Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Geometria Analítica: estudo da reta e da circunferência, uma abordagem vetorial como proposta de ensino para alunos do Ensino Médio

Sidival Silva

Goiânia

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Sidival Silva					
E-mail:	sidimbola@gmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal					
Agência de fomento:	Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior				Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	**00.394.676/0001-07**	
Título:	Geometria Analítica: estudo da reta e da circunferência, uma abordagem vetorial como proposta de ensino para alunos do ensino médio					
Palavras-chave:	Geometria, plano, reta, vetor, equação da reta e equação da circunferência.					
Título em outra língua:	Analitcs Geometry: study of the straight and of circumference, vectorial approach as a teaching proposal to High school students.					
Palavras-chave em outra língua:	Geometry, plan, straight, vector, straught's equation and cincumference equation.					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa:	06/08/2015					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional					
Orientador (a):	Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias					
E-mail:						
Co-orientador(a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 06 / 08 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Sidival Silva

Geometria Analítica: estudo da reta e da circunferência, uma abordagem vetorial como proposta de ensino para alunos do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientadora: Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Silva, Sidival
Geometria Analítica: estudo da reta e da circunferência, uma abordagem vetorial como proposta de ensino para alunos do Ensino Médio [manuscrito] / Sidival Silva. - 2015.
vi, 48 f.: il.

Orientador: Profa. Dra Ivonildes Ribeiro Martins Dias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Goiânia, 2015.
Bibliografia.
Inclui siglas, símbolos, lista de figuras.

1. Geometria. 2. palano. 3. reta. 4. vetor . 5. equação da reta. I. Dias, Dra Ivonildes Ribeiro Martins , orient. II. Título.

Sidival Silva

Geometria Analítica: Estudo da Reta e da Circunferência, uma Abordagem Vetorial como Prosposta de Ensino para Alunos do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de agosto de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof^{a}. Dr^{a}. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Silvia Cristina Belo e Silva

Prof^{a}. Dr^{a}. Sílvia Cristina Belo e Silva
Membro Externo PUC/GO

Lidiane S. M. Lima

Prof^{a}. Dr^{a}. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e da orientadora.

Sidival Silva graduou-se em Ciências com habilitação plena em Matemática pela Universidade Presidente Antônio Carlos (UNIPAC) 2003, obtendo o título de licenciado em Matemática.

Dedico este trabalho a toda minha família e a todas as pessoas dedicadas, direta ou indiretamente, a melhorar a educação básica.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e, também aos meus pais pelo exemplo de luta e perseverança.

À minha esposa Roxane Kelly e aos meus filhos Gustavo Eduardo e Othávio Luiz pela compreensão nas horas difíceis durante todo período do curso, muitas vezes abdicando do lazer familiar.

Aos Professores envolvidos no PROFMAT-UFG e ao IMPA/SBM .

Aos amigos de turma, em especial à professora Walquíria Lemes e aos professores Luis Henrique e Astrogildo Cruz pelas trocas de experiências, sugestões e amizade.

À minha orientadora, Professora Doutora Ivonildes Martins, por todo apoio durante a construção deste trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro, com bolsa de estudos que muito ajudou na compra de material e viagens (deslocamento Brasília-Goiânia).

Resumo

De acordo com [1] o estudo de vetores, retas e planos é bastante útil aos estudantes do último ano do ensino secundário (hoje Ensino Médio), principalmente àqueles que desejam cursar engenharia, física, matemática ou química.

Esse trabalho tem como objetivo o estudo da reta e da circunferência sob uma abordagem vetorial. Inicialmente são introduzidos os conceitos vetoriais necessários à compreensão do assunto, sob forma de definições e proposições, para que o leitor (aluno do Ensino Médio e ou professor) se aproprie das ideias de vetores no plano e no espaço e, sobretudo, entenda as principais propriedades de vetores, com as quais serão definidas as equações da reta e da circunferência.

Introduz-se a definição de equipolência dada por Giusto Bellavitis, veja [2] (que é basicamente a definição de vetor que se conhece nos dias atuais) e também as definições de dependência e independência lineares, ângulo entre dois vetores, vetores opostos e produto interno.

É também observado que todas as definições e propriedades mencionadas no plano são válidas no espaço $\mathbb{R}^3$. Por fim é definida a equação da reta (usando a ideia de produto por escalar) e, a equação da circunferência (usando a definição de norma).

Palavras-chave

Geometria, plano, reta, vetor, equação da reta e equação da circunferência.

Abstract

According to studying of vectors [1], straight and flats are considerable useful to the students of the last year in high school, mainly those who wish to attend Engineering, Physics, Mathematics or Chemistry.

This present paper has as its main focus the study of the straight and of the circumference under a vector approach. Initially the necessary vectors concepts are introduced so the subject can be comprehended under definitions and propositions, so the reader (high school's student) take ownership of the vector's ideas in plan and space and, above all, understand all the main vectors' properties, with which will be defined the equations of the straight and of the circumference.

It introduces the definition of the "equipolency" given by Giusto Bellavitis see it at [2] (that is basically the vector's definition that is known nowadays) and also the definition of linear dependence and independence, angle between two vectors, opposite vectors and internal product.

It is also observed that all definitions and mentioned properties in the plan are valid in space $\mathbb{R}^3$. Finally it is defined the straight's equation (using the idea of product by scale) and, the circumference equation (using the rule definition).

Keywords

Geometry, plan, straight, vector, straught's equation and cincumference equation.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

> "Uma inteligência modesta aliada a muito trabalho, frequentemente, pode mais que uma inteligência brilhante e vadia." Veja [7]

Este trabalho tem por objetivo mostrar para alunos de Ensino Médio, interessados nos cursos de Matemática e áreas afins, eventualmente, também a professores que cursaram Ciências com habilitação plena em matemática, uma abordagem analítica vetorial para o estudo da reta e, da circunferência; visando motivá-los a se interessarem pelo assunto e prosseguirem no estudo desse ramo da matemática que é de bastante importância em estudos nas áreas citadas.

Na seção I das Disposições Gerais da Lei 9.344/96, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), o Art.22 afirma que a educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (pág.09).

Na seção IV, Art.35 (páginas 13 e 14) diz que o ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades, entre outras:

I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

IV. a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Motivado pelo fato de que a própria LDB assegura que o educando deve ser preparado para estudos posteriores e também por ter encontrado uma considerável dificuldade em concluir a disciplina MA23 (Geometria Analítica-PROFMAT/2013), por não ter estudado nada sobre o assunto (anteriormente), e ainda, por observar que os alunos do Centro de Ensino Médio em que trabalho pouco ou nada sabem sobre vetores, resolvi escrever sobre este assunto, abordando equações de retas e equações de circunferências, algo relativamente familiar a alunos que cursam o Ensino Médio (e também a professores graduados em Ciências com habilitação plena em Matemática) o que ao nosso entendimento facilita a compreensão da abordagem vetorial em questão.

Capítulo 1

Noções Primitivas

Neste capítulo serão apresentadas as noções primitivas e definições do ponto de vista mais geométrico necessárias ao bom entendimento do assunto a ser abordado.

As noções (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de definição. As noções primitivas são adotados sem definição. Neste trabalho, adotar-se-ão as definições de ponto, reta e plano , bem como os respectivos postulados como noções primitivas, veja [1].

Os pontos serão representados por letras latinas maiúsculas: A, B, C, ..., as retas serão representadas por letras latinas minúsculas: a, b, c, ... , um plano será representado por letra grega minúscula: α, β, γ,... e um vetor será representado por: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Assumi-se que as demais notações a serem utilizadas são conhecidas pelo leitor.

1.1 Vetores no Plano

Definição 1.1.1. *Um vetor geométrico, ou simplesmente um vetor, é um segmento orientado, isto é, dentre suas duas extremidades uma é a extremidade inicial e a outra é a extremidade final, ver Figura 1.1.*

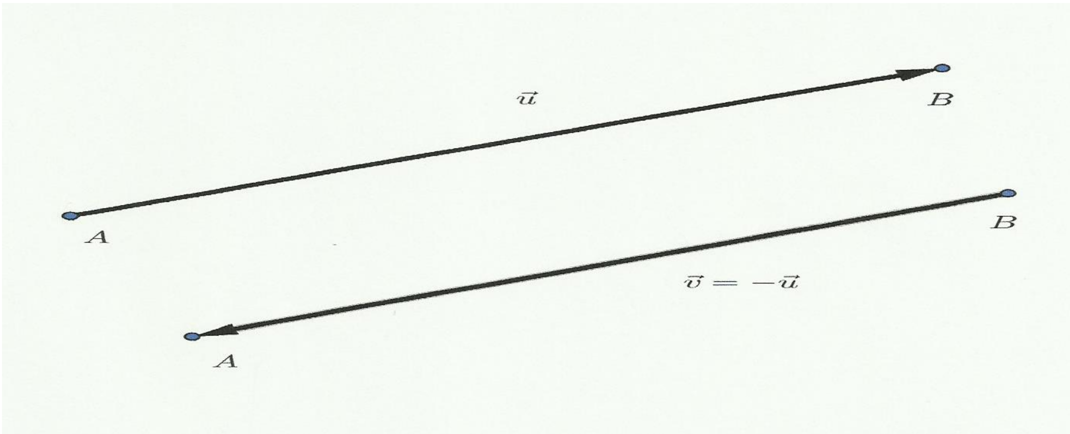

Figura 1.1: vetores opostos

Se for considerado A como a extremidade inicial e B como a extremidade final, então, será obtido o vetor que inicia em A e termina em B, representado por $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Caso a extremidade inicial seja B e a extremidade final seja A, o vetor obtido é representado por $\overrightarrow{BA} = \vec{v} = -\vec{u}$. Note que daqui se pode concluir que o sentido de $\overrightarrow{AB}$ é oposto ao sentido de $\overrightarrow{BA}$, mas adiante o leitor concluirá que esses vetores têm mesma direção.

1.2 Direção de um vetor $\vec{v}$

Definição 1.2.1. *Dado um vetor $\vec{v}$, não nulo, define-se a direção de $\vec{v}$ como sendo o conjunto das retas paralelas que contêm os representantes de $\vec{v}$.*

Logo, dois vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ têm mesma direção, veja Figura 1.2, quando escolhidos representantes $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, tem-se $AB//CD$.

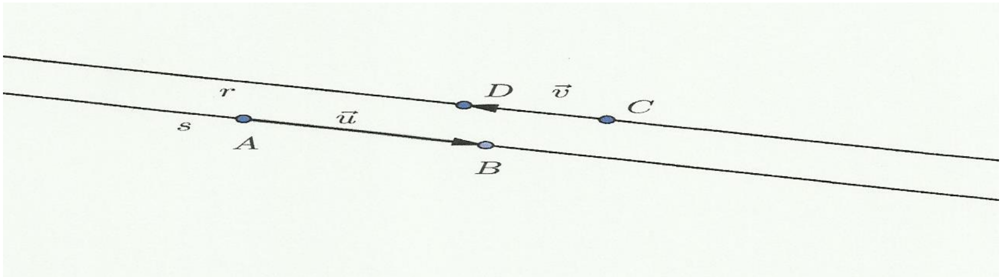

Figura 1.2: r e s são retas paralelas

1.3 Igualdade entre vetores

Definição 1.3.1. *Sejam os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são ditos iguais se o quadrilátero $ABDC$ (com os vértices nessa ordem) for um paralelogramo.*

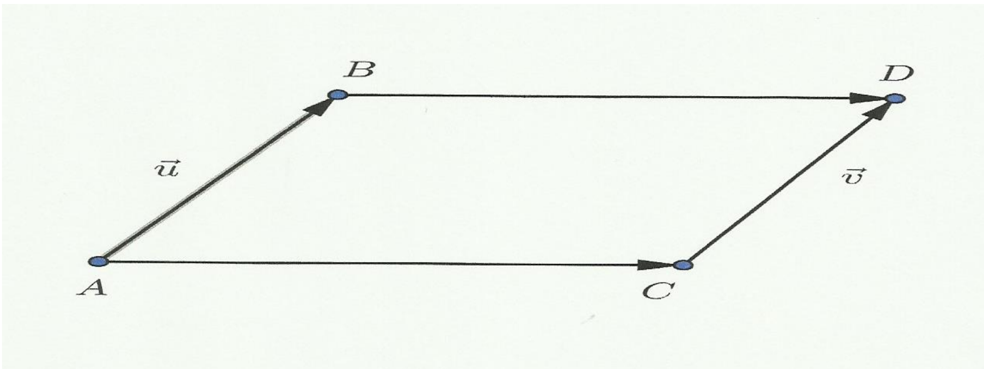

Figura 1.3: paralelogramo

E ainda, diz-se que AB e CD são representantes do mesmo vetor e pode-se escrever $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

Da geometria euclidiana (definição de quadrilátero), veja [1], os segmentos AB e CD são congruentes. No assunto sobre equipolência de segmentos, o leitor verá que um mesmo vetor tem infinitos representantes no plano.

1.4 Módulo de um vetor

Definição 1.4.1. *O módulo de um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ é o comprimento do segmento AB, denotado por $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{u}|$.*

Do que foi visto sobre igualdade de vetores não é difícil ver que o módulo de um vetor é igual ao comprimento de qualquer um de seus representantes. Além disso, considere um ponto qualquer do plano como um vetor, então, esse vetor terá módulo NULO, pois um ponto não tem comprimento e esse vetor terá módulo idêntico ao representado por $|\overrightarrow{AA}| = 0$, onde A representa um ponto qualquer do plano. Não é difícil ver que a distância de um ponto a ele mesmo é nula.

Observação 1.4.2. *O vetor que tem extremidade final igual a extremidade inicial é denominado vetor nulo.*

1.5 Adição entre vetores

Considere vetores não nulos $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ representados por $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, considere ainda o vetor $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$, tais que a extremidade final de $\vec{u}$ coincida com a extremidade inicial de $\vec{v}$, Figura 1.4.

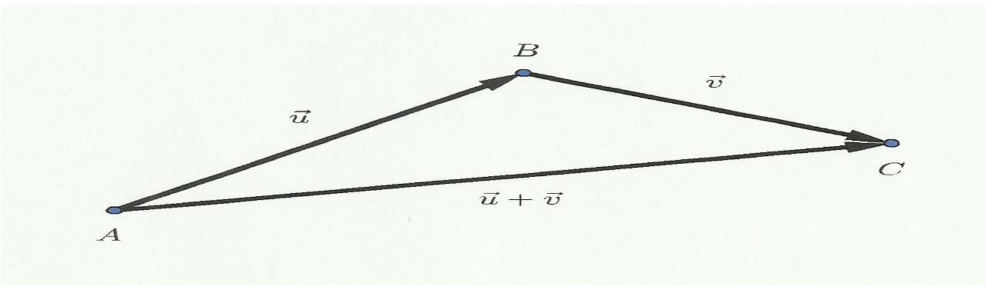

Figura 1.4: adição de vetores

Definição 1.5.1. *A soma de* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *com* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ *é definida como* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{AC}$. *E ainda, a soma de um vetor não nulo* $\vec{u}$ *com o vetor nulo* $\overrightarrow{O}$ *é definida por* $\vec{u} + \overrightarrow{O} = \vec{u}$.

Observação 1.5.2. *Para qualquer que seja o vetor* $\vec{v}$ *a soma deste com o seu oposto é nula, ou seja,* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \overrightarrow{O}$.

1.6 Subtração entre vetores

Definição 1.6.1. *Inicialmente escreva convenientemente os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, não nulos, de modo que* $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ *e* $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$ *(Figura 1.5). Seja o vetor* $\overrightarrow{BD} = -\vec{v}$ *o oposto de* $\vec{v}$*,* *então o vetor* $\overrightarrow{AD}$ *representa* $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$.

Observação 1.6.2. *Note que o vetor* $\overrightarrow{AC}$ *é a soma de* $\vec{u} + \vec{v}$ *e pelo mesmo raciocínio o leitor não terá dificuldade em ver que o vetor* $\overrightarrow{AD}$ *representa* $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$.

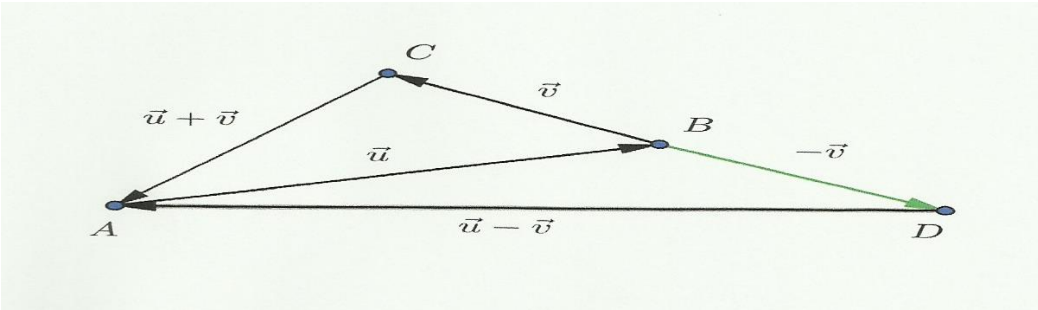

Figura 1.5: subtração de vetores

1.7 Multiplicação de vetor por escalar

A operação de multiplicação de vetor por escalar (um número real qualquer). Será útil nos assuntos que veremos a seguir.

Definição 1.7.1. *Dado um escalar* k *e um vetor* $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, *define-se o vetor* $k\vec{v}$ *das seguintes maneiras: se* $k = 0$ *ou* $\vec{v} = \overrightarrow{O}$, *temos que* $k\vec{v} = \overrightarrow{O}$, *por outro lado, se* $k \neq 0$ *e* $\vec{v} \neq \overrightarrow{O}$, *temos que* $k\vec{v}$ *é o único vetor que satisfaz as seguintes condições:*

(a) $k\vec{v}$ *tem a mesma direção de* $\vec{v}$;

(b) $|k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$;

(c) $k\vec{v}$ *tem o mesmo sentido de* $\vec{v}$ *se* $k > 0$, *e se* $k < 0$, *então* $k\vec{v}$ *tem sentido contrário de* $\vec{v}$.

É comum dizer que $k\vec{v}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$. Se $k = -1$, o vetor $-\vec{v}$ é denominado vetor oposto do vetor $\vec{v}$ (veja Figura 1.1).

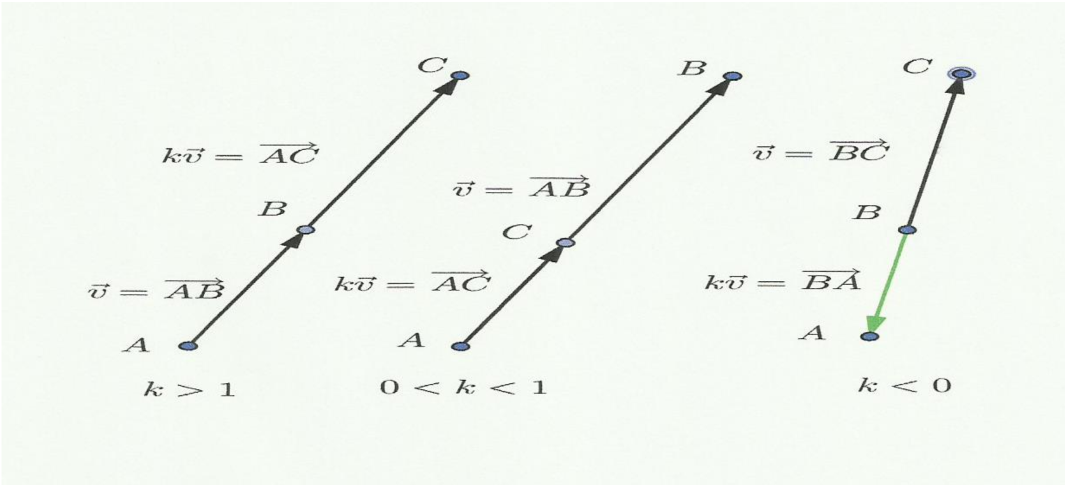

Figura 1.6: produto de vetor por escalar

Proposição 1.7.2. *Dados os escalares k, k_1 e k_2 e os vetores $\vec{v}$, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, temos que a operação de multiplicação por escalar goza das seguintes propriedades (cuja demonstrações serão omitidas):*

(a) $(k_1 k_2)\vec{v} = k_1(k_2\vec{v})$;

(b) $(k_1 + k_2)\vec{v} = (k_1\vec{v}) + (k_2\vec{v})$;

(c) $k(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (k\vec{v_1}) + (k\vec{v_2})$.

1.8 Uma abordagem analítica

Após essa breve apresentação vetorial geométrica será feita uma abordagem analítica, doravante o principal foco deste trabalho. Antes porém, serão apresentadas algumas definições que certamente serão de grande utilidade para a compreensão do assunto.

Inicialmente defina-se um sistema de eixos ortogonais OX (eixo horizontal) e OY (eixo vertical) sendo O a interseção desses, também chamado origem do sistema OXY gerado pelos dois eixos citados, veja Figura 1.7.

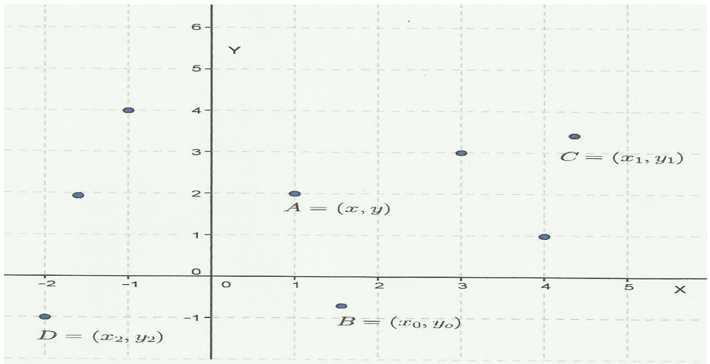

Figura 1.7: plano OXY.

O sistema acima (onde são marcados os pontos representados em coordenadas cartesianas) é bastante conhecido por alunos do Ensino Médio como plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$), e, sabe-se que nesse sistema é possível marcar infinitos pontos, digamos o ponto $A = (x, y)$, $B = (x_0, y_0)$, $C = (x_1, y_1)$, etc. Isso significa que a cada par (x, y) é marcado um ponto no plano cartesiano. Não é difícil ver que atribuindo diferentes valores para x ou para y aparecerão diferentes pontos no plano.

De posse dessas informações é possível definir vetor em termos de coordenadas cartesianas.

Definição 1.8.1. *Define-se em coordenadas cartesianas o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ como a diferença entre as coordenadas do pontos $B = (x_1, y_1)$ e $A = (x, y)$, isto é, $\vec{v} = (x_1 - x, y_1 - y)$.*

Note que o vetor $\vec{v}$ está orientado no sentido de A para B.

1.9 Segmentos equipolentes

> "Os métodos algébricos da Geometria Cartesiana de Fermat e Descartes influenciaram enormemente a Matemática ao longo de quase 200 anos até que foram necessários métodos mais diretos e livres de coordenadas na geometria.
>
> Em 1832 Giusto Bellavitis publica um trabalho onde é apresentado o conceito de equipolência entre segmentos que é, basicamente, a noção de vetor que conhecemos e que foi formalizada em 1844 por Hermann Grasmann no seu Die Lieale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik (Teoria de Extensão Linear, um novo ramo da Matemática)". Veja [3]

Definição 1.9.1. *Seja AB um segmento orientado com origem em A e extremidade final em B, isto é, no segmento AB está estabelecido um sentido de percurso de A para B, seja também CD um segmento orientado no sentido de C para D (Figura 1.8). Tais segmentos orientados são ditos equipolentes, e são escritos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) *têm o mesmo comprimento;*

(b) *são paralelos ou colineares;*

(c) *têm o mesmo sentido.*

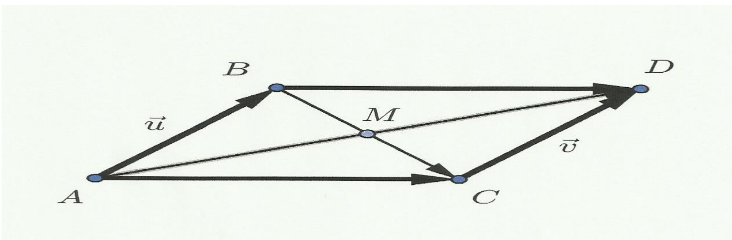

Figura 1.8: paralelogramo ABDC.

A proposição a seguir fornece um critério para estabelecer se dois segmentos são equipolentes.

Proposição 1.9.2. *Dados os segmentos AB e CD, eles são equipolentes se, somente se, AD e BC têm o mesmo ponto médio M. Em símbolos*

$AB \equiv CD \Longleftrightarrow M$ *de* AD *é também* M *de* BC.

Demonstração

Usando o paralelogramo da Figura 1.8, basta notar que M é a interseção das diagonais BC e AD, portanto, $AB \equiv CD$, isto é, AB e CD são equipolentes. ■

A relação de equipolência pode ser caracterizada em termo de coordenadas. Considere o sistema OXY, escolha convenientemente os pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ *e* $D = (d_1, d_2)$ *deste sistema.*

Proposição 1.9.3. *O segmento AB é congruente ao segmento BC se, e somente se, $(b_1 - a_1) = (d_1 - c_1)$ e $(b_2 - a_2) = (d_2 - c_2)$, ou seja, $AB \equiv BC \iff (b_1 - a_1) = (d_1 - c_1)$ e $(b_2 - a_2) = (d_2 - c_2)$.*

Demonstração

Pela Proposição 1.9.2 tem-se que

$AB \equiv BC \iff M$ de AB é também M de BC.

Sejam M_1 *e* M_2 pontos médios de AD e BC respectivamente, escreva-se

$M_1 = (\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2})$ e $M_2 = (\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2})$. Então,

$$\begin{aligned} AB \equiv BC &\iff \tfrac{a_1+d_1}{2} = \tfrac{b_1+c_1}{2}, \text{ e } \tfrac{a_2+d_2}{2} = \tfrac{b_2+c_2}{2} \\ &\iff a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \text{ e } a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\ &\iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2. \end{aligned}$$ ■

Exemplo 1.9.4. *Dadas as seguintes coordenadas no plano cartesiano $A = (0, 1)$, $B = (4, 1)$ $C = (2, 5)$, determinar o ponto $D = (x, y)$ de modo que $AB \equiv CD$.*

Solução

Usando a Preposição 1.9.3 obtêm-se

$$\begin{aligned} 4 - 0 = x - 2 &\iff x = 6 \\ 1 - 1 = y - 5 &\iff y = 5 \\ &\iff D = (6, 5) \end{aligned}$$

Ainda sobre relação de equipolência é permitido estabelecer a seguinte definição.

Definição 1.9.5. *Sejam A e B pontos do plano. Seja o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $\vec{v}$ é o conjunto de todos os seguimentos orientados equipolentes a AB, isto é, cada seguimento equipolente a AB é um representante do vetor $\vec{v}$.*

O lema a seguir (cuja demonstração será omitida) é de fundamental importância para se entender a relação das operações definidas para vetores em um sistema cartesiano predefinido.

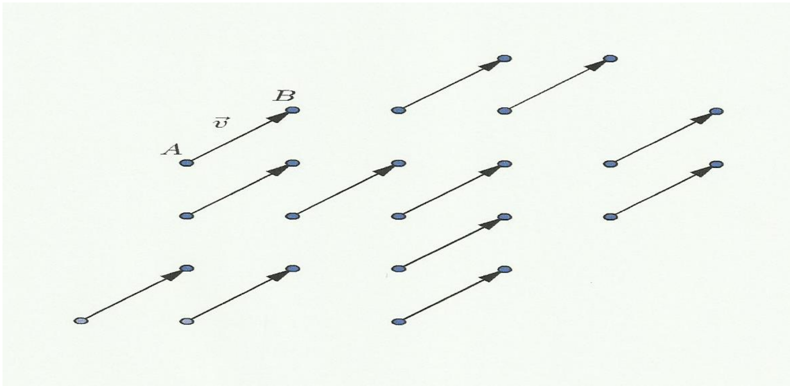

Figura 1.9: representantes do vetor $\vec{v}$.

Lema 1.9.6. *Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ e $D = (x_D, y_D)$ são pontos de um sistema cartesiano dado, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são congruentes se, e somente se, $x_B - x_A = x_D - x_C$ e $y_B - y_A = y_D - y_C$.*

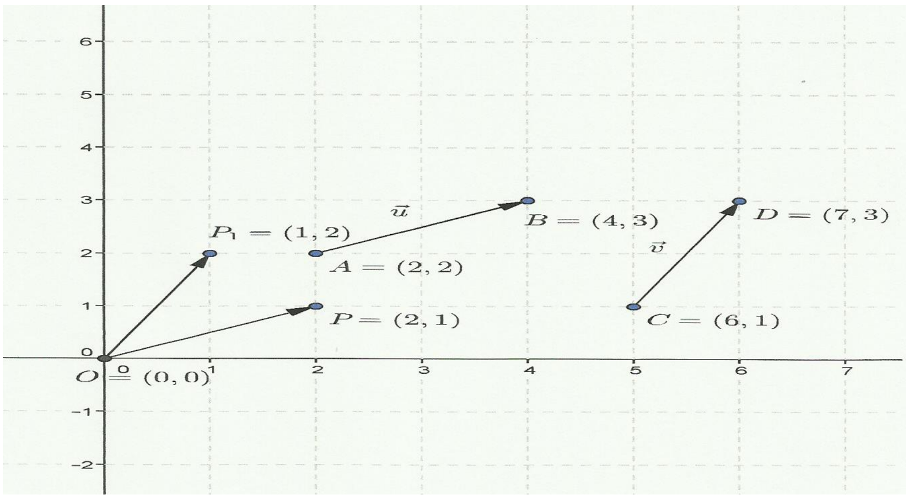

Figura 1.10: representantes de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ na origem.

Esse lema garante que, fixando um sistema de eixos OXY, todo vetor $\vec{v}$ desse sistema admite um único representante da forma $\overrightarrow{OP}$ (Figura 1.10). De fato, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, com $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Por outro lado, se $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$, para vetores $\vec{v_1} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v_2} = (x_2, y_2)$, então o lema garante também que $(x_1 - 0, y_1 - 0) = (x_2 - 0, y_2 - 0)$, isto é, $\vec{v_1} = \vec{v_2}$, isso mostra que fixando um sistema cartesiano, todo vetor passa a ter um representante $\vec{v} = (x, y)$ denominado representante canônico.

1.10 Operação de adição de vetores em coordenadas cartesianas

A operação de adição de vetores que a cada par de vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, associa um novo vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, é definida do seguinte modo:

Definição 1.10.1. *Seja* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *e seja* C *o único ponto tal que* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$*. O vetor soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$*, é o vetor* $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$*, Figura 1.11.*

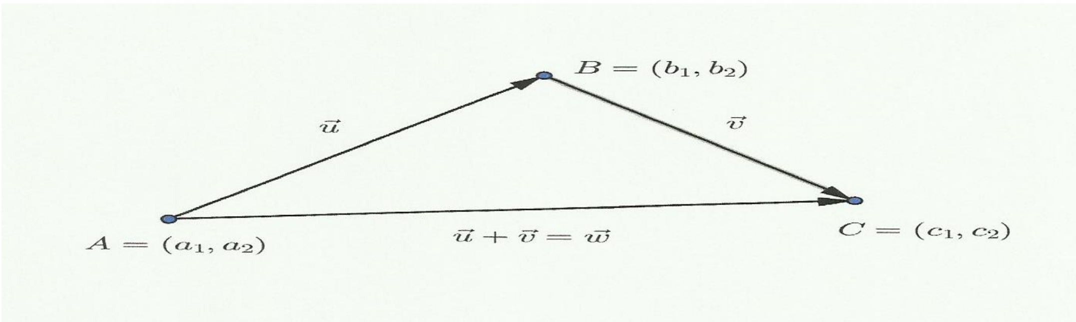

Figura 1.11: soma de vetores em coordenadas.

Na prática, sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, tem-se $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$, e $\overrightarrow{AC} = \vec{w} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$. Note que

$$
\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (b_1 - a_1 + c_1 - b_1, b_2 - a_2 + c_2 - b_2)\\
&= (c_1 - a_1, c_2 - a_2)\\
&= \overrightarrow{AC}\\
&= \vec{w}
\end{aligned}
$$

Logo, pode-se concluir, sem perda de generalidade, que a operação de soma entre dois vetores se dá somando abscissa com abscissa e ordenada com ordenada, dos respectivos vetores.

Exemplo 1.10.2. *Dados os pontos* $A = (2, 1)$*,* $B = (4, 3)$*,* $C = (5, 6)$ *e os vetores* $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$*,* $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$*, obtenha o vetor* $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$*.*

Solução

Inicialmente obtenha o vetor $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ *do seguinte modo,*

$\vec{u} = (4-2, 3-1) = (2,2)$

$\vec{v} = (5-4, 6-3) = (1,3)$

logo, $\vec{u} + \vec{v} = (2+1, 2+3) = (3,5)$

Observe que $\overrightarrow{AC} = (5-2, 6-1) = (3,5)$

1.11 Multiplicação de vetor em coordenadas cartesianas por escalar

Definição 1.11.1. *O produto do escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$*, por um vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *é o vetor* $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$*, representado pelo segmento orientado* AC*, tal que:*

(a) A*,* B *e* C *são colineares;*

(b) $d(A,C) = |\lambda| d(A,B)$ *(onde* $d(A,B)$ *é a distância entre os pontos* A *e* B *e* $d(A,C)$ *é a distância entre* A *e* C*);*

(c) $A = C$ *se* $\lambda = 0$*;*

(d) *Os segmentos* AC *e* AB *têm mesmo sentido se* $\lambda > 0$*, e sentidos opostos se* $\lambda < 0$*.*

O leitor terá uma visão melhor examinando a Figura 1.6.

Na prática, sejam os pontos do plano, $A = (1,3)$ e $B = (2,5)$, então $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,2)$, para obter $\lambda\overrightarrow{AB}$, basta fazer $\lambda(1,2) = (\lambda, 2\lambda)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.11.2. *Sejam* $A = (3,0)$*,* $B = (4,1)$*,* $C = (0,2)$*, e* $D = (x,y)$*. Determine* D *tal que* $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*.*

Solução

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1) \Longleftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = (2,2)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (x, y-2) = (2,2)$$

Portanto, $D = (2,4)$. O gráfico a seguir ilustra bem esse exemplo.

Observação 1.11.3. *Não é difícil ver que* $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{OP}$ *são equipolentes, pois seu representantes* CD *e* OP *são diagonais dos retângulos de lado comum* CP*, e os outros dois lados também são congruentes. Note que o vetor* $\overrightarrow{OB'}$ *é um representante do vetor* $\vec{u}$ *pois satisfaz a condição de equipolência.*

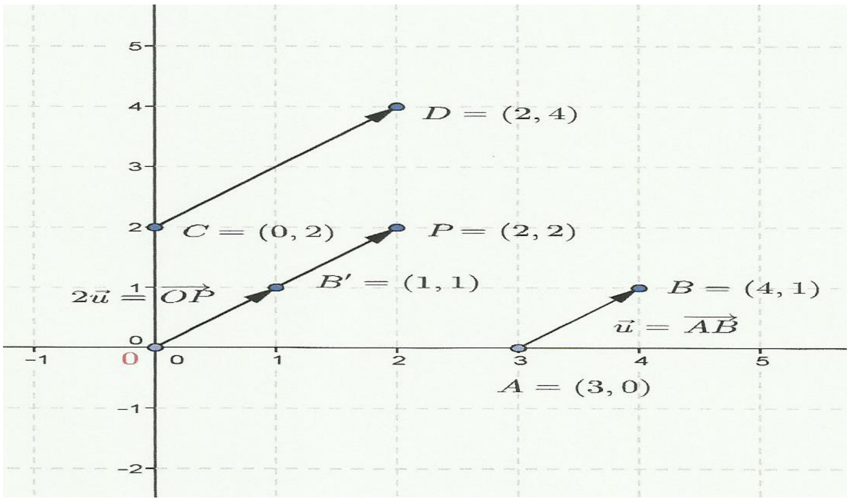

Figura 1.12: produto de vetores em coordenadas por escalar.

1.12 Dependência e independência lineares

Definição 1.12.1. *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no plano OXY, fixando um ponto P nesse plano e, sendo PA e PB os respectivos representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos os seguintes casos:*

Caso 1

PA e PB estão situados sobre uma mesma reta r. Isto ocorre se, somente se, existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e nesse caso os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são denominados linearmente dependentes (LD) ou, simplesmente colineares. O leitor poderá examinar a Figura 1.6*, ela representa vetores LD.*

Caso 2

PA e PB não estão situados sobre uma mesma reta. Então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão denominados vetores linearmente independentes (LI), além disso, a geometria euclidiana garante que três pontos não colineares determinam um plano, de acordo com [5], logo PA e PB determinam um plano, Figura 1.13.

Sejam a e b escalares quaisquer. Uma expressão da forma $a\vec{u} + b\vec{v}$ é chamada combinação linear dos vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$. Se $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ são vetores colineares não-nulos, então eles geram uma reta, ou seja, todos os vetores $a\vec{u} + b\vec{v}$ possuem representantes na mesma reta. Reciprocamente, se r é uma reta sobre a qual existem representantes PA e PB para os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, e D um ponto qualquer de r, então existe uma infinidade de escalares a e b tais que $\overrightarrow{PD} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

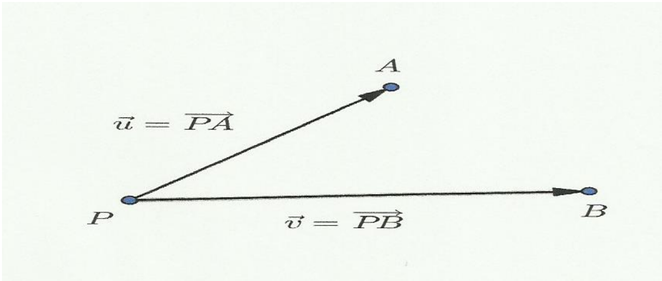

Figura 1.13: vetores LI.

De modo análogo, não é difícil ver que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores coplanares não-colineares, então todos os vetores da forma $a\vec{u}+b\vec{v}$ possuem representantes sobre um mesmo plano π. Reciprocamente, se π é um plano que contém os representantes PA, PB de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e D é um ponto qualquer de π, então existe uma infinidade de escalares a e b tais que $\overrightarrow{PD} = a\vec{u} + b\vec{v}$ $(veja$ [4]). Daí, segue-se que dois vetores não-nulos e não colineares, geram um plano (veja Figura 1.13)

1.13 Ângulo entre dois vetores

Definição 1.13.1. *Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores não nulos, o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido como sendo o ângulo formado entre seus representantes. Logo, por definição o ângulo $\theta = \angle A$ é o ângulo entre os segmentos AB e AC, respectivos representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, Figura* 1.14.

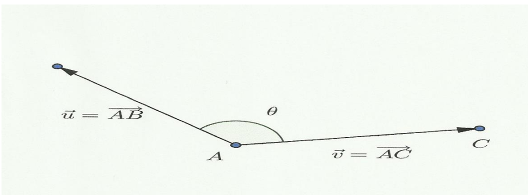

Figura 1.14: ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com mesma origem.

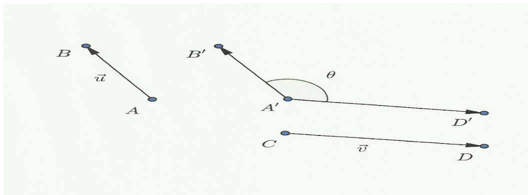

Figura 1.15: ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origens diferentes.

No caso em que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, com $A \neq C$, é sempre possível encontrar representantes $\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{A'D'} = \vec{v}$, tais que $\overrightarrow{A'B'}//\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'D'}//\overrightarrow{CD}$ em que $\theta = \angle A'$, Figura 1.15. Esse ângulo θ será representado pelo menor arco.

1.14 Norma de um vetor

Antes de definir a norma de um vetor é bom lembrar que é sempre possível representar em um sistema cartesiano predeterminado, um vetor qualquer por um segmento com extremidade inicial na origem. É essa a ideia que será utilizada aqui para definir a norma de um vetor $\vec{u}$ qualquer.

Definição 1.14.1. *Dado o vetor $\vec{u} = (a_1, a_2)$, chama-se norma de $\vec{u}$, representada por $||\vec{u}||$, a distância do ponto (a_1, a_2) à origem $O = (0, 0)$ do sistema predefinido.*

Para calcular a norma de um vetor, basta calcular a distância entre dois pontos, nesse caso, se o vetor $\vec{u} = (a_1, a_2)$ então sua norma é

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

.

Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e o escalar x. Tem-se que a norma de um vetor satisfaz as seguintes propriedades, cuja demonstrações são deixadas ao leitor

(a) $||\vec{u}|| \geq 0$, $||\vec{u}|| = O$ se, só se, $\vec{u} = \overrightarrow{O}$;

(b) $||x\vec{u}|| = |x|||\vec{u}||$;

(c) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

Em uma simples observação do exposto acima, o leitor concluirá que a norma é simplesmente o comprimento do vetor, portanto pode ser calculada pela distância entre os pontos de suas extremidades.

1.15 Produto interno ou produto escalar

Observação 1.15.1. *Dados vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ ($proj_{\vec{v}}\vec{u}$ é a "sobra" do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$, isto é, o segmento AB da Figura 1.16).*

Definição 1.15.2. *O produto interno do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$ é o produto da projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ pelo comprimento de $\vec{v}$.*

Em símbolos

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{v}||proj_{\vec{v}}\vec{u}$

Proposição 1.15.3. *O produto interno entre os vetores, não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pelo produto de suas normas pelo cosseno do ângulo formado entre eles.*

Em símbolos

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}||||\vec{v}||cos\theta$

Demonstração

Observe que na Figura 1.16 o triângulo ABC é retângulo em B.

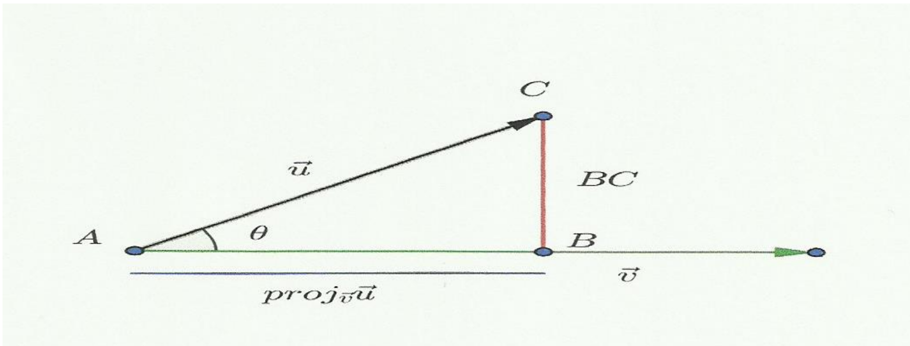

Figura 1.16: triângulo retângulo em B.

Por relação trigonométrica no triângulo retângulo, tem-se que

$$cos\theta = \frac{proj_{\vec{v}}\vec{u}}{||\vec{u}||} \Longrightarrow proj_{\vec{v}}\vec{u} = ||\vec{u}||cos\theta$$

Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{v}||proj_{\vec{v}}\vec{u}$; segue-se que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}||||\vec{v}||cos\theta$. ■

Da última igualdade é fácil obter o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ usando a fórmula

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{u}||||\vec{v}||}.$$

É importante observar que o produto interno resulta em um número, ou seja, um escalar.

Definição 1.15.4. *Dados os vetores $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2)$. Define-se o produto interno em coordenadas do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$ por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2$.*

Proposição 1.15.5. *Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ *(Comutativa)*

(b) $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle$ *(homogeneidade)*

(c) $\langle \vec{w}, (\vec{u} + \vec{v}) \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ *(distributiva)*

(d) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = ||\vec{u}||^2$.

Demonstração

Será feita para o item (a) os demais ficam para o leitor.
Aplicando a Definição 1.15.4, tomando $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2)$, tem-se que
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$
Mas $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle = b_1 a_1 + b_2 a_2$
Portanto, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. ■

A seguir será apresentado um importante resultado do produto interno entre dois vetores não-nulos.

Proposição 1.15.6. *Sejam vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos. Então, o produto interno desses vetores é nulo se, e somente se, eles são vetores ortogonais (formam entre si ângulo de 90^0), ou seja, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.*

Demonstração

Sejam AB e CD os segmentos representantes dos vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ respectivamente. Então $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ são vetores ortogonais se, e somente se, o ângulo θ entre AB e CD é um ângulo reto, isto é, um ângulo de 90^0, veja [1].

Usando a fórmula $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| cos\theta$, segue-se que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| cos 90^0$, equivalentemente $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, já que $cos 90^0 = 0$. Por outro lado se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, temos que $||\vec{u}|| ||\vec{v}|| cos\theta = 0$. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos, segue-se que $||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \neq 0$, portanto $cos\theta = 0$, isso equivale a dizer que $\theta = 90^0$, ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores ortogonais. ■

Observação 1.15.7. *Dado o vetor não-nulo $\vec{u} = (a, b)$, define-se o vetor $\vec{v} = (-b, a)$ como o vetor ortogonal a $\vec{u}$. O leitor pode facilmente verificar esse resultado usando a fórmula $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

Exemplo 1.15.8. *Dados os vetores $\vec{u} = (1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 5)$, Calcule o produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.*

Solução

Pela Definição 1.15.4*, tem-se*

$$\begin{aligned}\langle(1,4),(-1,5)\rangle &= 1.(-1)+4.5\\ &= -1+20\\ &= 19\end{aligned}$$

Exemplo 1.15.9. *Dados os vetores* $\vec{u}=(1,-2)$ *e* $\vec{v}=(3,a)$*, encontre o valor de* a *para que o produto interno de* $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$ *seja* 13*.*

Solução

Pela Definição 1.15.4*, tem-se*

$$\begin{aligned}\langle(1,-2),(3,a)\rangle &= 1.3+(-2)a\\ &= 3-2a\\ &= 13\\ &\iff 2a=-10\\ &\iff a=-5.\end{aligned}$$

Capítulo 2

Vetores no espaço

Como foi definido vetores no plano, neste capítulo será definido vetores no espaço. Inicialmente, define-se um sistema de eixos ortogonais dado por três eixos orientados, digamos, OX, OY e OZ, dois a dois perpendiculares, em que O é a origem desse sistema. O leitor pode observar (Figura 2.1) que o ponto $P = (x, y, z)$ é marcado no espaço pela interseção da reta paralela ao eixo OZ que passa pelo ponto de coordenadas (x, y) e intersecta o plano que passa por z e é paralelo ao plano OXY.

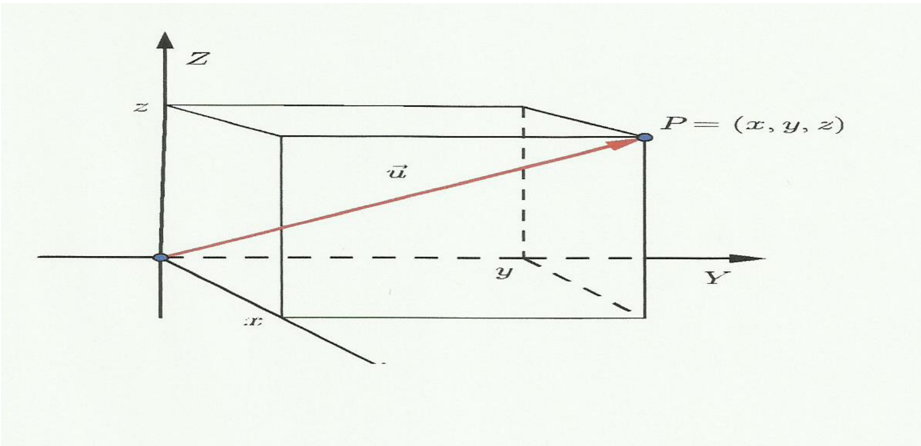

Figura 2.1: espaço OXYZ

Fixando uma unidade de comprimento, cada ponto P pertencente ao espaço definido pelos eixos ortogonais será representado por uma tripla de números reais (x, y, z), denominada as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$.

Nesse espaço, assim como no plano, os vetores são dados por segmentos orientados, ou seja, cada segmento tem uma extremidade inicial e uma extremidade final. Novamente, como feito no plano, pode-se, sem maiores dificuldades, representar qualquer vetor $\overrightarrow{AB}$ por um vetor $\overrightarrow{OP}$ que associa seu ponto final $P = (x, y, z)$ com o ponto inicial na origem $O = (0, 0, 0)$. É usual representar o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ *por* $\vec{v} = (a, b, c)$. Além disso, a origem $(0, 0, 0)$ representa o vetor nulo $\overrightarrow{O}$ e, o conjunto de vetores do espaço é dado por

$$V = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\} = R \times R \times R = \mathbb{R}^3.$$

2.1 Igualdade entre vetores e vetores paralelos

Definição 2.1.1. *Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos iguais, $\vec{u} = \vec{v}$ se, somente se, eles são equipolentes, ou seja, têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.*

Proposição 2.1.2. *Dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, somente se, existe um escalar λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, com $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$.*

Demonstração

Primeiramente suponha que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Então, é imediato da Definição 2.1.1 *que $\vec{u}//\vec{v}$. Suponha agora que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, considerando que $\lambda = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||} > 0$. Nesse caso $\lambda\vec{v}$ e $\vec{v}$ são paralelos . Quanto ao comprimento*

$$||\lambda\vec{v}|| = |\lambda|||\vec{v}|| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}||\vec{v}|| = ||\vec{u}||$$

Portanto $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

O caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos opostos, basta fazer $\lambda = -\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}$ e proceder de modo análogo. ■

Observação 2.1.3. *Na Proposição acima observa-se que se dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, qualquer um deles é múltiplo escalar do outro. O mesmo acontece se $\vec{u} = \vec{v} = \overrightarrow{O}$. Porém, se um deles é nulo e o outro não, digamos, $\vec{u} = \overrightarrow{O}$ e $\vec{v} \neq \overrightarrow{O}$, então $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$ (pois $\vec{u} = 0\vec{v}$), no entanto $\vec{v}$ não é múltiplo escalar de $\vec{u}$.*

Resumindo, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem-se que

(i) $\vec{u}//\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}$ *ou* $\vec{v} = \mu\vec{u}$ *onde* $\mu = \frac{1}{\lambda}$;

(ii) $\vec{u}//\vec{v}$ *e* $\vec{v} \neq \overrightarrow{O} \Longrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}$, *veja [4].*

2.2 Vetores opostos

Definição 2.2.1. *Se AB é um representante do vetor $\vec{u} = (a, b, c)$, então o vetor oposto de $\vec{u}$, indicado por $-\vec{u}$, é o vetor que tem o representante BA ou qualquer segmento equipolente a BA como representante. Portanto $-\overrightarrow{AB} = -\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. Geometricamente ver Figura 1.1.*

Proposição 2.2.2. *Quaisquer que sejam o escalar λ e o vetor $\vec{v}$, valem as seguintes igualdades:*

(a) $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v})$;

(b) $\lambda(-\vec{v}) = -(\lambda\vec{v})$;

(c) $(-\lambda)(-\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

Demonstração

Para mostrar o item (a), note que $(-\lambda)\vec{v}$ é o vetor oposto de $\lambda\vec{v}$, pois $(-\lambda)\vec{v} + \lambda\vec{v} = -\lambda(\vec{v} - \vec{v}) = \overrightarrow{O}$;

Usando o argumento do item (a), prova-se o item (b). De fato,

$$\lambda(-\vec{v}) + \lambda\vec{v} = \lambda(-\vec{v} + \vec{v}) = \lambda\overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}.$$

Inicialmente aplicando os itens (a) e (b), prova-se o item (c), isto é,

$$(-\lambda)(-\vec{v}) = -(\lambda)(-\vec{v}) = -[-\lambda(\vec{v})] = \lambda\vec{v}. \quad \blacksquare$$

Não é difícil notar que o produto de um número negativo por outro número negativo, por definição, é positivo.

2.3 Adição de vetores

Definição 2.3.1. *Dado os vetores* $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ *a soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$ *é definida por* $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Observe que as operações com vetores no espaço seguem as mesmas ideias utilizadas no plano.

Exemplo 2.3.2. *Sejam* $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, 4, 6)$*, então* $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 3) + (1, 4, 6) = (2, 6, 9)$.

2.4 Produto de vetor por um escalar

Definição 2.4.1. *Dados os vetores* $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ *e o escalar* $k \in R$*, o produto de* k *por* $\vec{u}$ *é o vetor* $\vec{v}$ *tal que* $\vec{v} = k\vec{u}$*. Note que se* $k > 0$ *o vetor* $\vec{v}$ *tem mesmo sentido de* $\vec{u}$ *e se* $k < 0$*, então o vetor* $\vec{v}$ *tem sentido oposto a* $\vec{u}$ *(veja Figura* 1.6*).*

Exemplo 2.4.2. *Sejam* $\vec{u} = (1, 3, 5)$ *e* $k = 2$*, então o vetor* $\vec{v} = k\vec{u}$ *é dado por* $\vec{v} = 2.(1, 3, 5) = (2, 6, 10)$.

De modo geral, dados os vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

(a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

(b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(c) Existe $\overrightarrow{O}$ tal que $\overrightarrow{O} + \vec{u} = \vec{u}$; (para todo vetor $\vec{u}$)

(d) Existe $-\vec{u}$ tal que $(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{O}$;(para todo vetor $\vec{u}$)

(e) $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$; (a e b números reais) e;

(f) $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$.

Com efeito, para demonstrar (a)

Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$. Então,

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) + (c_1, c_2, c_3)\\ &= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3);\ (I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)\\ &= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3).\ (II)\end{aligned}$$

Note que $(I) = (II)$. ■

As demais são análogas e ficam para o leitor.

2.5 Soma de um ponto com um vetor

Definição 2.5.1. *Considere um ponto P e um vetor $\vec{u}$. A soma de P com $\vec{u}$ é um ponto Q tal que o segmento orientado PQ é representante de $\vec{u}$, indicado por $P + \vec{u}$ (Figura 2.2).*

Em símbolos

$$P + \vec{u} = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$$

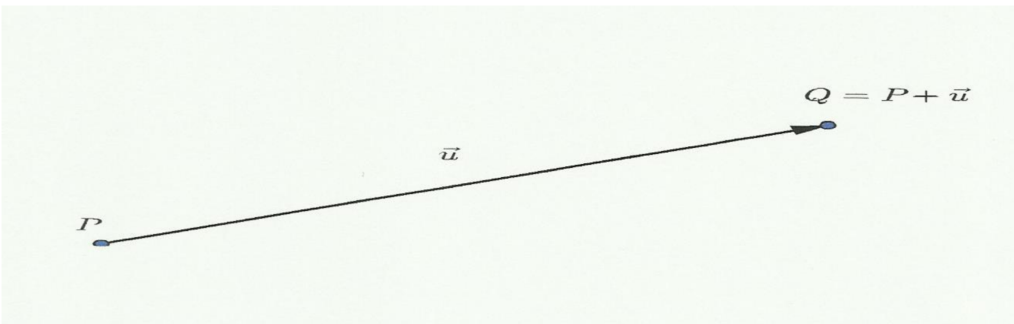

Figura 2.2: soma de ponto com vetor

Decorre dessa definição o seguinte: quaisquer que sejam os pontos P e Q, $P + \overrightarrow{PQ} = Q$. Além disso, pode-se entender que $P + \vec{u}$ é o resultado do deslocamento de um ponto material inicialmente situado na origem da flecha até a extremidade final da flecha.

A operação que associa o ponto $P + \vec{u}$ ao par ordenado $(P, \vec{u})$ é denominada adição de ponto com vetor.

Proposição 2.5.2. *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e os pontos A e B, valem as seguintes propriedades:*

(a) $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$;

(b) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$; *(cancelamento de ponto)*

(c) $A + \vec{u} = B + \vec{u} \Longrightarrow A = B$; *(cancelamento de vetor)*

(d) $(A - \vec{u}) + \vec{u} = A$.

Demonstração

Será feita para o item (a), os demais ficam como exercício.

Sejam $B = A + \vec{u}$ *e* $C = B + \vec{v}$, *pela Definição* 2.5.1, *segue-se que*

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = B + \overrightarrow{BC} = C$$

Por outro lado, tem-se que

$$A + (\vec{u} + \vec{v}) = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = A + \overrightarrow{AC} = C$$

Portanto,

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}). \quad \blacksquare$$

Proposição 2.5.3. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos, então* $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} = \overrightarrow{O} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Demonstração

Suponha que $\lambda_1 \neq 0$, a igualdade $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} = \overrightarrow{O}$ resulta em $\vec{u} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}$, então $\vec{u}//\vec{v}$. Contradição já que $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ são não paralelos, segue-se que $\lambda_1 = 0$. De modo análogo, prova-se que $\lambda_2 = 0$. $\blacksquare$

Corolário 2.5.4. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não paralelos, então*

$$\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} = \lambda_3\vec{u} + \lambda_4\vec{v} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_3 \text{ e } \lambda_2 = \lambda_4$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} = \lambda_3\vec{u} + \lambda_4\vec{v} &\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_3)\vec{u} + (\lambda_2 - \lambda_4)\vec{v} = \overrightarrow{O} \\ &\Longleftrightarrow \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \text{ e } \lambda_2 - \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente $\lambda_1 = \lambda_3$ *e* $\lambda_2 = \lambda_4$. $\blacksquare$

2.6 Vetores linearmente dependentes (LD) e vetores linearmente independentes (LI)

Nesta seção será tratado com maior detalhe a definição de vetores LD e LI, assunto visto no primeiro capítulo.

Definição 2.6.1. *Seja n um número natural não-nulo, define-se dependência linear e independência linear de uma sequência $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, ..., \vec{u_n}$ dos seguintes modos:*

(a) *O vetor $\vec{u} = a_1\vec{u_1} + a_1 u_2 + ... + a_n u_n$, onde o escalar $a_n \in R$, é linearmente dependente se, somente se, $\vec{u} = \overrightarrow{O}$, caso contrário é linearmente independente.*

(b) *Um par de vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ é linearmente dependente se $\vec{u_1}//\vec{u_2}$. Caso contrário é linearmente independente;*

(c) *Uma tripla ordenada $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ é linearmente dependente se os vetores $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ e $\vec{u_3}$ são paralelos a um mesmo plano. Caso contrário a tripla é linearmente independente;*

(d) *Se $n \geq 4$, então qualquer sequência de n vetores é linearmente dependente.*

Doravante serão usadas as abreviaturas LD e LI para designar vetor linearmente dependente e vetor linearmente independente, respectivamente. É interessante observar que se uma sequência de vetores é LI, então qualquer permutação dessa sequência também é LI. O mesmo raciocínio vale para uma sequência de vetores LD (veja Figuras 2.3 e 2.4).

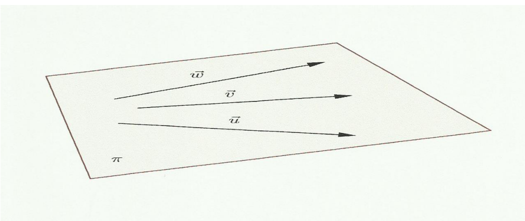

Figura 2.3: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.

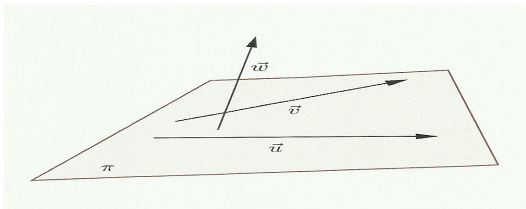

Figura 2.4: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

Observação 2.6.2. *Dependência e independência lineares são qualidades de uma sequência de vetores, não dos próprios vetores. No entanto é comum dizer que "os vetores*

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD" veja [4], conforme o caso. O correto é dizer que o par de vetores $\vec{u}, \vec{v}$ é LD ou LI, ou ainda, a tripla ordenada $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é LD ou LI, conforme o caso.

Isso, no entanto, nem sempre é verdade, por exemplo, tome dois vetores não-nulos paralelos, cada um deles é LI, mas $\vec{u}, \vec{v}$ é LD.

Definição 2.6.3. *A igualdade $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + ... + \lambda_n \vec{u_n}$ é definida como uma combinação linear dos vetores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}$, ou ainda, $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}$. Os escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são denominados coeficientes da combinação linear.*

Observação 2.6.4. *Não é difícil ver que o vetor nulo é formado por qualquer combinação de $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}$, para ver isso, basta tomar $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, isto é, $\vec{v} = 0\vec{u_1} + 0\vec{u_2} + ... + 0\vec{u_n}$ representa um vetor nulo. Essa expressão é também conhecida como expressão trivial do vetor nulo.*

Exemplo 2.6.5. *Seja $\vec{u} = 2\vec{v}$, escreva três expressões diferentes do vetor nulo como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Solução

A primeira é a solução trivial, ou seja, $\overrightarrow{O} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$. Sendo $\vec{u} = 2\vec{v}$, obtêm-se $\vec{u} + (-2\vec{v}) = \overrightarrow{O}$, por fim, escreva $3\vec{u} - 6\vec{v} = \overrightarrow{O}$. Note que é possível escrever infinitas combinações multiplicando a igualdade $\vec{u} + (-2\vec{v}) = \overrightarrow{O}$ por um número real λ qualquer.

Exemplo 2.6.6. *Sejam os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 5, 6)$ e $\vec{w} = (4, 6, 8)$, verifique se $\vec{w}$ é combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Solução

Pela Definição 2.6.3, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se existem escalares a e b tal que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, ou equivalentemente

$$\begin{aligned} (4, 6, 8) &= a(1, 2, 3) + b(3, 5, 6) \\ &= (a, 2a, 3a) + (3b, 5b, 6b) \\ &= (a + 3b, 2a + 5b, 3a + 6b), \end{aligned}$$

escrevendo o sistema

$$\vec{w} = \begin{cases} a + 3b = 4 & (I) \\ 2a + 5b = 6 & (II) \\ 3a + 6b = 8 & (III) \end{cases}$$

resolvendo (II) e (III)

$$\vec{w} = \begin{cases} 2a + 5b = 6 \quad (II) \\ 3a + 6b = 8 \quad (III) \end{cases}$$

obtem-se $a = \frac{4}{3}$ *e* $b = \frac{2}{3}$, *verificando em (I), resulta* $\frac{4}{3} + 3\frac{2}{3} = \frac{10}{3} \neq 4$. *Logo* $\vec{w}$ *não é combinação linear de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$.

2.7 Ângulo entre dois vetores no espaço

Definição 2.7.1. *Sejam os vetores* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *no espaço, o ângulo* θ *formado entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é o ângulo formado entre seus representantes (veja Definição 1.13.1).*

2.8 Norma de um vetor

Definição 2.8.1. *Dado o vetor* $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, *a norma de* $\vec{u}$ *é o comprimento de* $\vec{u}$. *Como feito na Definição 1.14.1, para o cálculo da norma basta calcular a distância do ponto* (a_1, a_2, a_3) *à origem* $O = (0, 0, 0)$, *dada por*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 + (a_3 - 0)^2} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

Vale lembrar que todas as propriedades válidas no plano, são também válidas no espaço.

Exemplo 2.8.2. *Dados os pontos* $A = (2, 1, 4)$ *e* $B = (3, 1, 5)$, *calcule a norma do vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Solução

Note que $\vec{u} = B - A = (1, 0, 1)$, *logo a norma de* $\vec{u}$ *é dada por*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

2.9 Produto interno ou produto escalar

Definição 2.9.1. *A definição de produto interno entre vetores no espaço segue da definição 1.15.1, logo dados os vetores* $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$, *o produto interno de* $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$ *é dado por*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Exemplo 2.9.2. *Dados os vetores* $\vec{u} = (2, -3, 4)$ *e* $\vec{v} = (a, 3, 5)$*, obtenha o valor de* a *para que* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$*.*

Solução

Da definição 2.9.1*, segue-se que*

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (2, -3, 4), (a, 3, 5) \rangle = 0$

$\iff 2a + (-3).3 + 4.5 = 0$

$\iff 2a + 11 = 0$

$\iff a = \frac{-11}{2}.$

Capítulo 3

Estudo da reta e da circunferência

Neste capítulo será feito um estudo, propriamente dito, da equação da reta e da equação da circunferência sob uma abordagem vetorial.

3.1 Equação da reta

3.1.1 Equação paramétrica da reta

Sabe-se que dois pontos distintos determinam uma e, somente uma reta, veja [1]. Munido das propriedades e definições de vetores no plano e também no espaço, o leitor não terá dificuldade em entender como serão obtidas as equações da reta e da circunferência, as quais serão determinadas neste capítulo.

Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos distintos de um plano π, então A e B determinam uma reta $r \subset \pi$, além disso, se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer de r, tal que $P \neq A$ e $P \neq B$, a Definição 1.12.1 garante que existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, desenvolvendo essa equação, obtêm-se

$P - A = t(B - A)$

$P = A + tB - tA$

$(x, y) = (a_1, a_2) + t(b_1, b_2) - t(a_1, a_2)$

$(x, y) = (a_1, a_2) + (tb_1, tb_2) - (ta_1, ta_2)$

$(x, y) = (a_1, a_2) + (tb_1 - ta_1, tb_2 - ta_2)$

$(x, y) = (a_1, a_2) + (t(b_1 - a_1), t(b_2 - a_2))$

Equivalentemente,

$$r = \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Essa é a representação da equação conhecida por equação paramétrica da reta r de parâmetro t (ou simplesmente equação paramétrica da reta), para saber mais consulte [3]. É interessante observar que fazendo t variar no conjunto dos números reais, o ponto $P = (x, y)$ percorre toda a reta determinada pelos pontos A e B.

3.1.2 Equação cartesiana reduzida da reta

Para se obter a equação cartesiana reduzida, comumente conhecida nos livros de ensino básico, basta isolar o parâmetro t em uma das equações e substituir na outra, veja

$x = a_1 + t(b_1 - a_1) \iff t(b_1 - a_1) = x - a_1$

Logo, $t = \frac{x-a_1}{b_1-a_1}$

Substituindo t na equação $y = a_2 + t(b_2 - a_2)$, obtêm-se

$y = a_2 + \frac{x-a_1}{b_1-a_1}(b_2 - a_2)$, que é a equação desejada.

Exemplo 3.1.1. *Dados $A = (2, 1)$ e $B = (5, 4)$, obtenha a equação paramétrica e a equação cartesiana da reta r que contém os pontos A e B.*

Solução

Suponha que $P = (x, y)$ seja um ponto qualquer da reta r, e ainda, veja que o vetor $\overrightarrow{AB} = (3, 3)$ tem o representante AB na reta, logo existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$

$P - A = t\overrightarrow{AB}$

$P = A + t\overrightarrow{AB}$

$(x, y) = (2, 1) + t(3, 3) \iff (x, y) = (2 + 3t, 1 + 3t)$;

Logo a equação paramétrica da reta r é dada por

$$r = \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Agora, isolando t na primeira equação e substituindo na segunda, ficará determinada a equação cartesiana reduzida da reta r, veja

$x = 2 + 3t \Longrightarrow 3t = x - 2 \Longrightarrow t = \frac{x-2}{3}$, finalmente para $y = 1 + 3t$ obtêm-se $y = 1 + 3(\frac{x-2}{3}) \Longrightarrow y = x - 1$.

É fácil verificar que os pontos $(2, 1)$ e $(5, 4)$ satisfazem a equação.

Para determinar a equação da reta no espaço, basta usar o mesmo argumento e proceder de maneira análoga.

Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ pontos distintos pertencentes a $\mathbb{R}^3$, seja ainda um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer de $\mathbb{R}^3$, com $P \neq A$ e $P \neq B$. Então, existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$. Então,

$P - A = t(B - A)$

$P = A + t(B - A)$

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$(x, y, z) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3))$.

Portanto,

$$r = \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

O sistema acima representa a equação paramétrica da reta r no espaço, isto é, em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.1.2. *Dados os pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 5, 6)$. Determine a equação paramétrica da reta s que contém esses pontos.*

Solução

Suponha que $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer da reta s tal que $P \neq A$ e $P \neq B$, então existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$

$P - A = t(B - A)$

$P = A + tB - tA$

$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 5, 6) - t(1, 2, 3)$

$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 3, 3)$

$(x, y, z) = (1 + 2t, 2 + 3t, 3 + 3t)$

Logo,

$$s = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Veja o esboço da reta s na Figura 3.1.

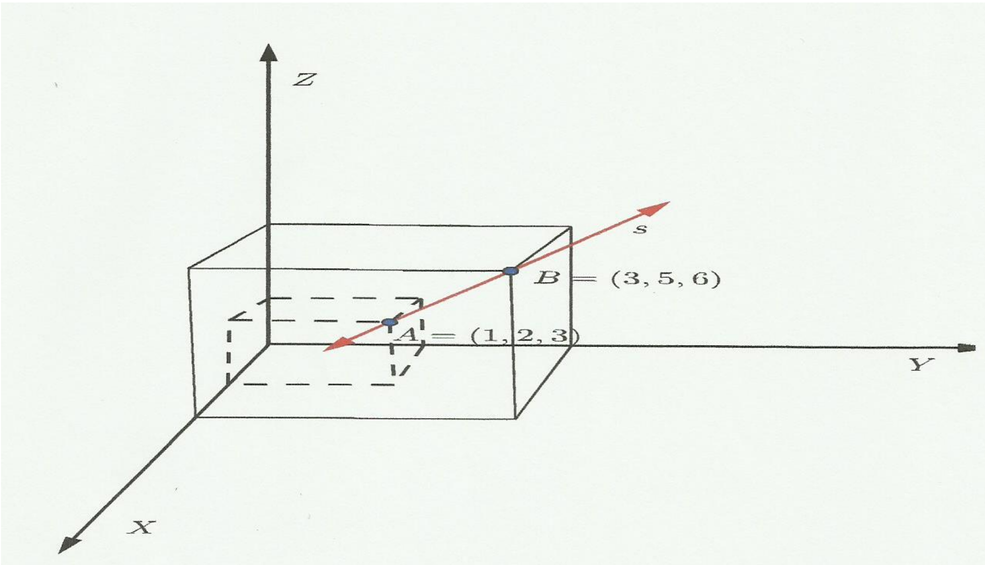

Figura 3.1: reta no espaço

3.1.3 Equação simétrica da reta

Seja a equação paramétrica da reta r de parâmetro t que contém os pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, representada a seguir

$$r = \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

É possível, isolando o parâmetro t em cada equação, reescrever r do seguinte modo;

$$t = \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}; \quad t = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \quad e \quad t = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

.

equivalentemente,

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3}$$

que é a equação de r na forma simétrica.

Note que a equação só tem sentido para $b_1 - a_1 \neq 0$, $b_2 - a_2 \neq 0$ e $b_3 - a_3 \neq 0$.

Exemplo 3.1.3. *Dados os pontos $A = (3, 5, 1)$, $B = (1, 6, 2)$, determine a equação simétrica da reta que contém os pontos A e B.*

Solução

Usando as igualdades $\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3}$, obtem-se

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{1}$$

que é a equação simétrica da reta que contém os pontos dados.

Observação 3.1.4. *Uma outra maneira de se determinar a equação de uma reta é o método adotado na Geometria Analítica, atribuído a René Descartes (1596-1650), que consiste em associar a cada conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ uma equação ou sistema de equações que o tenha por solução, veja [7]. Antes disso é necessária a seguinte definição.*

Definição 3.1.5. *Qualquer vetor não-nulo paralelo a uma reta chama-se vetor diretor dessa reta.*

Considere o vetor diretor $\vec{u}$ da reta r. Um ponto A pertence à reta r se, somente se, $(\overrightarrow{AP}, \vec{u})$ é LD, isto é, se existe um número real t tal que $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$.

Equivalentemente, $P = A + tu$

Essa forma de determinar a equação da reta permite encontrar retas paralelas entre si, portanto, é bastante vantajoso conhecer a definição de vetor diretor da reta, para saber mais veja [7]. No demais o desenvolvimento da equação é análogo ao que foi visto no início deste capítulo.

3.2 Equação da circunferência

3.2.1 Equação cartesiana da circunferência

A definição dada em [8] é que uma circunferência com centro $C = (a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do plano equidistantes de C, isto é, $d(P, C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtêm-se $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (a equação da circunferência de centro (a, b) e raio r).

Neste trabalho será definida a equação da circunferência no plano levando em consideração a norma de um vetor $\overrightarrow{CP}$.

Definição 3.2.1. *Fixando um ponto $C = (a, b)$ pertencente ao plano cartesiano, define-se como circunferência o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do plano, tal que a norma do vetor $\overrightarrow{CP}$ é uma constante real $r > 0$ onde $C = (a, b)$ e r são respectivamente o centro e o raio da circunferência (veja Figura 3.2).*

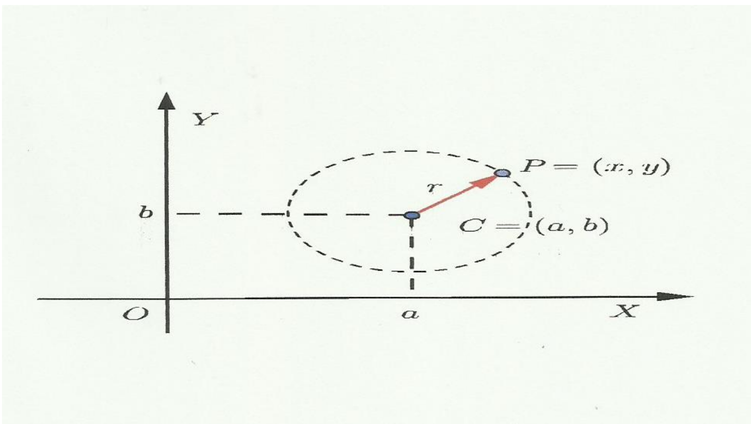

Figura 3.2: circunferência no plano

Para obter a equação da circunferência basta calcular a norma (veja Definição 2.8.1) do seguinte modo

$$||\overrightarrow{CP}|| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
$$\Longleftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

que é a equação da circunferência.

Observação 3.2.2. *O que se pretende mostrar é que os infinitos raios da circunferência são representantes de infinitos vetores, além disso, a cada raio corresponde infinitos seguimentos equipolentes, portanto, dado o centro da circunferência, qualquer vetor do plano equipolente a um dos raios pode ser usado para o cálculo da equação da circunferência.*

Exemplo 3.2.3. *Dado o vetor $\vec{v} = (1,3)$ e seja $P = (3,4)$ um ponto do plano, determine a equação da circunferência que tem centro em P e que o raio é um representante do vetor $\vec{v}$.*

Solução

Como r é um representante do vetor $\vec{v}$, então da Definição 3.2.1, segue-se que

$$||\vec{v}|| = r \Longleftrightarrow \sqrt{1^2+3^2} = r \Longleftrightarrow r = \sqrt{1^2+3^2} \Longleftrightarrow r = \sqrt{10}.$$

Portanto, a equação procurada é

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

3.2.2 Equação geral ou normal da cincunferência

Desenvolvendo a equação da circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, obtêm-se a equação $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2) = 0$, que é a equação geral da circunferência descrita em [8].

No ensino médio é comum as circunferências serem representadas por uma equação geral que pode ser reduzida a forma original pelo método de completar quadrado, veja o exemplo abaixo.

Exemplo 3.2.4. *Dada a equação geral da circunferência $x^2+y^2-4x-2y-4 = 0$, obtenha a equação da circunferência na forma $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.*

Solução

Completando os quadrados na equação $x^2+y^2-4x-2y-4 = 0$, tem-se que

$x^2+y^2-4x-2y-4 = 0$

$\Longleftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1-4-1-4 = 0$

$\Longleftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1 = 9$

$\Longleftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 = 9$

que é a equação da circunferência de centro $(2,1)$ e raio 3.

Para obter a equação da circunferência no espaço (veja Figura 3.2.2) use a seguinte ideia: fixe uma das variáveis, digamos, a variável $x \neq 0$ e faça variar as demais normalmente, de modo que a norma seja constante. Com esse argumento só será possível obter equações de circunferências paralelas a um dos planos coordenados.

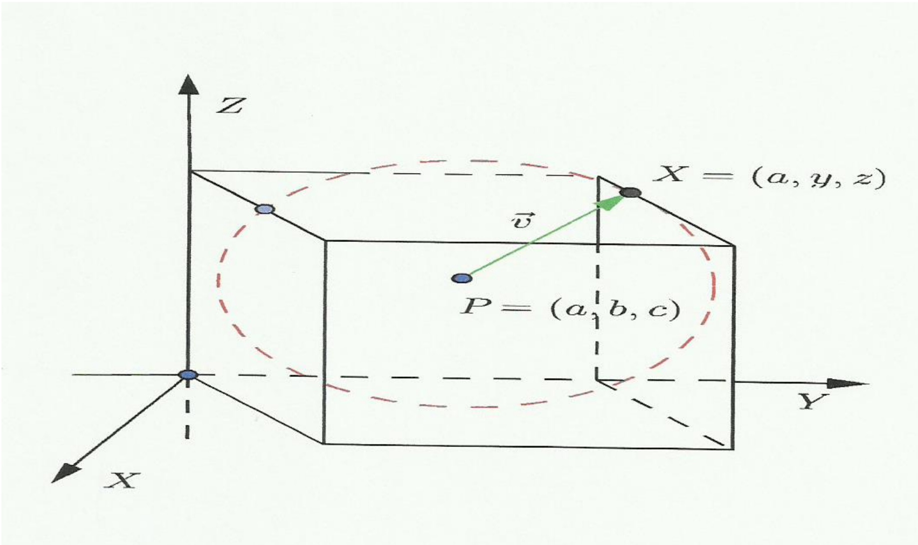

Figura 3.3: circunferência no espaço

Exemplo 3.2.5. *Construa a equação da circunferência de centro* $C = (2, 3, 4)$ *e que tenha raio de* 2 *unidades.*

Solução

Existem "infinitas possibilidades", porém, no caso deste trabalho, são de interesse os casos em que a circunferência é paralela a um dos planos OXY, OXZ *e* OYZ.

No caso em que a circunferência é paralela a OXY, *o conjunto de pontos da circunferência são os pontos* $P = (x, y, 4)$. *Pela norma, tem-se*

$$||\overrightarrow{PC}|| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (4-4)^2} = 2$$
$$\iff (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Como todo ponto $P = (x, y, z)$ *tem* $z = 4$ *a circunferência está no plano* $z = 4$, *ou seja, está quatro unidades acima do plano* OXY. *Para saber mais recorra a [7].*

3.3 Posição relativa entre uma reta e uma circunferência

Veja três casos possíveis (no plano) para posições relativas de uma reta s e uma circunferência C.

Caso 1

A reta s é secante à circunferência C. Neste caso a distância entre o centro de C à reta s é menor do que o raio r, isto é, $d(CP) < r$. Logo a reta e a circunferência têm dois pontos em comum.

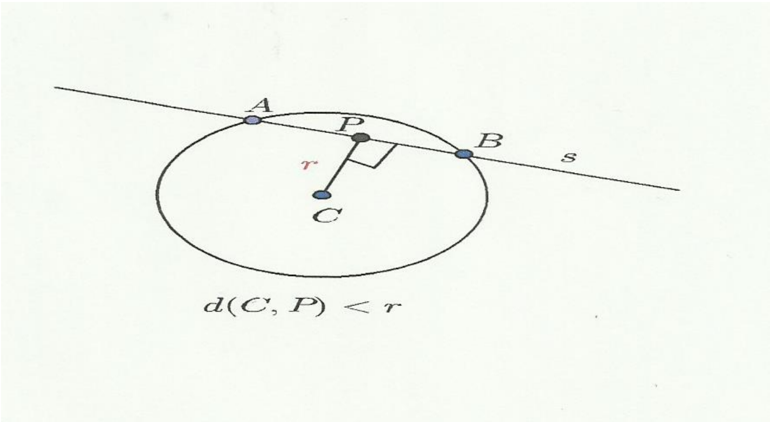

Figura 3.4: reta secante à circunferência

Caso 2

A reta s é tangente à circunferência C. Neste caso a distância entre o centro de C à reta s é igual ao raio r, isto é, $d(CP) = r$. Logo a reta e a circunferência têm um ponto em comum.

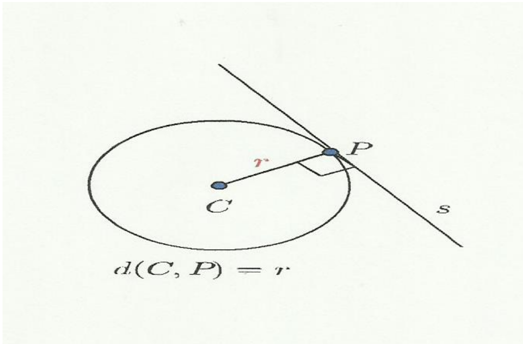

Figura 3.5: reta tangente à circunferência

Caso 3

A reta s é exterior à circunferência C. Neste caso a distância entre o centro da circunferência e a reta, é maior do que o raio r, isto é, $d(CP) > r$. Portanto não há ponto em comum.

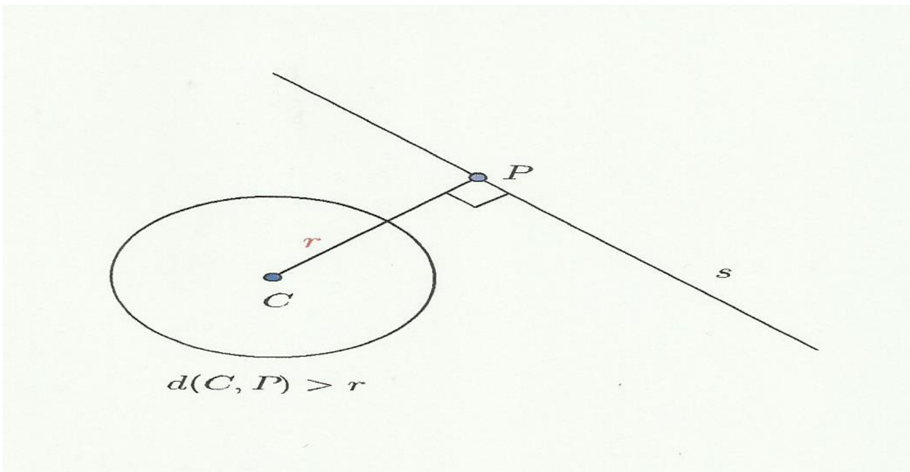

Figura 3.6: reta exterior à circunferência

De modo geral, para se verificar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência, usa-se as equações, verificando se ocorre(m) ponto(s) que satisfaz(em), ou não, ambas as equações.

Veja um exemplo de como obter a equação da reta s tangente a uma circunferência de centro determinado.

Exemplo 3.3.1. *Dado uma circunferência de centro $C = (1, 2)$, determine a equação paramétrica e cartesiana da reta s tangente a essa circunferência no ponto $P = (3, 4)$.*

Solução

Como $P = (3, 4)$ pertence a reta e também à circunferência, segue-se que o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{CP} = (2, 2)$ é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (-2, 2)$ que é o vetor diretor da reta s. Logo existe um escalar t tal que

$$s = \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

que é a equação desejada.

Para obter a equação cartesiana, basta somar as duas equações (a primeira com a segunda) e resultará

$x + y = 7$, *equivalentemente* $y = -x + 7$.

Verifica-se, ainda, que a norma de $\vec{v}$ fornece o raio da circunferência. De fato,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(2^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{8} = r$$

Logo a equação da circunferência é dada por $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Note que substituindo $y = -x + 7$ em $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$, obtêm-se a equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ que tem como solução um único ponto, pois $\Delta = 0$, ou seja, a reta é tangente a circunferência, confirmando o resultado do exercício.

É fácil notar que há sempre um vetor com origem no centro da circunferência que é perpendicular a uma reta dada.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo serão apresentados alguns exercícios que serão resolvidos por meio das definições e propriedades de vetores e o leitor poderá verificar que nesses casos a facilidade com que esses exercícios são resolvidos é bastante significativa.

4.1 Exercício 1 [9]

Provar que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo e igual à metade do comprimento do terceiro lado.

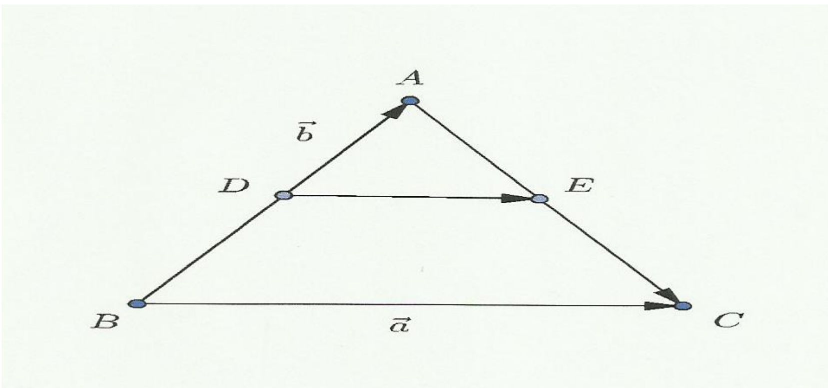

Figura 4.1: triângulo ABC

Solução

Sejam D e E os pontos médios dos lados AB e AC, do triângulo ABC (Figura 4.1), respectivamente. Se $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, então pelas Definições 1.5.1 e 1.6.1, segue-se que

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$

Por outro lado,

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b}$ e $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

Logo, o seguimento de reta que une D e E é

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{BD}\\ &= \vec{a} + \tfrac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \tfrac{1}{2}\vec{b}\\ &= \tfrac{1}{2}\vec{a}\\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

isso mostra que $\overrightarrow{DE}$ é paralelo a $\overrightarrow{BC}$ e tem metade da intensidade de $\overrightarrow{BC}$. ■

Outra solução

Usando somente a Definição 1.5.1 nos triângulos ADE e ABC, segue-se que

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE}$ mas,

$\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, então $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

Por outro lado,

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, logo $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Isso mostra o resultado desejado. ■

4.2 Exercício 2 (Uece)

Na Figura abaixo a reta r passa pelos pontos $(4,0)$ e $(0,3)$ e $ABCD$ é um quadrado cujo vértice C está sobre r.

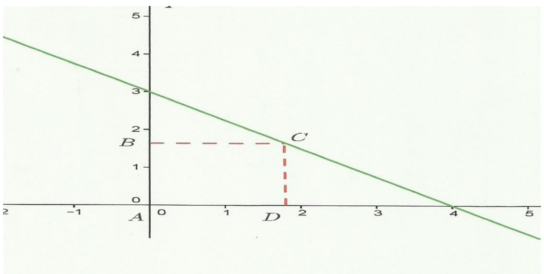

Figura 4.2: reta tangente ao vértice C.

O perímetro desse quadrado, em unidades de comprimento, é:

a) 6,4u. b) 6,8u. c) $\frac{48}{7}u$. d)7u.

Solução

Determinando a equação paramétrica da reta r que tem vetor diretor $\vec{v} = (-4, 3)$ e que passa pelos pontos $(4, 0)$, $(0, 3)$ e C , obtêm-se

$$r = \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Mas $C = (a, a)$ pois $ABCD$ é um quadrado, então da equação acima, segue-se que

$$r = \begin{cases} a = 4 - 4t \\ a = 3t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo $a = 3t$ na equação $a = 4 - 4t$, o valor encontrado para t é $\frac{4}{7}$, portanto $a = \frac{12}{7}$, $C = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$ e o perímetro do quadrado é $\frac{48}{7}u$. Confira letra c) nas alternativas.

4.3 Exercício 3 (Fuvest-SP)

Um quadrado está inscrito numa circunferência de centro $(1, 2)$. Um dos vértices do quadrado é o ponto $(-3, -1)$. Determine os outros três vértices do quadrado.

Solução

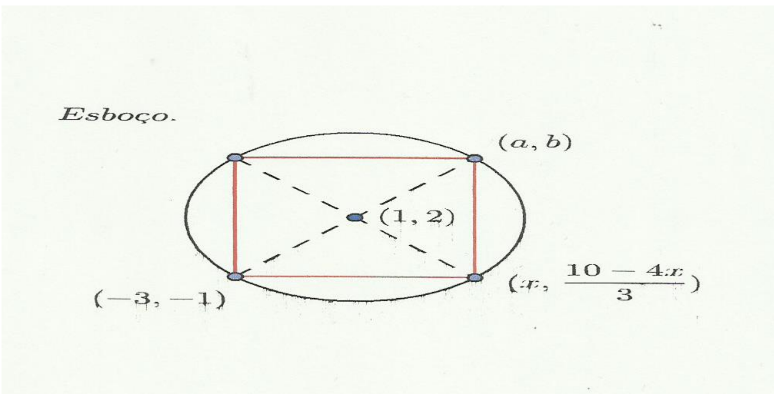

Figura 4.3: quadrado inscrito a uma circunferência.

O vetor $\vec{v} = (4,3)$ é diretor da reta que contém os pontos $(-3,-1)$ e $(1,2)$, além disso $(1,2)$ é ponto médio das diagonais (veja Esboço), então

$$(1,2) = (\frac{a-3}{2}, \frac{b-1}{2}) \Longrightarrow a = 5 \ e \ b = 5.$$

A outra diagonal tem vetor diretor $\vec{u} = (-3,4)$ perpendicular ao vetor $\vec{v}$. Logo a equação dessa diagonal é a reta

$$r = \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}.$$

Cada vértice da diagonal em questão é do tipo $(x, \frac{10-4x}{3})$, como o raio r é equivalente a norma de v, segue-se que $r = ||v|| = \sqrt{16+9} = 5$. Logo,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (\frac{10-4x}{3} - 2)^2} = 25$$

.

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado e fazendo os cálculos necessários, obtêm-se

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Esta equação possui como raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$, portanto os pontos são $(5,5)$, $(-2,6)$ e $(4,-2)$.

4.4 Exercício 4 (FC.Chagas-0)

Qual é a relação entre os vetores $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ e $\vec{r}$ representados na figura?

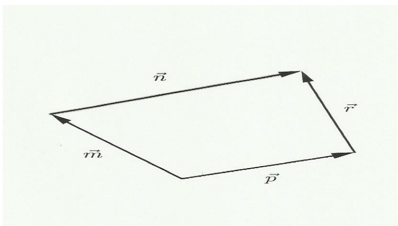

Figura 4.4: vetores $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ e $\vec{r}$

Solução

Pela Definição 1.5.1, segue-se que $\vec{m}+\vec{n}=\vec{p}+\vec{r}$. Veja que $\vec{m}$ e $\vec{p}$ têm mesma origem, sendo que $\vec{n}$ tem origem na extremidade de $\vec{m}$ e $\vec{r}$ tem origem na extremidade de $\vec{p}$, satisfazendo a Definição.

4.5 Exercício 5 (PUC-0)

Para o diagrama vetorial abaixo, a única igualdade correta é:

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ $\quad b)\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}$ $\quad c)\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ $\quad d)\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$ $\quad e)\vec{c}-\vec{a}=\vec{a}$

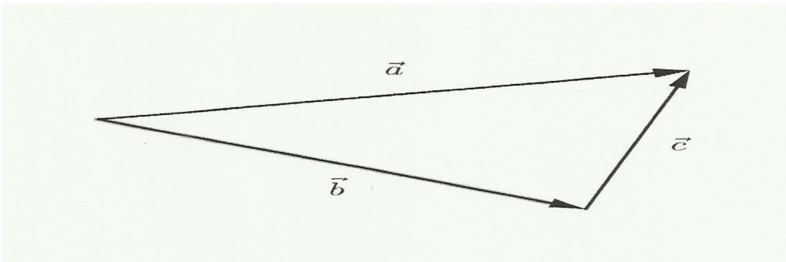

Figura 4.5: vetores $\vec{a}, \vec{b}\ \ e\ \ \vec{c}$

Solução

Usando a Definição 1.5.1 e notando que a extremidade inicial do vetor $\vec{c}$ coincide com a extremidade final do vetor $\vec{b}$, conclui-se que

$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$

$\Longleftrightarrow \vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$

Portanto, a alternativa correta é a letra c) (o objetivo desse exercício é mostrar quão útil é saber as definições).

Capítulo 5

Considerações Finais

O trabalho que hora é concluído não tem a pretensão de tornar o leitor totalmente conhecedor da teoria de vetores mas, pretende motivá-lo a prosseguir na investigação das várias possibilidades que esse ramo da Matemática oferece.

No primeiro capítulo são abordadas geometricamente as noções primitivas, as definições e propriedades vetoriais. Em seguida o leitor tem a oportunidade de se apropriar das definições e propriedades analiticamente (algébricas). A ideia de segmentos equipolentes é introduzida e feita a definição de vetor e suas propriedades em coordenadas cartesianas.

O segundo capítulo aborda vetores no espaço. São definidas propriedades como igualdade entre vetores, vetores opostos, etc. Nesse contexto fica claro que todas as definições e propriedades vetoriais definidas no plano, também são verdadeiras no espaço.

No terceiro capítulo, faz-se o estudo da reta e da circunferência, usando definições e propriedades estudas nos capítulos anteriores e no quarto capítulo são apresentados alguns exercícios como aplicação para que o leitor verifique a utilidade do que foi estudado. Que fique claro: não estão esgotadas as possibilidades das aplicações que podem ser feitas utilizando vetores.

Referências Bibliográficas

[1] Dolce, Osvaldo, *Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 9*, geometria plana, 2001.

[2] Muniz Neto, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar Vol. 2*, Geometria Euclidiana Plana, SBM, 2012.

[3] MA23, *Geometria Analítica*, SBM, 2012.

[4] Santos, Nathan Moreira dos, *Vetores e Matrizes*, 3^a Edição - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1988.

[5] Dolce, Osvaldo, *Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 10*, geometria plana, 2005.

[6] José Luiz Boldrini, *Álgebra Linear* [et al.], 3^a Edição-São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[7] Ivan de Camargo, Paulo Boulos, *Geometria Analítica* - um tratamento vetorial- 3^a Edição rev. e ampl, São Paulo: Pretice Hall, 2005.

[8] Dante, Luiz Roberto - *Matemática (Ensino Médio Vol. 3) contexto & aplicações* - 2^a Edição - São Paulo: Ática, 2013.

[9] Hsn, Hwei P. - *Análise Vetorial* - tradutor Edgard Pedreira de Cerqueira Neto, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos,1972.