Marcos Paulo de Oliveira

Números Complexos: Uma Abordagem Investigativa na Sala de Aula

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

Marcos Paulo de Oliveira

Números Complexos: Uma Abordagem Investigativa na Sala de Aula

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Profª. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
AGOSTO DE 2015

Marcos Paulo de Oliveira

Números Complexos: Uma Abordagem Investigativa na Sala de Aula

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 31 de Agosto de 2015.

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Antônio Espósito Júnior
D.Sc. - UFF

Prof[a]. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

A Deus e a todos que me apoiaram e incentivaram durante a minha jornada.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter-me ajudado nesta caminhada, dando-me forças para superar os diversos obstáculos.

Também agradeço às pessoas especiais que foram companheiras nesta jornada, como minha amada esposa Silaine e minhas filhas Luísa e Fernanda, a quem peço desculpas pelos momentos de ausência durante o Mestrado.

À professora Liliana pela dedicação e incentivo durante toda a etapa de realização deste trabalho.

Ao professor Rigoberto pela ajuda para desvendar os segredos do LaTex.

Aos mestres do PROFMAT-UENF, sem os quais não teria condições de vencer os desafios propostos durante a realização das disciplinas.

Aos amigos e colegas de Curso com os quais compartilhei dúvidas e momentos difíceis.

Ao professor Antônio pelos ensinamentos compartilhados durante a graduação e pelas valiosas sugestões e críticas na fase de idealização do trabalho.

Aos mestres Augusto César Morgado (*in memorian*), Eduardo Wagner, Elon Lages Lima e Paulo César, que mesmo à distância foram essenciais para o sucesso do Curso.

À equipe do IF Sudeste MG - Campus Muriaé pelo apoio operacional, durante a realização do curso, em especial aos professores Paulo César e Leonardo.

Aos meus alunos, os quais dão sentido ao trabalho de criar uma atividade voltada para o ensino.

À CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual a tarefa de dedicar-me ao PROFMAT teria se tornado mais árdua.

Houve quem dissesse um dia que as gerações dos homens
são como as folhas, passam e vêm as outras.
Está na nossa mão desmentir o significado pessimista
dessa frase.
Só figuram de folhas caídas, para uma geração, aquelas
gerações anteriores cujo ideal de vida se concentrou egois-
ticamente em si e que não cuidaram de construir para
o futuro, pela resolução em bases, dos problemas que
lhes estavam postos, numa elevada compreensão do seu
significado humano.
Essa concentração egoísta tem um nome - traição -, e, se
hoje trairmos, será esse o nosso destino - ser arredados
com o pé, como se arreda um montão de folhas mortas.
E não queiramos que amanhã tenham de praticar para
conosco esse gesto, impiedoso mas justiceiro, exatamente
o mesmo que hoje nos vemos obrigado a fazer para com
aquilo que, do passado, é obstáculo no nosso caminho.

(Bento de Jesus Caraça)

Resumo

Neste trabalho apresentamos as possíveis causas que interferem no modo como os livros do PNLD/2015 tratam o conteúdo de Números Complexos. Num primeiro momento, identificamos os motivos pelo qual nossos livros didáticos sofrem tão poucas alterações na maneira de apresentar os conteúdos. Em seguida realizamos uma análise qualitativa destes livros, observando possíveis erros, imprecisões e modificações realizadas pelos autores, com a intensão de verificar como os autores estão adequando a apresentação deste conteúdo frente aos parâmetros oficiais. Após esta análise, verificamos a necessidade de propor uma abordagem dos números complexos de modo a contemplar seu farto registro histórico e suas múltiplas maneiras de ser representado. Desta forma, na parte final deste trabalho apresentamos uma maneira alternativa de trabalhar os números complexos, onde a parte histórica desses números servirá de elemento motivador e fio condutor durante a realização das atividades, tornando possível a construção do seu significado e compreensão da íntima relação existente entre seus aspectos algébricos e geométricos.

Palavras-chaves: Livros Didáticos do Ensino Médio; Matemática e Ensino; Números Complexos; História da Matemática.

Abstract

In this paper, it is presented the possible causes that affect the way PNLD/2015 books deal with complex numbers subject. At first, the goal is to identify the reasons why textbooks show few differences from one to another on the way of present the subjects. Then, a qualitative analysis from these books is gotten, observing possible mistakes, inaccuracies and changes given by authors, with the intention to verify how these authors are adapting the presentation of this subject according to the official parameters. After this analysis, it emerged the necessity to propose the approach of complex numbers aiming to show the great historic record and their multiple ways to be represented. Thus, at the end of this paper, it is shown an alternative way to deal with complex numbers in which the historical part of these numbers is gotten as a motivating element and direction during the activities performance, making possible the construction of their meaning and the suitable comprehension between algebraic and and geometric aspects.

Key-words: High school textbooks; mathematics and Education; Complex Numbers; History of Mathematics.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCN^{+}	Parâmetros Curriculares Nacionais: Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
SEB	Secretaria de Educação Básica
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

Sumário

Introdução

Na Revista do Professor de Matemática (CARNEIRO, 2004), n^o 55, encontramos o seguinte trecho, presente no artigo de José Paulo Q. Carneiro, que nos chama a atenção para um dilema vivido pelos professores do 3^o ano do Ensino Médio:

> Os números complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como "assunto elementar" de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis. De fato, **que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução "imaginária" para uma equação que "sabemos" que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes?** Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos. (CARNEIRO, 2004, p.15)

Notamos em tal texto que o ensino de números complexos, há um bom tempo, vem sendo tratado com descaso por professores dos diversos níveis de ensino, principalmente aqueles que guiam sua prática pelos livros didáticos, restando para os Números Complexos os rótulos acima mencionados. Não devemos pensar que a postura, apresentada no trecho acima, é coisa do passado, pois declarações que corroboram com este ponto de vista ressurgiram recentemente na Revista Cálculo, (VIANA; MENDES, 2014). Em uma parte desta reportagem aparece a pergunta: "O que o professor brasileiro típico tiraria do currículo completamente, ou então mencionaria apenas de passagem?" entre as respostas, podemos observar o comentário a seguir:

> Coitadas das matrizes e dos determinantes, coitados dos números complexos, coitados dos polinômios e das equações polinomiais – fora! "Toda a teoria a partir dos números complexos poderia ser deixada para o ensino superior", diz Claudio Possani. No ensino médio, tais assuntos são adequados para dois tipos de estudantes: o que adora a matemática pura (isto é, a matemática pelo prazer da matemática, sem nenhuma outra justificativa), e o que já tem certeza de que vai entrar na faculdade de física ou de engenharia.(VIANA; MENDES, 2014, p. 30-31)

A leitura deste e de outros textos nos levaram à procura de respostas para esta rejeição aos Números Complexos. O foco inicial de nossa busca por respostas ficou restrito a um meio que tem se mostrado como a principal fonte de preparação e execução das aulas de matemática: o livro didático. Para entendermos os modos de organização e exposição deste conteúdo, tivemos que tentar entender quais informações emanavam dos documentos oficiais, emitidos pelo Ministério da Educação. Além disso, verificamos através da análise direta dos livros didáticos como estas orientações estavam sendo usadas no processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Durante o trabalho, a observação do modo como o conteúdo de números complexos estava sendo articulado nos livros didáticos do PNLD/2015 (BRASIL, 2014), acabou nos mostrando uma grande lacuna a ser explorada como alternativa metodológica de ensino: o uso da história da matemática e parte de textos históricos, como elemento motivador durante as aulas. Pretendemos desta forma, mudar a impressão causada pela prática dos livros didáticos, onde a história dos conjuntos numéricos é apresentada como algo linear e que estes conjuntos foram criados somente da necessidade de resolver um número cada vez maior de equações. Afinal, isto não corresponde à ordem histórica, que é muito mais complexa e cercada de avanços e retrocessos, muitos deles, devidos ao pensamento matemático dominante em determinadas épocas.

No Capítulo 1, faremos um breve histórico da política do livro didático, a importância deste material no processo de ensino-aprendizagem e a identificação das condições, que de acordo com as orientações oficiais, devem estar presente nos livros de modo que estes possam levar mais qualidade didática na compreensão dos números complexos. Em seguida, será feita uma análise qualitativa dos livros do PNLD/2015 (BRASIL, 2014), para mostrar as novidades que foram incorporadas e se o modo de tratar este conteúdo, por parte dos autores, apresentou alguma variação de um livro para outro.

No Capítulo 2, ao idealizar as propostas de atividades, foram levados em consideração a minha prática e experiência docentes. Nestas atividades, tentamos dar uma abordagem que permitisse aos alunos uma articulação entre as partes: histórica, algébrica e geométrica. Tais atividades serão acompanhadas dos respectivos objetivos e orientações metodológicas, indicando os possíveis obstáculos a serem encontrados e as alternativas que podem ser usadas para contorná-los. No final deste capítulo, apresentamos sugestões sobre como encaminhar a formalização deste conceito, seguindo uma abordagem que privilegie a exploração dos textos históricos e que permita explorar novas tecnologias.

Por fim, encerramos fazendo as considerações finais e falando sobre nossas expectativas sobre o ensino dos números complexos.

Capítulo 1

Livro Didático

No final do ano de 2014 as escolas públicas brasileiras fizeram a escolha dos livros didáticos que serão usados nos anos de 2015 a 2017, nas turmas do Ensino Médio. Esta escolha faz parte do Programa Nacional do Livro Didático, PNLD/2015 (BRASIL, 2014).

Após receberem ou acessarem o catálogo disponibilizado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), qual teria sido a surpresa dos professores que analisaram os exemplares? A resposta pode variar de acordo com o tempo de magistério. Os novatos podem até encontrar algumas novidades, mas aqueles que já estão atuando há algum tempo poderiam nos dar respostas, como as que seguem:

- Professor A: O livro X só mudou a capa! Por dentro, continua a mesma divisão!
- Professor B: O livro Y mudou a capa e a ordem de alguns conteúdos!
- Professor C: O livro Z tem uma editoração melhor do que X e Y! Mas os conteúdos diferem muito pouco na divisão por séries!

Embora essas falas sejam criadas, elas provavelmente coincidem com as de muitos colegas Brasil afora. Qual o motivo de, ano após ano, as editoras modificarem tão pouco o formato da distribuição e apresentação dos conteúdos?

Em matéria recente, publicada pela revista Cálculo, Luiz Roberto Dante, conhecido autor de livros didáticos, que vão desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, fez a seguinte declaração:

> Elas (as editoras) precisam vender, mas o comprador, o professor de matemática, se apega à tradição – se a coleção exigir uma modificação grande na rotina, encalha. Só quando o governo entra em ação, e publica diretrizes educacionais bem específicas, é que a sociedade muda mais depressa. (...) talvez seja o problema mais grave com o ensino médio: não há regras claras, e ninguém consegue analisar as questões do ENEM para então deduzir as regras implícitas, se é que existem. (SIMOES, 2015, p. 15)

Será que toda a responsabilidade repousa, realmente, nas mãos do professor ao "comprar" esses livros? Ou será que o professor é apenas uma peça em uma engrenagem, cujo funcionamento é bem mais complexo do que se possa imaginar? A seguir reunimos elementos com a finalidade de esclarecer as ideias e entender o *modus operandi* na elaboração das políticas dos livros didáticos no Brasil.

1.1 Breve História das Políticas Públicas do Livro Didático

Uma análise no texto abaixo, nos mostra como o estado brasileiro atuou nas políticas relativas ao livro didático, no período de 1938 a 1984.

> Mesmo as instituições de peso como a Igreja, as editoras, o mercado livreiro, as associações científicas ou os sindicatos (operários e professores), as organizações de pais e alunos, etc., não tem revelado força suficiente para influenciar essa política estatal, quase integralmente entregue a técnicos e assessores da burocracia governamental, muitas vezes sem as qualificações ou especializações necessárias e sem uma legitimidade que as autorize a definir uma política que hoje afeta (...) milhões de crianças brasileiras e (...) milhares de professores. Nem mesmo as editoras, que à luz de seu poderio econômico teriam condições de influenciar o conteúdo e a distribuição dos livros didáticos, têm usado a sua força para participar com propostas próprias das decisões políticas sobre o livro didático, (...) elas preferem seguir as instruções dadas pelo Estado a respeito do currículo mínimo (núcleo comum e suas adaptações especificas para as diferentes unidades da federação), deixando que o Estado encomende, isto é, compre o maior número de livros de sua coleção. (FREITAG et al., 1993, p. 21-22)

Podemos notar, no trecho acima, vestígios de uma política do livro onde quem comanda o processo do que será veiculado é o aparelho estatal, restando para a sociedade apenas o papel de consumidor do produto final, que será posto no mercado de acordo com as diretrizes estabelecidas pelo estado e sem a participação da sociedade em sua elaboração.

Ao descrever algumas ações governamentais durante o Regime Militar (1964-1984), FREITAG et al. (1993) chamam a atenção para o processo de regionalização do livro didático e do perigo e distorções das propostas, segundo as autoras, somente haveria condições de produzir um livro de melhor qualidade se ocorresse uma reestruturação global do sistema educacional e uma elevação geral do nível de profissionalização de todos os agentes envolvidos. Mas ressaltam que esta proposta só faria sentido em um nível específico da educação.

Ao falar sobre as comissões ou instituições estatais dessa época, que eram responsáveis pela avaliação dos livros, são discutidos os riscos e problemas advindos da avaliação de qualidade dos livros didáticos. Dois desses riscos que nos chamam a atenção são:

a) a fixação de supostos critérios de qualidade para garantir o monitoramento político-ideológico do conteúdo curricular.

b) a falta de confiança na competência atribuída a funcionários públicos ou pessoas de "confiança" (política) do Ministro, pois os mesmos poderiam se sujeitar a pressões externas, seja de políticos ou editoras.

As autoras encerram falando sobre as dificuldades para se encontrar soluções ideais que atendam os interessados no livro didático, no que diz respeito à avaliação da qualidade, e sugere como proposta a criação de comissões mistas, integradas por representantes de todos os setores da sociedade, como vem sendo praticado em alguns países como a Suíça, Áustria e República Federal da Alemanha. Além disso, FREITAG et al. (1993) nos lembram que a defesa da qualidade do livro didático implica um esforço coletivo não somente de avaliação justa, mas também em um esforço financeiro, para assegurar um produto que não tenha somente valor de troca mas efetivamente valor de uso para o aluno.

Outro fator que chama a nossa atenção é a questão da economia e do formato do livro didático e no modo como o Estado interfere no processo de produção do livro didático, tanto na entrada quanto na saída.

> Verdade é que o roteiro que orienta a formulação dos conteúdos de um Livro didático específico, consubstanciado nos currículos mínimos (guias curriculares) é definido pelas várias instâncias estatais, que com isso fazem indiretamente sua encomenda aos livreiros. Estes, atendendo o pedido do Estado, esperam corresponder à sua expectativa, já que ele será o grande comprador de quase toda a produção editorial do livro didático. A fim de minimizar os riscos, as editoras se atem o mais próximo possível as guias curriculares, o que em parte explica, no que tange o conteúdo, a pouca variabilidade da oferta, entre as editoras, e dentro da mesma editora. As variações ocorrem meramente na forma de apresentação e diagramação do livro. (FREITAG et al., 1993, p. 51-52)

No trecho anterior temos a oportunidade de ver que as práticas adotadas pelos gestores, no que se refere à economia do livro didático, têm sofrido muito poucas alterações de um período para outro. FREITAG et al. (1993) destacam que uma característica de produto da indústria cultural, é a padronização. Para a unanimidade dos críticos do livro didático, as diferenças entre um livro e outro, uma editora e outra, um autor e outro, são mínimas. Ao tecer comentários sobre o mecanismo de padronização em vigor no mercado livreiro, encontramos o seguinte relato:

> Os representantes das editoras viajam pelo país, em busca de autores e manuais improvisados. Recebem um percentual sobre cada manuscrito encaminhado à editora, mesmo que este não seja utilizado. Um manuscrito lançado que tenha chances de mercado, é imediatamente reproduzido, às vezes pela mesma editora, em várias edições ou coleções. Outras editoras o tomam como modelo, para produzir a sua versão, muito próxima da

> primeira. Tampouco os autores imprimem aos livros-texto, cartilhas, livro didático, a sua marca pessoal. Ao contrário, quanto mais insignificantes, mais próximos da norma ("currículo mínimo", "guia curricular") definida pelo Estado, melhor. As diferenças vão sendo niveladas no decorrer do tempo, caracterizando-se os livros por sua homogeneidade, mediocridade e rotina (repetição dos mesmos exercícios, inclusive em séries diferentes) (FREITAG et al., 1993, p. 62).

De acordo com informações disponíveis no *site* do FNDE, de 1985 a 1994 o país passou por uma estagnação nos programas do livro didático, devido ao período de recessão econômica do país, não havendo muitos progressos nas políticas do livro didático. O processo de retorno às políticas do livro são retomadas em 1993/94, quando foram definidos critérios para avaliação dos livros didáticos, com a publicação "Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos" MEC/FAE/UNESCO. De acordo com Munakata (2003) o PNLD, pelo qual o governo distribui livros didáticos a todas as escolas públicas do país, instituiu, a partir de 1995, a avaliação prévia das obras a serem selecionadas pelo professor, buscando induzi-lo na sua escolha. Porém, este autor ressalta que os resultados desse processo mostram, no entanto, que há disparidade entre o que o governo recomenda e o que os professores efetivamente escolhem. Esta observação deve-se ao fato de ter ocorrido, em 1996, escolha de livros que foram reprovados pelo MEC/FAE.

As informações do portal do FNDE nos mostram que os períodos seguintes a 1995 continuaram com o processo de ampliação dos programas relacionados ao livro didático. O Ensino Médio só fez parte deste programas a partir de 2005, com livros para a 1^a série das disciplinas de Português e Matemática, para as regiões Norte e Nordeste, e em 2006, as demais regiões do país. Nesta época os livros do ensino médio integravam o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM). Passando a integrar o PNLD somente em 2010.

Embora o PNLD tenha passado por reformulações, dentre as quais enfatizamos a que se refere à avaliação das obras, por uma equipe compostas por reconhecidos profissionais de diversas instituições de ensino do país, o quadro delimitado acima nos mostra que não podemos esperar muitas mudanças significativas nas obras do PNLD, pois tais livros, ao serem avaliados, passarão pelo crivo das orientações oficiais, ficando dessa forma o padrão das editoras vinculado à produção de livros didáticos que visam a aprovação pela equipe avaliadora.

1.2 Os Números Complexos e as Orientações Oficiais

Nesta seção temos o objetivo de situar o ensino da Matemática, e por conseguinte os números complexos, no contexto das orientações emanadas do MEC através dos documentos oficiais: PCNEM (BRASIL, 1999, p. 252), PCN+ (BRASIL, 2002, p. 111) e OCEM (BRASIL, 2006, p. 71).

A respeito do caráter formativo e instrumental da Matemática podemos observar a seguinte consideração,

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas, PCNEM (BRASIL, 1999, p. 252).

Entretanto, este documento ressalta que a Matemática no Ensino Médio não possui apenas estes caráteres, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Mais adiante, nesta parte, é lembrada a importância de que "o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas".

Esta necessidade de conduzir o ensino de Matemática além do caráter instrumental, também é reforçada no PCN+ (BRASIL, 2002), ao afirmar que ela deve assumir também o "papel de integração junto às demais Ciências da Natureza".

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação, PCN+ (BRASIL, 2002, p. 111).

Uma maneira de concretizar o significado e o desenvolvimento de competências e habilidades é prevista no PCNEM (BRASIL, 1999) [1]. No PCN+ (BRASIL, 2002) é enfatizado que:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. **Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos**, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas, PCN+ (BRASIL, 2002, p. 112).

O trecho acima reforça que na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas dá ao aluno a oportunidade de pensar por si só e perseverar na

[1] A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem seguidas: (i) Representação e comunicação; (ii) Investigação e compreensão; (iii) Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural

busca da solução, mas lembra-se que isso não significa que exercícios do tipo "calcule...", "resolva" devam ser excluídos, porque cumprem sua função no aprendizado de técnicas e propriedades, mas que de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho.

As informações contidas em PCN+ (BRASIL, 2002) tornaram possível a reflexão sobre várias competências e habilidades que podem ser desenvolvidas no ensino de Números Complexos, principalmente aquelas relacionadas com: a construção histórica da unidade imaginária, as interpretações geométricas dos significados das operações e as aplicações. O ensino realizado de modo a trabalhar essas competências e habilidades é uma oportunidade para tentar tornar os Números Complexos menos "imaginários" e mais "reais", assim como fizeram Wessel, Argand e Gauss.

Tentamos destacar, na lista abaixo, as competências que podem ser exploradas no ensino dos Números Complexos de modo a propiciar ao aluno um processo investigativo que o auxilie na apropriação do conhecimento:

- Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática;
- Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações;
- Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra;
- Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema;
- Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, etc;
- Expressar-se de forma oral para comunicar ideias, aprendizagens e dificuldades de compreensão;
- Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções;
- Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema;
- Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática;
- Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada;

- Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades;
- Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios.
- Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada.
- Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo.
- Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, e nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia;
- Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas.

De acordo com PCN+ (BRASIL, 2002), o ensino de Matemática no Ensino médio é organizado de acordo com os seguintes temas estruturadores: (1) Álgebra - números e funções, (2) Geometria e medidas, e (3) Análise de dados. Porém, em OCEM (BRASIL, 2006) os conteúdos básicos estão organizados em quatros blocos: Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de dados e Probabilidade.

Podemos observar que o ensino de números complexos, no PCN+ (BRASIL, 2002), foi alocado no Tema Álgebra e em OCEM (BRASIL, 2006) encontra-se no bloco dos Números e Operações, notamos também que esses documentos apresentam as seguintes considerações a respeito do assunto:

> - Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, **eventualmente, os números complexos** e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais, PCN+ (BRASIL, 2002, p. 120).
> - Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$, OCEM (BRASIL, 2006, p. 71).

O discurso acima, presente em OCEM (BRASIL, 2006), é muito parecido com o que é apresentado na introdução de alguns livros didáticos, ficando a impressão para aqueles que desconhecem um pouco a História da Matemática, de que a origem deste números se encontra na resolução de equações quadráticas, e não nas equações algébricas do terceiro grau.

Observamos que apesar de todas as propostas contidas nestes documentos a respeito dos conteúdos a serem trabalhados e das competências e habilidades a serem alcançadas, ao tratar como o conteúdo referente aos Números Complexos deve ser trabalhado, tanto em PCN+ (BRASIL, 2002) quanto em OCEM (BRASIL, 2006), notamos um certo descaso, pois não é dada a devida importância que estes números merecem. Naqueles documentos podemos notar essa atitude de relegar este conteúdo a um segundo plano (ou até desconsideração em alguns currículos) nos seguintes trechos:

- Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas, PCN+ (BRASIL, 2002, p. 122).
- Outro tópico que pode ser tratado como **tema complementar** [2] é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano, OCEM (BRASIL, 2006, p. 71).

Infelizmente as breves orientações contidas nestes documentos tem a intenção de induzir os professores a atrelar o ensino dos números complexos ao estudo das equações algébricas, ficando este conteúdo à espera de professores de boa vontade que possam implementá-los como parte diversificada do currículo. Porém, gostaríamos de lembrar a fala de Carneiro a respeito do ensino desses números:

> A humanidade levou milhões de anos para descobrir os números complexos, mas somente 200 anos após começou a perceber o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação desta descoberta. Passados mais 200 anos, o ensino dos números complexos necessita beber mais nesta fonte que é a abordagem geométrica dos números complexos, ainda mais agora que possuímos o recurso dos programas de computador para a Geometria. (CARNEIRO, 2004, p. 24)

Diante destas considerações somos obrigados a discordar das orientações oficiais, pois mesmo isolado dos estudos de equações, o conjunto dos números complexos não perde seu significado, inclusive para alunos que não vão seguir seus estudos nas áreas das Ciências Exatas. Portanto, este conteúdo pode ser uma oportunidade de podermos relacionar conteúdos internos da matemática, tais como a trigonometria e a geometria analítica, e o que será nossa meta neste trabalho: reconstruir os conceitos levando-se em consideração a articulação entre a História da Matemática, a Álgebra e a Geometria.

[2] Esses tópicos que podem servir muito bem aos propósitos das feiras e dos clubes de ciências, ou para atividades em laboratórios de Matemática, ou ainda para compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo, OCEM (BRASIL, 2006, p. 92)

1.3 Os Números Complexos e os Livros Didáticos PNLD/2015

Nesta seção, mostraremos a abordagem feita pelos autores dos livros didáticos (LD) que aparece no Guia do PNLD/2015 (BRASIL, 2014), para apresentar os números complexos aos alunos do 3^o ano do ensino médio, ou seja, focaremos apenas nos volumes de número 3, das coleções que serão adotadas nas escolas públicas do país.

Vale lembrar que no ano de 2001, um grupo de professores coordenado por Elon Lages Lima realizou a análise de 12 coleções de livros didáticos disponíveis no mercado. Nesta publicação há várias críticas às coleções de ensino médio, sejam conceituais ou de tipografia. Passados mais de 10 anos vamos verificar se ainda persistem alguns dos problemas apresentados por aquele livro.

Iniciaremos a revisão das obras na ordem em que aparecem no Guia do PNLD/2015 (BRASIL, 2014), lembrando que esses livros didáticos são editados dois anos antes de serem usados, isto significa que os livros que estarão sendo apreciados tem como data de edição o ano de 2013.

1.3.1 Conexões com a Matemática - LD1

Esta coleção tem como editor responsável Fábio Martins de Leonardo e está na 2^a edição, sendo publicada pela Editora Moderna em 2013 (LEONARDO, 2013).

O número de páginas destinadas ao estudo de Números Complexos é 22, o que corresponde a aproximadamente $9,87\%$ do total de 223 páginas do volume 3 desta coleção. A seguir faremos alguns comentários sobre os temas abordados na obra.

História. Nesta obra, a história dos números complexos, é restrita à referência de nomes, datas e contribuições dos matemáticos, não sendo utilizada como elemento motivador na construção dos conceitos dos números complexos. A unidade imaginária i segue a tradição da apresentação por "decreto", ou seja, não é criado para o leitor uma sequência de argumentos lógicos que justifiquem o porquê de $i^2 = -1$.

Forma Algébrica. Observamos que:

- O complexo z é chamado de imaginário puro, quando a parte real de z é nula e a parte imaginária é não nula.
- A igualdade e o conjunto dos números complexos são apresentados. Mas o uso do diagrama na página 165 pode induzir os alunos a concluírem, de forma incorreta, que existem tantos racionais quantos irracionais, conforme ilustra a Figura 1.
- A adição, a multiplicação e o conjugado recebem as devidas justificativas, mas as propriedades do conjugado, o inverso e a divisão aparecem como receitas a serem seguidas.

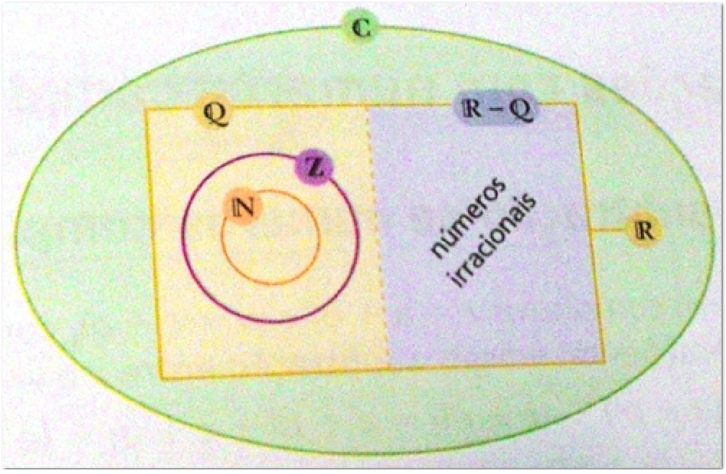


Figura 1 – Diagrama disponível em LD1

- Chega-se à regra para calcular as potências de i por analogia a alguns casos apresentados, desprezando-se assim a sua demonstração, que é acessível aos alunos deste nível de ensino.

- Todos os exercícios resolvidos ou propostos seguem a receita da manipulação dentro da forma algébrica sem nenhum apelo à interpretação geométrica destes números.

Representação Geométrica: Notamos que são apresentados o plano de Argand-Gauss e a relação dos números complexos com os pontos deste plano. O número complexo é apresentado como um vetor e usado no cálculo do módulo de um complexo z. O argumento θ é definido para ângulos de $0 \leqslant \theta < 2\pi$, o que poderá causar confusões quando os alunos forem trabalhar as operações na forma trigonométrica.

Neste livro o ponto $P(a, b)$ é chamado de imagem de z nesse plano ou o afixo do número complexo $z = a + bi$, vemos nesta definição que o erro alertado por Lima (2001) de "considerar afixo e imagem como sinônimos", ainda persiste neste livro.

Exercícios Resolvidos (E.R) e Propostos (E.P). Os E.R ilustram as aplicações dos conteúdos abordados no texto e os E.P são destinados à fixação de conteúdo.

Nas páginas $170 - 171$ destacamos E.R11 e E.P26, indicados nas Figuras 2 e 3, por retomarem conteúdos de geometria analítica. Na página 171, E.R12 e E.P24 ilustrados nas Figuras 4 e 5, lembram conteúdos relacionados com o círculo trigonométrico.

A maioria das atividades propostas nesta parte tem forte apelo à manipulação e memorização.

R11. Representar no plano complexo todos os números complexos cuja distância de suas imagens à origem (0, 0) do plano de Argand-Gauss seja igual a 3.

▸ ***Resolução***

Note que todos os pontos do plano que distam 3 da origem (0, 0) definem uma circunferência de centro na origem e raio 3.

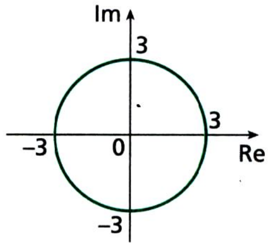


Figura 2 – E.R11 disponível em LD1

26. Represente no plano os números complexos z tais que:

a) $|z| = 5$ **c)** $|z - 2| = 1$

b) $|z| > 2$ **d)** $|z + i| < 4$

Figura 3 – E.P26 disponível em LD1

R12. Representar geometricamente o número complexo $z = 2 + 2i$ e obter o módulo e o argumento de z.

▸ ***Resolução***

No plano, $z = 2 + 2i$ é representado pelo ponto $P(2, 2)$.

O módulo de z é dado por: $\rho = d_{O,P} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Para obter o argumento de z, vamos considerar o triângulo retângulo OAP.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{AP}{OP} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $0 \leq \theta < 2\pi$, temos $\theta = \frac{\pi}{4}$.

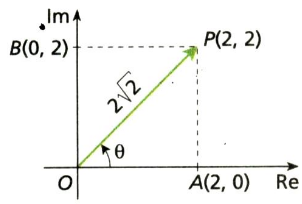


Figura 4 – E.R12 disponível em LD1

24. Represente no plano complexo e obtenha $|z|$ e $\arg(z)$.

a) $z_1 = 1 + i$ **c)** $z_3 = 5i$

b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$ **d)** $z_4 = -2\sqrt{3} + 2i$

Figura 5 – E.P24 disponível em LD1

Forma Trigonométrica ou Polar: é encontrada, tratando um número complexo como um vetor e com o uso da forma algébrica e das relações trigonométricas, obtém-se o resultado

$$z = |z|(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta).$$

Na Figura 6, aparece pela primeira vez a representação gráfica do conjugado de um número complexo z.

R15. Determinar o módulo, o argumento e a forma trigonométrica do conjugado de $z = 1 + i$. Representar num mesmo plano complexo z e $\bar{z}$.

▶ ***Resolução***

Dado $z = a + bi$, temos que $\bar{z} = a - bi$. Note que: $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$.

Assim: $|\bar{z}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (sendo $\bar{z} = 1 - i$)

Sendo $\theta_1 = \arg(z)$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Sendo $\theta_2 = \arg(\bar{z})$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{(-1)}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(\bar{z}) = \theta_2 = \frac{7\pi}{4}$$

Então: $\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

Note que $\arg(\bar{z}) = \dfrac{7\pi}{4}$ é côngruo a $-\dfrac{\pi}{4} = -\arg(z)$. Assim:

$$\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2} \cdot [\cos(-\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(-\theta_1)]$$

Geometricamente, z e $\bar{z}$ são representados por pontos simétricos em relação ao eixo real.

Reflita

Todo número complexo pode ser representado na forma trigonométrica? Justifique.

Não, $z = 0$ não tem forma trigonométrica, pois o argumento só está definido para números complexos não nulos.

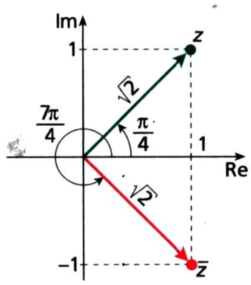


Figura 6 – E.R15 disponível no LD1

Na página 173 aparece o E.P32, ilustrado na Figura 7, que se utilizado adequadamente pelo professor, pode servir de motivação para entender o produto de uma forma geométrica, caso contrário servirá apenas de exercício manipulativo.

32. Sejam os números $z = 1 + i\sqrt{3}$ e $w = 2\sqrt{3} + 2i$.

a) Expresse z, w e zw na forma trigonométrica.

b) Compare o módulo e o argumento de zw com o módulo e o argumento de z e de w.

Figura 7 – E.P32 disponível no LD1

Outra atividade que, se bem utilizada, pode gerar uma interpretação gráfica interessante é o E.P34 da página 173, apresentado na Figura 8, que trata do produto de $z.i$, mas, pela resolução apresentada no manual do professor, parece que a ênfase está atrelada à observação da soma dos argumentos, não sendo dada nenhuma ênfase à questão da rotação.

As operações de multiplicação e divisão, na forma polar, são devidamente justificadas, tendo por referência a forma algébrica. Porém não é feita nenhuma observação a respeito da relação dessas operações com as rotações e homotetias. No E.R17 da página 174, mostrado na Figura 9 aparece um breve comentário sobre rotação e produto dos módulos, não aparecendo mais em outras partes da obra. Neste exercício fica uma

34. Considere o complexo $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

a) Calcule o produto iz.

b) Represente os vetores correspondentes a z e iz num mesmo plano complexo.

c) O que ocorreu com o vetor correspondente quando multiplicamos z pela unidade imaginária i?

d) Discuta com um colega se a resposta do item **c** pode ser generalizada para qualquer complexo z. Justifiquem.

Figura 8 – E.P34 disponível no LD1

R17. Sejam os números complexos z e w, escritos na forma trigonométrica:

$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$ e $w = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

a) Obter o produto zw.

b) Representar os vetores associados a z, w e zw no plano complexo.

Reflita

Se $z = \rho(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)$ e $w = \cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2$, qual será a interpretação geométrica do produto zw?

Como w tem módulo igual a 1, o módulo de zw será igual ao de z. Disso segue que o vetor associado a z vai mudar da direção θ_1 para a direção $\theta_1 + \theta_2$, mas permanecerá com mesmo módulo.

▶ ***Resolução***

a) $zw = 2 \cdot 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 8 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

b) A representação dos vetores é mostrada na figura a seguir.

Observe que o produto zw representa uma rotação, no sentido anti-horário, de $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$ em relação a z, ou seja, o número complexo z, que possui argumento $\frac{\pi}{6}$, ao ser multiplicado por w, o vetor associado ao número complexo z, sofreu uma rotação equivalente a $\frac{2\pi}{3}$, que é o argumento de w. Assim, o produto zw possui argumento $\frac{5\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$. Além disso, o módulo de zw é igual ao produto dos módulos dos números complexos z e w, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$.

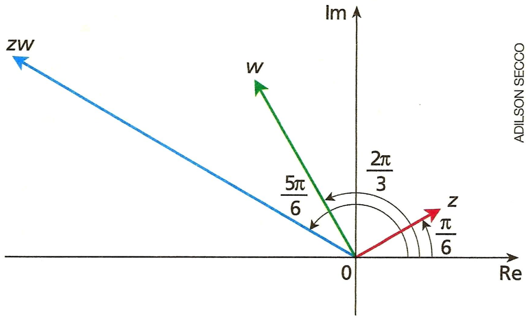


Figura 9 – E.R17 disponível no LD1

dúvida a respeito de $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$, o que se deseja com esta forma de escrita? Dizer que $\frac{2\pi}{3}$ é multiplicado por $\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$ ou que $\frac{2\pi}{3}$ é igual a $\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$? Parece um erro de diagramação que cria uma interpretação dúbia.

Em relação às **Fórmulas de De Moivre**, notamos que a 1^a fórmula é deduzida corretamente, para n natural. Para n inteiro é mencionado que esta fórmula é válida, mas sua demonstração não é incentivada, ficando a critério do professor este trabalho.

Na página 176 aparecem os E.R18 e E.R19, ilustrados nas Figuras 10a e 10b, que embora sejam manipulativos, retomam alguns conceitos de trigonometria ligados ao cálculo do argumento. Os demais exercícios seguem o padrão de repetição e memorização.

R18. Dado o número complexo $z = -1 - i\sqrt{3}$, calcular z^{50}.

▸ ***Resolução***

Inicialmente, vamos determinar o módulo e o argumento de z. Em seguida, aplicamos a 1ª fórmula de De Moivre.

O módulo de z é:

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

O argumento de z é:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{4\pi}{3}$$

$$z^{50} = 2^{50}\left[\cos\left(50 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(50 \cdot \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$z^{50} = 2^{50} \cdot \underbrace{\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{forma trigonométrica}}$$

(a) E.R18

R19. Considerando o número complexo $w = (1 + i)^n$, obter os valores inteiros de n para que w seja um número real positivo.

▸ ***Resolução***

Inicialmente, vamos expressar a base $1 + i$ na forma trigonométrica. Para isso, devemos achar o módulo ρ e o argumento θ de $1 + i$.

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$$

Assim: $1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$

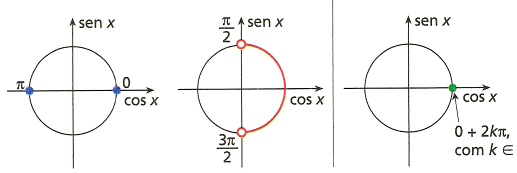
Agora, vamos obter w elevando $1 + i$ à potência n:

$$w = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left[\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Para que w seja real positivo, devemos ter:

$$\begin{cases} \text{Im}(w) = \text{sen}\left(n \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \text{Re}(w) = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases}$$

(I) $\text{sen } x = 0$ **(II)** $\cos x > 0$ **(I)** $\cap$ **(II)**



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Assim:

$$n \cdot \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi \Rightarrow \frac{n}{4} = 2k \Rightarrow n = 8k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Logo: $n \in \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \ldots\}$

(b) E.R19

Figura 10 – Exercícios Propostos no LD1

A 2^a Fórmula de De Moivre é apresentada como uma receita a ser seguida, sem justificativas de como chegar a este resultado. Um ponto positivo é que elas recebem uma representação gráfica. Os exercícios que seguem são de aplicação desta fórmula, seguidas das representações geométricas.

Na seção Exercícios Complementares (E.C), destacamos os E.C11, E.C12b e E.C19, da página 180, mostrados nas Figuras: 11a, 11b e 12, que fazem um apelo às representações e transformações gráficas.

Na página 181 a redação da questão 9, da seção *Autoavaliação*, apresentada na Figura 13, deixa margem a uma interpretação dúbia no enunciado. Uma redação possível seria: O produto $(1 + i).i$ representa geometricamente uma ..... de .... graus, em sentido anti-horário, de $1 + i$ em relação à origem.

11. Resolva geometricamente a inequação modular complexa $|z + 8| \leqslant 5$, com $z = x + yi$ e $x, y \in \mathbb{R}$.
Entre os pontos do lugar geométrico da solução da inequação dada, determine aquele que está mais próximo do ponto (5, 0). Ver resolução no

(a) EC 11

12. (Vunesp) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$, sendo i a unidade imaginária.
a) Determine $z \cdot w$ e $|w - z|$. $-7 + i$ e 5
b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, com $b \geqslant 0$, de modo que os números complexos z, w e $t = bi$ sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20. Ver resolução no Guia do professor.

(b) EC 12b

Figura 11 – Exercícios Complementares disponível em LD1

19. Se o vetor que representa $z = 2 + i$ sofrer uma rotação de 90° no sentido horário, vai se tornar a representação do número complexo w.
Determine w. $w = 1 - 2i$

Figura 12 – EC19 disponível em LD1

9. O produto $(1 + i) \cdot i$ representa geometricamente uma ______ em relação a $(1 + i)$ de ______ graus.

a) rotação; 45 **c)** rotação; 90 alternativa c
b) translação; 90 **d)** translação; 45

Figura 13 – Exercício 9, da seção *Autoavaliação*, disponível em LD1

A seção *Resolução Comentada* pode ser vista como um ponto positivo, pois resgata conteúdos de geometria analítica, lei dos cossenos e utiliza a forma trigonométrica para encontrar a solução da questão. É uma pena que não tenha sido explorada a interpretação geométrica do produto de $z.i$, pois ela daria uma solução mais elegante para a atividade.

Um cuidado a ser tomado pelos usuários deste livro diz respeito aos conceitos que são explorados nos E.R por questões de redução de páginas, de acordo com o edital do PNLD.

1.3.2 Contextos e Aplicações - LD2

Esta coleção tem como autor Luiz Roberto Dante e está na 2^a edição, sendo publicada pela Ática em 2013 (DANTE, 2013). São destinadas 26 páginas para a abordagem deste assunto, correspondendo a $12,87\%$ do total de 202 páginas do Volume 3 desta coleção.

No início do capítulo é feita a sua apresentação como assunto opcional, seguindo as sugestões dos documentos oficiais e as dos currículos de algumas Secretarias Estaduais de Educação.

História. A abordagem histórica deixa a desejar, ficando restrita à referência de nomes, datas e contribuições dos matemáticos. Não notamos nenhuma intenção de usá-la como elemento motivador na construção dos conceitos.

Forma Algébrica. Nesta obra a unidade imaginária i aparece por decreto. Em seguida, destacamos o seguinte comentário do autor (pág.146): “Hoje, a notação preferida para definir os elementos do conjunto complexo é a forma algébrica”. Seria razoável dizer que esta é uma notação consagrada pelos livros, não é coisa da atualidade!

Notamos que este autor, com base nos documentos oficiais, continua motivando a introdução dos números complexos com o equívoco histórico de que eles surgiram pela necessidade da ampliação do conjunto dos números reais para permitir que todas as equações do segundo grau tivessem solução. Na introdução dos números complexos, o autor faz a seguinte colocação:

> Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geqslant 0$. Assim a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$, e não existe número x que elevado ao quadrado resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado *conjunto dos números complexos*. (DANTE, 2013, p. 146)

Destacamos também a escolha, não muito feliz, de apresentar a adição e a multiplicação de forma intuitiva. Esta escolha pode levar à sistematização precoce destas operações na *Forma Algébrica*. Os exercícios dedicados a esta parte são todos de repetição e memorização, sendo a resolução restrita a manipulações na forma algébrica.

9. Dado $z \neq 0$, determine $\frac{1}{z}$ na forma $a + b$i de tal modo que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (questão proposta anteriormente).

Resolução:

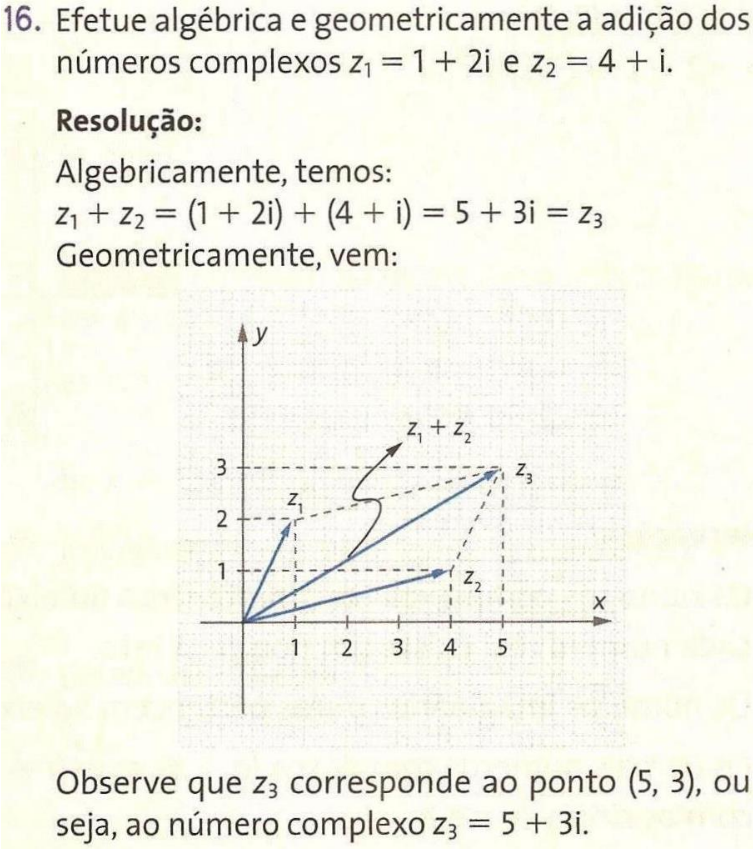
Basta multiplicar numerador e denominador por $\bar{z}$, ou seja, pelo conjugado de z, que é diferente de 0, pois $z \neq 0$. Assim:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \Rightarrow \frac{1}{a+b\mathrm{i}} = \frac{a-b\mathrm{i}}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})} = \frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2} =$$
$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

Figura 14 – E.R9 disponível em LD2

O conjugado é definido e usado em E.R9 da página 149, ilustrado na Figura 14, para encontrar o inverso de z, representado por $1/z$. Porém a divisão é apresentada na forma de receita, cabendo ao professor fazer a sua relação com o inverso de z.

Representação Geométrica. Notamos que na página 151, ainda aparece um erro que, segundo Lima (2001), é um dos mais comuns nos livros didáticos sobre números complexos: dizer que o ponto (a, b) é o afixo do número complexo $a+bi$. Afixo de um ponto é o complexo cuja imagem é o ponto. Nesta parte, na página 152, merece destaque a representação geométrica do conjugado e a interpretação geométrica da soma no E.R16, ilustrado na Figura 15, usando a regra do paralelogramo.



16. Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Resolução:

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem:

Observe que z_3 corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

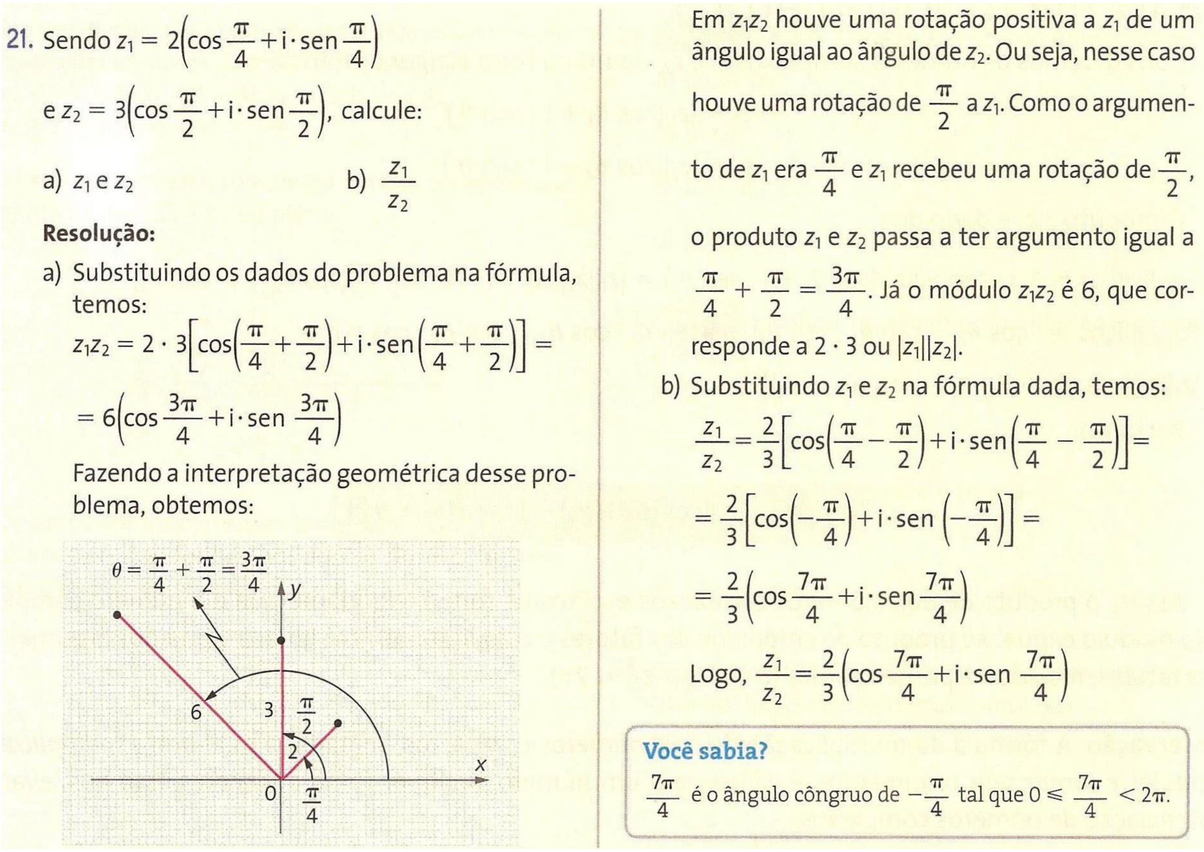
Figura 15 – E.R16 disponível em LD2

O módulo de um número complexo é obtido pelo teorema de Pitágoras no cálculo da distância de O até o ponto $Z(a, b)$.

Em relação ao módulo de um número complexo podemos elogiar a observação sobre o significado de $|z - w|$ como distância dos pontos z e w no plano. Porém, a interpretação geométrica do módulo de um complexo é explorada de maneira muito superficial. Não há um exercício para ilustrar, por exemplo, que os complexos z, que são solução da equação $|z - p| = r$, onde p e r são reais, estão em uma circunferência de centro $(p, 0)$ e raio r. Também não é estabelecida a relação entre o módulo de um complexo e a desigualdade triangular para números complexos. Os exercícios que seguem são de repetição e memorização.

Forma Trigonométrica ou Polar. É apresentada de forma satisfatória, inclusive associa z a um vetor $\overrightarrow{OZ}$. O argumento de um número complexo fica restrito ao intervalo $[0, 2\pi[$.

A multiplicação é feita de maneira formal e demonstrada, ficando a divisão como tarefa para o professor. A representação gráfica da multiplicação de complexos aparece como um dos pontos positivos do livro, porém, o objetivo do autor não é explorá-la suficientemente, pois apenas no E.R21 da página 158, mostrado na Figura 16, é feito um breve comentário sobre o produto $z_1 \cdot z_2$ e a rotação de z_1 em relação a z_2.



21. Sendo $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, calcule:

a) z_1 e z_2 b) $\frac{z_1}{z_2}$

Resolução:

a) Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\ \frac{3\pi}{4}\right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:

Em z_1z_2 houve uma rotação positiva a z_1 de um ângulo igual ao ângulo de z_2. Ou seja, nesse caso houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a z_1. Como o argumento de z_1 era $\frac{\pi}{4}$ e z_1 recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto z_1 e z_2 passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo z_1z_2 é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$ ou $|z_1||z_2|$.

b) Substituindo z_1 e z_2 na fórmula dada, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\ \frac{7\pi}{4}\right)$

Você sabia?

$\frac{7\pi}{4}$ é o ângulo côngruo de $-\frac{\pi}{4}$ tal que $0 \leqslant \frac{7\pi}{4} < 2\pi$.

Figura 16 – E.R21 disponível em LD2

No que diz respeito à definição de argumento, seria razoável não restringi-los ao intervalo $[0, 2\pi[$, pois desta forma não ficaria inválida a propriedade de que o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores.

Nota-se que, a maioria dos exercícios são de memorização e repetição, com exceção do E.P24 da página 156, apresentado na Figura 17, que faz um apelo muito superficial à geometria analítica.

24. DESAFIO EM EQUIPE Localizem graficamente o número complexo z tal que:

a) $|z| = 4$

b) $|z| > 4$

c) z é um imaginário puro e $|z| \geqslant 4$

Figura 17 – E.P24 disponível em LD2

A *1ª Fórmula de De Moivre* é demonstrada para n natural e feita a ressalva para $n = 0$. Na Figura 18, apresentamos o E.R23 da página 159, que refere-se a um problema interessante, mas a resolução não depende de conhecimentos dessa fórmula. Teria sido mais proveitoso se usado na seção anterior. Os demais exercícios são resolvidos pela aplicação direta das relações obtidas neste item.

23. (UFRJ) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representadas pelos números complexos z e w a seguir: $z = \alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $w = z^2$, sendo α um número real fixo, $0 < \alpha < 1$. Determine a hora do jantar.

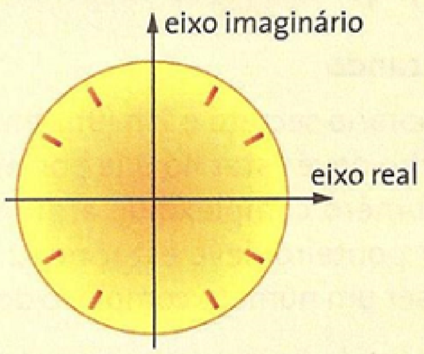


Figura 18 – E.P23 disponível em LD2

Já a *2ª Fórmula de De Moivre* é precedida de alguns comentários sobre a raiz enésima de um número complexo. A dedução é feita de maneira formal e, em seguida, é feita a representação geométrica das n raízes como vértices de um polígono regular de n lados. Os exercícios são manipulativos na forma trigonométrica.

Na seção *Aplicação à Geometria* são apresentados dois problemas interessantes, na forma de exercícios resolvidos. Se os alunos tiverem construído nesta unidade uma visão vetorial dos números complexos estas soluções poderão ser resolvidas de forma mais elegante.

1.3.3 Matemática Paiva - LD3

Esta coleção tem como autor Manoel Paiva e está na 2^a edição, sendo publicada pela Moderna em 2013 (PAIVA, 2013). São destinadas 25 páginas para a abordagem do assunto, correspondendo a $10,82\%$ do total de 231 páginas do volume 3 da coleção.

História. Aparece de forma muito breve na introdução junto a um problema que será modelado por uma equação cúbica. Na resolução aparece a seguinte receita: “este método consiste em substituir x por $u - v$, de modo que o produto seja igual à terça parte do coeficiente de x, ...” (PAIVA, 2013, p. 141), é oportuno notar que não é feita nenhuma observação sobre o motivo de tal procedimento.

A unidade imaginária é justificada pelo autor como uma necessidade para que a radiciação seja possível e deve satisfazer a condição $i^2 = -1$. Em seguida é definido o que vem a ser um número complexo.

Forma Algébrica. Segue a forma tradicional de apresentação e, mais uma vez, o complexo z é chamado de imaginário puro, quando a parte real de z é nula e a parte imaginária é não nula.

A igualdade e o conjugado são apresentados corretamente, na forma algébrica. Em relação às operações elementares notamos que são apresentadas e realizadas as justificativas para a soma e produto. Porém, a divisão é exemplificada e apresentada na receita $\dfrac{z}{w} \cdot \dfrac{\overline{w}}{\overline{w}}$ onde $\overline{w}$ representa o conjugado de w. Além disso, o comentário sobre o inverso de z, apresentado na página 145, não é de grande utilidade no entendimento da receita da divisão.

Na página 147 são apresentadas as potências de números complexos com expoentes inteiros, assim como suas propriedades. Mas fica uma dúvida: será que o autor quer mostrar o quão trabalhoso é calcular as potências inteiras de $a + bi$?

O cálculo para as potências de i são devidamente demonstradas para n inteiro. Em relação aos exercícios resolvidos (E.R) ou propostos (E.P) notamos que estão restritos à manipulação dentro da forma algébrica, não existindo nenhuma conexão com interpretações geométricas destes números.

Representação Geométrica. Aqui o autor usa a correspondência entre os números reais e a reta como motivação. Em seguida, aproveitando esta motivação estabelece a correspondência biunívoca: “cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano, e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo”, (PAIVA, 2013, p. 149).

Pela primeira vez, na página 150, aparecem atividades, nos E.R10 e E.P20, ilustrados nas Figuras 19 e 20, que retomam conceitos de geometria analítica. O módulo é definido

R.10 Representar no plano complexo o L.G. (lugar geométrico) das imagens dos números complexos z que satisfazem a equação $zi - \overline{z} = -3 + 3i$.

Resolução

Lugar geométrico é qualquer conjunto de pontos, podendo até mesmo ser o conjunto vazio. Desse modo, o enunciado dessa questão pede o conjunto de pontos do plano complexo que representam os números complexos z tais que: $zi - \overline{z} = -3 + 3i$.

Indicamos o número complexo z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, obtendo:

$zi - \overline{z} = -3 + 3i \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + yi)i - (x - yi) = -3 + 3i$

$\therefore xi - y - x + yi = -3 + 3i$

$\therefore -(x + y) + (x + y)i = -3 + 3i$

Pela definição de igualdade entre números complexos, temos:

$$\begin{cases} -(x + y) = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = 3$$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + yi$ é a reta r de equação $x + y = 3$, cujo gráfico é:

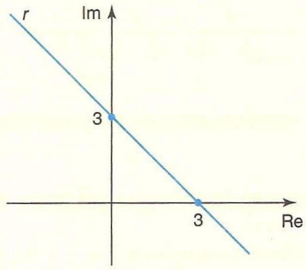


Figura 19 – E.R10 disponível em LD3

20 Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. (lugar geométrico) das imagens dos números complexos z tais que $\overline{z} = \dfrac{16}{z}$.

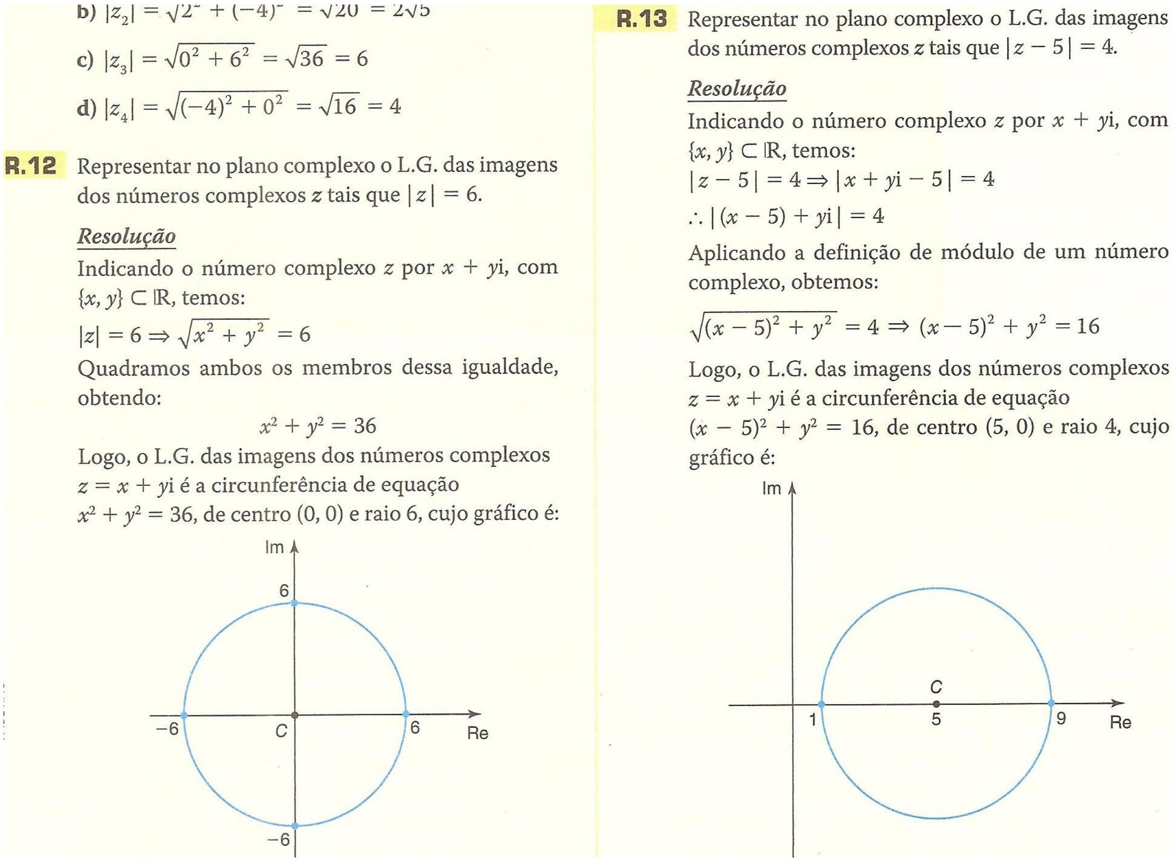
Figura 20 – E.P20 disponível em LD3

calculando a distância da origem à imagem de z. O ponto positivo desta parte são as relações estabelecidas entre a geometria analítica e o conceito de módulo, presentes nos E.R12 e E.R13 da página 151, mostrados na Figura 21, que tratam de lugares geométricos. As propriedades de módulo são apresentadas, mas não demonstradas, ficando sob a responsabilidade do professor, apresentá-las ou não. Os exercícios propostos mantêm o padrão de conexão com a geometria analítica.

Cabe ressaltar que neste livro, aparece a confusão feita entre imagem e afixo, tal como mencionado em Lima (2001).

Forma Trigonométrica ou Polar. Ilustra-se com um exemplo o que são coordenadas polares, e em seguida é apresentada a definição de argumento e o cálculo, usando conteúdos de trigonometria. O autor segue o padrão de restringir o argumento ao intervalo $[0, 2\pi[$. Não notamos nenhuma associação da forma polar com vetores. Os exercícios seguem o roteiro de aplicação direta da definição.

A operação de multiplicação é sistematizada através de analogias realizadas com os exemplos dados, ficando para o professor a responsabilidade de fazer a demonstração para os alunos. Um ponto positivo é que a demonstração desse resultado, por indução, consta no manual do professor. A divisão é demonstrada, mas tem como referência a receita dada para a forma algébrica. Porém não é feita nenhuma observação a respeito da relação dessas operações com as rotações e homotetias. Os exercícios são de repetição e memorização.



b) $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) $|z_3| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$

d) $|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

R.12 Representar no plano complexo o L.G. das imagens dos números complexos z tais que $|z| = 6$.

Resolução

Indicando o número complexo z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$|z| = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 6$

Quadramos ambos os membros dessa igualdade, obtendo:

$$x^2 + y^2 = 36$$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + yi$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$, de centro $(0, 0)$ e raio 6, cujo gráfico é:

R.13 Representar no plano complexo o L.G. das imagens dos números complexos z tais que $|z - 5| = 4$.

Resolução

Indicando o número complexo z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$|z - 5| = 4 \Rightarrow |x + yi - 5| = 4$

$\therefore |(x - 5) + yi| = 4$

Aplicando a definição de módulo de um número complexo, obtemos:

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 4 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 16$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + yi$ é a circunferência de equação $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, de centro $(5, 0)$ e raio 4, cujo gráfico é:

Figura 21 – E.R12 e E.R13 disponível em LD3

O autor apresenta apenas a 1^a *Fórmula de De Moivre*, chamado-a de Teorema de De Moivre. O desenvolvimento segue o estilo usado para justificar a multiplicação na forma polar. Destaque no final do capítulo para as seções: Análise de Resolução e Matemática sem fronteiras. Sendo que o primeiro trata da identificação dos erros cometidos em uma resolução, e o segundo ilustra um pouco do que seja rotação e translação. É uma pena que estes aspectos não tenham aparecido mais vezes no livro.

1.3.4 Matemática - Ciência e Aplicação - LD4

Esta coleção tem como autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida, sendo esta a 7^a edição, sendo publicada pela Saraiva em 2013 (IEZZI et al., 2013). São destinadas 36 páginas para a abordagem deste assunto, correspondendo a $14,06\%$ do total de 256 páginas do volume 3 desta coleção.

História. É abordada na seção *Um pouco de História*, onde fica a impressão de que a origem dos números complexos está ligada à resolução de equações quadráticas e não às cúbicas. Em linhas gerais temos a apresentação de datas, nomes e contribuições dos matemáticos.

Forma Algébrica. Os autores usam a representação de William R. Hamilton para definir o conjunto dos números complexos como sendo o conjunto dos pares ordenados de números reais. Em seguida, são definidas a igualdade, a adição e a multiplicação. Na página 167, comenta-se a correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{C}$ e o conjunto dos pontos do plano; nesta mesma página é realizada uma pequena ilustração do que seja o plano de Argand-Gauss e do isomorfismo entre números reais e números complexos da forma $(a, 0)$. O ponto M é chamado de imagem ou afixo do número complexo z. Notamos que esta escolha pode levar à confusão entre afixo e imagem de um complexo, pois segundo Lima (2001, p. 263) afixo e imagem não são sinônimos. A imagem de um complexo é o ponto que o representa, e o afixo de um ponto é o complexo por ele representado.

Dentre os livros analisados, este é o único livro onde a unidade imaginária aparece com o par ordenado $(0, 1)$. Durante o cálculo das potências de i é feita a justificativa do porquê de $i^2 = -1$. Em seguida é apresentada a *Forma Algébrica*, usando na dedução desta as definições apresentadas na página 166.

Seguindo o exemplo de grande parte dos textos presentes em livros didáticos, ao definir imaginário puro, também exclui o zero do conjunto dos imaginários puros. Dos 35 exercícios iniciais, apenas os Exercícios Propostos E.P10 e E.P35), das páginas 172 e 173, ilustrados na Figura 22, tem um pequeno apelo gráfico, os demais ficam restritos à aplicação dos conceitos e manipulações.

10. Determine o afixo de z = (1 + 2i) · (i − 4).

(a) E.P10

35. Considerando que A, B e C são as respectivas imagens dos números complexos u = −2 + i, v = 1 + 5i e w = 4 + i, determine a área do triângulo ABC.

(b) E.P35

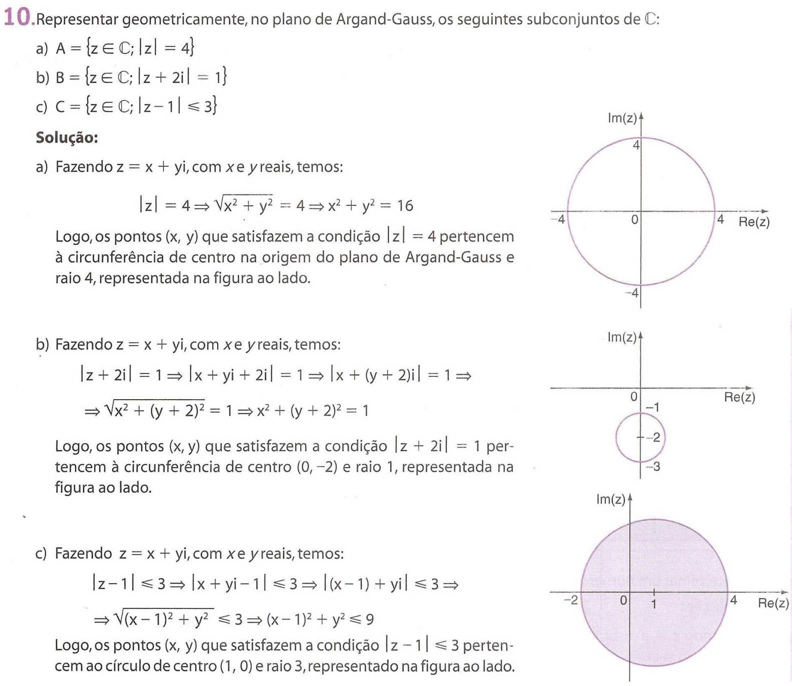
Figura 22 – Exercícios Propostos no LD4

O conjugado é definido e faz-se a representação gráfica da sua imagem no plano de Argand-Gauss. Outro ponto positivo é que as propriedades do conjugado são apresentadas e justificadas, sendo duas deixadas como exercício.

A divisão na forma algébrica é demonstrada de forma satisfatória. Em seguida é feita a relação entre o resultado obtido e a famosa receita usada em alguns livros: “Para se obter o quociente de dois números complexos z_1/z_2 basta multiplicar o numerador e denominador pelo conjugado do denominador” (IEZZI et al., 2013, p. 176).

O módulo é definido de maneira usual, ou seja, $d(O, P)$. Para obter a expressão de cálculo do módulo foi usado apenas o teorema de Pitágoras, sem apelo à fórmula da distância.

Interpretações geométricas do módulo, que recordam conceitos de geometria analítica, são apresentadas no exercício (E.R10), da página 180, e nos propostos: E.P57 e E.P58, da página 181, ilustrados na Figura 23.



10. Representar geometricamente, no plano de Argand-Gauss, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 4\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C}; |z + 2i| = 1\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| \leq 3\}$

Solução:

a) Fazendo $z = x + yi$, com x e y reais, temos:

$$|z| = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z| = 4$ pertencem à circunferência de centro na origem do plano de Argand-Gauss e raio 4, representada na figura ao lado.

b) Fazendo $z = x + yi$, com x e y reais, temos:

$$|z + 2i| = 1 \Rightarrow |x + yi + 2i| = 1 \Rightarrow |x + (y + 2)i| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z + 2i| = 1$ pertencem à circunferência de centro (0, −2) e raio 1, representada na figura ao lado.

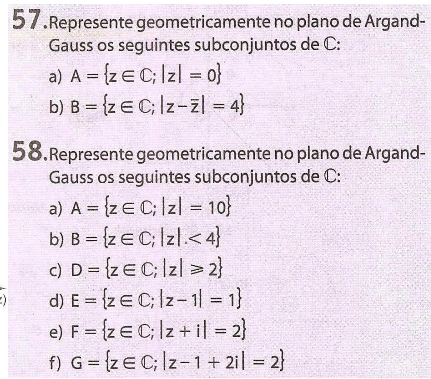
c) Fazendo $z = x + yi$, com x e y reais, temos:

$$|z - 1| \leq 3 \Rightarrow |x + yi - 1| \leq 3 \Rightarrow |(x - 1) + yi| \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 3 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 9$$

Logo, os pontos (x, y) que satisfazem a condição $|z - 1| \leq 3$ pertencem ao círculo de centro (1, 0) e raio 3, representado na figura ao lado.

(a) E.R10



57. Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 0\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C}; |z - \bar{z}| = 4\}$

58. Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 10\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 4\}$

c) $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq 2\}$

d) $E = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1\}$

e) $F = \{z \in \mathbb{C}; |z + i| = 2\}$

f) $G = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1 + 2i| = 2\}$

(b) E.P57 e E.P58

Figura 23 – Exercícios Propostos no LD4

Notamos que, nesta parte, o autor perdeu a oportunidade de mostrar que $|z - w|$ representa a distância entre as representações dos complexos z e w no plano.

Forma Trigonométrica. É bem apresentada e ilustrada com exemplos, porém a interpretação geométrica da multiplicação na forma trigonométrica não se encontra presente. Para compensar essa falta o autor apresenta a interpretação geométrica do produto de $z.i$. A divisão é justificada com base na receita usada para dividir os números complexos na forma algébrica. Não observamos nenhum apelo à interpretação geométrica.

O encerramento deste capítulo é feito com a apresentação das fórmulas de De Moivre para potenciação e radiciação. Nesta parte do livro, o cálculo das raízes de um número complexo, são relacionados com a interpretação geométrica, mostrando que as imagens das raízes de ordem n de um complexo são vértices de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência de centro na origem e raio $r = \sqrt[n]{|z|}$, com $z \neq 0$.

Neste livro o aspecto algébrico é tratado com o rigor necessário, porém o geométrico só é explorado no final do capítulo, sendo que o desejado é relacionar os aspectos gráficos com os algébricos. A falta de relação entre estes levou a uma apresentação fortemente algébrica e, portanto, desprovida de aplicações relevantes.

1.3.5 Matemática - Ensino Médio - LD5

Esta coleção tem como autoras Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez de Souza Vieira Diniz e encontra-se na 8^a edição, sendo publicada pela Editora Saraiva em 2013 (SMOLE; DINIZ, 2013). São destinadas 26 páginas para a abordagem deste conteúdo, correspondendo a $8,13\%$ do total de 320 páginas do volume 3 desta coleção.

História. Notamos que este livro é o único, dos analisados, que apresenta a fórmula de Tartaglia-Cardano e a usa para resolver a equação $x^3 - 15x = 4$. Não é feita nenhuma sugestão de como obtê-la. No restante desta parte histórica são citados nomes, datas e contribuições de alguns matemáticos.

Forma Algébrica. O número complexo é definido como um par ordenado, mas é feita a relação deste par ordenado com a forma $a + bi$. Nesta definição a unidade imaginária também aparece por "decreto". Em seguida, é feita a correspondência biunívoca de um número complexo com um par ordenado.

Neste livro aparece a afirmação que: "o ponto P, correspondente a um número complexo z, é chamado de afixo de z" (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 226). Este trecho nos mostra que a confusão mencionada por Lima (2001), entre afixo e imagem, ainda aparece em nossos livros.

A igualdade, a adição e a multiplicação são justificados algebricamente, porém não existe nenhuma interpretação gráfica para a multiplicação e a justificativa para a soma de pares ordenados não contribui muito na percepção gráfica dos números complexos.

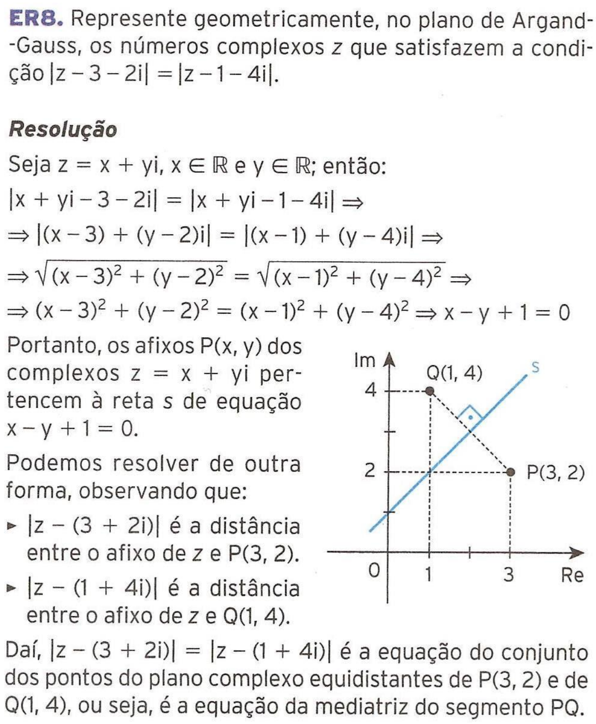
O conjugado é devidamente apresentado e recebe uma representação gráfica adequada, porém só aparece uma propriedade envolvendo-o, as demais são omitidas. No caso da divisão, apresenta-se uma receita para o cálculo, mas não é demonstrado como chegar a esse método.

O oposto de um número complexo é representado no plano de Argand-Gauss, mas não é feita associação deste com um vetor. Em seguida, são apresentadas as potências de i com as devidas justificativas algébricas e desprovidas de representação gráfica.

O módulo de um complexo é justificado com a ajuda do teorema de Pitágoras. Um ponto positivo nesta parte é a interpretação dada a $|z - w|$ como a distância de z a w no plano complexo.

Destacamos ainda, na página 234, os exercícios resolvidos E.R8 e E.R9,ilustrados na Figura 24, que retomam conceitos de geometria analítica e aplicam as ideias discutidas sobre módulo de um número complexo.

Forma Trigonométrica ou Polar. A abordagem é semelhante aos demais livros, onde são relembrados os conceitos de trigonometria e definido o argumento de um número complexo. A forma polar é obtida tendo por referência a forma algébrica e sua representação no plano.



ER8. Represente geometricamente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos z que satisfazem a condição $|z - 3 - 2i| = |z - 1 - 4i|$.

Resolução

Seja $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$; então:

$|x + yi - 3 - 2i| = |x + yi - 1 - 4i| \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x-3) + (y-2)i| = |(x-1) + (y-4)i| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

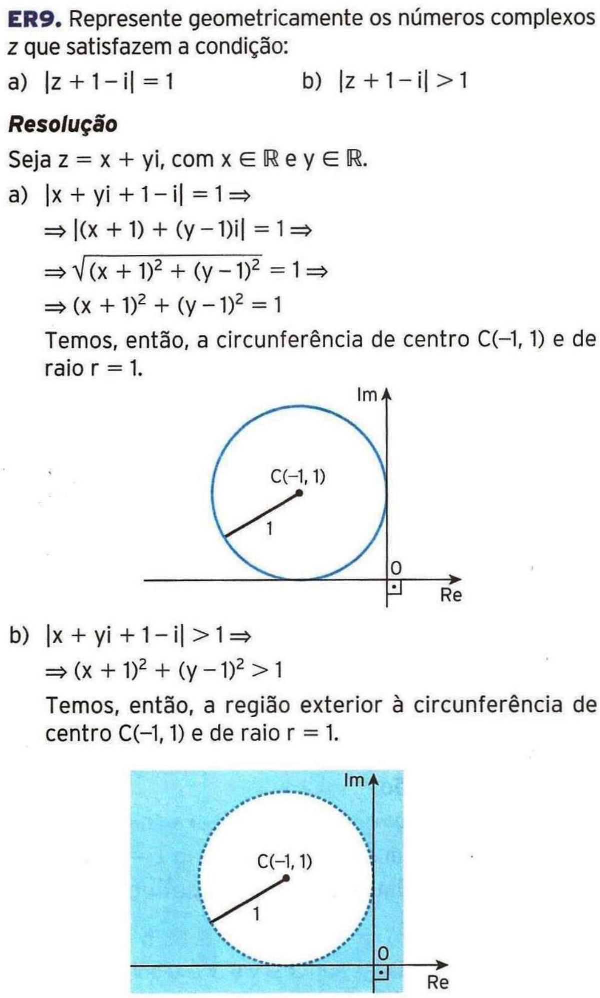
Portanto, os afixos $P(x, y)$ dos complexos $z = x + yi$ pertencem à reta s de equação $x - y + 1 = 0$.

Podemos resolver de outra forma, observando que:

- $|z - (3 + 2i)|$ é a distância entre o afixo de z e $P(3, 2)$.
- $|z - (1 + 4i)|$ é a distância entre o afixo de z e $Q(1, 4)$.

Daí, $|z - (3 + 2i)| = |z - (1 + 4i)|$ é a equação do conjunto dos pontos do plano complexo equidistantes de $P(3, 2)$ e de $Q(1, 4)$, ou seja, é a equação da mediatriz do segmento PQ.

(a) ER8



ER9. Represente geometricamente os números complexos z que satisfazem a condição:

a) $|z + 1 - i| = 1$ b) $|z + 1 - i| > 1$

Resolução

Seja $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

a) $|x + yi + 1 - i| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x + 1) + (y - 1)i| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Temos, então, a circunferência de centro $C(-1, 1)$ e de raio $r = 1$.

b) $|x + yi + 1 - i| > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 > 1$

Temos, então, a região exterior à circunferência de centro $C(-1, 1)$ e de raio $r = 1$.

(b) ER9

Figura 24 – Exercícios Propostos em (SMOLE; DINIZ, 2013)

Os exercícios são basicamente de memorização ou repetição. A multiplicação na forma polar recebe suas devidas justificativas, porém a divisão, mais uma vez é apresentada na forma de uma receita. Esta parte tem um ponto positivo na seção *Para saber mais*, onde aparece uma interessante aplicação envolvendo o produto dos números complexos na forma polar.

As *Fórmulas de De Moivre* para a potenciação e a radiciação são apresentados como opcionais, segundo as autoras deste livro. Para chegar à 1^a fórmula de De Moivre e obter a enésima potencia de z é utilizado o recurso da analogia, sendo que esta é feita da potência 2 para a potência n. É estranho notar que embora o resultado não receba a devida demonstração, é feita a justificativa no caso em que n é um número inteiro.

Os exercícios desta parte seguem o padrão de memorização ou repetição. No caso da 2^a Fórmula de De Moivre é devidamente justificada e são apresentadas as propriedades dessas raízes, assim como as conexões entre estas raízes e os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio $r = \sqrt[n]{|z|}$, com $z \neq 0$.

Os exercícios desta parte seguem o padrão de aplicação direta dos conceitos. A exceção fica por conta dos exercícios propostos E.P60 e E.P61 da página 246, ilustrados na Figura 25, que pedem uma pequena abordagem gráfica. Na seção *Conexões* aparece um texto interessante sobre Aerodinâmica e Números Complexos, mas seu papel é meramente informativo, já que não existe uma aplicação direta no texto que exija o conteúdo estudado.

60. Determine as raízes cúbicas de 8 e dê a sua representação geométrica.

61. Determine as raízes quadradas do número complexo $z = 5 - 12i$ e dê a sua representação geométrica.

Figura 25 – E.P60 e E.P61 disponível em (SMOLE; DINIZ, 2013)

1.3.6 Novo Olhar - Matemática - LD6

Esta coleção tem como autor Joamir Souza e encontra-se na 2^a edição, sendo publicada pela Editora FTD em 2013 (SOUZA, 2013). São destinadas 26 páginas para a abordagem deste conteúdo, correspondendo a $8,13\%$ do total de 320 páginas do volume 3 desta coleção.

História. Fica restrita a nomes, datas e relatos das realizações de alguns matemáticos, ou seja, nada é feito no sentido de estimular o uso do potencial da História da Matemática como elemento motivador das aulas.

O conjunto dos números complexos é definido "como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais (x, y) em que estão definidas certas operações". (SOUZA, 2013, p. 231).

Forma Algébrica. É feita pela apresentação de $i^2 = -1$ por decreto, e seguindo a tradição dos nossos livros, exclui o zero do conjunto dos imaginários puros.

Na figura 26, mostramos a informação confusa que aparece na página 232 a respeito da unidade imaginária. Um ponto positivo neste livro é a distinção correta entre afixo e imagem de um complexo.

A unidade imaginária *i* é que indica a raiz de índice par de um número negativo no conjunto $\mathbb{C}$.

Exemplo

Na equação $x^2+9=0$, temos:

$$x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow x=\pm\sqrt{9(-1)} \Rightarrow x=\pm\sqrt{9i^2} \Rightarrow x=\pm 3i \begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases}$$

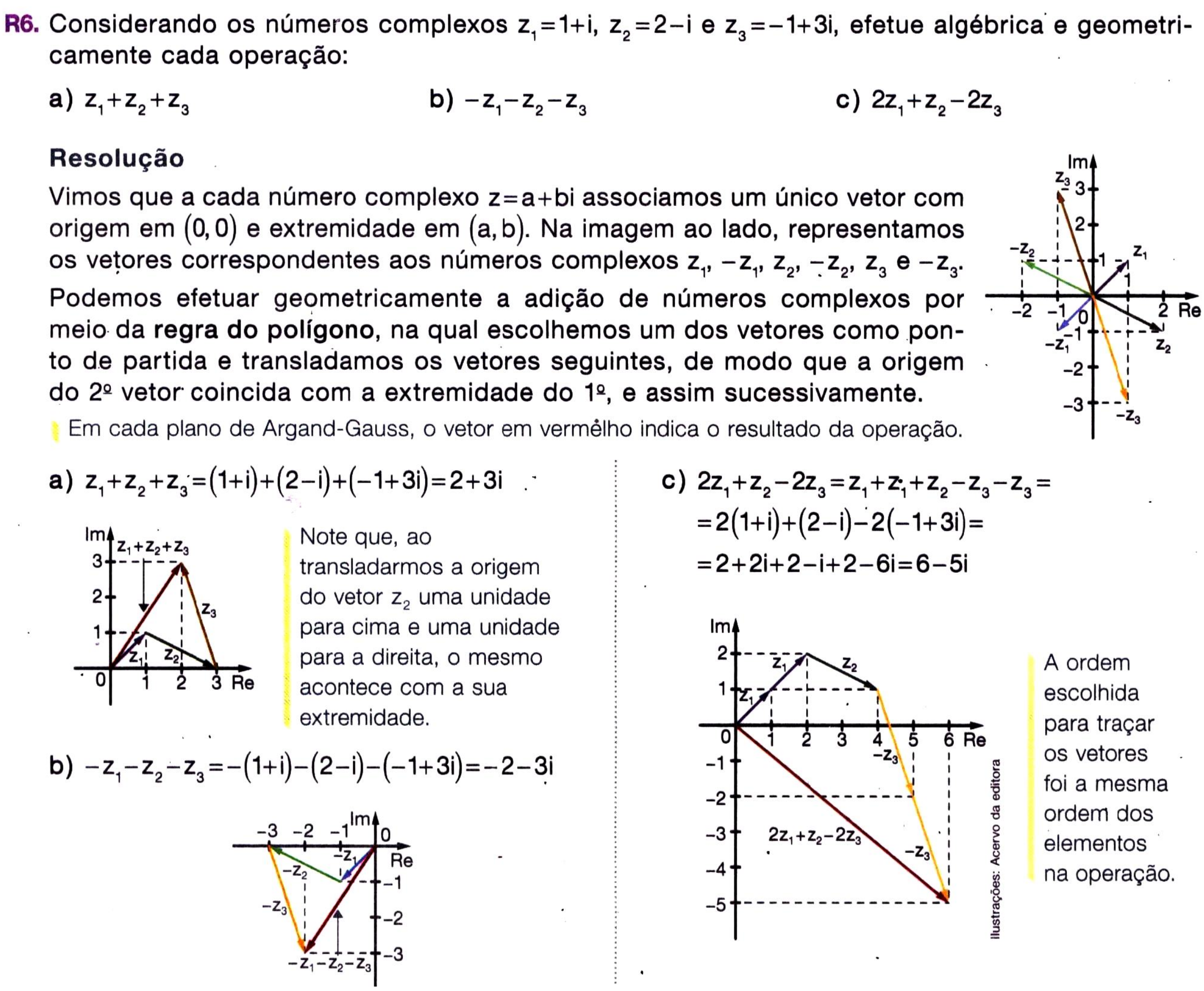
Figura 26 – Trecho disponível em LD6

Representação Geométrica. É feita a correspondência entre números complexos e pontos do plano de Argand-Gauss. Aparece a sugestão de associar z a um vetor do tipo $\overrightarrow{OP}$.

Os exercícios seguem o padrão de memorização e repetição. Embora seja sugerida associação entre vetores e números complexos, este conceito não é abordado nos livros de matemática do ensino médio, apenas nos livros de Física, devendo o professor dedicar uma pequena atenção às noções básicas sobre vetores.

A adição e a multiplicação são definidas e justificadas algebricamente, em seguida são representados os pontos correspondentes aos resultados obtidos, o que não contribui muito para a associação da operação de soma de complexos com a soma de vetores.

No exercício (E.R6) da página 236, como mostra a Figura 27, é usada a regra do polígono em vez da regra do paralelogramo,


R6. Considerando os números complexos $z_1=1+i$, $z_2=2-i$ e $z_3=-1+3i$, efetue algébrica e geometricamente cada operação:

a) $z_1+z_2+z_3$ b) $-z_1-z_2-z_3$ c) $2z_1+z_2-2z_3$

Resolução

Vimos que a cada número complexo $z=a+bi$ associamos um único vetor com origem em $(0, 0)$ e extremidade em (a, b). Na imagem ao lado, representamos os vetores correspondentes aos números complexos z_1, $-z_1$, z_2, $-z_2$, z_3 e $-z_3$.

Podemos efetuar geometricamente a adição de números complexos por meio da **regra do polígono**, na qual escolhemos um dos vetores como ponto de partida e transladamos os vetores seguintes, de modo que a origem do 2º vetor coincida com a extremidade do 1º, e assim sucessivamente.

Em cada plano de Argand-Gauss, o vetor em vermelho indica o resultado da operação.

a) $z_1+z_2+z_3=(1+i)+(2-i)+(-1+3i)=2+3i$

Note que, ao transladarmos a origem do vetor z_2 uma unidade para cima e uma unidade para a direita, o mesmo acontece com a sua extremidade.

b) $-z_1-z_2-z_3=-(1+i)-(2-i)-(-1+3i)=-2-3i$

c) $2z_1+z_2-2z_3=z_1+z_1+z_2-z_3-z_3=$
$=2(1+i)+(2-i)-2(-1+3i)=$
$=2+2i+2-i+2-6i=6-5i$

A ordem escolhida para traçar os vetores foi a mesma ordem dos elementos na operação.

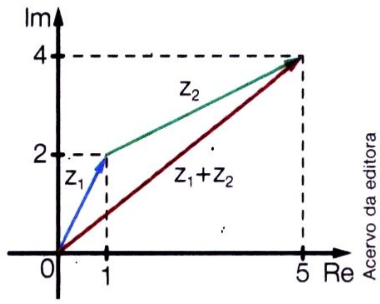
Figura 27 – E.R6 disponível em LD6

Embora o resultado seja o mesmo, a mudança de representação, diferente da sugerida na página 233, poderá prejudicar a compreensão da regra do paralelogramo.

Tal confusão torna a se repetir no exercício (E.P15) da página 238, ilustrado na

Figura 28, onde seria razoável reescrever o vetor z_2 com origem em $O = (0, 0)$.

15. No plano complexo está representado z_1+z_2.



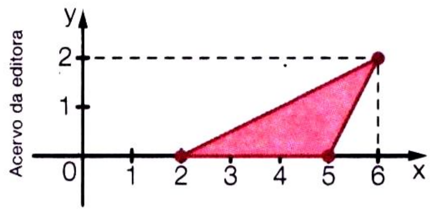
a) Escreva na forma algébrica os números complexos z_1, z_2 e z_1+z_2. $z_1=1+2i$, $z_2=4+2i$ e $z_1+z_2=5+4i$

b) Efetue algébrica e geometricamente a operação $2z_2+z_1$. Resposta no final do livro.

Figura 28 – E.P15 disponível em LD6

Na Figura 29 o E.P18 da página 238, que apesar de interessante, não pode ser explorado adequadamente, pois não foi esclarecido o significado do produto $z.i$. Note-se que isto tornaria a compreensão da transformação geométrica mais rápida e a resolução do problema mais elegante e menos algébrica.

18. (Unifesp-SP) Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1=2$, $z_2=5$ e $z_3=6+2i$.



A área do triângulo de vértices $w_1=iz_1$, $w_2=iz_2$ e $w_3=2iz_3$ é: b

a) 8 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2

Figura 29 – EP18 disponível em LD6

O conjugado é apresentado na forma algébrica e na forma gráfica, indicando a relação de simetria entre z e $\overline{z}$. Nesta parte fica a desejar a exploração das propriedades do conjugado e o inverso de um número complexo.

A divisão de números complexos é apresentada, na página 238, como uma receita. Deveria ser mostrada a necessidade desse procedimento, ou seja, qual o motivo de realizarmos a divisão dessa forma e não de outra? Afinal, a divisão é um momento de mostrar o porquê de definirmos o conjugado de um número complexo da forma que o fazemos.

As potências de i, na página 239, são apresentadas e se realiza a formalização, da regra geral de cálculo, de forma precoce. Deveriam ter sido gastas algumas linhas nesta demonstração, considerando que ela é simples e de fácil compreensão por parte do público alvo desse livro. O módulo segue os padrões dos demais livros. As suas propriedades são apresentadas, mas a demonstração é feita na forma do E.P52 da página 243, Figura 30.

52. Mostre algebricamente a validade das propriedades a seguir:

a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2 \neq 0$

Figura 30 – E.P52 disponível em LD6

Destacamos a interpretação gráfica de $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ e os E.P48, E.P49 e E.P50, da página 234, por recordarem conteúdos de geometria analítica e apresentarem interpretações gráficas na resolução, conforme ilustra a Figura 31.

48. Considerando todos os números complexos $z = x + yi$ que satisfazem a relação $|z - 3 + 5i| = 6$, escreva na forma algébrica aquele que possuir:

a) menor valor numérico para y $z = 3 - 11i$

b) maior valor numérico para y $z = 3 + i$

c) menor valor numérico para x $z = -3 - 5i$

d) maior valor numérico para x $z = 9 - 5i$

(a) EP48

49. Represente no plano complexo o conjunto dos pontos $z = x + yi$, tal que: Respostas no final do livro.

a) $|z + 5 - 2i| = |z + 5i|$ **b)** $|z - 3 + 4i| = \sqrt{2}$

50. DESAFIO

(UFMG-MG) Seja *S* o conjunto de números complexos *z*, tais que $|z - (2 + 4i)| = 2$.

a) Em um plano complexo, faça o esboço de *S*, sendo $z = x + yi$, com *x* e *y* números reais. Resposta no final do livro.

b) Determine o ponto de *S* mais próximo da origem. $\left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

(b) EP49 e EP50

Figura 31 – Exercícios Propostos no LD4

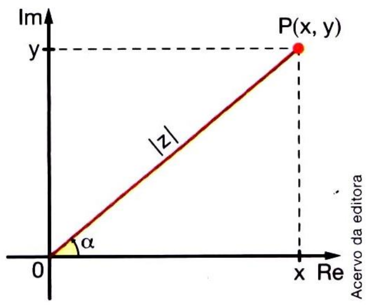
Forma Trigonométrica ou Polar. Na parte que o autor aborda o tema deveria ser cauteloso na hora de definir o argumento, pois não há razão para restringir o argumento α de um complexo ao intervalo $0 \leq \alpha < 2\pi$, conforme ilustrado na Figura 32.

Novamente, a exemplo dos outros livros didáticos, o autor não apresenta nenhuma observação a respeito desta escolha. Isto poderá causar confusões quando os alunos forem efetuar produtos e divisões usando a forma trigonométrica.

A multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é apresentada de forma clara, já a divisão é deixada como exercício. Ambas são apresentadas sem nenhum apelo à interpretação gráfica.

Na seção *Contexto*, página 246, apresenta-se um texto muito interessante, onde é ressaltada a importância do estudo dos números complexos na Engenharia Elétrica. Nesta

Na representação geométrica do número complexo $z=x+yi$, com $z \neq 0$, podemos destacar o ângulo α formado entre o segmento OP e o eixo real, medido no sentido anti-horário. Esse ângulo é denominado **argumento de** ***z*** (ou **argumento principal** de z) e é indicado por $\arg(z)$.



O ângulo α é tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$ e satisfaz as igualdades:

- $\cos\alpha = \dfrac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos\alpha$
- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \text{sen}\,\alpha$

Figura 32 – Trecho extraído de (SOUZA, 2013)

seção são apresentadas questões bem diferentes das páginas de abertura da unidade, aqui as questões deixam claras as aplicações deste conteúdo.

Em relação às *Fórmulas de De Moivre*, notamos que a 1^a Fórmula é apresentada corretamente, e em seguida demonstrada a validade para n natural. A prova da fórmula para n inteiro é deixada para o professor. A quantidade de exercícios deixa a desejar, sendo apenas um resolvido e seis propostos. Nenhuma referência é feita sobre a radiciação de números complexos na forma trigonométrica, deixando uma lacuna nesse ponto. Ficando de fora do livro, o que talvez seja essa a parte mais interessante do estudo dos números complexos.

Números Complexos e Geometria. Nesta seção merece destaque a interpretação dada ao produto de $z.i$, ainda que de forma muito simplificada. Lamentamos que este tipo de problema ocupe muito pouco espaço no livro analisado.

1.4 Conclusão sobre o Ensino de Números Complexos

Os livros sobre os quais fizemos breves comentários estão presentes nas escolas de todo país e junto com este livros as falas de seus autores e ideias veiculadas pelos órgãos oficiais, tais como a que segue, presente no Guia do PNLD/2015:

> Os números complexos têm sido incluídos como tópico a ser trabalhado no ensino médio. No entanto, **muitos educadores só consideram o seu estudo indispensável** para aqueles alunos que vão utilizar modelos matemáticos mais avançados em suas profissões. Por exemplo, engenheiros (ou técnicos nas áreas da Engenharia), físicos e matemáticos. Mesmo nesses casos, é importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade

> privilegiada de articulação com tópicos como vetores e geometria no plano e com as equações algébricas. (BRASIL, 2014, p. 92)

Estas considerações refletem um pouco o cenário em que se encontra o ensino dos números complexos em algumas localidades do país, por exemplo a cidade de Juiz de Fora, onde o Edital de 2014 do Programa de Ingresso Seletivo Misto (PISM), deixa a seguinte observação a respeito da exclusão desse conteúdo:

> Apesar da exclusão do conteúdo Números Complexos, pretende-se que os alunos possam reconhecê-los como raízes de polinômios, sem que haja ênfase numa teoria dos números complexos, mas apenas noções básicas, apresentando tais números como extensão do conjunto dos Números Reais. (COPESE, 2014, p. 30)

Embora estas falas tenham os seus propósitos de induzir os que guiam suas práticas, quase exclusivamente, pelos livros didáticos, tentaremos mostrar que um caminho alternativo é possível. E para alcançar tal objetivo, sugeriremos nos próximos capítulos uma abordagem que articule a História da Matemática, a Álgebra e a Geometria, mostrando que é possível uma reconstrução dos conceitos dos Números Complexos, assim como fizeram os matemáticos do passado, de modo a torná-los mais “real”.

Capítulo 2

Proposta de Atividades

Nesta parte do trabalho estaremos propondo atividades com o intuito de resgatar um pouco da parte histórica dos Números Complexos, principalmente sua origem, e mostrar que a aceitação destes números aconteceu justamente quando os matemáticos conseguiram relacionar seus aspectos algébricos e geométricos.

Antes de realizar as atividades, recomendamos ao professor que realize leituras com o intuito de melhorem os seus conhecimentos sobre a evolução dos conceitos matemáticos, percebendo assim a não linearidade do desenvolvimento de certos conceitos. Tais leituras podem ser encontradas nos anexos que disponibilizamos no final deste trabalho, e também nas dissertações de Barbosa (2013) e Chagas (2013), ambas apresentadas à UENF, através do PROFMAT.

Estaremos dividindo estas atividades em duas partes, a primeira designada por *A Construção dos Números Complexos* e a segunda por *Representação Gráfica dos Números Complexos*.

As três primeiras atividades tentarão resgatar a parte histórica e as descobertas significativas que ajudaram a impulsionar o estudo dos números complexos, descobertas estas, que muitas vezes são deixadas de lado pelos nosso livros didáticos, não passando apenas de pequenos trechos indicando datas e nomes de matemáticos.

A *Atividade 1* mostrará como os matemáticos do século XVI lidavam com as equações cúbicas e qual a contribuição de cada um desses personagens.

Na *Atividade 2* apresentaremos o modo engenhoso com que Bombelli trabalhou com as raízes quadradas de números negativos e quais foram as regras de cálculo criadas por este matemático para lidar com essas quantidades.

A *Atividade 3* destina-se a dar significado à unidade imaginária e a criar condições para que possamos representar, graficamente, quaisquer números complexos.

Nas duas atividades seguintes, usando como ponto de partida um objeto matemático conhecido dos nossos alunos, os vetores no plano, usaremos partes de textos históricos para mostrar como os matemáticos do passado conseguiram realizar nova abordagem, que relacionavam os aspectos geométricos e algébricos, dando uma nova interpretação para operações já conhecidas.

Finalizamos esta parte, realizando possíveis encaminhamentos relacionados ao modo de prosseguir com esta abordagem integradora, sugerindo que partes dos textos históricos possam ser usados na continuidade das atividades.

2.1 A Construção dos Números Complexos

Nossa preocupação com uma abordagem que envolva a História da Matemática deve-se ao fato de que os Números Complexos têm uma história muito rica e bem documentada, e cujas obras originais possuem cópias que estão disponíveis em vários *sites*.

Nesta seção nós pretendemos mostrar a origem dos Números Complexos envolvendo a resolução de equações do 3^o grau, a resistência da comunidade matemática em aceitar tal tipo de número, a insistência de alguns matemáticos em trabalhá-los mesmo sem o reconhecimento formal, até culminar em sua representação e aceitação pela comunidade matemática.

A seguir, serão apresentadas três atividades, cuja finalidade é motivar os alunos na identificação deste novo objeto matemático que gerou tantos tormentos às mentes dos matemáticos do passado. Como material de apoio ao professor sugerimos dois artigos, disponíveis nos **Anexos A** e **B**, assim como outras leituras indicadas nas atividades.

2.1.1 Atividade 1: Lidando com a Equação Cúbica

Objetivos:

- Apresentar o contexto histórico em que surgiu a solução para a equação do 3^o grau, quais os personagens envolvidos nesta empreitada e a maneira como estes personagens lidaram com essas dificuldades.
- Mostrar um modo de se chegar à solução da equação do 3^o grau usando as notações dos dias atuais.

Tempo: 1 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento:

- Com apoio do material do **Anexo A**, o professor enfatizará aos alunos as principais características da matemática do século XVI, tais como, o modo como os matemáticos representavam as equações, as raízes quadradas de números negativos, a maneira de escrever certos sinais, etc. Afinal as notações desta época eram muito diferentes das que usamos hoje, sem contar que os matemáticos ainda estavam sobre forte influência da matemática dos árabes, prova disto é a forma usada por Tartaglia, na forma de versos, para se lembrar de quais cálculos deveriam ser realizados na resolução de equações cúbicas.

- Após a exploração dos versos de Tartaglia, o professor deve encerrar a atividade mostrando aos alunos uma maneira que podemos utilizar para chegar à *Fórmula de Cardano-Tartaglia*. No material do **Anexo A** o professor encontrá sugestões sobre a maneira de deduzir tal fórmula.

Observação 2.1 *Embora não tenhamos ilustrado nossos textos com imagens dos matemáticos Tartaglia e Cardano, as mesmas podem ser encontradas, facilmente, na internet. Peça aos alunos que procurem, em livros ou sites, outros modos de escrever equações no século XVI, desta forma estaremos permitindo que eles complementem as informações apresentadas.*

Outro fato a ser lembrado é que na época de Tartaglia e Cardano, embora os matemáticos lidassem com os números negativos, eles não tinham um "status" de número.

Caso o professor queira mais informações históricas sugerimos a leitura de Lima (2000) e Roque (2012). Vale lembrar que a obra original de Tartaglia pode ser encontrada em Tartaglia (1554).

Se a escola dispuser de recursos tecnológicos, tais como um laboratório de informática e data-show, aconselhamos o uso dessas ferramentas, afinal elas dão um aparência agradável às apresentações, mas a inexistência dos mesmos não impede a execução da atividade proposta.

2.1.2 Atividade 2: Raízes Quadradas de Números Negativos

Objetivos:

- Apresentar aos alunos quais as descobertas realizadas por Rafael Bombelli ao lidar com a fórmula de Tartáglia para resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

- Refletir sobre um problema fundamental na história dos números complexos: como é possível obter as três raízes reais, logo plenamente legítimas, através de um método que faz aparecer "números ilegítimos", como é o caso das raízes quadradas de números negativos.

Tempo: 1 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento:

- Utilizaremos nesta atividade o material disponível no **Anexo B**, mais especificamente, as páginas de 1 a 3. Este material permitirá que o professor ilustre para os alunos a maneira como os matemáticos lidaram com os problemas relacionados às raízes quadradas de números negativos.
- Sugerimos o uso do problema a seguir, retirado de Spinelli (2011, p. 110-111), como mais um elemento motivador, pois o mesmo irá conduzir à equação usada por Bombelli. Além disso, este problema serve para ilustrar as palavras de J. Hadamard (1865-1963), segundo o qual: "O caminho mais curto entre duas verdades no campo real passa pelo campo complexo".

Problema: Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com forma de cubo de aresta x, outra com forma de um paralelepípedo com base retangular, de lados 3 m e 5 m e altura igual à altura do cubo. Que valor de x deve ser escolhido de forma que o volume do cubo seja 4 m^3 maior do que o paralelepípedo?

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

b) Verifique diretamente na equação dada que $x = 4$ é uma raiz real. A seguir encontre as outras raízes reais.

c) Use a fórmula de Tartáglia para determinar as raízes da equação do item **a)**. A que conclusão você chega?

Feita a conversão do texto apresentado para o registro algébrico, esperamos que os alunos cheguem aos seguintes resultados:

a) Encontrar que $x^3 = 15x + 4$, ou de forma equivalente, $x^3 - 15x = 4$.

b) Substituindo $x = 4$ diretamente na equação, verificar que está é uma solução real e consequentemente $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$. Finalmente, deduzir que as outras solução da equação são $x = 2 + 2\sqrt{3}$ e $x = 2 - 2\sqrt{3}$.

c) Seguindo as ideias de Bombelli notar que

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} = 4.$$

d) Aproveitar essa situação de conflito em que há, por um lado, a impossibilidade de se calcular a raiz quadrada de um número negativo e, por outro, a demanda de se compatibilizar os conhecimentos instituídos pela *Fórmula de Cardano-Tartáglia* com a solução concreta e real do problema.

Achamos interessante que seja apresentado aos alunos a "ideia louca" tida por Rafael Bombelli. Segundo Boyer (1996, p. 197), este matemático desenvolveu a solução baseado no método descrito abaixo.

Os dois radicandos das raízes cúbicas em b) diferem apenas por um sinal e a solução de $x^3 - 15x - 4 = 0$, pela fórmula de Cardano, conduz ao resultado

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Mas ele sabia que quatro era solução da equação. Bombelli percebeu, portanto, que os radicais podiam ser relacionados.

Surge então, uma situação onde apesar da fórmula de Cardano apresentar resultados com raízes quadradas de números negativos, existia solução real positiva para a questão. Foi esta condição que chamou a atenção e a curiosidade de Bombelli. Ele **admitiu que existia** um número ou expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que fosse raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$. Deste modo passou a ter:

$$\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ e } \left(a - \sqrt{-b}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121} \tag{2.1}$$

Desenvolvendo os cubos, temos:

$$\begin{aligned}
\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 &= (a)^3 + 3(a)^2\left(\sqrt{-b}\right) + 3a\left(\sqrt{-b}\right)^2 + \left(\sqrt{-b}\right)^3 \\
&= a^3 + 3a^2\sqrt{-b} - 3ab + b\sqrt{-b} \\
&= \left(a^3 - 3ab\right) + \left(3a^2 + b\right)\sqrt{-b}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(a - \sqrt{-b}\right)^3 &= (a)^3 - 3(a)^2\left(\sqrt{-b}\right) + 3a\left(\sqrt{-b}\right)^2 - \left(\sqrt{-b}\right)^3 \\
&= a^3 - 3a^2\sqrt{-b} - 3ab - b\sqrt{-b} \\
&= \left(a^3 - 3ab\right) - \left(3a^2 + b\right)\sqrt{-b}
\end{aligned}$$

Mas, por inspeção, sabe-se que $x = 4$ é uma solução. As equações indicadas em 2.1 junto com o item (b), do problema proposto, nos dizem que

$$x = a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 2a = 4$$

Portanto, o valor de $a = 2$.

Tendo este resultado, voltou à equação 2.1 e encontrou o valor de b. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\left(a-\sqrt{-b}\right)^3 &= 2+\sqrt{-121}\\
\left(2-\sqrt{-b}\right)^3 &= 2+\sqrt{-121}\\
8+12\sqrt{-b}-6b-b\sqrt{-b} &= 2+\sqrt{-121}\\
8+12\sqrt{b}\sqrt{-1}-6b-b\sqrt{b}\sqrt{-1} &= 2+\sqrt{121}\sqrt{-1}\\
(8-6b)+\left(12\sqrt{b}-b\sqrt{b}\right)\sqrt{-1} &= 2+11\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 8-6b = 2 \Rightarrow b=1\\ 12\sqrt{b}-b\sqrt{b} = 11\end{cases}$$

Então:

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$ e $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$

Este engenhoso algebrismo de Bombelli revelará o importante papel que os números imaginários conjugados terão no futuro. É Rafael Bombelli que em seu livro *L'Algebra Parte Maggiore dell'Arithmetica* (1572) apresenta as primeiras regras operatórias com números contendo a raiz quadrada de -1.

Seria muito bom tentar fazer uma comparação entre as regras operatórias estabelecidas por Bombelli e o modo como os livros didáticos começam o tratamento dos números complexos. Talvez elas ajudem a entender o modo "preferido" por alguns autores em começar por decretar uma certa unidade imaginária i, onde $i=\sqrt{-1}$.

Embora tais regras sejam de fácil manipulação, assim como o é fazendo $i=\sqrt{-1}$ e usando as leis da álgebra, fica para nossos alunos a mesma sensação de desconfiança dos matemáticos do passado.

Ao terminar a **Atividade 2**, deixe como leitura para casa o material disponível no **Anexo B**, páginas 4 até 7, para que os alunos observem que embora os números complexos não tivessem, nesta época, um *status* definido, eles foram trabalhados por matemáticos como Euler, e os trabalhos deste, geraram novas e importantes descobertas sobre esses números.

2.1.3 Atividade 3: Representação Geométrica da Unidade Imaginária

Neste seção, avançaremos no tempo com a história da matemática e chegaremos na época dos matemáticos Wessel, Argand e Gauss que na busca de uma representação geométrica das quantidades imaginárias, lançaram as bases para que pudesse ser fundado um novo cálculo sobre estes objetos matemáticos.

Objetivos:

- Estabelecer uma relação entre números reais e segmentos orientados (vetores).
- Recordar alguns casos de semelhança que serão necessários para se chegar à representação gráfica dos complexos.
- Usar as ideias presentes nos textos de Wessel e Argand para chegar a uma representação gráfica da unidade imaginária.
- Mostrar, com a ajuda de pequenos textos, como Gauss contribuiu para que os complexos tivessem uma representação gráfica.

Tempo: 2 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento:

- Dividiremos esta atividade em duas etapas. A primeira está relacionada à construção geométrica da unidade imaginária, já a segunda etapa será destinada a apresentar um pouco do contexto histórico em que aconteceu a aceitação dos números complexos.
- Iniciaremos a atividade mostrando para os alunos que cada número real, positivo ou negativo, pode ser associado a um vetor com origem em $O = (0; 0)$ e extremidade no ponto $X = (x; 0)$ que o representa. Por exemplo o número -5 pode ser associado ao segmento orientado $\overrightarrow{OX_1}$, onde $X_1 = (-5; 0)$. Por uma questão de simplificação de notação, omitiremos inicialmente a segunda coordenada do ponto.
- Continuaremos nossa atividade com a exploração dos conhecimentos que trazem nossos alunos a respeito das ideias de vetor e a multiplicação destes por um escalar. Assunto este, geralmente abordado na disciplina de Física.
- Nosso próximo passo é fazer com que os alunos cheguem à conclusão de que $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$. Para isso, usaremos a sugestão de Baumgart (1992) que nos conduz a uma maneira muito semelhante à usada na obra de J. R. Argand, ou seja, explora a ideia de média proporcional (geométrica) entre grandezas direcionadas de valor absoluto 1. Para isto, usaremos uma representação geométrica creditada a Wessel e Argand, independentemente, que baseia-se no resultado da geometria

segundo o qual a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é a média geométrica dos segmentos em que divide esta última (BAUMGART, 1992).

Observação 2.2 *Caso julgue necessário, o professor poderá recordar os resultados apresentados nos teoremas 2.1 e 2.2 com os alunos antes de prosseguir. Para chegar a esses resultados será necessário recorrer ao caso de semelhança, retirado de Barbosa (2004) e descrito abaixo:*

Teorema 2.1 *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$ então os triângulos são semelhantes.*

Prova: Como a soma dos ângulos de um triângulo é $180°$, então a congruência dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{E}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{F}$ acarreta na congruência dos ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{G}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome na semirreta EF o ponto H de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$. Pelo ponto H trace uma reta paralela a FG. Esta corta a semirreta EG num ponto J, formando um triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC, já que $\widehat{A} = \widehat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EH}$ e $\widehat{B} = \widehat{F} = E\widehat{H}J$. Esta última congruência deve-se ao paralelismo de JH e GF. Segue agora do Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}.$$

Como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$ então, da igualdade acima obtém-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$

De maneira análoga demonstra-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{GF}}. \ \square$$

Teorema 2.2 *Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeção dos catetos sobre a hipotenusa.*

Prova: Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AH do vértice A ao lado BC. Na figura 33 considere $h = \overline{AH}$, $m = \overline{BH}$ e $n = \overline{HC}$.

Como AH é perpendicular a BC, então os triângulos AHB e AHC são retângulos. Como $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ e $\widehat{B} + B\widehat{A}H = 90°$ então $B\widehat{A}H = \widehat{C}$. O mesmo acontece com $H\widehat{A}C + \widehat{C} = 90°$ então $H\widehat{A}C = \widehat{B}$.

Portanto pelo Teorema 2.1, os triângulos AHC e BHA são semelhantes. Isto nos permite colocar em correspondências os ângulos $\widehat{C} \leftrightarrow B\widehat{A}H$, de $C\widehat{A}H \leftrightarrow \widehat{B}$ e de $C\widehat{H}A \leftrightarrow B\widehat{H}A$. Como consequência desta semelhança tem-se

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

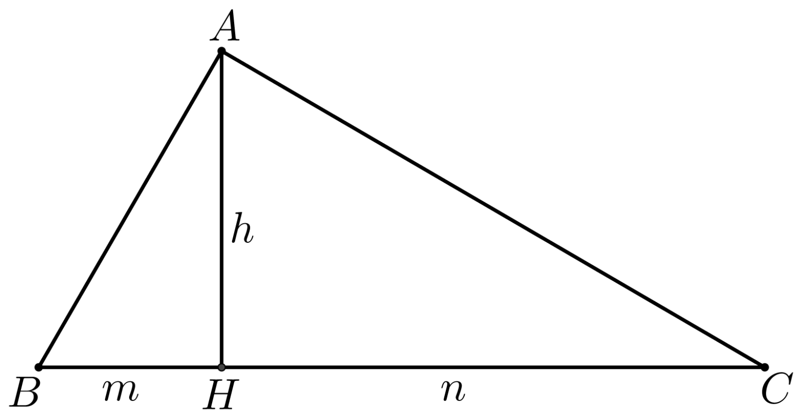


Figura 33 – Ilustração do Teorema 2.2
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

Da primeira igualdade deduz-se que $\dfrac{h}{m} = \dfrac{n}{h} \Leftrightarrow h^2 = mn.$ $\square$

Após recordar as ideias de semelhança, reproduza as questões a seguir e distribua para os alunos. Estas questões têm a finalidade de motivar a descoberta da representação geométrica da unidade imaginária através da média proporcional.

Etapa I

1. Utilize a figura 34 como referência, nela temos uma reta real e uma semicircunferência de raio unitário.

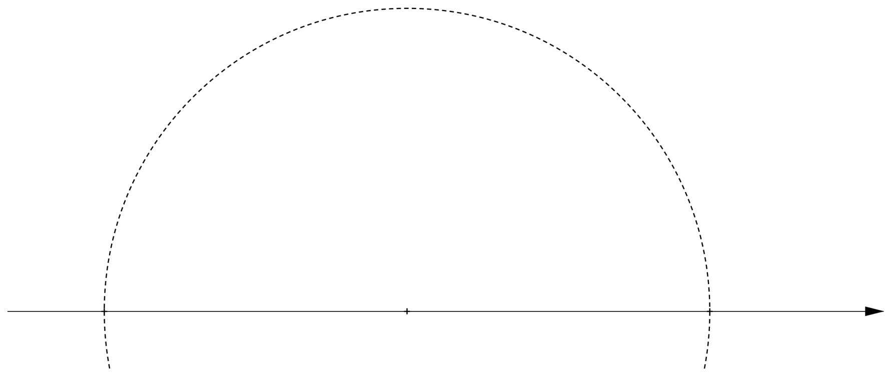


Figura 34 – Representação gráfica da unidade imaginária
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

a) Marque sobre a reta os pontos B, O e C cujas abscissas são $+1$, 0 e -1, respectivamente. Em seguida construa os vetores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

b) Construa um vetor $\overrightarrow{OA}$ que seja perpendicular aos vetores desenhados no item (a) e use o Teorema 2.2 para relacioná-los. Que relação encontraremos como resposta?

c) O que acontece se considerarmos $d = OA$ e substituirmos os valores de OB e OC na relação encontrada no item (b)?

d) Se representarmos esta construção sobre eixos coordenados x e y, onde devemos indicar o vetor que representa $-i = -\sqrt{-1}$?

Comentários:

A construção esperada no item (a) encontra-se na figura 35. Os catetos pontilhados nesta é para lembrá-los de que este triângulo é retângulo, pois o mesmo tem a hipotenusa sobre o diâmetro da semicircunferência.

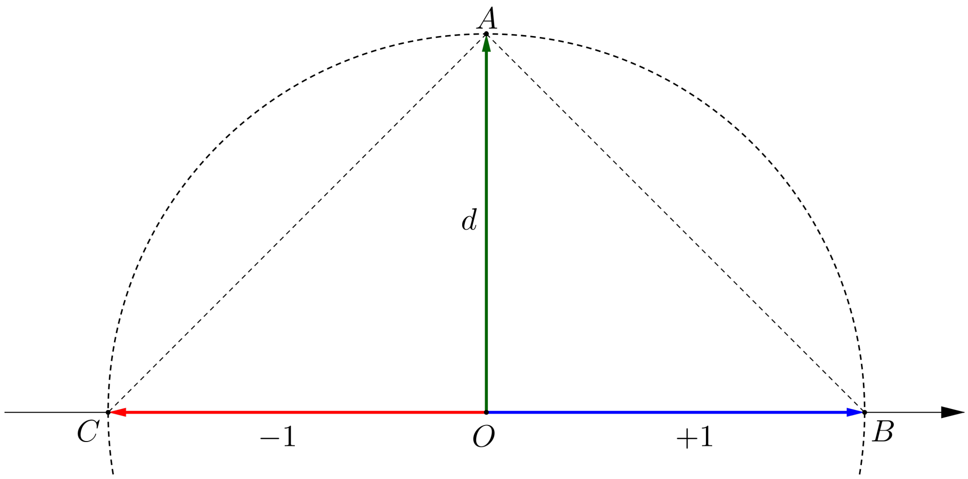


Figura 35 – Representação gráfica da unidade imaginária
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

No item (b) esperamos que eles identifiquem que os triângulos AOB e AOC são semelhantes de acordo com o Teorema 2.2 e que $\frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OC}$.

No item (c) após as substituições na relação encontrada no item anterior, teremos $\frac{+1}{d} = \frac{d}{-1} \Leftrightarrow d^2 = (+1)(-1)$, de acordo com o Teorema 2.2.

Esperamos que os alunos ao adaptarem o Teorema 2.2 para as direções orientadas, assim como foi feito por Argand no passado, cheguem à conclusão de que $d = \sqrt{(+1)(-1)} = \sqrt{-1}$, ou seja, concluam que o segmento orientado OA representa a unidade imaginária.

Portanto, esperamos com esta singela construção possa mostrar que a “misteriosa” unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, nada mais é do que um segmento unitário, perpendicular ao eixo horizontal.

No item (d) desejamos criar as condições iniciais para que a representação dos números complexos, como vetores do plano com origem em $O = (0, 0)$ e extremidade no ponto $Z = (a, b)$, venha a se tornar parte deste novo objeto matemático que lhes é apresentado.

Após a realização da **Etapa I** desta **Atividade**, aconselhamos que o professor faça uma comparação entre a construção realizada pelos alunos e a do trabalho de Argand, disponíveis em Roque (2012, p.446), de modo que os alunos percebam que a construção realizada por eles segue um caminho semelhante ao de Argand na busca de uma representação para a unidade imaginária.

Caso o professor queira mostrar uma cópia, de partes dos originais, das obras de Caspar Wessel e Jean-Robert Argand, sugerimos a consulta aos endereços eletrônicos:

- ARGAND J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. 1806. Disponível em < http://www.gallica.bnf.fr >.
- WESSEL, C. *Essair sur la représentation analytique de la direction*. 1897. Disponível em < http://www.gallica.bnf.fr >.

Etapa II

Neste momento sugerimos que o professor encerre a **Atividade 3** mostrando aos alunos que a representação gráfica da unidade imaginária, iniciada com os trabalhos de Wessel e Argand, criou as condições necessárias para que se desfizesse o ar de números com natureza "sofisticada" que cercava os números complexos. Porém sua compreensão como pontos do plano só acontecerá quando Gauss, nos seus trabalhos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, resolve defender as quantidades imaginárias perante a comunidade matemática.

A seguir sugerimos alguns trechos para serem usados com os alunos, pois consideramos que eles ajudam a entender o encaminhamento dado para o reconhecimento desses números como pontos do plano. Como tais trechos são apenas sugestões, fica a critério do professor, durante a realização da atividade, um possível acréscimo de informações históricas.

Segundo Roque (2012) o ponto de vista defendido por Gauss ilustra o início de um movimento que não considera necessário qualificar as quantidades negativas e imaginárias, como acontecia desde a Idade Média. Notamos ainda que "as discussões sobre o estatuto dos números negativos durante o século XVIII e início do XIX na França mostram que somente números absolutos eram admitidos como objetos matemáticos". (ROQUE, 2012, p. 448)

De acordo com as ideias de Gauss, os números negativos só podem ser compreendidos quando entendemos que "as coisas contadas" podem ser de espécies opostas, de modo que a unidade de uma espécie neutralize a unidade de outra espécie (como $+1$ e -1). Mas ele considera que as coisas contadas não deviam ser encaradas como substâncias, como objetos considerados em si, e sim como uma relação entre esses objetos, e deixa claro que essa noção de oposição implica, ainda, uma possível troca de termos da relação, operando de modo que se a relação (ou passagem) de A a B é indicada por +1, a relação de B a A é indicada por -1. (ROQUE, 2012, p. 448)

Em seus trabalhos, Gauss observou que os números complexos devem ser compreendidos também como relações, isto o levou a perceber a proximidade entre a relação de $+1$ a -1 e a relação de $+i$ a $-i$, que de certa forma, trata-se de um entendimento não muito distante da média proporcional proposta por Argand.

Para Gauss, essas relações podem ser tornadas intuitivas por uma representação geométrica, basta esquadrinhar o plano por um duplo sistema de retas paralelas que se cortem em ângulos retos, como ilustrado na figura 36. Os pontos de interseção serão os números complexos e, dado um certo ponto A, este será envolvido por quatro pontos adjacentes B, B', C e C'.

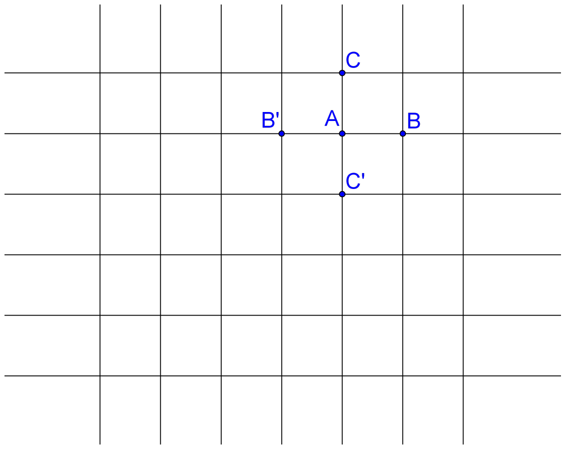


Figura 36 – Duplo sistema de retas paralela
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

De acordo com Roque (2012) o símbolo $+1$ indica a relação do ponto A com qualquer um dos pontos adjacentes, o que faz com que -1 indique automaticamente a relação com o adjacente no sentido oposto.

Consideremos o exemplo em que $+1$ indique a relação de A com B. Nesse caso, o símbolo $+i$ indicará a relação de A com C; e -1, a relação de A com B'. Porém, $+1$ também poderia indicar a relação de A com C, e nesse caso, $+i$ determinaria a relação de A com B' e -1, a relação de A com C'. Este fato nos mostra que esses números não possuem nenhuma realidade, designando apenas uma relação.

Portanto, a escolha que vamos fazer para o eixo dos reais e dos imaginários é feita de modo arbitrário. Embora arbitrária, esta escolha obedece uma certa orientação do plano, pois não podemos ter $-i$ no mesmo segmento de $+1$ mantendo os outros inalterados.

Gauss considerava que a nomenclatura de “positivo”, “negativo” e “imaginário”, respectivamente, para $+1$, -1 e $\sqrt{-1}$ foi exatamente o que deu margem a confusões quanto ao estatuto desses números, que deviam ser chamados de “unidade direta”, “inversa” e “lateral”, o que mostra sua íntima relação com a orientação das direções do plano.

Esta simples ideia foi essencial na aceitação dos números complexos, pois embora não tivessem uma existência física, tal representação permitiu que os matemáticos se sentissem mais à vontade com os números complexos, pois esses passaram a poder ser visualizados através da correspondência biunívoca onde cada número complexo está associado a um único ponto do plano e vice-versa. Afinal, ver é crer!

2.2 Representação Gráfica dos Números Complexos

Nesta parte do trabalho, além de apresentarmos a representação gráfica dos números complexos, procuraremos enfatizar a estreita relação existente entre esta forma de representar geometricamente os complexos e a forma algébrica de representação destes números.

Como ponto de partida usaremos o plano cartesiano e os vetores, que são objetos matemáticos conhecidos dos nossos alunos. A pequena adaptação que faremos será considerar um tipo especial de vetor para representar os números complexos.

Nas atividades seguintes usaremos como referência a definição de Carneiro (1998) para número complexo:

Definição 2.1 *Um número complexo $z = a + bi$ será posto em correspondência biunívoca com um ponto $Z = (a; b)$, cujas coordenadas são números reais. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos coincide, portanto, com o conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos os pares ordenados de números reais.*

Geometricamente, um número complexo pode ser visto como um **ponto** ou como um **vetor** no plano cartesiano, sendo que tal vetor terá a origem, coincidindo com a origem do $\mathbb{R}^2$, ou seja $O = (0; 0)$; e a extremidade, coincidindo com $Z = (a; b)$.

Um cuidado que devemos ter, quando consideramos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, é que "embora, como conjuntos, seja iguais, do ponto de vista algébrico eles são diferentes" (CARNEIRO, 1998). Na atividade a seguir, exploraremos a adição de vetores em $\mathbb{R}^2$, porém em $\mathbb{C}$ estaremos interessados numa multiplicação que não deve ser confundida com o produto interno entre dois vetores, que é um número real.

2.2.1 Atividade 4: A Soma Geométrica dos Números Complexos

Objetivos:

- Apresentar os números complexos sob a ótica de pontos e vetores do plano de Argand-Gauss.
- Usando trechos do trabalho de Wessel, mostrar que a soma dos números complexos faz-se pela regra do paralelogramo.

Tempo: 1 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento:

Antes de iniciar a atividade verifique se está claro para os alunos que graças à ideia de Gauss e ao empenho de matemáticos como Cauchy e Hamilton, todo número complexo $z = a + bi$ na forma algébrica pode ser representado na forma de um ponto $Z = (a; b)$ do plano cartesiano, agora designado por Plano Complexo ou de Argand-Gauss.

A partir do trecho retirado de uma tradução do trabalho de Caspar Wessel:

> "Unimos os segmentos de modo que o segundo segmento comece onde o primeiro termina e passamos um segmento pelo primeiro ponto do primeiro segmento e pelo último ponto do segundo segmento. Este segmento será a soma dos dois segmentos". (NEVES, 2008, p. 16)

responda as seguintes perguntas:

a) Você identifica algo familiar no trecho acima?

b) Represente os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ na forma de pontos do plano cartesiano, onde a, b, c e d são números reais. Em seguida construa vetores com origem em $O = (0; 0)$ e extremidade nos pontos Z_1 e Z_2. (Deixe que os alunos escolham dos valores de a, b, c e d.)

c) Usando a regra exposta no trecho acima, com as devidas adaptações, para a soma $z_1 + z_2$ indique o vetor que a representa, ou seja, $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$.

Resultados Esperados:

Possível Resposta a): Espera-se que os alunos identifiquem no trecho acima a Regra do Polígono usada para somar vetores.

Observação 2.3 *Antes de continuar, esclareça para eles que este resultado nos dará o módulo, direção e sentido da soma vetorial, porém como estamos lidando com um tipo especial de vetores, os que tem a origem coincidindo com $O = (0; 0)$, usaremos neste caso a conhecida Regra do Paralelogramo.*

Possível Resposta b): Considerando que os alunos já tiveram contato com o plano cartesiano e com os vetores, em Física, espera-se que o alunos marquem os pontos corretamente, assim como façam a representação dos vetores.

Possível Resposta c): O aluno irá utilizar as informações do texto, suas devidas adaptações e os seus conhecimentos sobre soma de vetores para apresentar a representação geométrica desta soma.

Na figura 37 apresentamos uma, entre as várias soluções possíveis.

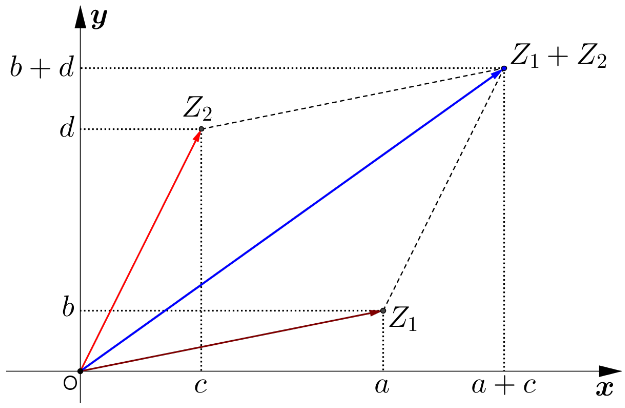


Figura 37 – Regra do Paralelogramo
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

Observação 2.4 *É provável que algum aluno insista em usar a regra do polígono, esclareça para ele que na essência a ideia é semelhante, porém devido à existência de uma correspondência perfeita entre cada ponto P do plano e o **vetor** definido pelo segmento $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem, usaremos em nossa atividade a regra do paralelogramo, como ilustra a Figura 37. Por causa da correspondência biunívoca entre os pontos de coordenadas $(a; b)$ e os números complexos da forma $z = a + bi$ usaremos a notação $\overrightarrow{OZ}$ para indicar o vetor com extremidade em $(a; b)$.*

Comentários:

Uma dificuldade que pode ser encontrada pelo professor refere-se à excessiva ênfase dada à parte algébrica nos currículos das escolas, afinal geralmente a parte referente à geometria fica relegada a segundo plano. Talvez alguns alunos julguem “mais fácil” decorar a regra de adição dos números complexos, na forma algébrica, como uma receita, pois é assim que aparece em alguns livros, em vez de tentar entendê-la em suas diversas representações.

Aproveite este momento para fazer uma comparação entre a Forma Algébrica de somar os complexos e a Forma Gráfica, mostrando que ao somarmos, por exemplo,

$$z_1 + z_2 = (a + b; c + d)$$

estamos transladando primeiro a origem pelo vetor $\overrightarrow{z_1} = (a; b)$, e em seguida, este ponto pelo vetor $\overrightarrow{z_2} = (c; d)$.

Embora a adição seja de fácil assimilação, verifique se ficou claro para os alunos a ideia presente na seguinte definição:

Definição 2.2 *A adição de números complexos é a adição usual de vetores no plano, ou seja,*

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d).$$

Lembre aos alunos que as representações gráficas, que utilizamos nas nossas ilustrações, não aparecem nos textos de Wessel, no lugar delas vemos apenas a justificativa por escrito, como aconteceu no texto no início da atividade. Caso os alunos mostrem interesse pelo texto original, informe-os que ele está em francês e disponível em Wessel (1897, p. 9).

Nossa preferência de usar o texto de Wessel no lugar do de Argand deve-se ao fato de que foi Wessel o primeiro matemático a ter apresentado a proposta de representação geométrica para os números complexos que temos hoje. Seu trabalho foi apresentado ao *Royal Danish of Sciences and Letters* em 1797, porém devido à sua modesta formação e distância da intensa atividade científica da época, sua obra só foi reconhecida quase 100 anos após sua publicação.

Observação 2.5 *Nas próximas atividades usaremos vetores do tipo $\overrightarrow{OZ} = (a; b)$, onde O é a origem do sistema de coordenadas do plano.*

2.2.2 Atividade 5: Produto de Segmentos Orientados

Objetivos:

- Utilizar a semelhança de triângulos na construção da ideia de produto de segmentos orientados.
- Explorar a representação gráfica feita por Wessel como elemento motivador na compreensão do produto de segmentos como homotetias e rotações.

Tempo: 1 aula de 50 minutos.

Observação 2.6

O entendimento da construção abaixo foi de grande importância na compreensão do produto entre segmentos orientados nos trabalhos de Argand (1874, p. 20-21) e de Wessel.

Aconselhamos que o professor verifique com a turma, a necessidade de recordar os casos de semelhança, antes do início da atividade.

Para a realização da atividade serão necessários instrumentos para fazer os desenhos, tais como régua, compasso e transferidor.

1. Construa, em local apropriado, segmentos com as seguintes medidas: $\overline{OU} = 1$, $\overline{OA} = 1,5$ e $\overline{OB} = 2,6$. Os ângulos terão medidas $U\widehat{O}A = \alpha$ e $U\widehat{O}B = \beta$, sendo que estas medidas devem ser escolhidas pelos alunos. Use o esquema da figura 38 como referência.

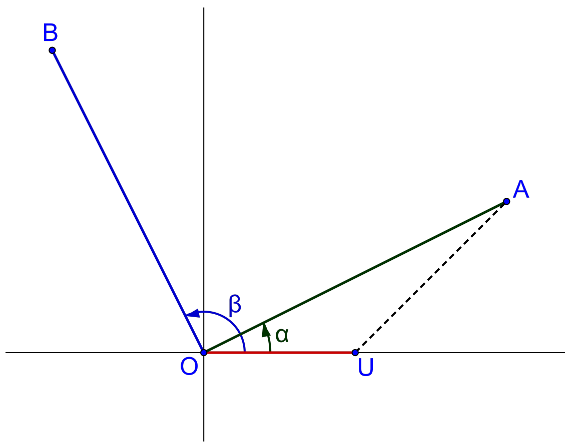


Figura 38 – Produto de Segmentos de retas
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

(a) Construa um triângulo BOC semelhante ao triângulo AOU usando o caso LAL. O lado OC não deve ficar na região interna dos ângulos $A\widehat{O}U$ ou $B\widehat{O}A$. Que relação encontramos entre as medidas dos segmentos OA, OB e OC?

Possível resposta: Espera-se que eles consigam realizar a construção com a ajuda de compassos, réguas e transferidores. E, em seguida, usem o fato de que $\dfrac{OB}{OU} = \dfrac{OC}{OA}$ para concluir que $OC = OA \cdot OB$, pois $OU = 1$.

(b) Qual é a medida encontrada para o ângulo $C\widehat{O}A$?

Possível resposta: Esperamos que eles cheguem à conclusão de que $C\widehat{O}A = \alpha + \beta$.

c) Repita a construção utilizando o $\triangle BOU$ como referência. Neste caso devemos ter $\dfrac{OA}{OU} = \dfrac{OC}{OB}$. Use a recomendação do item (a) ao desenhar o lado OC. A relação encontrada entre as medidas dos segmentos OA, OB e OC é igual à do item (a)?

Possível resposta: Espera-se que eles consigam realizar a construção com a ajuda de compassos, réguas e transferidores. E, em seguida, usem o fato de que $\dfrac{OB}{OU} = \dfrac{OC}{OA}$ para concluir que $OC = OA \cdot OB$, pois $OU = 1$.

Comentários:

Alertem os alunos para tomarem cuidado com a manipulação dos instrumentos de desenho, pois a falta de cuidado nas medições pode acarretar erros nas conclusões. Deve-se alertá-los que pequenos erros são esperados durante a construção.

Aos professores que lecionam em escolas onde os laboratórios de informática podem ser usados durante suas aulas, sugerimos o uso de softwares de Geometria Dinâmica, tais como o *Geogebra*. A vantagem em usar este programa é que o professor ao ensinar os seus alunos a construírem o esquema desta atividade, permitirá que os mesmos manipulem as medidas dos segmentos e ângulos de direção, gerando assim conjecturas que dependeriam muito da capacidade de abstração dos alunos que usam apenas régua, compasso e transferidor.

Após a realização da atividade, seria interessante que o professor reproduzisse e apresentasse aos alunos o seguinte texto que trata do produto de segmentos presente em Wessel (1897, p. 9) e traduzido por Neves (2008, p. 17) da seguinte forma:

"Para definir uma multiplicação geométrica de segmentos, utilize como referência um segmento denominado ***unidade positiva***, e simbolize-a por $+1$, cujo comprimento é 1 e cuja inclinação é definida como sendo 0^o. Assim, dados dois segmentos, defini-se seu produto como sendo um terceiro segmento com as seguintes características:

1) Pertence ao mesmo plano dos segmentos fatores e do segmento $+1$;

2) Tem comprimento igual ao produto dos comprimentos dos segmentos fatores;

3) Tem inclinação (tomando como referência a inclinação de $+1$) igual à soma das inclinações dos segmentos fatores."

Sugerimos que o professor utilize a figura 39 para ilustrar que a maneira como Wessel e Argand entendiam o produto de dois segmentos orientados é idêntica à explorada na atividade acima. Lembre que nesta figura temos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OU} = +1$ são coplanares, $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC}$; $\alpha + \beta = \gamma$.

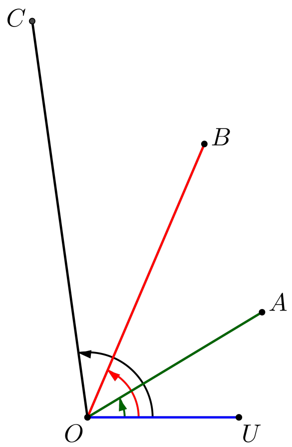


Figura 39 – Produto de dois segmentos
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

É importante que o professor enfatize que esta maneira, como foi definido o produto dos números complexos, nos permitirá pensá-lo de maneira mais dinâmica, ou seja, na forma de rotações e homotetias realizadas sobre os vetores envolvidos.

Caso o professor queira recordar essas ideias e enriquecer os alunos, através de material escrito, com informações sobre: Translações, Rotações e Homotetias; sugerimos para consulta o trabalho de Barbosa (2013, p. 9-16), pois o mesmo apresenta de forma detalhada e com exemplos acessíveis estas informações.

2.3 Sugestão de Continuidade para as Atividades Propostas

Ao realizar as atividades anteriores tentamos criar as condições para o entendimento da relação existente entre a forma algébrica e geométrica dos números complexos, usando a história e parte de textos históricos como pano de fundo.

Sugerimos que a partir deste momento, o professor inicie um processo de formalização dos números complexos usando uma abordagem semelhante à usada por Wessel, ou seja, usando o que conhecemos hoje como coordenadas polares. Esta maneira de encaminhar o conteúdo, ajudará a entender principalmente as operações relacionadas à multiplicação e divisão, possibilitando ao aluno a observação das rotações e homotetias que ocorrem durante sua efetuação, fato este que não pode ser observado pela simples manipulação da forma algébrica. Não queremos dizer com isto que a forma algébrica seja inútil ou que deva ser desprezada, mas sim que devemos criar condições que permitam ao aluno perceber as transformações geométricas que estão ocorrendo durante a realização de certas operações.

Se possível, dê continuidade ao assunto mostrando aos alunos que na obra de Wessel (1897, p. 10) notamos o modo como ele conclui que dado um segmento $\overrightarrow{OA}$, unitário, com origem em O e inclinação de v graus, então $\overrightarrow{OA}$ poderia ser interpretado geometricamente, conforme ilustra a Figura 40, como a soma das suas projeções ortogonais $A_x = \cos v$ e $A_y = \varepsilon \operatorname{sen} v$, nas direções dos segmentos $+1$ e $+\varepsilon$, respectivamente, ou seja,

$$\overrightarrow{OA} = \cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v. \tag{2.2}$$

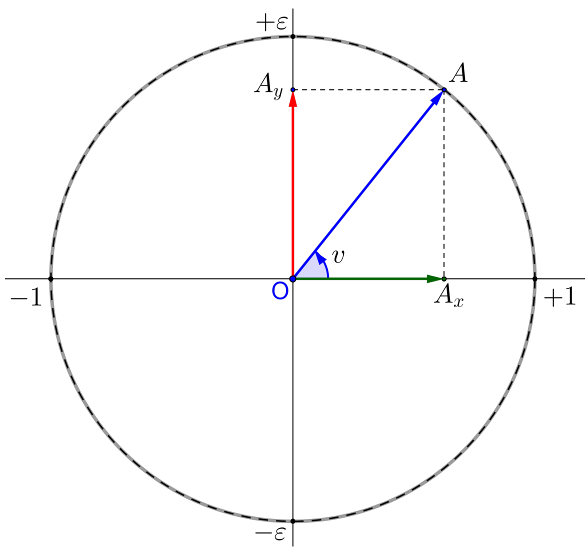


Figura 40 – Projeção Ortogonal de um vetor unitário
Fonte: Marcos Paulo de Oliveira

Esta interpretação feita por Wessel (1897), geralmente é ilustrada para os alunos durante as aulas de Física, quando os professores desta área abordam a decomposição de forças em componentes ortogonais, e novamente no 3^o ano do ensino médio quando abordamos a forma trigonométrica dos complexos, mas isso só acontece após uma enxurrada de exercícios envolvendo a forma algébrica dos complexos! Portanto podemos aproveitar esse conhecimento prévio do aluno para construirmos outro: a representação dos números complexos, e dessa forma tornamos o seu aprendizado menos nebuloso.

Mostre aos alunos que, a partir desta ideia, Wessel (1897, p. 10) estende o resultado para o caso em que $\overrightarrow{OA}$ possui comprimento r e inclinação v, sendo que $\overrightarrow{OA}$ representado analiticamente por

$$\overrightarrow{OA} = r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \operatorname{sen} v = r\left(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v\right). \tag{2.3}$$

Hoje, feita a conversão de ε para i, a equação 2.3 é o que aparece nos livros didáticos com a designação de ***Forma Polar*** ou ***Trigonométrica*** de um número complexo. Para evitarmos o equívoco cometido pelos livros didáticos, consideraremos $v \in [0, 2\pi[$ como a menor determinação, em radianos, do ângulo trigonométrico entre o semieixo real positivo e a semirreta que une O a A (figura 40). Devemos observar que substituindo v na equação 2.3 por $v + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a igualdade não se altera. Por este motivo, diremos que os números da forma $v + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são argumentos do complexo A e que v é o argumento principal de A.

Comece justificando a multiplicação analítica de segmentos no plano, seguindo as ideias presentes no trabalho de Wessel. Nele podemos observar que ao realizar o produto entre segmentos unitários, ele considera que: essa multiplicação é distributiva; o fato de $\varepsilon \cdot \varepsilon = -1$ e as identidades trigonométricas $\cos(v + u) = \cos v \cdot \cos u - \operatorname{sen} v \cdot \operatorname{sen} u$ e $\operatorname{sen}(v + u) = \cos v \cdot \operatorname{sen} u + \cos u \cdot \operatorname{sen} v$.

Em seguida, apresente como Wessel (1897) concluiu que o produto dos segmentos unitários obedece à regra

$$\begin{aligned}
\left(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v\right)\left(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u\right) &= \cos v \cdot \cos u + \varepsilon \cos v \cdot \operatorname{sen} u + \varepsilon \operatorname{sen} v \cdot \cos u \\
&\quad + \varepsilon^2 \operatorname{sen} v \cdot \operatorname{sen} u \\
&= \cos v \cdot \cos u + \varepsilon\left(\cos v \cdot \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v \cdot \cos u\right) \\
&\quad - \operatorname{sen} v \cdot \operatorname{sen} u \\
&= \cos v \cdot \cos u - \operatorname{sen} v \cdot \operatorname{sen} u + \varepsilon(\cos v \cdot \operatorname{sen} u \\
&\quad + \operatorname{sen} v \cdot \cos u) \\
&= \cos\left(v + u\right) + \varepsilon \operatorname{sen}\left(v + u\right)
\end{aligned}$$

Este resultado nos ajudará a mostrar que Wessel sabia que a multiplicação de segmentos unitários se dava através de rotações. Mais precisamente, que o resultado da multiplicação $(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v)\,(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u)$ resulta na rotação do segmento unitário $(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v)$ de um ângulo u ou na rotação do segmento unitário $(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u)$ de um ângulo v.

Aconselhamos que o professor dê continuidade a essa abordagem com a forma trigonométrica, mostrando que assim como foi feito na decomposição de um segmento em componentes ortogonais, Wessel (1897, p. 11) generaliza a multiplicação para dois segmentos quaisquer e prossegue em sua obra justificando resultados para a divisão, potenciação e radiciação.

Esperamos que esta forma de encaminhar o conteúdo de números complexos possibilite aos alunos vislumbrar a proposta de integração entre álgebra e geometria, fazendo com que os números complexos passem a ser percebidos também como entes geométricos, e mostrando-lhes que cada operação realizada na forma algébrica tem uma correspondente representação geométrica.

Capítulo 3

Considerações Finais

Durante a construção deste trabalho, notamos que as orientações contidas em documentos oficiais são no sentido de tratar os números complexos como tópico complementar do currículo de Matemática do Ensino Médio. Este quadro se agrava, ainda mais, quando observamos que este conteúdo não é contemplado na matriz de instrumentos de avaliação, tais como o ENEM e SAEB, ficando o referido conteúdo, para muitos professores, como um peso morto que poderia ser deixado de lado no currículo, pois só tem utilidade para os alunos que gostam da Matemática pelo prazer da Matemática ou para os que seguirão carreiras nas áreas das ciências exatas. Notamos também, que um fator que colabora para que tal discurso ganhe força, deve-se à maneira como os livros didáticos tem tratado os números complexos. Esta observação, realizada durante a análise desse tipo de livro, mostra as poucas variações apresentadas pelos autores de livros didáticos, seja por medo de tornar sua obra com pouca aceitação pelos professores ou de não ser aprovada por parte dos avaliadores do PNLD.

O lado animador deste cenário obscuro, onde os números complexos estão quase condenados à exclusão, é percebermos que nosso empenho em dar significado e uma abordagem diferente aos números complexos é corroborado por muitos pesquisadores, que como nós consideram que este conteúdo fascinante deveria ter a real atenção que merece.

Esperamos que este trabalho contribua no sentido de ajudar na criação de uma prática que possibilite uma maior participação da história da matemática, assim como de parte dos textos históricos, nos processos de ensino e aprendizagem. Esperamos ainda, que com a popularização de novas tecnologias, possamos levar para as salas de aula uma quantidade maior de detalhes que existem por trás da teoria que envolvem os números complexos, e com isso podermos explorá-los em toda a sua totalidade, permitindo que nossos alunos realizarem conjecturas que são possíveis apenas em nossas mentes.

Referências

ARGAND, J.-R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Paris: [s.n.], 1874. Blanchard. Disponível em: <http://www.gallica.bnf.fr>. Citado na página 61.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 7^a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Citado na página 53.

BARBOSA, M. de O. H. *O Uso de Transformações Geométricas em Temas do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) — UENF, Campos dos Goytacazes-RJ, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 63.

BAUMGART, J. K. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra*. São Paulo: Atual Editora, 1992. v. 4. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 1996. Citado na página 50.

BRASIL. *PCNEM. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília, 1999. Ministério da Educação, 364 p. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

BRASIL. *PCN+. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2002. 141 p. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20 e 21.

BRASIL. *OCEM. Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, 2006. v. 2, 135 p. Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 21.

BRASIL. *PNLD 2015. Guia de Livros Didáticos do Ensino Médio - Matemática*. Brasília, 2014. 108 p. Citado 4 vezes nas páginas 13, 14, 22 e 45.

CARNEIRO, J. P. Q. *Resolução de Equações Algébricas*. Rio de Janeiro: Editora Universitária Santa Úrsula, 1998. 101 p. Citado na página 58.

CARNEIRO, J. P. Q. A geometria e o ensino dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*, n. 55, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.

CHAGAS, J. S. B. *A Relevância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião dos Professores de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) — UENF, Campos dos Goytacazes-RJ, 2013. Citado na página 46.

COPESE. *Programa de Ingresso Seletivo Misto*. Juiz de Fora, 2014. Disponível em: <http://www.ufjf.br/copese/vestibular-pism/>. Citado na página 45.

DANTE, L. *Matemática: Contextos e Aplicações*. 2^a ed. São Paulo: Editora Ática, 2013. v. 3. 144-169 p. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

FREITAG, B. et al. *O Livro Didático em Questão*. 2^a ed. São Paulo: Editora Cortez, 1993. 159 p. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 17.

IEZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. 7^a ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013. v. 3. 165-200 p. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

LEONARDO, F. M. de. *Conexões com a Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. v. 3. 162-183 p. Citado na página 22.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 3^a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. 206 p. Citado na página 48.

LIMA, E. L. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 23, 30, 34, 36 e 38.

MUNAKATA, K. Investigações acerca dos livros escolares no brasil: das ideias à materialidade. *Memoria del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Latinoamericana.*, p. 14, 2003. Disponível em: <www.academia.edu/10909984/Investiga%C3%A7%C3%B5es_acerca_dos_livros_escolares_no_Brasil_das_id%C3%A9ias_%C3%A0_materialidade>. Citado na página 17.

NEVES, R. C. *Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 63.

PAIVA, M. *Matemática Paiva*. 2^a ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. v. 3. 140-164 p. Citado na página 33.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 511 p. Citado 3 vezes nas páginas 48, 56 e 57.

SIMOES, M. Mudanças, mas a um passo por vez. *Revista Cálculo*, n. 48, Janeiro 2015. Citado na página 14.

SMOLE, K.; DINIZ, M. *Matemática: Ensino Médio*. 8^a ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013. v. 3. 224-249 p. Citado 4 vezes nas páginas 8, 38, 39 e 40.

SOUZA, J. R. d. *Novo Olhar Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Editora FTD, 2013. v. 3. 228-255 p. Citado 3 vezes nas páginas 9, 40 e 44.

SPINELLI, W. *A Construção do Conhecimento entre o Abstrair e o Contextualizar: o Caso do Ensino de Matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. Citado na página 49.

TARTAGLIA, N. *Quesiti et inventioni diverse*. Veneza: [s.n.], 1554. Disponível em: <http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-9183>. Citado na página 48.

VIANA, A.; MENDES, R. Ensino médio: O curso de matemática ideal. *Revista Cálculo*, n. 44, Setembro 2014. Citado na página 12.

WESSEL, C. *Essair sur la représentation analytique de la direction*. Copenhague e Paris: [s.n.], 1897. Consultado em 30/08/2015. Disponível em: <http://www.gallica.bnf.fr>. Citado 5 vezes nas páginas 61, 63, 64, 65 e 66.

Anexos

ANEXO A

A Solução de Tartáglia para a Equação do Terceiro Grau

A Solução de Tartáglia para a Equação do Terceiro Grau

César Polcino Milies, IME-USP

1 Introdução

A história da resolução da equação de terceiro grau é muito pitoresca, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores. Ela foi narrada recentemente num interessante artigo de Elon L. Lima [4] e pode ser encontrada também em livros de História da Matemática tais como [1] ou [3].

Uma das personagens dessa história é **Niccolò Fontana** (1500-1557 aprox.). Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal. Sua mãe buscou refúgio para o filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de **Tartaglia** (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido. Ele não foi o primeiro a obter o método de resolução dessas equações; **Scipione del Ferro** (1465-1562 aprox.), que foi professor na Universidade de Bolonha e cuja biografia é pouco conhecida, foi o verdadeiro descobridor. Antes de morrer, dei Ferro ensinou seu método a dois discípulos, **Annibale della Nave** - seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha - e **António Maria Fior** (ou Floridus, em latim).

Em 1535 houve uma disputa matemática entre Fior e Tartaglia. Tais confrontos intelectuais não eram infrequentes na época e, muitas vezes, a permanência de um matemático numa cátedra dependia de seu bom desempenho nesses encontros. Cada um dos adversários propôs ao outro trinta problemas e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Tartaglia preparou questões variadas, mas todos os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo $X^3 + aX = b$. Precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações e, na hora do confronto, verificou-se que Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este não tinha conseguido resolver a maioria das questões submetidas por Tartaglia. Declarado vencedor, Tartaglia voluntariamente renunciou aos trinta banquetes.

A notícia do triunfo de Tartaglia logo se espalhou e chegou aos ouvidos de **Girolamo Cardano** (1501-1576), que, na época, ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. De todos os participantes da nossa história, talvez seja Cardano o mais enigmático, aquele cuja vida é mais pitoresca e, certamente, que teve uma formação mais universal.

Para termos uma ideia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643:

> *Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isto é apenas humano; é mara-vilhoso, porém, quão raramente ele errava.*

Por outro lado, Naudé é bem mais crítico quanto à vida pessoal e características de personalidade de Cardano, distorcendo-as até o patológico. Foram estas opiniões de Naudé, amplamente divulgadas no prefácio das obras de Cardano, que deram origem à visão distorcida que as futuras gerações tiveram sobre seu caráter.

Na época da descoberta de Tartaglia, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convidou a sua casa, com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que

Tartaglia tinha feito também algumas descobertas sobre tiro e fortificações e esperava obter disso algum benefício. Uma vez lá, com muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau.

Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução (embora não lhe ensinasse a demonstração da mesma), sob forma de versos, em troca do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou — e achou — uma demonstração que o justificasse. Mais ainda, ele estimulou seu secretário e discípulo **Ludovico (Luigi) Ferrari** (1522-1565) a trabalhar com a equação de quarto grau e ele achou o correspondente método de resolução com a devida demonstração.

De posse de ambas as soluções, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las. Em 1544, mestre e discípulo realizaram uma viagem a Florença e, no caminho, fizeram uma visita a Annibale delia Nave, em Bologna. De acordo com um relato de Ferrari, este lhes mostrou um manuscrito de del Ferro que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg, uma obra intitulada *Ars Magna*, que o tornou verdadeiramente famoso em todo o continente. Nas palavras de C. Boyer, "ele provavelmente era o matemático mais competente da Europa". Nessa obra aparecem, pela primeira vez, as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus. A seu favor, podemos dizer que Cardano não esquece de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

A seguir, faremos uma análise do método que Tartaglia confiou a Cardano.

2 Os Versos de Tartáglia

Como dissemos acima, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta por meio de versos. Tal ideia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia.

A seguir, reproduzimos os versos na sua versão original, tal como transcritos na página 120 da edição de 1554 dos *Quesiti* [6]:

Texto em italiano	**Tradução para o português**
Quando che'l cubo con le cose appreso Se aggaglia a qualque número discreto Trovati due altri differenti in esso	Quando o cubo com a coisa em apreço Se igualam a qualquer número discreto Acha dois outros diferentes nisso
Depoi terrai questo por consueto Che'l lor produtto sempre sia eguale Al terzo cubo delle cose neto	Depois terás isto por consenso Que seu produto seja sempre igual Ao cubo do terço da coisa certo
El residuo poi suo generale Delli lor lati cubi ben sostratti Verra Ia tua cosa principale	Depois, o resíduo geral Das raízes cúbicas subtraídas Será tua coisa principal
In el secondo de coiesti aiti Quando che'l cubo restasse lui solo Tu osserverai quest'altri contratti	Na segunda destas operações, Quando o cubo estiver sozinho Observarás estas outras reduções
Del número farai due, tal part'a volo Cha l'uno e l'altro si produca schietto El terzo delle cose in stelo	Do número farás dois, de tal forma Que um e outro produzam exatamente O cubo da terça parte da coisa

Delle qual poi, per commun precetto Torrai li lati cubi incieme gionti Et cotal somma sará il tuo concetto	Depois, por um preceito comum Toma o lado dos cubos juntos E tal soma será teu conceito
El terzo poi de questi nostri conti Se solve con secondo, se ben guardi Che ser natura son quasi congiontri	Depois, a terceira destas nossas contas Se resolve como a segunda, se observas bem Que suas naturezas são quase idênticas
Questi trovai, et non con passi tardi nel mille cinquecento quatro et trinta Con fondamenti ben fald'è gagliardi Nella città dal maré intorno centa.	Isto eu achei, e não com passo tardo No mil quinhentos e trinta e quatro Com fundamentos bem firmes e rigorosos Na cidade cingida pelo mar

Analisaremos, a seguir, esses versos numa linguagem acessível ao leitor contemporâneo. Antes de tudo, é conveniente lembrar que Tartaglia (assim como depois faria também Cardano) não utiliza coeficientes negativos em suas equações. Então, em vez de uma equação geral do terceiro grau, ele deve considerar três casos possíveis:

$$x^3 + ax = b,$$
$$x^3 = ax + b,$$
$$x^3 + b = ax.$$

Tartaglia chama cada um desses casos de operações e afirma que irá considerar, de início, equações do primeiro tipo: "*cubo e coisa igual a número*". No quarto verso começa a considerar o segundo tipo "*quando o cubo estiver sozinho*" e, no sétimo, faz referência ao terceiro caso.

Vejamos agora como se propõe a resolver o primeiro caso, nos três versos iniciais, para depois justificar seu método, de uma forma simples.

O *número* se refere ao termo independente, que nós denotamos aqui por b. Quando diz "*acha dois outros diferentes nisso*", está sugerindo tomar duas novas variáveis cuja diferença seja precisamente b, i.e., escolher U e V tais que:

$$U - V = b.$$

A frase "... que *seu produto seja sempre igual a cubo da terça parte da coisa*" significa que U e V devem verificar:

$$U \cdot V = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Finalmente, "*o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal*" significa que a solução estará dada por

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Os outros dois casos carecem de interesse para o leitor moderno, uma vez que podemos reduzi-los ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação.

A frase final "... *a cidade cingida pelo mar*" é uma referência a Veneza, onde realizou suas descobertas.

3 A Resolução da Equação do Terceiro Grau

Nesta seção veremos como justificar a fórmula de Tartáglia para resolver equações do terceiro grau. Naturalmente, utilizaremos métodos e notações modernos, o que nos permitirá dar uma exposição relativamente simples.

Vamos considerar uma equação do terceiro grau escrita na forma:

$$x^3 + ax = b$$

para compará-la com *a primeira destas operações ... cubo e coisa igual a número* discutida nos três primeiros versos de Tartáglia. Na verdade, há um caminho muito simples para achá-la. Comecemos por lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u-v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3.$$

Pondo em evidência o produto uv, temos:

$$(u-v)^3 = -3uv(u-v) + (u^3 - v^3),$$

isto é,

$$(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3.$$

Se podemos escolher, de alguma forma, u e v de modo que verifiquem:

$$\begin{aligned} uv &= \frac{a}{3} \\ u^3 - v^3 &= b, \end{aligned}$$

a relação acima se transformará em:

$$(u-v)^3 + a(u-v) = b$$

o que significa que $x = u - v$ será uma solução da equação dada.

Em outras palavras, se conseguirmos achar u e v que sejam soluções do sistema acima, tomando $x = u - v$ obter-se-á uma solução da equação proposta. Resta-nos então o problema de resolver o sistema. Para isso, observemos que, elevando ao cubo a primeira equação, ele se transforma em:

$$\begin{aligned} u^3v^3 &= \left(\frac{a}{3}\right)^3 \\ u^3 - v^3 &= b. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$, temos:

$$\begin{aligned} UV &= \left(\frac{a}{3}\right)^3 \\ U - V &= b. \end{aligned}$$

Isso é muito fácil de resolver; U e $-V$ são as raízes da equação:

$$X^2 - bX + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

que são dadas por:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(-\frac{a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Podemos tomar uma dessas raízes como sendo U e a outra como $-V$, logo temos $u = \sqrt[3]{U}$ e $v = \sqrt[3]{V}$. Portanto, obtemos precisamente a solução enunciada por Tartáglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Mais explicitamente, substituindo U e V pelos respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, nos textos, é chamada de *fórmula de Cardano ou de Tartáglia*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Uma observação final: a equação geral do terceiro grau, que podemos escrever na forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

pode-se reduzir ao caso acima, mediante a mudança de variável $x = y - (a_1/3)$. Aliás, essa redução era conhecida por Tartáglia, mas não por Fior, e foi justamente esse fato que determinou a vitória do primeiro. Isso significa que, na verdade, Tartáglia conhecia um método geral para resolver *qualquer* equação geral do terceiro grau.

4 Referências Bibliográficas

(1) BOYER, C. *História da. Matemática.* São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

(2) FIERZ, M. *Girolumo Caridano (1501-1576).* Boston, Birkhäuser, 1983.

(3) KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York, Oxford Univ. Press, 1972.

(4) LIMA, E. L. *A equação de terceiro grau.* Matemática Universitária 5 (1987), SBM, p. 9-23.

(5) SMITH, D. E. *A Source Book in Mathematics.* New York, McGraw-Hill, 1929.

(6) TARTAGLIA, N. *Quesiti et inventioni diverse* (publicação comemorativa do IV centenário da morte de Niccolo Tartaglia), Brescia, 1959.

Nota: Este texto foi reproduzido da Revista do Professor de Matemática, nº 25, CD-Rom da RPM.

ANEXO B

A Emergência dos Números Complexos

A Emergência dos Números Complexos

César Polcino Milies, IME-USP

1 Introdução

Os números complexos desempenham um papel sumamente importante nos mais diversos ramos da Matemática e, através destes, em muitas das aplicações a outras áreas do conhecimento.

Em geral, o estudante se depara com eles, pela primeira vez, ainda no curso secundário e sua introdução é justificada pela necessidade de resolver equações de segundo grau com discriminante negativo. Isso cria uma falsa impressão, já que, historicamente, não foram as equações de segundo grau que levaram à introdução dos números complexos.

Nestas notas analisaremos essa questão e alguns outros aspectos ligados ao desenvolvimento do assunto.

O fato de que um número negativo não tem raiz quadrada parece ter sido sempre claro para os matemáticos que se depararam com a questão.

As equações de segundo grau apareceram na Matemática já nas tabuletas de argila da Suméria, aproximadamente 1700 anos antes de Cristo e, ocasionalmente, levaram a radicais de números negativos; porém, não foram elas, em momento algum, que sugeriram o uso de números complexos.

Em rigor, uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto; assim, se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, isso era interpretado apenas como uma indicação de que o problema originalmente proposto não tinha solução. Como veremos adiante, foram só as equações de terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com esses números.

Vejamos inicialmente alguns antecedentes. Um primeiro exemplo desta atitude aparece na *Arithmetica*, de Diophanto. Aproximadamente no ano de 275 d.C. ele considera o seguinte problema:

Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.

Chamando de x e y o comprimento dos catetos desse triângulo, temos, na nossa notação atual:

$$\frac{1}{2}xy = 7 \;\; ; \;\; x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Substituindo y em função de x, obtemos a equação:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0, \quad \text{cujas raízes são: } x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Neste ponto Diophanto observa que só poderia haver solução se $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geqslant 24 \times 336 = 0$. Nesse contexto, é claro que não há necessidade alguma de introduzir um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

Na verdade, o primeiro registro de um radical de um número negativo é um pouco anterior: ele aparece na *Estereometria* de Heron, matemático grego do período Alexandrino, publicada aproximadamente em 75 d.C. Num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide surge a necessidade de avaliar $\sqrt{81 - 144}$. A questão parece não causar nenhum problema simplesmente porque logo em seguida os números apresentam-se trocados: $\sqrt{144 - 81}$, resultando $\sqrt{63}$, que é calculado como aproximadamente igual a $7\frac{15}{16}$.

Encontram-se novas referências à questão na Matemática indiana. Aproximadamente no ano de 850 d.C, o matemático indiano Mahavira afirma:

> *. . . como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada.*

Já no século XII o famoso matemático Bhaskara (1114-1185 aprox.) escreve:

> *O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.*

Também na Matemática europeia aparecem observações dessa natureza; Luca Paccioli, na sua *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*, publicada em 1494, escreve a equação $x^2 + c = bx$ é solúvel somente se $\frac{1}{4}b^2 \geqslant c$, e o matemático francês Nicolas Chuquet (1445-1500 aprox.) faz observações semelhantes sobre "soluções impossíveis" num manuscrito, não publicado, de 1484.

O próprio Cardano se deparou com esse tipo de questões e, embora mantivesse a atitude dos seus contemporâneos, no sentido de entender que raízes de números negativos indicavam apenas a não-existência de soluções de um determinado problema, pelo menos em um caso ele deu um passo a mais. No Capítulo 37 do *Ars Magna*, ele considera o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40.

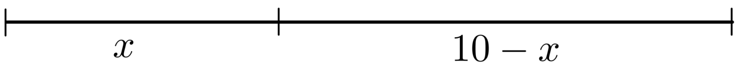


Figura 1: Problema do Capítulo 37 do *Ars Magna*

Se chamamos de x o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento $10 - x$, e a condição do problema se traduz na equação:

$$x(10 - x) = 40.$$

Isso leva à equação $x^2 + 10x + 40 = 0$, cujas soluções são $x = 5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano reconhece que o problema dado não tem solução mas, talvez a título de curiosidade, observa que, trabalhando com essas expressões como se fossem números, *deixando de lado as torturas mentais envolvidas e multiplicando* $5 + \sqrt{-15}$ *por* $5 - \sqrt{-15}$, *obtém-se* $25 - (-15)$, *que é igual a* 40.

Em consequência, ele chama essas expressões de *raízes sofísticas* da equação e diz, a respeito delas, que *são tão sutis quanto inúteis.*

2 A necessidade dos números complexos

Raphael Bombelli (1526-1573) era um admirador da *Ars Magna* de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição não era claro (ou, em suas próprias palavras, *ma, nel dire fu oscuro*). Decidiu, então, escrever um livro expondo os mesmos assuntos, mas de forma tal que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de nenhuma outra referência. Publicou *l'Álgebra*, em três volumes, em 1572, em Veneza, obra que viria a se tornar muito influente. No capítulo II dessa obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro. Em particular na página 294 e nas seguintes, ele considera a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo de uma raiz, ele obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Seguindo Cardano, ele também chama essa expressão de *sofística*, mas, por outro lado, ele percebe que $x = 4$ é, de fato, uma raiz da equação proposta.

Assim, pela primeira vez, nos deparamos com uma situação em que, apesar de termos radicais de números negativos, existe verdadeiramente uma solução da equação proposta. É necessário, então, compreender o que está acontecendo.

Bombelli concebe então a possibilidade de que exista uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que possa ser considerada como raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$, i.e., que verifique $(a+\sqrt{-b})^3 = 2+\sqrt{-121}$. A forma em que ele calcula essa raiz é um tanto peculiar; ele assume que a raiz cúbica de $2-\sqrt{-121}$ seja da forma $a-\sqrt{-b}$. Como ele sabe que 4 deve ser raiz da equação, necessariamente $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$. Neste ponto, felizmente, as quantidades não existentes se cancelam e obtemos $a = 2$. Com esse resultado, é muito fácil voltar à equação e deduzir que $b = 1$. Assim, ele obtém que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e que:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

é uma solução da equação dada.

Bombelli percebeu claramente a importância desse achado. Ele diz:

> *Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... .*
> *Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.*

Ele utiliza a expressão *più di meno* para se referir ao que nós denotaríamos como $+i$ e *meno di meno* para $-i$. Ele enuncia então o que chama de regras do produto, que citamos abaixo junto com sua tradução na nossa simbologia:

Più via più di meno fa più di meno	$+ \cdot (+i) = +i$
Meno via più di meno fa meno di meno	$- \cdot (+i) = -i$
Più via meno di meno fa meno di meno	$+ \cdot (-i) = -i$
Meno via meno di meno fa più di meno	$- \cdot (-i) = +i$
Più di meno via più di meno fa meno	$(+i) \cdot (+i) = -$
Meno di meno via più di meno fa più	$(-i) \cdot (+i) = +$
Meno di meno via meno di meno fa meno	$(-i) \cdot (-i) = -$

É interessante notar que Bombelli se deparava com a dificuldade adicional de não dispor de uma boa notação. Ele utilizava p (plus) para indicar a soma; m (minus) para a subtração; R (radix) para raiz quadrada e R^3 para a raiz cúbica. Também não dispunha de parênteses; nos seus manuscritos sublinhava expressões para indicar quais os termos afetados por um radical. Assim, por exemplo, a expressão $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ era escrita na forma

$$R^3\underline{|2pR\underline{|0-121|}|}$$

Note que, como não escrevia diretamente números negativos, ele escreveu -121 como $0-121$. Dessa forma, a solução da equação discutida acima aparecia como:

$$R^3\underline{|2pR\underline{|0-121|}|}pR^3\underline{|2mR\underline{|0-121|}|}$$

3 Progressos ulteriores

Faremos aqui um pequeno resumo da evolução dos números complexos, para que o leitor tenha uma visão global da história do assunto. Começaremos listando alguns progressos na notação para depois nos ocuparmos da evolução dos conhecimentos.

1. O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard.
2. O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801.
3. Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637.
4. O expressão número *complexo* foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832.

Como observamos na seção anterior, a partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados devido a sua óbvia utilidade para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. A primeira tentativa de legitimação, via uma "interpretação geométrica", é devida a John Wallis (1616-1703), contemporâneo de Newton e professor na Universidade de Oxford. Em 1673 ele publicou um tratado intitulado *Álgebra*, em cujo capítulo LXVI discute a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e compara essa questão com a da existência de quantidades negativas[1].

> Estas quantidades imaginárias (como são frequentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando aparecem) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível.
> E assim é, de fato, no sentido estrito do que foi proposto. Pois não é possível que qualquer número (negativo ou afirmativo), multiplicado por si mesmo, possa produzir (por exemplo) -4. Pois sinais iguais (tanto $+$ quanto $-$) produzirão $+$; e portanto não -4.
> Mas também é impossível que qualquer quantidade (embora não um suposto quadrado) possa ser negativa. Pois não é possível que qualquer magnitude possa ser menos que nada, ou qualquer número menor que nada.
> Porém, não é esta suposição (das quantidades negativas) nem inútil nem absurda, quando corretamente compreendida. E, embora para a simples notação algébrica representa uma quantidade menor do que nada, quando se trata de uma aplicação física, denota uma quantidade tão real como se o sinal fosse $+$; mas interpretada no sentido contrário.

Depois de considerar diversos exemplos de números negativos interpretados em termos de segmentos sobre uma reta orientada, ele tenta uma interpretação para as quantidades imaginárias:

> Suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo a resposta é 10 acres, ou $+10$ (pois $30 - 20 = 10$). ... Mas se num terceiro local perdemos mais 20 acres, a resposta deve ser -10 (pois $30 - 20 - 20 = -10$)... . Mas agora, supondo que esta planície negativa de -1600 square perches [20 acres correspondem a 1600 square perches, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E, assim, qual será esse lado?
> Não podemos dizer que é 40, nem -40 ... Mas sim que é $\sqrt{-1600}$ (a suposta raiz de um quadrado negativo) ou $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$.

[1] Nós citamos da transcrição de D.E. Smith[4]

Como era de se esperar, essa interpretação não teve uma grande acolhida entre seus contemporâneos e nenhuma repercussão posterior.

Notemos que, até aqui, nada garante que raízes cúbicas – ou, em geral, raízes n-ésimas de complexos – sejam, de fato, complexos. Tal como assinala M. Kline [5, p. 595], no começo do século XVIII, a maioria dos matemáticos ainda acreditava que raízes de diferente ordem de números complexos levariam à introdução de diferentes tipos de complexos.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi encontrado abandonado na porta da igreja de St. Jean Le Rond, na noite de 16 de novembro de 1717, com cujo nome foi batizado e foi criado por pais adotivos. Sua mãe, Madame de Tencin, era irmã de um cardeal e acompanhou sua vida a distância, sem nunca reconhecê-lo oficialmente, e seu pai, o General Destouches, lhe deixou uma quantia suficiente para cuidar da sua educação após sua morte em 1726. Após estudar Direito e Medicina, decidiu dedicar sua vida à Matemática. Trabalhou em álgebra, cálculo e suas aplicações, equações diferenciais ordinárias e parciais, funções de variável complexa, mecânica e dinâmica. Em 1747 publicou *Refléxions sur la cause générale des vents*, em que afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo (onde incluía também a extração de raízes) é da forma $a+b\sqrt{-1}$. Não formulou uma prova satisfatória no caso de expressões da forma $(a+bi)^{c+di}$, tarefa que seria completada por Euler.

D'Alembert foi amigo de Voltaire e colaborou com diversos artigos para a *Enciclopédie*, mas manteve nesta um discreto silêncio sobre os números complexos.

Roger Cotes (1682-1716) foi um jovem professor no famoso Trinity College de Cambridge e, após sua prematura morte, dele disse Newton: Se *Cotes tivesse vivido, teríamos* aprendido alguma *coisa*. Em 1714 ele obteve um importante resultado, relacionado com a obtenção de raízes n-ésimas da unidade que, na notação moderna, poderíamos explicitar como:

$$\log_e(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)^n = i\phi.$$

Isso poderia ter levado à famosa "relação de Euler":

$$\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi = e^{i\phi}$$

que, por sua vez, implica a "Fórmula de De Moivre":

$$(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)^n = \cos(n\phi) + i\operatorname{sen}(n\phi)$$

o que resolveria o problema de achar raízes.

Porém, o caminho foi outro, **Abraham De Moivre** (1667-1754) nasceu na França, mas viveu na Inglaterra a partir dos dezoito anos, quando o Edito de Nantes, que protegia os huguenotes, foi revogado. Estudou Matemática sozinho, após ler os *Principia* de Newton, chegando a se tornar membro da Royal Society e das academias de Paris e Berlim. Seu trabalho versou fundamentalmente sobre trigonometria, probabilidade e cálculo de anuidades. Em 1722, utilizando fatos que já havia publicado em 1707, ele obteve um resultado que implicou a fórmula que leva seu nome, embora tenha se limitado a casos particulares e nunca tenha chegado a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral.

Essa tarefa coube a **Leonhard Euler** (1707-1754), considerado o mais prolífico matemático de todos os tempos. Numa carta endereçada a Jean Bernoulli, datada de 18 de outubro de 1740, ele afirma que $y = 2cos\phi$ e $y = e^{ix} + e^{-ix}$ eram ambas soluções de mesma equação diferencial (o que reconheceu através do desenvolvimento em série das soluções) e que, portanto, deviam ser iguais. Publicou esse resultado em 1743; explicitamente:

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}.$$

Em 1748 ele redescobriu o resultado de Cotes, demonstrou a fórmula de De Moivre e estendeu sua validade para todo exponente n real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida.

Obviamente, Euler compreendia e utilizava muito bem os números complexos. O fato de ele próprio ter grandes dúvidas quanto a sua legitimidade ilustra claramente o status desse corpo numérico na época. Em *Vollstándige Anleitung zur Álgebra*, publicada primeiro em russo, em 1768-69, e depois em alemão, em 1770, que se tornou uma referência clássica nessa área nos dois séculos seguintes, Euler escreve:

> *Uma vez que todos os números concebíveis são maiores do que* 0*, ou menores do que* 0 *ou iguais a* 0*, é claro que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser incluída entre os números possíveis. Consequentemente, devemos dizer que estes são números impossíveis. E esta circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários, pois eles só existem na imaginação.*

4 A representação gráfica

A representação geométrica dos números complexos mediante pontos do plano foi decisiva para sua aceitação. A possibilidade dessa representação era clara para vários autores, como Cotes, De Moivre, Euler e Vandermonde; todos eles tentaram resolver a equação $x^n - 1 = 0$ pensando em suas soluções como vértices de um polígono regular de n lados. Essa ideia era ainda incompleta, pois nenhum desses autores achou também uma interpretação geométrica para as operações com complexos.

O primeiro a formular uma tal interpretação foi um agrimensor norueguês chamado **Caspar Wessel** (1745-1818), um autodidata. Ele é autor de um artigo intitulado *Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa*, que foi publicado em 1799 nas memórias da Real Academia da Dinamarca. Ali, escreveu:

> *Vamos designar por* $+1$ *a unidade retilínea positiva, por* $+\varepsilon$ *outra perpendicular à primeira, com a mesma origem; então o ângulo de direção de* $+1$ *será* $0°$*, o de* -1 *será* $180°$*, o de* $+\varepsilon$ *será* $90°$ *e o de* $-\varepsilon$ *será* $-90°$ *ou* $270°$*.*

Tal como fazemos hoje em dia, ele representa o complexo $a + bi$ pelo vetor do plano com origem O — a origem do sistema de eixos coordenados — e com extremo no ponto P de coordenadas $(a; b)$. Depois dá uma representação geométrica da soma de dois complexos $a + bi$ e $c + di$, representando-os pelos vetores OP e OQ, respectivamente, e observando que a soma estará representada pela diagonal do paralelogramo construído sobre OP e OQ.

De forma análoga, o produto desses complexos estará representado por um vetor OR tal que o comprimento de OR é o produto dos comprimentos de OP e OQ, e o ângulo que OR forma com o eixo Ox é igual à soma dos ângulos formados por OP e OQ com esse eixo.

Uma representação semelhante foi dada por **Jean-Robert Argand** (1768-1822), um bibliotecário suíço, também autodidata, que em 1806 publicou um pequeno livro intitulado *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Ele observa que se multiplicamos $+1$ por i obtemos i e se multiplicamos esse resultado novamente por i obtemos -1. Ele pensa, então, em representar i por uma operação que aja de modo análogo. Assim, podemos representar i por uma rotação de $90°$ em sentido anti-horário.

A partir daqui, tal como Wessel, ele dá interpretações para números da forma $a + bi$ e para as operações com complexos, aplicando seus resultados à demonstração de teoremas de álgebra, geometria e trigonometria.

Esses trabalhos tiveram pouco ou nenhum efeito sobre os matemáticos da época; a memória de Wessel só foi notada quando publicada em tradução francesa em 1897, e o livro de Argand, embora causasse uma certa controvérsia, teve pouco impacto, talvez por ser a única contribuição de seu autor à Matemática. Quem verdadeiramente tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi **Carl Friederich Gauss** (1777-1855).

A julgar pelas suas demonstrações do teorema fundamental da álgebra, ele já conhecia a interpretação gráfica dos complexos em torno de 1815, embora escrevesse, numa carta de 1825, que a *verdadeira metafísica de* $\sqrt{-1}$ *é elusiva.* Finalmente, em 1831, ele escreveu um artigo muito explícito sobre a questão. Diz na introdução:

> *O autor tem considerado há vários anos esta parte importante da Matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva.*
> *O significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no domínio da aritmética.*

Ele observa também que se as unidades 1, -1, $\sqrt{-1}$ não fossem chamadas de positiva, negativa e imaginária, mas direta, inversa e lateral, as pessoas não teriam tido a impressão de que há algo de misterioso nesses números.

A observação de Gauss a respeito da *existência, objetiva* dos números complexos ilustra a visão da Matemática na época. Parece que o fato de esses números poderem ser representados geometricamente lhes dá essa existência. Em outras palavras, parece que, para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de realidade que faltava aos objetos da aritmética.

Finalmente, a formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais será desenvolvida por William Rowan Hamilton (1805-1865) em 1833, e ainda Agustin Cauchy (1789-1857) daria outro tipo de formalização em 1847.

5 Referências Bibliográficas

(1) CAJORI, F. *A History of Mathematical Notations.* Chicago, Open Court, 1928-1929.

(2) GREEN, D. R. *The Historical Development of Complex Numbers.* The Mathematics Gazette, 60, 412 (1976), 99-107.

(3) SMITH, D. E. *History of Mathematics*, v. II. Boston, Ginn and Company, 1925.

(4) SMITH, D. E. *A Source Book in Mathematics.* New York, McGraw-Hill, 1929.

(5) KLINE, M. *Mathematical Thought ftom Ancient to Modern Times.* New York, Oxford Univ. Press, 1972.

Nota: Este texto foi reproduzido da Revista do Professor de Matemática, nº 24, CD-Rom da RPM.