Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Demonstrações Matemáticas

Fabiano Amstrong Pinto Costa

Teresina
2015

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Demonstrações Matemáticas

Fabiano Amstrong Pinto Costa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador
Profº. Me. Mário Gomes dos Santos
Coorientador
Profº. Dr. João Benício de Melo Neto

Teresina
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

C837d Costa, Fabiano Amstrong Pinto.

Demonstrações matemáticas / Fabiano Amstrong Pinto Costa. – 2015.

69 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2015.

"Orientação: Prof. Me. Mário Gomes dos Santos".

"Coorientação: Prof. Dr. João Benício de Melo Neto".

1. Matemática. 2. Teorema. 3. Métodos Axiomáticos. 4. Congruência de Triângulos. I. Título.

CDD 510

Dedico este trabalho a todos que direta ou indiretamente me ajudaram. Em especial a minha esposa e filhos.

Agradecimentos

A Deus por sempre me dar serenidade para aceitar as coisas que não podem ser mudadas, coragem para mudar aquilo que pode ser mudado e sabedoria para distinguir as duas coisas.

À minha amada esposa, Luciana Roberta de Araújo Costa, a qual tem minha admiração, carinho e respeito e que sempre me ofereceu amor, carinho, compreensão e muita força em toda a nossa união.

Aos meus filhos, Lucas Kael de Araújo Costa, Isaac Newton de Araújo Costa e Pedro Afonso de Araújo Costa pelo incentivo, alegria e unidade nos momentos mais difíceis a qual passei.

Aos meus pais, Maria de Jesus Souza Pinto e Olivério de Araújo Costa, pela existência.

Aqueles que tanto me incentivaram para que este material pudesse ser escrito.

Ao meu orientador, Prof. Me. Mário Gomes dos Santos e coorientador, Prof. Dr. João Benício de Melo Neto por todas as contribuições para esse trabalho.

Aos professores Dr. Humberto, Dr. Jurandir, Dr. Newton, Dra Valmária, Dra Liane, Dr Gilvan, pela dedicação, apoio e contribuição no enriquecimento da Matemática.

Aos meus colegas do curso da Universidade Federal do Piauí pelos dias de conhecimento e diversão compartilhados em nosso calendário de estudos.

Aos idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), por este importante projeto de melhoramento e enriquecimento do ensino deste país.

À Universidade Federal do Piauí (UFPI) por toda estrutura e suporte oferecidos neste projeto.

Aos meus alunos, que constituem a célula de meus estudos, projetos e idealizações, sem eles este trabalho não seria possível.

Enfim a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram significativamente para a realização deste sonho.

Resumo

Desde os primórdios, a humanidade tenta entender o universo, buscando regras e padrões nos objetos que nos cercam, bem como relações entre si e entre eles e o mundo. Em meio a esse desejo, percebe–se a estreita relação existente entre a Matemática e o mundo, assim, na medida em que há avanço nessa ciência, há também avanço na compreensão do mundo. Neste trabalho, propomos aos nossos estudantes de matemática o incentivo de demonstrações como ferramenta que auxiliam na descrição e compreensão de conhecimentos matemáticos. Tal ferramenta traduz o prazer em estudar matemática e desmistificar o titulo de "vilã", além de conceber o seu verdadeiro papel desempenhado no progresso da humanidade. No início, fazemos uma abordagem teórica sobre Lógica matemática, Teoremas, Definições, Teoria Matemática, Modelos axiomáticos, Técnicas de demonstrações e suas respectivas explanações. Assim, entendemos que tais abordagens são fundamentais na construção de uma boa redação, manipulação e compreensão de qualquer teorema matemático a ser demonstrado. Durante as descrições teóricas de nosso trabalho ressaltamos dois grandes legados gregos: Geometria Euclidiana e método axiomático, que tanto alavancaram esta ciência até os nossos dias. Em seguida, fazemos um breve comentário sobre os números naturais e o Axioma de Indução. No final, escolhemos a congruência de triângulos, tema da geometria Euclidiana, onde a utilizamos para demonstrações de diversos teoremas geométricos bastante aplicados e conhecidos no ensino de matemática.

Palavras - Chave: Demonstrações Matemáticas. Teoremas. Método Axiomático. Congruência de Triângulos.

Abstract

From the beginning, mankind tries to understand the universe, searching for rules and standards in the objects that surround us, as well as relations among themselves and between them and the world. In the midst of this desire, we see the close relationship between mathematics and the world as well, as there is advance in science, there is also progress in understanding the world. In this paper, we propose to our math students the incentive demonstrations as a tool to aid in the description and understanding of mathematical knowledge. Such a tool translates happy to study mathematics and demystify the title of "villain"in addition to design your true role in the progress of humanity. At first, we make a theoretical approach to mathematical logic, theorems, definitions, Mathematical Theory, axiomatic models, technical demonstrations and their explanations. Thus, we understand that such approaches are essential in building good writing, manipulation and understanding of any mathematical theorem to be demonstrated. During the theoretical descriptions of our work we emphasize two major Greek legacy: Euclidean geometry and axiomatic method, which both have leveraged this science to this day. Then make a brief comment on the natural numbers and the Axiom of Induction. In the end, we chose the congruence of triangles, issue of Euclidean geometry, which we use for various geometric theorems statements fairly applied and known in mathematics education.

Words - Key: Mathematical Statements. Theorems. Axiomatic Method. Congruence of Triangles.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 *Introdução*

1.1 Justificativa e objetivos

Começamos a lecionar Matemática, em uma escola da rede privada de ensino da Parnaíba–PI, no ano de 1994. Desde então, lecionamos nas escolas de redes privada e pública, da cidade de Teresina–PI, em turmas de ensino fundamental, médio e pré–vestibular.

Neste trajeto, a oportunidade de lecionar esta disciplina fez com que aperfeiçoássemos os conhecimentos e desenvolvêssemos técnicas didáticas a fim de ajudar nossos alunos na compreensão da Matemática. Assim, notamos algumas falhas como: a falta de incentivo nas Demonstrações matemáticas, a ausência da Lógica Matemática, o ofuscamento da Congruência de triângulos e a exclusão do Princípio de Indução.

No curso de Mestrado, pelo PROFMAT, ganhamos um verdadeiro suporte de conhecimentos e idéias para colocarmos em prática.

Assim, temos o orgulho de concretizar parte destas ideias neste trabalho, destacando a importância das Demonstrações matemáticas e suas técnicas seguidas da linguagem formal da Lógica Matemática, pois são parcelas que resultam em um desenvolvimento e domínio desta ciência por parte de seus praticantes.

Esperamos que o desenvolvimento deste tema desperte o hábito, de demostrar e sobre tudo motivar nossos estudantes.

2 Lógica matemática uma ferramenta na demonstração

Os resultados matemáticos devem ser expressos com a exatidão necessária que exigem. Assim quando uma pessoa diz a frase "Estarei aí num minuto!!!" significa que ela vai chegar em pouco tempo. Já levando esta frase para o lado matemático, um minuto representa mesmo, sessenta segundos e neste caso esta pessoa não pode levar nenhum segundo a mais nem a menos para chegar. A Matemática é uma ciência exata e ela funciona desta maneira.

Daí usaremos, nesta ciência, frases que refletem cuidados específicos e diferentes, em muitos casos, daquelas que costumamos usar e interpretar coloquialmente e é na Lógica Matemática que vamos aprender como isso é feito.

Apresentaremos as noções de Lógica Matemática sem nenhum caráter de aprofundamento, destacando seu conhecimento nas demonstrações matemáticas e manteremos com tal simplicidade certas formalidades que a teoria exige a fim de justificar sua primordial noção para o que vamos demonstrar e como vamos demonstrar.

Dado a importância da Lógica Matemática para o emprego coerente da linguagem, nesta ciência, deixamos aos nossos estudantes, a mensagem, de incentivo ao seu estudo como um requisito de aprendizagem, pois tal noção mediará a construção do que chamamos de raciocínio lógico dedutivo.

2.1 Um pouco de lógica matemática

De acordo com o dicionário Aurélio o conceito de frase pode ser dado de acordo com um dos itens a seguir:

(i) Reunião de palavras que forma um sentido completo; locução; expressão.

(ii) Seguimento regular, ininterrupto, de canto, de harmonia, que forma um sentido.

(iii) Falar sem frases: dizer apenas o necessário.

(iv) Fazer frases: falar ou escrever em estilo empolado e quase sempre oco de sentido.

(v) Frase feita: maneira de falar consagrada pelo uso.

A razão pela qual expressamos as definições acima de frase é justificada pelo simples fato de que trabalhar uma linguagem matemática requer entendimento, clareza e objetividade da mensagem matemática de modo a evitar ambiguidades, que são comuns em figuras de linguagem ou metáforas e que as vezes são bem apreciadas na linguagem coloquial e também literária.

Sabemos que a frase é o veículo que utilizamos para comunicar um pensamento ou ideia, seja, por palavras, seja por símbolos matemáticos, incluindo sinais de acentuação e pontuação.

Na Matemática, usaremos frases especiais conhecidas pelo nome de sentenças matemáticas ou proposições, pois neste tipo de frase as ideais matemáticas serão escritas sem sinais gráficos, acentuações gráficas, somente com símbolos matemáticos e obedecendo certas condições que são:

(i) Apresentam-se estruturadas como orações com sujeito, predicado e verbo.

(ii) São declarativas e afirmativas.

(iii) E obedecem dois princípios.

Princípio do Terceiro Excluído

Segundo o qual uma sentença é verdadeira ou falsa não possuindo uma terceira resposta.

Princípio da Não Contradição

Nenhuma sentença é ao mesmo tempo verdadeira ou falsa, logo não existe contradição.

Assim estas frases especiais que vamos utilizar devem possuir tais exigências pelo simples fato de agregarem todas as características a qual falamos para expressar uma ideia matemática e conservar sua objetividade com clareza, daí não abrir margens para outros tipos de frases que conhecemos tais como interrogativas, exclamativas, dentre outras, por isso que serão chamadas de sentenças ou proposições.

Vejamos alguns exemplos de sentenças ou proposições, nas seguintes frases:

(i) $2 = 1$.

(ii) Existe $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tal que $x^2 \geqslant 10$.

(iii) Todo número divisível por 10 é um número par.

(iv) Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são termos de uma progressão geométrica de razão q , então

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

(v) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

2.2 Valor lógico de uma proposição

Define-se valor lógico de uma proposição: **verdade** se a proposição é verdadeira ou **falsa**, caso não é verdadeira.

Assim uma proposição ou sentença matemática tem um único valor lógico ao qual atribui–se ser verdadeiro ou falso (Princípio do terceiro Excluído).

Tomando como exemplo as cinco proposições anteriores com suas respectivas numerações, são verdadeiras as proposições (ii), (iii) e (iv).

Dessa forma, podemos descrever que o valor lógico dos itens (i) e (v) do exemplo acima é falso e dos itens (ii), (iii) e (iv) é verdadeiro.

Denominamos uma sentença ou proposição matemática de **válida**, quando seu valor lógico verdadeiro, e **não válida**, quando seu valor lógico for falso.

Existem alguns tipos sentenças matemáticas que não possuem valor lógico, porém, com certos recursos podem possuí–lo; tais sentenças matemáticas são simplesmente chamadas de sentenças abertas e possuem um valor incógnita ou variável ou parte literal não conhecida.

Veja alguns exemplos:

(i) $x + 5 = 7$, verdadeiro ou falso?

(ii) $x^2 + y > \cos(z)$, verdadeiro ou falso?

Os recursos que tornam uma sentença aberta julgável são denominados de quantificadores e temos dois tipos bem empregados que chamamos de **quantificador universal** e

quantificador existencial.

Para a caracterização simbólica do quantificador universal temos:
O simbolo ($\forall$) e várias opções de leitura : "Para todo", "Todo", "Qualquer que seja", dentre outras.

Para a caracterização simbólica do quantificador universal temos:
O símbolo ($\exists$) e várias opções de leitura: "Existe", "Existe um", "Existe pelo menos um", dentre outras. Vejamos agora a função de um quantificador. Dê o valor lógico das proposições seguintes:

- $\forall x \in \mathbb{N}$; $x + 5 = 7$.

Falso, pois nem todo número natural adicionado a 5 é igual a 7.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{Q}$ e $\exists z \in [-\pi, 0]$ tal que $x^2 + y > \cos(z)$.

Verdade, pois todo x real tem–se, x^2 é maior do que ou igual a zero e existe um y racional cuja soma com x^2, supera o $\cos(z)$, que pertence ao intervalo $[-1, 1]$, de acordo com o intervalo de z.

A importância do valor lógico está inserida no fato de que um dos grandes desafios da matemática é de descobrir e provar o valor lógico de certas sentenças. Apesar de a lógica matemática visar ao estudo das relações entre sentenças sem se preocupar com seu conteúdo, ainda sim, é de boa e grande valia para demonstrações matemáticas, já que também envolve sentenças de certo modo relacionadas numa cadeia de raciocínio dedutivo, em que vamos desvendar e usar uma série de valores lógicos relacionados ou não com sentenças válidas ou não válidas.

2.3 Tipos de proposições

2.3.1 Proposições Simples ou Atômicas

São sentenças matemáticas que não contêm mais de uma proposição em sua formação e podem ser nomeadas por letras minúsculas de nosso alfabeto, para melhor comodidade na notação.
Exemplos

(i) $p : 2 = 3$

(ii) q : 2 é um número natural primo

(iii) $s : 1,009 \in \mathbb{N}$

2.3.2 Proposições Compostas

São sentenças que possuem várias proposições simples em sua formação. Podem ser nomeadas através de letras maiúsculas de nosso alfabeto ou mesmo pelas letras minúsculas das proposições simples, ligadas por certas palavras ou símbolos chamados de conectivos lógicos.

São conectivos da lógica formal (símbolos): "não" ($\sim$), "ou" ($\vee$), " e" ($\wedge$), "se ..., então ..." ($\rightarrow$), "... se, e somente se ..." ($\leftrightarrow$).

Observação 2.1. *Os conectivos (símbolo) "não" ($\sim$), "ou" ($\vee$), " e" ($\wedge$), "se ..., então ..." ($\rightarrow$), "... se, e somente se ..." ($\leftrightarrow$) são chamados, respectivamente , de negação , disjunção , conjunção, condicional e bicondicional.*

Observação 2.2. *É comum associarmos os conectivos de negação, disjunção, conjunção, condicional e bicondicional com a linguagem de conjuntos indicando a negação de um conjunto* A, *pelo seu complementar* $(\overline{\mathsf{A}})$, *a disjunção de dois conjuntos* A *e* B, *por* $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ *e a conjunção entre* A *e* B, *por* $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, *a condicional entre* A *e* B, *por* $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, *e a bicondicional entre* A *e* B, *por* $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ *e* $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ *o que equivale dizer que* $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ *é notório dizer que a relação entre conjunto e proposição pode ser dada através de duas sentenças* $\mathsf{A}(\mathsf{x})$ *e* $\mathsf{B}(\mathsf{x})$ *duas sentenças matemáticas abertas referentes a certas condições satisfeitas (ou propriedades) por elementos* x *de um conjunto universo* U *tal que*

- $\mathsf{A} = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *goza das propriedades de* $\mathsf{A}(\mathsf{x})\}$
- $\mathsf{B} = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *goza das propriedades de* $\mathsf{B}(\mathsf{x})\}$
- $\overline{\mathsf{A}} = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *não goza das propriedades de* $\mathsf{A}(\mathsf{x})\}$
- $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *goza das propriedades de* $\mathsf{A}(\mathsf{x}) \vee \mathsf{B}(\mathsf{x})\}$
- $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *goza das propriedades de* $\mathsf{A}(\mathsf{x}) \wedge \mathsf{B}(\mathsf{x})\}$
- $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *goza das propriedades de* $\mathsf{A}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{B}(\mathsf{x})\}$
- $(\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ *e* $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}) = \{\mathsf{x} \in \mathsf{U}; \mathsf{x}$ *goza das propriedades de* $\mathsf{A}(\mathsf{x}) \leftrightarrow \mathsf{B}(\mathsf{x})\}$

Cuidado, não se deve confundir os símbolos. Assim $\sim$, $\vee$ e $\wedge$ são usados como conectivos de sentenças, enquanto $-$, $\cap$ e $\cup$ são usados para denotar operações complementar, intersecção e união respectivamente de conjuntos.

Não é objetivo nosso expor uma descrição muito detalhada da relação entre lógica e conjunto para não desviar do principal tema (demonstração), mais apenas de relatar que tal assunto pode contribuir e muito para esta outra teoria axiomática dos conjuntos.

3 Tabelas – Verdade

Toda proposição matemática obedece aos princípios do terceiro excluído e da não contradição podendo atribuir–lhe somente um dos valores lógicos: V (verdadeiro), caso a proposição seja verdade ou F (falso), caso não seja verdade, assim para dar o valor lógico de uma proposição composta, usam–se dispositivos que chamamos de tabelas – verdade, nas quais os conectivos atuam como operadores lógicos das proposições simples que formam uma proposição composta. Na lógica, o valor lógico da proposição composta depende dos conectivos e valores das proposições simples e não somente de um deles.

As tabelas – verdade de um modo geral expressam o que denominamos de cálculo sentencional ou proposicional de proposições compostas. Para operar com estas tabelas é necessário admitir os valores lógicos dos operadores seguintes e cujas justificativas serão omitidas por nós, pois a ideia é explorar a lógica como noção de aplicação para demonstrações matemáticas, ou seja, uma visão mais geral deixando o seu aprofundamento para trabalhos que eventualmente sejam necessários.

A tabela a seguir expõe o valor lógico dos principais operadores lógicos.

p	q	$\sim$ p	p $\vee$ q	p $\wedge$ q	p $\rightarrow$ q	p $\leftrightarrow$ q
V	**V**	F	V	V	V	V
V	**F**	F	V	F	F	F
F	**V**	V	V	F	V	F
F	**F**	V	F	F	V	V

Tabela 1: Principais operadores lógicos

Assim, com base na tabela acima e com um certo conjunto de passos a serem seguidos e que deixaremos para uma pesquisa mais específica do assunto, chegamos a reproduzir uma série de operações lógicas de dadas proposições compostas.

Exemplo 3.1. *Construir a tabela–verdade da proposição $p \vee \sim p$.*

p	$\sim$ p	p $\vee \sim$ p
V	F	V
F	V	V

Tabela 2: Exemplo 3.1.

Exemplo 3.2. *Construir a tabela–verdade da proposição* $p \wedge \sim p$.

p	$\sim$ p	p $\wedge \sim$ p
V	F	F
F	V	F

Tabela 3: Exemplo 3.2.

Exemplo 3.3. *Construir a tabela–verdade da proposição* $\sim (\ p \rightarrow q\ ) \leftrightarrow (\ p \wedge \sim q)$.

p	q	$\sim$ q	p $\rightarrow$ q	$\sim$(p $\rightarrow$ q)	p $\wedge \sim$ q	$\sim$ (p $\rightarrow$ q) $\leftrightarrow$ (p $\wedge \sim$ q)
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Tabela 4: Exemplo 3.3.

Exemplo 3.4. *Construir a tabela–verdade da proposição* $\sim q \rightarrow\sim p$.

p	q	$\sim$ q	$\sim$ p	$\sim$ q $\rightarrow\sim$ p
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Tabela 5: Exemplo 3.4.

É fácil perceber que cada proposição simples tem dois valores lógicos únicos (V ou F), logo se considerarmos uma proposição composta sendo q_1, q_2, $\ldots$, q_n proposições simples o número de linhas a serem considerada com as possíveis combinações lógicas de suas componentes simples é dado por $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ vezes}}$ (pricípio combinatório da contagem) $= 2^n$ linhas.

Exemplo 3.5. *Uma tabela – verdade de uma proposição composta* $\mathsf{P}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)$ *sendo* q_1, q_2 *e* q_3.

Tem inicialmente uma tabela formada por $2^3 = 8$ linhas, assim teríamos.

q_1	q_2	q_3
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabela 6: Exemplo 3.5.

3.1 Condicional e Implicação Lógica

Numa sentença condicional P $\rightarrow$ Q, ou Se P, então Q, interpreta–se que a proposição P é condição suficiente para Q ou a proposição Q é condição necessária para P.

Essa visão interpretativa da condicional pode ser inserida na própria leitura da sentença condicional a fim de estimular o papel de P e Q , assim como evitar confusões.

Observe a sentença condicional abaixo:
"Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos"

Podemos escrever de outras maneiras distintas, tais como:

- "Um triângulo retângulo é condição suficiente para que o quadrado da medida da hipotenusa seja igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos"

ou

- " A igualdade que revela o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos é condição necessária para que o triângulo seja retângulo"

Uma sentença condicional P $\rightarrow$ Q se diz implicativa e simbolizada por P $\Rightarrow$ Q se a condicional for verdadeira.

De um modo geral podemos definir uma sentença implicativa lançando a seguinte ideia:
Tomando as sentenças compostas $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, dizemos que na condicional.

Se $\mathsf{P}(\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \dots, \mathsf{p}_n)$, então $\mathsf{Q}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots, \mathsf{q}_n)$, ou simbolicamente, $\mathsf{P}(\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \dots, \mathsf{p}_n) \rightarrow \mathsf{Q}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots, \mathsf{q}_n)$ representa, na lógica formal, uma sentença condicional implicativa (ou material), simbolizada por $\mathsf{P}(\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \dots, \mathsf{p}_n) \Rightarrow \mathsf{Q}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots, \mathsf{q}_n)$, se independente dos valores lógicos das componentes simples $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \dots, \mathsf{p}_n$ e $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots, \mathsf{q}_n$. Tem a última coluna de sua tabela verdade somente verdadeira.

Desta maneira, para verificar se uma sentença composta e condicional é implicativa (ou material), devemos fazer uso da tabela verdade e analisar se o resultado da última coluna é verdadeira para quaisquer valores lógicos das proposições simples que a constitui.

Exemplo 3.6. *Verifique se a sentença condicional* $(P \wedge Q) \rightarrow (\ P \vee Q)$ *é uma sentença implicativa.*

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q	(P ∧ Q) → (P ∨ Q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Tabela 7: Exemplo 3.6.

Pelo resultado obtido verificamos que a sentença $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \rightarrow (\ \mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$ é implicativa, pois a última coluna de sua tabela verdade é verdadeira e podemos escrever $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \Rightarrow (\ \mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$.

Definimos sentença implicativa válida, a sentença $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$, quando podemos deduzir a sentença Q a partir da sentença P, caso contrário, ela não é válida.

Vejamos os exemplos abaixo:

Exemplo 3.7. N *é um número inteiro divisível por* $10 \Rightarrow \mathsf{N}$ *é um número par.*

Exemplo 3.8. N *é um número inteiro par* $\Rightarrow \mathsf{N}^2 + 1$ *é um número primo.*

Observe que a sentença de **exemplo 3.7** é implicativa **válida**, pois todo número divisível por 10 é divisível por 2 e consequentemente é par, já a sentença do **exemplo 3.8** é uma implicação **não válida** pois se $\mathsf{N} = 8$, temos $\mathsf{N}^2 + 1 = 65 = 5 \cdot 13$, logo não é primo.

3.2 Argumentações

Para uma melhor clareza do que é argumento lógico vamos usar inicialmente exemplos não matemáticos e responder usando as sentenças abaixo como você pode concluir Q a partir de P?

Considere as sentenças:

- P: Pedro é piauiense.
- Q: Pedro é brasileiro.

Observe que, independentemente das maneiras usadas na análise das sentenças acima, para concluirmos Q a partir de P, certamente usamos afirmações advindas do raciocínio lógico que chamamos de **argumento**. Portanto, definir argumento, de um modo geral, significa dizer:
Dado um número finito de proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que usamos para concluir Q, chama–se de argumento a qualquer afirmação de que as sentenças $p_1, p_2, \ldots, p_n$ acarretam na sentença Q, logo diz–se a sentença Q se deduz (ou se infere) das sentenças $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

As sentenças $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que usamos para chegar a concluir Q são chamadas de **premissas**, e a sentença Q chama–se de **conclusão**.

No caso das sentenças anteriores, Pedro é piauiense é a premissa inicial usada para deduzir que Pedro é brasileiro.

Voltando a pergunta feita no início, responderemos com uma argumentação que usaremos para concluir a sentença **Pedro é piauiense** a partir da sentença **Pedro é piauiense**.

- p_1: Pedro é piauiense.
- p_2: O Piauí localiza-se no Brasil.
- q: Pedro é brasileiro.

Usaremos as sentenças p_1 e p_2 para montar os argumentos a fim de deduzir q. De fato, como Pedro é piauiense e o Piauí localiza–se no Brasil, então concluímos que Pedro é brasileiro.

Na conclusão de argumentos, podem ser usadas outras expressões do tipo: portanto, logo, concluímos, assim, consequentemente, dentre outros.

Chamamos de argumento válido aquele em que a conclusão é verdadeira, sempre que as premissas forem simultaneamente verdadeiras. Caso a conclusão seja falsa para premissas simultaneamente verdadeiras, então o argumento não é válido e o chamamos de **sofisma** ou **falácia**.

Um outro tipo de argumento lógico–dedutivo utilizado, desde o tempo de Aristóteles, é o **silogismo**, que tem a seguinte estrutura: X é Y; Z é X. Logo, Z é Y.

Exemplo 3.9. *Todos os homens são mortais. Ora, Sócrates é um homem. Logo, Sócrates é mortal.*

Considere o argumento não válido, Se $1 = 0$, então $1 = 1$, e note que é possível gerar uma argumentação verdadeira partindo de uma premissa falsa.

Ora, se $1 = 0$ (Falso), então $1 = 1$ (verdade), temos as seguintes premissas:

- P_1: $1 = 0$;
- P_2: $1 = 0$ e $0 = 1$;
- P_3: somando os membros correspondentes da premissa P_2, ou seja, $1 + 0 = 0 + 1$, concluímos Q: $1 = 1$.

Na argumentação anterior admitimos uma premissa falsa $(0 = 1)$e chegamos á conclusão de uma outra sentença verdadeira $(1 = 1)$, mais o que aconteceu?

Na verdade, admitimos como suposição, que se $1 = 0$ ocorrer, então podemos concluir sentença $1 = 1$, logo admitir, neste contexto, a ocorrência de uma sentença não significa dizer que ela deva ser obrigatoriamente verdadeira.

3.3 Recíproca de uma Proposição

Definimos **recíproca** da sentença $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$, a sentença $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{P}$. No caso de uma condicional Se P, então Q, sua recíproca é definida como a sentença Se Q, então P.

A seguir, a recíproca da sentença:
"Se o produto de dois números terminar em 6, então esses números terminam em 6" é

(i) Se dois números terminam em 6, então o produto desses números termina em 6.

(ii) Uma condição suficiente para dois números terminarem em 6, é que seu produto termine em 6.

(iii) Uma condição necessária para que o produto de dois números termine em 6, é que esse números terminem em 6.

Uma outra observação a ser feita é que o valor lógico de uma sentença e sua recíproca são independentes. Assim, se uma sentença condicional ou implicativa é verdadeira , então sua recíproca pode ser verdadeira ou falsa e o mesmo ocorre se a sentença analisada for falsa.

Observe o exemplo a seguir:
P: Pedro é piauiense $\Rightarrow$ Q: Pedro é brasileiro, como já foi visto anteriormente nas argumentações, esta implicação é verdadeira, porém na sua recíproca Q: Pedro é brasileiro $\Rightarrow$ P: Pedro é piauiense é falsa, pois existem brasileiros que não são piauienses, isto é, a implicação Q: Pedro é brasileiro é condição necessária mais não suficiente para conclusão de que P: Pedro é piauiense.

3.4 Bicondicional Lógica

Quando uma sentença condicional denotada por $P \rightarrow Q$ e sua recíproca $Q \rightarrow P$ ou pela leitura "P é condição suficiente para Q e Q é condição suficiente para P", são válidas, define–se assim, a bicondicional, denotada por $P \leftrightarrow Q$, ou pela leitura, "P se, e somente se Q".

Exemplo 3.10. *A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, admite raízes complexas x_1 e x_2 é uma condição suficiente para que se tenha $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (popularmente conhecida nos livros de educação básica como fórmula de delta), pois se considerarmos $ax^2 + bx + c = 0$, para $a \neq 0$, podemos escrever $ax^2 + bx = -c$, que corresponde a*

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Longrightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c,$$

que corresponde a $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a}$, que corresponde a $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a}}$, que corresponde a $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ e assim concluímos que $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ são as possíveis raízes complexas da equação dada, daí a equação $ax^2 + bx + c = 0$ é uma condição suficiente para se chegar $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ as suas raízes complexas.

De modo análogo, se partirmos de dois valores de x tais que $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ou $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *escrevemos* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *e chegamos a igualdade* $2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$. *Logo em seguida elevando os dois membros ao quadrado, obtemos* $4a^2x^2+4abx+b^2 = b^2-4ac$ *que corresponde a igualdade* $4a^2x^2+4abx+4ac = 0$.

Como $a \neq 0$, *basta dividir todos os membros por* $4a$ *e concluir que* $ax^2+bx+c=0$. *Assim* $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *ou* $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *com* $a \neq 0$ *é condição suficiente para se chegar á igualdade* $ax^2+bx+c=0$.

De acordo com as condições descritas anteriormente dizemos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$, *com* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *e* $a \neq 0$ *é condição necessária e suficiente para se chegar as raízes complexas* $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *ou* $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, *isto é um caso de bicondicional.*

Notemos acima que os modos utilizados para validar a condição "Se P, *então* Q*" e sua recíproca "Se* Q, *então* P, *são independentes.*

Outra maneira diferente de enunciar o exemplo acima é usando a linguagem de conjuntos, ou seja, "Se $R = \{$ *raízes complexas da equação* $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ *e* $a \neq 0\}$ *e* $S = \left\{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$, *então* $R = S$*". Neste caso a conclusão surgiria do fato que* $R \subset S$ *e* $S \subset R$, *logo* $R = S$.

3.5 Equivalência Lógica

Se $P \Rightarrow Q$ e, simultaneamente, sua recíproca $Q \Rightarrow P$ são válidas, então dizemos que tais sentenças são logicamente equivalentes e denotamos este fato pelo símbolo $P \Leftrightarrow Q$.

Vejamos, a seguir, um modo prático de definir uma equivalência lógica:

Tomando as sentenças compostas $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, dizemos que Se $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, então $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, representa uma sentença bicondicional implicativa (ou material) e simbolizada por $P \Leftrightarrow Q$, se independente dos valores lógicos das componentes simples $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tem a última coluna de sua tabela verdade somente constituída pelo valor lógico verdade.

Exemplo 3.11. *Considere a sentença* $\backsim (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \backsim q)$.

p	q	$\backsim q$	$p \to q$	$\backsim (p \to q)$	$p \wedge \backsim q$	$\backsim (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \backsim q)$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Note que a bicondicional é implicativa logo, $\backsim (p \to q) \iff (p \wedge \backsim q)$.

Opções de leitura para $P \Leftrightarrow Q$:

(i) P, se e somente se Q.

(ii) Se P, então Q, e reciprocamente.

(iii) P é condição suficiente para Q e reciprocamente.

3.5.1 Interpretação da Equivalência Lógica

A definição de equivalência não se restringe a somente duas sentenças, mas pode envolver várias delas entre si, assim, considerando as sentenças P_1, P_2, $\ldots$, P_{n-1}, P_n, equivalentes entre si, dizemos que P_1, P_2, $\ldots$, P_{n-1}, P_n são equivalentes se ocorrer $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P_{n-1} \Leftrightarrow P_n$.

Esta abrangência da equivalência é importante na Matemática, pois torna possível as simplificações, onde podemos permutar uma grande sentença com outra equivalente e de melhor conveniência para o trabalho.

Exemplos de algumas aplicações de equivalência lógica na resolução de problemas matemáticos:

Exemplo 3.12. *Prove que dois números reais,* a *e* b*, com* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$*, são iguais.*

Demonstração. Basta provar qualquer uma das sentenças abaixo, pois são equivalentes.

$$a - b = 0 \Leftrightarrow (a \leqslant b \text{ e } a \geqslant b) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow |a - b| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

□

Exemplo 3.13. *Vejamos agora um exemplo histórico, onde apresentamos a versão original de uma sentença matemática que, denotaremos por P, e conhecida como* ***quinto postulado de Euclides*** *em seu livro Elementos.*

Demonstração. P: Se uma reta intersecta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prologando–se essas duas retas indefinidamente elas se intersectarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois retos.

Agora observe uma versão equivalente da sentença P , onde denotaremos por R.

R: Por um ponto fora de uma reta , passa uma e somente uma reta paralela à reta dada.

As versões P e R, dadas acima, são equivalentes e simbolicamente representadas por $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{R}$.

Note que a primeira sentença é longa e bem mais desgastante para manipulação matemática do que a segunda que é pequena e precisa. Portanto a equivalência lógica permite a substituição de sentenças mais complicadas de se trabalhar por sentenças mais simples de manipular.

□

Exemplo 3.14. *Determine o conjunto solução da equação* $x^2 - 4x + 3 = 0$*, sendo* $U = \mathbb{R}$*.*

Solução. Lembre-se de que o conjunto solução (S) de uma equação é um conjunto dos valores de x que a tornam uma sentença verdadeira e esta contido no seu conjunto universo (U).

Para chegar a este conjunto solução, vamos estabelecer algumas sentenças P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 de correspondência implicativa, mais a quantidade de sentenças depende da equação a ser analisada, assim pode ocorrer que P_1: $x^2-4x+3 = 0 \Rightarrow P_2 : (x-1)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow P_3 : x - 1 = 0$ ou $x - 3 = 0 \Rightarrow P_4 : x = 1$ ou $x = 3 \Rightarrow P_5 : x \in \{1, 3\}$, note que $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5$ é válida.

Porém a sequencia de implicações acima não revela quem é o conjunto solução, isto é, apenas sugere que a raiz, caso exista, deve necessariamente pertencer ao conjunto $\{1, 3\}$, logo, isso mostra que, $S \subset \{1, 3\}$.

Vejamos agora sua recíproca:
$P_5 : x \in \{1, 3\} \Rightarrow P_4 : x = 1$ ou $x = 3 \Rightarrow P_3 : x-1 = 0$ ou $x-3 = 0 \Rightarrow P_2 : (x-1)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow P_1 : x^2 - 4x + 3 = 0$, veja que a recíproca garante que $\{1, 3\}$ está contido em S, como $S \subset \{1, 3\}$ e $\{1, 3\} \subset S$, então $S = \{1, 3\}$. E concluímos que P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, são sentenças equivalentes.

Exemplo 3.15. *Determine o conjunto solução da equação* $\sqrt{x} = x - 2$*, sendo* $U = \mathbb{R}$*.*

Solução. Note que esta equação só admite raízes reais para $x - 2 \geqslant 0$, assim $\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1).(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4 \Rightarrow x \in \{1, 4\}$, note que o procedimento até esse ponto foi provar que, se algum valor x for raiz da equação $\sqrt{x} = x - 2$, então $x \in \{1, 4\}$ ou que $S \subset \{1, 4\}$; nada em princípio assegura ser $x = 1$ ou $x = 4$ alguma das raízes procuradas ou, sequer que tais raízes existam. Assim fazendo o caminho recíproco, temos $x \in \{1, 4\} \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-4) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2$, desde que $x - 2 \geqslant 0$, onde $x \geqslant 2$. Assim $\{4\} \subset S$, daí concluímos que $S = \{4\}$.

Observe que para ganho de tempo, na equação acima, é melhor fazer a substituição dos valores encontrados na implicação da equação original, porém uma discussão apurada desse aspecto usando a implicação e sua recíproca ajuda a compreender melhor o papel da equivalência de sentenças lógicas.

Exemplo 3.16. *Prove que, para* x, y, k *inteiros, tem-se* $x + 4y = 13k \Leftrightarrow 4x + 3y = 13(4k - y)$*. Conclua que* $4x + 3y$ *e* $x + 4y$ *são divisíveis por* 13 *para os mesmos valores inteiros de* x *e* y*.*

Solução.

$$x + 4y = 13k \Longleftrightarrow 4x + 3y = 4(x + 4y) - 13y = 13(4k - y).$$

Reciprocamente,

$$4x + 3y = 13k \Longrightarrow x + 4y = 10(4x + 3y) - 13(3x + 2y) = 13 \cdot (10k - 3x - 2y).$$

3.6 Teoremas

Sem dúvida um dos pontos culminantes da Matemática contemporânea são os teoremas.

Teoremas são sentenças matemáticas válidas, cuja validade é garantida por demonstrações matemáticas.

Desde a educação básica trabalhamos com muitos teoremas, alguns não percebidos e outros bem famosos como o Teoremas de Pitágoras, o Teorema de Tales, o Teorema de Stewart, o Teorema de Girard, dentre outros.

Lembramos do importante papel dos teoremas na Matemática, pois são usados para facilitar manipulações de outros elementos matemáticos.

Ressaltamos que os teoremas não possuem origens por si só, ou seja, são frutos de uma complexa combinação que envolve conceitos primitivos, axiomas, definições, raciocínio logico-dedutivo e domínio de conhecimentos matemáticos conquistados por experiências adquiridas com o passar do tempo.

Todo teorema é estruturado em duas partes de grande importância para sua demonstração que são:
HIPÓTESE(S): condição(ões) que aparece(m) no enunciado do teorema e por ser(em) indispensável(eis) devem ser usadas na sua demonstração.
TESE: Também aparece no teorema e constitui a parte que se deseja demonstrar.

De um modo geral se diz que a hipótese ou hipóteses, casos haja mais de uma, é **a causa matemática** e a tese é o **efeito**.

Para facilitar a demonstração de um teorema é importante separarmos a(s) hipótese(s) da tese, e a partir daí usamos um raciocínio lógico- dedutivo a fim de construir a ligação entre a causa e efeito, ou seja, a conclusão matemática de sua validade caso seja uma sentença verdadeira.

Para efeito didático é comum enunciarmos um teorema usando uma implicação lógica ou uma condicional separando a(s) hipótese(s) da tese.

$$\text{HIPÓTESE(S)} \Rightarrow \text{TESE}$$
$$\text{OU}$$
$$\text{Se HIPÓTESE(S), então TESE}$$

Exemplos de alguns teoremas e suas partes:

Exemplo 3.17. T_1*: n é um número inteiro divisível por* $10 \Rightarrow n$ *é um número par.*

HIPÓTESES: (i) n é um número inteiro e (ii) n é um número divisível por 10.

TESE: n é um número par.

Exemplo 3.18. T_2*: Se as diagonais de um retângulo se intersectam em um ângulo reto, então ele é um quadrado.*

HIPÓTESES: (i) Considere um retângulo (ii) as diagonais do retângulo formam ângulo reto.

TESE: o retângulo é um quadrado.

Exemplo 3.19. T_3 *(1ª versão): Um número cuja soma de seus algarismos é divisível por* 9 *também é divisível por* 9.

Note que no enunciado do teorema T_3 *não temos uma implicação lógica ou condicional, o que não permite distinguir hipótese de tese, porém podemos adaptá-la ao seguinte enunciado:*

T_3 *(2ª versão): Se* n *é número inteiro cuja soma de seus algarismos for divisível por* 9*, então* n *é divisível por* 9.

HIPÓTESES: (i) n é número inteiro; (ii) a soma dos algarismos de é divisível por 9.

TESE: n é divisível por 9.

Exemplo 3.20. T_4 *(1ª versão):* $sen(a+b) = sen(a)\cos(b)+sen(b)\cos(a)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *De modo análogo ao que vimos, no exemplo 3.21, podemos escrever este teorema na linguagem implicativa que se segue:*

T_4 *(2ª versão): Se* $a, b \in \mathbb{R}$*, então* $sen(a + b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$.

HIPÓTESES: (i) $a, b \in \mathbb{R}$.

TESE: $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$.

É importante observarmos que teoremas válidos do tipo: $P \Rightarrow Q$ (Se P, então Q) de recíproca: $Q \Rightarrow P$ (Se Q, então P) verdadeira, são teoremas equivalentes. Assim para demonstrarmos de tais teoremas, devemos fazê–la nas duas etapas $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, sendo válidas usamos a simbologia $P \Leftrightarrow Q$ (P se, e somente se Q). Veja alguns exemplos abaixo de teoremas equivalentes.

Exemplo 3.21. *Um número inteiro termina em* 0 *ou* 5 *se, e somente se, é um múltiplo de* 5.

Exemplo 3.22. *Um polinômio* p *de coeficientes reais na variável* x*, tem* $\alpha \in \mathbb{R}$ *como raiz se, e somente se, for divisível pelo binômio* $(x - \alpha)$.

3.7 A Família dos Teoremas

Em muitos casos, certos teoremas enunciados, não são identificados. Isso por que dependendo do contexto, evita–se o abuso das palavras.

Mais por opção pessoal, respeito às convenções matemáticas e por uma elegância da escrita, os teoremas são identificados por outros nomes tais como destacaremos a seguir:

Definição 3.1 (Lema)**.** *É um teorema preparado para demonstrar um outro teorema.*

Definição 3.2 (Corolário)**.** *É um teorema decorrente de um outro teorema recém–provado.*

Definição 3.3 (Proposição)**.** *É um teorema que não é central no contexto e tem uma importância limitada.*

Exemplo 3.23.

Lema 1. *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* n^2 *é par, então* n *é par.*

Teorema 1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *sendo* $\mathbb{Q}$ *o conjunto dos números racionais.*

Corolário 1. *Existem números irracionais.*

No exemplo acima observe que o Corolário decorre do Teorema, o qual por sua vez, decorre do Lema e, para não abusar da linguagem da palavra teorema, por opção, usamos a sequência na ordem que foi apresentada.

Na secção técnicas de demonstrações apresentamos a demonstração do LEMA acima.

De um modo geral podemos estabelecer uma relação hierárquica, sem muita importância e nem obrigatoriedade de sempre adotá–la ao descrever um teorema estudado, temos:

$$\text{LEMA} \Longrightarrow \text{TEOREMA} \Longrightarrow \text{COROLÁRIO}$$

Alguns tipos de Teoremas recebem denominações de Regras, Leis, Propriedades etc.

Exemplo 3.24. *Lei dos Senos, Lei dos Cossenos, Teorema de Pitágoras, Regra de Chió, Dispositivo de Briot-Ruffini, Lema de Fatou, Lema de Zorn.*

3.8 Definição Matemática

No desenvolvimento de uma teoria matemática, existe um elemento fundamental que contribui para o surgimento de terminologias convenientes, evitando longas e excessivas repetições e que aliado a simbologias adequadas dão maior comodidade e economia para sua descrição. Chamamos este elemento de **definição matemática**. Assim definir elementos matemáticos significa dar nome aos elementos ou objetos matemáticos mediante particularidades que possuem e os caracterize.

Observe algumas definições matemáticas

(i) Triângulo: Sejam três pontos não colineares, a união dos três segmentos de reta com extremos nestes pontos é chamada de triângulo.

(ii) Reunião de Conjuntos ($\cup$): Considere a operação que a cada dois conjuntos A e B associa o conjunto $A \cup B$, formado pelos elementos de A juntamente com os elementos de B.

(iii) Circunferência: É um conjunto de pontos de um plano que estão a uma distância r ($r > 0$) de um ponto fixo O.

Além de definir é importante tomar certos cuidados, tais como:

- Não confundir com teoremas, pois não se prova definições;
- Cuidado para não apresentar ambiguidades, pois uma definição matemática deve ser clara e sucinta;
- Procurar apresentar o mínimo de informações para definir um objeto;
- Ao estabelecer uma definição, cuidado com círculos viciosos: definir um objeto A usando um outro objeto B e, para definir B, usar o objeto A.

Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 3.25.

Definição 3.4. *Um ângulo reto é um ângulo que mede 90 graus.*

Definição 3.5. 1 *grau como* $\frac{1}{90}$ *da medida de um ângulo reto.*

Note que as definições acima constituíram um círculo vicioso, pois usou–se a definição de grau para definir ângulo reto e a definição de ângulo reto para definir grau. Isso não pode ocorrer em uma definição.

4 Teoria Matemática e o Modelo Axiomático

Uma teoria matemática é estruturada em elementos matemáticos que são considerados os mais simples de todos, isto é, a partir dos quais se definem todos os outros e em sentenças matemáticas que dispensam demonstrações para serem aceitas, além de possuírem uma estrutura mais simples que os teoremas.

Os elementos matemáticos, citados anteriormente, são chamados de **conceitos primitivos** (ou **noções primitivas**) e são importantes, pois constituem o início da cadeia de uma teoria matemática, ou seja, não precisam de definições.

Já as sentenças aceitas sem demonstrações, são conhecidas como **Axiomas** ou **Postulados**.

Os postulados são úteis para demonstrações de teoremas e não constituem definição de nenhum elemento matemático.

Notamos de fato que se tudo fosse definido numa teoria matemática, ou seja, definindo todos os elementos que estão sendo usados, os quais, por sua vez, dependem de outras definições e se fôssemos seguindo uma espécie de "sequência descendente" de definições, poderíamos chegar a duas conclusões: Ou se teria um círculo vicioso, quando uma definição é usada para outra e vice-versa (como nos dicionários linguísticos), ou não se pararia nunca. Mas como chegamos a tais conceitos?

É lógico que não são selecionados ao acaso por meras opiniões pessoais. Tais **conceitos** (ou **noções primitivas**) são em geral oriundos de muitas experiências, observações e de um certo consenso coletivo por parte da comunidade matemática.

Antigamente os filósofos gregos tinham como entendimento de **axiomas** a afirmações que eram verdades gerais e comuns a outras áreas de estudo.

Exemplo 4.1. *Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.*

Enquanto que, para estes mesmos filósofos, **postulados** eram verdades sobre um assunto especificamente estudado.

Exemplo 4.2. *Todo segmento de reta pode ser prolongado em uma reta.*

Mais hoje em dia tal diferença não é mais vista.

A construção de uma teoria matemática envolve uma série de elementos essenciais como conceitos primitivos, postulados, definições, teoremas dentre outros. Porém, é interessante adotarmos uma ferramenta de grande utilidade no seu desenvolvimento e que tenha os moldes da lógica. Esta ferramenta é conhecida como **regras de inferência** e de fundamental importância na manipulação e descrição de uma teoria matemática.

Destacamos duas regras de inferência:

(i) Regra da particularização: Se alguma coisa é válida para todos os elementos de um conjunto, então ela é válida para cada elemento deste conjunto.

(ii) Regra modus ponens: Esta denominação vem do Latim e significa: maneira de afirmar. Nesta regra, sendo válido o teorema: Se P, então Q, e sendo P válido, então necessariamente Q será válido .

Observe no Exemplo as aplicações das regras de inferências:

Exemplo 4.3 (Teorema de Pitágoras)**.** *Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Temos:

- P: um triângulo é retângulo.
- Q: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Ora, se considerarmos um triângulo retângulo de catetos que medem 12 cm e 5 cm, o que podemos dizer da medida de sua hipotenusa? Uma aplicação do Teorema de Pitágoras assegura que $x^2 = 12^2 + 5^2$, ou seja, $x = 13$ cm.

Note que nessa argumentação usamos a regra de inferência da particularização, pois se o Teorema de Pitágoras vale para o conjunto de todos os triângulos retângulos, em particular vale para o triângulo retângulo acima de catetos que medem 12 cm e 5 cm e que pertence a este conjunto. Em seguida usamos a **regra modus ponens** que parte do princípio em que, Se P, então Q vale, ou seja, o Teorema de Pitágoras vale e P (O triângulo T é retângulo) vale, então concluímos a validade da sentença Q ($x^2 = 12^2 + 5^2$, ou seja, $x = 13\ cm$).

Vamos, a partir de agora, abordar a importante noção de um modelo matemático bastante util em demonstrações matemáticas, tal modelo recebe a denominação de **modelo axiomático**.

Definimos modelo axiomático como um conjunto formado por conceitos primitivos, definições matemáticas, postulados, teoremas e regras de inferência. Tal modelo traz benefícios na organização de fatos matemáticos levando–nos a saber o quê depende de quê, utilizam o menor número possível de axiomas consistentes(ou seja, não se deduz informações contraditórias), possui um enorme rigor lógico e não exige dos leitores conhecimentos extras ou quaisquer experiências matemáticas anteriores a teoria a ser desenvolvida.

É importante ressaltar que o modelo axiomático não teve início nos primórdios da Matemática e sim com os gregos.

Antes dos gregos as civilizações como babilônica e egípcia desenvolvia seus problemas matemáticos de modo particular (leis não gerais), onde apresentavam o desenvolvimento matemático como receitas : "**faça isso**", "**faça aquilo**" etc. para resolver problemas. Além disso, a Matemática praticada nesta época, abdicava da não preocupação em utilizar demonstrações, pois não haviam raciocínios abstratos.

Assim, a ideia de raciocínio abstrato, só veio a surgiu com os gregos, onde a tradição os considera como primeiros investigadores matemáticos da época. O primeiro modelo axiomático conhecido foi o da Geometria Plana que foi estabelecido pelo matemático grego Euclides em sua obra Elementos. Porém existem outros modelos axiomáticos, além da geometria Euclidiana, como a construção do conjunto dos números naturais, Axioma das operações com os números reais dentre outros.

Observe, logo a seguir, o modelo axiomático que define a adição entre números reais, a partir de um grupo de axiomas.

4.1 Axiomas de Adição de números reais

Considere dois números reais x e y, com os quais associamos cada par (x, y) a um número real $x+y$, chamado soma de x com y. A operação que leva cada (x, y) ao número

$x + y$ chama-se de adição e satisfaz os seguintes axiomas:

A₁) Comutatividade: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem–se $x + y = y + x$.

A₂) Associatividade: $\forall x, y$ e $z \in \mathbb{R}$,tem–se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A₃) Existência de um elemento Neutro da adição: Existe um número real $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as igualdades $x + \varepsilon = \varepsilon + x = x$.

Sabemos que este elemento neutro é o número zero ($\varepsilon = 0$).

A₄) Existência do elemento Inverso aditivo ou simétrico da adição: Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que

$$x + y = y + x = \varepsilon$$

Sabemos que $y = -x$.

É importante salientar que os axiomas acima fazem parte de um conjunto ainda maior que garantem toda a estrutura algébrica dos números reais.

4.2 Demonstrações Matemáticas

Demonstrar é mergulhar no mundo da Matemática abstraindo pensamentos e desenvolvendo técnicas que nos ajudam na compressão dos conhecimentos matemáticos.

Quando demonstramos um teorema, desvendamos toda uma estrutura, por vezes, complexa que nos aproximam desta ciência, exigindo estudos e treinamentos exaustivos.

Uma demonstração matemática, não se faz por si, tem todo um mecanismo lógico-dedutivo e investigativo que liberta nossos conhecimentos, isto é, ninguém deve aceitar um teorema matemático e sim deve ser convencido de sua validade. Daí a importância de uma boa redação e argumentação o que justifica os temas matemáticos que foram propostos neste trabalho : hipóteses, axiomas, definições, teoremas, passos de demonstrações , regras de inferência dentre outros.

Hoje grande maioria dos estudantes do ensino básico praticam a Matemática da decoreba e dos macetes para construir o caminho mais simples possível e chegar na solução, isto é, estão mais preocupados no resultado do que o aprendizado.

Vejamos um exemplo bem comum:
Se pedíssemos para um aluno capaz de resolver a inequação $2x + 3 > 11$, ele faria mais

ou menos assim:

$$2x + 3 > 11 \Rightarrow 2 \cdot x > 11 - 3 \Rightarrow 2 \cdot x > 8 \Rightarrow x > 4$$

logo, seu conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x > 4\}$.

Agora vamos resolver o mesmo problema na forma de um teorema, pois exige demonstração (construir o caminho da solução).

Teorema 2. *Se* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $2x + 3 > 11$*, então* $x > 4$.

Demonstração. H (hipótese): $x \in \mathbb{R}$ e $2x + 3 > 11$; T (tese): $x > 4$.

Devemos mostrar que Se H vale, então T vale (H $\Rightarrow$ T), consideremos as sentenças
P_1 (hipótese) Se $x \in \mathbb{R}$ tal que $2 \cdot x + 3 > 11$;
P_2 (Axioma): Para todo número real x existe um $-x$ (elemento simétrico) tal que $x + (-x) = 0$;

Assim o simétrico de 3 é -3, ou seja, $3 + (-3) = 0$.
P_3 (Teorema): Sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$,se $a > b$, então $a + c > b + c$;
P_4 (sentença deduzida das anteriores ao usar P_2 e P_3 em P_1): $2 \cdot x + 3 + (-3) > 11 + (-3)$;
P_5 (Axioma de associatividade): Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$, tem–se que $(a+b)+c = a+(b+c)$;
P_6 (Definição de subtração): $11 + (-3) = 11 - 3$;
P_7 (sentença deduzida das anteriores ao usar P_5 e P_6 em P_4): $2 \cdot x + (3 + (-3)) > 11 - 3$;
P_8 (Axioma): Para todo número real x existe um número real 0 (zero) tal que $x + 0 = x$;
P_9 (Definição): $11 - 3 = 8$;
P_{10} (sentença deduzida das anteriores ao usar P8 e P_9 em P_7): $2 \cdot x > 8$;
P_{11} (Teorema): Se $a > 0$ e $a \cdot b > c$, então $b > \frac{c}{a}$;
P_{12} (Definição): $\frac{8}{2} = 4$;

Finalmente obtemos
P_{13} (sentença deduzida das anteriores ao usar P_{11} e P_{12} em P_{10}):

$$2 \cdot x > 8 \Rightarrow x > \frac{8}{2} \Rightarrow x > 4.$$

□

Notemos o quanto de conhecimento é envolvido para se construir com formalidade o resultado.

É claro que nem todos os problemas devem ser resolvidos desta maneira, porém muitos não sabem que a simplicidade exposta no primeiro exemplo envolve toda esta gama de conhecimentos, por isso, é sempre válido mostrar um problema desta forma, para que fique evidente a relação matemática entre conceitos, definições, axiomas, teoremas e outros objetos matemáticos que participam da construção de uma solução.

Salientamos que independente do tipo de demonstração nem todas são complexas, algumas são demonstrações simples que não necessitam de argumentações e procedimentos mais elaboradas. Tais demonstrações exerce um importante papel, sobretudo para iniciantes, pois dão mais confiança para quem procura o aprendizado da manipulação de elementos matemáticos.

Na secção sobre os tipos de demonstrações serão apresentadas algumas demonstrações simples, pois o intuito destas descrições é de popularizá–las em sala de aula.

4.3 Contraexemplos como Demonstração

É interessante pensar com cautela e imparcialidade diante de algumas sentenças matemáticas, sobretudo aquelas que ainda não temos um modelo de construção de suas teses. Tais sentenças, em alguns casos, possuem uma complexidade descritiva de tese e podem ser demonstradas pelo lado da não validade da tese, ou seja, se encontramos ao menos um elemento que satisfaça sua hipótese, mas não sua tese, já nos dá indícios matemáticos de sua não validade. A esta maneira de demonstrar chamamos de **Contraexemplo**.

Veja alguns exemplos:

Exemplo 4.4. *Para quaisquer valores reais de* x *e* y*, tem-se que* $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

Observe que a afirmação não é válida, pois um contraexemplo é $x = y = 5$, ou seja, $(5+5)^2 = 10^2 \neq 5^2 + 5^2 = 50$, logo esta sentença é falsa.

Exemplo 4.5. *Todo número da forma* $n^2 + n + 41$ *é primo para todo n natural,* $n \geqslant 0$.

Se substituirmos pelos números $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 39\}$ que satisfazem a hipótese até ai tudo bem , porém a partir do valor $n = 40$, temos

$$40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 40 + 40 + 1 = 40(40+1) + (40+1) = (40+1)^2 = 41^2,$$

em que mostra que não é primo. Assim, chamamos $n = 40$ de contraexemplo da sentença dada e mostra a sua não validade, mesmo dispensando sua demonstração.

Exemplo 4.6. *Todo número da forma* $991n^2 + 1$*, para n natural e* $n \geqslant 1$*, não é quadrado perfeito.*

Neste exemplo deve–se ter cuidado com esse tipo de argumentação, pois pode–se cair num engano!, a sentença é falsa, e falha para o seguinte número

$$n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767$$

este contraexemplo é facilmente encontrado se usarmos recursos computacionais.

Apesar dos contraexemplos serem saídas para validar uma sentença sem demonstração definida, aproveitamos para definir **Conjecturas Matemáticas** que são afirmações para as quais não se dispõe de uma demonstração e nem de um contraexemplo que lhes garanta sua validade.

Um exemplo é a **Conjectura de Goldbach** que diz "Um número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos".

A seguir temos uma imagem original da descrição desta conjectura matemática.

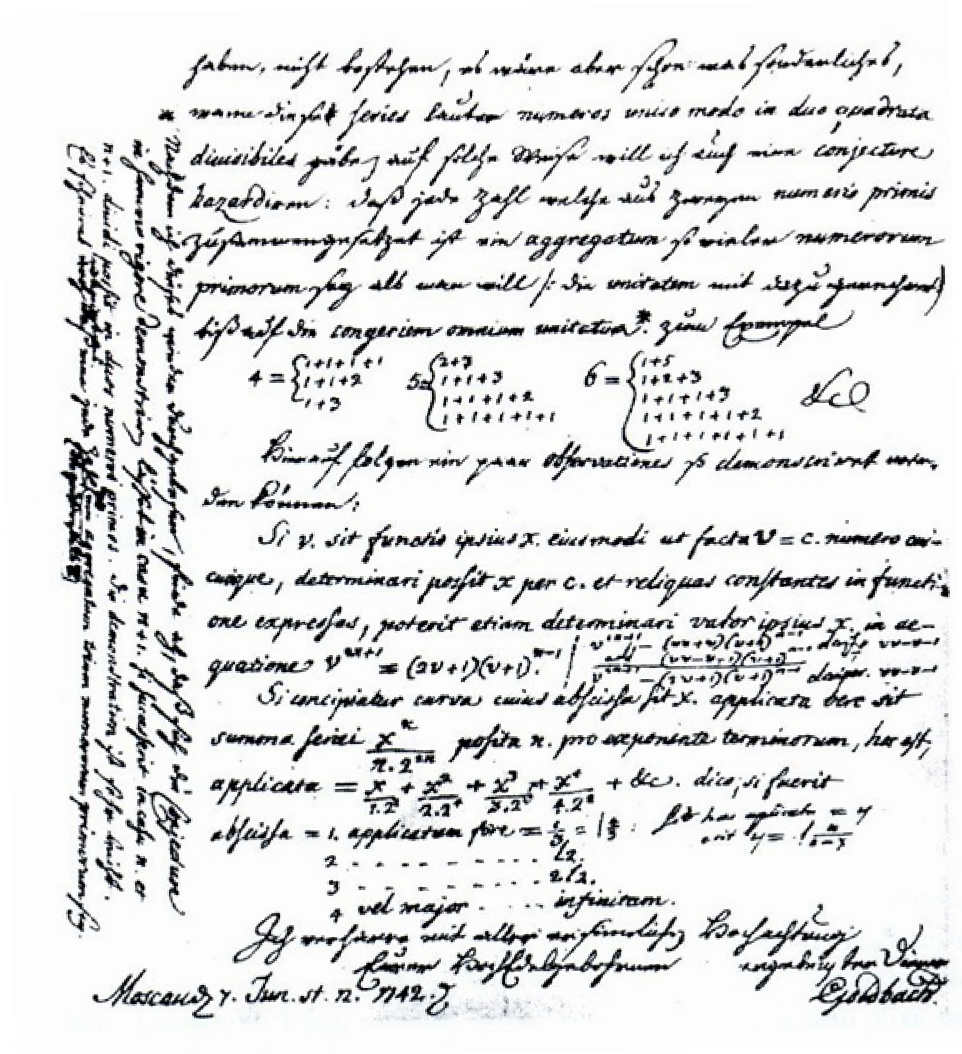


Figura 1: Carta de Goldbach para Euler

Fac–símile da carta de Goldbach para Euler, escrita em latim, na qual expõe uma versão de sua conjectura. No final da carta, vê se na data, o ano de 1742 - Fonte: http://tiorema.blogspot.com.br/2013/05/conjectura-fraca-de-goldbach.html.

4.4 Tipos de Demonstrações

Atualmente existem dois tipos bem praticados de demonstrações matemáticas que chamamos de demonstrações diretas e demonstrações indiretas.

4.4.1 Demonstrações Diretas

São demonstrações usadas em teoremas em que se parte da hipótese para chegar até a tese.

Exemplo 4.7. *Demonstre que, se n, m são números pares, então $n + m$ também é par.*

Hipótese: n, m são números pares.

Tese: $n + m$ é par.

Demonstração. Como n e m são pares logo, são múltiplos de 2 e podemos escrevê–los da seguinte maneira: $n = 2k$ e $m = 2p$, onde k e p são inteiros. Logo,

$$n + m = 2k + 2p = 2(k + p).$$

Concluímos que $n + m$ é múltiplo de 2, ou seja, $n + m$ é par. □

Exemplo 4.8. *Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.*

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q", mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido: Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar.

Tese: n^2 é ímpar.

Demonstração. Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum número inteiro k.

Logo,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1,$$

onde $m = 2k^2 + 2k$ é um número inteiro. Portanto n^2 é um número ímpar. □

Exemplo 4.9.

Teorema 3. *A soma de dois números racionais é um número racional.*

Este tipo de demonstração é bem comum, dado ao fato, de trabalharmos com muitas propriedades numéricas.

Recordemos a definição do conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}.$$

Demonstração. Sejam $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, com $q, s \neq 0$. Ora, $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$. Como $ps + qr$ e qs são números inteiros, por serem soma e produto de números inteiros e, como $qs \neq 0$, já que $q, s \neq 0$, a última igualdade implica $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Logo, se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. □

4.4.2 Demonstrações Indiretas

São demonstrações que fazem uso de duas técnicas matemáticas conhecidas como redução ao absurdo e método lógico da contrapositiva.

4.4.2.1 Redução a um Absurdo

É uma técnica bastante utilizada para se demonstrar indiretamente propriedades matemáticas e que é também conhecida por outros nomes tais como demonstração por contradição, demonstração por contrataulogia ou demonstração reductio ad absurdum (latim)que significa redução a um absurdo.

Para fazer este tipo de demonstração a partir da sentença Se H, então T, por absurdo, admite–se que H e $\sim \mathsf{T}$ ocorram. Com essa suposição, deve–se deduzir uma sentença contraditória qualquer $\sim \mathsf{P} \wedge \mathsf{P}$, chamada de **absurdo** ou **contradição**. A hipótese adicional $\sim \mathsf{T}$, considerada nesse método, chama–se **hipótese de contradição** ou **hipótese de absurdo**.

Simbolicamente, temos:

$$(\mathsf{H} \to \mathsf{T}) \Leftrightarrow ((\mathsf{H} \wedge \sim \mathsf{T}) \to (\sim \mathsf{P} \wedge \mathsf{P})).$$

Para provar a validade de $\mathsf{H} \to \mathsf{T}$, supõe–se que a hipótese H ocorra, mas que a tese T não ocorra, isto é, $\mathsf{H} \wedge \sim \mathsf{T}$ ocorre, que é o mesmo de admitir a veracidade dessa sentença.

Partindo–se da ocorrência de $H \wedge \sim T$, deve–se deduzir uma sentença contraditória da forma $\sim P \wedge P$, que é falsa. Ora, mas não se pode deduzir uma sentença falsa partindo de uma verdadeira. Logo, nossa suposição inicial, $H \wedge \sim T$, não pode ocorrer. Por conseguinte, e a sentença $\sim (H \to T)$ também não ocorre. Por conseguinte, $H \to T$ deve ocorrer como queríamos justificar.

Ressaltamos que uma demonstração que usa argumentos de contradição é chamada de demonstração indireta.

Exemplo 4.10.

Teorema 4. *Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é par, então n é par.*

Demonstração. H: $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é par. T: n é par. $\sim T$: n é ímpar.

Vamos admitir, por hipótese, que $n \in \mathbb{N}$, n^2 é par e n é ímpar ($H \wedge \sim T$), logo podemos escrever $n = 2 \cdot k + 1$, pois é impar. Elevando n ao quadrado, obtemos $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, como $2k^2 + 2k = m \in \mathbb{N}$, então $n^2 = 2m + 1$ que é ímpar, mas por hipótese ocorre que n^2 é par, logo é um absurdo. $\square$

Observação 4.1. *Observe, na demonstração, que o absurdo ou contradição a qual chegamos é a sentença $H \wedge \sim H$.*

Exemplo 4.11. *Prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Vamos formular este problema da seguinte maneira: Se x é um número real positivo com $x^2 = 2$, então $x \in \mathbb{Q}$.
H: x é um número real positivo e $x^2 = 2$.
T: $x \notin \mathbb{Q}$.
$\sim T$: $x \in \mathbb{Q}$.

Suponha, por contradição, que $x(= \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$. Logo $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, com $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Sem perda de generalidade, podemos considerar, p e q primos entre si, ou seja , $mdc(p, q) = 1$, além da unicidade. Da última igualdade temos $\frac{p^2}{q^2} = 2$, daí $p^2 = 2q^2$. Como 2 divide $2q^2$, ele divide p^2, garantindo que p^2 é divisível por 2. Logo, podemos escrever $p = 2k$, sendo k inteiro. Substituindo p por $2k$ na igualdade $p^2 = 2q^2$ e fazendo a devida simplificação, encontramos $2k^2 = q^2$. Aplicando o mesmo raciocínio para essa ultima igualdade, conclui que q é divisível por 2, mas isso contradiz o fato de p e q serem primos entre si. Portanto $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Assim, nossa suposição de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ é falsa, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Observação 4.2. *Se definirmos P:* p *e* q *são primos entre si, a contradição a que chegamos é* $P \wedge \sim P$.

4.4.2.2 Demonstrações por contrapositiva

Trata–se de uma técnica de demonstração indireta que tem os moldes da lógica para sua aplicação. Considere um teorema com hipótese H e tese T, tem-se:

$$(H \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\sim T \Rightarrow \sim H),$$

onde chamamos a sentença $\sim T \Rightarrow \sim H$ de contrapositiva da sentença $H \Rightarrow T$.

Exemplo 4.12.

Teorema 5. *Se* $a \geqslant 0$ *e* $a < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, *então* $a = 0$.

Demonstração. Temos: H: $a \geqslant 0$ e $a < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$; T: $a = 0$; $\sim H$: $a < 0$ ou $a \geqslant \epsilon_0$, $\forall \epsilon_0 > 0$; $\sim T$: $a \neq 0$.

Assim, a contrapositiva de teorema é: Se $a \neq 0$, então $a < 0$ ou $\exists \epsilon_0 > 0$, tal que $a \geqslant \epsilon_0$, ora temos uma demonstração com tese disjuntiva assim temos que provar que Se $a \neq 0$, então $a < 0$ ou $a > 0$, sendo $a < 0$ então demonstramos a primeira tese disjuntiva. Se $a > 0$, então $\exists \epsilon_0 = \dfrac{a}{2} > 0$ tal que

$$\frac{a}{2} = \epsilon_0 \Longrightarrow a = 2\varepsilon_0 \geqslant \epsilon_0.$$

□

4.5 Demonstração de teoremas com hipóteses e teses especiais

Certos teoremas são dotados de hipóteses ou teses especiais exigindo técnicas mais elaboradas para se demonstrar assim como conhecimentos de lógica matemática para tais construções. Logo abaixo, cometamos alguns desses casos.

4.5.1 Demonstrações por Exaustão

Ocorrem quando os teoremas tem hipótese (H) que correspondem a um número finito de disjunções de sentenças, ou seja, $H = H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_k$.

Simbolicamente indicamos estes teoremas, na linguagem lógica, como $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2 \vee \ldots \vee \mathsf{H}_k \to \mathsf{T}$, ou seja, (Se H_1 (vale), ou Se H_2 (vale), ... ou Se H_k (vale), então T (vale)), assim observa-se que usando a demonstração direta para este tipo de teorema, devemos fazer esta demonstração para cada uma das hipóteses disjuntivas de maneira separada tendo com isso k demonstrações a serem realizadas para provar tal teorema. Para tal demonstração podemos escrever a seguinte equivalência lógica que podemos facilmente notar como tautológica ao escrever sua tabela verdade

$$(\mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2 \vee \ldots \vee \mathsf{H}_k \to \mathsf{T}) \leftrightarrow (\mathsf{H}_1 \to \mathsf{T}) \wedge (\mathsf{H}_2 \to \mathsf{T}) \wedge \ldots \wedge (\mathsf{H}_k \to \mathsf{T}),$$

portanto podemos concluir que tal expressão

$$(\mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2 \vee \ldots \vee \mathsf{H}_k \to \mathsf{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{H}_1 \to \mathsf{T}) \wedge (\mathsf{H}_2 \to \mathsf{T}) \wedge \ldots \wedge (\mathsf{H}_k \to \mathsf{T}),$$

ocorre uma equivalência.

Este método de demonstração é conhecido como demonstração por exaustão, pois as hipóteses exaurem todos os casos a serem analisados. Veja um exemplo:

Exemplo 4.13.

Teorema 6. *Se* k *é um número inteiro da forma* $3\mathsf{k}$*, ou* $3\mathsf{k}+1$*, ou* $3\mathsf{k}+2$*, então o produto deste número com seus dois sucessores é múltiplo de* 3*.*

Demonstração. Observe que a hipótese (H) é constituída pelas seguintes disjunções de sentenças: números inteiros $\mathsf{H}_1 = 3\mathsf{k}$ ou $\mathsf{H}_2 = 3\mathsf{k}+1$ ou $\mathsf{H}_3 = 3\mathsf{k}+2$, devemos concluir a seguinte tese (T): o produto deste número com seus dois sucessores é múltiplo de 3. Assim devemos por exaustão demonstrar os seguintes teoremas, isto é, Se H_1 (vale), ou se H_2 (vale), ou se H_3 (vale), então T (vale).

De fato, tal teorema tem uma demonstração simples e basta notar que se o número é $3\mathsf{k}$ (vale), então $3\mathsf{k}(3\mathsf{k}+1)(3\mathsf{k}+2) = 3(\mathsf{k}(3\mathsf{k}+1)(3\mathsf{k}+2))$ é múltiplo de 3 (vale), e se o número é $3\mathsf{k}+1$ (vale), então $(3\mathsf{k}+1)(3\mathsf{k}+2)(3\mathsf{k}+3) = 3((3\mathsf{k}+1)(3\mathsf{k}+2)(\mathsf{k}+1))$ é múltiplo de 3 (vale), e se o número é $3\mathsf{k}+2$ (vale), então

$$(3\mathsf{k}+2)(3\mathsf{k}+3)(3\mathsf{k}+4) = 3((3\mathsf{k}+2)(\mathsf{k}+1)(3\mathsf{k}+4)),$$

é múltiplo de 3 (vale), portanto a validade dos teoremas parciais garante a validade do teorema de hipóteses disjuntiva. □

4.5.2 Demonstração de teoremas de tese conjuntiva

São teoremas do tipo: se H (vale), então T_1 (Vale), e T_2 (vale), ..., e T_k (vale) simbolicamente temos $H \to (T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_k)$ para demonstrar é necessário mostrar que a hipótese (H) implica para cada uma das teses T_i , sendo $i = 1, 2, \ldots, k$. Assim, basta observar a validade da equivalência

$$H \to (T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_k) \Leftrightarrow (H \to T_1) \wedge (H \to T_2) \wedge \ldots \wedge (H \to T_k).$$

A equivalência lógica dada acima pode ser facilmente constatada por uma tabela-verdade.

Exemplo 4.14.

Teorema 7. *Se um número é múltiplo de* 12*, então é múltiplo de* 3 *e de* 4*.*

Demonstração. Usando a demonstração direta basta provar que se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3, e se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 4. E é fácil notar que se N é múltiplo de 12, então é divisível por 12, e pode ser escrito $N = 12 \cdot m$, sendo m inteiro.

Desta maneira, se $N = 12m$ (vale), então 3 divide N (vale), logo N é múltiplo de 3 e se $N = 12m$ (vale), então 4 divide N (vale), logo N é múltiplo de 4, portanto se um número que é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3 e de 4. □

4.5.3 Demonstração de teoremas de tese disjuntiva

São teoremas do tipo Se H (vale), então T_1 (Vale), ou T_2 (vale), ..., ou T_k (vale) simbolicamente temos $H \to (T_1 \vee T_2 \vee \ldots \vee T_k)$ para demonstrar é necessário mostrar que a hipótese (H) implica para cada uma das teses T_i, sendo $i = 1, 2, \ldots, k$. Assim basta observar a validade da equivalência

$$H \to (T_1 \vee T_2 \vee \ldots \vee T_k) \Leftrightarrow (H \to T_1) \vee (H \to T_2) \vee \ldots \vee (H \to T_k).$$

A equivalência lógica dada acima pode ser facilmente constatada por uma tabela–verdade.

Exemplo 4.15.

Teorema 8. *Se* x *e* y *são números reais tais que* $x^2 = y^2$*, então* $x = y$ *ou* $x = -y$*.*

Demonstração. Considere a hipótese x, y são números reais onde $x^2 = y^2$, mostre que a tese $x = y$ ou $x = -y$.

Para essa demonstração basta usar a manipulação algébrica dos produtos notáveis, ou seja,

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \text{ ou } x + y = 0,$$

ou seja $x = y$ ou $x = -y$. $\square$

5 Método Axiomático no Ensino Básico

Trata-se de um método bastante utilizado para demonstrações, pois nos auxilia na manipulação de objetos matemáticos, principalmente na Matemática moderna. Somente com o advento da civilização grega este tipo de método passou a ser utilizado e deixado como legado para a humanidade.

Infelizmente notamos que muitos livros didáticos de nosso ensino básico pecam na apresentação de métodos axiomáticos. Um exemplo disso são os conjuntos numéricos: naturais, racionais ou reais, pois são modelos descritos sem nenhuma relação entre conceitos, axiomas, definições, propriedades e em muitos casos ausentam demonstrações importantes para domínio da teoria. Seguida de apresentações que ofuscam propriedades e axiomas importantes para seu entendimento. Enfatizando mais as fórmulas matemáticas e levando, muitos alunos, a decorebas sem nenhum domínio e preparo para construir uma solução.

Bem diferente do modelo axiomático da Geometria Euclidiana, que é praticado de modo mais estruturado, pois inicia com conceitos primitivos, definições, axiomas, um pouco de lógica até chega nas demonstrações de alguns teoremas. De fato, herança grega. Logo, a seguir descrevemos algumas demonstrações dentro do modelo axiomático dos números reais e, no final, da Geometria Euclidiana.

Figura 2: Euclides (c.300 – 260 a.C.)

Desenho representando Euclides (c.300 – 260 a.C.), a quem credita–se ter usado o modelo axiomático pela primeira vez - Fonte: http://www.coladaweb.com/matematica/geometria-euclidiana.

5.1 Demonstrações no Método Axiomático

5.1.1 Axiomas de Adição de números reais

Considere dois números reais x e y, onde associamos cada par (x, y) a um número real $x + y$, chamado soma de x com y. A operação que leva cada (x, y) ao número $x + y$ chama-se de adição e satisfaz os seguintes axiomas:

$\mathbf{A_1}$) Comutatividade: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem–se $x + y = y + x$.

$\mathbf{A_2}$) Associatividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, tem–se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

$\mathbf{A_3}$) Existência de um elemento Neutro da adição: existe um número real $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as igualdades $x + \epsilon = x + \epsilon = x$.

Mais adiante provaremos que ϵ é único e tem valor 0.

$\mathbf{A_4}$) Existência do elemento simétrico: para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $x + y = y + x = \epsilon$.

Mais adiante provaremos que y é único e será indicado por $-x$.

Os axiomas acima fazem parte de um conjunto maior de axiomas que garantem toda a estrutura algébrica doa números reais.

5.1.2 Axiomas de Multiplicação de números reais

Considere dois números reais x e y, onde associamos cada par (x, y) a um número real $x \cdot y$, chamado produto de x com y. A operação que leva cada (x, y) ao número $x \cdot y$ chama–se de **multiplicação** e satisfaz os seguintes axiomas:

$\mathbf{M_1}$) Comutatividade: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem–se $x \cdot y = y \cdot x$.

$\mathbf{M_2}$) Associatividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, tem–se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

$\mathbf{M_3}$) Existência de um elemento Neutro da adição: existe um número real $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as igualdades $x \cdot \theta = x \cdot \theta = x$.

Mais adiante provaremos que θ é único e tem valor 1.

$\mathbf{M_4}$) Existência do elemento Inverso multiplicativo: para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot z = y \cdot z = \theta$.

Mais adiante provaremos que z é único e será indicado por x^{-1} .

Existem outras propriedades de adição e multiplicação de números reais e todas decorrem desses dois axiomas anteriores, ou seja, elementos neutro , inverso e simétrico.

D) Distributividade do produto: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, tem–se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ou $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Observação 5.1. *Tais axiomas anteriormente descritos constituem um conjunto com o menor número de axiomas com os quais podemos demonstrar todas as propriedades operatórias de adição e multiplicação entre números reais e nenhum destes axiomas pode ser deduzido dos demais.*

Observação 5.2. *Nos axiomas dos elementos neutros usamos símbolos tais como ϵ, para adição, e θ, para multiplicação, não representando os números reais* 0 *e* 1, *respectivamente.*

Isso foi feito desta maneira, pois numa análise mais sutil deste axioma nada garante que estes elementos citados sejam de fato, unicamente 0 e 1 nas operações destacadas, ou seja, será que teria mais alguns outros elementos neutros?

Vamos a seguir demonstrar suas unicidades como consequência de tais axiomas.

Teorema 9. *O elemento neutro da adição de números reais é único.*

Demonstração. Hipótese: ϵ e ϵ' elementos neutros da adição que satisfazem A_3. Tese: $\epsilon = \epsilon'$.

Supondo que exista mais de um elemento ϵ e ϵ' com $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}$ e que satisfazem o axioma (A_3) da adição, e considere $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$x + \epsilon = \epsilon + x = x$$

e

$$x + \epsilon' = \epsilon' + x = x.$$

Substituindo em cada uma das igualdades acima $x = \epsilon'$ e $x = \epsilon$, respectivamente, teremos

$$\epsilon' + \epsilon = \epsilon + \epsilon' = \epsilon'$$

e

$$\epsilon + \epsilon' = \epsilon' + \epsilon = \epsilon.$$

Decorre das igualdades acima e da comutatividade da adição que satisfazem a (A_1), a seguinte igualdade $\epsilon' = \epsilon' + \epsilon = \epsilon + \epsilon' = \epsilon$ que nos garante a unicidade do elemento neutro da adição. □

Agora podemos garantir que tal elemento neutro da adição é único e vale zero, $\epsilon = 0$.

Teorema 10. *O elemento neutro da multiplicação de números reais é único.*

Demonstração. Hipótese: θ e θ' elementos neutros da multiplicação que satisfazem o axioma M_3. Tese: $\theta = \theta'$.

Supondo que exista mais de um elemento θ e θ' com $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ e que satisfazem o axioma (M_3) da multipicação, e considere $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$x \cdot \theta = \theta \cdot x = x$$

e

$$x \cdot \theta' = \theta' \cdot x = x.$$

Substituindo em cada uma das igualdades acima $x = \theta'$ e $x = \theta$, respectivamente, teremos

$$\theta' \cdot \theta = \theta \cdot \theta' = \theta'$$

e

$$\theta \cdot \theta' = \theta' \cdot \theta = \theta.$$

Decorre das igualdades acima e da comutatividade da multiplicação que satisfazem a (M_1), a seguinte igualdade $\theta' = \theta' \cdot \theta = \theta \cdot \theta' = \theta$ que nos garante a unicidade do elemento neutro da multiplicação. □

Agora podemos garantir que tal elemento neutro da multiplicação é único e vale um, $\theta = 1$.

Teorema 11. *Cada número real possui um único elemento simétrico.*

Demonstração. Hipótese: y e y' são elementos simétrico da adição que satisfazem o axioma A_4. Tese: $y = y'$.

Supondo que exista mais de um elemento y e y' que satisfazem o axioma (A_4) da adição, e considere $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$x + y = y + x = 0$$

e

$$x + y' = y' + x = 0.$$

Assim das igualdades anteriores e aplicando a associatividade da adição (A_2), decorre a igualdade seguinte:

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'.$$

□

Acabamos de demonstrar que cada número real tem um único simétrico e que podemos denotá–lo por pelo símbolo $(-x)$.

Teorema 12. *Cada número real possui um único elemento inverso multiplicativo.*

Demonstração. Hipótese: z e z' elementos inverso da multiplicação que satisfazem o axioma M_4).
Tese: $z = z'$.

Supondo que exista mais de um elemento z e z' que satisfazem o axioma (M_4) da multiplicação, e considere $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$x \cdot z = z \cdot x = 1$$

e

$$x \cdot z' = z' \cdot x = 1.$$

Assim das igualdades anteriores e aplicando a associatividade da adição (M_2), decorre a igualdade seguinte:

$$z = z \cdot 1 = z \cdot (x \cdot z') = (z \cdot x)z' = 1 \cdot z' = z'.$$

□

Acabamos de demonstrar que cada número real tem um único inverso e que podemos denotá–lo por pelo símbolo x^{-1}.

A seguir, vamos mostrar mais algumas propriedades que frequentemente usamos, porém muitos nem imaginam de como tais propriedades foram validadas.

Teorema 13. $\forall a \in \mathbb{R}$, *temos que* $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração. Hipótese: $\forall a \in \mathbb{R}$. Tese: $a \cdot 0 = 0$. $0 = 0+0 \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ que decorre a igualdade seguinte

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) \Rightarrow 0 = a \cdot 0 + 0$$

Logo, $0 = a \cdot 0$. □

Teorema 14. $\forall a \in \mathbb{R}$, *temos que* $-a = (-1) \cdot a$.

Demonstração. Hipótese: $\forall a \in \mathbb{R}$. Tese: $-a = (-1) \cdot a$.

$$\begin{aligned} 1 + (-1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (1 + (-1))a = 0 \cdot a \\ &\Rightarrow \quad (1 + (-1))a = 0 \\ &\Rightarrow \quad a + (-1) \cdot a = 0 \\ &\Rightarrow \quad (-a) + a + (-1) \cdot a = (-a) + 0 \\ &\Rightarrow \quad (-a + a) + (-1)a = -a \\ &\Rightarrow \quad 0 + (-1)a = -a. \end{aligned}$$

Logo,$(-1) \cdot a = -a \Rightarrow -a = (-1) \cdot a$. □

Teorema 15. *Sejam* x, y, z *e* $w \in \mathbb{R}$. *Se* $y, w \neq 0$, *então* $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{x \cdot z}{y \cdot w}$.

Demonstração. Hipótese: x, y, z e $w \in \mathbb{R}$. Se $y, w \neq 0$. Tese: $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{x \cdot z}{y \cdot w}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} &= (x.y^{-1}) \cdot (z.w^{-1}) \\
&= x \cdot (y^{-1} \cdot z) \cdot w^{-1} \\
&= x \cdot (z \cdot y^{-1}) \cdot w^{-1} \\
&= (x \cdot z) \cdot (y^{-1} \cdot w^{-1})
\end{aligned}
$$

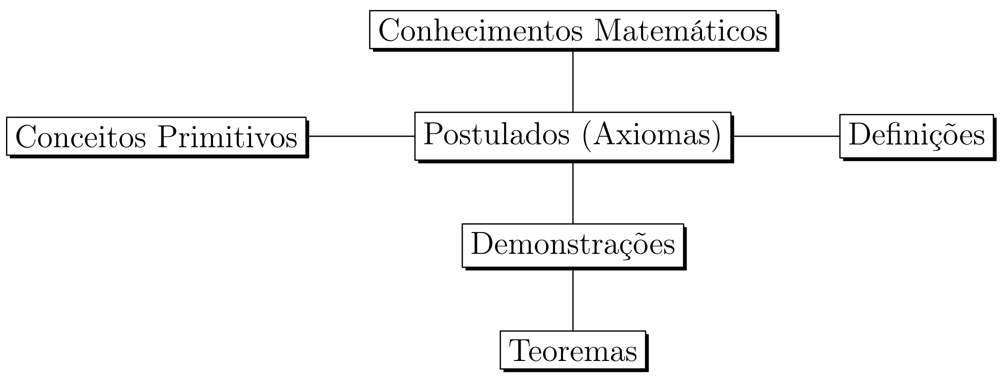
Assim $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{w} = (x \cdot z) \cdot (y^{-1} \cdot w^{-1}) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w)^{-1} = \dfrac{x \cdot z}{y \cdot w}$. $\square$

Reforçamos que o objetivo de expor algumas demonstrações usando um modelo axiomático são partes integrantes de tal e que são pouco exploradas e estruturada em nossos livros de ensino básico.

É claro que devemos explorá–las fazendo uso de uma linguagem apropriada afim de garantir a importância de axiomas e propriedades para compreensão da teoria estudada.

5.2 Quadro Geral de um Modelo Axiomático

No quadro abaixo resumimos as principais fases de um modelo axiomático.



Percebemos acima uma maneira estruturada e organizada que facilita manipulações de elementos abstratos da Matemática a fim de buscar uma melhor compreensão de suas leis.

5.3 Indução Vulgar

Em algumas Ciências naturais é comum observarmos um determinado fenômeno repetidas vezes, antes de descrevermos as leis que o rege. Esta metodologia é chamada de método experimental.

E em nosso dia a dia isso também ocorre, ou seja, o fato de sair bolas de um buraco sendo a primeira azul, a segunda azul, a terceira azul, ..., a milionésima azul faz o observador deduzir precipitadamente que as bolas que saírão daquele buraco serão sempre azuis.

Na Matemática a forma de pensar e concluir, descrita acima, é chamada de **indução vulgar** ou **raciocínio indutivo**, isto é, onde se deduz algo a partir de um certo número de ocorrências do que é observado. Lembramos que este raciocínio é tão comum, sobretudo, entre nossos alunos que devemos orienta–los a tomar certas precauções. Assim definimos formalmente por **indução vulgar** a generalização de uma propriedade matemática após a verificação de que alguns casos, particularizados, atendem a validade de alguma propriedade matemática analisada.

Vejamos alguns Exemplos

Exemplo 5.1. *A igualdade* $p = 2^{2^n} + 1$ *definida para* $n \in \mathbb{N}$ *que segundo Fermat (1601-1665) representaria a fórmula de obtenção de números primos. Tal conclusão de Fermat foi tirada usando o procedimento acima, onde Fermat particularizou seu cálculo para cinco valores naturais de* n.
$n = 0 \Rightarrow p = 2^{2^0} + 1 = 3$;
$n = 1 \Rightarrow p = 2^{2^1} + 1 = 5$;
$n = 2 \Rightarrow p = 2^{2^2} + 1 = 17$;
$n = 3 \Rightarrow p = 2^{2^3} + 1 = 257$;
$n = 4 \Rightarrow p = 2^{2^4} + 1 = 65537$.

Como Fermat não tomou nenhuma precaução antes de garantir sua conclusão, em 1732, Leonhard Euler mostrou a não validade desta relação usando o contraexemplo para $n = 5 \Rightarrow p = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ *não era primo, pois pode ser escrito na forma* $641 \times 6.700.417$.

Exemplo 5.2. *Podemos sugerir a nossos alunos a expressão da forma* $f(n) = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-1000000)$ *que para substituição de certos valores inteiros positivos de* n *teríamos*
$n = 1 \Rightarrow f(1) = (1-1) \cdot (1-2) \cdot (1-3) \cdot \ldots \cdot (1-1000000) = 0$

$n = 2 \Rightarrow f(2) = (2-1)\cdot(2-2)\cdot(2-3)\cdot\ldots\cdot(2-1000000) = 0$
$n = 3 \Rightarrow f(3) = (3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-3)\cdot\ldots\cdot(3-1000000) = 0$
$n = 4 \Rightarrow f(4) = (4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)\cdot\ldots\cdot(4-1000000) = 0$
$n = 5 \Rightarrow f(5) = (5-1)\cdot(5-2)\cdot(5-3)\cdot\ldots\cdot(5-1000000) = 0$
$n = 6 \Rightarrow f(6) = (6-1)\cdot(6-2)\cdot(6-3)\cdot\ldots\cdot(6-1000000) = 0$
$n = 7 \Rightarrow f(7) = (7-1)\cdot(7-2)\cdot(7-3)\cdot\ldots\cdot(7-1000000) = 0$

Portanto levaria um leigo a pensar que $f(n) = 0$ *para qualquer inteiro positivo, mais é claro que tal expressão não teria a mesma validade, para* $n > 1000000$ *onde,* $f(n) \neq 0$.

A história explica que grandes filósofos de épocas condenavam veementemente sua prática dentre eles Francis Bacon (1561-1626), em que defende que a indução por enumeração simples é um método que leva a conclusões irrelevantes, uma vez que suas inferências não são seguras, já que admitem contradições. Outro fato marcante é narrado por Bertand Russel (1872-1970) que escreveu uma historinha onde chama a indução vulgar de indução galinácea quando diz:

> Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho ás galinhas. No primeiro dia, a galinha desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intensão de pô–la na panela. (A.Hefez, Elementos de Aritmética, página 10, Editora SBM, ano 2004).

Diante dos fatos anteriormente exemplificados achamos de extrema importância chamar a atenção de nossos estudantes no emprego da indução vulgar em suas conclusões pois, é bastante falha e limitada. Assim devemos incentiva–los a praticar demonstrações matemáticas antes de validar ou não uma afirmação. A seguir apresentamos um importante recurso de demonstração relacionada a propriedades que utilizam de números números naturais o qual chamamos de Princípio de Indução.

6 Números Naturais

Antes de descrevermos o Princípio de Indução como método de demonstração matemática de propriedades relacionadas a números naturais faremos uma exposição sem muito aprofundamento no campo dos números naturais por se tratar do primeiro conjunto numérico estruturado nas contagens de objetos bem como ser o único a possuir o modelo de demonstração por indução.

Este tipo de indução tem suas bases alicerçadas no conjunto dos números Naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, tal conjunto tem sua base em dois conceitos primitivos o de zero (denotaremos por 0) e o de sucessor de um número natural.

A ideia intuitiva de sucessor de um número natural n e simbolizada por $s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, caracteriza o número natural que vem imediatamente depois de n.

Assim temos a sequencia dos números naturais: $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$, $s(3) = 4$, etc. Agora vamos visualizar tal sequência usando flechas para indicar o sucessor.

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \xrightarrow{s} 5 \xrightarrow{s} \ldots$$

Note que nenhuma flecha aponta para 0, pois este número não é sucessor de nenhum outro.

Porém a descrição matemática do conjunto dos números naturais passou por várias fases desde o não formalismo matemático até o trabalho de Hermann Grassmann, que mostra na década de 1860 muitos fatos aritméticos sendo derivados de fatos mais básicos sobre operação de sucessor e indução. Em 1881, Charles Sanders Peicer, expôs uma forma de postular a aritmética dos números naturais. Em 1888, o matemático alemão Richard Dedekind propôs uma coleção de axiomas sobre os números, pórem é em 1889 na publicação do livro "Arithmetices Principia: Nova Methodo Expositiva" que um outro matemático de nome Giuseppe Peano (1858 - 1932), descreve de maneira completa o conjunto dos números naturais fazendo uso de quatro axiomas que levam o seu nome, axiomas de Peano, e finaliza assim como formaliza a idéia matemática dos números naturais. Os axiomas de Peano, são:

A_1) 0 (zero) é um número natural e não sucessor de nenhum número natural.

A_2) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

A_3) Se dois números naturais tem o mesmo sucessor, então eles são iguais entre si.

A_4) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $0 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

O quarto axioma (A_4) é também conhecido como axioma de Indução matemática.

6.1 Operações no Conjunto dos Números Naturais

Antes de descrevermos o Axioma de Indução para a sua utilização no Teorema que leva o nome de Princípio de Indução, é importante uma análise não tão formal, porém conceitualmente primitivo, de suas principais operações Adição e Multiplicação, para uma representação mais simplificada e completa dos Teoremas que se sucederão.

6.1.1 Adição

Chamaremos adição, que será denotada pelo sinal (+) de n com p, a representação $n + p$ da operação que permite a obter um número natural quando se aplica p vezes seguidas a atitude se tomar o sucessor a partir de n. Em particular, $n + 1$ é o sucessor de n, $n + 2$ é o sucessor do sucessor de n, e assim por diante.

6.1.2 Multiplicação

No caso do produto, definimos $n \cdot 1 = n$ e, quando $p \neq 1$, definimos $n \cdot p$ como a soma de p parcelas iguais a n. Entretanto estas duas operações só possuem sentido depois que definidas por Indução e a partir daí terá sentido falar em "p parcelas" e "p vezes".

6.2 Axioma de Indução

Considere um subconjunto S de $\mathbb{N}$ tal que

(i) $0 \in S$.

(ii) S é fechado com respeito de "somar 1" a seus elementos, ou seja, $\forall n, n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

Então, $S = \mathbb{N}$.

Vamos usar a notação abaixo para uma melhor conclusão lógica de demonstração do teorema do Princípio de Indução Finita.

Sendo A um subconjunto de $\mathbb{N}$ e a um elemento de $\mathbb{N}$, temos que:

$$a + A = \{a + x; x \in A\}.$$

Ou seja, de imediato que

$$A + \mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}; m \geqslant a\}.$$

Na descrição do Axioma de Indução segue então um importante veículo de demonstração de teoremas dos quais destacamos o Princípio de Indução Matemática e que será simplificado com o nome de Princípio de Indução.

6.3 Princípio de Indução Matemática

Teorema 16. *"Se $a \in \mathbb{N}$ e $p(n)$ é uma propriedade matemática de n, supondo que*

(i) $p(a)$ *é verdade, e que;*

(ii) $n \geqslant a$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ *é verdade, então,* $p(n)$ *é verdadeira para qualquer* $n \geqslant a$.

Demonstração. Consideremos n (um número natural), $P(n)$ (uma propriedade que é verdadeira para n) e os conjuntos $W = \{n \in \mathbb{N}; p(n) \text{ é verdade}\}$ e $X = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in W\}$. De imediato $a + X \subset W$.

Pela condição (i), se $m \in X$, sendo $m = 0$, então $a + 0 = a \in W$, segue–se $p(a)$ é verdade.

Por outro lado, se $m \in X$, então $a+m \in W$ e, pela condição (ii), temos que $a+m+1 \in W$; logo $m + 1 \in X$.

Assim, pelo Axioma de Indução, $X = \mathbb{N}$. Portanto, $\{m \in \mathbb{N}; m \geqslant a\} = a + \mathbb{N} \subset W$, prova o resultado. $\square$

Façamos uma descrição mais simples e clara sobre a importância deste princípio:

Supondo que se deseje demonstrar uma propriedade relacionada a número naturais $n \geqslant a$, onde simbolizaremos por $P(n)$, com $a \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar que $P(n)$ é válida para todo natural $n \geqslant a$, com $a \in \mathbb{N}$, devemos verificar a sua validade para $P(a)$, sendo verdadeira, devemos em seguida mostrar que $P(n)$ é válida para um natural $n \geqslant a$, então $P(n+1)$ é também válida, ou seja, vamos supor que $P(n)$ seja válida para todo natural $n \geqslant 1$. De fato, sendo $P(1)$ válida, $P(2) = P(1+1)$ é válida.

Como $P(2)$ é válida, resulta que $P(3) = P(2+1)$ ser válida. Sendo $P(3)$ é válida, resulta que $P(4) = P(3+1)$ ser válida e assim opor diante.

É interessante observar que a propriedade só começa a ser válida a partir de um certo número natural, ou seja, não tem a obrigatoriedade de começar de 0 ou de 1, como na propriedade $P(n) : 2^n > n^2$, observa–se que sua validade ocorre a partir dos números naturais $n = 5$.

Abaixo descrevemos alguns exemplos de demonstrações pelo Princípio de Indução.

Exemplo 6.1. *Demonstre a validade da propriedade* $P(n) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, *sendo* $r \neq 0$.

Demonstração. **i)** Verificar a validade $P(1)$

$$P(1) = 1 + r = \frac{1 - r^{1+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r.$$

ii) Por hipótese, suponha a validade de $P(n)$

$$P(n) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

iii) Queremos demonstrar a validade de $P(n+1)$. De fato temos que:

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n + r^{n+1} \\
&= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} \\
&= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.2. *Demonstre a validade da desigualdade* $P(n) = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$*, se* $x \geqslant -1$*, também chamada de Desigualdade de Bernoulli.*

Demonstração. **i)** Verificar a validade $P(1)$.

$$P(1) = (1+x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x = 1 + x.$$

ii) Por hipótese, suponha a validade de $P(n)$ para $n \geqslant 1$.

$$P(n) = (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

iii) Queremos demonstrar a validade de $P(n+1)$

$$P(n+1) = (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Por hipótese $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, Se $x \geqslant -1$, então $(1+x) \geqslant 0$, portanto se multiplicarmos os membros da desigualdade da hipótese por $(1+x)$ obtemos

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot(1+x)^n &\geqslant (1+x)(1+nx)\\ &= 1 + nx + x + nx^2\\ &= 1 + (n+1)x + nx^2\\ &\geqslant 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

já que $nx^2 \geqslant 0$ para todo x.

□

Figura 3: Jacques Bernoulli (1645 – 1705)

Jacques Bernoulli (1645 – 1705), membro de uma família na qual, por gerações, nasceram renomados cientistas. Os Bernoulli foi a família que mais produziu eminentes matemáticos em toda História - Fonte: http://www.learnmath.info/portugal/historyDetail.htm?id\=Bernoulli_Johann.

Exemplo 6.3. *Prove, por indução, que* $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leqslant n$ *para todo* $n \geqslant 3$ *e conclua daí que a sequência* $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ *é decrescente a partir do terceiro termo.*

Demonstração. Sabemos que $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 < 2$. Ignorando isto, mostremos por indução que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$ para $n \geqslant 3$. Indicando a desigualdade acima por $P(n) : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$, para n natural e $n \geqslant 3$.

(i) Verificar a validade $n = 3$.

$$\left(\frac{3+1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3,$$

logo é verdadeira.

(ii) Por hipótese, suponha a validade de $P(n)$ para $n \geqslant 3$.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$$

(iii) Queremos demonstrar a validade de $P(n+1)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^1 \\ &< \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^1 \\ &< \frac{n(n+2)}{n+1} \\ &< \frac{n(n+1)}{n}. \end{aligned}$$

Assim demonstramos por indução que a propriedade é verdadeira para todo número natural $n \geqslant 3$.

Escrevendo $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$ sob a forma $(n+1)^n < n^{n+1}$ vemos que $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ para $n \geqslant 3$. Logo $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ é decrescente a partir do 3° termo.

□

A seguir foram retiradas do livro Um convite à Matemática de autoria Daniel Cordeiro de Morais Freitas da editora SBM algumas observações sobre o Princípio de Indução:

(i) Nem todos os resultados envolvendo números podem ou devem ser provados por indução. Eis um exemplo: A soma de um número ímpar com um número par, ambos positivos, é um número ímpar.

(ii) Use o Princípio de Indução com prudência. Seria um desperdício de esforço utilizá–lo para provar, por exemplo, que um número da forma $8n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, é impar! (Por quê).

(iii) O Princípio de Indução é um método para demonstrar uma propriedade que envolve números naturais, não para descobrir qualquer propriedade.

(iv) Já observou que o Princípio de Indução é um método de demonstração interessante, pois com apenas dois passos é possível provar a validade de um resultado para uma infinidade de casos?

(iv) Como apresentado o Princípio de Indução decorre da construção axiomática dos números naturais (Axioma de Peano).

7 Geometria Euclidiana

Dentre vários povos remotos que se destacaram na matemática citamos Babilônios e Egípcios, principalmente nas áreas da álgebra e da geometria devido suas necessidades práticas, porém não há tinham como uma ciência organizada.

Figura 4: Mapa da Grécia - Fonte: http://phylos.net/imagens/artigos/historia_matematica/MapaGrecia.png.

O grande número de ilhas e a geografia do continente, em forma de península, acabaram por facilitar a expansão do comércio marítimo com os povos da costa do Mediterrâneo e, com isto, a busca por tecnologia e integração cultural entre os povos da região, os europeus ao norte e os asiáticos a leste.

Apesar de todo conhecimento da época a matemática se notabilizou com o status de ciência, no sentido contemporâneo da palavra, por volta dos séculos VI e V a.C, na Grécia.

A matemática grega se diferenciou das anteriores pelo enfoque, sem a preocupação de suas aplicações práticas e levando em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade.

Isso levou os Gregos a desenvolverem o método axiomático – dedutivo, que consiste em admitir certas proposições como verdadeiras(mais ou menos evidentes) e, por meio de um encandeamento lógico, chegar a proposições mais gerais.

Talvez as dificuldades com que os gregos depararam ao estudar problemas relativos a infinitos, com números irracionais, os desviaram da álgebra , encaminhando–os para geometria.

E é na geometria que os gregos se destacam culminando com a obra de Euclides, intitulada “Os Elementos” em 300 a.C.

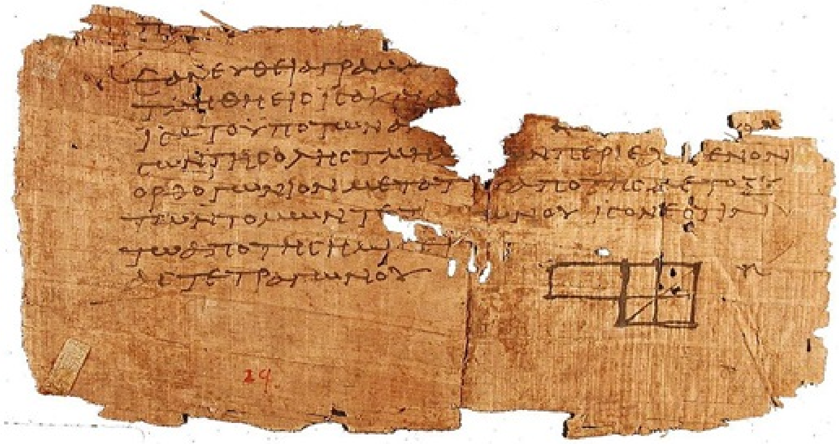


Figura 5: Um fragmento dos Elementos encontrado no final do século XIX em Oxyrhynchus, datado de cerca de 100 d.C. - Fonte: http://images.slideplayer.com.br/8/2299277/slides/slide_17.jpg.

A obra de Euclides era um livro texto composto por treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre teoria dos números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensurabilidade e os três últimos sobre geometria no espaço.

Além do sucesso do livro Elementos pela apresentação lógica da maior parte do conhecimento matemático disponível para Euclides, este livro é uma referência no sentido de trazer um primeiro texto com uma teoria axiomática.

Chamamos a Geometria apresentada no livro Elementos de Geometria Euclidiana que possui os elementos básicos: o ponto, a reta e o plano, onde os dois primeiros são nomeados por letras minúsculas e maiúsculas do alfabeto latino, respectivamente, enquanto que o plano é representados por letras gregas.

Os elementos básicos são denominados por Euclides de “entes primitivos”, pois segundo ele não possuem definição e junto a eles Euclides menciona cinco “noções comuns”, as quais parecem aceitas como hipóteses fundamentais a todas as ciências, e mais cinco axiomas (ou postulados) fundamentais, os quais seriam hipóteses peculiares da Geometria Euclidiana.

As cinco noções comuns são:

- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.

- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
- O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os cinco axiomas são:

(i) Por dois pontos quaisquer podemos traçar uma única reta.

(ii) Todo segmento de reta pode ser prolongado em uma reta.

(iii) Dados um ponto e um segmento tendo tal ponto por extremidade, existe um círculo que tem centro no ponto dado e raio igual ao segmento dado.

(iv) Todos os ângulos retos são iguais.

(v) É verdade que, se uma reta, ao cortar duas outras, formando ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar–se–ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

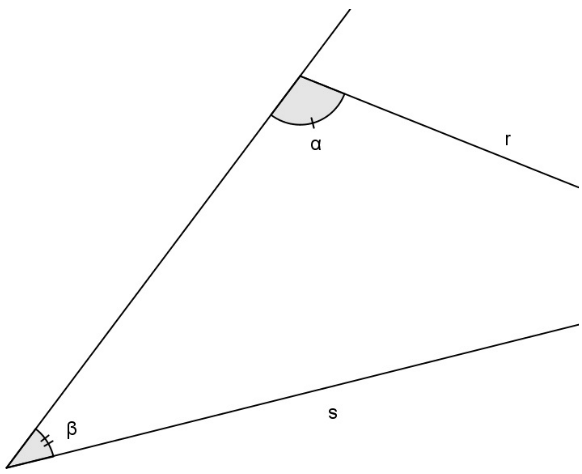


Figura 6: Diagrama que representa o 5º Postulado de Euclides.

Em 1795, o enunciado do quinto postulado de Euclides foi substituído por outro, equivalente, chamado hoje de postulado das paralelas. Tal formulação é devida a **Playfair**: "Por um ponto fora de uma reta pode–se traçar uma única paralela à reta dada." Todavia, esse postulado já havia sido considerado por **Proclus** em sua obra comentários sobre o primeiro livro dos elementos de Euclides.

Lembramos que a discussões de tal postulado levaram vários matemáticos a criação de uma nova geometria conhecida como não Euclidiana e que tem contribuído bastante para o desenvolvimento não só da Matemática mais também em outras áreas tais como o da Física Moderna.

A seguir, apresentaremos a congruência de triângulos que se destaca como uma grande ferramenta de demonstração na geometria Euclidiana.

7.1 Congruência de Triângulos

A ideia de congruência entre segmentos, ângulos e triângulos formou–se intuitivamente, levando–se em conta que dois segmentos congruentes, dois ângulos congruentes e dois triângulos congruentes podem ser superpostos por meio de um deslocamento conveniente.

Este deslocamento pode ocorrer de várias maneiras tais como translação, rotação ou mesmo simetria.

O conceito abstrato de congruência entre triângulos é definido da seguinte maneira:

Definição 7.1. *Dois triângulos são denominados congruentes se tem ordenadamente congruente os três lados e os três ângulos.*

Exemplo 7.1. *Os triângulos ABC e EFG são congruentes.*

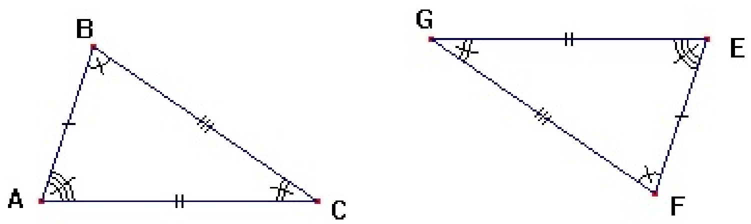


Figura 7: Congruência de Triângulos

Indicamos: $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$ se: $\begin{cases} AB &= EF \\ BC &= FG \\ AC &= EG \end{cases}$ e $\begin{cases} \widehat{A} &= \widehat{E} \\ \widehat{B} &= \widehat{F} \\ \widehat{C} &= \widehat{G} \end{cases}$

Daí escrevemos:

Congruências correspondentes entre ângulos e lados

$$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle FEG; \quad \measuredangle CBA \equiv \measuredangle GFE; \quad \measuredangle ACB \equiv \measuredangle EGF.$$

$$\mathsf{AB} \equiv \mathsf{EF}; \quad \mathsf{BC} \equiv \mathsf{GF}; \quad \mathsf{AC} \equiv \mathsf{GE}.$$

Medidas de ângulos e lados correspondentes

$$\widehat{\mathsf{A}} = \widehat{\mathsf{E}}; \quad \widehat{\mathsf{B}} = \widehat{\mathsf{F}}; \quad \widehat{\mathsf{C}} = \widehat{\mathsf{G}}.$$

$$\overline{\mathsf{AB}} = \overline{\mathsf{EF}}; \quad \overline{\mathsf{BC}} = \overline{\mathsf{GF}}; \quad \overline{\mathsf{AC}} = \overline{\mathsf{GE}}.$$

A congruência de triângulos é uma relação de equivalência no conjunto de todos os triângulos no plano, neste sentido, destacamos as seguintes propriedades:

(i) Reflexiva: $\triangle\mathsf{ABC} \equiv \triangle\mathsf{ABC}$ (imediato);

(ii) Simétrica: $\triangle\mathsf{ABC} \equiv \triangle\mathsf{DEF}$,então $\triangle\mathsf{DEF} \equiv \triangle\mathsf{ABC}$, pode ser constatada se realizamos um movimento, sem deformar, levando o $\triangle\mathsf{ABC}$ coincidir com o $\triangle\mathsf{DEF}$ e logo após realizamos um movimento contrário fazendo $\triangle\mathsf{DEF}$ coincidir com o $\triangle\mathsf{ABC}$.

(iii) Transitiva: se o $\triangle\mathsf{ABC} \equiv \triangle\mathsf{DEF}$ e $\triangle\mathsf{DEF} \equiv \triangle\mathsf{HIJ}$, então $\triangle\mathsf{ABC} \equiv \triangle\mathsf{HIJ}$, se movimentamos o $\triangle\mathsf{ABC}$ até coincidir com o $\triangle\mathsf{HIJ}$ por etapas; primeiro levando $\triangle\mathsf{ABC}$ a coincidir com o $\triangle\mathsf{DEF}$ e depois o movemos até que coincida com o $\triangle\mathsf{HIJ}$.

7.2 Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá seis condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. Estas condições são denominadas casos ou critérios de congruência.

1º Caso: Axioma (LAL)

Sejam $\Delta\mathsf{ABC}$ e $\Delta\mathsf{DEF}$ dois triângulos. Se $\mathsf{AB} = \mathsf{DE}$, $\mathsf{AC} = \mathsf{DF}$ e $\widehat{\mathsf{A}} = \widehat{\mathsf{D}}$; então $\Delta\mathsf{ABC} \equiv \Delta\mathsf{DEF}$:

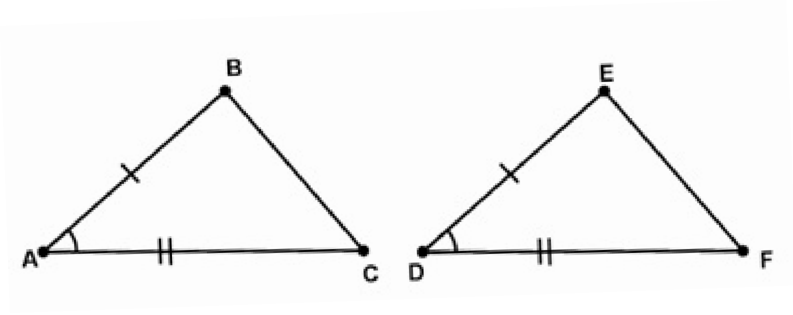


Figura 8: 1º Caso de Congruência

2º Caso: Teorema (ALA)

Dados dois triângulos ΔABC e ΔDEF com $AB = DE$; $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{A}$; então $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$:

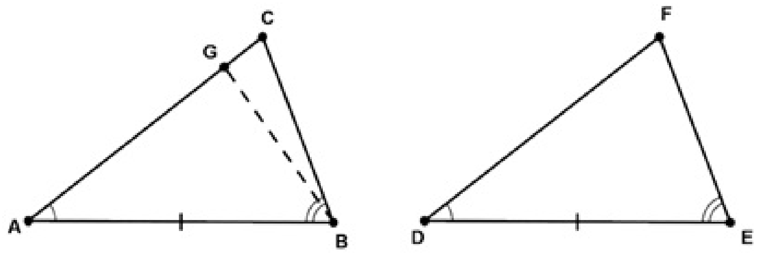


Figura 9: 2º Caso de Congruência

Demonstração. Sabemos que existe um ponto G na semi–reta $\overrightarrow{AC}$ tal que $AG = DF$, (ver Figura 9). Por construção, temos que os triângulos ΔABG e ΔDEF satisfazem $AG = DF$; $AB = DE$ e $\widehat{A} = \widehat{D}$: Pelo Axioma de Congruência 1, obtemos que $\Delta ABG = \Delta DEF$. Pela definição de congruência de triângulos, segue que $A\widehat{B}G = \widehat{E} = A\widehat{B}C$. Logo, as semi–retas $\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{BC}$ coincidem. Isto implica que G coincide com o ponto C: Então $\Delta ABC = \Delta ABG = \Delta DEF$. □

3º Caso: Teorema (LLL)

Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

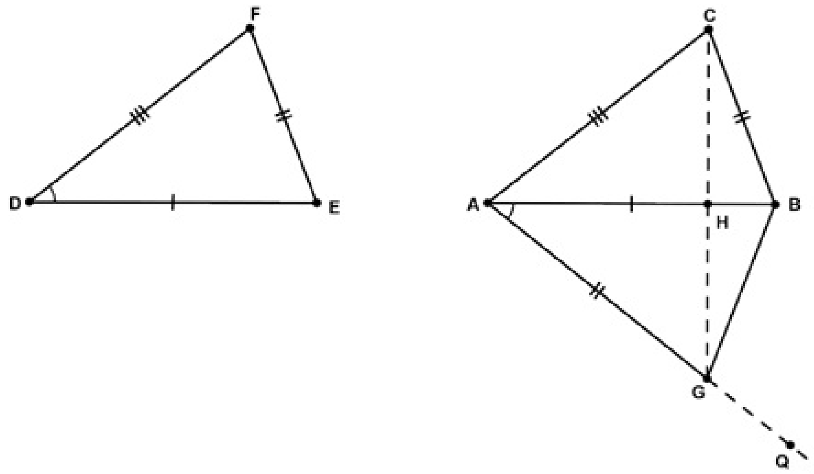


Figura 10: 3º Caso de Congruência

Demonstração. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos tais que $AB = DE$; $BC = EF$ e $AC = DF$: A ideia da prova é construir um triângulo ΔAGC, com o ponto G no lado oposto da reta que contém DB; tal que $\Delta AGC \equiv \Delta DEF$: Então mostraremos que $\Delta ABC \equiv \Delta AGC$:

- Passo 1: Pelo Axioma de Medição de Ângulo, existe uma semi–reta $\overrightarrow{AQ}$ no semi–plano oposto ao que contém C; tal que $B\widehat{A}Q = \widehat{D}$;
- Passo 2: Na semi–reta $\overrightarrow{AQ}$ tome um ponto G tal que $AG = DF$:
- Passo 3: Pelo 1 caso de congruência de triângulos, segue que $AGB = DEF$;
- Passo 4: O segmento CG intercepta AB no ponto H; pois estão em lados opostos;
- Passo 5: Note que $AG = DF = AC$: Assim, o triângulo ΔACG é isósceles e então $A\widehat{G}C = A\widehat{C}G$;
- Passo 6: Da mesma forma, concluímos que o triângulo ΔBCG é isósceles com $B\widehat{C}G = B\widehat{G}C$;
- Passo 7: Porém,

$$\begin{aligned} A\widehat{G}B &= A\widehat{G}C + C\widehat{G}B \\ &= A\widehat{C}G + G\widehat{C}B \\ &= A\widehat{C}B. \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o Axioma de Congruência 1 para concluir que $\Delta ACB \equiv \Delta AGB$: Mas como $\Delta AGB \equiv \Delta DFE$; segue que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. □

4º Caso: Teorema (LAA_0)

Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente a este lado e um ângulo oposto a este mesmo lado respectivamente iguais, então são congruentes.

Exemplo ilustrativo

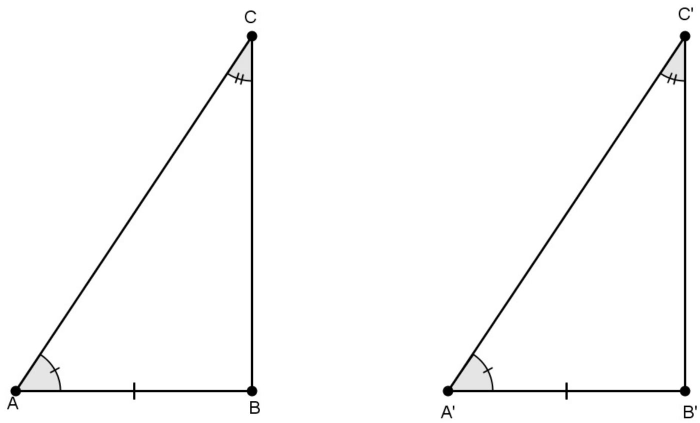


Figura 11: 4º Caso de Congruência

Descrição matemática

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{AB} & = & \overline{A'B'} \\ \widehat{A} & = & \widehat{A'} \\ \widehat{C} & = & \widehat{C'} \end{array}\right. \overset{LAA_0}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Demonstração. Considere os triângulos anteriores, por hipótese a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$, assim temos $\widehat{B} = 180° - \widehat{A} - \widehat{C} = 180° - \widehat{A'} - \widehat{C'} = \widehat{B'}$, logo os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo teorema ALA ($\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$) e assim concluímos que o $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. □

5º Caso: Teorema (C.H.)

Se dois triângulos retângulos possuem cateto e hipotenusa respectivamente iguais, então são congruentes.

Exemplo ilustrativo

Descrição matemática

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{AB} & = & \overline{XY} \\ \overline{AC} & = & \overline{XZ} \quad \text{(HIPOTENUSA)} \\ \widehat{B} & = & \widehat{Y} = 90^{\circ} \end{array}\right. \overset{C.H.}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle XYZ$$

Demonstração. Como os triângulos dados são por hipóteses retângulos em A e Y, além de $\overline{AB} = \overline{XY}$ (CATETO) e $\overline{AC} = \overline{XZ}$ (HIPOTENUSA), concluímos pelo

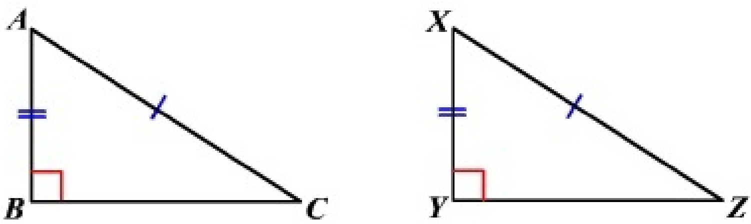


Figura 12: 5º Caso de Congruência

teorema de Pitágoras que

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 - (\overline{AB})^2 = (\overline{XZ})^2 - (\overline{YZ})^2 = (\overline{YZ})^2$$

logo, $\overline{BC} = \overline{YZ}$. E pelo caso LLL teremos $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$. $\square$

8 Aplicações da Congruência de Triângulos

Exemplo 8.1. *Prove que se um triângulo* ABC *é isósceles de base* AB*, então* $\widehat{\mathsf{A}} = \widehat{\mathsf{B}}$ *(tem ângulos das bases iguais).*

Demonstração. Considere o triângulo ABC (Figura 13), por hipótese se $\overline{\mathsf{AB}}$ é a base, temos que $\overline{\mathsf{AC}} = \overline{\mathsf{BC}}$. Trançando pelo ponto C a mediana CM, logo os triângulos ACM e BCM são congruentes pelo caso LLL, assim concluímos que $\widehat{\mathsf{A}} = \widehat{\mathsf{B}}$. $\square$

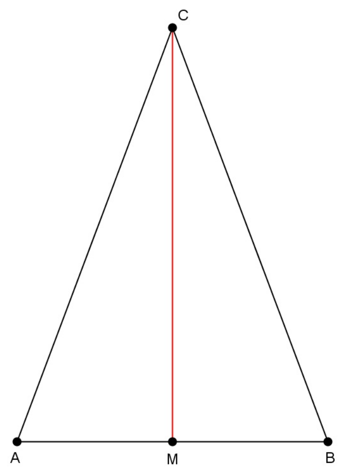


Figura 13: Exemplo 8.1

Exemplo 8.2. *Prove que num triângulo isósceles a mediana relativa à base é também altura e bissetriz.*

Demonstração. Considere o triângulo ABC (Figura 14), por hipótese se $\overline{\mathsf{AB}}$ é a base, temos que $\overline{\mathsf{AC}} = \overline{\mathsf{BC}}$. Trançando pelo ponto C a mediana CM, logo os triângulos ACM e BCM são congruentes pelo caso LLL, assim $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{M}}\mathsf{C} = \mathsf{B}\widehat{\mathsf{M}}\mathsf{C}$, como são suplementares decorre que $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{M}}\mathsf{C} = \mathsf{B}\widehat{\mathsf{M}}\mathsf{C} = 90°$, portanto o segmento CM é perpendicular a AB, logo representa sua altura.

Ainda nos triângulos congruentes ACM e BCM os ângulos $A\widehat{C}M = B\widehat{C}M$ e como $A\widehat{C}M + B\widehat{C}M = \widehat{C}$, então conclui–se que CM é uma bissetriz, e mostramos que o segmento CM é mediana, altura e bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles.

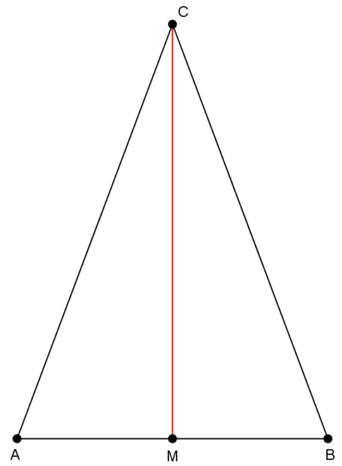


Figura 14: Exemplo 8.2

$\square$

Exemplo 8.3. *Prove que num triângulo retângulo* ABC*, a mediana* BM *relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa* AC*.*

Demonstração. Considere no triângulo ABC, retângulo em B (Figura 15), e um ponto D obtido pelo prolongamento da mediana BM tal que $BM = MD$. Os triângulos AMB e CMD são congruentes, pelo caso LAL ($\overline{BM} = \overline{MD}$, $A\widehat{M}B = C\widehat{M}D$ (OPV), $\overline{AM} = \overline{MC}$). Daí, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $B\widehat{A}M = D\widehat{C}M$, ou seja, AB e CD são segmentos iguais e paralelos e portanto

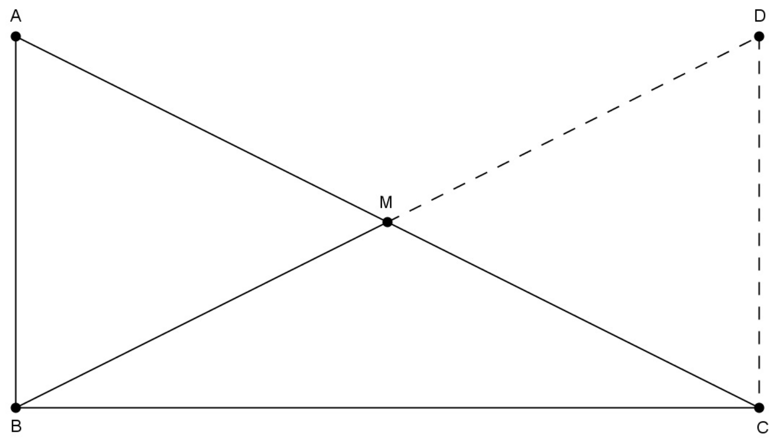


Figura 15: Exemplo 8.3

$$A\widehat{B}C = D\widehat{C}B = 90°$$

Assim, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso LAL, e portanto

$$BD = AC \Rightarrow 2 \cdot BM = AC \Rightarrow BM = \frac{AC}{2}.$$

□

Exemplo 8.4. *Prove que a bissetriz de um ângulo é um conjunto de pontos equidistantes dos lados deste ângulo.*

Demonstração. Observe o ângulo $A\widehat{C}B$ de bissetriz $\overrightarrow{CP}$ (Figura 16), assim por hipótese temos que $A\widehat{C}P = B\widehat{C}P$ e considere os pontos A e B os pés da perpendicular em $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, respectivamente, assim os triângulos CAP e CBP são congruentes pelo caso LAA_0, pois $\overline{AC} = \overline{BC}$, $A\widehat{C}P = B\widehat{C}P$ e $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, logo concluímos que $\overline{AP} = \overline{PB}$.

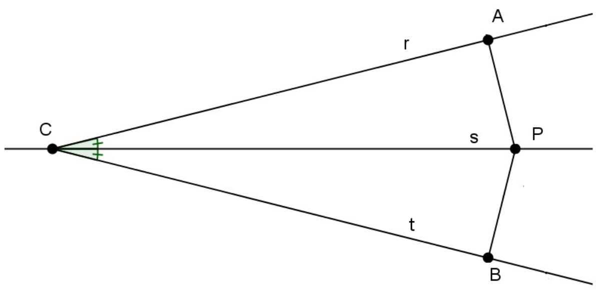


Figura 16: Exemplo 8.4

□

Exemplo 8.5. *Prove que as bissetrizes internas de triângulo passam pelo mesmo ponto.*

Demonstração. Considerando um triângulo ABC e por hipótese tracemos duas bissetrizes internas relativas aos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ que se intersectam no ponto I, assim $d(I, AB) = d(I, AC)$, pois pertence a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, e $d(I, AB) = d(I, BC)$, pois pertence a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$, logo, $d(I, AC) = d(I, BC)$ e neste caso I equidista dos lados BC e AC, concluímos então que I pertence a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.

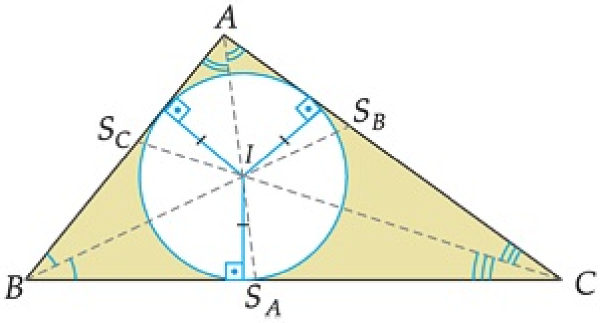


Figura 17: Exemplo 8.5

□

Exemplo 8.6. *Prove que a mediatriz de um segmento de reta é um conjunto de pontos equidistantes dos extremos deste segmento.*

Demonstração. Considere, por hipótese, um segmento de reta AB e sua mediatriz m tomando um ponto qualquer $\mathsf{X} \in \mathsf{m}$, formamos os triângulos AMX e BMX que são congruentes pelo caso LAL ($\overline{\mathsf{AM}} = \overline{\mathsf{MB}}$, $\widehat{\mathsf{M}} = \widehat{\mathsf{M}}$ e $\overline{\mathsf{MX}} = \overline{\mathsf{MX}}$), logo $\overline{\mathsf{AX}} = \overline{\mathsf{BX}}$.

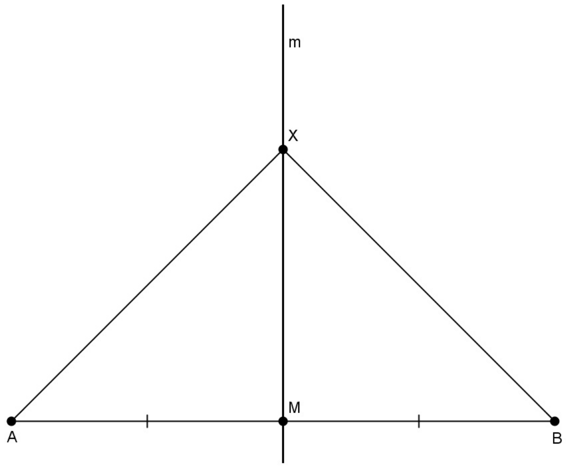


Figura 18: Exemplo 8.6

□

Exemplo 8.7. *Prove que as mediatrizes dos lados de um triângulo passam pelo mesmo ponto.*

Demonstração. No triângulo ABC (Figura 19), temos por hipótese as mediatrizes FG, EG e DG, respectivamente, dos lados AC, BC e AB, e G o ponto de intersecção das retas EG e FG.

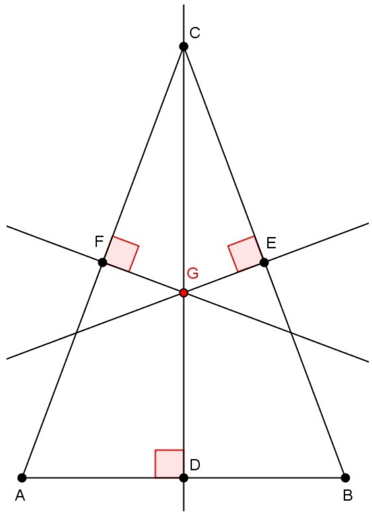


Figura 19: Exemplo 8.7

Pela propriedade da equidistância dos extremos temos que $\overline{BG} = \overline{CG}$ ($G \in$ mediatriz EG) e $\overline{AG} = \overline{GC}$ ($G \in$ mediatriz FG). Portanto $\overline{BG} = \overline{AG}$ e $G \in$ mediatriz DG. $\square$

Exemplo 8.8. *Prove que em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Considere um triângulo ABC, abaixo, e pelo ponto médio do lado AC que chamaremos de M, prolongue a semirreta $\overrightarrow{BM}$ até um ponto B' tal que $\overline{BM} = \overline{B'M}$, e tome os triângulos ABM e $CB'M$ que são congruentes pelo caso LAL ($\overline{BM} = \overline{B'M}$, $\widehat{M} = \widehat{M}$ (OPV) e $\overline{AM} = \overline{MC}$). Assim $B'\widehat{C}M = B\widehat{A}M$, logo

$$X\widehat{C}A = X\widehat{C}B + B'\widehat{C}M = X\widehat{C}B + B\widehat{A}M > B\widehat{A}M = B\widehat{A}C.$$

Analogamente, prova–se que $X\widehat{C}A > A\widehat{B}C$.

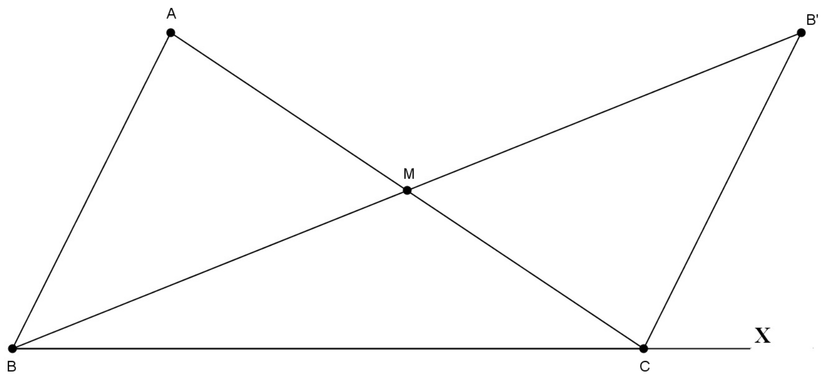


Figura 20: Exemplo 8.8

$\square$

Exemplo 8.9. *Prove que em um triângulo* ABC*, sendo* M *e* N *os pontos médios dos lados* AB *e* AC*, respectivamente, obtemos um triângulo* AMN *com* $\mathsf{MN} \parallel \mathsf{BC}$ *e* $\mathsf{MN} = \dfrac{\mathsf{BC}}{2}$.

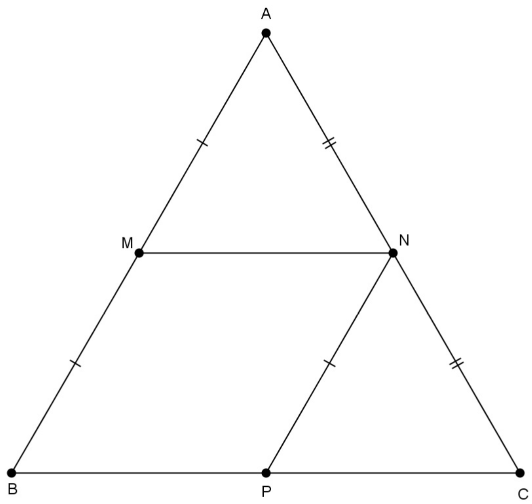


Figura 21: Exemplo 8.9

Demonstração. Por hipótese temos que $\mathsf{AM} = \mathsf{MB}$ e $\mathsf{NA} = \mathsf{NC}$, pois M e N são médios. Tracemos pelo ponto N uma semirreta de reta $\overrightarrow{\mathsf{NP}}$ de modo que seja paralelo ao lado AB.

Assim obtemos $\mathsf{AM} = \mathsf{NP}$, $\mathsf{M\widehat{A}N} = \mathsf{P\widehat{N}C}$ (correspondente) e $\mathsf{NA} = \mathsf{NC}$, logo os triângulos AMN e NPC são congruentes, $\mathsf{N\widehat{P}C} = \mathsf{A\widehat{M}N} = \mathsf{A\widehat{B}C}$, ou seja MBPN é um paralelogramo.

Daí concluímos que $\mathsf{BP} \parallel \mathsf{MN} \parallel \mathsf{BC}$ e $\mathsf{BP} = \mathsf{MN} = \mathsf{PC}$, desta maneira

$$\mathsf{BP} + \mathsf{PC} = \mathsf{BC} \Longrightarrow \mathsf{MN} + \mathsf{MN} = \mathsf{BC} \Longrightarrow \mathsf{MN} = \frac{\mathsf{BC}}{2}.$$

$\square$

Considerações Finais

Demonstrar propriedades matemáticas é o grande laboratório desta ciência e portanto é uma das principais ferramentas que permite ao estudante compreender e manipular certas informações abstratas por mais simples que sejam.

Não há dúvidas de que após os gregos, precursores do método axiomático, a Matemática teve um crescimento bem mais significante, trazendo como consequência verdadeiros desenvolvimentos e dentre eles o tecnológico. Devemos provocar a curiosidade de nossos alunos, sempre que possível, descrevendo demonstrações de conhecimentos matemáticos estudados para que possam compreendê–la e dominá-la com mais confiança.

Grande prova disso são as Olimpíadas de Matemática, pois incentivam o aluno a demonstrar a saída de dado problema provocando nele um despertar traduzido em bons desempenhos nesta ciência, mais ainda é pouco, é necessário que todos trabalhem juntos e sincronizados a fim de exigir de nossos governantes melhorias em nossas educações básica e superior.

Assim para se chegar a uma razoável descrição demonstrativa de conhecimentos matemáticos é necessário que o aluno tenha ao longo de seus estudos conhecimentos de outras ferramentas como lógica da matemática, indução, axiomas, definições matemáticas, enfim uma série de conhecimentos e incentivo que darão uma melhor clareza e organização de conhecimentos matemáticos.

Referências

[1] ANDRADE, E. C. DE - *Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração.* 2011. 150p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

[2] *BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.BRASIL,

[3] CAMPELO, ALEXANDRE FRANCISCO - *A Desigualdade Triangular e a Desigualdade de Jensen.* Fortaleza 2013, Dissertação de mestrado. www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/5784.

[4] COSTA, CECÍLIA & PEDRO TADEU - *A demonstração nos programas de Matemática*: Uma análise transversal, disponível em: www.spce.org.pt/sem/Montegordo. Acesso 06 de abril de 2010.

[5] FILHO, DANIEL CORDEIRO DE MORAIS - *Um Convite á Matemática.* 1ª edição – Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Professor de Matemática; 23).

[6] GEQUELIM, HUGO FELIPE (Bolsista PICME/CNPq) - *Axiomas de Peano e os Números Naturais.* Departamento Acadêmico de Matemática Campus Sede Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR Avenida Sete de Setembro, 3165 - Curitiba-PR, Brasil - CEP 80230-901 hugogequelim@hotmail.com, ronie@utfpr.edu.br

[7] HAUSEN, RODRIGO – *Bases Matemáticas Aula 2* - Métodos de Demonstração D.Sc. In Computer Science, UFRJ, 2007. Full-time Professor at CMCC, UFABC. http://compscinet.org/hausen/courses/bm/aulas/aula2.pdf.

[8] HEFEZ, Abramo - *Elementos de Aritmética.* 2 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006. iv, 169.

[9] LIMA, ELON LAGES - *A matemática do ensino médio–volume 1* Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgato. –10 ed. – Rio de Janeiro: SBM 2012.

[10] LIMA, ELON LAGES - *Conceituação, Manipulação e Aplicações, As três componentes do ensino de matemática*, PRM 3º quadrimestre, 1999.

[11] LIMA, ELON LAGES - *O Princípio da Indução* – Nível Avançado./SPM, 2014. http://www.ime.unicamp.br/~lramos/me100/elonOBM.pdf.

[12] LOUREIRO & BASTOS - *Demonstração - uma questão polêmica*, 2002.

[13] MANFIO, FERNANDO - *Fundamentos da Geometria.* Fernando Manfio. ICMC - USP www.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf.

[14] MOCROSKY, LUCIANE FERREIRA; BAUMANN, ANA PAULA P.; MONDINI, FABIANE - *Um ensaio sobre demonstrações geométricas na Educação Básica, I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia* - 2009 ISBN, p. 1177. Disponível em: MOREIRA, P. C. e DAVID, M. M. M. S. A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar, disponível em: www.scielo.br/pdf. Acesso 8 de abril 2010.

[15] PARENTE, PROF. Ms. JOÃO BATISTA ALVES - *Disciplina: Fundamentos da Geometria Euclidana.* UFPB VIRTUAL. Site do curso www.mat.ufpb.br/ead - parente@mat.ufpb.br

[16] PEDRO, J. FREITAS - *Departamento de Matemática e Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias da Universidade de Lisboa* – pjfreitas@fc.ul.pt Encontro ProfMat 2011. ptmat.fc.ul.pt/~pedro/pdfs/Dem_ProfMat.pdf.

[17] PÓLYA, G. - *A arte de Resolver Problemas, Um Novo aspecto do Método Matemático.* Livraria Interciência Ltda.(1997).