) = 1$$

$$\phi(2) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\phi(3) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1,5$$

$$\phi(4) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1,666...$$

$$\vdots$$

$$\phi(n) = 1 + \frac{1}{\phi(n-1)} \tag{2.4}$$

Partindo da hipótese que $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = x$ então $\lim_{n\to\infty} \phi(n+1) = x$.

Daí:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\phi(n)}\right) = x$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\phi(n)} = x$$

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Como $\phi(n) \geq 1$, então $\lim_{n\to\infty} \phi(n) \geq 1$. Novamente, não vamos considerar a raiz $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto $x = \phi$, como queríamos.

□

De maneira análoga, é possível mostrar que ϕ pode ser escrito com o uso infinito de radicais:

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}} \tag{2.5}$$

Esta será uma das atividades propostas para a sala de aula e a veremos no Capítulo 4.

Isso nos leva agora a refletir geometricamente sobre outras formas de representação do número de ouro.

2.2 Representação geométrica do número de ouro

1. Como dividir geometricamente um segmento em razão áurea?

Para obter geometricamente o número ϕ, podemos partir de um segmento de reta com extremidades em A e B e determinar um ponto D entre A e B, tal que, a razão entre o segmento AB e o segmento AD seja $\phi = 1,618...$.

Observe como obter geometricamente o ponto D.

Construa um segmento AB. Trace duas circunferências de mesmo raio e que se intersectam em dois pontos: uma de centro em A e a outra de centro em B. Agora trace a reta mediatriz (reta azul) unindo os pontos que representam a intersecção entre as circunferências, ver Figura 2.6.

A intersecção entre a reta mediatriz e o segmento AB representa o ponto médio do segmento (ponto M em vermelho).

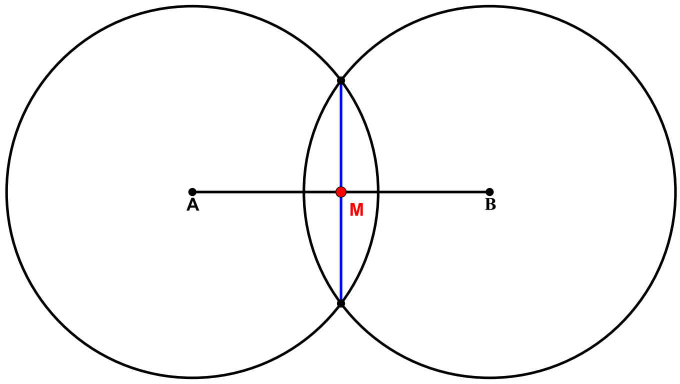


Figura 2.6: Segmento AB dividido pela reta mediatriz.

Trace uma reta perpendicular ao segmento AB, passando por B. Construa uma circunferência de centro em B e raio BM. Marque o ponto de intersecção entre a circunferência e a reta perpendicular ao segmento AB (ponto C).

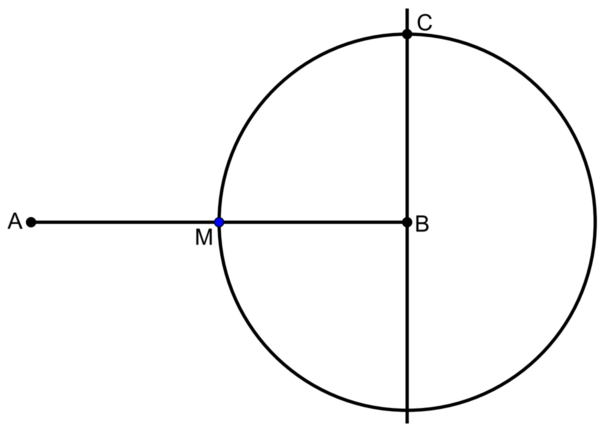


Figura 2.7: Segmento BC construído na reta perpendicular ao segmento AB.

Ligue os pontos A e C para construir o triângulo ABC.

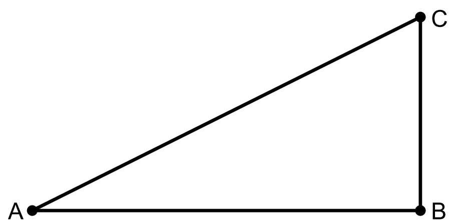


Figura 2.8: Triângulo ABC.

Agora construa duas circunferências: uma com centro em C e raio BC e a outra com centro em A e tangente a primeira circunferência. Marque o ponto de intersecção da circunferência de centro em A e o segmento AB (ponto D em vermelho).

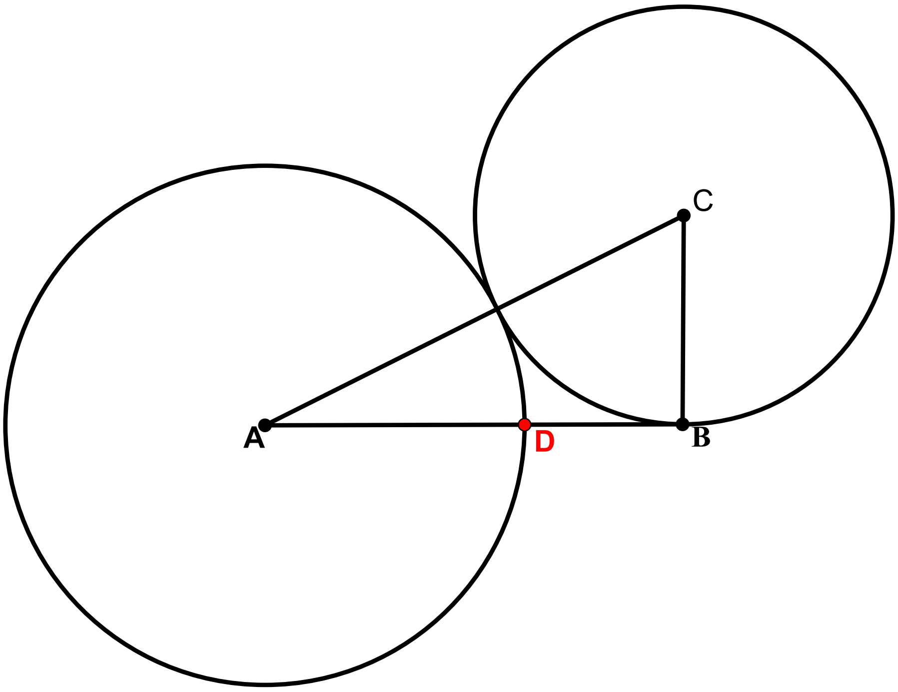


Figura 2.9: O ponto D divide a o segmento AB na razão áurea.

Pronto! O ponto D divide o segmento AB na razão áurea, ou seja:

$$\frac{AD}{BD} = 1,618... = \phi$$

.

Agora vejamos a verificação algébrica:

Vamos considerar que o segmento AB tenha medida a, então o segmento BC tem medida $\frac{a}{2}$ e usando o teorema de Pitágoras é fácil de verificar que o segmento AC tem medida $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Como visto na Figura 2.9 o segmento AD tem medida igual a $a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$, ou seja, $a\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$. Já o segmento BD tem sua medida determinada pela expressão $a - a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, ou seja, $a\frac{(3-\sqrt{5})}{2}$.

Calculando a razão entre os segmentos AD e BD, temos:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{a\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}}{a\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{2.6}$$

2. Como conseguir um segmento que tenha exatamente o tamanho de ϕ?

Como o objetivo é encontrar um segmento que tenha o tamanho de ϕ, vamos construir um quadrado $ABCD$ de lado igual a 1. Tomamos o ponto médio de um dos lados (ponto M em azul) e traçamos uma circunferência de centro em M e raio de medida igual ao segmento MC. Usando o teorma de Pitágoras no triângulo MBC encontramos que o raio MC tem medida igual a $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

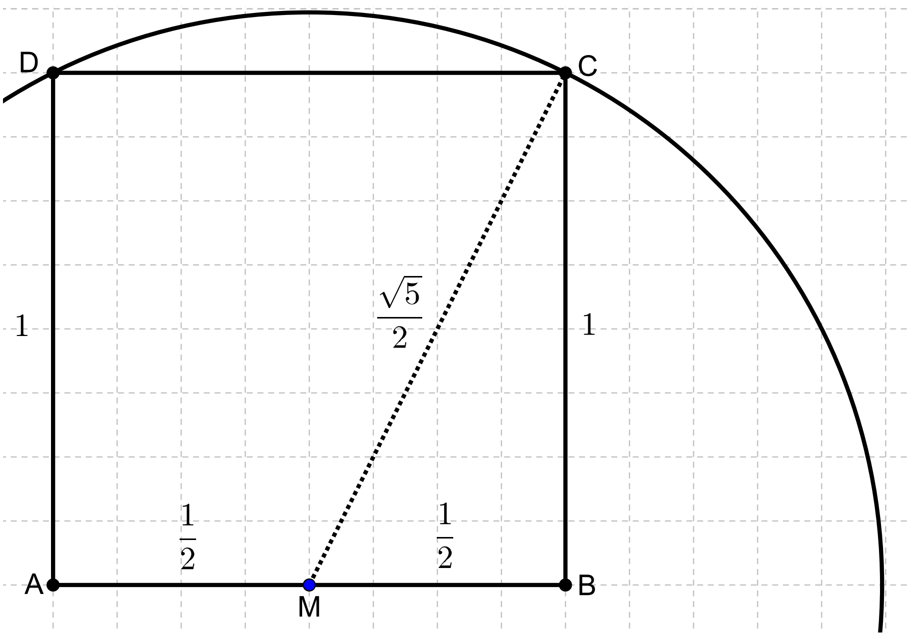


Figura 2.10: Construindo um segmento de medida ϕ a partir de um quadrado.

Agora, basta fazer o prolongamento do segmento AB até intercectar a circunferência. Chamaremos o ponto de intersecção de ponto D. Como o segmento AM tem medida igual a $\dfrac{1}{2}$ e o segmento MD tem medida igual a $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, então o segmento AD terá medida igual a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$.

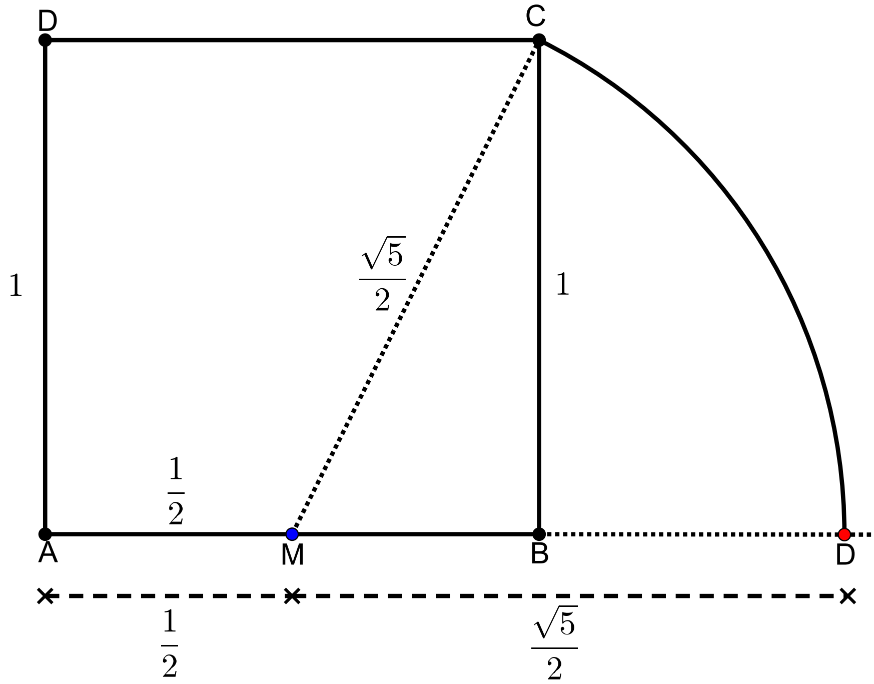


Figura 2.11: Medida do segmento $AD = \phi$.

Esta construção que acabamos de fazer dá origem ao retângulo áureo e a espiral áurea, fundamentais à várias estruturas naturais.

2.3 O Retângulo Áureo

O retângulo áureo é uma figura esteticamente agradável aos olhos. Ele apresenta seus lados na razão áurea $\frac{a}{b} = \phi = 1,618$. Acredita-se que muitos pintores e arquitetos do período do Renascimento utilizaram esse retângulo em suas obras e trabalhos. Só para citar alguns exemplos, temos: *O Nascimento de Vênus*, quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. Essa proporção estaria ali aplicada pelo motivo do autor representar a perfeição da beleza. Em *O Sacramento da Última Ceia*, de Salvador Dalí, as dimensões do quadro (aproximadamente $270cm$ x $167cm$) estão numa razão áurea entre si. Um dos mais famosos são a *Monalisa* de Leonardo da Vinci e a Catedral de Notredame.

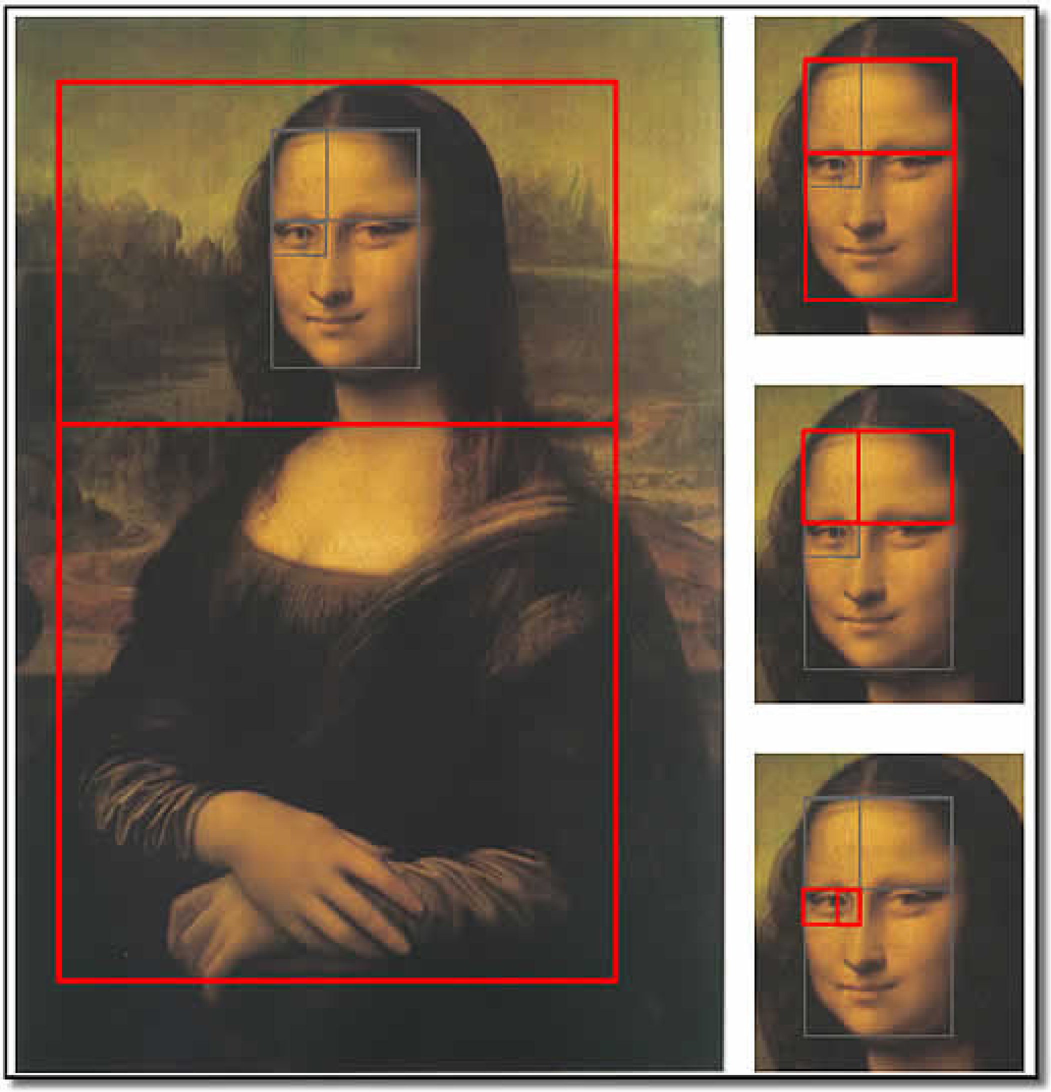


Figura 2.12: Note que é possível encaixar retângulos áureos em sua face, na testa e nos olhos.

Na música, o número de ouro está presente em diversas obras de compositores clássicos, sendo o exemplo mais notável a famosa sinfonia número 5, de Ludwig Van Beethoven. Nos dias de hoje, o retângulo áureo é usado no formato de cartões de crédito, cartas de baralho, construções, na engenhria de carros, no designer de aparelhos eletrônicos, etc, pois acredita-se que essas formas agradará seus clientes.

Figura 2.13: As dimensões reais de um cartão de crédito são $85,60mm$ por $53,98mm$. A razão entre elas é aproximadamente $1,59$, bem perto de ϕ.

O retângulo áureo é uma figura tão interessante que sempre é possível extrair dele um quadrado e continuar com outro retângulo áureo num processo infnito. Considere um retângulo onde a razão entre a largura L e a altura H seja justamente ϕ. Esse é um retângulo áureo. Construindo um quadrado com a medida do lado igual a H, obtemos outro retângulo áureo, este de lados $L1$ e $H1$. Pois $L1/H1 = \phi$, novamente. Se o processo for repetido no segundo retângulo áureo, obtemos outro quadrado e outro retângulo, também áureo, sendo $L2/H2 = \phi$. E assim, obtem-se retângulos áureos cada vez menores que convergem para um ponto que chamamos de pólo da construção. É fácil ver que esse pólo é o encontro de todas as diagonais maiores de todos os retângulos áureos da construção. Esse pólo é chamado de "olho de Deus". Ver [1].

Esse processo, também dá origem a espiral áurea, conhecida como a digital de Deus ou espiral logarítmica e representada na Figura 2.14. Na Figura 2.15 podemos observar que esta espiral está presente também em estruturas naturais.

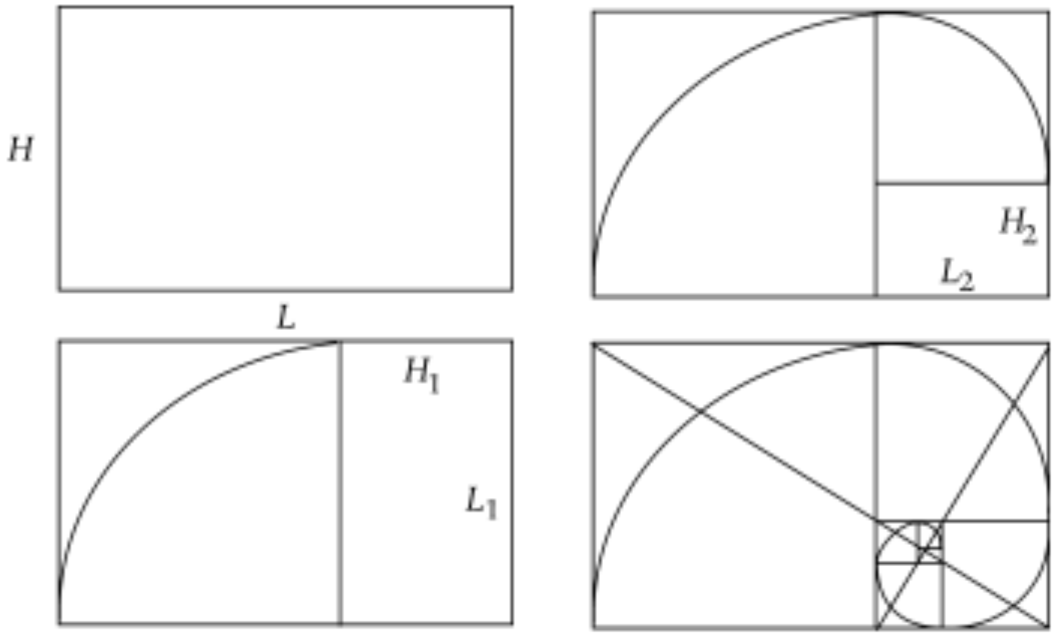


Figura 2.14: Retirada de quadrados do retângulo áureo num processo infinito.

Figura 2.15: A concha do Nautilus apresenta uma curva muito próxima a espiral áurea.

No próximo capítulo, vamos falar de algo que foi descoberto séculos após Euclides por um matemático chamado Leonardo de Pisa e que tem relação direta com o número ϕ e veremos mais situações em que o número de ouro aparece.

2.4 A irracionalidade de ϕ

Durante todo o trabalho utilizamos o fato do número de ouro ser um número irracional, mas até então, não fizemos a demonstração.

Proposição 2.3. *O número ϕ é irracional.*

Demonstração: Como visto no Capítilo 1, todo número racional pode ser escrito na forma de fração irredutível, ou seja, na forma $\dfrac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros com $b \neq 0$ e com $mdc(a, b) = 1$. Para realizar a demonstração vamos supor que ϕ é um número racional, como descrito acima, e tentar encontrar uma contradição dessa hipótese.

Sendo $\phi = \frac{a}{b}$, vamos substituir na equação $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Daí:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} = 1$$

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{a^2 - ab}{b^2} = 1$$

$$a(a - b) = b^2$$

Como $(a - b)$ é um número inteiro, então a divide b^2. Logo a divide b e, portanto, a e b possuem um fator comum, ou seja, o $mdc(a, b) \neq 1$, contrariando a hipótese. $\square$

2.5 Cálculo de ϕ em alguns exemplos

Como foi citado no início deste Capítulo, a razão áurea está presente nas medidas das pirâmides do Egito. Na pirâmide de Quéops, por exemplo, temos que a altura tem medida igual a $146,4m$ e a aresta da base tem medida igual a $230,33m$.

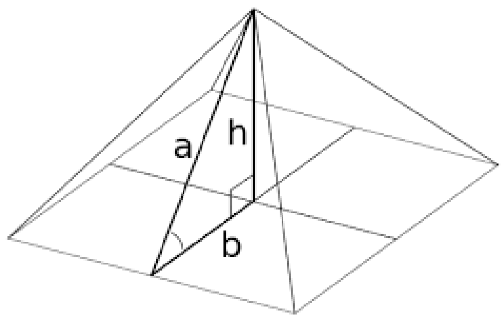


Figura 2.16: Modelagem matemática da pirâmide de Quéops.

Sendo h a medida da altura da pirâmide e b a metade da medida da aresta da base, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para calcular a medida do apótema da pirâmide, que chamaremos de a.

$$a^2 = h^2 + b^2$$

$$a^2 = 146,4^2 + 115,165^2$$

$$a^2 = 21432,96 + 13262,977225$$

$$a^2 = 34695,937225$$

$$a = 186,2684547233$$

Dividindo a medida do apótema da pirâmide pela medida do apótema da base, obtemos como resultado uma boa aproximação do número ϕ.

$$\frac{a}{b} = 1,6174050686 \approx \phi \tag{2.7}$$

□

Vejamos agora alguns passos para construir um pentagrma, outro exemplo que foi citado.

1. Construir um segmento de reta de extremos A e B.

2. A partir de ambos os extremos, traçar circunferêcias com raio superior a metade do comprimento do segmento AB.

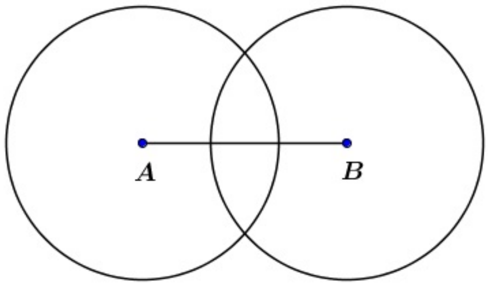


Figura 2.17: Obtendo o ponto médio do segmento AB.

3. Unir os dois pontos de intersecção entre as circunferêcias para traçar a reta mediatriz. Chamar de M o ponto de intersecção entre AB e a reta mediatriz.

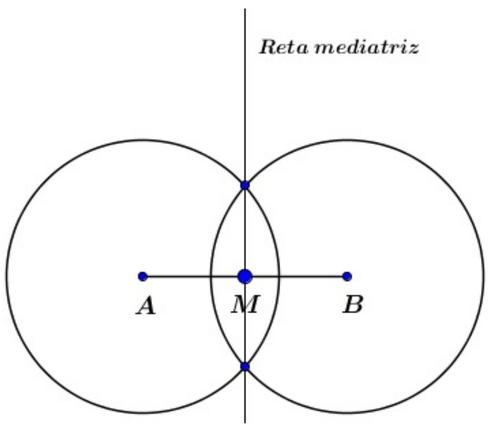


Figura 2.18: O ponto M é o ponto médio do segmento AB.

4. Traçar uma reta r paralela a mediatriz e que passe por um dos extremos do segmento AB.

5. Traçar uma circunferência de raio igual a medida do segmento AB com centro em B e marcar o ponto de intersecção superior da circunferência com a reta r. (Ponto P).

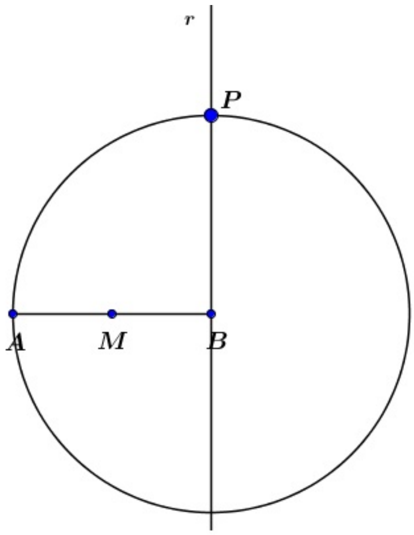


Figura 2.19: Ponto P.

6. Traçar uma circunferência de centro em M e raio igual a medida do segmento MP. Marcar o ponto de intersecção à direita entre o prolongamento de AB e a circunferência. (Ponto Q).

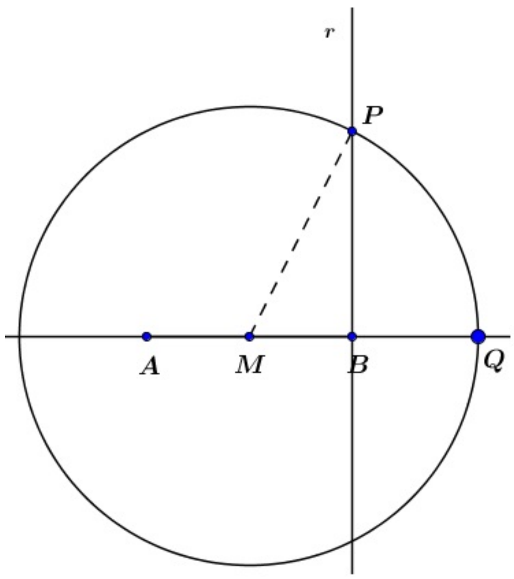


Figura 2.20: Ponto Q.

7. Traçar uma circunferência de centro em A e raio de medida igual ao comprimento do segmento AQ. Marcar o ponto de intersecção superior com a reta mediatriz. Este ponto determinará a altura do pentagrama. (Ponto D).

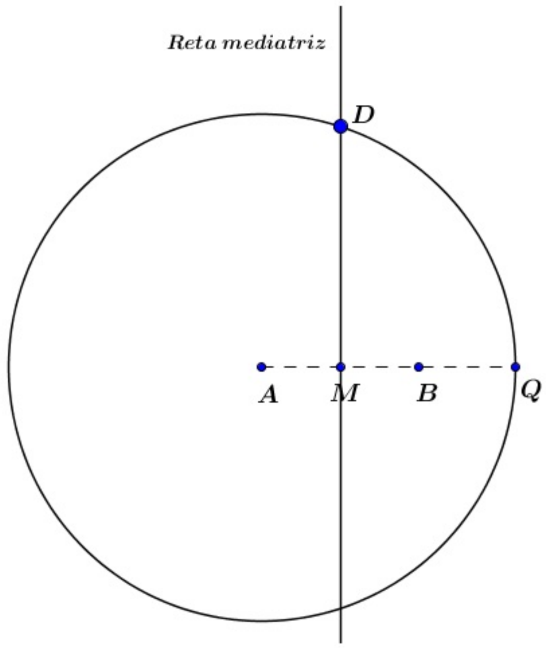


Figura 2.21: O ponto D determina a altura do pentagrama.

8. Traçar três circunferências de raio com medida igual ao comprimento do segmento AB. Uma com centro em A, uma com centro em B e a outra com o centro em D. Marcar os pontos de intersecção entre as circunferências que se localizam acima e à direita do extremo B e acima e à esquerda do extremo A. (Pontos C e E, respectivamente). Ver Figura 2.22

9. Ligar os pontos A, B, C, D e E para formar o pentágono regular de lado com medida igual ao segmento AB. Ver Figura 2.23

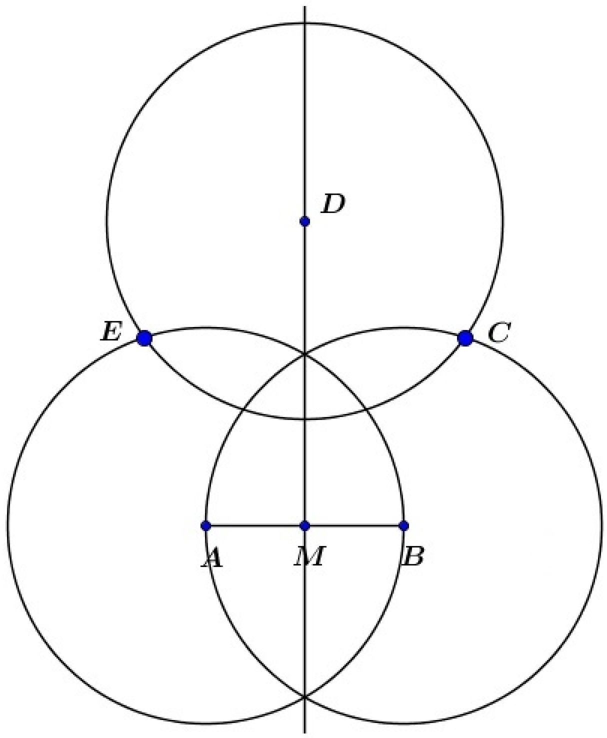


Figura 2.22: Determinando os demais vértices do pentágono: pontos C e E.

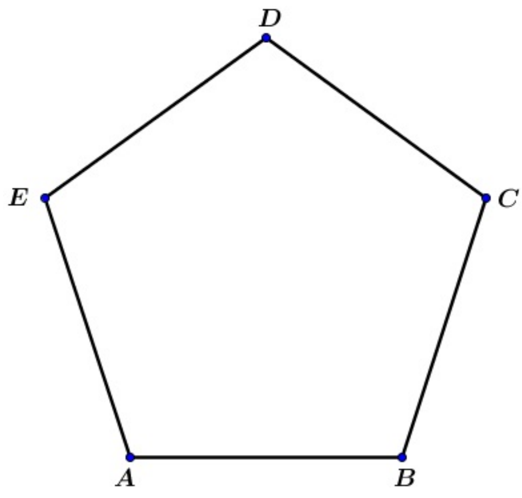


Figura 2.23: Pentágono regular $ABCDE$.

10. Traçar as diagonais do pentágono regular para formar o pentagrama.

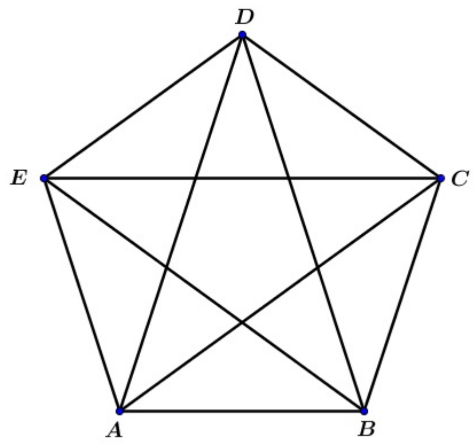


Figura 2.24: Pentagrama.

Uma vez construído o pentagrama, vamos calcular algumas razões e verificar a existência de ϕ. Para isso será necessário marcar mais alguns pontos na intersecção das diagonais. Vamos chamá-los de F, G, H, I e J.

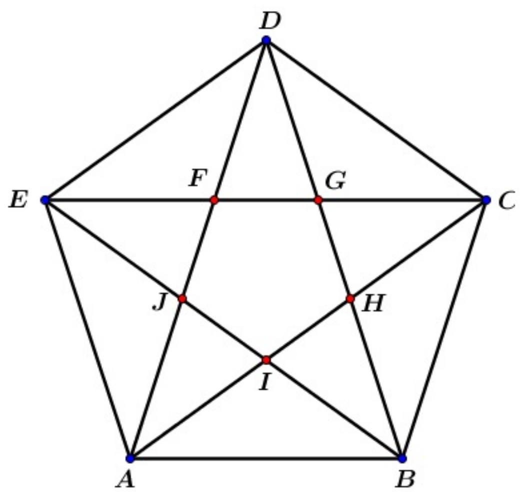


Figura 2.25: Pentagrama para o cálculo de razões.

Por construção, temos um pentágono regular e de acordo com a Figura 2.25 os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são todos congruentes e possuem medida igual a $4,5cm$. O pentagrama possui outras sequências de segmentos congruentes. Abaixo listarei essas sequências com suas respectivas medidas:

- $JI \cong IH \cong HG \cong GF \cong FJ = 1,725cm.$
- $AJ \cong AI \cong BI \cong BH \cong CH \cong CG \cong DG \cong DF \cong EF \cong EJ = 2,775cm.$
- $AF \cong AH \cong BJ \cong BG \cong CI \cong CF \cong DH \cong DJ \cong EG \cong EI \cong AB = 4,5cm.$
- $AD \cong DB \cong BE \cong EC \cong CA = 7,275cm.$

Tomando apenas o primeiro segmento de cada sequência podemos montar várias razões com resultados muito próximos de ϕ.

- $\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AF} = \frac{7{,}275}{4{,}5} = 1,617.$
- $\frac{AB}{AJ} = \frac{AF}{AJ} = \frac{4{,}5}{2{,}775} = 1,621.$
- $\frac{AJ}{JI} = \frac{2{,}775}{1{,}725} = 1,609.$

Vale ressaltar que utilizamos aproximações com três casas decimais, porém o resultado exato é o valor de ϕ.

Capítulo

3

A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Livio (2011) [21] destaca a importância de Fibonacci na difusão da razão áurea.

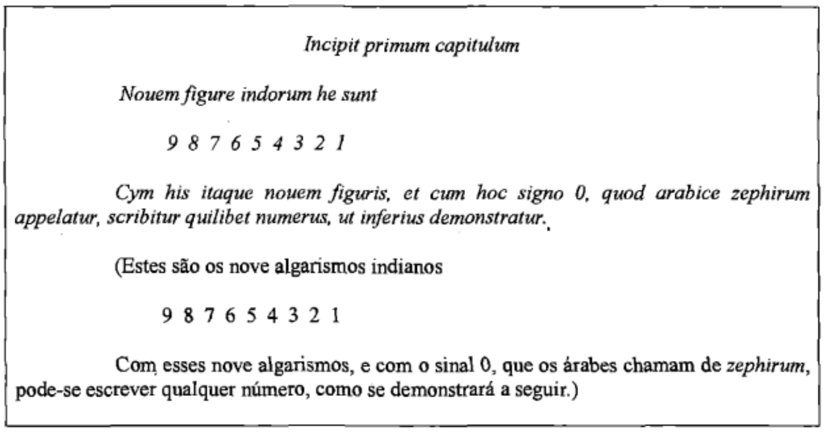
"O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações." (Livio, 2011, p. 115)

Séculos depois de *Os Elementos* de Euclides, que representa o primeiro registro acerca do número de ouro, nasce o maior e mais talentoso matemático da Idade Média, Fibonacci. Leonardo Fibonacci nasceu em 1175 e viveu até os 75 anos. Natural da cidade de Pisa, também ficou conhecido como Leonardo de Pisa, ou Leonardo Pisano.

O fato é que Pisa era um centro comercial importante daquela época e seu pai era ligado aos negócios mercantis, principalmente com regiões do Mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Benjaia, norte da África. As atividades

Figura 3.1: Leonardo Fibonacci: o maior e mais talentoso matemático da Idade Média.

desenvolvidas por seu pai impulsionaram o gosto de Fibonacci pela matemática e, em particular, pela aritmética. Viagens ao Egito, à Grécia e a Síria fizeram com que Leonardo tivesse contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes e, entre outras coisas, o sistema de numeração indo-arábico. Convencido da superioridade prática desse sistema em relação ao sistema romano de numeração, tanto para escrita como para os cálculos, Fibonacci em 1202, publicou sua obra mais famosa intitulada *Liber Abaci*.



Incipit primum capitulum

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cym his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appelatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

(Estes são os nove algarismos indianos

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Com esses nove algarismos, e com o sinal 0, que os árabes chamam de *zephirum*, pode-se escrever qualquer número, como se demonstrará a seguir.)

Figura 3.2: Abertrura do livro *Liber Abaci*: divulgação dos algarismos indo-arábicos.

A obra trata de assuntos aritméticos e algébricos e, embora seja independente, é possível perceber a influência dos trabalhos de Al-Khowârizmî e Abû Kâmil. O livro de Fibonacci foi, com certeza, o grande difusor pela Europa do sistema indo-arábico. Os vários capítulos que compõem o seu trabalho retratam a leitura e escrita desses numerais, bem como a resolução de problemas relacionados ao cálculo de raízes quadráticas e cúbicas, a resolução de equações lineares e quadráticas, ao cálculo de inteiros e frações, a problemas de geometria e à permutação de mercadorias.

Um desses problemas, apresentado a seguir, deu origem a seqência numérica $1, 1, 2, 3, 5, 8$, $13, 21, 34, ...$ hoje conhecida como sequência de Fibonacci.

O problema: quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, a partir de um único casal que se torna produtivo depois de dois meses, supondo que cada casal gera um novo casal?

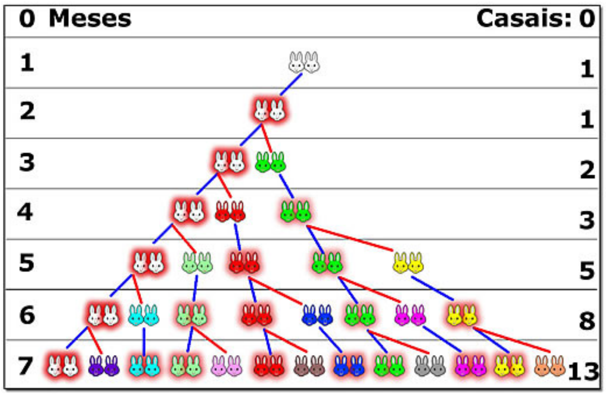


Figura 3.3: Ilustração do problema sobre reprodução dos coelhos.

De acordo com o enunciado do problema, dois meses é o tempo necessário para que esse casal atinja a fertilidade, portanto após dois meses, continuaremos com apenas 1 casal. No terceiro mês haverá 2 casais, o casal original e sua primeira cria. No quarto mês teremos 3 casais, o casal original, sua primeira cria já fértil e mais um casal infértil. Agora, os dois primeiros casais estão férteis e cada um gera um novo casal. Dessa forma, o número de casais no quinto mês será 5. E assim por diante.

O resultado é uma sequência de números em que cada um deles é obtido pela soma dos dois números imediatamente anteriores: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...$ Esta é a sequência de Fibonacci. A expressão que dá o número de Fibonacci de ordem n é representada por uma função $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$F(n) = F_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases} \tag{3.1}$$

Pulando mais alguns séculos, chegamos a Johannes Kepler, o célebre astrônomo das três leis planetárias. Kepler notou, em 1611, que a divisão entre um número de Fibonacci e seu precedente leva ao número ϕ quando se avança para valores cada vez maiores na sequência. Em termos matemáticos, isto quer dizer que $F(n)/F(n-1)$ tende para ϕ quando n tende para infinito.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$$

A tabela e o gráfico a seguir ilustram bem a situação descrita. Na tabela, cada número que está em azul, representa um número de Fibonacci. Dividindo-se um número de Fibonacci por seu antecessor podemos verificar que o resultado se aproxima cada vez mais do número de ouro. No gráfico, cada ponto vermelho é resultado da divisão de um número de Fibonacci, representado no eixo x, por seu antecessor.

n	F_n	F_n/F_{n-1}
1	1	
2	1	$1/1 = 1$
3	2	$2/1 = 2$
4	3	$3/2 = 1{,}5$
5	5	$5/3 = 1{,}66667$
6	8	$8/5 = 1{,}6$
7	13	$13/8 = 1{,}625$
8	21	$21/13 = 1{,}61538$
9	34	$34/21 = 1{,}61905$
10	55	$55/34 = 1{,}61765$
11	89	$89/55 = 1{,}61818$
12	144	$144/89 = 1{,}61798$
13	233	$233/144 = 1{,}61806$

Tabela 3.1: Divisão de um número de Fibonacci por seu antecessor e a obtenção de um número cada vez mais próximo do número de ouro.

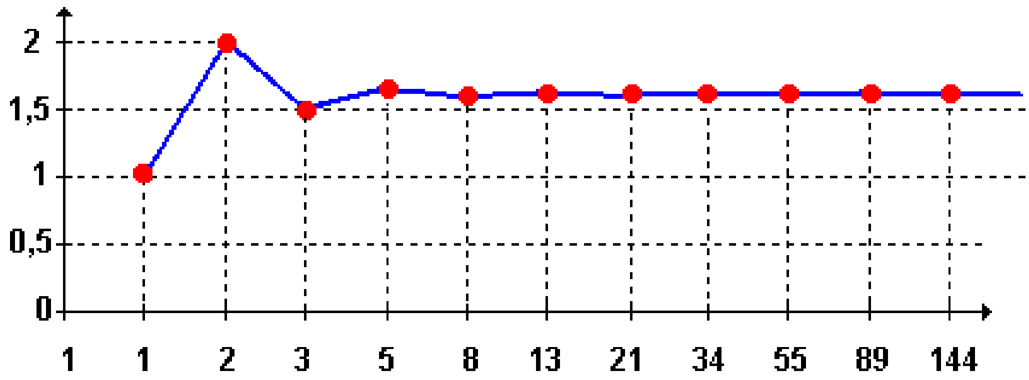


Figura 3.4: Representação gráfica da tabela.

De modo inverso, os números de Fibonacci podem ser gerados a partir de potências de ϕ segundo a expressão:

$$F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}} \tag{3.2}$$

O interessante nessa expressão é que os números de Fibonacci, que são naturais, podem ser gerados de potências de ϕ, que é irracional. Tecnicamente, diz-se que os números de Fibonacci seguem uma "lei de potência".

Proposição 3.1. *A fórmula para determinar qualquer termo da sequência de Fibonacci é dada por* $F_n = \dfrac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$.

Demonstração: Para demonstrar tal fato, vamos usar a expressão acima com os valores de ϕ ao invés do símbolo ϕ. Assim temos a fórmula geral da sequência de Fibonacci, também conhecida como Fórmula de Binet.

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}. \tag{3.3}$$

Utilizaremos o Princípio da Indução Finita. É fácil verificar que a fórmula é válida para $n = 1$ e $n = 2$. De fato:

Para $n = 1$, temos:

$$F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = 1.$$

Logo a fórmula é válida para $n = 1$.

Para $n = 2$, temos:

$$F_2 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}) - (\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4})}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = 1.$$

Logo a fórmula é válida para $n = 2$.

Vamos agora utilizar como hipótese de indução que a fórmula é válida para $n = k$ e $n = k+1$. Supondo que essas hipóteses sejam verdadeiras, vamos provar que $F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$.

Usando a Fórmula de Binet, temos:

$$F_k + F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k}{\sqrt{5}} + \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

$$F_k + F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k}{\sqrt{5}} + \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}}$$

$$F_k + F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \cdot (1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \cdot (1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{5}}$$

$$F_k + F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \cdot (\frac{3+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \cdot (\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{5}}$$

Como $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$, obtemos:

$$F_k + F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2}{\sqrt{5}}$$

$$F_k + F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

$$F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$$

$\square$

Portanto, é possível determinarmos qualquer número de Fibonacci através de uma expressão em termos de ϕ.

3.1 Propriedades da sequência de Fibonacci

Analisemos as seguintes propridades:

$$F_1 = 1 = F_3 - 1$$

$$F_1 + F_2 = 2 = F_4 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 4 = F_5 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = F_6 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 12 = F_7 - 1$$

Generalizando, temos que $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$, conforme provaremos a seguir.

Propriedade 3.2. *O somatório de n termos da sequência de Fibonacci é igual ao termo $F_{n+2} - 1$.*

Demonstração: Utilizaremos o Princípio da Indução Finita. É fácil verificar que a fórmula é válida para $n = 1$. De fato:

Se $n = 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{1} F_i = F_{1+2} - 1$$

$$1 = F_3 - 1$$

$$1 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

Como a igualdade é verdadeira, temos que a fórmula é válida par $n = 1$.

Supondo que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja, que é verdade que $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$ queremos mostrar que $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$ é válida.

Somando-se F_{k+1} em ambos os lados da igualdade assumida como hipótese, temos:

$$\sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k+1} - 1$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$$

$\square$

Agora observemos a soma dos termos da sequência de índice ímpar:

$$F_1 = 1 = F_2$$

$$F_1 + F_3 = 3 = F_4$$

$$F_1 + F_3 + F_5 = 4 = F_6$$

Observando a sequência podemos conjecturar que $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

Propriedade 3.3. *O somatório dos termos de índice ímpar da sequência de Fibonacci é igual ao próximo número de Fibonacci de índice par.*

Usaremos o mesmo método de demonstração da propriedade anterior.

Demonstração: A propriedade é válida para $n = 1$, pois $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{1} F_1 = 1 = F_2$.

Supondo que ela também é válida para $n = k$, ou seja, que $\sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} = F_{2k}$, vamos provar que para $n = k+1$ a fórmula $\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = F_{2(k+1)}$ também é válida.

Somando-se o termo F_{2k+1} em ambos os termos da hipótese indutiva, temos:

$$\sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} + F_{2k+1} = F_{2k} + F_{2k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} + F_{2k+1} = F_{2k+2} = F_{2(k+1)}$$

Concluímos assim, que se a propriedade é válida para $n = k$ é também válida para $n = k+1$. Portanto pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade é válida para todo $n > 1$. $\square$

Podemos observar também a soma dos termos de índice par:

$$F_2 = 1 = F_3 - 1$$

$$F_2 + F_4 = 4 = F_5 - 1$$

$$F_2 + F_4 + F_6 = 4 = F_7 - 1$$

Observando a sequência podemos deduzir que $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$.

Propriedade 3.4. *O somatório dos termos de índice par é igual ao próximo número de Fibonacci de índice ímpar menos um.*

Demonstração: Tomemos a soma dos termos da sequência de Fibonacci até o $2n$-ésimo termo. Temos, pela Propriedade **3.2** que:

$$\sum_{i=1}^{2n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

Tomemos a soma dos termos ímpares da sequência de Fibonacci até o termo de índice $2n-1$. Obtemos, pela Propriedade **3.3** que:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} F_{2i-1} = F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$$(F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+\cdots+F_{2n-1}+F_{2n})-(F_1+F_3+F_5+F_7+\cdots+F_{2n-1}) = F_{2n+2}-1-F_{2n}$$

que é igual a:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

□

3.2 Aplicações da sequência de Fibonacci

O problema dos coelhos citado no livro *Liber Abaci* foi o grande responsável pela descoberta da sequência de Fibonacci. No entanto, basta um pouco de bom senso para entender que a reprodução dos coelhos da forma como abordada não se aplica na prática. Não estamos aqui questionando a validade ou não dessa sequência, muito pelo contrário, a ideia é mostrar que vários fenômenos da natureza são constituídos pelos números de Fibonacci. Vejamos alguns exemplos:

1. No crescimento das plantas

O arranjo dos galhos nos troncos das árvores costumam seguir a sequência de Fibonacci nos seus “pontos de crescimento”. Quando a planta tem um novo rebento, leva dois meses a crescer até que as ramificações fiquem sufecientemente fortes. Na Figura 3.5 é possível observar que a ramificação dos galhos se dá dessa forma. Ver [1]

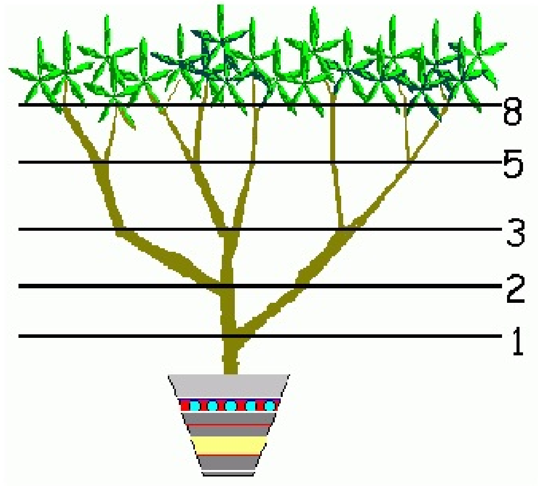


Figura 3.5: Ramificação ds galhos de uma árvore. Modelo matemático.

Os botânicos acham que essa forma de dispor folhas e galhos tem uma razão prática, aproveitada pela seleção natural. Ela torna mais eficiente a utilização da luz solar e a exposição às gotas da chuva.

2. Nas espirais de sementes e frutas

O número de espirais das sementes dos girassóis e dos frutilhos do abacaxi são números de Fibonacci, ver [1]. As sementes do girassol formam espirais a curvar tanto para a direita como para a esquerda. Se contarmos no sentido anti-horário, temos 21 espirais e, no sentido horário, são 34 espirais.

Figura 3.6: Espirais determinadas pelas sementes do girassol.

3. A árvore genealógica do zangão

O zangão e as abelhas operárias diferem um do outro devido ao fato de que uma abelha provém de um óvulo fecundado, já o zangão provém de um óvulo não fecundado. Nos seres humanos é como se uma mulher engravidasse sem que houvesse a presençca do espermatozóide, é um fenômeno chamado de Partenogênese. Voltando à explicação, um zangão só possui uma mãe, já uma abelha operária possui uma mãe e um pai e isso resulta na tabela abaixo.

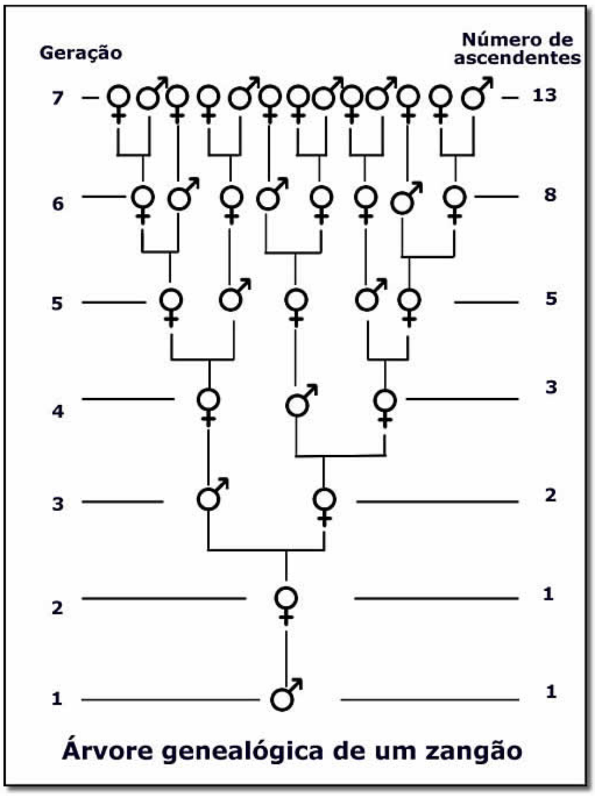


Figura 3.7: Árvore genealógica do zangão.

Como podemos observar o número de ascendentes do zangão obedece a sequência de Fibonacci. Ver [1]

4. Na bolsa de valores

Em *The Wave Principle*, Ralph Nelson Elliot defende a ideia que as flutuações do mercado seguem um padrão de crescimento e decrescimento que pode ser analisado segundo os números de Fibonacci, uma vez determinada a escala de observação. Defende que as relações entre picos e vales do gráfico da flutuação de bolsa tendem a seguir razões numéricas aproximadas das razões de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci. (Ver Figuras 3.8 e 3.9).

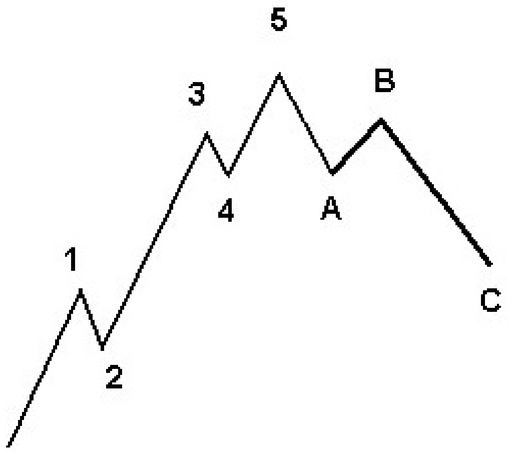


Figura 3.8: Método das oito ondas de Elliot. Ver [3].

Teorias mais recentes, defendem que é possível encontrar relações "de ouro" entre os pontos de pico e os de vale, como no gráfico abaixo:

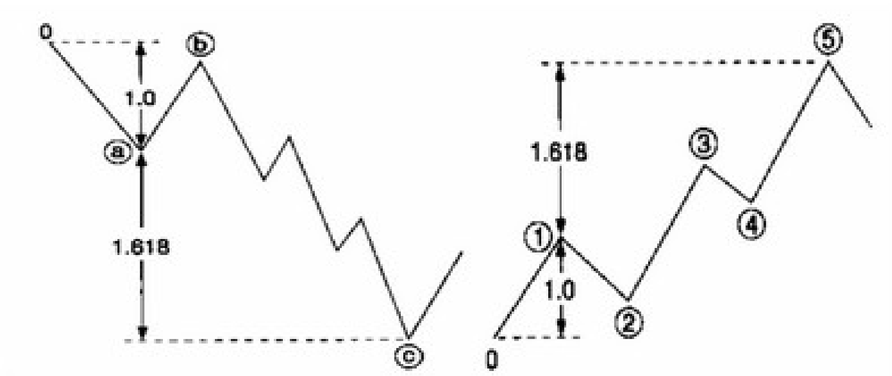


Figura 3.9: Obtenção do número de ouro nas ondas de Elliot. Ver [3].

Se tomarmos o valor entre o início do ciclo e o primeiro pico, e o compararmos com o valor entre este pico e o pico máximo, encontraremos também o número de ouro. O ciclo, naturalmente, pode estar invertido, e os momentos de pico podem se tornar momentos de vale, e vice-versa.

Enfim, estas são apenas algumas das aplicações dessa sequência de propriedades incríveis que carrega junto de si um misto de crenças, de curiosidades, de misticismo e aplicabilidade. Tenho certeza de que o tema proposto na pesquisa será visto com bons olhos em uma perspectiva de trabalho em sala de aula. O interesse será inevitável.

Capítulo

4

Possibilidades para a sala de aula

Segundo Onuchic (1999) [24], um problema matemático não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da matemática, assim como seus usos e aplicações. Ele define como problema tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.

Depois da abordagem dos conjuntos numéricos, do estudo da razão áurea e do número de ouro e da construção e análise da sequência de Fibonacci, vamos propor atividades para a sala de aula e trabalhar suas resoluções. O professor deverá atuar como um mediador e auxiliar os alunos durante a resolução destas atividades. Conteúdos matemáticos como resolução de equação do 2º grau, relação de pertinência, conjuntos numéricos, teorema de Pitágoras, razão, construção de sequências numéricas, a sequência de Fibonacci, progressão geométrica, números primos, paridade de números, construções geométricas, reta real, radicais e potências farão parte desse estudo.

4.1 Atividades

Atividade 1: Utilize os símbolos de $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence) para completar a tabela: (faça como no modelo da primeira linha)

Número	Racionais ($\mathbb{Q}$)	Irracioanais ($\mathbb{I}$)
$\frac{-10}{4}$	$\in$	$\notin$
$0,3333...$		
$\sqrt{10}$		
$-\sqrt{36}$		
π		
$\sqrt[3]{8}$		
0		
$\frac{27}{99}$		
$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$		
$-12,36598412458$		
3		
$\sqrt[3]{10}$		

COMENTÁRIOS:

1. Enfatizar aos alunos que fica mais fácil de determinar a qual conjunto numérico uma fração pertence se a representarmos na forma decimal;
2. Caso o aluno classifique uma dízima periódica como número irracional, retomar o conceito de que toda dízima periódica possue uma fração geratriz e se necessário explicar com outros exemplos;
3. Se um aluno classificar um número como racional e ao mesmo tempo irracional, o professor poderá fazer uso das regras gramaticais e explicar que na língua portuguesa o prefixo "i" possui o carater de negação da palavra, ou seja, um número pode ser racional ou irracional, mas nunca os dois ao mesmo tempo;
4. Se na linha nove da tabela o aluno classificar como irracional, explicar que primeiro devemos dividir os radicandos e, então, classificar o resultado dessa divisão;

5. Lembrar que os números inteiros possuem uma infinidade de frações que os representam e, portanto, são racionais.

Atividade 2: Faça a representação geométrica dos números irracionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Depois localize-os na reta real.

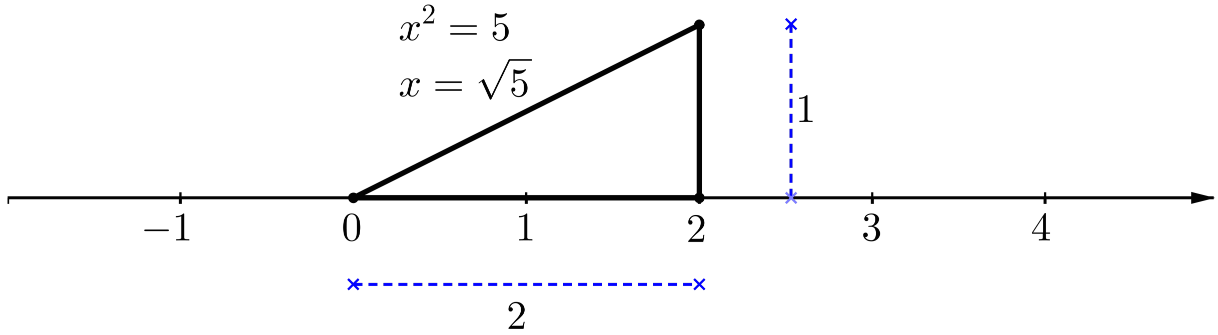
Observe no exemplo abaixo, como fazemos para representar um número racional na reta real.

Exemplo: Vamos representar $\sqrt{5}$ na reta.

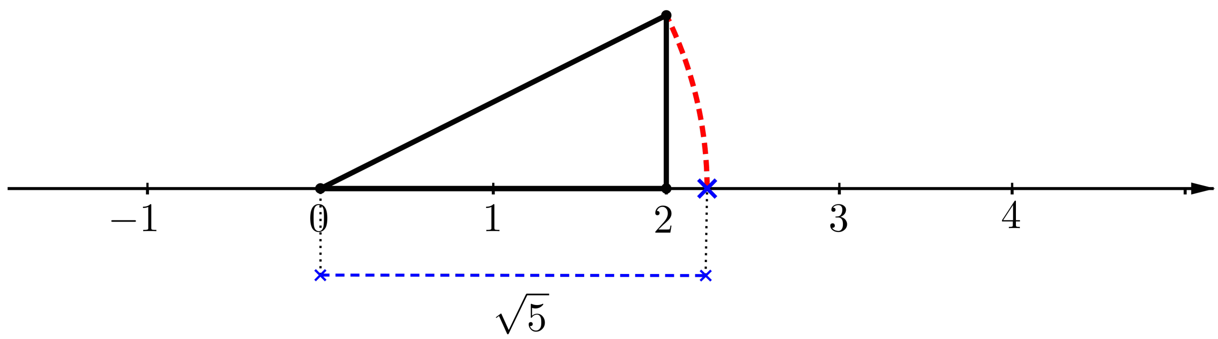
Primeiro desenhamos um triângulo retângulo com um dos catetos sobre a reta real com vértice na origem e o outro perpendicular a reta. Tomando os valores adequados, usamos o teorema de Pitágoras para determinar a medida da hipotenusa, esta deve ser igual ao número irracional que queremos. Depois com um compasso, fazemos a projeção da hipotenusa sobre a reta real.

Como queremos que a hipotenusa seja igual a $\sqrt{5}$, então vamos tomar os catetos com medidas 2 e 1. Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 2^2 + 1^2$$
$$x^2 = 4 + 1$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$



Agora, com o uso de um compasso, projetamos essa medida sobre a reta.

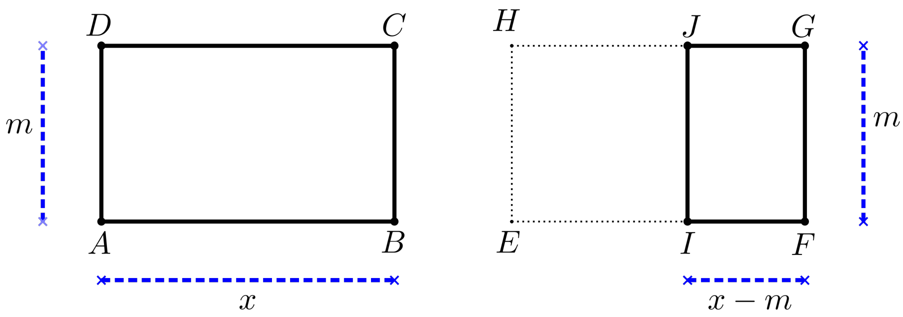


COMENTÁRIOS:

1. Se o aluno apresentar dificuldade em determinar a medida dos catetos, o professor pode orientá-lo a começar pela soma de quadrados perfeitos, tipo: $4+9$, $1+9$, $16+9$, entre outros;

2. No caso dos números $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ o professor pode orientá-los a encontrar primeiro o número $\sqrt{2}$ e depois utilizar essa medida como cateto.

Atividade 3: Outro número irracional famoso é o número de ouro, representado pela letra grega ϕ (lê-se fi). O número áureo é igual à razão entre o comprimento e a largura do retângulo que possui a seguinte propriedade: se a medida dos seus lados são x e m, com $x > m$, é possível retirar um quadrado de lado m do retângulo inicial e obter um retângulo menor com as mesmas características, então o retângulo menor é semelhante ao inicial.



O retângulo ABCD é semelhante ao retângulo FGJI

Isso significa que: $\dfrac{m}{x} = \dfrac{x-m}{m}$. Desenvolva essa igualdade e determine a razão $\dfrac{x}{m}$ para encontrar o valor do número de ouro. Após os cálculos, utilize uma calculadora e dê a representação decimal de ϕ com 3 casas decimais.

COMENTÁRIOS:

1. Se necessário recorde a fórmula de Bhaskara e auxilie os alunos nos cálculos algébricos;

2. Lembre o aluno de que x e m são medidas geométricas e, portanto, não podem assumir valores negativos.

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1/M_2
Distância entre o joelho e o umbigo.	Distância entre o joelho e o chão.	
Distância entre o umbigo e o chão.	Distância do topo da cabeça até o umbigo.	
Distância da base do nariz até o queixo.	Distância da linha dos olhos até a base do nariz.	
Distância da metade do pescoço até o umbigo.	Distância do topo da cabeça até a metade do pescoço.	

Tabela 4.1: Tabela para a Atividade 4.

Atividade 4: Forme dupla com um colega e preencha a Tabela 4.1 comparando algumas razões do seu corpo com a razão áurea.

COMENTÁRIOS:

1. Oriente os alunos para medirem com a maior precisão possível para que, desta forma, possam obter o resultado que se espera;

2. Apresente aos alunos a imagem do desenho de Leonardo Da Vinci, *Homem Vitruviano* com destaque para uma das proporções áureas do corpo humano. (Ver Figura 4.1)

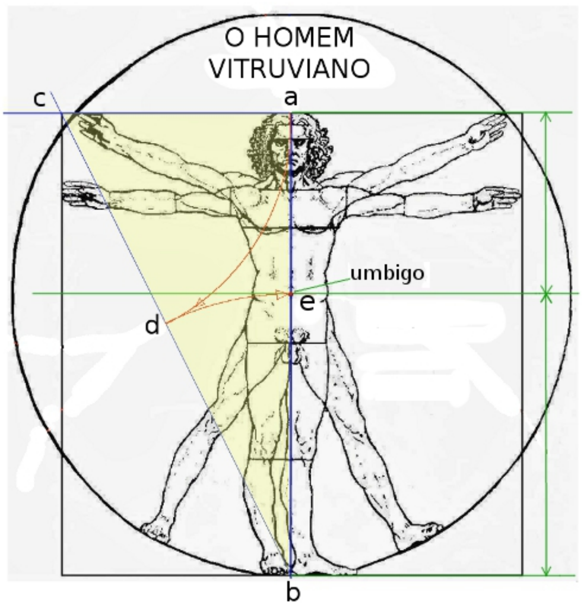


Figura 4.1: *O Homem Vitruviano* de Leonardo Da Vinci.

Atividade 5: Como visto na atividade anterior o número de ouro está associado a padrões de beleza e aparece em diversas razões do nosso corpo. Faça uma pesquisa, se possível no laboratório de informática de sua escola, sobre outras situações ou obras em que o número ϕ aparece. Discuta com os colegas.

<u>COMENTÁRIO:</u>

1. Será de grande valia e muito interessante se, ao término desta atividade, os alunos assistirem ao curta-metragem intitulado *Dolnald no País da Matemágica* (Walt Disney Productions, EUA, 1959), ver em [22]. Nele, há uma parte em que o pato Donald explica a razão áurea.

Atividade 6: Existem outras formas de representarmos o número áureo. Uma delas está expressa pela equação abaixo:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$$

Resolva a equação e mostre que $x = \phi$.

<u>COMENTÁRIO:</u>

1. Se os alunos estiverem apresentando muitas dúvidas, o professor pode encaminhar a resolução elevando ao quadrado os dois lados da equação.

Atividade 7: Outra situação em que o número de ouro está presente é na sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$. Note que ela possui uma propriedade bem interessante: cada termo da sequência, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Assim, temos:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$

$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$$

$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$$

$$\vdots$$

Mantendo a construção da sequência, determine os valores de F_{14}, F_{15} e F_{16}.

COMENTÁRIO:

1. Se necessário, oriente o aluno a usar calculadora.

Atividade 8: Com o uso de uma calculadora, complete a tabela e verifique que os números da coluna da direita estão convergindo para o número ϕ. Aproxime para a terceira casa decimal.

n	F_n	F_n/F_{n-1}
1	1	
2	1	$1/1 = 1$
3	2	$2/1 = 2$
4	3	$3/2 = 1{,}5$
5	5	
6	8	
7	13	
8	21	
9	34	
10	55	
11	89	
12	144	
13	233	

Atividade 9: Considere a sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Observe o padrão:

$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5$$

$$\vdots$$

a-) Determine as duas próximas linhas desse padrão.

b-) Use o padrão para encontrar a soma dos quadrados dos primeiros seis termos da sequência de Fibonacci, sem somá-los.

c-) Observe a Figura 4.2 e complete com o valor da área de cada quadrado de acordo com os números de Fibonacci.

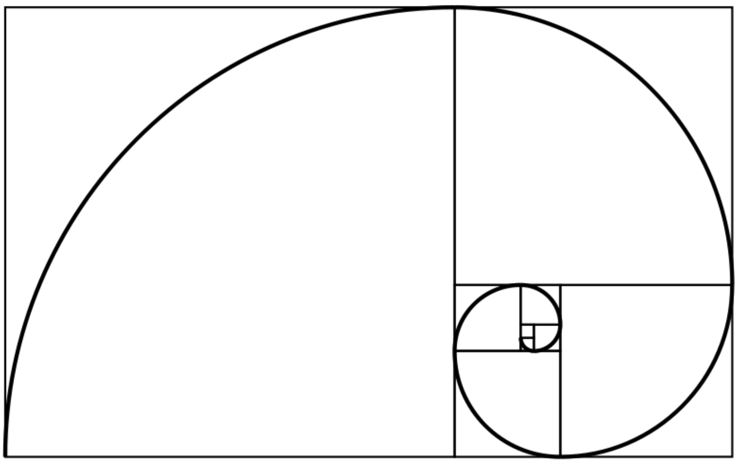


Figura 4.2: Espiral que gera o número ϕ.

<u>COMENTÁRIOS:</u>

1. Explique aos alunos que o quadrado de um número, geometricamente, representa um quadrado de lado igual ao número;

2. Peça aos alunos que pinte cada quadrado do número de Fibonacci por uma cor diferente;

3. Questione os alunos a respeito do nome da curva dada na Figura 4.2.

Atividade 10: Atualmente, existe nos Estados Unidos uma sociedade matemática chamada **Associação Fibonacci**, que publica artigos trimestralmente e que dirige um centro bibliográfico e de pesquisa sobre aplicações da sequência de Fibonacci. Ver [12]. No entanto, o fascínio por essa sequência já ocorre há muitos séculos. Um bom exemplo, é o matemático francês Edouard Anatole Lucas (1842-1891), que depois de muitos estudos, apresentou a sequência $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...$ que possui o mesmo padrão de recorrência da sequência de Fibonacci.

Em consequência desse fato, sequências de Fibonacci diferentes da original são algumas vezes, chamadas sequências de Lucas.

Complete as sequências de Fibonacci ou de Lucas com os termos que estão faltando:

a-) $2, 4, 6, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, 42, \_\_\_\_, ...$

b-) $1, 3, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, ...$

c-) $2, \_\_\_\_, 7, \_\_\_\_, \_\_\_\_, 31, ...$

d-) $3, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, 36, \_\_\_\_, 95, ...$

e-) $\_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, 79, 128, ...$

Atividade 11: Existe uma sequência chamada de sequência áurea. Ela é formada utilizando apenas o elemento neutro da adição e o elemento neutro da multiplicação nos reais, ou seja, é formada apenas com os algarismos 0 e 1. O primeiro elemento é 1 e cada elemento, a partir do segundo, é obtido substituindo-se cada um e cada zero do elemento anterior, respectivamente, por 10 e por 1.

a-) Determine os 7 primeiros termos dessa sequência.

b-) Uma interessante curiosidade dessa sequência é que a razão entre a quantidade de uns e de zeros em cada termo, a partir do segundo, converge para ϕ. Verifique essa propriedade contando e listando a quantidade de uns e a quantidade de zeros em cada termo.

<u>COMENTÁRIOS:</u>

1. Caso o aluno apresente dúvida pra responder o item a-), o professor pode ajudá-lo a interpretar melhor o enunciado e construir dois ou três termos da sequência;

2. No item b-), enfatize aos alunos que as quantidades de uns e zeros de cada termo são números consecutivos de Fibonacci e, como já foi visto, a razão entre esses termos tende ao número ϕ.

Atividade 12: (Enem - 2013) Estudos revelam que, independentemente de etnia, idade e condição social, as pessoas têm padrões estéticos comuns de beleza facial e que as faces consideradas bonitas apresentam-se em proporção áurea. A proporção áurea é a constante $\phi = 1,618$. Uma agência de modelos reconhece a informação citada e utiliza-a como critério de beleza facial de suas contratadas. Para entrevistar uma nova candidata a modelo, a referida agência pede uma fotografia de rosto no ato da inscrição e, com ela, determina as medidas mostradas na figura.

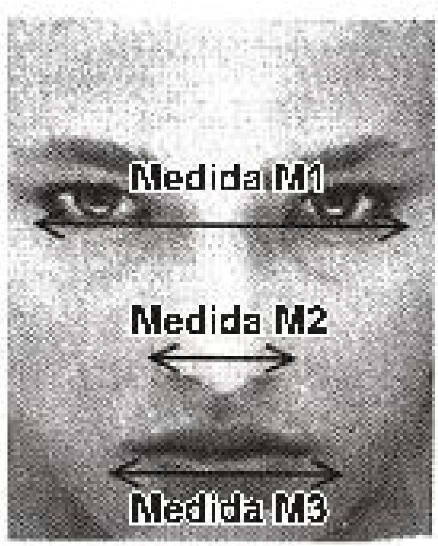


Figura 4.3: Medidas analisadas no rosto de uma candidata.

Sendo $\frac{M1}{M3} = \frac{M3}{M2} = \phi$

Para a seleção de uma única garota, foram constatadas estas medidas:

Candidata I: $M1 = 11cm$; $M2 = 5,5cm$ e $M3 = 7cm$.

Candidata II: $M1 = 10,5cm$; $M2 = 4,5cm$ e $M3 = 6,5cm$.

Candidata III: $M1 = 11,5cm$; $M2 = 3,5cm$ e $M3 = 6,5cm$.

Candidata IV: $M1 = 10cm$; $M2 = 4cm$ e $M3 = 6,5cm$.

Candidata V: $M1 = 10,5cm$; $M2 = 4cm$ e $M3 = 6,5cm$.

A candidata selecionada pela agência de modelos, segundo os critérios da proporção áurea, foi:

(A) I.

(B) II.

(C) III.

(D) IV.

(E) V.

Atividade 13: (ITA - 2015) Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I-) Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que nesta ordem formam uma P.G.

II-) a_7 é um número primo.

III-) Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeiras:

(A) Apenas II.

(B) Apenas I e II.

(C) Apenas I e III.

(D) Apenas II e III.

(E) I, II e III.

COMENTÁRIOS:

1. Retome com os alunos os conceitos de progressão geométrica e números primos;
2. As afirmações II-) e III-) são facilmente verificadas. Para a afirmação I-) oriente os alunos a usar os três termos consecutivos da P.G. na forma n, nq e nq^2;
3. A resolução da equação $n + nq = nq^2$ será um número irracional (curiosamente será o número ϕ). Relembre os alunos que a sequência de Fibonacci é formada por números racionais e, portanto, a afirmação I-) é falsa.

Capítulo

5

Considerações finais

Este trabalho teve a intenção de propor o estudo de um dos números mais intrigantes da matemática: o número de ouro. No decorrer dessa pesquisa, fizemos uma abordagem histórica a respeito do surgimento dos números irracionais, da razão áurea e da sequência de Fibonacci.

O maior objetivo do trabalho foi o de elaborar um conjunto de atividades que atendessem aos temas citados e, que além disso, trabalhasse com a interdisciplinaridade e a contextualização, com fatos históricos e situações do cotidiano.

Acreditamos se tratar de um tema que despertará a curiosidade dos alunos do ensino médio e quebrará o estigma de que a matemática é um conjunto de fórmulas e regras. O professor poderá fazer uso dessas atividades em qualquer ano do ensino médio desde que já tenha abordado o conteúdo de progressão geométrica. Deixo aqui mais uma sugestão: na internet, há vários vídeos que tratam do número de ouro e dão a ele uma denotação mística, fantasiosa e, até mesmo, de divindade. Seria interessante passar aos alunos algum, ou alguns, desses vídeos antes de se iniciar a atividade para criar um clima de curiosidade.

Quero também deixar registrado o quanto este trabalho foi importante e acrescentou em minha formação. Sair de uma zona de conforto para habitar uma zona de conflito nem sempre é confortável, mas completamente necessário. Aprendi muito com as pesquisas que realizei, com os livros que consultei e, principalmente, com as orientações do professor Marcio.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, M. E. G. de. *O número ϕ e a sequência de Fibonacci*. Física na Escola. v. 5, n. 2, 2004. Disponível em < `http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol5/Num2/v5n1a02.pdf` >. Acesso em: 22 de fev. 2015.

[2] Ávila G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura*, 1ª edição, São Paulo: Edgar Blücher, 2006.

[3] Belmont, D. F. S. *TEORIA DAS ONDAS DE ELLIOTT: UMA APLICAÇÃO AO MERCADO DE AÇÕES DE BM&FBOVESPA*. Disponível em <`http://www.ccsa.ufpb.br/ppge/arquivos/dissertacoes/FERREIRA_2010.pdf`>. Acesso em: 23 de fev. 2015.

[4] Bianchini, E.; Paccola, E. *A matemática tem razão*, 1ª edição, São Paulo: Moderna, 1998.

[5] Brito, A. B. *Questionando o ensino de conjuntos numéricos em disciplinas de fundamentos de análise real: da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática*. Disponível em <`http://livros01.livrosgratis.com.br/cp153622.pdf`>. Acesso em: 23 de fev. 2015.

[6] Câmara, B. C. et al. *Atividades de ensino de matemática: uma experiência do PIBID - IFSP - Araraquara*, 1ª edição, São Carlos: Suprema Gráfica e Editora, 2014.

[7] Caraça, B. J. *Lições de Álgebra e Análise*, 1ª edição, Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1959.

[8] Carvalho, M. C. C. e S. *Padrões numéricos e sequências*, 1ª edição, São Paulo: Moderna, 1997.

[9] Crato, N. *A matemática das coisas: do papel A4 aos cordões de sapato, do GPS às rodas dentadas*, adapatação de Ruth Ribas Itacarambi, 1ª edição, São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[10] D'ambrósio, B. S. *Como ensinar mateática hoje? Temas e debates*, Brasília: SBEM, 1989.

[11] Dante, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*, 3ª edição, São Paulo: Ática, 2007.

[12] Dilcher, K. *Associação Fibonacci*. Criação de Karl Dilcher. Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Dalhousie, Nva Escócia, Canadá. Disponível em <http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/>. Acesso em: 23 de fev. 2015.

[13] Eves, H. *Introdução à história da matemática*, tradução de Hygino H. Domingues, 1ª edição, Campinas: Editora da Unicamp, 2008.

[14] Figueiredo, D. G. *Análise I*, 1ª edição, Campinas: Unicamp, 1996.

[15] Giovanni, J. R.; Bonjorno, J. R.; Giovanni Jr, J. R.*Matemática fundamental: uma nova abordagem*, São Paulo: FTD, 2002.

[16] Heelmeister, A. C. P. (Org.). *Explorando o ensino matemática: artigos*, Volume 1, 1ª edição, Brasília: Minestério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2004.

[17] Hypeness *A proporção áurea está em tudo! Na natureza, na vida e em você*. Disponível em <http://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/>. Acesso em: 25 de fev. 2015.

[18] Iezzi, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*, 4ª edição, São Paulo: Atual, 2006.

[19] Janos, M. *Matemática e natureza*, 1ª edição, São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[20] Leonardo, F. M. (E.). *Conexões com a matemática*, 2ª edição, São Paulo: Moderna, 2013.

[21] Livio, M. *Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente*, 6ª edição, Rio de Janeiro: Record, 2011.

[22] Luske, H. *Donald no país da matemágica*. [Filme HD]. Produção de Walt Disney Productions, direção de Hamilton Luske. EUA, 1959. 27 min. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=TphWfs_OXkU>. Acesso em: 23 de fev. 2015.

[23] Duprat, M. M. *Proporção Áurea*. Disponível em <http://pt.slideshare.net/MauricioMalletDuprat/proporcao-urea>. Acesso em: 23 de fev. 2015.

[24] Onuchic, L. de la R. *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Pesquisa em educação matemática. 1ª edição, São Paulo: Unesp, 1999.

[25] Paiva, M. *Matemática Paiva*, 2ª edição, São Paulo: Moderna, 2013.

[26] Piropo, P. *Um número muito especial*. Disponível em <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>. Acesso em: 25 de fev. 2015.

[27] Sampaio, F. A. *Matemágica: história, aplicações e jogos matemáticos*, Volume 1, 5ª edição, Campinas: Papirus, 2013.

[28] Silva, R. T. P. de. *Sequência de Fibonacci: aspectos matemáticos*. Disponível em <http://pt.slideshare.net/RodrigoThiagoPassosSilva/seqncia-de-fibonacci-aspectos-matemticos>. Acesso em: 22 de fev. 2015.

[29] Sodré, L. de O. *O número* 142857 *e o número de ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas*. Disponível em <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle123456789/174/2011_00034_LEANDRO_DE_OLIVEIRA_SODRE.pdf?sequence=1>. Acesso em: 03 de mar. 2015.

[30] Smole, K. S.; Diniz, M. I. *Matemática: ensino médio*, 2ª edição, São Paulo: FTD, 2013.

[31] Sousa, A. do C. *Quando o lúdico faz parte do ensino de matmeática*. IX Baú de Matemática. Ermesinde/Valongo, Lisboa, 2004.

[32] Souza, J. R. de. *Novo olhar matemática*, 8ª edição, São Paulo: Saraiva, 2013.

[33] Spira, M. *O número de ouro*. Palestra apresentada pelo professor Michel Spira no estágio dos professores premiados da OBMEP em 2006. Disponível em <www.youtube.com/watch?v=WVc2bS5Gc-k>. Acesso em: 24 de fev. 2015.