Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/SBM

Cálculo no Ensino Médio: progressões geométricas e o que vai para baixo do tapete

Luiz Amorim

Orientador: Marcelo Viana - IMPA
Coorientador: Victor Augusto Giraldo - UFRJ

IMPA - 2013

"É muito difícil conhecer as nossas limitações. Porque dentro de uma casa não se vê essa casa".

(Vergílio Ferreira - Conta Corrente 5)

Agradecimentos:

Pela alegria de poder ver no Brasil um programa que pensa na discussão sobre educação matemática de qualidade, em moldes que possibilitam a participação efetiva do professor; agradeço a todos que contribuíram para o surgimento e a implementação do PROFMAT, em especial ao professor Elon Lages Lima, que, acredito, realizou um sonho com a materialização deste Programa.

Certamente a ideia de estudar e desenvolver este projeto deve ser agradecida, pois muito me felicita participar da presente obra. A atenção a esta proposta é devida ao amigo Fabio Luis, coautor desta obra, a quem eu agradeço por nos indicar a importância do tema.

Pela acolhida, incentivo e entusiasmo com a presente obra, agradeço aos professores Marcelo Viana e Victor Giraldo, bem como pelos valorosos conselhos e a orientação.

Pelo amor, carinho, incentivo, paciência e vibração, agradeço à minha amada Ana Cristina da Silva Duarte. Admirar-te, respeitar-te e amar-te alimenta minha vontade de vencer e de ser melhor a cada dia, uma vez que eu tenho essa mania de achar que tudo de bom que tenho deve ser merecido.

Agradeço à Carlos Alberto da Silva Victor o carinho com que deseja o meu progresso como pessoa e como profissional. Meu respeito e minha admiração ao que ele é, são como um norte para mim. Suas observações foram de grande importância para que minhas tentativas de tornar essa proposta acessível ao aluno estejam concretizadas.

Agradeço o amigo Bruno Vianna por me ouvir e me tranquilizar quando alguma etapa deste projeto parecia não fazer sentido.

Agradeço também às amigas Janaína de Souza Silva e Silvana dos Anjos pela caridosa correção revisão ortográfica e gramatical que fizeram em meio ao volume de trabalho que já possuem.

A todos que participaram, direta ou indiretamente, para que este projeto, e tudo que me conduziu até a concretização dele, fosse uma realidade, minha gratidão e meu pedido de desculpas por não tê-lo nomeado.

Por fim, agradeço a Deus pela graça da vida e pela dádiva de conseguir manifestar um pouco de inteligência.

À minha amada Ana Cristina da Silva Duarte por sua amizade, seu amor e sua unicidade.

À minha mãe por seu amor cego e incondicional.

Às minhas avós Tereza e Iliette por suas valiosas orações.

Resumo

Ao olharmos para o atual Ensino Médio, observamos diversos momentos em que o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral poderia ser usado para justificar passagens ou simplificar conclusões. No entanto, não nos utilizamos destas ideias e deixamos que o aluno veja o Cálculo pela primeira vez somente na graduação. Aqui, tentamos desenvolver uma alternativa a essa prática, tão comum no Brasil, sugerindo um roteiro de atividades que permita ao aluno, que está estudando somas de quantidades finitas de termos de uma progressão geométrica, obter a soma infinita de modo mais natural e completo, se esta soma existir. Para essa conclusão é utilizado o conceito de limite de sequências, sem a preocupação de formalizar, mas antes sim de apresentar, familiarizar e permitir que o aluno consiga incluir em seu arsenal para a resolução de problemas as ferramentas do limite de sequências. Incluímos também nas pretensões de nossa proposta a tentativa de incluir essas ideias do Cálculo Diferencial e Integral, sem onerar a grade curricular da matemática do Ensino Médio. Acreditamos fortemente que esse tipo de proposta pode ser o estopim para solucionar alguns dos problemas que a educação matemática brasileira analisa e tenta resolver.

Palavras-Chave: Progressões Geométricas, Limite de Sequências, Fractais e Economia.

Sumário

Capítulo I
Introdução Geral

A Educação Básica brasileira vem sofrendo mudanças ao longo do tempo. Muitas dessas mudanças foram desencadeadas por políticas públicas que priorizam o desenvolvimento social, cultural e tecnológico brasileiro. A criação do Parâmetro Curricular Nacional regulamentado em 1996 pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB), serviu para unificar o ensino em todo país, respeitando as diferenças culturais e sociais de cada Estado. Porém, apesar de as mudanças serem em diversos âmbitos, não se discutia uma nova reformulação dos componentes curriculares de matemática ao fim do Ensino Básico, mais precisamente no Ensino Médio. Segundo o artigo 22 da LDB, a seguir

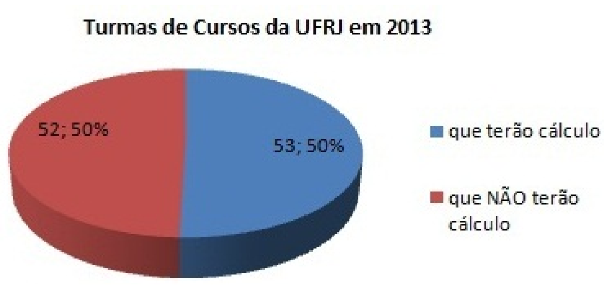
> "Art 22. A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e **fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores**".

É fundamental que o Ensino Médio realmente faça a ponte entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior, oferecendo aos discentes, um embasamento real e fidedigno aos componentes curriculares da maioria dos Cursos Superiores.

É fato que a falta do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio deixa uma lacuna enorme para a maioria dos futuros graduandos, pois praticamente 50% deles terão alguma disciplina referente ao estudo dos limites, das derivadas e da integral. Afirmamos isso, baseados em um pequeno estudo realizado por este autor, que conferiu dois documentos sobre as condições de acesso à Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2013. Foram analizados o quadro de vagas oferecidas e a grade curricular de cada curso disponibilizado pela UFRJ em 2 013. Com isso constatamos que:

- das 4 745 vagas oferecidas pela UFRJ 2 366, destinam-se a turmas que terão Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso
- das 105 turmas previstas 53 delas terão aulas de Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso

Seguem os gráficos abaixo:



Dados obitdos em:
LINK: Grades Curriculares e LINK: Edital 225 SiSu [1]

A nossa proposta não é inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar nossos estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que têm o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias, e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina.

Foi com base nesses objetivos que elaboramos um projeto que vem ao encontro da atual situação político-econômica do nosso país, em que a carência de profissionais na área de exatas, faz com que importemos conhecimento científico ao invés de produzirmos. Esperamos que este estudo contribua nas discussões do Programa Ensino Médio Inovador (ProEMI), instituído pelo MEC através da Portaria nº 971, de 9 de outubro de 2009, e que integra as ações do Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE, como estratégia do governo federal para induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio.

Maiores informações, podem ser obtidas através do: LINK: ProEMI[2]

[1] Acesso em: 11 de fev. 2 013
[2] Acesso em: 11 de fev. 2 013

Capítulo II

Introdução

Era uma aula para o 9º ano do Ensino Fundamental e eis que nos deparamos com a necessidade de explicar aos alunos que $0,99999... = 1$. Já em dois concursos públicos para professores do Ensino Básico e Médio havíamos enfrentado essa mesma igualdade. Como fazer nosso aluno entendê-la?... Já num outro momento, agora no 2ª série do Ensino Médio, após algum tempo desenvolvendo a teoria sobre progressões geométricas, eis que chegara a hora de ensinar somas de infinitas parcelas e um dos alunos nos pergunta após termos exibido o título da matéria: "Como assim somar uma infinidade de coisas? O que isso significa?"...

Percebemos então que a justificativa tradicional de ser, o a_{n+1} da fórmula $\frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$, desprezível não convenceria ninguém de nada e que os alunos até iriam decorar a fórmula, mas dificilmente entenderiam seu significado e até mesmo poderiam usar a fórmula de modo inadequado, quando a razão fosse fora do intervalo $-1 < q < 1$, por exemplo. Em ambos os momentos preferimos gastar um pouco mais de tempo para, de um modo um tanto rústico, explicar algumas ideias sobre limite de sequências.

Qual não foi nossa surpresa ao percebermos que as ideias transmitidas de limite de sequências foram assimiladas com muita naturalidade e permitiram, após o que realmente queria se explicar a princípio, um entendimento rápido e natural. Com base nessas experiências encontramos as motivações para a elaboração da presente obra, na qual, sem nos determos no rigor matemático próprio da análise matemática, propomos um caminho para a construção das ideias que envolvem a decisão sobre a existência e a possível determinação do limite de uma sequência.

Existem, à disposição dos interessados, diversas estatísticas e estudos sobre a dificuldade de alunos que cursam cálculo diferencial integral pela primeira vez em cursos de graduação. Por que em boa parte dos países do mundo o cálculo é ministrado ainda no ensino médio e aqui no Brasil, não? É sabido que todos os cursos de graduação que apresentam um mínimo de conceitos científicos e tecnológicos utilizam o cálculo diferencial e integral; por que permitir que o Cálculo Diferencial e Integral seja apresentado apenas na graduação? Se na Educação Infantil a criança é exposta a ideias de contagem, medida, operação com grandezas de mesma natureza e no Ensino Fundamental amadurece e formaliza essas noções, por que não fazer isso também com o Cálculo Diferencial e Integral? Segundo ÁVILA (1991):

> "... o Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual[2]."

O momento histórico brasileiro permite um olhar mais atento ao ensino da matemática e às formações voltadas para ciências e tecnologias. Não é de hoje que o país mostra-se preocupado com estas questões e permite-se reestruturar-se para obter melhores resultados. Exemplos disso estão no Movimento da Matemática Moderna, nos PCNs, PNLDs, projeto Klein, etc. Acreditamos, assim, que este tipo de trabalho que propomos aqui esteja em sintonia com o momento histórico para acontecer e ter um receptividade positiva. Todos nós, como educadores da matemática que somos, queremos ver o país deter autonomia suficiente para não precisar importar saberes tecnológicos necessários às especificidades e desenvolvimentos próprios de nossa nação.

Para o desenvolvimento das atividades propostas nesta obra, buscamos, em primeiro lugar, valorizar os esquemas mentais já presentes em cada aluno para, a partir daí, desenvolver os aspectos que são o objetivo de nossa proposta. As atividades foram formuladas em forma de questionário para permitir ao aluno o envolvimento, a reflexão e o debate, fazendo com que seja ele próprio o construtor do seu conhecimento. Como recursos de ambientação do aluno nas diretrizes que se pretende desenvolver, utilizamos figuras, tabelas, gráficos, planilhas e calculadoras, a fim de otimizar a análise do dados para o desenvolvimento das conclusões.

Outro aspecto que permeia a atividade como um todo é o chamado ensino em espiral, pois em vários momentos o aluno regressa a algum conceito já trabalhado, estimulando a lembrança do conteúdo, permitindo a percepção de novos e mais sofisticados entendimentos, até o fichamento dos principais aspectos envolvidos no conteúdo. Vê-se com isso que apesar de concentramos nossas atividades na obtenção de uma fórmula que calcula a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, há uma preocupação de que o aluno possa entender, aprender e utilizar em situações convenientes, a ideia de limite. Assim, espera-se que necessitando dessas ideias num curso de graduação, por exemplo, poderá acessá-las sem conflitos ou contradições, apenas aprofundando e dando mais rigor ao que, com essas atividades, já conheceu. Sobre o rigor excessivo dentro da matemática, citamos ÁVILA(1991):

> "Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2^o grau[3] , ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações[2]."

[3]O 2^o grau hoje tem o nome de Ensino Médio

Capítulo III

Manual do Professor

1 Recomendações ao Professor

Estimado colega de profissão, este material foi elaborado por motivo de grande importância: ajudá-lo na condução segura dos seus alunos até a obtenção dos conceitos aqui expostos. Por isso, faz-se necessária a leitura deste material antes da aplicação das atividades, a fim de entender que nossa proposta não está concentrada em desenvolver algoritmos e teoremas acerca de limite, mas sim em propor um caminho matematicamente mais honesto para a fórmula que calcula a soma infinita de termos consecutivos de uma progressão geométrica com razão $|q| < 1$ e $q \neq 0$.

Como é fato que a noção de limite de sequências constitui ferramenta capaz de conduzir ao resultado pretendido, por que não familiarizar o aluno com estas ideias, sem a pretensão de demonstrá-las? Você verá, estimado colega, que os exemplos utilizados e como são explorados, permitem ao aluno participar da construção do conhecimento de um modo muito natural, ao fazer apelos visuais a estas estruturas e focar a atenção em ideias que deixam a conclusão praticamente inegável a um aluno que se envolva e participe da atividade.

Por questionarmos aspectos que o aluno, muito provavelmente, não havia parado para pensar, as dúvidas surgirão afoitas, e daí a nossa petição insistente de que o professor leia este material antes da aplicação. Assim, o docente estará devidamente preparado para boa parte dos questionamentos e terá tempo de se debruçar em outros que possam surgir. Sugerimos também a leitura dos capítulos 1 e 2 de [8]. Não recomendamos nenhuma demonstração que não esteja no material do aluno durante realização das atividades, a não ser que o aluno peça, o que pode ser feito só para ele. Dizemos isso, pois queremos o regresso, para o Ensino Médio, de estruturas matemáticas que melhor preparem nossos alunos para os modelos que estudarão em cursos de graduação. Portanto, julgamos infinitamente mais importante para o Ensino Médio desenvolver ideias corretas sobre esses modelos ao invés de olhar de modo técnico para eles, o que tem afastado nossos alunos não só do gosto pela matemática como também dos desenvolvimentos tecnológicos que esse gosto é capaz de produzir.

1.1 Objetivo

Desenvolver familiaridade com as ideias que regem o cálculo de limite de sequências, bem como conhecer e saber como e quando usar a fórmula que calcula a soma infinita de termos de uma progressão geométrica.

1.2 Público-alvo

A partir do 1ª série do Ensino Médio.

1.3 Pré-requisitos

Números Racionais, Progressão Geométrica, Soma Finita dos Termos de uma Progressão Geométrica, "Questionário sobre o Infinito - Uma Sondagem de Conhecimento.[7]"

1.4 Descrição da Atividade

Esta atividade foi dividida em cinco aulas com dois tempos de 50 minutos cada uma. As divisões seguem o seguinte roteiro:

AULA 1 - "Analisando Tendências em Algumas Sequências".

Nessa aula, o aluno começará a refletir sobre o decréscimo de termos em PGs com razão $0 < q < 1$, tendo seus primeiros contatos, de modo intuitivo, com a ideia de *Limite de Sequências*. Isso é feito pela análise de sequências de figuras, que julgamos apresentar mais clareza com respeito ao que queremos que o aluno venha a perceber e, em seguida, análise de tabelas que, com o auxílio do computador, cremos poder otimizar o tempo do aluno para obter suas conclusões.

AULA 2 - "Somando os Infinitos Termos de uma PG".

Aqui o aluno inicia a análise prática do significado de somar infinitas parcelas e põe seus esquemas mentais intuitivos em confronto com os dados numéricos para que, ao fim, essas duas informações se tornem uníssonas a conclusão, que mais uma vez usa os recursos de sequências de figuras e análise de tabelas. Há nessa aula uma preocupação um pouco maior na formalização do que é utilizado para a investigação da existência e determinação de um limite e suas conclusões. Sugerimos fortemente a leitura de [3].

AULA 3 - "Das Sequências Mal Comportadas".

Colocamos as ideias desenvolvidas nas aulas anteriores à prova, com o objetivo de tornar mais sólida a importância de cada um dos aspectos destacados para a definição da existência e a determinação de um limite. Os procedimentos utilizados aqui são um pouco mais rápidos, tendo em vista as aulas anteriores, por isso gráficos são apresentados já prontos, bem como algumas planilhas, permitindo uma agilidade ainda maior nas conclusões, mas mantendo a característica de permitir a construção do próprio conhecimento, que vem pela análise e entendimento do que é exibido.

AULA 4 - “Somas Infinitas dos Termos de uma Progressão Geométrica”.

Com tudo o que foi discutido, chega a hora de aplicar o que foi aprendido no desenvolvimento e formalização de ferramentas em diversas áreas. Assim, orientamos o aluno na dedução da fórmula da soma infinita de termos consecutivos de uma PG e discutimos uma aplicação desta fórmula para resolver um problema dentro da própria matemática. Aproveitamos essa aula para reforçar os mecanismos de análise da existência e determinação de um limite e exibimos um aspecto interessante da matemática que é a pesquisa voltada para a melhoria e aperfeiçoamento da própria matemática. Sugerimos aqui a leitura de [1], páginas 158-170.

AULA 5 - “Aplicações Mais Sutis”.

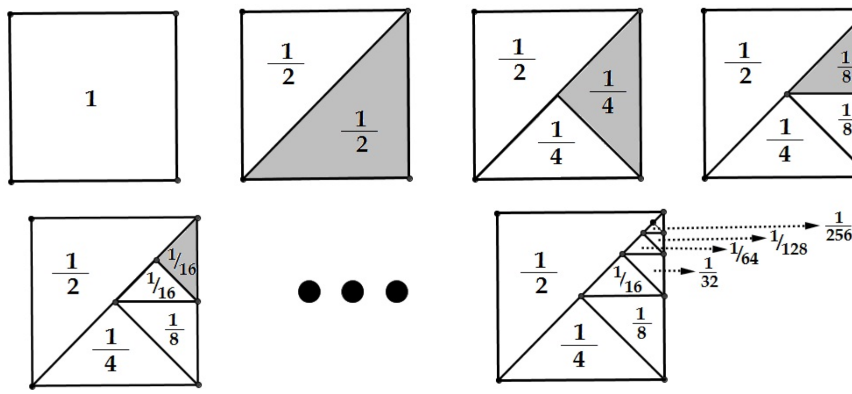
Deixamos para a última aula algumas das aplicações da fórmula deduzida na aula 4, mostrando ao aluno que as ferramentas matemáticas são pesquisadas e desenvolvidas para responder a questões de outras áreas. Assim, apresentamos ao aluno o universo fractal e motivamos a junção da ferramenta desenvolvida na aula 4 com esse universo, a fim de resolver um problema prático que conta muito com aproximações e estimativas. Por fim, aproveitamos a ferramenta da aula 4 para falar um pouco de matemática financeira, mostrando ao aluno a utilidade e versatilidade do que lhe foi ensinado. É desejável a leitura de [9] e o capítulo 3 de [10].

1.5 Recursos Necessários

Computador com Internet, planilha eletrônica, calculadora e folhas A4.

2 AULA 1: Analisando Tendências em Algumas Sequências

Observe as figuras abaixo:



Do primeiro quadrado para o seguinte, dividimos ao meio a área total e tomamos uma metade, que destacamos de cinza conforme se vê no segundo quadrado. A nova área é novamente dividida ao meio e tomamos uma metade, conforme o destaque de cinza no terceiro quadrado... Assim, construímos uma sequência com as áreas que tomamos após cada divisão:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

A) A sequência exibida acima é uma progressão? De que tipo?
Sim; Progressão geométrica decrescente.

B) Qual a razão dessa progressão?
$\frac{1}{2}$ ou $0,5$.

C) Determine o 6º, o 7º e o 8º termos dessa sequência.
$\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$ e $\frac{1}{256}$.

D) Entendendo que a divisão prossegue sem parar, dando origem a triângulos cada vez menores e que áreas nunca são negativas, podemos afirmar que os termos dessa sequência estão se aproximando de algum valor? Qual?
Sim; Zero.

E) Chamando o valor respondido no item anterior de 'L_0', você acredita que em algum momento acontecerá de um dos termos dessa sequência ser igual a 'L_0'?
Não.
OBS.: Aqui o aluno pode ser levado a responder "SIM", devido ao fato de a figura acinzentada ficar cada vez menos visível. Cabe ao professor tentar convencer o aluno de que isso não ocorre pois estamos sempre tomando a metade do que tínhamos e pontos não podem ser medidos, daí a ideia de sempre poder efetuar essa divisão ainda que a visão não possa acompanhar essas etapas.

F) É possível encontrar termos dessa sequência que estejam a uma distância menor do que $\dfrac{1}{10}$ de 'L_0'?
Sim.

G) Exiba, caso seja possível, um termo 'x_n', $n \in \mathbb{N}$, dessa sequência tal que $(x_n - L_0) < \frac{1}{50}$. E os termos seguintes a esse continuam menores do que $\frac{1}{50}$?
$\dfrac{1}{64}$; Sim, todos os termos seguintes continuam menores que $\dfrac{1}{50}$.

H) Exiba, caso seja possível, um termo 'x_n', $n \in \mathbb{N}$, dessa sequência tal que $(x_n - L_0) < \frac{1}{200}$. E os termos seguintes a esse continuam menores do que $\frac{1}{200}$?
$\dfrac{1}{256}$; Sim, todos os termos seguintes continuam menores que $\dfrac{1}{200}$.

I) Exiba, caso seja possível, um termo 'x_n', $n \in \mathbb{N}$, dessa sequência tal que $(x_n - L_0) < \frac{1}{10\,000}$. E os termos seguintes a esse continuam menores do que $\frac{1}{10\,000}$?
$\dfrac{1}{16\,384}$; Sim, todos os termos seguintes continuam menores que $\dfrac{1}{10\,000}$.

J) É possível escolher, nessa sequência, termos x_n, $n \in \mathbb{N}$, que estejam tão próximos de L_0, que $x_n - L_0$ seja quase zero, ou em outras palavras, que essa diferença fique tão pequena quanto desejarmos?
Sim.

Devido ao comportamento apresentado pela sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$, diremos que ela tende a $L_0 = 0$, ou, em liguagem formal, que seu limite é $L_0 = 0$, quando o índice 'n' de seus termos tende a infinito.

Observe a sequência a seguir: $0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots$ em que os termos decrescem, e responda as perguntas que seguem:

A) A sequência exibida acima é uma progressão? De que tipo?
Sim; Progressão geométrica decrescente.

B) Qual a razão dessa progressão?
0,1 ou $\frac{1}{10}$ ou 10^{-1}.

C) Determine o 5º, o 6º e o 7º termos dessa sequência.
0,000 09; 0,000 009; 0,000 000 9.

D) Ententendo que o processo de obter novos termos continua sem parar, ou seja, infinitamente, o que podemos afirmar sobre a existência de termos negativos dessa sequência?
Não há termos negativos nessa sequência.

E) Com base na resposta do item anterior, e lembrando que essa sequência decresce termo a termo, podemos afirmar que esses termos estão se aproximando de algum número em particular? Que número seria esse?
Zero.

F) Chamando esse número do item anterior de 'L_0', você acredita que em algum momento acontecerá de um dos termos dessa sequência ser igual a 'L_0'?
Não.

G) É possível encontrar termos dessa sequência que estejam a uma distância menor ou igual a 0,003 de 'L_0'? E a uma distância de 0,000 003 de 'L_0'? Exiba, se possível, esses termos.
O 4º termo é menor do que 0,003 e O 7º termo é menor do que 0,000 003. Perceba que a partir desses termos, todos os seguintes serão menores do que o valor estipulado.

H) E se quisermos que essa proximidade com 'L_0' seja muito, mas muito menor do que as citadas no item 'G', isso é possível?
Sim.

> Devido ao comportamento apresentado pela sequência $0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots$, diremos que ela tende a $\underline{L_0 = 0}$, ou, em liguagem formal, que seu limite é $\underline{L_0 = 0}$, quando o índice 'n' de seus termos tende a infinito.

2.1 PARA O LAR

Caso o professor ache conveniente, sugeriremos nestas seções exercícios extraclasse para que o aluno tenha mais um momento para refletir sobre as ideias expostas antes do próximo momento de aprendizado. Como a decisão de aplicar ou não estes exercícios ficará a critério do professor aplicador, devido ao equacionamento dos tempos de aula, deixaremos essas atividades disponíveis e reunidas ao fim do material destinado ao aluno.

Nas sequências a seguir há um número que detém em suas proximidades uma aglomeração de termos das sequências, ou seja, um valor para o qual a sequência converge. Identifique esse valor para cada caso:

a) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ldots$
zero.

b) $51;\ 0,51;\ 0,005\,1\ 0,000\,051\ \ldots$
zero.

c) $(3+\frac{1}{2});\ (3+\frac{1}{4});\ (3+\frac{1}{8});\ (3+\frac{1}{16});\ldots$
três.

d) $(6-2);\ (6-1);\ \left(6-\frac{1}{2}\right);\ \left(6-\frac{1}{4}\right);\ldots$
seis.

e) $(11+5);\ (11+1);\ \left(11+\frac{1}{5}\right);\ \left(11+\frac{1}{25}\right);\ldots$
onze.

f) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ldots$
um.

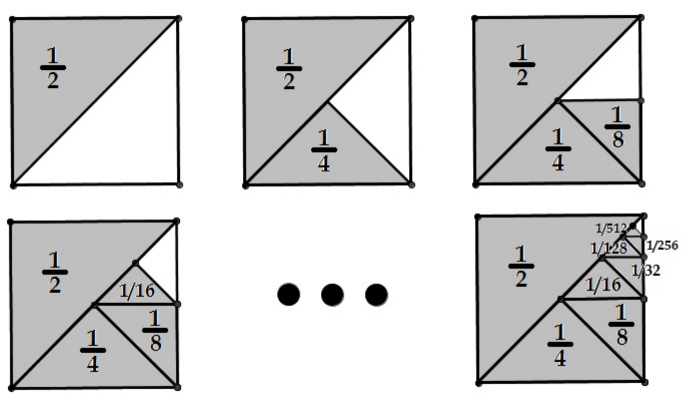
g) $1-\frac{1}{10},\ 1-\frac{1}{100},\ 1-\frac{1}{1000},\ 1-\frac{1}{10000},\ldots$
um.

3 AULA 2: Somando os Infinitos Termos de uma PG

Sabemos que, por causa de limitações físicas, não seria possível somar de modo convencional todos os termos das sequências apresentadas na AULA 1, pois mesmo que somemos uma grande quantidade de termos, ainda existiriam uma infinidade deles, todos não nulos, a serem acrescentados à soma. Para avançar na tentativa de concluir o valor da soma desses infinitos termos, caso existam essas somas, é que vamos construir novas sequências em que os termos serão os resultados parciais dessas somas. Vamos começar com a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$ e, a partir dela, construir uma nova sequência formada pelas somas parciais de seus termos. Veja:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & S_1 = & \dfrac{1}{2} & = 0,5 \\[2ex]
S_2 = & S_1 + \dfrac{1}{4} = & \dfrac{3}{4} & = 0,75 \\[2ex]
S_3 = & S_2 + \dfrac{1}{8} = & \dfrac{7}{8} & = 0,875 \\[2ex]
S_4 = & S_3 + \dfrac{1}{16} = & \dfrac{15}{16} & = 0,9375 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Olhe cada uma dessas somas parciais através das figuras que as geram:



Com o auxílio dessas figuras, e pelo que você tem aprendido sobre a análise de tendências de sequências, tente responder aos itens que seguem:

A) Os termos dessa nova sequência estão aumentando? E o que é acrescentado é cada vez maior ou menor?
Sim. Menor.

B) Os termos S_n parecem estar se aproximando de algum número 'L_0' a medida que 'n' cresce? Que valor seria esse?
Sim; 1.

C) Com a ajuda de uma calculadora, preencha a tabela a seguir:

	S_n	$d_n = 1 - S_n$
$n = 1$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$
$n = 2$	$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{1}{4} = 0,25$
$n = 3$	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8} = 0,125$
$n = 4$	$\frac{15}{16} = 0,9375$	$\frac{1}{16} = 0,0625$
$n = 5$	$\frac{31}{32} = 0,96875$	$\frac{1}{32} = 0,03125$
$n = 6$	$\frac{63}{64} = 0,984375$	$\frac{1}{64} = 0,015625$
$n = 7$	$\frac{127}{128} = 0,9921875$	$\frac{1}{128} = 0,0078125$
$n = 8$	$\frac{255}{256} = 0,99609375$	$\frac{1}{256} = 0,00390625$

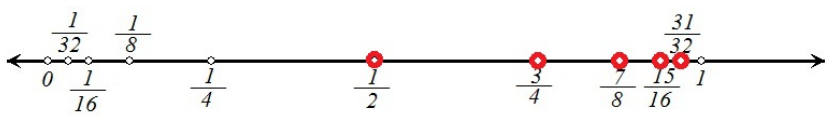
D) Os valores da coluna 'd_n' estão aumentando ou diminuindo? Parecem se aproximar de algum valor? Qual?
Diminuindo; Sim; Zero.

E) Será possível escolhermos um termo 'S_n' em que 'd_n' seja menor ou igual a 0,007? Que termo seria esse? E para os termos seguintes a esse, os valores de d_n continuam menores ou iguais a 0,007?
Sim, $\frac{1}{256} = 0,00390625$; Sim, continuam menores do que 0,007.

F) Encontre agora um 'S_n' tal que $d_n \leq 0,000\,3$. Os próximos termos a partir deste continuam menores do que, ou iguais a 0,000 3?
$\dfrac{1}{2^{12}} = \dfrac{1}{4096} = 0,000244140625$

G) Pense num valor positivo de 'd_n' muito, mas muito menor que 0,000 3. É possível escolher um 'S_n' a partir do qual todos os valores de 'd_n' sejam menores do que esse valor que você pensou?
Sim.

H) Identifique, na reta exibida abaixo, os valores de S_n. Em seguida, tente perceber o fato geométrico que os valores da coluna d_n estão exibindo. Que significado seria esse?



d_n indica as distâncias entre os S_{ns} e o 1.

I) Observe outra vez as figuras que representam as somas parciais de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$. O que as somas parciais estão fazendo em relação ao quadrado de área 1 do início do processo?
Preenchendo-o pouco a pouco.

J) Com o que foi discutido até aqui, qual sua opinião sobre a afirmação de que o limite das somas parciais é 1? O que os seus colegas acham?
Está correto.

K) Em matemática, um número pode ser escrito de diversas formas. Por exemplo, $2 = 1+1 = \frac{10}{5} = 3-1+0+0+0+0+0+0+\cdots$ Com a análise feita sobre S_n, vimos que essa sequência se esforça, sem parar NUNCA, para atingir o número 1. A fim de simplificar o símbolo da soma de todos os infinitos termos de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$ e de dar às somas parciais o objetivo que elas tanto buscam, termo a termo, que número seria mais conveniente usar para simbolizar esta soma infinita? Seus colegas concordam com sua resposta?
1; Sim, eles estão de acordo.

> OBS.: É importante que o aluno registre em seu intelecto que agora estamos efetivamente somando todos os termos e que, como a figura dessas somas sugere, a área total 1 será atingida uma vez que o processo é contínuo. Em outras palavras, queremos dizer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ é um símbolo para o limite da soma da sequência apresentada, ou seja, 1 representa bem esta soma infinita.

L) Após esse debate com seus colegas e com o professor, bem como após ter visto as figuras que mostram as somas parciais das áreas, você concorda em escrever que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots = 1$?
Sim.

Através das orientações dadas pelo questionário, as discussões realizadas com os colegas e com o professor, e as figuras, vimos que os valores de S_n podem estar tão próximos de 1 quanto se queira, bastando escolher um valor adequado de 'n'. Toda a nossa análise revela que o número __1__ ***é uma espécie de "ímã" dos termos de 'S_n', acumulando em torno de si e cada vez mais perto de si todos os valores fornecidos por qualquer soma parcial.*** Matematicamente, essa observação é traduzida com qualquer uma das afirmações abaixo, que são modos diferentes de expressar o mesmo fato:

- A sequência S_n converge para __1__.
- O limite de S_n é __1__, quando n tende a infinito.
- $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$ __1__.
- A soma de todos os infinitos termos de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$ é __1__.
- $S_\infty =$ __1__

Vamos agora, voltar para a sequência $(0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots)$ e analisar as somas parciais de seus termos:

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_1 = & 0{,}9 \\
S_2 = & S_1 + 0,09 = & 0{,}99 \\
S_3 = & S_2 + 0,009 = & 0{,}999 \\
S_4 = & \underline{S_3 + 0,000\,9} = & \underline{0{,}999\,9} \\
S_5 = & \underline{S_4 + 0,000\,09} = & \underline{0{,}999\,99}
\end{array}
$$

A) Os termos dessa nova sequência estão aumentando? E o que é acrescentado é cada vez maior ou menor?
Sim; Menor.

Agora abra o arquivo "planilha 1", acrescente o termo $0,9$ na célula 'B2', observe o que ocorre e responda os itens que seguem:

	A	B	C	D
1	n	na	Sn	dn
2	1	0,9000000000000000	0,9000000000000000	0,1000000000000000
3	2	0,0900000000000000	0,9900000000000000	0,0100000000000000
4	3	0,0090000000000000	0,9990000000000000	0,0010000000000000
5	4	0,0009000000000000	0,9999000000000000	0,0001000000000000
6	5	0,0000900000000000	0,9999900000000000	0,0000100000000000
7	6	0,0000090000000000	0,9999990000000000	0,0000010000000000
8	7	0,0000009000000000	0,9999999000000000	0,0000001000000000
9	8	0,0000000900000000	0,9999999900000000	0,0000000100000000
10	9	0,0000000090000000	0,9999999990000000	0,0000000010000000
11	10	0,0000000009000000	0,9999999999000000	0,0000000001000000
12	11	0,0000000000900000	0,9999999999900000	0,0000000000100000
13	12	0,0000000000090000	0,9999999999990000	0,0000000000010000
14	13	0,0000000000009000	0,9999999999999000	0,0000000000001000
15	14	0,0000000000000900	0,9999999999999900	0,0000000000000100
16	15	0,0000000000000090	0,9999999999999990	0,0000000000000010

Caso o professor deseje construir sua própria tabela na planilha, o passo a passo encontra-se após a seção "PARA O LAR" desta aula.

B) 'Sn' é uma progressão geométrica? Em caso afirmativo, qual seria a razão?
Não; Não há razão uma vez que $\dfrac{0,99}{0,9} \neq \dfrac{0,999}{0,99}$.

C) Esses termos parecem estar se aproximando de algum número 'L_0'? Qual?
Sim; 1.

D) Os valores da coluna 'dn' estão aumentando ou diminuindo? Parecem se aproximar de algum valor? Qual?
Diminuindo; Sim; Zero.

E) Será possível escolhermos um termo 'Sn' em que 'dn' seja menor ou igual a 0,007? Que termo seria esse? E para os termos seguintes a esse, os 'dns' continuam menores do que, ou iguais a 0,007?
Sim; 3º termo; Sim, continuam.

F) Para que valor de ‘n’ teríamos um ‘Sn’ tal que $dn \leq 0,000\,000\,000\,000\,003$? E os ‘Sn’ seguintes a esse que você respondeu, eles continuam todos menores do que, ou iguais a 0,000 000 000 000 003?
$n = 16$; Sim, continuam.

G) Pense num valor positivo de ‘dn’ muito, mas muito menor que o apresentado no item anterior. É possível escolher um ‘Sn’ a partir do qual todos os ‘dns’ fiquem menores do que, ou iguais a esse valor que você pensou?
Sim.

H) Repare que a coluna ‘D’ da planilha revela o quão próximo os valores de ‘Sn’ estão de 1. Assim, qual sua opinião sobre a afirmação de que ‘Sn’ tende a 1? O que os seus colegas acham?
Ela é verdadeira.

I) Com a análise feita sobre S_n, vimos que essa sequência se esforça, sem parar NUNCA, para atingir o número 1. A fim de simplificar o símbolo da soma de todos os infinitos termos de $(0,9; 0,99; 0,999; \ldots)$ e de dar às somas parciais o objetivo que elas tanto buscam, termo a termo, que número seria mais conveniente usar para simbolizar esta soma infinita? Seus colegas concordam com sua resposta?
1; Sim, eles concordam.

> OBS.: Enfatizamos que essa pergunta tem o objetivo sutil de permitir à imaginação do aluno buscar um número existente e que represente bem a soma de todos os infinitos termos da sequênica, sempre acrescentando mais um número nove à direita do último termo visualizado, mas sem sucesso, pois a construção é infinita. Em outras palavras, é aqui que esperamos que o aluno conclua que 0,999... é um símbolo que diz qual é o limite da sequência das somas parciais, quando o seu índice ‘n’ tende a infinito, tal como o 1. Aqui, por ser um exemplo mais abstrato e difícil até para professores, podemos utilizar como recurso para embasar esta conclusão a resposta dada pelo próprio aluno na questão da soma das áreas.
> Ainda que o aluno não chegue a uma conclusão, inserimos ainda outras maneiras de obter essa conclusão no item “PARA OS CÉTICOS...”, logo abaixo.

J) Após esses debates com seus colegas e com o professor, você concorda que o valor da soma de todos os infinitos termos de $(0,9;\ 0,09;\ 0,009;\ 0,0009; \ldots)$ é 1, ou seja, que $0,99999\ldots = 1$?
Sim.

3.1 PARA OS CÉTICOS

Caso você discorde da afirmação do item 'J', faça o seguinte:

1ª Justificativa: Se o aluno resolveu o exercício letra 'g' da seção PARA O LAR da AULA 1, reescreva o exercício convertendo cada termo para a sua forma decimal, compare com a resposta correta à pergunta e veja o que ocorre.
$1-\frac{1}{10}=0,9$; $1-\frac{1}{100}=0,99$; $1-\frac{1}{1000}=0,999$; $1-\frac{1}{10000}=0,9999; \ldots$, ou seja, o item 'g' reescrito revela que a sequência 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ... tem limite um. Analisando essa última afirmação sob o que foi visto até aqui fornece que 0,9999... = 1

2ª Justificativa: Sabemos que $\frac{1}{3}=0,333\ldots$. Como multiplicar os dois membros de uma igualdade por um valor real não desfaz a igualdade, vamos multiplicar ambos os membros dessa igualdade por 3.

$$3\times\frac{1}{3}=3\times 0,333\ldots \leftrightarrow 1=0,999\ldots.$$

3ª Justificativa:

i) Queremos obter o resultado da soma infinita $S_\infty=0,9+0,09+0,009+0,0009+\cdots$. Para isso, vamos usar a soma infinita $-\frac{1}{10}S_\infty$.
Teremos $-\frac{1}{10}S_\infty = \underline{-0,09-0,009-0,0009-\cdots}$

ii) Compare as parcelas de S_∞ com as de $-\frac{1}{10}S_\infty$. São todas simétricas uma da outra? Falta ou sobra alguém na simetria?
Quase todas; Sobra 0,9.

iii) Com base no item anterior, o que acontece se fizermos $S_\infty-\frac{1}{10}S_\infty$?
Dá 0,9.

iv) Considerando S_∞ um número, obtenha esse valor resolvendo a equação do 1º grau gerada através dos dois itens anteriores.
$$S_\infty\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=0,9 \Leftrightarrow \frac{9}{10}\times S_\infty=0,9 \Leftrightarrow S_\infty=0,9\times\frac{10}{9} \Leftrightarrow S_\infty=1.$$

v) Através dessa discussão concluímos que $S_\infty=0,99999\ldots=$ <u>1</u>.

Para esse tipo de dedução, é preciso admitir que S_∞ é um valor real, ou seja, que a sequência é convergente. Estamos reconhecendo que isso é verdade para habituar o aluno com as ideias de limite. Em momento apropriado, na graduação, espera-se que essa passagem seja estudada com mais cautela.

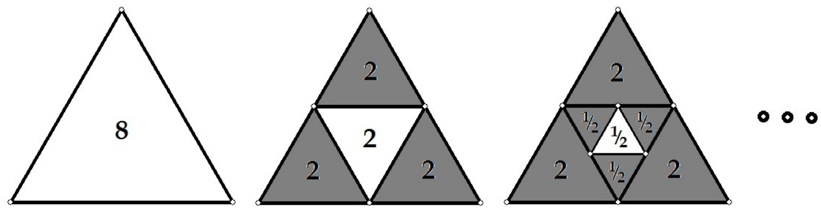
E novamente, através das orientações dadas pelo questionário anterior e as discussões realizadas com os colegas e com o professor, vimos que os valores de S_n podem estar tão próximos de 1 quanto se queira, bastando escolher um valor adequado de 'n'. Toda a nossa análise revela que o número __1__ ***é uma espécie de "ímã" dos termos de 'S_n', acumulando em torno de si e cada vez mais perto de si todos os valores fornecidos por qualquer soma parcial.*** Matematicamente, essa observação é traduzida com qualquer uma das afirmações abaixo, que são modos diferentes de expressar o mesmo fato:

- A sequência S_n converge para __1__.
- O limite de S_n é __1__, quando n tende a infinito.
- $\lim_{n \to \infty} S_n =$ __1__.
- A soma de todos os infinitos termos de $(0,9;\ 0,09;\ 0,009;\ 0,0009;\ldots)$ é __1__.
- $S_\infty =$ __1__

De um modo geral, sempre que pudermos concluir que uma sequência fica tão próxima de um número fixo 'L', quanto desejarmos, diremos que a sequência converge para 'L' ou que seu limite é 'L'.

3.2 PARA O LAR

A cada etapa exibida a seguir, o triângulo equilátero que sobra (em branco), é dividido em quatro partes iguais das quais três são consideradas:



Agora responda:

a) Que sequência representam as áreas em branco?
$8,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\dots$

b) Essas áreas em branco parecem convergir para algum valor? Qual?
Sim; Zero.

c) Que sequência representam as áreas em cinza?
$(8-8)=0,\ (8-2)=6,\ \left(8-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2},\ \left(8-\frac{1}{8}\right)=\frac{63}{8},\dots$

d) Essas áreas em cinza parecem convergir para algum valor? Qual?
Sim; 8.

Passo a passo para a construção da "Planilha 1":

i) Numa planilha eletrônica selecione um retângulo de células de A2 até D16 e configure essa células para serem do tipo números em "Formatar célula...", com 15 casas decimais.

ii) Insira 'n' na célula A1, em seguida, nas células abaixo, coloque números de 1 a 15, um número em cada célula.

iii) Em B1 escreva 'an' e na célula abaixo coloque 0,9.

iv) Em B3, escreva a fórmula "=B2*0.1" e copie esta fórmula para as células abaixo, de modo que as células até e B16 multipliquem a célula imediatamente acima delas por 0,1.

v) Em C1 escreva 'Sn'. Em seguida, escreva em C2 a fórmula "=B2" e dê enter. Em B3 escreva a fórmula "=C2+B3" e copie essa fórmula até C16.

vi) Em D1 escreva ‘dn’. Em D2 escreva a fórmula “=1 - C2” e dê enter.

vii) Copie a fórmula escrita em D2 até D16.

OBS.: Os valores da coluna ‘D’ podem não corresponder ao esperado devido ao armazenamento de casas decimais da memória do computador. Neste caso, em cada C das fórmulas da coluna D tente multiplicar e dividir por alguma potência inteira de 10.

4 AULA 3: Das Sequências Mal Comportadas

Os exemplos vistos até aqui fornecem ferramentas muito importantes para a análise de certas sequências. Contudo, um conhecimento sólido sobre as estruturas matemáticas de alguma situação deve levar em consideração aspectos gerais e situações diversas dentro do que se está analisando. Vamos buscar nesta aula sequências que mudem, ligeiramente, os aspectos trabalhados até então e tentaremos melhorar ainda mais nossa capacidade de análise de convergência de sequências. Para tanto, vejamos cada um dos exemplos a seguir:

i) $-2, -4, -8, -16, -32, \cdots$ preserva a característica de diminuir os termos gradativamente.

  i.a) Os termos diminuem, mas eles se aproximam de zero?
  Não, ao contrário, eles se afastam cada vez mais.

  i.b) É possível somar uma quantidade de termos, a partir do 1º, de modo que essa soma seja menor do que -80? E as outras somas parciais S_n depois dessa continuam menores que -80?
  Sim; Basta fazer $-2 + (-4) + (-8) + (-16) + (-32) + (-64)$, a partir daí, qualquer acréscimo torna o resultado menor do que, ou igual a -80.

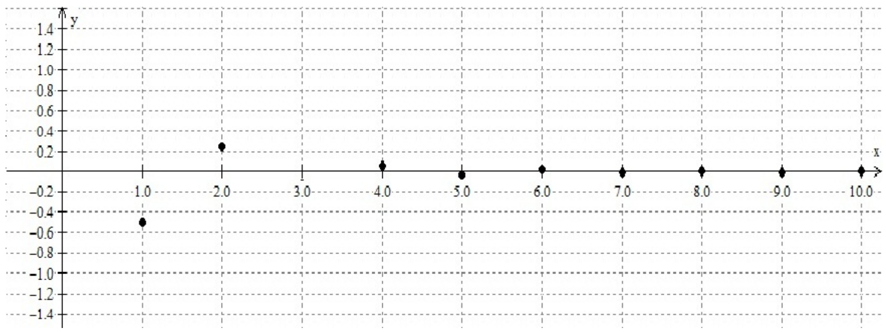
  i.c) Será possível obter $S_n \leq -1000000$? E as somas parciais após a encontrada, continuam diminuindo além de -1000000?
  Sim; Sim.

  i.d) E ao somarmos esses termos, as somas parciais parecem se aproximar de algum valor?
  Não.

  i.e) Você concordaria em afirmar que as somas parciais podem ficar tão negativas quanto se deseje, a partir de um S_n apropriado? O que os seus colegas acham?
  Sim; Concordam.

  i.f) Essa sequência converge para algum valor, ou seja, tem um limite?
  Não.

ii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$ tem seus termos oscilando entre valores positivos e negativos. Contudo observe o gráfico a seguir com diversos valores dessa sequência:



OBS: Esta sequência ultrapassa e regressa, periodicamente, seu limite. Pretende-se com este exemplo mostrar que essa característica existe para algumas sequências e que é possível haver, também nestes casos, um limite. Acreditamos que esse fato seja ainda mais surpreendente para a sequência das somas parciais que também analisaremos.

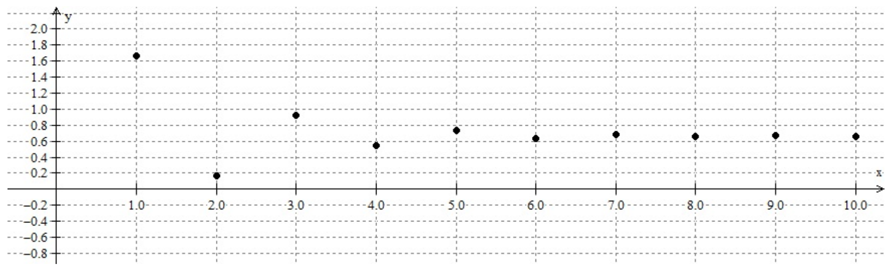
ii.a) Seus termos 'a_n' parecem tender a algum valor em particular? Qual?
Sim; Zero.

ii.b) Existe um termo a partir do qual todos os outros estão a uma distância de zero igual ou menor do que 0,0005?
Sim; A partir do 11º termo, que é $-\frac{1}{2048} = -0,000488281$. Depois dele, mesmo oscilando entre positivo e negativo, os termos estarão todos a menos de 0,0005 de distância do zero.

ii.c) Pense num valor muito menor que 0,0005. É possível encontrar um termo a partir do qual todos os outros estão a uma distância de zero igual ou menor do que esse valor que você pensou? O que os seus colegas acham?
Sim.

ii.d) O que você acha da afirmação $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? O que os seus colegas acham?
Concordo; Verdadeira.

iii) Considere agora a sequência S_n, das somas parciais de $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$ e sua representação no gráfico abaixo:



iii.a) As somas parciais parecem tender a algum valor em particular? Qual?
Sim; Algo entre 0,6 e 0,8.

iii.b) Existe uma soma parcial a partir da qual todos as outras são menores ou iguais a 0,8?
Segundo o gráfico, a partir do 5º termo isso acontece.

Para os próximos questionamentos, vamos abrir o arquivo "planilha 2". Veja que 'n' indica a posição do termo na sequência, 'An' indica o valor do termo e 'Sn' as somas parcias de todos os termos de 1 a 'n'. Coloque em 'B2' o valor 1 e veja o que ocorre. Partindo disso, continue o questionário...

	A	B	C
1	n	An	Sn
2	1	1	1
3	2	-0,5000000000	0,5000000000
4	3	0,2500000000	0,7500000000
5	4	-0,1250000000	0,6250000000
6	5	0,0625000000	0,6875000000
7	6	-0,0312500000	0,6562500000
8	7	0,0156250000	0,6718750000
9	8	-0,0078125000	0,6640625000
10	9	0,0039062500	0,6679687500
11	10	-0,0019531250	0,6660156250
12	11	0,0009765625	0,6669921875
13	12	-0,0004882813	0,6665039063
14	13	0,0002441406	0,6667480469
15	14	-0,0001220703	0,6666259766
16	15	0,0000610352	0,6666870117
17	16	-0,0000305176	0,6666564941
18	17	0,0000152588	0,6666717529
19	18	-0,0000076294	0,6666641235
20	19	0,0000038147	0,6666679382
21	20	-0,0000019073	0,6666660309

Caso o professor queira construir sua própria planilha, execute, na ordem, cada uma das orientações que seguem:

→ Numa planilha eletrônica selecione um retângulo de células de A2 até C21 e configure essa células para serem do tipo números em "Formatar célula...", com 10 casas decimais.

→ Insira 'n' na célula A1, em seguida, nas células abaixo, coloque números de 1 a 20, um número em cada célula.

→ Em B1 escreva 'An' e na célula abaixo coloque 1.

→ Em B3, escreva a fórmula "=B2*(-0.5)" e copie esta fórmula para as células abaixo, de modo que as células até e B21 multipliquem a célula imediatamente acima delas por $-0,5$.

→ Em C1 escreva 'Sn'. Em seguida, escreva em C2 a fórmula "=B2" e dê enter. Em B3 escreva a fórmula "=C2+B3" e copie essa fórmula até C21.

iii.c) Existe uma soma parcial a partir da qual suas distâncias ao número 0,666 sejam todas menores ou iguais a 0,001?
Sim; a partir do 10º termo, que vale 0,666015625.

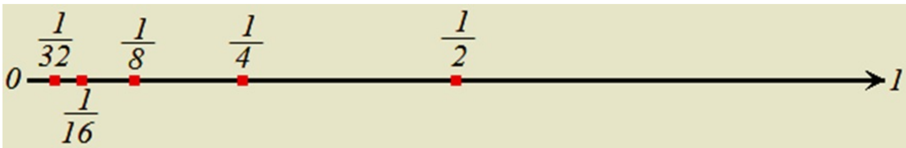
iii.d) Lembrando que $\dfrac{2}{3} = 0,666...$, você acredita que seja possível escolher alguma soma parcial a partir da qual todas estejam a uma distância de $\dfrac{2}{3}$, menor ou igual a 0,000 001 ou ainda mais próximo? O que seus colegas acham?
Sim; No 20º termo isso já acontece, vide planilha 2.

iii.e) O que você acha da afirmação $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{2}{3}$? O que seus colegas acham?
Sim, é verdadeira.

iii.f) O que você acha da afirmação: $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \cdots = \dfrac{2}{3}$? O que seus colegas acham?
É verdadeira.
OBS.: Usando processo idêntico ao que aparece em "PARA OS CÉTICOS..." anteriormente, podemos verificar que a afirmação é verdadeira. Observe que: $S_\infty + \frac{1}{2} \times S_\infty = 1 \leftrightarrow S_\infty = \frac{2}{3}$.

iv) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots$
que tem primeiro termo igual a 1 e o próximo termo é a metade do anterior, mas aparece na sequência o dobro da quantidade de vezes do termo anterior.

A seguir vemos a distribuição dos termos dessa sequência sobre a reta:



iv.a) Seus termos parecem tender a algum valor em particular? Qual?
Sim; Zero.

iv.b) Existe um termo a partir do qual todos os outros estão a $\frac{1}{50}$ de unidade distantes de zero? Qual?
Sim; A partir do um, o termo que ocupa a posição $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 1) = 64$, que é o primeiro $\frac{1}{64}$ que surge na sequência. Depois dele os termos continuarão a uma distância menor do que ou igual a $\frac{1}{50}$ unidades do zero.

iv.c) Pense num valor muito menor que $\frac{1}{50}$. É possível encontrar um termo a partir do qual todos os outros estão a uma distância de zero igual ou menor do que esse valor que você pensou? O que os seus colegas acham?
Sim; Concordam.

iv.d) O que você acha da afirmação $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, onde a_n é o termo geral dessa sequência? O que os seus colegas acham?
Concordo; Verdadeira.

v) Vamos à sequência das somas parciais dos termos de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots$ que analisaremos com a tabela que você ajudará a compor.

Somas Parciais de $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$		
n	S_n	Resultado
1	1	1
3	$S_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	2
7	$S_3 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4}$	3
15	$S_7 + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}$	4
31	$S_{15} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}$	5
63	$S_{31} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}$	6
127	$S_{63} + \frac{1}{128} + \cdots + \frac{1}{128}$	7

v.a) É possível encontrar uma soma parcial que seja menor do que ou igual a 10? Exiba essa soma parcial.
Sim; Qualquer soma parcial anterior a S_{1023}.

v.b) É possível encontrar uma soma parcial que seja menor do que ou igual a 20? O que seus colegas acham?
Sim; Eles concordam.

v.c) É possível encontrar uma soma parcial que seja menor do que ou igual a 1 000 000? O que seus colegas acham?
Sim; Eles concordam.

v.d) Você concordaria com a afirmação de que é possível encontrar uma soma parcial tão grande quanto se queira? O que seus colegas acham?
Sim; Eles concordam.

v.e) Existe um valor para o qual as somas parciais parecem se aproximar?
Não.

Depois das análises feitas sobre a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, vimos que os seus termos diminuem aproximando-se de zero o quanto se queira. Contudo, a sequência formada a partir de suas somas parciais não tem um limite, ela aumenta mais e mais. Todos os outros exemplos vistos antes deste têm a característica de ter seus termos gerais com limite igual a zero e sequências das respectivas somas parciais com um limite. Essa última sequência que analisamos nos revela que nem sempre é assim! Vemos aqui o papel importante que a análise cuidadosa de um problema tem, pois a intuição, provavelmente, falharia se a pergunta sobre a existência do limite da sequência das somas parciais fosse feita antes da observação da tabela que foi preenchida.

Uma sequência que ficou famosa pela dificuldade que houve em comprovar que ela não tinha um limite é a chamada série harmônica, que ganhou uma primeira demonstração de sua divergência com Nicole Oresme(1325-1382), que era, segundo [24]:

> "...um destacado intelectual em vários ramos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais. Além de professor universitário, Oresme era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas; e nessa função revelou-se um homem de larga visão, recomendando medidas monetárias que tiveram grande sucesso na prática. Ao lado de tudo isso, Oresme foi também bispo de Lisieux".

Na seção "Um Pouco Além do Roteiro..." a seguir, você terá a oportunidade de participar de uma atividade que lhe permitirá concluir o mesmo que Oresme!

4.1 Um Pouco Além do Roteiro...

Antes de estudarmos a série harmônica, precisaremos de um sequência auxiliar. Uma sequência de comparação. Essa foi a ideia brilhante de Oresme.

$$1,\quad \underbrace{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{\boxed{\text{somam } 1}},\quad \underbrace{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}_{\boxed{\text{somam } 1}},\ldots$$

Vamos analisar alguns aspectos dessa a seguir.

A) Os termos dessa sequência parecem se aproximar de algum valor em particular? Qual?
Tirando o 1º, todos são iguais a $\frac{1}{2}$, ou seja, o se aproximar aqui significa "ser igual a".

B) E as somas parciais, elas parecem se aproximar de algum valor em particular? Qual?
Não; basta perceber que juntando dois termos distintos do 1º, teremos uma unidade completa. Assim, essa sequência cresce na metade do tempo dos números naturais, porém tão infinitamente quanto eles, e o aluno precisa entender isso para a próxima atividade.

C) É possível encontrar uma soma parcial a partir da qual todas as somas parciais sejam iguais ou maiores do que 8? E 100?
Sim; o primeiro termo mais os 15 termos seguintes já ultrapassa 8, e o primeiro termo mais os 99 seguintes já ultrapassa 100.

D) Você concordaria com a afirmação de que essas somas parciais aumentam mais e mais? E concordaria ainda que, não importa o número que seja escolhido, é possível obter uma soma parcial que supere esse valor, bem como as outras somas parciais a partir desta?
Sim; Sim.

E) O que você acha da afirmação de que essa sequência e as suas somas parciais não têm um limite? O que os seus colegas acham?
Está incorreta, pois o limite da sequência é $\frac{1}{2}$. No entanto, a soma de seus termos cresce sem parar, superando qualquer limite que se estabeleça.

Agora estamos melhor preparados para reviver este episódio da história da matemática que foi imortalizado por Oresme. Para tanto, vamos à próxima seção.

4.1.1 A Série Harmônica

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

É fácil perceber que os seus termos se aproximam de zero gradativamente, ou seja, seu limite é zero. Será que sua soma parcial também tem um limite?

A) Vamos indicar cada termo da série harmônica por h_n. Preencha a tabela a seguir:

Somando Termos da Série Harmônica		
h_1		$= 1$
h_2	$= \frac{1}{2}$	$= 0,5$
$h_3 + h_4$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$= \frac{7}{12} = 0,58333\dots$
$h_5 + h_6 + h_7 + h_8$	$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$	$= \frac{533}{840} = 0,6345238\dots$
$h_9 + h_{10} + \cdots + h_{16}$	$= \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$	$= 0,66287185\dots$

Perceba que a 4ª linha da tabela fica bem mais trabalhosa de preencher devido aos cálculos com quantidades cada vez maiores de frações. Para agilizar esse processo, utilize os valores obtidos com o auxílio de uma planilha eletrônica e representados abaixo. Depois que tiver terminado de preencher a tabela, continue no item 'B'.

Mais uma vez, caso o professor queira acessar a planilha que gera a figura apresentada a seguir, basta acessar o link "Planilha 3".

O modo de construção da planilha segue após a figura!

É importante que o aluno faça a leitura adequada da tabela, entendendo o porquê das diferenças apresentadas na coluna 'F'. Na explicação de como elaborar a planilha o professor encontrará uma pormenorização a esse respeito.

	A	B	C	D	E	F
1	n	1/n	Sn			
2	1	1,000000000000000	1,000000000000000			
3	2	0,500000000000000	1,500000000000000			
4	3	0,333333333333333	1,833333333333330			
5	4	0,250000000000000	2,083333333333330		S4 - S2	0,583333333333333
6	5	0,200000000000000	2,283333333333330			
7	6	0,166666666666667	2,450000000000000			
8	7	0,142857142857143	2,592857142857140			
9	8	0,125000000000000	2,717857142857140		S8 - S4	0,634523809523809
10	9	0,111111111111111	2,828968253968250			
11	10	0,100000000000000	2,928968253968250			
12	11	0,090909090909091	3,019877344877340			
13	12	0,083333333333333	3,103210678210680			
14	13	0,076923076923077	3,180133755133760			
15	14	0,071428571428571	3,251562326562330			
16	15	0,066666666666667	3,318228993228990			
17	16	0,062500000000000	3,380728993228990		S16 - S8	0,662871850371851

Passo-a-passo para a construção da tabela exibida na figura acima:

- → Numa planilha eletrônica selecione um retângulo de células de A2 até C17 e configure essa células para serem do tipo números em "Formatar célula...", com 10 casas decimais.
- → Insira 'n' na célula A1, em seguida, nas células abaixo, coloque números de 1 a 16, um número em cada célula.
- → Em B1 escreva '1/n' e na célula abaixo escreva "=1/A2" e copie essa fórmula até B17, de modo que em cada célula seja exibida o inverso do que aparece na célula à esquerda dela.
- → Em C1 escreva 'Sn'. Em seguida, escreva em C2 a fórmula "=B2" e dê enter. Em B3 escreva a fórmula "=C2+B3" e copie essa fórmula até C17.
- → Em alguma célula vazia escreva a diferença que dará a soma dos termos exigidos na tabela da atividade, por exemplo, $h_5 + h_6 + h_7 + h_8 = S_8 - S_4$, assim escrevemos na célula vazia "=C9 - C6".

B) Considere as somas $h_3 + h_4$, $h_5 + h_6 + h_7 + h_8$ e $h_9 + h_{10} + \cdots + h_{16}$ elas são menores, iguais ou maiores do que $\dfrac{1}{2}$?
Maiores, e parecem estar aumentando.

C) Preencha a nova tabela que segue:

Comparando a Série Harmônica com as Somas Parciais da Sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$			
n	S_n	$<, = ou >$	**Somas Parciais de** $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$
1	1	$=$	1
2	$1 + \frac{1}{2}$	$=$	$1 + \frac{1}{2}$
4	2,08333...	$>$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
8	2,7178...	$>$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
16	3,3807...	$>$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

D) Ao saltarmos as somas parciais de $n = 2$ para $n = 4$, ou de $n = 4$ para $n = 8$, deixamos de somar algum termo da série harmônica?
Não.
OBS.: Nossa preocupação com relação ao entendimento do aluno nesta altura deve focar no fato de que é possível construir uma relação biunívoca entre as S_n de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ e somas parciais de índice 2^n da série harmônica.

E) O que a comparação das somas parciais dos termos h_n com a série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ mostrou a partir de $n = 4$?
Que as somas parciais da série harmônica superam as somas parcias de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$

F) Podemos analisar o comportamento da soma dos termos da série harmônica a partir de $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots$?
Sim.

G) É possível encontrar um S_n da série harmônica a partir do qual todas as outras somas parciais sejam maiores ou iguais a 2?
Sim; $n = 4$, por exemplo.

H) É possível encontrar um S_n da série harmônica a partir da qual todas as outras somas parciais sejam maiores ou iguais a 6? E 100? E 1000?
Sim.

I)) As somas parciais da série harmônica parecem tender a algum valor em particular? Qual?
Não. Assim como $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ diverge, a série harmônica, que a supera a cada S_{2^n}, $n > 1$, também divergirá.

J) Você concorda com a ideia de que, apesar de $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$, suas somas parciais podem ser maiores do que qualquer valor que venhamos a escolher, ou seja, as somas parciais não têm um limite? O que o seu colega acha?
Concordo.

Uma sensação de que uma análise incorreta da existência do limite das sequências de somas parciais de $(0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots)$ ou $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ surge depois de estudarmos a série harmônica. Será que saltando algumas somas chegaríamos à conclusão de que essas somas parciais também não têm um limite? Um fato determinante para derrubar essa insegurança é observar que, na série harmônica, é sempre possível encontrar uma quantidade finita de termos consecutivos que somam meio. Tente fazer isso com as outras somas parciais e descubra que não será possível. Faça o teste!

Incentivar o aluno a realizar esses testes vai familiarizá-lo com a segurança dos métodos aqui utilizados e vai permitir nova oportunidade de assimilação do que foi visto. Sendo assim, é extremamente recomendável que o professor motive esses testes que, bem feitos, farão o aluno perceber que, partindo de um determinado termo das sequências em análise, qualquer quantidade de termos reunida em soma não excede 0,5, impedindo que a comparação realizada para a série harmônica mude as conclusões. Por exemplo, na série $(0,9;\ 0,09;\ 0,009; \ldots)$, se somarmos todos os termos, a partir do 2º, essa soma será menor do que 0,5. Essa fica sendo a atividade “PARA O LAR” desta aula!

5 AULA 4: Soma dos Infinitos Termos de uma PG

Os estudos sobre soma finita de termos de uma progressão geométrica, que constituem um dos pré-requisitos para estas atividades, nos ajudarão na tarefa de somar infinitos termos de uma progressão geométrica. Lembremos que as conclusões obtidas até aqui com nossas atividades explicitam que progressões geométricas com razão $|q| > 1$ não apresentam um limite para seus termos; diferente das progressões geométricas com razão $|q| < 1$, cujos termos vão se aproximando mais e mais de zero.

Concentrando nossa atenção neste último caso de progressão geométrica, ou seja, com razão $|q| < 1$, temos que uma soma parcial de seus termos é obtida pela fórmula $S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$, que já conhecemos. Com base na análise deste caso de Progressão Geométrica, responda aos questionamentos abaixo:

A) O que pode-se dizer sobre os valores de a_n, à medida que aumentamos mais e mais o valor de 'n' nas progressões geométricas que estamos considerando?
Se aproximam cada vez mais de zero. Perceba que a resposta "Diminui" não cabe aqui, devido à análise de item 'i' da aula anterior, em que a sequência diminui e se afasta de zero.

B) Se fizermos 'n' tender a infinito, o que acontece com os valores de a_n? E a_{n+1} é maior ou menor do que a_n?
Tende a zero; $a_{n+1} < a_n$.

C) O que podemos dizer sobre $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ em progressões geométricas desse tipo? O que o seu colega acha?
Que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$.

D) O que você acha da afirmação de que, em PGs com $|q| < 1$, $\dfrac{a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$? O que o seu colega acha?
Perceba que a afirmação se constrói naturalmente do item 'C' através das seguintes etapas: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0 \Rightarrow a_1 - a_{n+1} = a_1 \Rightarrow \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$. Portanto, a afirmação está correta.

E) Para você, as expressões $\frac{a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{1-q}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$ são equivalentes, ou seja, possuem o mesmo resultado?
Sim.
É importante que o aluno perceba que o limite só vai influenciar na variável 'n' e que, desse modo, as expressões são equivalentes. Para maiores detalhes, consulte [8].

F) Finalmente, chamando a soma infinita de termos de uma PG, em que $|q| < 1$, de S_∞, podemos afirmar que:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Somar infinitos termos de uma PG e conseguir determinar um valor para essa soma constitui ferramenta de grande utilidade na matemática e suas aplicações. Diversos estudos que tiveram conclusões importantes para o homem utilizaram essa ferramenta. A seguir, veremos um pouco disto:

5.1 Fração Geratriz

Qual a fração irredutível que tem como representação decimal o número 5,13131313... ou 2,2505555... ?

Por mais que saibamos algumas "regrinhas" que conduzem a estas conclusões, precisamos entender que, na busca pelo aperfeiçoamento do que se sabe sobre números, de modo a eliminar contradições, é preciso dominar melhor o que se esconde atrás dessas "regrinhas". Para tanto, vamos lembrar que os números racionais, olhando apenas a forma decimal, se dividem em dois grandes grupos: números com quantidade de casas decimais significativas finita e números com quantidade de casas decimais significativas infinitas e periódicas — entendendo por período o menor conjunto finito de algarismos que se repete infinitamente na parte decimal do número. O tratamento de cada um desses dois grandes conjuntos é feito de um modo diferenciado:

5.1.1 Números Racionais com Quantidade Finita de Casas Decimais Significativas

Nestes casos, basta, ao mesmo tempo, multiplicarmos e dividirmos o número por 10^n, onde 'n' é a quantidade de casas decimais desse número; em seguida, caso seja possível, tornamos a fração irredutível. Veja alguns exemplos abaixo:

- $3,7$ tem 1 casa decimal, logo $3,7 = 3,7 \times \dfrac{10}{10} = \dfrac{37}{10}$
- $6,125$ tem 3 casas decimais, logo $6,125 = 6,125 \times \dfrac{10^3}{10^3} = \dfrac{6125}{1000}$, que simplificando resulta em $\dfrac{49}{8}$

5.1.2 Números Racional com Quantidade Infinita de Casas Decimais Periódicas

Lembremos que na "AULA 2", analisamos somas parciais das progressões geométricas: $(0,9; 0,09; 0,009; \cdots)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots)$; e na "AULA 3", as somas parciais da progressão geométrica $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots)$. Tente unir as conclusões obtidas dessas atividades e da conversa com os colegas para preencher as lacunas a seguir:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0,9 - 0,9 \times 0,1^n}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9 - 0,9 \times \lim\limits_{n\to\infty} 0,1^n}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9 - 0}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9}{1 - 0,9} =$

  $= \dfrac{0,9}{0,9} = 1.$

  OBS.: A mudança de posição do símbolo de limite está de acordo com o que foi feito para a dedução da soma infinita de termos de uma PG, no início desta aula. Mais uma vez, sugerimos explicar ao aluno que a ideia de limite se aplica a variáveis, uma vez que considera a tendência. Neste contexto, o que se mantém constante não influencia na determinação do limite do que varia.

Ou seja, a tentativa de somar infinitamente os termos consecutivos de $0,9; 0,09; 0,009; \cdots$ nos revela os seguintes aspectos:

Convergência À medida que mais termos da sequência são acrescentados às somas parciais, mais próximo de 1 fica essa soma.

Acumulação A sequência das somas parciais acumula-se próxima ao 1; tão próxima quanto se desejar.

Conclusão Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ e que a soma de todos os infinitos termos dessa sequência é igual a 1, ou seja, $0,9999999999\ldots = 1$.

Ainda lembrando a "AULA 2", agora o outro caso analisado:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1.$

E também aqui, a tentativa de somar uma infinidade de termos da progressão geométrica têm as características seguintes:

Convergência À medida que mais termos da sequência são acrescentados às somas parciais, mais próximo de 1 fica essa soma.

Acumulação A sequência das somas parciais acumula-se próxima de 1; tão próxima quanto se desejar.

Conclusão Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ e que a soma de todos os infinitos termos dessa sequência é igual a 1, ou seja, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots = 1$.

E, finalmente, o caso exibido na “AULA 3”:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 1 \times (-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})} = \dfrac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1-0}{\frac{3}{2}} = 1 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

E mais uma vez as três características:

Convergência À medida que mais termos da sequência são acrescentados às somas parciais, mais próximo de $\frac{2}{3}$ fica essa soma.

Acumulação A sequência das somas parciais acumula-se próxima de $\frac{2}{3}$; tão próxima quanto se desejar.

Conclusão Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{2}{3}$ e que a soma de todos os infinitos termos dessa sequência é igual a $\dfrac{2}{3}$, ou seja, $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots = \dfrac{2}{3}$.

Agora pense nos exemplos que motivaram o início desta seção, 5,13131313... e 2,2505555.... Vamos obter as frações irredutíveis que as geram. Para isso, siga preenchendo as lacunas:

- 5,1313131313 ...

  a) Número sem o período: 5.

  b) Progressão geométrica associada à parte periódica:

  $$\underline{(0,13; 0,0013; 0,000013; \cdots)}$$

  c) Podemos escrever que:

  $$5,131313\ldots = 5 + 0,13 + 0,0013 + 0,000013 + \cdots$$

  $$5,131313\ldots = 5 + \lim_{n\to\infty} \frac{0,13 - 0,13 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n}{1 - \frac{1}{100}}$$

  $$5,131313\ldots = 5 + \frac{0,13 + 0,13 \times \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n}{\frac{99}{100}}$$

  $$5,131313\ldots = 5 + \frac{13}{100} \times \frac{100}{99} = 5 + \frac{13}{99} = \frac{508}{99}$$

- 2,2505555...

a) Número sem o período: 2,250

b) Número sem o período na forma de fração irredutível:
$\dfrac{2250}{1000} = \dfrac{9}{4}$

c) Progressão geométrica associada à parte periódica:

$$\underline{(0,0005;\ 0,000\,05;\ 0,000\,005\cdots)}$$

d) Podemos escrever que:

$$2,2505555\ldots = \frac{9}{4} + 0,000\,5 + 0,000\,05 + 0,000\,005 + \cdots$$

$$2,2505555\ldots = \frac{9}{4} + \lim_{n\to\infty} \frac{0,000\,5 - 0,000\,5 \times (\frac{1}{10})^n}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$2,2505555\ldots = \frac{9}{4} + \frac{\frac{1}{2000} + 0}{\frac{9}{10}}$$

$$2,2505555\ldots = \frac{9}{4} + \frac{1}{2000} \times \frac{10}{9} = \frac{9}{4} + \frac{1}{1800}$$

$$2,250555\ldots = \frac{9 \times 450 + 1}{1800} = \frac{4051}{1800}$$

De um modo geral, todo número racional que seja dízima periódica é da forma:

$$I, \underbrace{q_1q_2q_3\ldots q_r}_{\boxed{\text{parte não periódica (quando houver)}}} \overbrace{\underbrace{p_1p_2p_3\ldots p_n}_{\text{período}} p_1p_2p_3\ldots p_n \cdots p_1p_2p_3\ldots p_n \ldots}^{\text{parte periódica do número}},$$

onde 'I' é a parte inteira e $p_1p_2p_3\ldots p_n$ é a menor quantidade de algarismos que se repete periódica e infinitamente. Vamos chamar essa formação de 'n' algarismos de 'P', relativo a período; e a formação $q_1q_2q_3\ldots q_r$, com 'r' algarismos, de 'N', fazendo referência ao "NÃO" da parte não periódica. Com isso, e baseados nos exemplos vistos anteriormente, podemos afirmar que:

$$I, N\overline{P} = \frac{IN}{10^r} + \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{P}{10^{(r+n)}} - P \times \frac{1}{10^{nx}}}{1 - \frac{1}{10^n}}$$

Ou seja,

$$I, N\overline{P} = \frac{IN}{10^r} + \frac{\frac{P}{10^{(r+n)}}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{IN}{10^r} + \frac{\frac{P}{10^{(r+n)}}}{\frac{10^n-1}{10^n}} = \frac{IN}{10^r} + \frac{\frac{P}{10^r \times 10^n}}{\frac{10^n-1}{10^n}} =$$

$$= \frac{IN}{10^r} + \frac{P}{10^r \times 10^n} \times \frac{10^n}{10^n - 1} = \frac{IN}{10^r} + \frac{P}{10^r \times (10^n - 1)} =$$

$$\frac{= IN \times (10^n - 1) + P}{10^r \times (10^n - 1)} = (\frac{(IN \times 10^n + P) - IN}{10^r \times (10^n - 1)}$$

Repare que $IN \times 10^n$ termina com 'n' zeros e que 'P' tem 'n' dígitos. Portanto, a soma indicada, $IN \times 10^n + P$ faz com que 'P' substitua todos os zeros por sua propria formação numérica, dando origem ao número formado pelas formações de I, N e P, ou seja, o número INP. Daí, temos:

$$I, N\overline{P} = \frac{INP - IN}{(10^n - 1) \times 10^r}$$

Mas, $10^n - 1$ é um número formado por 'n' noves; e 10^r, multiplicando essa formação de noves, gera 'n' noves seguidos de 'r' zeros. Assim, obtemos uma regra prática para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica, que será explicada logo a seguir.

5.1.3 Regra Prática Para Obter a Fração Geratriz

Numerador: Desprezando a vírgula, fazemos INP − IN;

Denominador: Será um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos de 'P', seguido de tantos zeros quantos forem os algarismos de 'N'.

Vejamos como o método se aplica aos exemplos que fizemos ao fim da última seção:

- **5**,1313131313...

  Numerador: $513 - 5 = 508$

  Denominador: O período tem 2 algarismos e a parte não periódica não está presente. Assim, o denominador será 99

  $5,131313\ldots = \frac{508}{99}$

- **2**,25055555...

  Numerador: $22505 - 2250 = 20255$

  Denominador: O período tem 1 algarismo e a parte não periódica tem 3. Assim, o denominador será 9000

  $2,25055555\ldots = \frac{20255}{9000} = \frac{4051}{1800}$

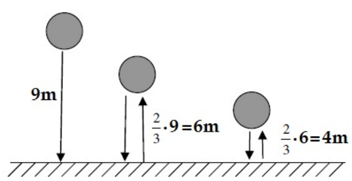
Depois dessa regra prática, muitos alunos são levados a pensar: "Pra que tudo isso se já tinha um atalho?" A regra prática só é possível pela atenção continuada a verdades já obtidas. Como seria possível obter tal regra por intuição?

Provavelmente, seria bem difícil. E, mesmo que fosse possível, que garantia teríamos de que está certa para qualquer caso? Lembre-se de que o apronfundamento das investigações matemáticas têm também o objetivo de excluir a possibilidade da contradição.

5.2 PARA O LAR

Para cada situação apresentada a seguir, calcule a soma infinita dos termos da sequência, se essa soma existir:

A) Uma bola é solta a uma distância de 9m do chão. Supondo que a cada queda suba $\frac{2}{3}$ da altura anterior, determine a distância vertical total percorrida pela bola até parar.
A sequência que dá a altura máxima atingida pela bola após cada batida no chão é $\left(6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \ldots\right)$. Logo, a distância vertical procurada corresponde à soma da $9 + 2 \times S_\infty$, onde S_∞ é a soma dos termos da sequência acima. Veja a situação descrita na figura a seguir.



Portanto, o resultado procurado será $9 + 2 \times \lim_{n\to\infty} \dfrac{6 - 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} =$
$= 9 + 2 \times \dfrac{6}{1 - \frac{2}{3}} = 9 + 2 \times \dfrac{6}{\frac{1}{3}} = 9 + 2 \times 18 = 9 + 36 = 45$m.

B) (UFF 2010) Com o objetivo de criticar os processos infinitos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.

Fonte: http://culturaclassica.blogspot.com/2008/05/aquiles-ainda-corre-os-paradoxos-de.html

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um decímetro; Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a

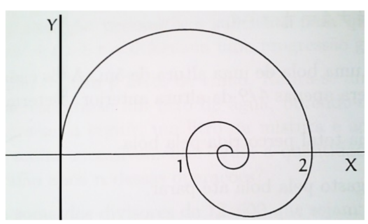
$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

É correto afirmar que:

(A) $d = +\infty$
(B) $d = 11,11$
(C) $d = \frac{91}{2}$
(D) $d = 12$
(E) $d = \frac{100}{9}$

A distância 'd' percorrida por Aquiles, em metros, na fábula é igual à soma dos termos da PG infinita $(10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100}, \ldots)$. Portanto, a resposta procurada será $d = \lim_{n\to\infty} \dfrac{10 - 10 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{10}{\frac{9}{10}} = \dfrac{100}{9}$m, opção (E).

C) (Adaptado de [10], P.34) Na figura que se segue, temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior. Determine o comprimento da espiral.



Os raios dos semicírculos formam a sequência $(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, ldots)$. Como o comprimento de um círculo é $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, temos que a sequência dos comprimentos de cada semicírculo é $(\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}, \ldots)$. Portanto, o comprimento da espiral será $C = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\pi - \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$.

D) Escreva as frações geratrizes de 0,033 333 ... e 8,998 898 898 ...

Seguindo a orientação dada pela regra prática, teremos que $0,033333\ldots =$ $= \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$. Já $8,9988988988\ldots = \frac{89988-89}{9990} = \frac{89\,899}{9990}$.

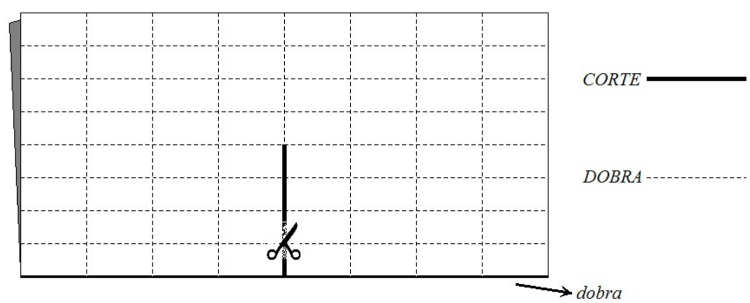
6 Aula 5: Aplicações Mais Sutis

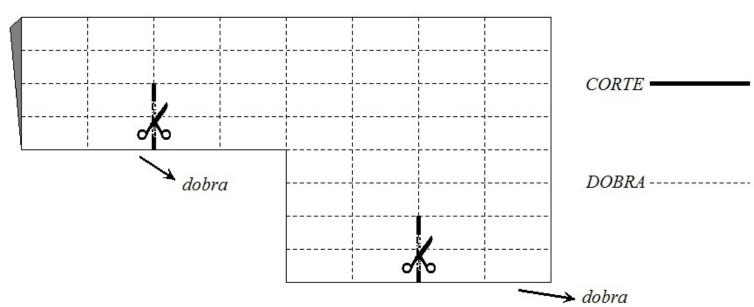
6.1 Fractais

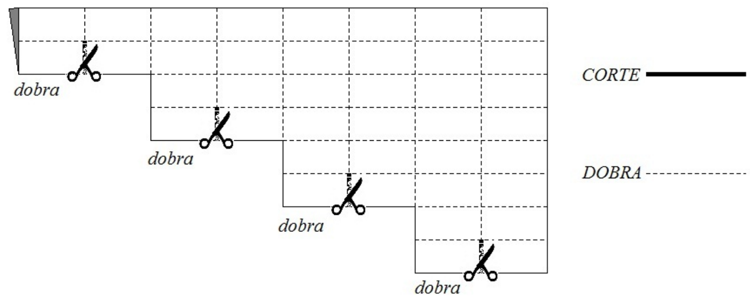
Para essa atividade, clique em "Fractais" para assistir na internet a um vídeo sobre fractais. Depois de assistir ao vídeo e entender um pouco sobre os fractais e suas aplicações, vamos participar desse universo e montar uma estrutura fractal em três dimensões. Vamos construir um cartão fractal.

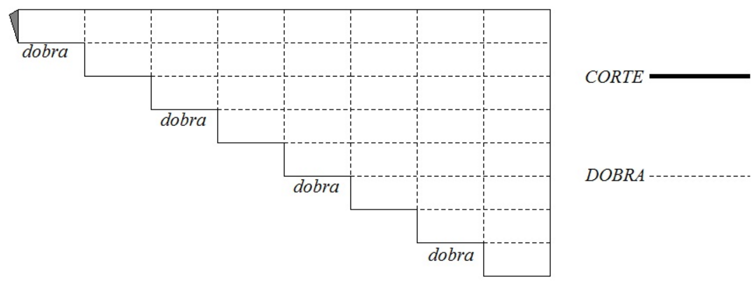
Siga as instruções a seguir e veja como é fácil produzir um cartão fractal:

- Dobre ao meio uma folha A4 no sentido do comprimento;
- Com a folha ainda dobrada, produza outra dobra no mesmo sentido;
- Repita o procedimento anterior mais duas vezes;
- Agora, abra a folha até que ela fique como estava após a execução do 1º item e, em seguida, dobre no outro sentido;
- Continue dobrando nesse outro sentido até totalizar três dobras;
- Em seguida desdobre a folha até que ela fique dobrada apenas uma vez. Repare que a folha está marcada com vários retângulos congruentes.
- Agora corte a folha conforme sugerem as figuras abaixo:









Caso esteja encontrando dificuldade para realizar a construção, tente assistir ao vídeo do passo-a-passo, clicando "AQUI".

Uma vez que o cartão esteja devidamente recortado, pinte as partes da folha A4 que se projetam para fora, colorindo de mesma cor as figuras que forem congruentes, conforme mostra a figura acima.

A figura colorida representa o fractal. Sobre ele desenvolveremos nosso estudo. Observe que a formação está apoiada sobre uma folha A4 que foi dividida em partes iguais pelas dobras horizontais e verticais. Repare ainda as duas indicações de ângulo reto que aparecem na foto acima; em preto, no topo, e em branco um pouco mais abaixo. Essa referência tornará coerente os dados da situação exibida a seguir.

Considere que um terreno será planificado para a construção de um prédio. Neste terreno há uma elevação. O dono da construtora resolveu vender a terra desta elevação para uma outra empresa, já que julgou imprópria para seu uso. O transporte da terra vendida será feito por caminhões com caçamba $10.50m \times 2.40m \times 5.80m$. Precisa-se saber a quantidade de caminhões necessários para a retirada de toda a terra da elevação. Para isso, o responsável por este cálculo aproveitou fotos que foram tiradas de cima da elevação. Através destas fotos, foi avaliado que ao traçar dois segmentos de reta que se intersectam no cume da elevação e paralelos ao plano do chão, a elevação fica dividida em quatro regiões muito similares, que consideraremos iguais. Foi percebido também que cada região em que foi fracionada a elevação, conforme descrição anterior, é aproximadamente igual à formação que se projeta no cartão fractal que fizemos anteriormente. Com base em todas essas informações, quantos caminhões serão necessários para retirar toda a terra dessa elevação se, tal qual o cartão fractal, uma das regiões dessa elevação está apoiada num retângulo de 40m por 30m?

Para responder a essa questão, vamos analisar com mais atenção o cartão fractal, percebendo que, após cada etapa de corte, projetam-se paralelepípedos cujos volumes, a partir da 2ª etapa, são uma fração do paralelepípedo maior da etapa anterior. Vamos então analisar o volume dos paralelepípedos que são projetados após cada etapa de corte e preencher a tabela abaixo:

Etapa de Corte	Quantidade de Novos Paralelepípedos	Volume de UM dos Novos Paralelepípedos	Soma dos Volumes dos Novos Paralelepípedos
1	1	V	V
2	3	$\frac{V}{8}$	$3 \times \frac{V}{8} = \frac{3V}{8}$
3	9	$\frac{1}{8} \times \frac{V}{8} = \frac{V}{64}$	$9 \times \frac{V}{64} = \frac{9V}{64}$

A) Os volumes de um paralelepípedo, após cada etapa de corte, estão em progressão geométrica? Qual a razão?
Sim; $\frac{1}{8}$.

B) E as somas dos volumes dos paralelepípedos após cada etapa de corte, também estão em progressão geométrica? Qual a razão?
Sim; $\frac{3}{8}$.

C) Se esse padrão de formação continuar infinitamente, qual será o volume da parte projetada em função de 'V'?

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{V - V \times \left(\frac{3}{8}\right)^n}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{V}{\frac{5}{8}} = \frac{8V}{5}.$$

D) Qual a relação que existe entre o tamanho da folha A4 (210mm×297mm) e o volume 'V'? E em relação à soma infinita dos volumes, qual a relação?
As dimensões do paralelepípedo de volume 'V' são

$$V = \frac{297mm}{4} \times \frac{297mm}{4} \times \frac{210mm}{2} = \frac{(297^2 \times 210)mm^3}{32};$$

E em relação à soma infinita:

$$S_\infty = \frac{8}{5} \times \frac{(297^2 \times 210)mm^3}{32} = \frac{1}{20} \times (297^2 \times 210)mm^3.$$

E) Qual o volume da caçamba de um caminhão dos que serão utilizados?
$v = 10,50 \times 2,40 \times 5,80\, m^3 = 146,16\, m^3$.

F) Se a elevação tem o mesmo padrão infinito de formação que analisamos no cartão fractal, quantas viagens desses caminhões serão necessárias para transportar toda a terra da elevação?
Seguindo as orientações do item 'D' e as descrições do enunciado do problema, o volume de terra que será transportado é:

$$4 \times \left(\frac{1}{20} \times (40^2 \times 30)\, m^3\right) = 9\,600\, m^3;$$

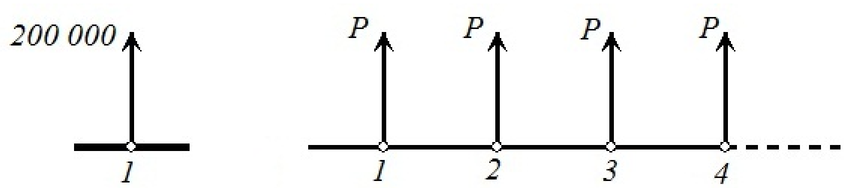
Contudo, pelo item 'E' cada caminhão leva, por vez, 146,16 m^3, portanto serão necessárias $\frac{9\,600}{146{,}16} \approx 65,68 \approx 66$ viagens desses caminhões.

6.2 Economia

O atual sistema econômico mundial está baseado, quase que exclusivamente, em juros compostos, ou seja, juros sobre juros. Assim, se o valor de R\$ 100,00 é aplicado a uma rentabilidade de 21% por período de tempos iguais, ao fim do 1º período teremos $100 + 100 \times 21\%$, ou seja, $100 \times (1 + 0,21) =$ R\$ $121,00$. Ao final do 2º período de tempo, teremos $121 \times (1 + 0,21)$, que é o mesmo que $100 \times (1 + 0,21)^2$. Com isso, já começamos a perceber que os juros compostos permitem tratar a movimentação de finanças entre períodos de tempo como é feito com os termos de uma Progressão Geométrica.

Para ilustrar esse fato, vamos analisar a situação de uma pessoa que acaba de comprar um imóvel a R\$ 200 000,00 e vai alugá-lo. Qual deve ser o valor do aluguel sem as demais taxas?

Atualmente, seria razoável considerar que o dinheiro rende 1% ao mês. Além disso, a regra financeira aplicada a esse tipo de situação é considerar o valor do imóvel dividido em uma quantidade perpétua (infinita) de prestações mensais e iguais. Todas essas infinitas prestações, calculadas na data do pagamento do 1º aluguel e somadas, devem resultar no valor do imóvel. Vamos chamar essa prestação de 'P'. O diagrama abaixo exibe a situação.



A) Qual expressão fornece o valor da 1ª prestação na data do pagamento do 1º aluguel?

$$\frac{P}{(1+\frac{1}{100})^1} = \frac{P}{(1+0,01)^1} = \frac{P}{(1,01)^1}.$$

B) Qual expressão fornece o valor da 2ª prestação na data do pagamento do 1º aluguel?

$$\frac{P}{(1,01)} \times \frac{1}{(1,01)} = \frac{P}{(1,01)^2}.$$

C) Qual expressão fornece o valor da 3ª prestação na data do pagamento do 1º aluguel?

$$\frac{P}{(1,01)^2} \times \frac{1}{(1,01)} = \frac{P}{(1,01)^3}.$$

D) Qual é a razão dessa progressão geométrica?
$\dfrac{P}{1,01}$.

E) Obtenha a expressão do valor da soma dessas infinitas prestações na data do pagamento do 1º aluguel?

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{P - P \times \left(\frac{1}{100}\right)^n}{1 - 0,01}$$

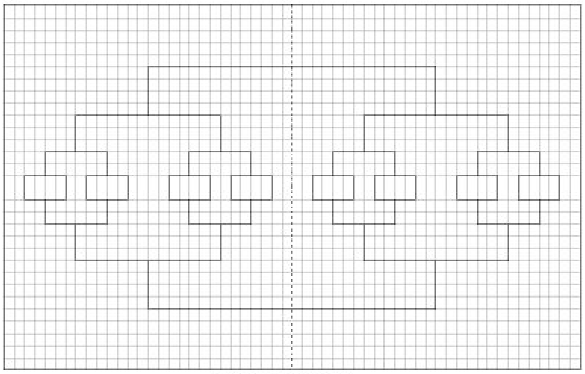
F) Sabendo que a expressão do item 'E', no problema que estamos analisando, vale 200 000, determine o valor de 'P' do aluguel desse imóvel.

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{P - P \times \left(\frac{1}{100}\right)^n}{1 - 0,01} = 200\,000 \Leftrightarrow \frac{P}{0,01} = 200\,000$$
$$P = 200\,000 \times 0,01 = 2\,000 \text{ reais.}$$

6.3 PARA O LAR

6.3.1 Outra atividade com fractal

Aqui, sugerimos que o aluno experimente a construção do cartão fractal abaixo:



CARTÃO DE FRACTAL

As linhas verticais indicam dobras e as horizontais cortes. Pode-se ver os passos da construção nos links "Vídeo" e "Atividade com Fractais". **Peça ao aluno para calcular o volume da estrutura que se ergue no cartão.**

A resposta desta atividade está nas páginas 11 e 12 do material "Atividade com Fractais".

6.3.2 Outra atividade sobre economia

Nas atividades que seguem, o aluno deverá usar a mesma regra que foi exposta na atividade sobre economia para calcular o que se pede.

a) Se o dinheiro rende 1% ao mês, quanto uma pessoa paga de aluguel por um imóvel que custa R$ 350 000,00?
$\frac{P}{0,01} = 350\,000 \Leftrightarrow P = 350\,000 \times 0,01 = \text{R\$}\,3\,500,00.$

b) Se uma pessoa paga R$ 800,00 de aluguel e o dinheiro rende 1%, qual o valor do imóvel para compra?
$V = \frac{800}{0,01} = \text{R\$}\,80\,000,00.$

c) Se o dinheiro rende 2% e uma pessoa quer juntar dinheiro para quando se aposentar poder retirar todo mês a quantia de R$ 3000,00 desse valor poupado, perpetuamente, quanto ela terá que ter poupado ao se aposentar?
Aqui, o valor do imóvel está representado pelo que a pessoa poupa até o dia da aposentadoria. O que ela vai retirar perpetuamente, é representado pelo aluguel. Assim, a resposta é $V = \frac{3000}{0,02} = \text{R\$}\,150\,000,00.$

Capítulo IV

Considerações Finais

Já em 1991, em [2], Ávila incentivava os professores brasileiros a apresentarem para o aluno de Ensino Médio as noções de Cálculo Diferencial e Integral, discutindo as vantagens de fazê-lo. Em [5], Carneiro e Wagner apresentam e resolvem um problema de Geometria Espacial de duas formas; na primeira, utilizando recursos exclusivos do ensino médio e, na segunda, usando o Cálculo. A economia de ideias e do tempo de resolução é muito grande na segunda. Inegavelmente, professores de matemática e física do Ensino Médio que tivessem a sua disposição as noções do Cálculo para utilizarem em suas aulas, teriam uma maior capacidade argumentativa para justificar partes obrigatórias desta etapa do ensino, e maior conexão contextual do conteúdo.

Chegando ao fim desta proposta de trabalho, acreditamos ter manifestado a possibilidade de transmitir ideias sobre como Cálculo, e em particular o limite de sequências pode ser trabalhado ainda no Ensino Médio, sem a necessidade de alteração do conteúdo programático, uma vez que a proposta contempla uma rotina de exercícios que, provavelmente, estaria presente no planejamento destinado ao estudo das Progressões Geométricas, desfazendo assim a argumentação da falta de tempo para mais este conteúdo no Ensino Médio. Uma outra vantagem apresentada pela proposta, é a de explicar, com argumentação matemática correta, a transformação da fórmula $\frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$, para $|q| < 1$, em $\frac{a_1}{1-q}$, quando queremos somar todos os infinitos termos da progressão geométrica. Para maiores e mais detalhadas argumentações que defendam a abordagem das noções de Cálculo no Ensino Médio, existe o interessante texto de Geraldo Ávila em [6].

Por fim, acreditamos que professores que busquem um modo ameno de apresentar em suas aulas de Ensino Médio as noções de limite de sequências, encontrarão nesta proposta de trabalho, senão um caminho, uma motivação para começar e manifestar suas ideias. Afinal, acreditamos que seja o momento histórico perfeito para que as noções de Cálculo Diferencial e Integral atravessem a barreira da graduação e da análise matemática e encontrem no Ensino Médio terreno fértil de desenvolvimento de técnicas eficientes e pouco formais que, posteriormente, amadurecerão de modo ainda mais promisor, não traumático e correto na graduação.

Uma vez que esta proposta não foi aplicada no formato que hora tem, deixamos aqui um contato, para que essa proposta permita aperfeiçoamento advindo das experiências de colegas comprometidos com o ensino de qualidade em matemática: amorim@impa.br. Também nós criaremos a oportunidade para a aplicação desta proposta para dar a ela um caráter ainda mais prático e simples, e, em veículo adequado, partilhar e analisar as observações.

Capítulo V

Apêndice - Atividade para o Aluno

7 Para Início de Conversa

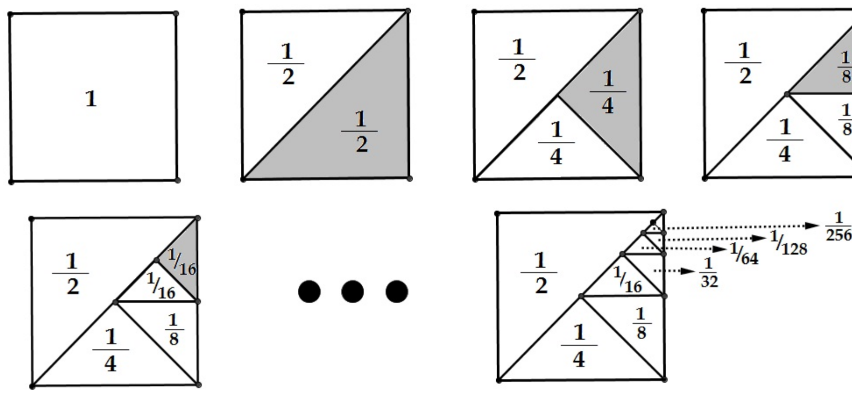
A História da humanidade revela diversos episódios em que o acréscimo ininterrupto de parcelas numa soma constituiu objeto de preocupação de homens comuns e objeto de estudo de mentes brilhantes. Os resultados obtidos em cada um desses estudos e a tentativa de criar ferramentas capazes de solucionar qualquer um desses casos, levou a humanidade a conclusões úteis e interessantes. Nesta atividade dividida em aulas, vamos ter a oportunidade de nos aprofundar um pouco nessa história. Para tanto, é necessário olhar um pouco mais de perto para essas situações, afim de entender os questionamentos que trazem, as estratégias para a resolução dessas interrogações e, por fim, sua importância em questões próprias da humanidade.

7.1 Pré-requisitos

Números Racionais, Progressão Geométrica, Soma Finita dos Termos de uma Progressão Geométrica, "Questionário Sobre o Infinito - Uma Sondagem de Conhecimento.[7]"

8 AULA 1: Analisando Tendências em Algumas Sequências

Observe as figuras abaixo:



Do primeiro quadrado para o seguinte, dividimos ao meio a área total e tomamos uma metade, que destacamos de cinza conforme se vê no segundo quadrado. A nova área é novamente dividida ao meio e tomamos uma metade, conforme o destaque de cinza no terceiro quadrado... Assim, construímos uma sequência com as áreas que tomamos após cada divisão:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

A) A sequência exibida acima é uma progressão? De que tipo?

Resposta: ____.

B) Qual a razão dessa progressão?

Resposta: ____.

C) Determine o 6º, o 7º e o 8º termos dessa sequência.

Resposta: ____.

D) Entendendo que a divisão prossegue sem parar, dando origem a triângulos cada vez menores e que áreas nunca são negativas, podemos afirmar que os termos dessa sequência estão se aproximando de algum valor? Qual?

Resposta: ____.

E) Chamando o valor respondido no item anterior de 'L_0', você acredita que em algum momento acontecerá de um dos termos dessa sequência ser igual a 'L_0'?

Resposta: ____.

F) É possível encontrar termos dessa sequência que estejam a uma distância menor do que $\dfrac{1}{10}$ de 'L_0'?

Resposta: ____.

G) Exiba, caso seja possível, um termo 'x_n', $n \in \mathbb{N}$, dessa sequência tal que $(x_n - L_0) < \frac{1}{50}$. E os termos seguintes a esse continuam menores do que $\frac{1}{50}$?

Resposta: ____.

H) Exiba, caso seja possível, um termo 'x_n', $n \in \mathbb{N}$, dessa sequência tal que $(x_n - L_0) < \frac{1}{200}$. E os termos seguintes a esse continuam menores do que $\frac{1}{200}$?

Resposta: ____.

I) Exiba, caso seja possível, um termo 'x_n', $n \in \mathbb{N}$, dessa sequência tal que $(x_n - L_0) < \frac{1}{10\,000}$. E os termos seguintes a esse continuam menores do que $\frac{1}{10\,000}$?

Resposta: ____.

J) É possível escolher, nessa sequência, termos x_n, $n \in \mathbb{N}$, que estejam tão próximos de L_0, que $x_n - L_0$ seja quase zero, ou em outras palavras, que essa diferença fique tão pequena quanto desejarmos?

Resposta: ____.

Devido ao comportamento apresentado pela sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$, diremos que ela tende a $L_0 =$ ________, ou, em liguagem formal, que seu limite é $L_0 =$ ________, quando o índice 'n' de seus termos tende a infinito.

Observe a sequência a seguir: $0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots$ em que os termos decrescem, e responda as perguntas que seguem:

A) A sequência exibida acima é uma progressão? De que tipo?

Resposta: ____.

B) Qual a razão dessa progressão?

Resposta: ____.

C) Determine o 5º, o 6º e o 7º termos dessa sequência.

Resposta: ____.

D) Ententendo que o processo de obter novos termos continua sem parar, ou seja, infinitamente, o que podemos afirmar sobre a existência de termos negativos dessa sequência?

Resposta: ____.

E) Com base na resposta do item anterior, e lembrando que essa sequência decresce termo a termo, podemos afirmar que esses termos estão se aproximando de algum número em particular? Que número seria esse?

Resposta: ____.

F) Chamando esse número do item anterior de 'L_0', você acredita que em algum momento acontecerá de um dos termos dessa sequência ser igual a 'L_0'?

Resposta: ____.

G) É possível encontrar termos dessa sequência, que estejam a uma distância menor ou igual a 0,003 de 'L_0'? E a uma distância de 0,000003 de 'L_0'? Exiba, se possível, esses termos.

Resposta: ____.

H) E se quisermos que essa proximidade com 'L_0' seja muito, mas muito menor do que as citadas no item 'G', isso é possível?

Resposta: ____.

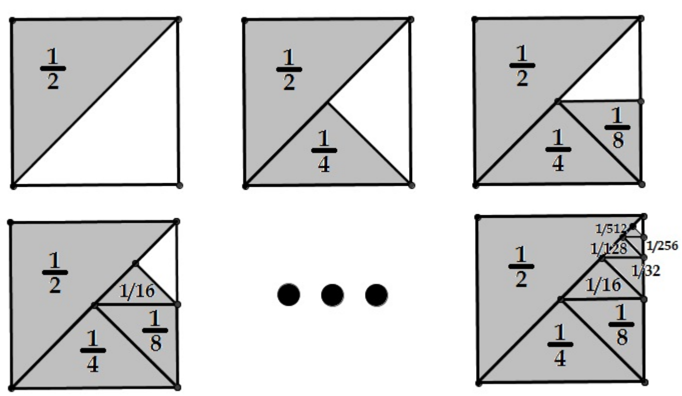
Devido ao comportamento apresentado pela sequência $0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots$, diremos que ela tende a $L_0 =$ ________, ou, em liguagem formal, que seu limite é $L_0 =$ ________, quando o índice 'n' de seus termos tende a infinito.

9 AULA 2: Somando os Infinitos Termos de uma PG

Sabemos que, por causa de limitações físicas, não seria possível somar de modo convencional todos os termos das sequências apresentadas na AULA 1, pois mesmo que somemos uma grande quantidade de termos, ainda existiriam uma infinidade deles, todos não nulos, a serem acrescentados à soma. Para avançar na tentativa de concluir o valor da soma desses infinitos termos, caso existam essas somas, é que vamos construir novas sequências em que os termos serão os resultados parciais dessas somas. Vamos começar com a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$ e, a partir dela, construir uma nova sequência formada pelas somas parciais de seus termos. Veja:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & S_1 = & \dfrac{1}{2} & = 0,5 \\[2ex]
S_2 = & S_1 + \dfrac{1}{4} = & \dfrac{3}{4} & = 0,75 \\[2ex]
S_3 = & S_2 + \dfrac{1}{8} = & \dfrac{7}{8} & = 0,875 \\[2ex]
S_4 = & S_3 + \dfrac{1}{16} = & \dfrac{15}{16} & = 0,9375 \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Olhe cada uma dessas somas parciais através das figuras que as geram:



Com o auxílio dessas figuras, e pelo que você tem aprendido sobre a análise de tendências de sequências, tente responder aos itens que seguem:

A) Os termos dessa nova sequência estão aumentando? E o que é acrescentado é cada vez maior ou menor?

Resposta: ____.

B) Os termos S_n parecem estar se aproximando de algum número 'L_0' a medida que 'n' cresce? Que valor seria esse?

Resposta: ____.

C) Com a ajuda de uma calculadora, preencha a tabela a seguir:

	S_n	$d_n = 1 - S_n$
$n = 1$	$\frac{1}{2}$	________
$n = 2$	$\frac{3}{4}$	________
$n = 3$	$\frac{7}{8}$	________
$n = 4$	$\frac{15}{16}$	________
$n = 5$	$\frac{31}{32}$	________
$n = 6$	______	________
$n = 7$	______	________
$n = 8$	______	________

D) Os valores da coluna 'd_n' estão aumentando ou diminuindo? Parecem se aproximar de algum valor? Qual?

Resposta: ____.

E) Será possível escolhermos um termo 'S_n' em que 'd_n' seja menor ou igual a 0,007? Que termo seria esse? E para os termos seguintes a esse, os valores de d_n continuam menores ou iguais a 0,007?

Resposta: ____.

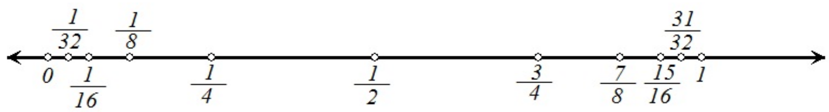
F) Encontre agora um 'S_n' tal que $d_n \leq 0,000\,3$. Os próximos termos a partir deste continuam menores do que, ou iguais a 0,000 3?

Resposta: ____.

G) Pense num valor positivo de 'd_n' muito, mas muito menor que 0,000 3. É possível escolher um 'S_n' a partir do qual todos os valores de 'd_n' sejam menores do que esse valor que você pensou?

Resposta: ____.

H) Identifique, na reta exibida abaixo, os valores de S_n. Em seguida, tente perceber o fato geométrico que os valores da coluna d_n estão exibindo. Que significado seria esse?



I) Observe outra vez as figuras que representam as somas parciais de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$. O que as somas parciais estão fazendo em relação ao quadrado de área 1 do início do processo?

Resposta: ____.

J) Com o que foi discutido até aqui, qual sua opinião sobre a afirmação de que o limite das somas parciais é 1? O que os seus colegas acham?

Resposta: ____.

K) Em matemática, um número pode ser escrito de diversas formas. Por exemplo, $2 = 1+1 = \frac{10}{5} = 3-1+0+0+0+0+0+0+\cdots$ Com a análise feita sobre S_n, vimos que essa sequência se esforça, sem parar NUNCA, para atingir o número 1. A fim de simplificar o símbolo da soma de todos os infinitos termos de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$ e de dar às somas parciais o objetivo que elas tanto buscam, termo a termo, que número seria mais conveniente usar para simbolizar esta soma infinita? Seus colegas concordam com sua resposta?

Resposta: ____.

L) Após esse debate com seus colegas e com o professor, bem como após ter visto as figuras que mostram as somas parciais das áreas, você concorda em escrever que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots = 1$?

Resposta: ____.

Através das orientações dadas pelo questionário, as discussões realizadas com os colegas e com o professor, e as figuras, vimos que os valores de S_n podem estar tão próximos de 1 quanto se queira, bastando escolher um valor adequado de 'n'. Toda a nossa análise revela que o número ____ ***é uma espécie de "ímã" dos termos de 'S_n', acumulando em torno de si e cada vez mais perto de si todos os valores fornecidos por qualquer soma parcial.*** Matematicamente, essa observação é traduzida com qualquer uma das afirmações abaixo, que são modos diferentes de expressar o mesmo fato:

- A sequência S_n converge para ________.
- O limite de S_n é ________, quando n tende a infinito.
- $\lim_{n \to \infty} S_n =$ ________.
- A soma de todos os infinitos termos de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right)$ é ____.
- $S_\infty =$ ____

Vamos agora, voltar para a sequência $(0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots)$ e analisar as somas parciais de seus termos:

$$\begin{array}{rrl} & S_1 = & 0{,}9 \\ S_2 = & S_1 + 0,09 = & 0{,}99 \\ S_3 = & S_2 + 0,009 = & 0{,}999 \\ S_4 = & \underline{\hspace{2cm}} = & \underline{\hspace{2cm}} \\ S_5 = & \underline{\hspace{2cm}} = & \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

A) Os termos dessa nova sequência estão aumentando? E o que é acrescentado é cada vez maior ou menor?

Resposta: ____.

Agora abra o arquivo "planilha 1"[4], acrescente o termo $0,9$ na célula 'B2', observe o que ocorre e responda os ítens que seguem:

	A	B	C	D
1	n	na	Sn	dn
2	1		0,0000000000000000	1,0000000000000000
3	2	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
4	3	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
5	4	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
6	5	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
7	6	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
8	7	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
9	8	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
10	9	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
11	10	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
12	11	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
13	12	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
14	13	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
15	14	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000
16	15	0,0000000000000000	0,0000000000000000	1,0000000000000000

B) 'Sn' é uma progressão geométrica? Em caso afirmativo, qual seria a razão?

Resposta: ____.

C) Esses termos parecem estar se aproximando de algum número 'L_0'? Qual?

Resposta: ____.

D) Os valores da coluna 'dn' estão aumentando ou diminuindo? Parecem se aproximar de algum valor? Qual?

Resposta: ____.

[4] Endereço da planilha 1 para consulta impressa do material: "https://www.box.com/s/d71iafd8a0qzxmjbfob3".

E) Será possível escolhermos um termo 'Sn' em que 'dn' seja menor ou igual a 0,007? Que termo seria esse? E para os termos seguintes a esse, os 'dns' continuam menores do que, ou iguais a 0,007?

Resposta: ____.

F) Para que valor de 'n' teríamos um 'Sn' tal que $dn \leq 0,000\,000\,000\,000\,003$? E os S_n seguintes a esse que você respondeu, eles continuam todos menores do que, ou iguais a 0,000 000 000 000 003?

Resposta: ____.

G) Pense num valor positivo de 'dn' muito, mas muito menor que o apresentado no item anterior. É possível escolher um 'Sn' a partir do qual todos os 'dns' fiquem menores do que, ou iguais a esse valor que você pensou?

Resposta: ____.

H) Repare que a coluna 'D' da planilha revela o quão próximo os valores de 'Sn' estão de 1. Assim, qual sua opinião sobre a afirmação de que 'Sn' tende a 1? O que os seus colegas acham?

Resposta: ____.

I) Com a análise feita sobre S_n, vimos que essa sequência se esforça, sem parar NUNCA, para atingir o número 1. A fim de simplificar o símbolo da soma de todos os infinitos termos de $(0,9; 0,99; 0,999; \ldots)$ e de dar às somas parciais o objetivo que elas tanto buscam, termo a termo, que número seria mais conveniente usar para simbolizar esta soma infinita? Seus colegas concordam com sua resposta?

Resposta: ____.

J) Após esses debates com seus colegas e com o professor, você concorda que o valor da soma de todos os infinitos termos de $(0,9;\ 0,09;\ 0,009;\ 0,0009; \ldots)$ é 1, ou seja, que $0,99999\ldots = 1$?

Resposta: ____.

9.1 PARA OS CÉTICOS

Caso você discorde da afirmação do item 'J', faça o seguinte:

1ª Justificativa: Se o aluno resolveu o exercício letra 'g' da seção PARA O LAR da AULA 1, reescreva o exercício convertendo cada termo para a sua forma decimal, compare com a resposta correta à pergunta e veja o que ocorre.

2ª Justificativa: Sabemos que $\frac{1}{3} =$ ________. Como multiplicar os dois membros de uma igualdade por um valor real não desfaz a igualdade, vamos multiplicar ambos os membros dessa igualdade por 3:

$$3 \times \frac{1}{3} = 3 \times \underline{\hspace{2cm}} \leftrightarrow 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3ª Justificativa:

i) Queremos obter o resultado da soma infinita $S_\infty = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \cdots$. Para isso, vamos usar a soma infinita $-\frac{1}{10}S_\infty$. Teremos $-\frac{1}{10}S_\infty =$ ____________________ $\cdots$

ii) Compare as parcelas de S_∞ com as de $-\frac{1}{10}S_\infty$. São todas simétricas uma da outra? Falta ou sobra alguém na simetria?

Resposta: ____.

iii) Com base no item anterior, o que acontece se fizermos $S_\infty - \frac{1}{10}S_\infty$?

Resposta: ____.

iv) Considerando S_∞ um número, obtenha esse valor resolvendo a equação do 1º grau gerada através dos dois itens anteriores.

Resposta: ____.

____.

v) Através dessa discussão concluímos que $S_\infty = 0,99999\ldots =$ ________.

E novamente, através das orientações dadas pelo questionário anterior e as discussões realizadas com os colegas e com o professor, vimos que os valores de S_n podem estar tão próximos de 1 quanto se queira, bastando escolher um valor adequado de ‘n’. Toda a nossa análise revela que o número ____ ***é uma espécie de “ímã” dos termos de ‘S_n’, acumulando em torno de si e cada vez mais perto de si todos os valores fornecidos por qualquer soma parcial.*** Matematicamente, essa observação é traduzida com qualquer uma das afirmações abaixo, que são modos diferentes de expressar o mesmo fato:

- A sequência S_n converge para ________.
- O limite de S_n é ________, quando n tende a infinito.
- $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$ ________.
- A soma de todos os infinitos termos de $(0,9;\ 0,09;\ 0,009;\ 0,0009;\ldots)$ é ____.
- $S_\infty =$ ____

De um modo geral, sempre que pudermos concluir que uma sequência fica tão próxima de um número fixo ‘L’, quanto desejarmos, diremos que a sequência converge para ‘L’ ou que seu limite é ‘L’.

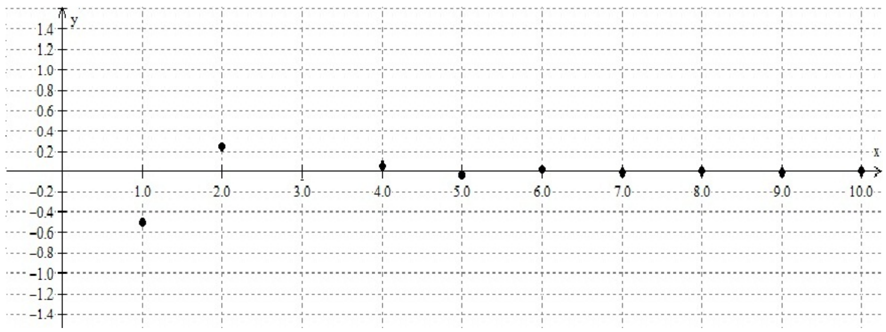
10 AULA 3: Das Sequências Mal Comportadas

Os exemplos vistos até aqui fornecem ferramentas muito importantes para a análise de certas sequências. Contudo, um conhecimento sólido sobre as estruturas matemáticas de alguma situação deve levar em consideração aspectos gerais e situações diversas dentro do que se está analisando. Vamos buscar nesta aula sequências que mudem, ligeiramente, os aspectos trabalhados até então e tentaremos melhorar ainda mais nossa capacidade de análise de convergência de sequências. Para tanto, vejamos cada um dos exemplos a seguir:

i) $-2, -4, -8, -16, -32, \cdots$ preserva a característica de diminuir os termos gradativamente.

- i.a) Os termos diminuem, mas eles se aproximam de zero?
  Resposta: ________________________________.
- i.b) É possível somar uma quantidade de termos, a partir do 1º, de modo que essa soma seja menor do que -80? E as outras somas parciais S_n depois dessa continuam menores que -80?
  Resposta: ________________________________.
- i.c) Será possível obter $S_n \leq -1000000$? E as somas parciais após a encontrada, continuam diminuindo além de -1000000?
  Resposta: ________________________________.
- i.d) E ao somarmos esses termos, as somas parciais parecem se aproximar de algum valor?
  Resposta: ________________________________.
- i.e) Você concordaria em afirmar que as somas parciais podem ficar tão negativas quanto se deseje, a partir de um S_n apropriado? O que os seus colegas acham?
  Resposta: ________________________________.
- i.f) Essa sequência converge para algum valor, ou seja, tem um limite?
  Resposta: ________________________________.

ii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$ tem seus termos oscilando entre valores positivos e negativos. Contudo observe o gráfico a seguir com diversos valores dessa sequência:



ii.a) Seus termos 'a_n' parecem tender a algum valor em particular? Qual?

Resposta: ____.

ii.b) Existe um termo a partir do qual todos os outros estão a uma distância de zero igual ou menor do que 0,0005?

Resposta: ____.

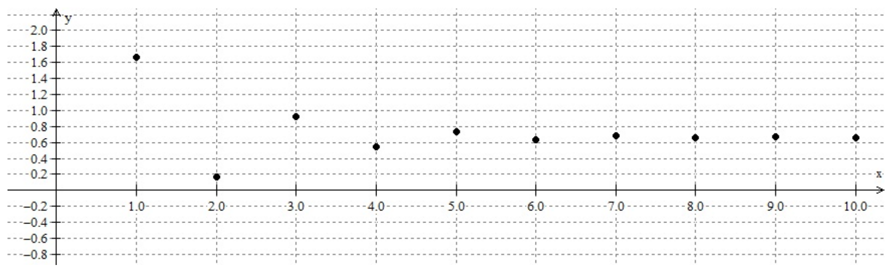
ii.c) Pense num valor muito menor que 0,0005. É possível encontrar um termo a partir do qual todos os outros estão a uma distância de zero igual ou menor do que esse valor que você pensou? O que os seus colegas acham?

Resposta: ____.

ii.d) O que você acha da afirmação $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? O que os seus colegas acham?

Resposta: ____.

iii) Considere agora a sequência S_n, das somas parciais de $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$ e sua representação no gráfico abaixo:



iii.a) As somas parciais parecem tender a algum valor em particular? Qual?

Resposta: ________________________________.

iii.b) Existe uma soma parcial a partir da qual todos as outras são menores ou iguais a 0,8?

Resposta: ________________________________.

Para os próximos questionamentos, vamos abrir o arquivo "planilha 2"[5]. Veja que 'n' indica a posição do termo na sequência, 'An' indica o valor do termo e 'Sn' as somas parcias de todos os termos de 1 a 'n'. Coloque em 'B2' o valor 1 e veja o que ocorre. Partindo disso, continue o questionário...

	A	B	C
1	n	An	Sn
2	1		0
3	2	0,0000000000	0,0000000000
4	3	0,0000000000	0,0000000000
5	4	0,0000000000	0,0000000000
6	5	0,0000000000	0,0000000000
7	6	0,0000000000	0,0000000000
8	7	0,0000000000	0,0000000000
9	8	0,0000000000	0,0000000000
10	9	0,0000000000	0,0000000000
11	10	0,0000000000	0,0000000000
12	11	0,0000000000	0,0000000000
13	12	0,0000000000	0,0000000000
14	13	0,0000000000	0,0000000000
15	14	0,0000000000	0,0000000000
16	15	0,0000000000	0,0000000000
17	16	0,0000000000	0,0000000000
18	17	0,0000000000	0,0000000000
19	18	0,0000000000	0,0000000000
20	19	0,0000000000	0,0000000000
21	20	0,0000000000	0,0000000000

[5]Endereço da planilha 2 para consulta impressa do material: "https://www.box.com/s/618ggj39tcw47ydu9qsj".

iii.c) Existe uma soma parcial a partir da qual suas distâncias ao número 0,662 sejam todas menores ou iguais a 0,001?
Resposta: ____.

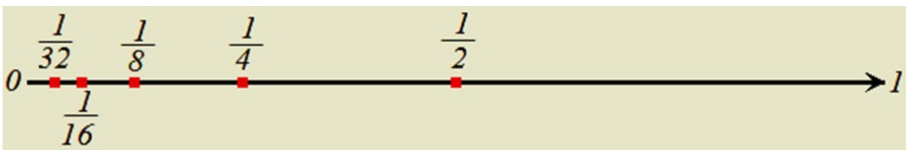
iii.d) Lembrando que $\frac{2}{3} = 0,666...$, você acredita que seja possível escolher alguma soma parcial a partir da qual todas estejam a uma distância de $\frac{2}{3}$, menor ou igual a 0,000001 ou ainda mais próximo? O que seus colegas acham?
Resposta: ____.

iii.e) O que você acha da afirmação $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{3}$? O que seus colegas acham?
Resposta: ____.

iii.f) O que você acha da afirmação: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots = \frac{2}{3}$? O que seus colegas acham?
Resposta: ____.

iv) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots$
que tem primeiro termo igual a 1 e o próximo termo é a metade do anterior, mas aparece na sequência o dobro da quantidade de vezes do termo anterior.

A seguir vemos a distribuição dos termos dessa sequência sobre a reta:



iv.a) Seus termos parecem tender a algum valor em particular? Qual?
Resposta: ____.

iv.b) Existe um termo a partir do qual todos os outros estão a $\frac{1}{50}$ de unidade distantes de zero? Qual?
Resposta: ____.

iv.c) Pense num valor muito menor que $\frac{1}{50}$. É possível encontrar um termo a partir do qual todos os outros estão a uma distância de zero igual ou menor do que esse valor que você pensou? O que os seus colegas acham?
Resposta: ____.

iv.d) O que você acha da afirmação $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, onde a_n é o termo geral dessa sequência? O que os seus colegas acham?
Resposta: ____.

v) Vamos à sequência das somas parciais dos termos de 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$, ... que analisaremos com a tabela que você ajudará a compor.

Somas Parciais de $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$		
n	S_n	Resultado
1	1	1
3	$S_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	2
7	$S_3 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4}$	3
15	____________	________
31	____________	________
____	____________	________
____	____________	________

v.a) É possível encontrar uma soma parcial que seja menor do que ou igual a 10? Exiba essa soma parcial.

Resposta: ____.

v.b) É possível encontrar uma soma parcial que seja menor do que ou igual a 20? O que seus colegas acham?

Resposta: ____.

v.c) É possível encontrar uma soma parcial que seja menor do que ou igual a 1 000 000? O que seus colegas acham?

Resposta: ____.

v.d) Você concordaria com a afirmação de que é possível encontrar uma soma parcial tão grande quanto se queira? O que seus colegas acham?

Resposta: ____.

v.e) Existe um valor para o qual as somas parciais parecem se aproximar?

Resposta: ____.

Depois das análises feitas sobre a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, vimos que os seus termos diminuem aproximando-se de zero o quanto se queira. Contudo, a sequência formada a partir de suas somas parciais não tem um limite, ela aumenta mais e mais. Todos os outros exemplos vistos antes deste têm a característica de ter seus termos gerais com limite igual a zero e sequências das respectivas somas parciais com um limite. Essa última sequência que analisamos nos revela que nem sempre é assim! Vemos aqui o papel importante que a análise cuidadosa de um problema tem, pois a intuição, provavelmente, falharia se a pergunta sobre a existência do limite da sequência das somas parciais fosse feita antes da observação da tabela que foi preenchida.
Uma sequência que ficou famosa pela dificuldade que houve em comprovar que ela não tinha um limite é a chamada série harmônica, que ganhou uma primeira demonstração de sua divergência é com Nicole Oresme(1325-1382), que era, segundo [24]:

> "...um destacado intelectual em vários ramos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais. Além de professor universitário, Oresme era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas; e nessa função revelou-se um homem de larga visão, recomendando medidas monetárias que tiveram grande sucesso na prática. Ao lado de tudo isso, Oresme foi também bispo de Lisieux".

Na seção "Um Pouco Além do Roteiro..." a seguir, você terá a oportunidade de participar de uma atividade que lhe permitirá concluir o mesmo que Oresme!

10.1 Um Pouco Além do Roteiro...

Antes de estudarmos a série harmônica, precisaremos de um sequência auxiliar. Uma sequência de comparação. Essa foi a ideia brilhante de Oresme.

$$1, \quad \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\boxed{\text{somam } 1}}, \quad \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\boxed{\text{somam } 1}}, \ldots$$

Vamos analisar alguns aspectos dessa a seguir.

A) Os termos dessa sequência parecem se aproximar de algum valor em particular? Qual?

Resposta: ____.

B) E as somas parciais, elas parecem se aproximar de algum valor em particular? Qual?

Resposta: ____.

C) É possível encontrar uma soma parcial a partir da qual todas as somas parciais sejam iguais ou maiores do que 8? E 100?

Resposta: ____.

D) Você concordaria com a afirmação de que essas somas parciais aumentam mais e mais? E concordaria ainda que, não importa o número que seja escolhido, é possível obter uma soma parcial que supere esse valor, bem como as outras somas parciais a partir desta?

Resposta: ____.

E) O que você acha da afirmação de que essa sequência e as suas somas parciais não têm um limite? O que os seus colegas acham?

Resposta: ____.

Agora estamos melhor preparados para reviver este episódio da história da matemática que foi imortalizado por Oresme. Para tanto, vamos à próxima seção.

10.1.1 A Série Harmônica

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

É fácil perceber que os seus termos se aproximam de zero gradativamente, ou seja, seu limite é zero. Será que sua soma parcial também tem um limite?

A) Vamos indicar cada termo da série harmônica por h_n. Preencha a tabela a seguir:

Somando Termos da Série Harmônica		
h_1		$= 1$
h_2	$=$ ______	$=$ ______
$h_3 + h_4$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$=$ ______
$h_5 + h_6 + h_7 + h_8$	$=$ ______	$=$ ______
$h_9 + h_{10} + \cdots + h_{16}$	$=$ ______	$=$ ______

Perceba que a 4ª linha da tabela fica bem mais trabalhosa de preencher devido aos cálculos com quantidades cada vez maiores de frações. Para agilizar esse processo, utilize os valores obtidos com o auxílio de uma planilha eletrônica e representados a seguir. Depois que tiver terminado de preencher a tabela, continue no item 'B'.

	A	B	C	D	E	F
1	n	1/n	Sn			
2	1	1,000000000000000	1,000000000000000			
3	2	0,500000000000000	1,500000000000000			
4	3	0,333333333333333	1,833333333333330			
5	4	0,250000000000000	2,083333333333330		S4 - S2	0,583333333333333
6	5	0,200000000000000	2,283333333333330			
7	6	0,166666666666667	2,450000000000000			
8	7	0,142857142857143	2,592857142857140			
9	8	0,125000000000000	2,717857142857140		S8 - S4	0,634523809523809
10	9	0,111111111111111	2,828968253968250			
11	10	0,100000000000000	2,928968253968250			
12	11	0,090909090909091	3,019877344877340			
13	12	0,083333333333333	3,103210678210680			
14	13	0,076923076923077	3,180133755133760			
15	14	0,071428571428571	3,251562326562330			
16	15	0,066666666666667	3,318228993228990			
17	16	0,062500000000000	3,380728993228990		S16 - S8	0,662871850371851

B) Considere as somas $h_3 + h_4$, $h_5 + h_6 + h_7 + h_8$ e $h_9 + h_{10} + \cdots + h_{16}$ elas são menores, iguais ou maiores do que $\dfrac{1}{2}$?

Resposta: ____.

C) Preencha a nova tabela que segue:

Comparando a Série Harmônica com as Somas Parciais da Sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$			
n	S_n	$<, = ou >$	**Somas Parciais de** $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$
1	1	=	1
2	$1 + \frac{1}{2}$	________	$1 + \frac{1}{2}$
4	________________	________	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
8	________________	________	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
16	________________	________	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

D) Ao saltarmos as somas parciais de $n = 2$ para $n = 4$, ou de $n = 4$ para $n = 8$, deixamos de somar algum termo da série harmônica?

Resposta: ____.

E) O que a comparação das somas parciais dos termos h_n com a série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ mostrou a partir de $n = 4$?

Resposta: ____.

F) Podemos analisar o comportamento da soma dos termos da série harmônica a partir de $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots$?

Resposta: ____.

G) É possível encontrar um S_n da série harmônica a partir do qual todas as outras somas parciais sejam maiores ou iguais a 2?

Resposta: ____.

H) É possível encontrar um S_n da série harmônica a partir da qual todas as outras somas parciais sejam maiores ou iguais a 6? E 100? E 1000?

Resposta: ____.

I)) As somas parciais da série harmônica parecem tender a algum valor em particular? Qual?

Resposta: ____.

J) Você concorda com a ideia de que, apesar de $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, suas somas parciais podem ser maiores do que qualquer valor que venhamos a escolher, ou seja, as somas parciais não têm um limite? O que o seu colega acha?

Resposta: ____.

Uma sensação de que uma análise incorreta da existência do limite das sequências de somas parciais de $(0,9; 0,09; 0,009; 0,0009; \cdots)$ ou $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ surge depois de estudarmos a série harmônica. Será que saltando algumas somas chegaríamos à conclusão de que essas somas parciais também não têm um limite? Um fato determinante para derrubar essa insegurança é observar que, na série harmônica, é sempre possível encontrar uma quantidade finita de termos consecutivos que somam meio. Tente fazer isso com as outras somas parciais e descubra que não será possível. Faça o teste!

11 AULA 4: Soma dos Infinitos Termos de uma PG

Os estudos sobre soma finita de termos de uma progressão geométrica, que constituem um dos pré-requisitos para estas atividades, nos ajudarão na tarefa de somar infinitos termos de uma progressão geométrica. Lembremos que as conclusões obtidas até aqui com nossas atividades explicitam que progressões geométricas com razão $|q| > 1$ não apresentam um limite para seus termos; diferente das progressões geométricas com razão $|q| < 1$, cujos termos vão se aproximando mais e mais de zero.

Concentrando nossa atenção neste último caso de progressão geométrica, ou seja, com razão $|q| < 1$, temos que uma soma parcial de seus termos é obtida pela fórmula $S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$, que já conhecemos. Com base na análise deste caso de Progressão Geométrica, responda aos questionamentos abaixo:

A) O que pode-se dizer sobre os valores de a_n, à medida que aumentamos mais e mais o valor de 'n' nas progressões geométricas que estamos considerando?

Resposta: ____.

B) Se fizermos 'n' tender a infinito, o que acontece com os valores de a_n? E a_{n+1} é maior ou menor do que a_n?

Resposta: ____.

C) O que podemos dizer sobre $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ em progressões geométricas desse tipo? O que o seu colega acha?

Resposta: ____.

D) O que você acha da afirmação de que, em PGs com $|q| < 1$, $\dfrac{a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$? O que o seu colega acha?

Resposta: ____.

E) Para você, as expressões $\frac{a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{1-q}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$ são equivalentes, ou seja, possuem o mesmo resultado?

Resposta: ____.

F) Finalmente, chamando a soma infinita de termos de uma PG, em que $|q| < 1$, de S_∞, podemos afirmar que:

$$S_\infty = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Somar infinitos termos de uma PG e conseguir determinar um valor para essa soma constituí ferramenta de grande utilidade na matemática e suas aplicações. Diversos estudos que tiveram conclusões importantes para o homem utilizaram essa ferramenta. A seguir, veremos um pouco disto:

11.1 Fração Geratriz

Qual a fração irredutível que tem como representação decimal o número 5,13131313... ou 2,2505555...?

Por mais que saibamos algumas "regrinhas" que conduzem a estas conclusões, precisamos entender que, na busca pelo aperfeiçoamento do que se sabe sobre números, de modo a eliminar contradições, é preciso dominar melhor o que se esconde atrás dessas "regrinhas". Para tanto, vamos lembrar que os números racionais, olhando apenas a forma decimal, se dividem em dois grandes grupos: números com quantidade de casas decimais significativas finita e números com quantidade de casas decimais significativas infinitas e periódicas — entendendo por período o menor conjunto finito de algarismos que se repete infinitamente na parte decimal do número. O tratamento de cada um desses dois grandes conjuntos é feito de um modo diferenciado:

11.1.1 Números Racionais com Quantidade Finita de Casas Decimais Significativas

Nestes casos, basta, ao mesmo tempo, multiplicarmos e dividirmos o número por 10^n, onde 'n' é a quantidade de casas decimais desse número; em seguida, caso seja possível, tornamos a fração irredutível. Veja alguns exemplos abaixo:

- $3,7$ tem 1 casa decimal, logo $3,7 = 3,7 \times \dfrac{10}{10} = \dfrac{37}{10}$
- $6,125$ tem 3 casas decimais, logo $6,125 = 6,125 \times \dfrac{10^3}{10^3} = \dfrac{6125}{1000}$, que simplificando resulta em $\dfrac{49}{8}$

11.1.2 Números Racional com Quantidade Infinita de Casas Decimais Periódicas

Lembremos que na "AULA 2", analisamos somas parciais das progressões geométricas: $(0,9; 0,09; 0,009; \cdots)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots)$; e na "AULA 3", as somas parciais da progressão geométrica $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots)$. Tente unir as conclusões obtidas dessas atividades e da conversa com os colegas para preencher as lacunas a seguir:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0,9 - 0,9 \times 0,1^n}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9 - 0,9 \times \lim\limits_{n\to\infty} 0,1^n}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9 - 0}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9}{1 - 0,9} =$

  $= \dfrac{0,9}{0,9} = 1.$

Ou seja, a tentativa de somar infinitamente os termos consecutivos de $0,9; 0,09; 0,009; \cdots$ nos revela os seguintes aspectos:

$\boxed{\textbf{Convergência}}$ À medida que mais termos da sequência são acrescentados às somas parciais, mais próximo de 1 fica essa soma.

$\boxed{\textbf{Acumulação}}$ A sequência das somas parciais acumula-se próxima ao 1, tão próxima quanto se desejar.

$\boxed{\textbf{Conclusão}}$ Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ e que a soma de todos os infinitos termos dessa sequência é igual a 1, ou seja, $0,9999999999\ldots = 1$.

Ainda lembrando a "AULA 2", agora o outro caso analisado:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_} = \dfrac{\frac{1}{2} - \_\_\_\_}{\_\_} = \_\_ \times \_\_ = \_\_.$

E também aqui, a tentativa de somar uma infinidade de termos da progressão geométrica têm as características seguintes:

$\boxed{\textbf{Convergência}}$ À medida que mais termos da sequência são acrescentados às somas parciais, mais próximo de ________ fica essa soma.

$\boxed{\textbf{Acumulação}}$ A sequência das somas parciais acumula-se próxima de ________, tão próxima quanto se desejar.

$\boxed{\textbf{Conclusão}}$ Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty}$ ____ = ________ e que a soma de todos os infinitos termos dessa sequência é igual a ________, ou seja, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots = 1$.

E, finalmente, o caso exibido na "AULA 3":

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 1 \times (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})} = \dfrac{1 - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_} = \dfrac{1 - \_\_\_\_}{\_\_} = \_\_ \times \_\_ = \_\_.$

E mais uma vez as três características:

$\boxed{\textbf{Convergência}}$ À medida que mais termos da sequência são acrescentados às somas parciais, mais próximo de ________ fica essa soma.

$\boxed{\textbf{Acumulação}}$ A sequência das somas parciais acumula-se próxima de ________, tão próxima quanto se desejar.

$\boxed{\textbf{Conclusão}}$ Afirmamos que ____________ e que a soma de todos os infinitos termos dessa sequência é igual a ________, ou seja, ________.

Agora, pense nos exemplos que motivaram o início desta seção, 5,13131313. . . e 2,2505555. . . . Vamos obter as frações irredutíveis que as geram. Para isso, siga preenchendo as lacunas:

- 5,1313131313 . . .

  a) Número sem o período: __5__.

  b) Progressão geométrica associada à parte periódica:

$$\underline{(0,13; 0,0013; 0,000013; \cdots)}$$

  c) Podemos escrever que:

$$5,131313\ldots = 5 + 0,13 + 0,0013 + 0,000013 + \cdots$$

$$5,131313\ldots = 5 + \lim_{n\to\infty} \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$5,131313\ldots = 5 + \frac{0,13 + \underline{\qquad\quad}}{\underline{\qquad}}$$

$$5,131313\ldots = \underline{\qquad}$$

- 2,2505555. . .

  a) Número sem o período: ________.

  b) Número sem o período na forma de fração irredutível: __

  c) Progressão geométrica associada à parte periódica:

$$\underline{(0,0005; \qquad\qquad\qquad \cdots)}$$

  d) Podemos escrever que:

$$2,2505555\ldots = \underline{\qquad} + 0,0005 + \underline{\qquad\qquad\qquad} + \cdots$$

$$2,2505555\ldots = \underline{\qquad} + \lim_{n\to\infty} \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$2,2505555\ldots = \underline{\qquad} + \frac{\frac{1}{2000} + \underline{\qquad}}{\underline{\qquad}}$$

$$2,2505555\ldots = \underline{\qquad}$$

$$2,2505555\ldots = \underline{\qquad}$$

De um modo geral, todo número racional que seja dízima periódica é da forma:

$$I, \underbrace{q_1q_2q_3\ldots q_r}_{\boxed{\text{parte não periódica (quando houver)}}} \overbrace{\underbrace{p_1p_2p_3\ldots p_n}_{\text{período}} p_1p_2p_3\ldots p_n \cdots p_1p_2p_3\ldots p_n \cdots}^{\text{parte periódica do número}},$$

onde 'I' é a parte inteira e $p_1p_2p_3\ldots p_n$ é a menor quantidade de algarismos que se repete periódica e infinitamente. Vamos chamar essa formação de 'n' algarismos de 'P', relativo a período; e a formação $q_1q_2q_3\ldots q_r$, com 'r' algarismos, de 'N', fazendo referência ao "NÃO" da parte não periódica. Com isso, e usando os métodos desenvolvidos até aqui, prova-se que:

$$I, N\overline{P} = \frac{INP - IN}{(10^n - 1) \times 10^r},$$

cujo denominador, de fato, será um número formado de 'n' noves seguidos de 'r' zeros. Assim, chega-se a seguinte regra prática para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica:

11.1.3 Regra Prática Para Obter a Fração Geratriz

Numerador: Desprezando a vírgula, fazemos INP − IN;

Denominador: Será um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos de 'P', seguido de tantos zeros quantos forem os algarismos de 'N'.

Vejamos como o método se aplica aos exemplos que fizemos ao fim da última seção:

- **5**,1313131313...

  Numerador: $513 - 5 = 508$

  Denominador: O período tem 2 algarismos e a parte não periódica não está presente. Assim, o denominador será 99

  $5,131313\ldots = \dfrac{508}{99}$

- **2**,25055555...

  Numerador: $22505 - 2250 = 20255$

  Denominador: O período tem 1 algarismo e a parte não periódica tem 3. Assim, o denominador será 9000

  $2,25055555\ldots = \dfrac{20255}{9000} = \dfrac{4051}{1800}$

Depois dessa regra prática, muitos alunos são levados a pensar: "Pra que tudo isso se já tinha um atalho?" A regra prática só é possível pela atenção continuada a verdades já obtidas. Como seria possível obter tal regra por intuição? Provavelmente, seria bem difícil. E, mesmo que fosse possível, que garantia teríamos de que está certa para qualquer caso? Lembre-se de que o aprofundamento das investigações matemáticas têm também o objetivo de excluir a possibilidade da contradição.

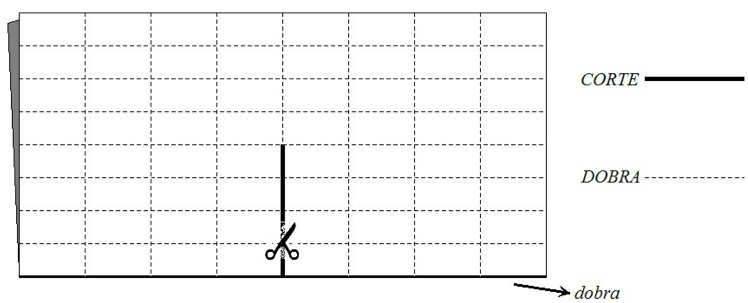
12 Aula 5: Aplicações Mais Sutis

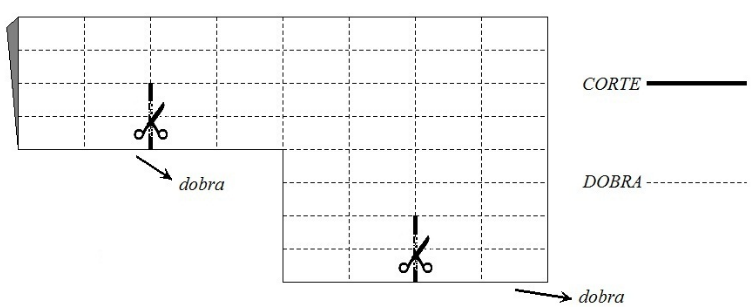
12.1 Fractais

Para essa atividade, clique em "Fractais"[6] para assistir na internet a um vídeo sobre fractais. Depois de assistir ao vídeo e entender um pouco sobre os fractais e suas aplicações, vamos participar desse universo e montar uma estrutura fractal em três dimensões. Vamos construir um cartão fractal.

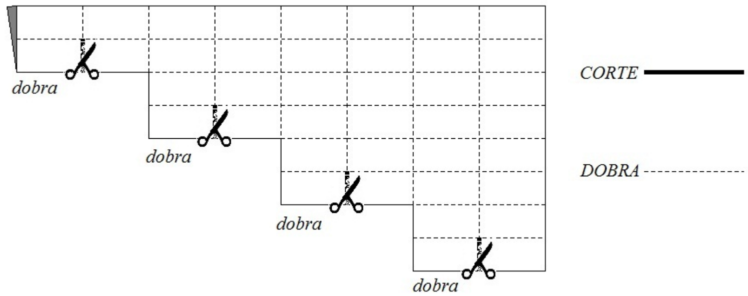
Siga as instruções a seguir e veja como é fácil produzir um cartão fractal:

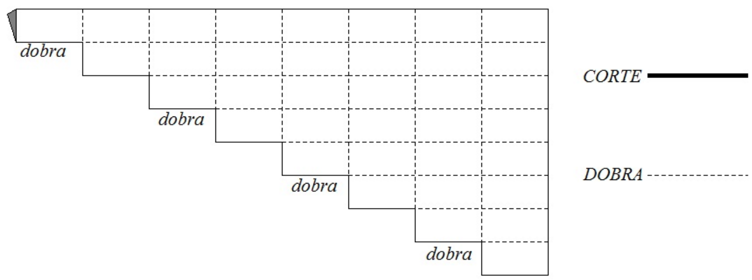
- Dobre ao meio uma folha A4 no sentido do comprimento;
- Com a folha ainda dobrada, produza outra dobra no mesmo sentido;
- Repita o procedimento anterior mais duas vezes;
- Agora, abra a folha até que ela fique como estava após a execução do 1º item e, em seguida, dobre no outro sentido;
- Continue dobrando nesse outro sentido até totalizar três dobras;
- Em seguida desdobre a folha até que ela fique dobrada apenas um vez. Repare que a folha está marcada com vários retângulos congruentes.
- Agora, corte a folha conforme sugerem as figuras abaixo:





[6]Endereço de Fractais para consulta impressa do material: "http://www.youtube.com/watch?v=6Q1z1pvzwB8"





Caso esteja encontrando dificuldade para realizar a construção, tente assistir ao vídeo do passo-a-passo, clicando "AQUI"[7].

Uma vez que o cartão esteja devidamente recortado, pinte as partes da folha A4 que se projetam para fora, colorindo de mesma cor as figuras que forem congruentes, conforme mostra a figura acima.

[7]Endereço de AQUI para o material impresso:
"http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/debaser/singlefile.php?id=17555"

A figura colorida representa o fractal. Sobre ele desenvolveremos nosso estudo. Observe que a formação está apoiada sobre uma folha A4 que foi dividida em partes iguais pelas dobras horizontais e verticais. Repare ainda as duas indicações de ângulo reto que aparecem na foto acima; em preto, no topo, e em branco um pouco mais abaixo. Essa referência tornará coerente os dados da situação exibida a seguir.

Considere que um terreno será planificado para a construção de um prédio. Neste terreno há uma elevação. O dono da construtora resolveu vender a terra desta elevação para uma outra empresa, já que julgou imprópria para seu uso. O transporte da terra vendida será feito por caminhões com caçamba $10.50m \times 2.40m \times 5.80m$. Precisa-se saber a quantidade de caminhões necessários para a retirada de toda a terra da elevação. Para isso, o responsável por este cálculo aproveitou fotos que foram tiradas de cima da elevação. Através destas fotos, foi avaliado que ao traçar dois segmentos de reta que se intersectam no cume da elevação e paralelos ao plano do chão, a elevação fica dividida em quatro regiões muito similares, que consideraremos iguais. Foi percebido também que cada região em que foi fracionada a elevação, conforme descrição anterior, é aproximadamente igual à formação que se projeta no cartão fractal que fizemos anteriormente. Com base em todas essas informações, quantos caminhões serão necessários para retirar toda a terra dessa elevação se, tal qual o cartão fractal, uma das regiões dessa elevação está apoiada num retângulo de 40m por 30m?

Para responder a essa questão, vamos analisar com mais atenção o cartão fractal, percebendo que, após cada etapa de corte, projetam-se paralelepípedos cujos volumes, a partir da 2ª etapa, são uma fração do paralelepípedo maior da etapa anterior. Vamos então analisar o volume dos paralelepípedos que são projetados após cada etapa de corte e preencher a tabela abaixo:

Etapa de Corte	Quantidade de Novos Paralelepípedos	Volume de UM dos Novos Paralelepípedos	Soma dos Volumes dos Novos Paralelepípedos
1	____________	____V____	____________
2	____________	____________	____________
3	____________	____________	____________

A) Os volumes de um paralelepípedo, após cada etapa de corte, estão em progressão geométrica? Qual a razão?

Resposta: ____.

B) E as somas dos volumes dos paralelepípedos após cada etapa de corte, também estão em progressão geométrica? Qual a razão?

Resposta: ____.

C) Se esse padrão de formação continuar infinitamente, qual será o volume da parte projetada em função de 'V'?

Resposta: ____.

D) Qual a relação que existe entre o tamanho da folha A4 (210mm$\times$297mm) e o volume 'V'? E em relação à soma infinita dos volumes, qual a relação?

Resposta: ____.

E) Qual o volume da caçamba de um caminhão dos que serão utilizados?

Resposta: ____.

F) Se a elevação tem o mesmo padrão infinito que analisamos no cartão fractal, quantas viagens desses caminhões serão necessárias para transportar toda a terra da elevação?

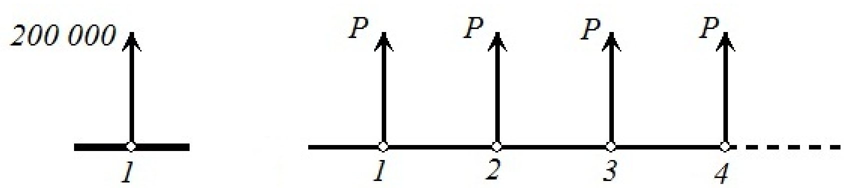
Resposta: ____.

12.2 Economia

O atual sistema econômico mundial está baseado, quase que exclusivamente, em juros compostos, ou seja, juros sobre juros. Assim, se o valor de R$ 100,00 é aplicado a uma rentabilidade de 21% por período de tempos iguais, ao fim do 1º período teremos $100 + 100 \times 21\%$, ou seja, $100 \times (1 + 0,21) =$ R$ $121,00$. Ao final do 2º período de tempo, teremos $121 \times (1 + 0,21)$, que é o mesmo que $100 \times (1 + 0,21)^2$. Com isso, já começamos a perceber que os juros compostos permitem tratar a movimentação de finanças entre períodos de tempo como é feito com os termos de uma Progressão Geométrica.

Para ilustrar esse fato, vamos analisar a situação de uma pessoa que acaba de comprar um imóvel a R$ 200 000,00 e vai alugá-lo. Qual deve ser o valor do aluguel sem as demais taxas?

Atualmente, seria razoável considerar que o dinheiro rende 1% ao mês. Além disso, a regra financeira aplicada a esse tipo de situação é considerar o valor do imóvel dividido em uma quantidade perpétua (infinita) de prestações mensais e iguais. Todas essas infinitas prestações, calculadas na data do pagamento do 1º aluguel e somadas, devem resultar no valor do imóvel. Vamos chamar essa prestação de ‘P’. O diagrama abaixo exibe a situação.



A) Qual expressão fornece o valor da 1ª prestação na data do pagamento do 1º aluguel?

Resposta: ______________________________.

B) Qual expressão fornece o valor da 2ª prestação na data do pagamento do 1º aluguel?

Resposta: ______________________________.

C) Qual expressão fornece o valor da 3ª prestação na data do pagamento do 1º aluguel?

Resposta: ______________________________.

D) Qual é a razão dessa progressão geométrica?

Resposta: ______________________________.

E) Obtenha a expressão do valor da soma dessas infinitas prestações na data do pagamento do 1º aluguel?

Resposta: ______________________________.

F) Sabendo que a expressão do item 'E', no problema que estamos analisando, vale 200 000, determine o valor de 'P' do aluguel desse imóvel.

Resposta: ____.

____.

____.

13 PARA O LAR

13.1 AULA 1

Nas sequências a seguir há um número que detém em suas proximidades uma aglomeração de termos das sequências, ou seja, um valor para o qual a sequência converge. Identifique esse valor para cada caso:

a) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ldots$
Resposta: ________________________________.

b) $51;\ 0,51;\ 0,005\,1\ 0,000\,051\ \ldots$
Resposta: ________________________________.

c) $(3+\frac{1}{2});\ (3+\frac{1}{4});\ (3+\frac{1}{8});\ (3+\frac{1}{16});\ldots$
Resposta: ________________________________.

d) $(6-2);\ (6-1);\ \left(6-\frac{1}{2}\right);\ \left(6-\frac{1}{4}\right);\ldots$
Resposta: ________________________________.

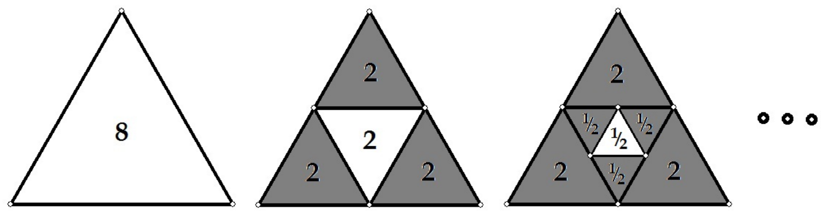
e) $(11+5);\ (11+1);\ \left(11+\frac{1}{5}\right);\ \left(11+\frac{1}{25}\right);\ldots$
Resposta: ________________________________.

f) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ldots$
Resposta: ________________________________.

g) $1-\frac{1}{10},\ 1-\frac{1}{100},\ 1-\frac{1}{1000},\ 1-\frac{1}{10000},\ldots$
Resposta: ________________________________.

13.2 AULA 2

A cada etapa exibida a seguir, o triângulo equilátero que sobra (em branco) é dividido em quatro partes iguais das quais três são consideradas:



Agora responda:

a) Que sequência representam as áreas em branco?
Resposta: ______________________________.

b) Essas áreas em branco parecem convergir para algum valor? Qual?
Resposta: ______________________________.

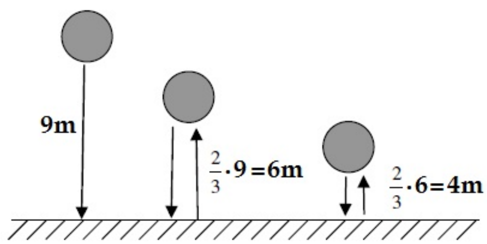
c) Que sequência representam as áreas em cinza?
Resposta: ______________________________.

d) Essas áreas em cinza parecem convergir para algum valor? Qual?
Resposta: ______________________________.

13.3 AULA 4

Para cada situação apresentada a seguir, calcule a soma infinita dos termos da sequência, se essa soma existir:

A) Uma bola é solta a uma distância de 9m do chão. Supondo que a cada queda suba $\frac{2}{3}$ da altura anterior, determine a distância vertical total percorrida pela bola até parar.



Resposta: ____.

B) (UFF 2010) Com o objetivo de criticar os processos infinitos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.

Fonte: http://culturaclassica.blogspot.com/2008/05/aquiles-ainda-corre-os-paradoxos-de.html

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um decímetro; Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

É correto afirmar que:

(A) $d = +\infty$

(B) $d = 11,11$

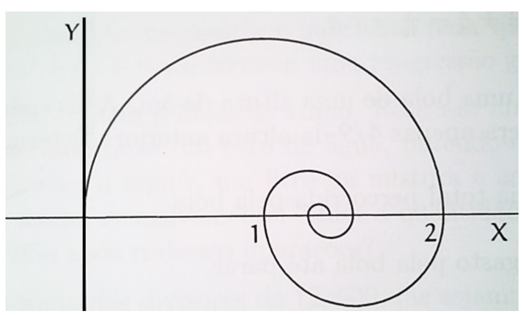
(C) $d = \frac{91}{2}$

(D) $d = 12$

(E) $d = \frac{100}{9}$

Resposta: ____.

C) (Adaptado de [10], P.34) Na figura que se segue, temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior. Determine o comprimento da espiral.



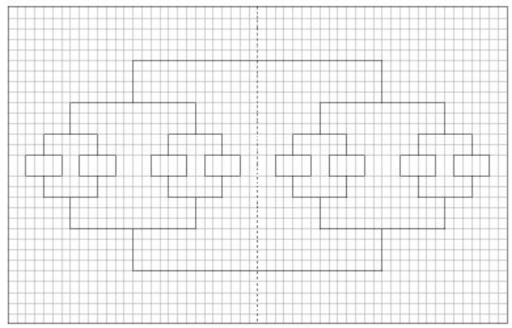
D) Escreva as frações geratrizes de 0,033 333 ... e 8,998 898 898 ...

Resposta: 0,033 333 ... = __________ e 8,998 898 898 ... = __________.

13.4 AULA 5

13.4.1 Outra atividade com fractal

Aqui, sugerimos que o aluno experimente a construção do cartão fractal abaixo:



CARTÃO DE FRACTAL

As linhas verticais indicam dobras e as horizontais cortes. Pode-se ver os passos da construção nos links "Vídeo"[8]. **Calcular o volume da estrutura que se ergue no cartão.**

13.4.2 Outra atividade sobre economia

Nas atividades que seguem, o aluno deverá usar a mesma regra que foi exposta na atividade sobre economia para calcular o que se pede.

a) Se o dinheiro rende 1% ao mês, quanto uma pessoa paga de aluguel por um imóvel que custa R$ 350 000,00?
Resposta: ____.

b) Se uma pessoa paga R$ 800,00 de aluguel e o dinheiro rende 1%, qual o valor do imóvel para compra?
Resposta: ____.

c) Se o dinheiro rende 2% e uma pessoa quer juntar dinheiro para quando se aposentar poder retirar todo mês a quantia de R$ 3000,00 desse valor poupado, perpetuamente, quanto ela terá que ter poupado ao se aposentar?
Resposta: ____.

[8]Endereço de Vídeo para o material impresso:
"http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/debaser/singlefile.php?id=17553"

Bibliografia

[1] LIMA, E. L. *"Meu Professor de Matemática e outras histórias"*, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[2] ÁVILA, G. *"O Ensino de Cálculo no 2º Grau"*, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1991.

[3] ÁVILA, G. *"As Séries Infinitas"*, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1996.

[4] ÁVILA, G. *"Ainda as Séries Infinitas"*, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1996.

[5] CARNEIRO, J. P. WAGNER, E. *"Vale a Pena Estudar Cálculo?"*, Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, 2004.

[6] ÁVILA, G. *"Limites e Derivadas no Ensino Médio?"*, Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo, 2006.

[7] VIANNA, B. *"Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre o Infinito"*. PROFMAT/SBM, 2013.

[8] VIANA, M. *"Noções de Cáclulo"*, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[9] ALMEIDA, T. B. de; MARTINELLI, R. O. M.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. da. *"Fractais no Ensino Fundamental: Explorando Essa Nova Geometria"*. Disponível em: "Fractais no Ensino Médio", PUCRS.

[10] WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; ZANI, S. *"Progressões e Matemática Financeira"*. Coleção Professor de Metemática, SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[11] STEWART, J. *"Cálculo, volume I"*, 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[12] HEFEZ, A. *"Elementos de Aritmética"*, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2011.

[13] NELSEN, R. B. *"Proofs Without Words - Exercicies in Visual Thinking"*, Matematical Association Of America, Washington, 1993.

[14] BOYER, C. *"The History of the Calculus and Its Conceptual Development"* Dover Publications, 1959.

[15] GRATTAN, I. "From the Calculus to Set Theory, 1630-1910: An Introductory History". Princeton University Press, Princeton, 1980.

[16] EVES, H. *"Introdução à História da Matemática"*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

[17] LIMA, E. L. *“A Matemática no ensino médio - Volume 1”.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2004

[18] GIRALDO, V. *“Recursos Computacionais”.* , Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[19] CARNEIRO, M. A. *“LDB fácil: leitura crítico-compreensiva artigo a artigo”* Vozes, 1998.

[20] EDWARDS Jr., C.H ; PENNEY, D. *“Cálculo com Geometria Analítica”.* LTC, 1996.

[21] GIRALDO, V. *Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada.* Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: COPPE-UFRJ, 2004.

[22] REZENDE, W.M. *“Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite”.* Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.

[23] PEREIRA, V. M. C. *“Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade”* Dissertação de Mestrado. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

[24] FASSARELA, L. *“A Série Harmônica”.* Revista do Professor de Matemática Especial - PIC 2007, p. 95-99. São Paulo, 2007. Disponível em: http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296665.o