UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RENAN EDUARDO NARDELLI

O ESTUDO DE SIMETRIAS COM FRISOS E QUESTÕES DA OBMEP

SÃO CARLOS
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RENAN EDUARDO NARDELLI

O ESTUDO DE SIMETRIAS COM FRISOS E QUESTÕES DA OBMEP

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientação:
Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

SÃO CARLOS
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N223e

Nardelli, Renan Eduardo
O estudo de simetrias com frisos e questões da OBMEP / Renan Eduardo Nardelli. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
60 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Transformações geométricas. 2. Frisos. 3. Simetria. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Renan Eduardo Nardelli, realizada em 21/08/2015:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

Prof. Dr. Silvia Cristina Martini Rodrigues
UMC

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
UFSCar

Em especial, à minha esposa e à minha família que me deram suporte durante esse período.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me proporcionar um momento de aperfeiçoamento em meus estudos.

Agradeço à minha família e à minha esposa pela paciência e por suportarem as ausências nos sábados.

Agradeço aos professores e amigos do PROFMAT que procuraram sempre nos ajudar nos momentos mais difíceis dessa etapa.

Agradeço aos alunos e à escola por terem auxiliado no desenvolvimento deste projeto.

Agradeço ao meu orientador por ter me ajudado a desenvolver o trabalho final.

RESUMO

Este trabalho aborda questões que envolvem transformações geométricas e frisos para o estudo de simetrias. A intenção principal foi a de apresentar aos alunos do nono ano de uma escola pública do interior paulista atividades com o intuito de enriquecê-los cientificamente e culturalmente, aguçando-lhes a curiosidade e o espírito crítico. Para isto, foi desenvolvida uma série de atividades ligadas ao tema simetria: inicialmente os alunos resolveram questões de uma folha atividade diagnóstica sobre os movimentos de translação, reflexão e rotação no plano, seguido da apresentação de *slides* sobre esses mesmos assuntos. Em continuidade, assistiram a um vídeo sobre o palácio da Alhambra na Espanha para motivá-los ao estudo das simetrias em frisos decorativos. Os alunos resolveram vários problemas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) que envolvem situações simétricas e terminaram o trabalho construindo os sete tipos de padrões de frisos. A análise dessas soluções é apresentada com vistas a verificar se houve uma contribuição na aprendizagem das transformações geométricas ligadas às simetrias. Esta análise é fundamentada na experiência do pesquisador e também em depoimentos dos alunos participantes.

Palavras-chave: Transformações Geométricas. Frisos. Simetria.

ABSTRACT

This work handles topics involving geometric transformations and friezes for the study of symmetry. It aimed to present students from the Ninth Grade of a public school in São Paulo State activities, in order to enrich them scientifically, culturally; sharpening their curiosity and critical reasoning. For this, a series of activities related to the theme symmetry was developed: first of all, students solved questions on a diagnosing sheet of paper about translation, reflection and rotation movements on the plan, followed by a slide presentation of these same topics. Then, they watched a video about Alhambra Palace in Spain to motivate them to study the symmetries in decorative friezes. Students solved various problems of OBMEP involving symmetrical situations and they ended up the work building seven patterns of friezes. The analysis of these solutions is presented in order to verify whether there was a contribution to the learning of geometric transformations related to symmetries. Such analysis is based on the researcher's experience and also on testimonials from the participants.

Keywords: Geometric Transformations. Friezes. Symmetry.

Sumário

Capítulo 1 - INTRODUÇÃO

Sou graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos desde 2009. Durante a graduação, fiz iniciação cientifica na área de topologia sob supervisão do Prof. Dr. Edvaldo Lopes dos Santos, sendo bolsista do programa “Recém Doutor”. Além disso, também fui monitor para turmas de Engenharia na disciplina denominada Cálculo 3, reforçando assim minha vontade em lecionar.

Quando era estudante, ainda no Ensino Fundamental II, mais precisamente na antiga 7ª série, por gostar muito dos conteúdos matemáticos, procurava ajudar meus colegas que tinham mais dificuldades com tal matéria. Foi a partir desse fato, por gostar bastante de Matemática e também de ajudar meus colegas a superar suas dificuldades, que cogitei a ideia de ser professor de Matemática. No Ensino Médio, essa vontade cresceu e optei então por fazer graduação em Matemática, para conseguir seguir a profissão escolhida.

Ao me formar, trabalhei em uma escola estadual na cidade de São Carlos como professor de duas salas regulares do Ensino Fundamental II e também como professor de apoio para os demais anos do mesmo ciclo. Durante esse período tive algumas dificuldades, principalmente relacionadas ao período de adaptação como professor, pois percebi o quão difícil era me colocar no lugar de docente e não mais de discente. O fato mais interessante dessa experiência inicial foi ter ajudado aqueles alunos que tinham mais dificuldades na disciplina e, mais especificamente na parte relacionada à Geometria.

Logo após essa experiência inicial em sala de aula, tornei-me professor titular de cargo em uma escola de minha cidade natal, Araras, onde estudei todo o Ensino Fundamental e o primeiro ano do Ensino Médio. Faz cinco anos que leciono nessa escola, sendo que nos dois primeiros anos trabalhei apenas com Ensino Médio e os outros três anos, com os anos finais do Ensino Fundamental II.

Devido ao fato de lecionar a mais tempo no Ensino Fundamental II, percebi que algumas dificuldades dos alunos se repetiram ano após ano, sendo elas, em sua maioria, relacionadas aos conteúdos de Geometria. Dessa maneira, ao ingressar no mestrado e ter a oportunidade de desenvolver um trabalho diferenciado para a composição da dissertação, resolvi desenvolver um trabalho voltado para os alunos dos nonos anos que abordasse simetrias, já que esse foi um tópico diagnosticado como sendo mal entendido pelos alunos.

Como docente, enfrentei algumas dificuldades ao longo de minha carreira, sendo algumas delas mais comuns, como por exemplo, a indisciplina na sala de aula e o desinteresse por parte dos alunos, em especial com a parte relacionada à Geometria; talvez por não conseguirem perceber a beleza e a aplicabilidade da mesma, tornando esse conteúdo um dos tópicos mais complicados de abordar com os alunos.

Pensando nas dificuldades elencadas e tentando encontrar uma maneira de melhorar a aprendizagem dos meus alunos, e quem sabe dos demais estudantes, decidi trabalhar de modo diferenciado as questões envolvendo as transformações geométricas isométricas, isso para que eles conseguissem identificar suas combinações e enxergá-las em frisos, como uma forma de aplicabilidade.

Este trabalho tem a seguinte pergunta diretriz:

"Será que, ao desenvolver atividades diferenciadas em sala de aula (apoiadas em materiais concretos, desenhos e vídeos), há uma efetiva contribuição na aprendizagem das transformações geométricas associadas às simetrias?"

Para auxiliar na resposta da pergunta de pesquisa, vale colocar uma breve apresentação sobre os aspectos gerais e históricos de simetria.

Simetria é um conceito chave em Matemática com aplicações em diferentes áreas, como por exemplo, na Física, Química, Arquitetura, entre outras.

Na Grécia Antiga, simetria tinha um único significado: proporcionalidade, podendo esta ser relacionadas à medida comum ou na apreciação da beleza mostrando a proporção adequada da arquitetura. Já o conceito moderno de simetria refere-se a uma relação lógico-matemática sob certa classe de transformações que deixam algo inalterado. (PASQUINI, BORTOLOSSI, 2015)

De acordo com Legendre (1794 apud Pasquini, Bortolossi, 2015), simetria tornou-se uma relação entre dois sólidos independentemente de suas posições no espaço. A partir dessa definição, a simetria tornou-se um conceito muito utilizado no domínio das ciências (principalmente no estudo de estruturas atômicas, em Cristalografia, e no estudo da formação de moléculas, em Biologia, para citar alguns exemplos).

Organização do trabalho

Este trabalho é composto por cinco capítulos, sendo eles: introdução; estudo da teoria sobre frisos; descrição das atividades desenvolvidas; dinâmica da sala de aula e análise dos dados e, por último a conclusão.

No capítulo 2 abordo a teoria dos frisos tendo como base o livro texto de Rousseau e Saint–Aubin (2008).

Além da apresentação dessa teoria, será abordada uma possível relação entre a teoria e a experiência em sala de aula.

O capítulo 3 contempla as atividades desenvolvidas em sala de aula, sendo elas uma sondagem inicial com questões básicas envolvendo as transformações geométricas isométricas e o trabalho com questões da Olímpiada Brasileira de Matemáticas das Escolas Públicas (OBMEP), envolvendo simetrias.

No capítulo 4 trago os dados levantados a partir das questões trabalhadas e como aconteceu a dinâmica em sala de aula.

No capítulo 5 abordo os depoimentos e registros dos alunos compondo assim a análise dos dados, que norteiam a resposta da pergunta diretriz e ainda, nesse último capítulo, termino com a conclusão sobre o trabalho desenvolvido, de modo a responder afirmativamente a pergunta de pesquisa formulada acima.

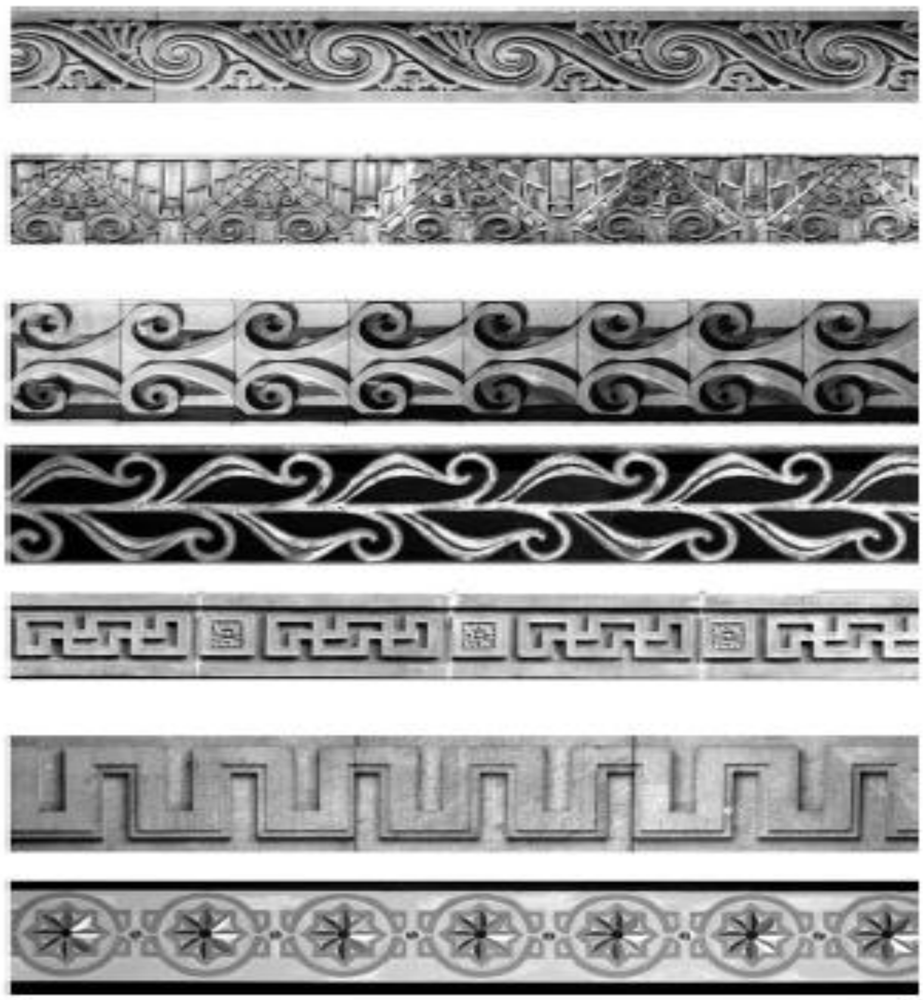
CAPÍTULO 2 – CLASSIFICAÇÃO DOS FRISOS

Este capítulo é baseado na teoria apresentada por Christiane Rousseau e Yvan Saint-Aubin (2008) que se relaciona ao estudo de frisos. Recentemente este livro foi traduzido, em parte, na coleção PROFMAT.

Os frisos têm sido utilizados em decorações por muito tempo, principalmente pelas civilizações suméria, egípcia e maia. Uma atividade matemática comum é a classificação de objetos e é isso que faremos com os frisos.

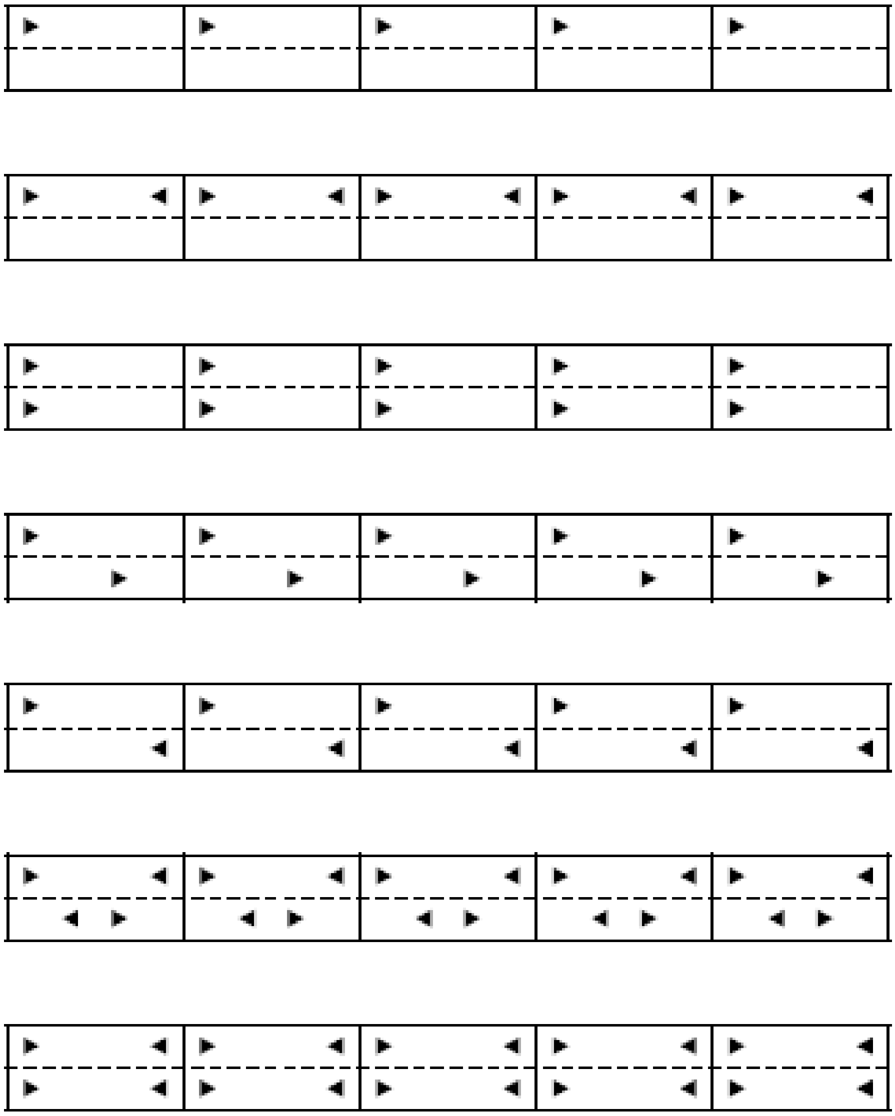
As figuras a seguir servem para nos auxiliar nesta classificação.

Figura 1 - Sete frisos



Fonte: Rousseau e Saint-Aubin (2008, p. 46)

Figura 2 - Sete frisos simplificados.



Fonte: Rousseau e Saint-Aubin (2008, p. 47)

Definição: Um friso:

(i) tem largura constante e finita (a altura dos frisos) e é infinitamente longo na direção perpendicular;

(ii) é periódico, significando que existe uma distância mínima L > 0 tal que uma translação do friso à distância L, ao longo da direção na qual é infinito o deixará fixo. O comprimento L é chamado o período do friso.

Podemos notar que alguns desses frisos são invariantes sob várias transformações geométricas.

Uma operação de simetria do friso ou uma simetria é uma transformação geométrica que mantém um friso invariante.

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema da Classificação de Grupos de Frisos. Este Teorema mostra que existem apenas sete grupos e a demonstração é feita no final deste capítulo. Aqui, apenas enunciaremos o Teorema.

Teorema da Classificação de Grupos de Frisos: O grupo de simetria de qualquer friso é um entre os seguintes sete grupos:

1.$\langle t_L \rangle$

2. $\langle t_L, r_v \rangle$

3. $\langle t_L, r_h \rangle$

4. $\langle t_L, t_{L/2} r_h \rangle$

5. $\langle t_L, r_h r_v \rangle$

6. $\langle t_L, t_{L/2} r_h, r_h r_v \rangle$

7. $\langle t_L, r_h, r_v \rangle$

Cada um dos grupos acima é descrito pelos seus geradores e estão na mesma ordem das Figuras 1 e 2.

Para a demonstração do Teorema acima ser feita, precisamos analisar as operações de simetria com suas propriedades e alguns resultados sobre grupo e transformações afins.

Analisando as figura 1 e 2, temos que as primeiras operações de simetria, chamadas também de geradores, encontradas são: translação, reflexão horizontal e reflexão vertical e denotam-se por t_L, r_h e r_v, respectivamente.

Outro gerador que encontramos nos frisos das figuras 1 e 2 é a rotação e tem como notação $r_h r_v$ que representa uma composição de operações.

Proposição:

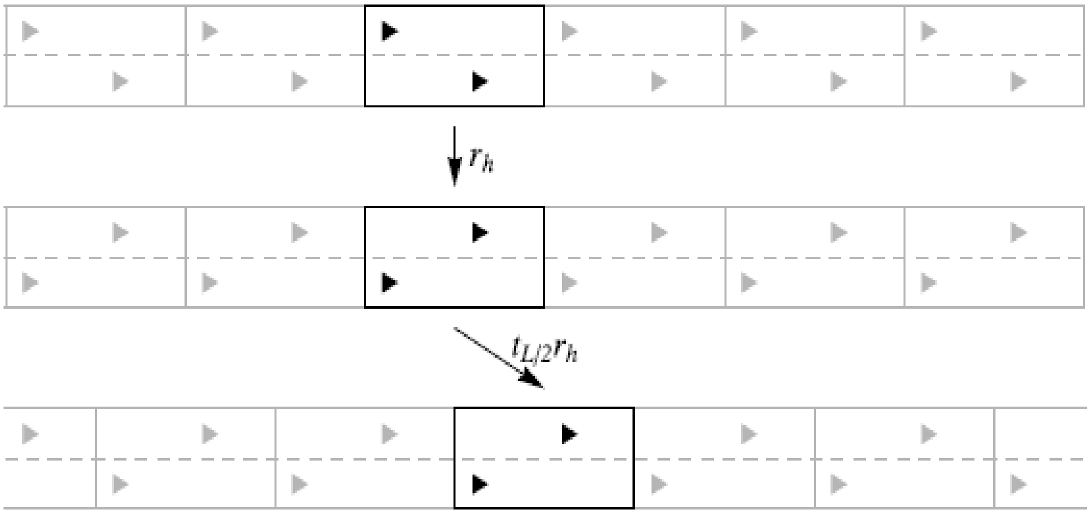
1) As operações r_h e r_v comutam, isto é, as duas composições $r_h r_v$ e $r_v r_h$ são iguais.

2) A inversa de r_h é o r_h, a de r_v é o r_v, e a de $r_h r_v$ é $r_h r_v$.

3) A composição de r_h com $r_h r_v$ resulta em r_v. A de r_v com $r_h r_v$ resulta em r_h. (Isto nos permite concluir que um friso que tem quaisquer duas das três operações r_h, r_v, $r_h r_v$ como simetrias, terá automaticamente a terceira.)

Continuando com a análise das operações de simetria, temos a simetria de reflexão deslizante. Essa operação também é uma composição de operações e é denotada por $s_g = t_{L/2} r_h$. A figura 3 ilustra essa operação de simetria.

Figura 3 - Uma reflexão deslizante.



Fonte: Rousseau e Saint-Aubin (2008, p. 51)

Com isso, a lista de possíveis geradores contém as cinco operações citadas acima.

A seguir segue algumas definições e resultados importantes sobre grupo de simetria e transformações afins.

Definição: Uma transformação afim no plano é uma função do $R^2 \rightarrow R^2$ da forma $(x,y) \longmapsto (x', y')$, onde

$$x' = ax + by + p,$$

$$y' = cx + dy + q.$$

Uma transformação afim é chamada própria se ela for bijetiva.

A transformação acima pode ser escrita na forma de matriz da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Definição: Um conjunto E munido com uma operação E x E → E é um grupo se satisfaz as seguintes propriedades:

1. associatividade: (ab)c = a(bc), ∀ a,b,c ∈ E;
2. existência do elemento identidade: existe um elemento e ∈ E tal que ea = ae = a, ∀ a ∈ E.
3. existência de inversos: ∀ a ∈ E, existe b ∈ E tal que ab = ba = e.

O inverso de um elemento a é denotado por a^{-1}.

Proposição: O conjunto de matrizes representando transformações afins próprias forma um grupo sob multiplicação de matrizes. O conjunto de transformações afins próprias também forma um grupo sob a composição. Este último é chamado de grupo afim.

Definição: Uma isometria do plano é uma função T: R^2 → R^2 que preserva comprimentos. Assim, se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos, então a distância entre eles é igual a distância entre as imagens $T(x_1, y_1)$ e $T(x_2, y_2)$.

Definição: Uma isometria de um friso é uma isometria que aplica o friso nele mesmo.

Lema 1: Seja a isometria representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

uma simetria de um friso. Então, o bloco 2 x 2 é uma das quatro matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ r_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ r_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } r_h r_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definição: O grupo de simetrias de um friso é o grupo de todas as isometrias que deixam um friso invariante.

Lema 2: O grupo de simetrias de qualquer friso de período L contém as translações

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & nL \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \in Z.$$

Estas são as únicas translações que aparecem no grupo de simetria.

Lema 3: Considere as isometrias da forma $\begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde t é não nulo. Ao redefinirmos a origem, é possível reduzir qualquer destas transformações a uma das formas

$$(i)\ \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & nL \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & L/2+nL \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } (iii)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & L/2+nL \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $n \in Z$ e A é uma das quatro matrizes permitidas pelo Lema 1. A forma (iii) pode ocorrer somente se a rotação $r_h r_v$ for também uma simetria.

Definição: Sejam {a, b, ..., c} um subconjunto do grupo G. Este conjunto é um conjunto de geradores para G, e então escrevemos G = $\langle a, b, \ldots, c \rangle$, se o conjunto de todas as composições de um número finito de elementos de {a, b, ..., c} e de suas inversas é G.

Para finalizar este capítulo, realizaremos a demonstração do Teorema da Classificação de Grupos de Frisos.

Teorema da Classificação de Grupos de Frisos: O grupo de simetria de qualquer friso é um entre os seguintes sete grupos:

1. $\langle t_L \rangle$
2. $\langle t_L, r_v \rangle$
3. $\langle t_L, r_h \rangle$
4. $\langle t_L, t_{L/2} r_h \rangle$
5. $\langle t_L, r_h r_v \rangle$
6. $\langle t_L, t_{L/2} r_h, r_h r_v \rangle$
7. $\langle t_L, r_h, r_v \rangle$

Cada um destes grupos é descrito por seu conjunto de geradores, e estão apresentados na mesma ordem dos frisos nas figuras 1 e 2.

Demonstração: Seja t_L a translação por uma distância L ao longo do eixo horizontal. Todos os grupos contêm translações por múltiplos inteiros de L, o período do friso, e a lista de geradores deve conter t_L. Através de uma escolha adequada para a origem, existem outros geradores dos grupos de simetria que são as transformações lineares denotados por A = r_h, r_v ou $r_h r_v$ e a reflexão deslizante s_g permitido pelo Lema 3. Note que se um grupo de simetria contém dois entre r_h, r_v ou $r_h r_v$, então o grupo vai conter os três automaticamente. A lista de todas as possíveis combinações de geradores consiste, portanto, nos sete dados no enunciado do teorema, assim como

8. $\langle t_L, t_{L/2}r_h, r_h\rangle$
9. $\langle t_L, t_{L/2}r_h, r_v\rangle$
10. $\langle t_L, t_{L/2}r_h, r_h, r_v\rangle$

Descreveremos o argumento de que nos obriga a rejeitar o caso 8. A presença de $s_g = t_{L/2}r_h$ e r_h implica que o grupo deve conter também o seu produto $(t_{L/2}r_h)r_h = t_{L/2}(r_h)^2 = t_{L/2}$, que é uma translação de período L/2. (dado que $(r_h)^2$ = Id). Isto contraria o fato do friso ser periódico com um período mínimo de L, e, portanto, esse conjunto deve ser descartado.

Para o caso 9, note que o produto de s_g por e r_v é da forma $t_{L/2}r_h r_v$ discutida no Lema 3. Através de uma translação da origem (a = L/4), esse produto pode ser reescrito na forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Um simples cálculo mostra que os geradores t_Le s_g não se alteram sob esta translação, mas que r_v se torna s_g. Então, o subgrupo 9 é descrito pelos geradores $\langle t_L, t_{L/2}r_h, t_{L/2}r_v, r_h r_v\rangle$. Três desses geradores pertencem ao grupo 6, enquanto que o quarto ($t_{L/2}r_v$) é o produto de $t_{L/2}r_h$ por $r_v r_h$. Logo, o caso 9 é igual ao caso 6 e esse deve ser rejeitado.

Finalmente, o caso 10 contém os mesmos geradores do caso 8 e pode ser eliminado pela mesma razão.

Logo, o grupo de simetrias de qualquer friso deve estar entre os sete grupos listados. Existe alguma redundância nesta lista? Não, e com a ajuda da figura 2 nos convencemos deste fato. O argumento completo é um pouco entediante, e, portanto, vamos limitar-nos ao friso 4, cujo grupo de simetria estava determinado pelos geradores $\langle t_L, s_g \rangle$. Primeiramente, observe que os dois geradores t_L e s_g são ambos simetrias deste friso. Os geradores do grupo devem, portanto, ser um subgrupo do grupo de simetria de fato desse friso. Podemos acrescentar quaisquer outros geradores para esses dois? Uma rápida inspeção mostra que não existe tal possibilidade dentre as possibilidades restantes r_h, r_v, $r_h r_v$. Assim, $\langle t_L, s_g \rangle$ é de fato o grupo de simetrias completo do friso 4. Finalmente, como o grupo 1 é distinto do 4 e os cinco grupos restantes contêm, cada um, pelo menos, um de r_h, r_v, e $r_h r_v$ cujo grupo 4 não tem, então o grupo 4 é distinto dos outros seis. Repetindo esse argumento para cada um dos frisos restantes e grupos de simetria restantes, mostramos que a lista esta completa e não contém nenhuma redundância. ■

CAPÍTULO 3 – CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS E PEDAGÓGICAS ACERCA DO CONCEITO DE SIMETRIA

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações metodológicas e pedagógicas sobre o conceito de simetria, sendo elas pautadas na análise dos PCN e da Proposta Curricular do Estado de São Paulo e, uma ideia sobre Engenharia Didática.

3.1 – PCN e a Proposta do Estado de São Paulo

Analisando os PCN (1997) e segundo Pasquini e Bortolossi (2015, p. 85), o conceito de simetria é introduzido a partir do segundo ciclo, sendo utilizado “como um instrumento para identificar, reconhecer e descrever formas geométricas”. Para tal são utilizadas as percepções de semelhanças entre figuras bidimensionais ou tridimensionais e a quantidade de eixos de simetria de uma figura plana.

Para o terceiro e quarto ciclos, o conceito de simetria não aparece explicitamente em seus objetivos, mas é utilizado intuitivamente em outros assuntos, tais como, congruência de figuras planas e homotetias, já que, ao fazer relação a esses temas, os alunos recorrem às ideias de translação, rotação e reflexão.

Ao ingressarem no Ensino Médio, o conceito de simetria aparece como um tema complementar, sendo ampliado para as outras áreas além da Matemática. Como forma de finalização, os PCN sugerem que os assuntos já trabalhados nos terceiro e quarto ciclos sejam aprofundados, mas não explicita como esses conteúdos deveriam ser abordados, deixando claro somente o foco proposto por eles.

Passando a analisar a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, somente a parte referente ao Ensino Fundamental II, são trazidos trechos em que aparece simetria ou algum derivado como uma habilidade.

A primeira habilidade encontrada que se refere ao tema de estudo está presente no 3º bimestre do 6º ano sendo apresentada como: “Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares." (PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2012, p.58)

No 2º bimestre do 7º ano, a habilidade envolvendo o conceito simetria é: "Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia." (PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2012, p.59)

Vale explicitar que os conteúdos congruência de figuras planas e homotetia embora apareçam nos PCN como sendo uma forma de empregabilidade do conceito de simetria, esses mesmo conteúdos não são propostos diretamente para o Ensino Fundamental II, de acordo com a Proposta Curricular.

Por outro lado, ao analisar o conteúdo sobre Teorema de Pitágoras pode-se dizer que o emprego de congruência de figuras planas e consequentemente de simetrias é utilizado em uma das várias demonstrações desse Teorema.

3.2 – Engenharia Didática

A Engenharia Didática recebe esse nome porque tenta relacionar a atividade de um engenheiro com a de um pesquisador que atua na área de ensino. Esse termo foi criado pela educadora Michèle Artigue na década de 80.

Tentando comparar o educador e o engenheiro, pensando na Engenharia Didática, há alguns tipos de ponderações a serem feitas, principalmente entre o conhecimento que ambos possuem, e os problemas práticos que os mesmos enfrentam, pois, assim como o engenheiro, o pesquisador nem sempre consegue solucionar algumas questões somente com suas teorias.

Para entender um pouco sobre Engenharia Didática é necessário, inicialmente, compreender que a mesma pode ser estudada de duas maneiras diferentes, sendo elas como: uma metodologia de pesquisa fundamentada em experiências de sala de aula, ou uma proposta de ensino diferenciada tomando como base a pesquisa realizada a priori (CEMIN, 2008).

Considerando as duas ideias supracitadas, é possível dizer que uma pesquisa desenvolvida fora do ambiente escolar, dificilmente será fonte de aprendizagem e de possíveis mudanças no ensino. Assim, a Engenharia Didática é muito utilizada quando não há uma teoria para se basear na resolução do problema, servindo principalmente para criar uma nova teoria, reinventar ou até mesmo ampliar alguma teoria pré-existente.

A Engenharia Didática busca satisfazer a necessidade de um grupo de pessoas, não almeja encontrar ou desenvolver um método infalível de ensino que seja aplicável a todas as situações (CEMIN, 2008).

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática apresenta algumas fases, sendo elas:

1) análises prévias – Conhecimentos previamente adquiridos sobre o assunto;

2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática – Delimitação dos pontos pertinentes sobre os quais a pesquisa se relaciona;

3) implementação da experiência – Aplicação das atividades propostas visando atingir os objetivos;

4) análise a posteriori e validação da experiência – Análise dos dados obtidos por meio de produções, registros e depoimentos dos alunos e, para o término dessa análise busca-se a validação ou não da hipótese realizada a priori.

Nos próximos capítulos são apresentadas as fases da Engenharia Didática, sendo que como análise prévia, sobressai a falta de conhecimentos avançados que os alunos têm sobre as simetrias.

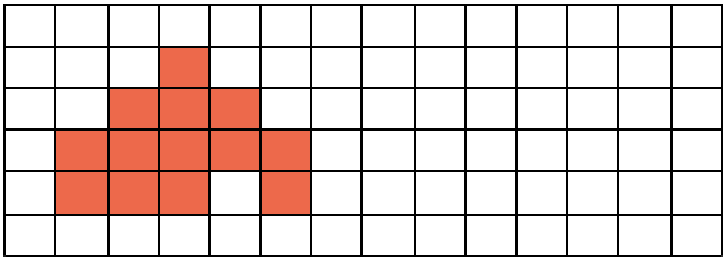
CAPÍTULO 4 – QUESTÕES SOBRE SIMETRIA

Este capítulo aborda as questões que foram desenvolvidas com os alunos sobre simetria, utilizando-se folhas atividades previamente elaboradas pelo professor.

Para o desenvolvimento desse trabalho, foram utilizadas algumas questões básicas sobre simetria. Foram 4 as questões trabalhadas. As mesmas tinham o intuito de identificar o conhecimento que os alunos possuíam sobre as principais transformações geométricas isométricas, ou seja, translação, rotação e reflexão. Vale ressaltar que essa atividade foi desenvolvida sem a intervenção do professor.

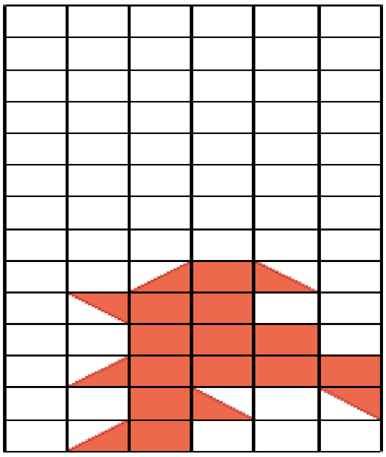
No primeiro exercício, os alunos deveriam aplicar o movimento de translação em cada figura apresentada. O exercício continha as figuras abaixo.

Figura 4 – Item a do 1º exercício



Fonte: Apostila COC (p. 69)

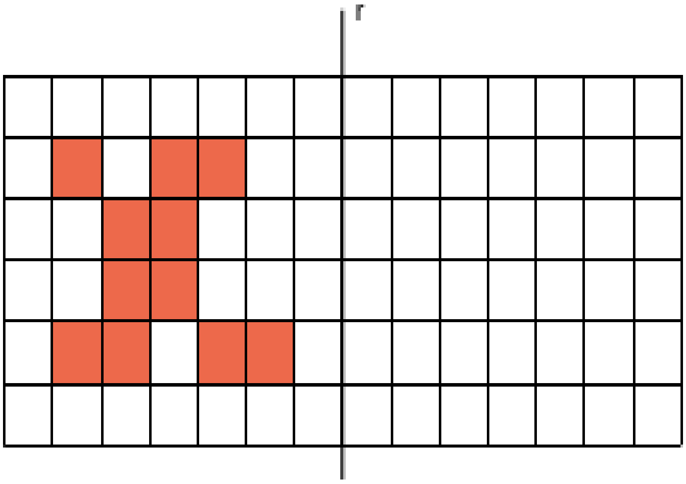
Figura 5 – Item b do 1º exercício



Fonte: Apostila COC (p. 69)

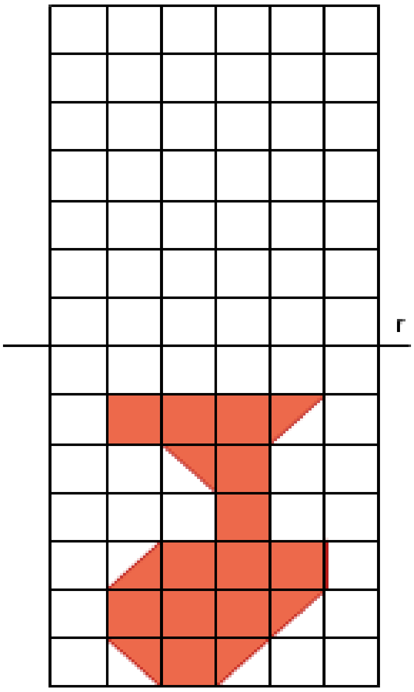
No segundo exercício, os alunos teriam que aplicar o movimento de reflexão, tanto na horizontal, quanto na vertical, como mostra as figuras a seguir.

Figura 6 – Item a do 2º exercício



Fonte: Apostila COC (p. 68)

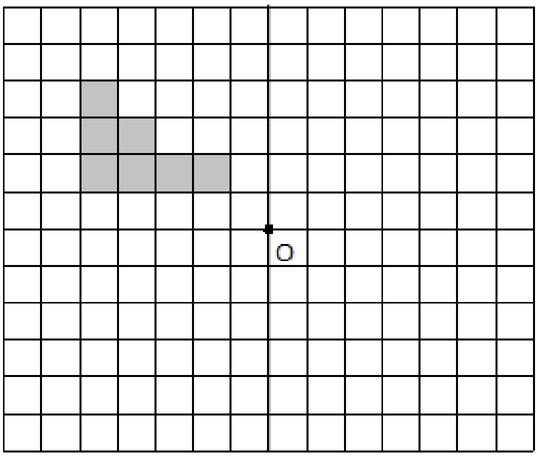
Figura 7 – Item b do 2º exercício



Fonte: Apostila COC (p. 68)

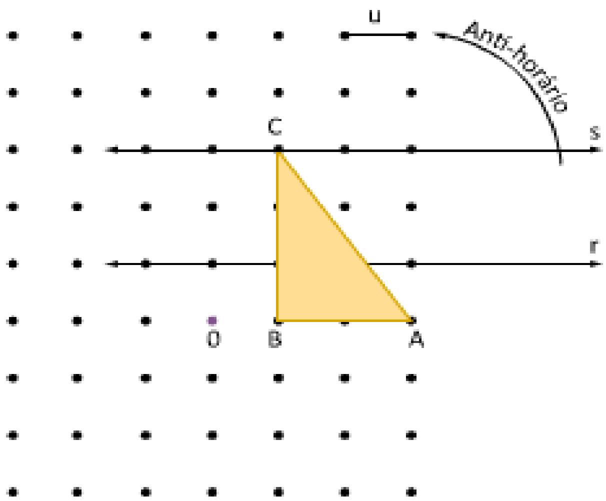
Os exercícios três e quatro da folha atividade tratavam da rotação, sendo uma delas no sentido horário de 180º e uma no sentido anti-horário de 90º. Assim como nas figuras apresentadas abaixo.

Figura 8 – Exercício 3



Fonte: Apostila COC (p. 70)

Figura 9 – Exercício 4



Fonte: Apostila COC (p. 71)

Além dessas questões iniciais, foi preparada uma apresentação em *slide* sobre os temas abordados com muitas figuras para conseguir ilustrar como esses movimentos aconteciam. Além das transformações geométricas acima, a apresentação também abordava o conceito de reflexão deslizante.

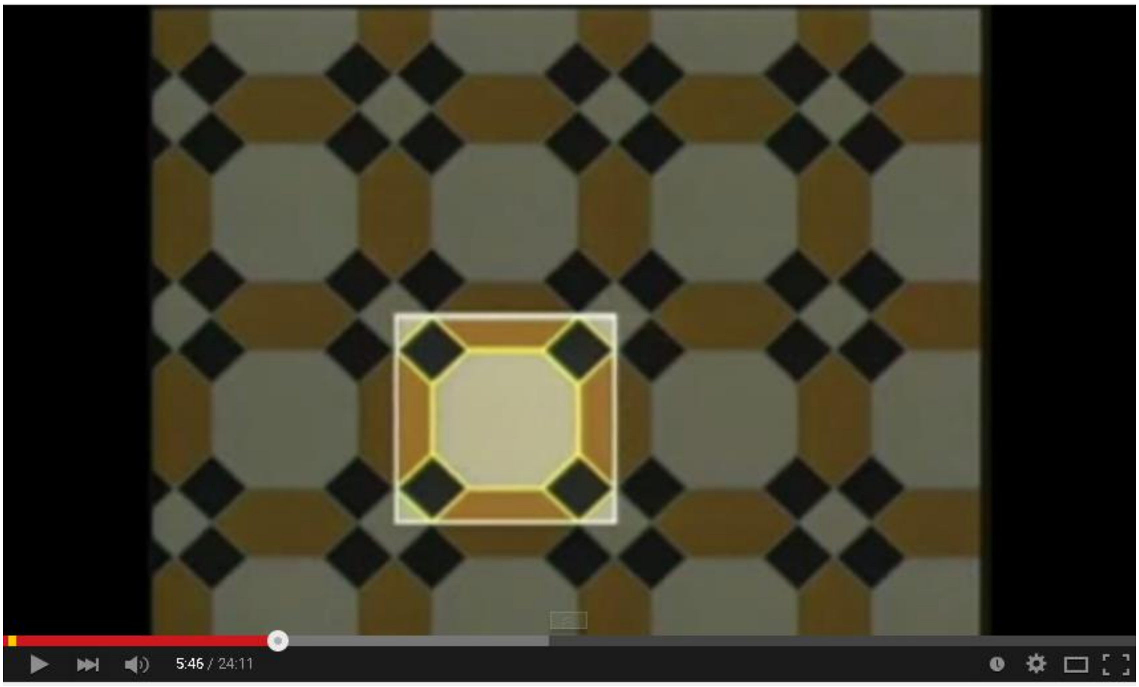
Também foi preparada uma folha com questões da OBMEP relacionada à simetria, já que para os alunos tais questões são sempre vistas como ‘impossíveis’ de serem resolvidas. E, ao fazer isso, eles se sentiriam mais confiantes para então acompanhar o conceito de friso. As questões da OBMEP utilizadas nesse trabalho estão disponíveis no site www.obmeb.org.br e também nos anexos.

Antes de realizarmos a atividade dos frisos, assistimos a um vídeo do *youtube* chamado “Os azulejos de Alhambra”.

Alhambra é um palácio localizado em Granada na Espanha e é uma atração devido à sua decoração.

Esse vídeo tinha o objetivo de mostrar a beleza existente nos azulejos desse lugar, os padrões encontrados nos próprios azulejos, a relação entre Matemática e Arte e ao mesmo tempo tentar despertar nos alunos o interesse pelo tema. A figura 11 ilustra uma das imagens presentes nesse vídeo.

Figura 10 –Vídeo



Fonte: Youtube

A última atividade desenvolvida foi relacionada aos frisos. Nessa atividade os alunos teriam que tentar reproduzir os sete tipos de frisos existentes e já estudados em sala de aula. Para a realização de tais atividades foi dado a eles apenas uma figura inicial, a qual teria que utilizar para fazer a composição de todos os frisos que conseguissem.

As figuras dadas foram triângulos retângulos e outra peça no formato de um L.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo é abordada a dinâmica desenvolvida em sala de aula referente a este trabalho, ou seja, há uma descrição sobre como se deu a aplicação das atividades propostas e também algumas respostas dos alunos. Além de expor as respostas dos alunos, é feita uma discussão sobre as mesmas.

Para o desenvolvimento das atividades foram utilizadas sete aulas com duração de 50 minutos cada para cada sala, sendo estas distribuídas ao longo de duas semanas e, divididas da seguinte maneira: duas aulas para uma atividade de investigação sobre o que os alunos conheciam do tema; duas aulas para o desenvolvimento de questões (relacionadas ao tema) contidas na OBMEP; uma aula para apresentação de um vídeo sobre simetria e frisos e discussão do mesmo e, por último, duas aulas para construção dos sete tipos de frisos existentes. Vale explicitar que as atividades ocorreram simultaneamente com os três nonos anos da escola onde a pesquisa foi desenvolvida.

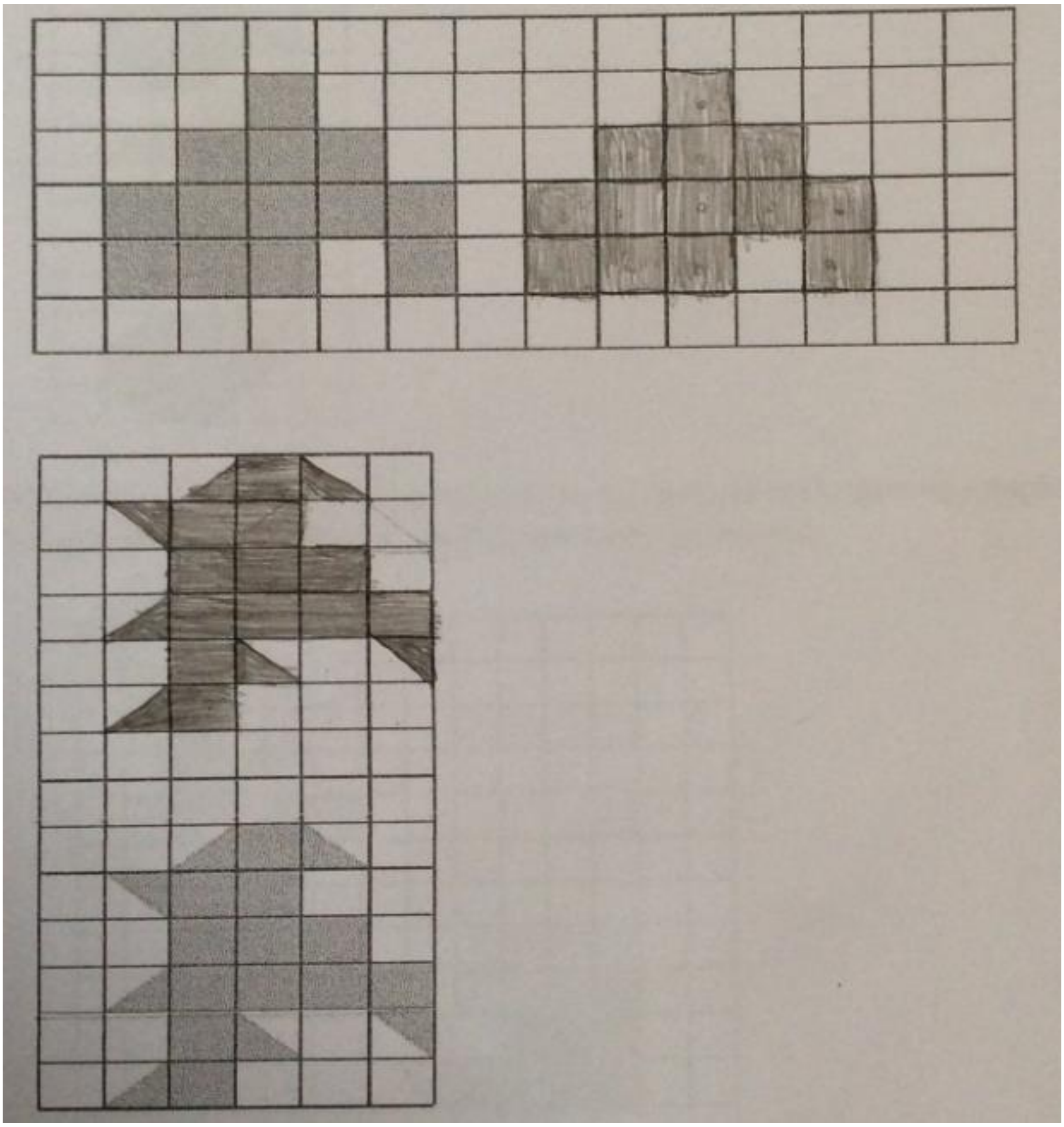
No primeiro momento, foi explicado aos alunos que seria desenvolvido um trabalho diferenciado com eles, sendo este pensado para o desenvolvimento de conceitos geométricos, feito individualmente e, também que o mesmo seria utilizado para compor os resultados e análise de dados para a presente dissertação.

5.1 – Atividade investigativa

Nas primeiras aulas foi apresentada uma folha com quatro exercícios sobre transformações geométricas (exercícios esses que já foram apresentados no capítulo anterior). Nessas atividades, denominadas como atividade de investigação, os alunos precisavam demonstrar seu conhecimento sobre as transformações geométricas mais utilizadas (translação, rotação e reflexão). O objetivo principal dessa atividade foi analisar e perceber o que os alunos conheciam sobre tais transformações.

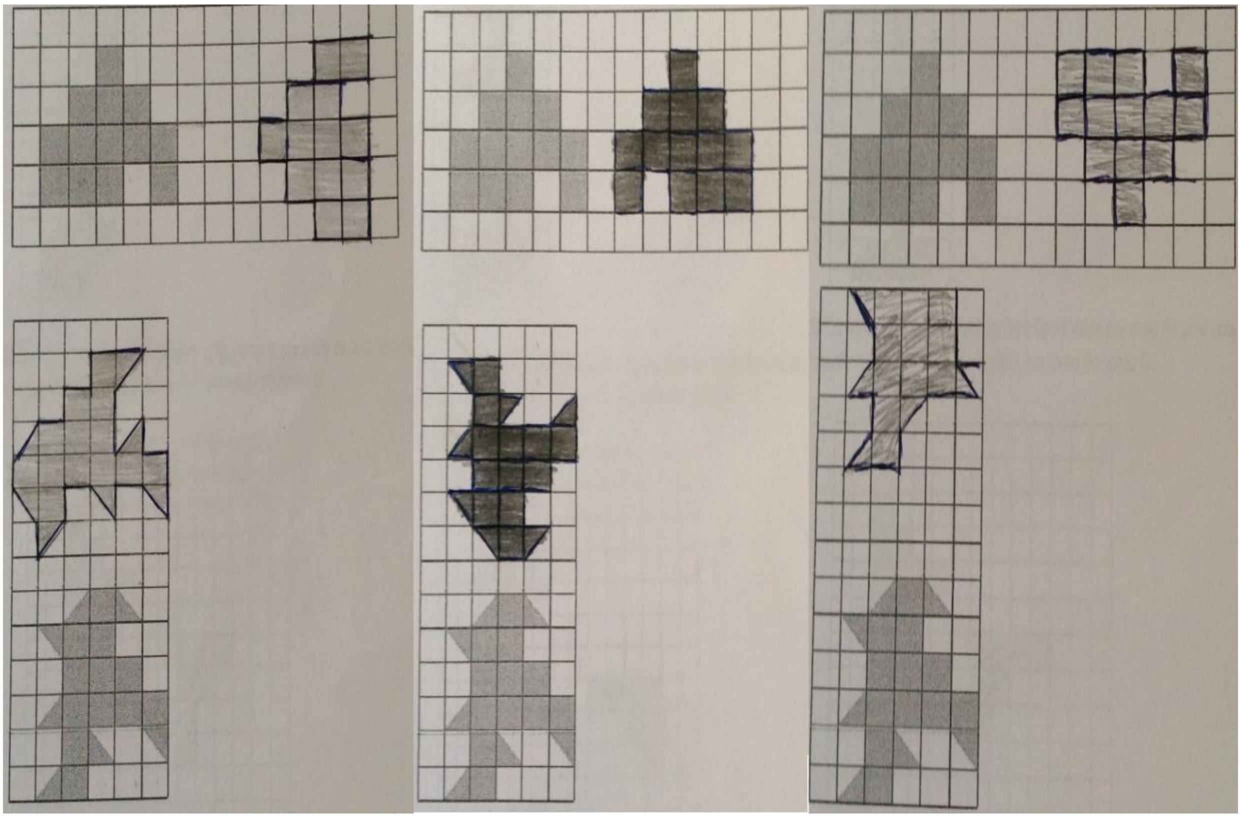
Abaixo seguem algumas das respostas dadas pelos alunos na atividade investigativa.

Figura 11 – Resposta esperada do exercício 1



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12 – Respostas incorretas do exercício 1



Fonte: Dados da pesquisa

No primeiro exercício da atividade investigativa, a maioria dos alunos acertou o desenho que seria o esperado como resposta, sendo ele mostrado na figura 11. Já na figura 12 foram colocados os erros cometidos pelos alunos em tal exercício. Vale destacar que os erros foram basicamente os mesmos.

Analisando as respostas dos alunos na figura 12, é possível perceber que possivelmente os erros aconteceram devido ao fato desses alunos não conseguirem distinguir o significado de translação dos significados das outras transformações geométricas, uma vez que pode ser notado que alguns alunos ao pensarem na translação, fazem a rotação e, outros ao pensarem na translação fazem a reflexão. Os erros que mais apareceram nesse exercício estão relacionados à reflexão, isso talvez porque essa seja a transformação geométrica mais conhecida por parte desses alunos e a mais trabalhada em sala de aula.

O exercício 2 da atividade investigativa era composto por reflexão. Há uma curiosidade que reforça o que foi dito anteriormente sobre o fato dos alunos terem mais conhecimento sobre a reflexão, este fato pode ser observado quando os alunos se depararam com este exercício, surgiram comentários do tipo: “A reta r é um espelho”.

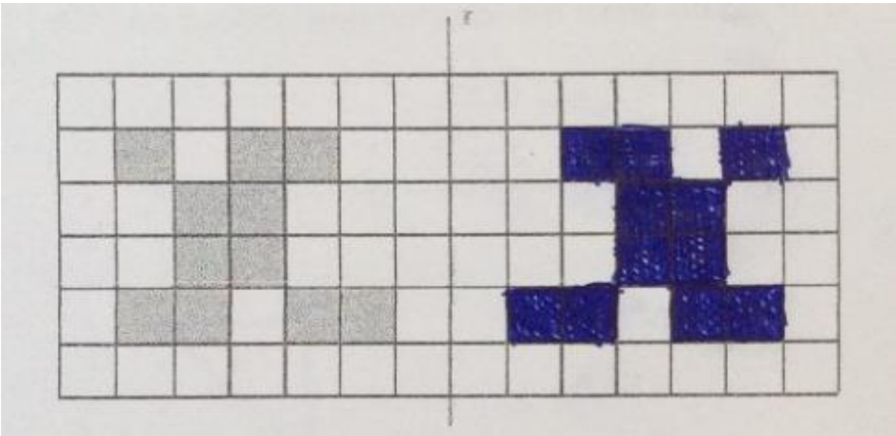
Como exemplos das respostas dos alunos, são apresentadas algumas figuras contendo as respostas corretas e as respostas incorretas.

As figuras 13 e 14 se referem ao primeiro item do exercício 2 da atividade investigativa. Nessas figuras temos como exemplo de resposta correta a figura 13, uma vez que todas as propriedades necessárias para compor uma reflexão foram satisfeitas.

Já na figura 14, são apresentados os erros que aconteceram nesse exercício e, destacando-se que o maior número de erros se deve ao fato dos alunos não terem respeitado a distância correta entre o eixo de simetria e sua imagem. Os outros erros que aconteceram foram devido a uma confusão entre a reflexão e a translação, ou seja, nesse exercício mais uma vez os alunos confundiram os nomes das transformações geométricas.

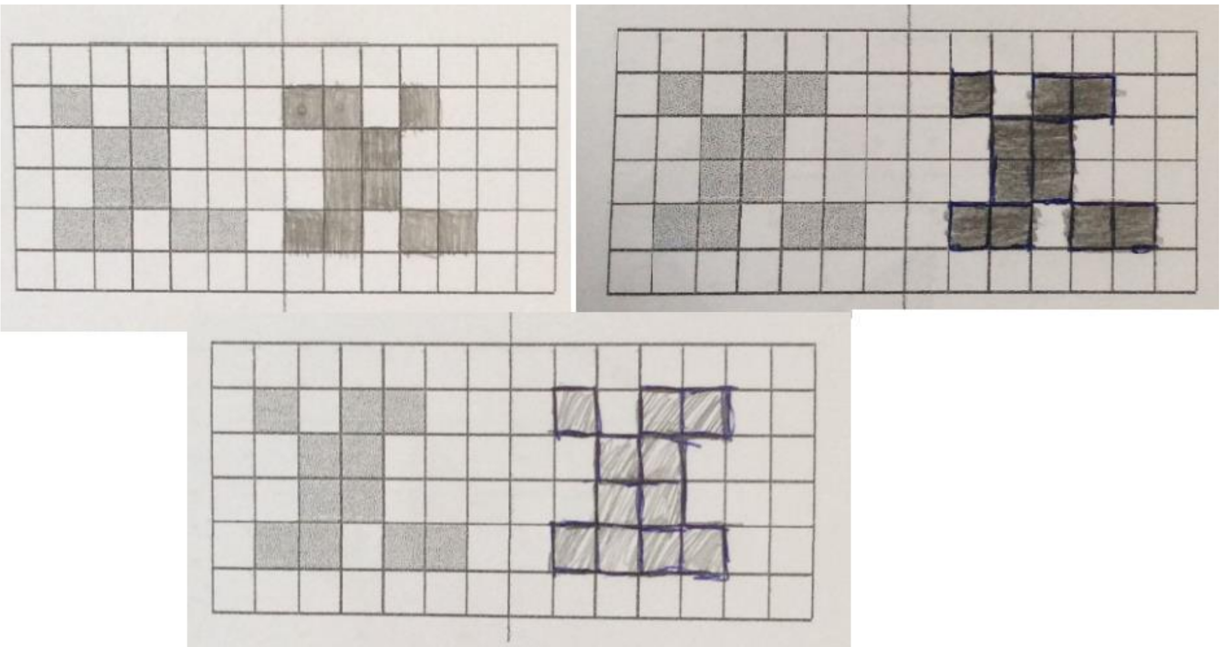
Com esses exemplos fica evidente que a maior confusão que os alunos fazem nessa parte de transformações geométricas se refere à troca de reflexão por translação e vice-versa.

Figura 13 – Resposta correta do exercício 2a



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14 – Respostas incorretas do exercício 2a

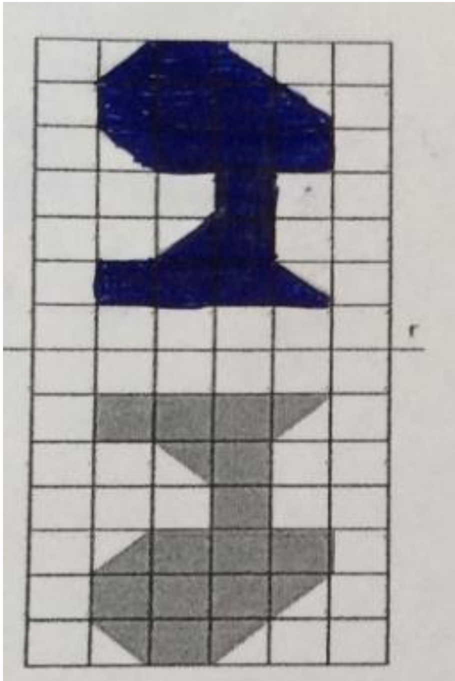


Fonte: Dados da pesquisa

As figuras a seguir são referentes ao segundo item do exercício 2 da parte investigativa.

A figura 15 se refere à resposta correta dada pelos alunos nesse exercício.

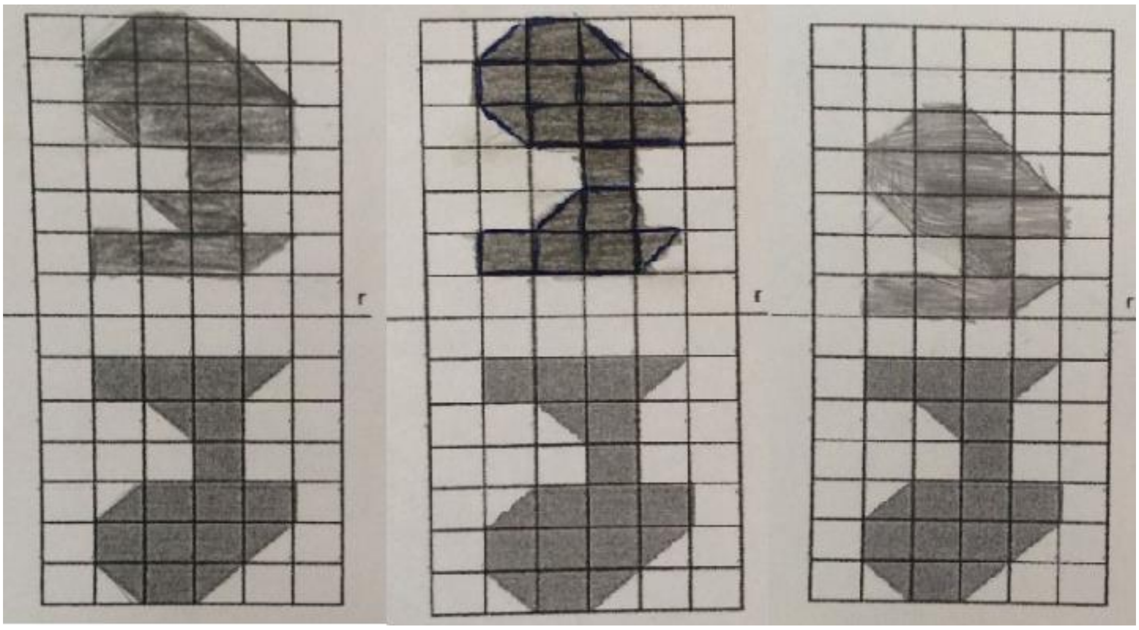
Figura 15 – Resposta correta do exercício 2b



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 16, são colocados os erros referentes à esse exercício.

Figura 16 – Respostas erradas do exercício 2b



Fonte: Dados da pesquisa

Nessa parte podemos perceber que, os erros do exercício 2b (Figura 16) são do tipo reflexão sem respeitar a distância entre a reta r e sua imagem e, em pequenos detalhes como o contorno da figura onde era necessário utilizar a diagonal de um quadrado.

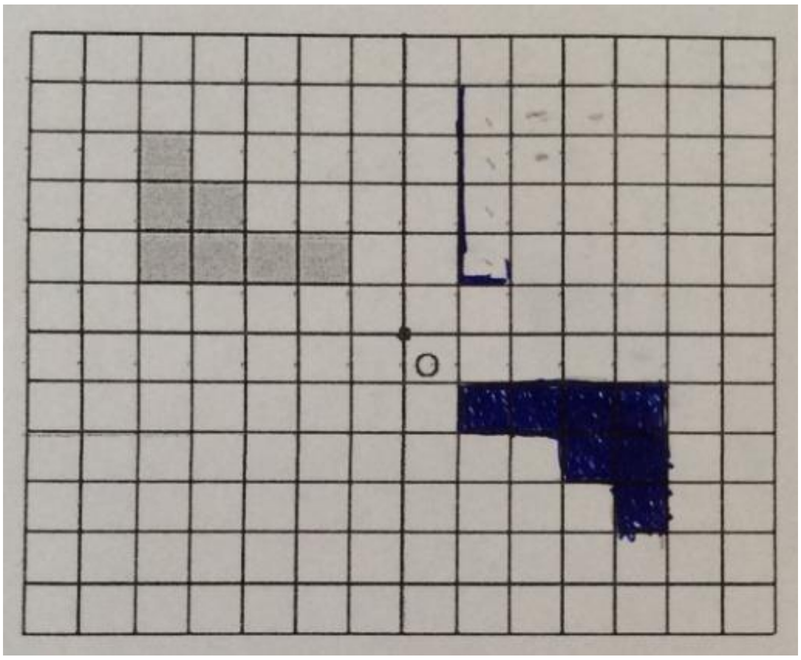
Olhando para o exercício 2 como um todo e, para as respostas dos alunos, é possível dizer que a maioria deles acertou os exercícios e, ainda, os que erraram apresentam alguma noção, ou pelo menos, uma fundamentação (mesmo que errada) para o que estão assumindo como certo ou como verdadeiro.

Terminada a parte de reflexão dos exercícios iniciais, foram apresentados agora alguns exemplos de rotações. Tais transformações compuseram os dois últimos exercícios da atividade investigativa.

Considerando os exercícios que envolviam rotações, o número de acertos diminuiu bastante, se comparado aos exercícios anteriores. Assim, é possível salientar que a parte de rotação é a menos conhecida pelos alunos.

Abaixo, na figura 17, é apresentada a resposta esperada no exercício 3. Essa é a resposta correta apresentada por um dos alunos.

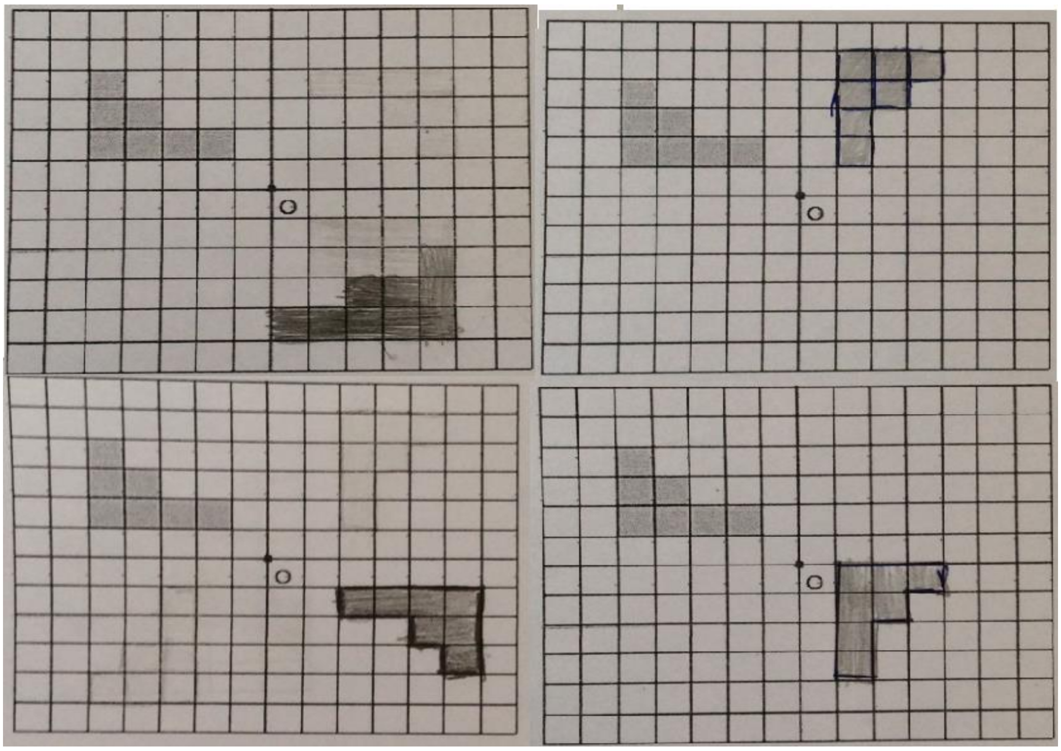
Figura 17 – Resposta correta do exercício 3



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 18, são mostradas as respostas incorretas dadas pelos alunos participantes dessa pesquisa.

Figura 18 – Respostas incorretas do exercício 3



Fonte: Dados da pesquisa

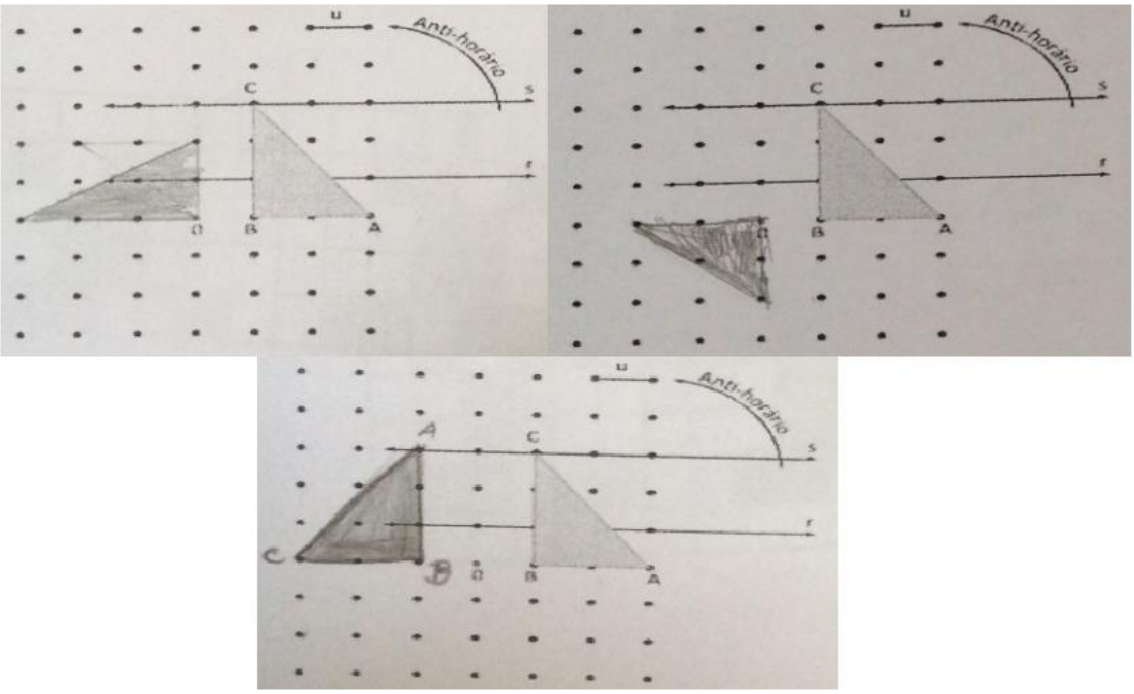
Analisando as respostas da questão 3 (figura 18), podem ser destacados erros referentes ao ângulo de rotação, à preservação da distância da figura ao centro da rotação e outros tipos de movimentos.

Nesse exercício, o principal erro se deve ao fato dos alunos não conseguirem identificar o grau de rotação, ou seja, não conseguem distinguir onde seria 90º e 180º. Isso se deve, talvez pelo fato dos alunos não trabalharem muito com tal transformação geométrica, ou então apresentarem dificuldade em imaginar como e onde a figura ficaria se fosse rotacionada. Outra possível justificativa para esse acontecimento pode estar relacionada à pouca experiência envolvendo o uso de transferidor.

O exercício 4 dessa parte da pesquisa, também tratava de rotação, só que agora pedindo que a mesma fosse realizada no sentido anti-horário.

Nesse exercício, nenhum aluno conseguiu acertar a resposta correta e, muitos deles deixaram a questão sem fazer. Dessa maneira, a figura 19 trata dos erros dos alunos que, ao menos tentaram realizar tal atividade. Os erros são da forma preservação da distância da figura ao centro de rotação (ponto O) e outros movimentos.

Figura 19 – Resposta correta do exercício 2



Fonte: Dados da pesquisa

Com o término das atividades (na primeira aula), na segunda aula foi desenvolvido um trabalho pautado na apresentação de *slides* com todos os conceitos e imagens que representavam cada uma das transformações geométricas exigidas na atividade investigativa. Essa apresentação em *slide* teve o objetivo de formalizar alguns conceitos iniciais de transformações geométricas que seriam utilizados posteriormente no trabalho com os frisos e, mostrar aos alunos possíveis aplicações dessas transformações utilizando movimentos corriqueiros relacionados ao dia a dia deles.

Ao terminar o trabalho inicial com transformações geométricas, foi realizado um trabalho com questões da OBMEP, sendo essas discutidas na próxima seção.

5.2 – Atividades com questões da OBMEP

Para a realização da atividade com questões da OBMEP, foi solicitado aos alunos que fizessem tais atividades individualmente e, as mesmas tiveram duração de 2 aulas.

A atividade continha nove questões, sendo que dessas, sete questões eram objetivas e duas questões eram dissertativas. Foram escolhidas essas nove questões, primeiramente pela dificuldade em encontrar questões da OBMEP que se relacionassem ao tema desse trabalho e, também pelo fato dessas questões terem sido as que eram mais coerentes com as ideias trabalhadas anteriormente em sala de aula.

Antes de iniciar a discussão de cada questão, vale ressaltar que houve uma questão que nenhum aluno conseguiu acertar, sendo assim não há uma figura referente a tal resposta. Como as questões eram objetivas estão apresentadas respostas referente a cada questão. Abaixo seguem as respostas corretas de cada exercício dessa atividade, sendo que nessas respostas os alunos tentaram colocar uma justificativa ou ao menos colocaram a maneira como resolveram cada questão.

Figura 20 – Exercício 1 OBMEP

1) Para uma atividade com sua turma, uma professora distribuiu 100 cadeiras em volta de uma grande mesa redonda e numerou-as consecutivamente de 1 a 100. A professora, que é muito caprichosa, colocou as cadeiras voltadas para o centro da mesa, mantendo a mesma distância entre cada cadeira e suas duas vizinhas. Qual é o número da cadeira que ficou exatamente à frente da cadeira com o número 27?

(A) 76
~~(B)~~ 77
(C) 78
(D) 79
(E) 80

100 | 2
00 50

$$\begin{array}{r} 50 \\ +27 \\ \hline 77 \end{array}$$

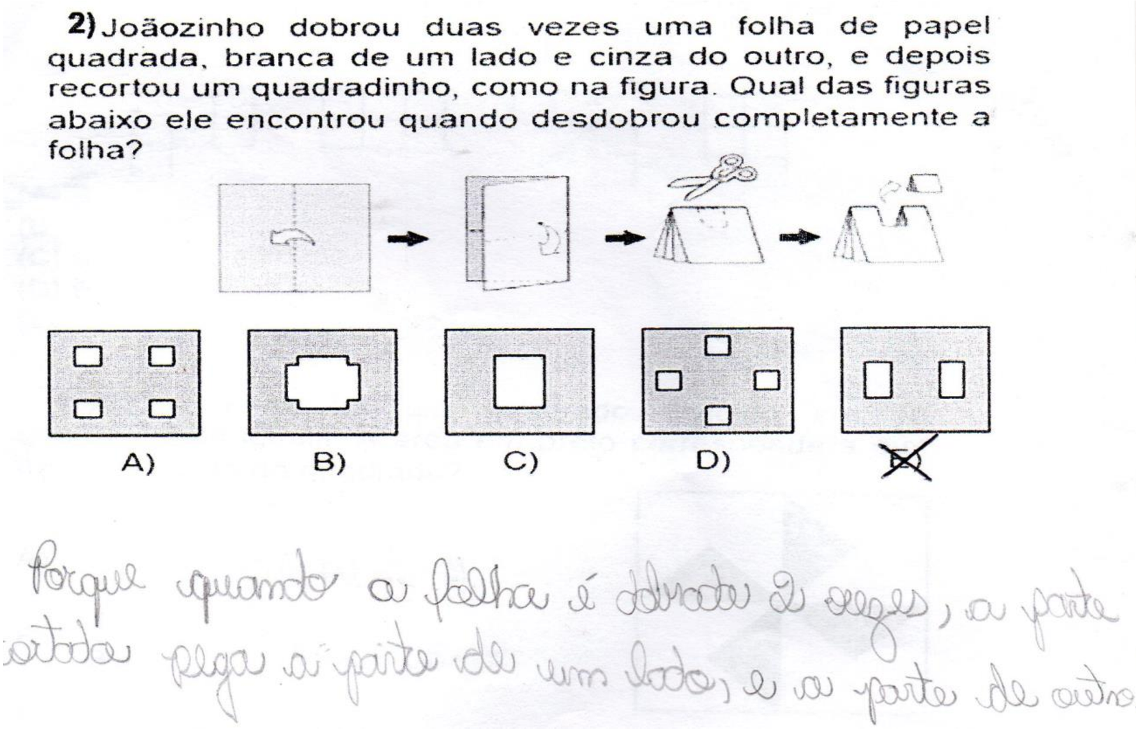
Fonte: Dados da pesquisa

A primeira questão era relativamente fácil, pois é um exercício da 1ª fase de 2005 (nível 2) e, era referente ao conceito de simetria dos números posicionados de forma circular. Com essa questão, os alunos poderiam entender que não existe simetria somente em Geometria e que a mesma pode aparecer onde eles menos esperam.

A maioria dos alunos acertou esta questão, fato esse que reforça que a ideia de simetria foi compreendida pelos alunos. Já para os alunos que erraram essa questão, não é possível dizer que eles não compreenderam a ideia de simetria, uma vez que os erros podem ter acontecido na realização das operações para a resolução do exercício.

Na segunda questão, que também utiliza o conceito de simetria, especificamente a reflexão, era uma questão um pouco mais complexa que a anterior, já que, a folha do exercício deveria ser dobrada ao meio duas vezes. A resposta correta, juntamente com a justificativa dada pelos alunos, com mais frequência, é apresentada na figura 21.

Figura 21 – Exercício2 OBMEP



2) Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura. Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?

A) B) C) D) ~~E)~~

Porque quando a folha é dobrada 2 vezes, a parte cortada pega a parte de um lado, e a parte de outro

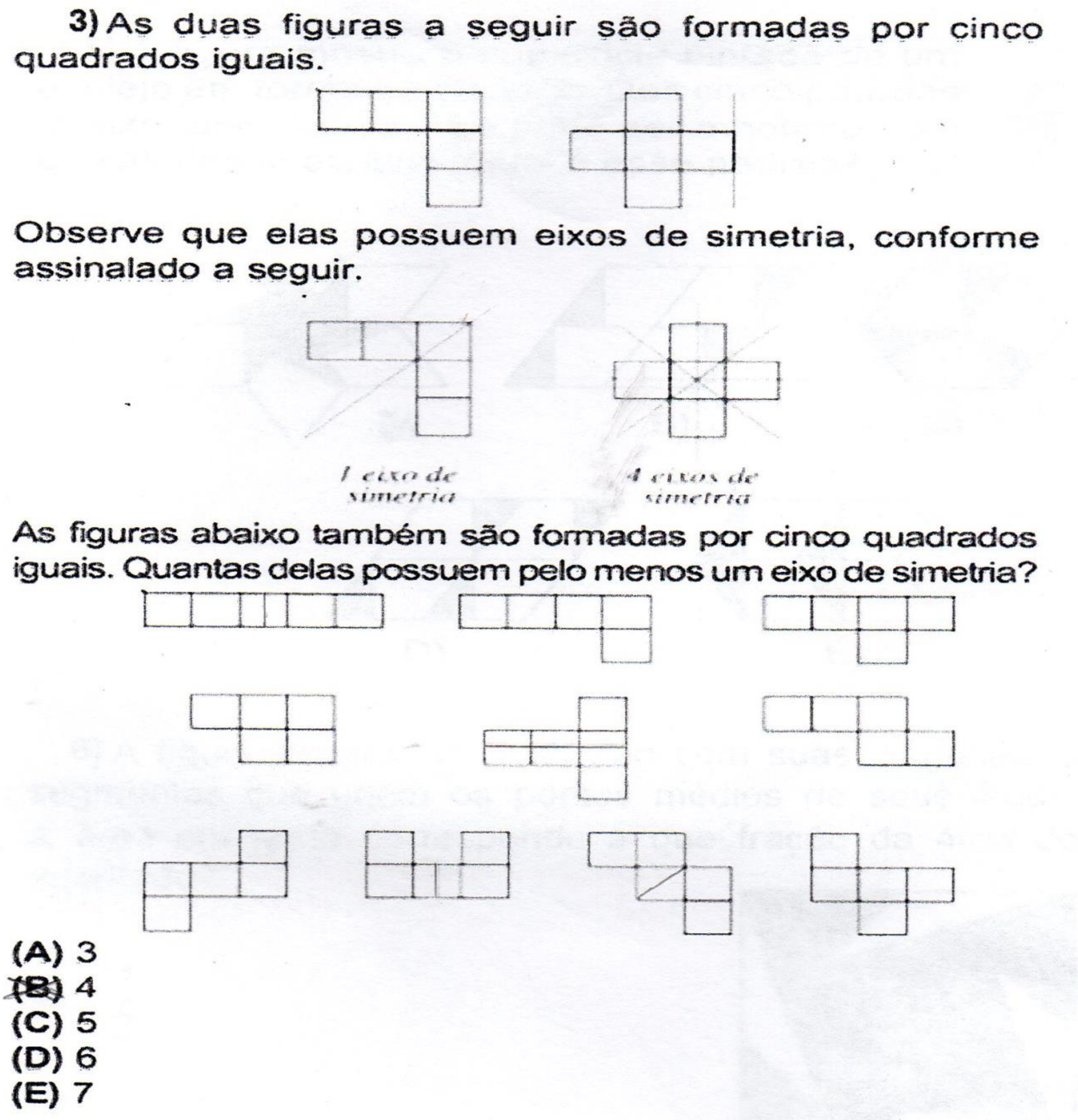
Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos alunos conseguiu acertar essa questão e, uma observação que se torna interessante é que muitos alunos fizeram realmente o que o exercício estava pedindo, ou seja, pegaram um papel, fizeram as dobras e o recorte proposto. Entretanto, isto não é permitido na realização das provas da OBMEP.

Um fato que somente foi revelado aos alunos depois do exercício pronto foi que, esse exercício é referente à 1ª fase do ano de 2010. Ao saber que tal questão compunha a 1ª fase da OBMEP os alunos passaram a entender que eles são capazes de resolver as questões propostas em tal prova.

Na próxima questão (figura 22), para resolvê-la os alunos traçaram os eixos de simetria e depois contaram quantas figuras satisfaziam a pergunta do enunciado. Vale ressaltar que mesmo essa questão parecendo uma das mais fáceis até o momento, os alunos apresentaram muita dificuldade em traçar os eixos de simetria corretamente, talvez devido ao fato de alguns eixos não estarem na vertical, assim como eles estavam acostumados até o momento.

Figura 22 – Exercício 3 OBMEP


3) As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.

Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.

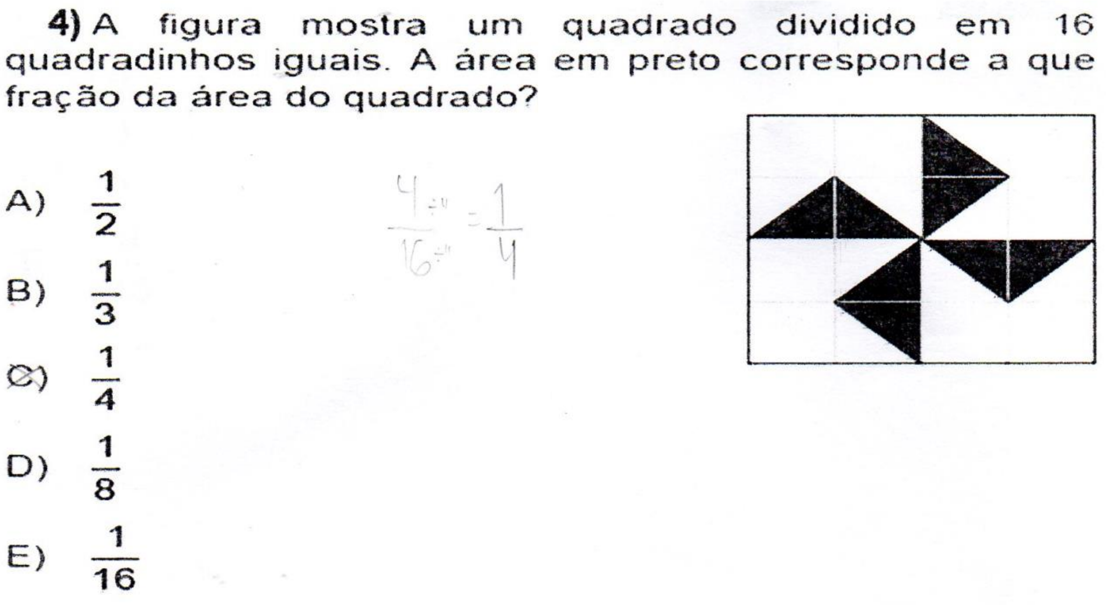
As figuras abaixo também são formadas por cinco quadrados iguais. Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

Fonte: Dados da pesquisa

Olhando para a quarta questão (figura 23), inicialmente, podemos pensar que não há conceitos que se relacionem às transformações geométricas, já que, é pedida a área do quadrado que corresponde à parte pintada em preto, mas ao analisar as partes pintadas em preto na figura do exercício, podemos pensar em rotações de 90º. Dessa maneira, o exercício pode ser resolvido pensando-se nas rotações de cada parte e depois em translações, até tais partes serem colocadas encaixadas apenas em uma parte do quadrado, nos dando a resposta de um quarto.

Figura 23 – Exercício 4 OBMEP



4) A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

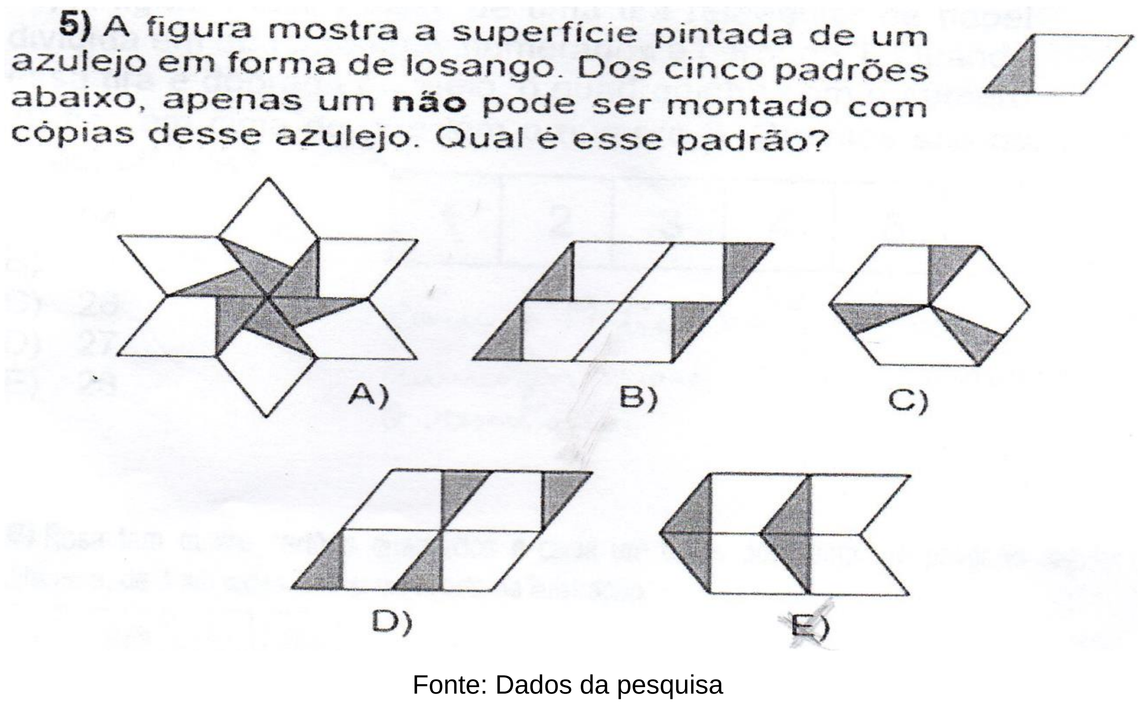
E) $\frac{1}{16}$

$\frac{4 \div 4}{16 \div 4} = \frac{1}{4}$

Fonte: Dados da pesquisa

A quinta questão estava intimamente ligada às transformações geométricas, uma vez que, era pedido pelo exercício, que os alunos percebessem qual das figuras não poderia ser formada somente com a peça dada, assim como mostra a figura 24.

Figura 24 – Exercício 5 OBMEP



5) A figura mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango. Dos cinco padrões abaixo, apenas um **não** pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?

A) B) C) D) E)

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos alunos errou essa questão, sendo que as alternativas mais assinaladas foram a A e a C. para a resolução desse exercício, como os alunos tinham que pensar na peça dada, vale ressaltar que, somente era possível transladar e rotacionar a figura, mas não refletir, já que como seria uma peça dada a parte usada na reflexão não seria pintada como a original.

Assim, a parte de baixo da alternativa E, não era possível de ser feita, sendo assim, esta é a alternativa correta.

Para a próxima questão, não foi encontrada nenhuma resposta satisfatória dada pelos alunos para o exercício 6. A questão tratava da área de figuras e as figuras envolvidas eram idênticas, a menos de rotação. Comparando com a outra questão envolvendo área (figura 23), essa era mais elaborada, pois não era somente pensar em encaixar as figuras formando quadrados inteiros, envolviam outros tipos de raciocínio lógico-dedutivos.

Figura 25 – Exercício 6 OBMEP

6) A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

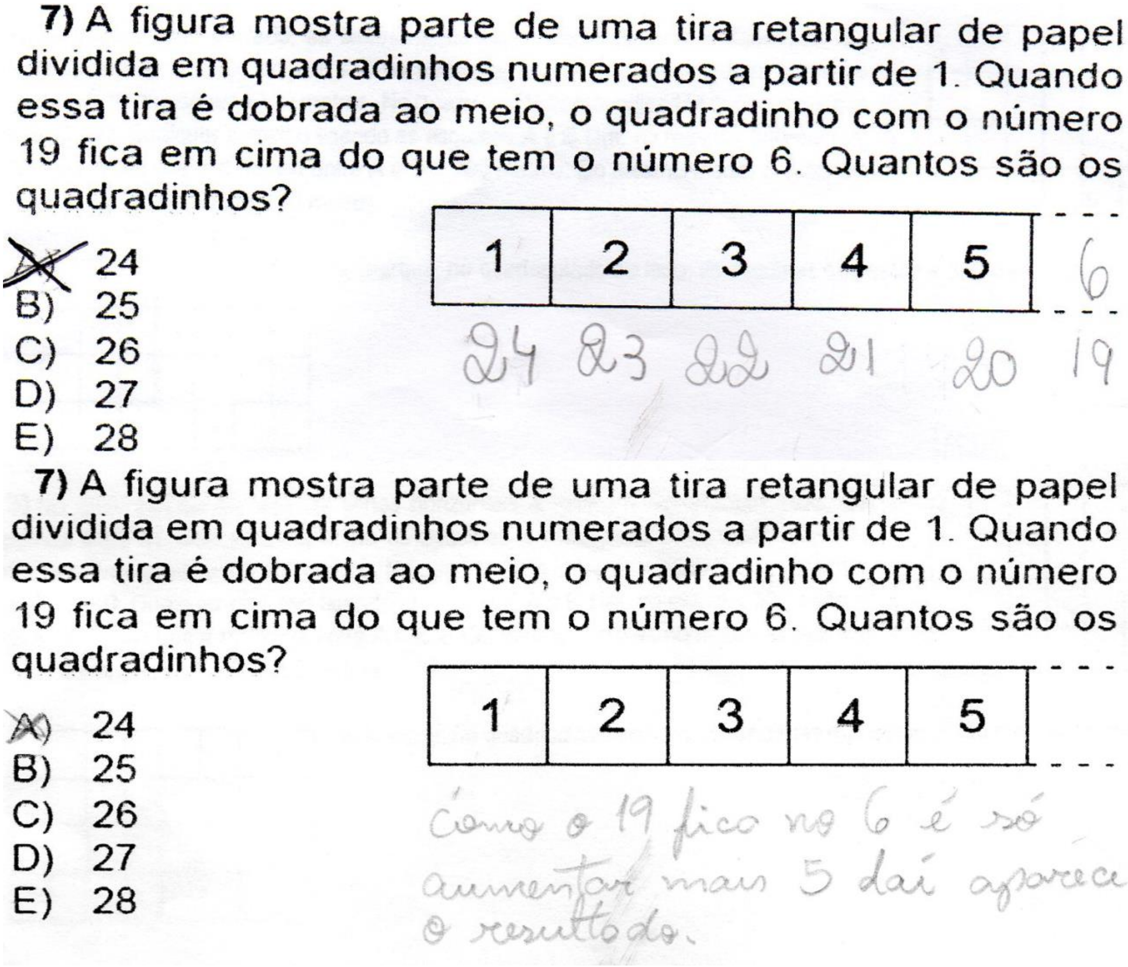
D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{9}{16}$

Fonte: Dados da pesquisa

Passando para a análise da questão 7, mostrada na figura 26, temos o uso do conceito de simetria com os números mais uma vez, já que era apresentada uma situação em que os números eram colocados em uma reta e então pedia para dobrar essa reta com números, com a finalidade de identificar quais seriam os pares formados.

Figura 26 – Exercício 7 OBMEP



7) A figura mostra parte de uma tira retangular de papel dividida em quadradinhos numerados a partir de 1. Quando essa tira é dobrada ao meio, o quadradinho com o número 19 fica em cima do que tem o número 6. Quantos são os quadradinhos?

A) 24
B) 25
C) 26
D) 27
E) 28

1 2 3 4 5 6

24 23 22 21 20 19

7) A figura mostra parte de uma tira retangular de papel dividida em quadradinhos numerados a partir de 1. Quando essa tira é dobrada ao meio, o quadradinho com o número 19 fica em cima do que tem o número 6. Quantos são os quadradinhos?

A) 24
B) 25
C) 26
D) 27
E) 28

1 2 3 4 5

Como o 19 fico no 6 é só aumentar mais 5 daí aparece o resultado.

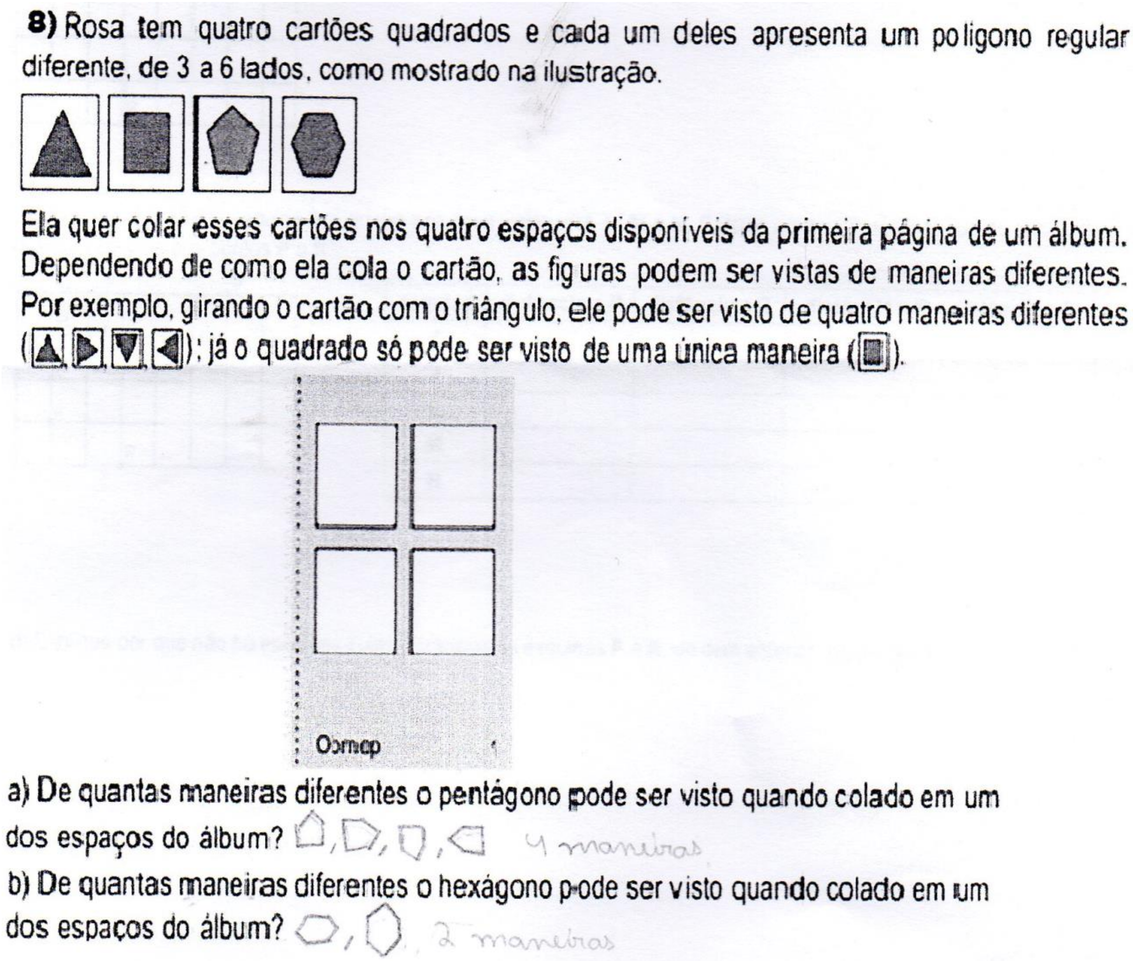
Fonte: Dados da pesquisa

A questão 8, a maioria dos alunos acertou o primeiro item, mas errou o segundo, talvez por não conseguirem entender o que estava sendo pedido.

Nessa questão, era pedido para os alunos perceberem de quantas maneiras poderiam ver as figuras dadas no exercício, fazendo rotações de 90º. Apesar de esse problema ser essencialmente um problema de contagem, ele poderia ter sido resolvido, simplesmente, através de rotações e marcações das figuras dadas.

Para apresentar a resposta dada pelos alunos, e tentar exemplificar o fato do item b ter sido assimilado por poucos alunos, a figura 27 serve de exemplo.

Figura 27 – Exercício 8 OBMEP



8) Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.

Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum. Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele pode ser visto de quatro maneiras diferentes (, , ,); já o quadrado só pode ser visto de uma única maneira ( ).

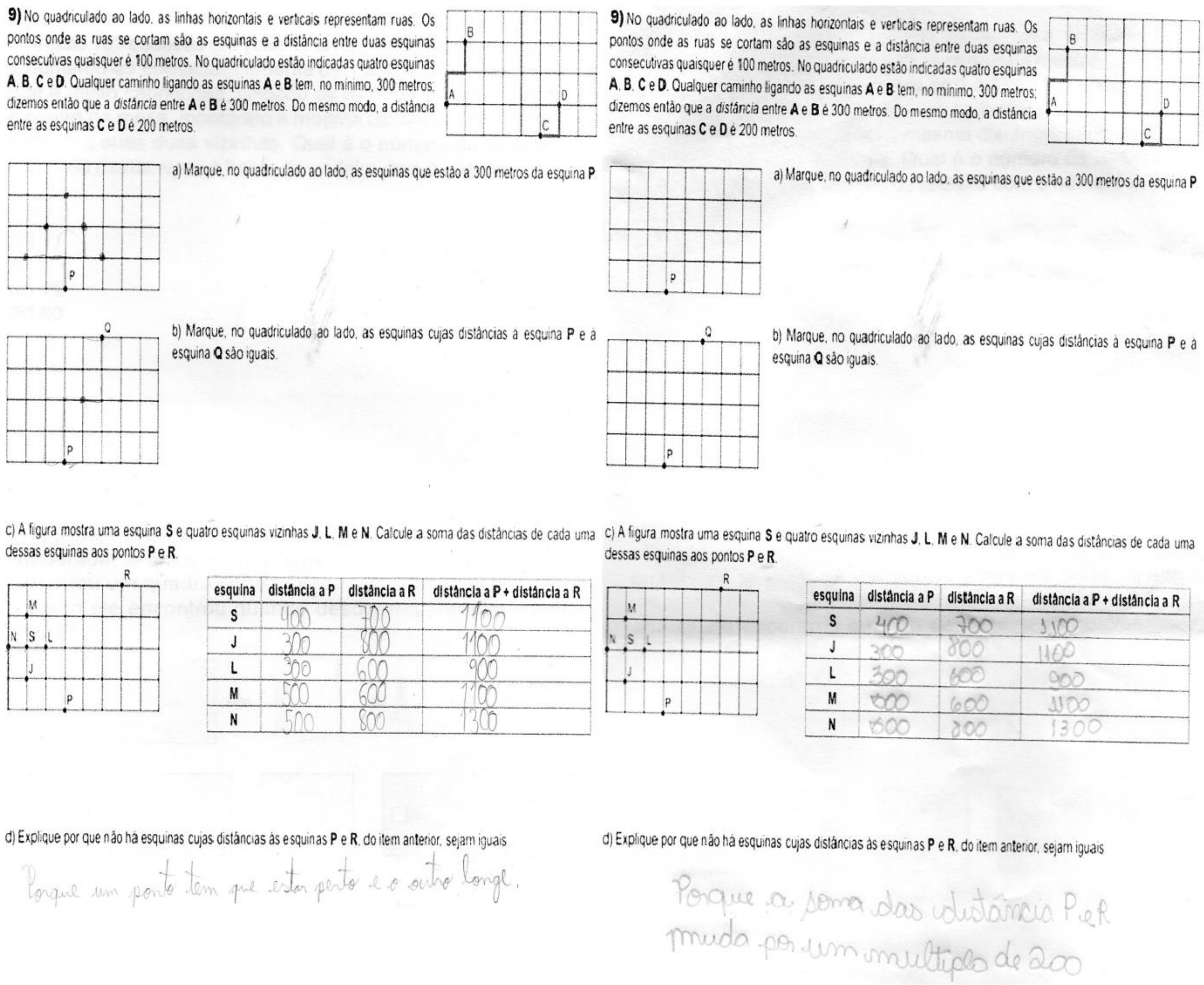
a) De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum? 4 maneiras

b) De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum? 2 maneiras

Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução da última questão, os alunos apresentaram respostas parciais para os itens a e b, ou seja, geralmente encontravam apenas uma resposta e podemos ver que existem várias. Podemos observar que a resposta do item a) tem uma reflexão envolvida e a do item b) uma rotação. A maioria dos alunos fez o item c), pois era apenas para encontrar a distância entre as esquinas e depois somar. Para o item d que era uma pergunta sobre o item c), apenas um estudante conseguiu apresentar uma resposta satisfatória. Essa questão é do nível 1 da 2ª fase do ano 2013 e, está retratada na figura 28.

Figura 28 – Exercício 9 OBMEP



9) No quadriculado ao lado, as linhas horizontais e verticais representam ruas. Os pontos onde as ruas se cortam são as esquinas e a distância entre duas esquinas consecutivas quaisquer é 100 metros. No quadriculado estão indicadas quatro esquinas **A**, **B**, **C** e **D**. Qualquer caminho ligando as esquinas **A** e **B** tem, no mínimo, 300 metros; dizemos então que a *distância* entre **A** e **B** é 300 metros. Do mesmo modo, a distância entre as esquinas **C** e **D** é 200 metros.

a) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas que estão a 300 metros da esquina **P**.

b) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas cujas distâncias à esquina **P** e à esquina **Q** são iguais.

c) A figura mostra uma esquina **S** e quatro esquinas vizinhas **J**, **L**, **M** e **N**. Calcule a soma das distâncias de cada uma dessas esquinas aos pontos **P** e **R**.

esquina	distância a P	distância a R	distância a P + distância a R
S	400	700	1100
J	300	800	1100
L	300	600	900
M	500	600	1100
N	500	800	1300

d) Explique por que não há esquinas cujas distâncias às esquinas **P** e **R**, do item anterior, sejam iguais

Porque um ponto tem que estar perto e o outro longe.

9) No quadriculado ao lado, as linhas horizontais e verticais representam ruas. Os pontos onde as ruas se cortam são as esquinas e a distância entre duas esquinas consecutivas quaisquer é 100 metros. No quadriculado estão indicadas quatro esquinas **A**, **B**, **C** e **D**. Qualquer caminho ligando as esquinas **A** e **B** tem, no mínimo, 300 metros; dizemos então que a *distância* entre **A** e **B** é 300 metros. Do mesmo modo, a distância entre as esquinas **C** e **D** é 200 metros.

a) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas que estão a 300 metros da esquina **P**.

b) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas cujas distâncias à esquina **P** e à esquina **Q** são iguais.

c) A figura mostra uma esquina **S** e quatro esquinas vizinhas **J**, **L**, **M** e **N**. Calcule a soma das distâncias de cada uma dessas esquinas aos pontos **P** e **R**.

esquina	distância a P	distância a R	distância a P + distância a R
S	400	700	1100
J	300	800	1100
L	300	600	900
M	500	600	1100
N	500	800	1300

d) Explique por que não há esquinas cujas distâncias às esquinas **P** e **R**, do item anterior, sejam iguais

Porque a soma das distância P e R muda por um multiplo de 200

Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, as questões da OBMEP, que envolvem conceitos de transformações geométricas são, na maioria das vezes, questões que aparecem nas provas de nível 1 e nível 2.

Terminado o percurso inicial dessa pesquisa, apresenta-se a seguir os dados referentes ao término desse trabalho, a parte referente aos frisos.

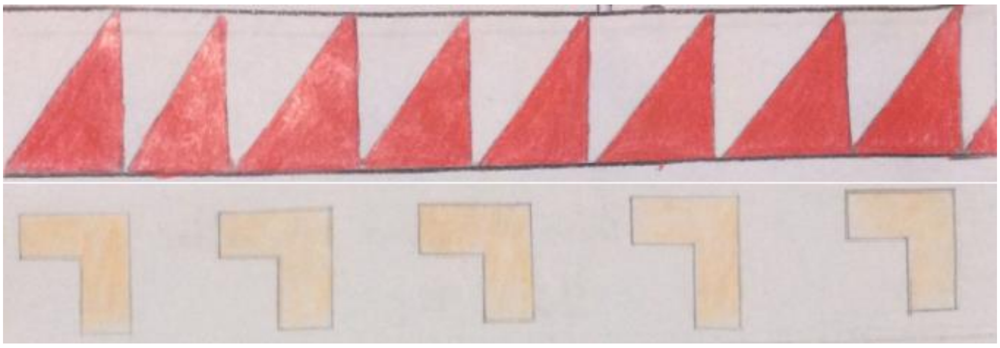
5.3 – *Atividades com frisos*

Como fechamento de todo o trabalho desenvolvido com os alunos, durante as aulas separadas para tal, é apresentada uma análise dos dados obtidos.

Nessa parte da pesquisa, foi explicado aos alunos o que seriam os frisos, quais eram seus possíveis padrões e porque de existirem somente esses. Logo após, os alunos tentaram reproduzir os 7 tipos de frisos existentes, visto no Capítulo 2, com figuras mais simples usando como base as transformações geométricas vistas na primeira atividade e as Figuras 1 e 2. O tempo gasto para a realização dessa atividade foi de 2 aulas. Essa atividade foi realizada em grupos de 4 pessoas, mas cada aluno deveria produzir o seu.

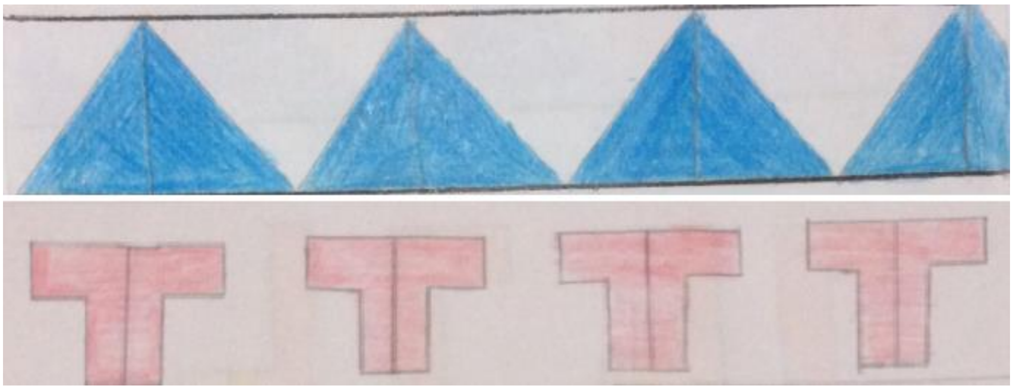
Abaixo segue as construções dos frisos realizadas pelos alunos.

Figura 29 – Friso 1



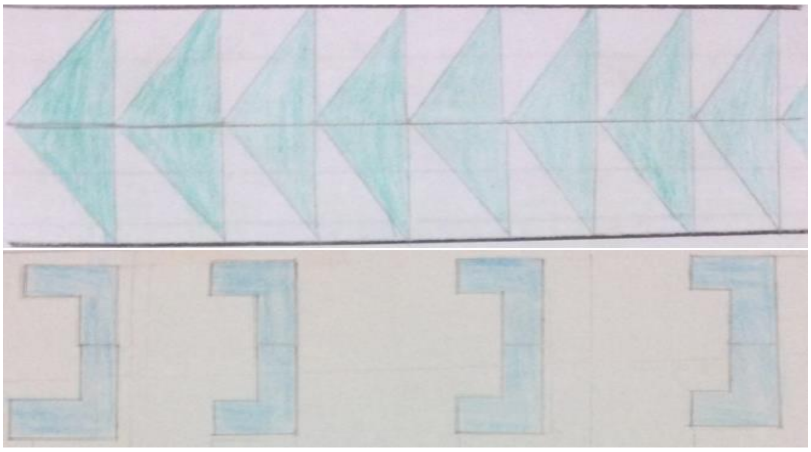
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 30 – Friso 2



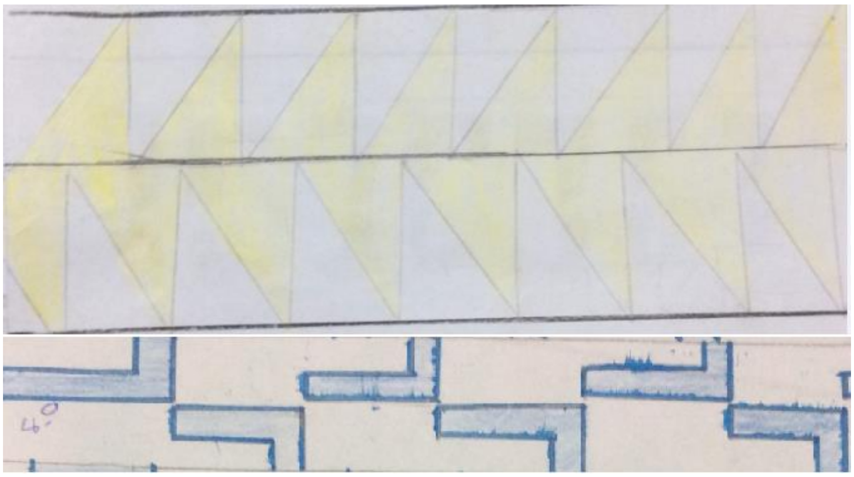
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 31 – Friso 3



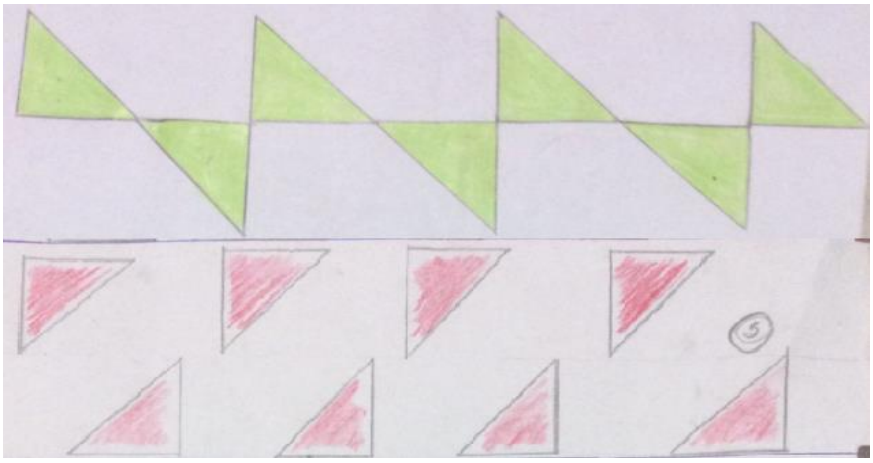
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 32 – Friso 4



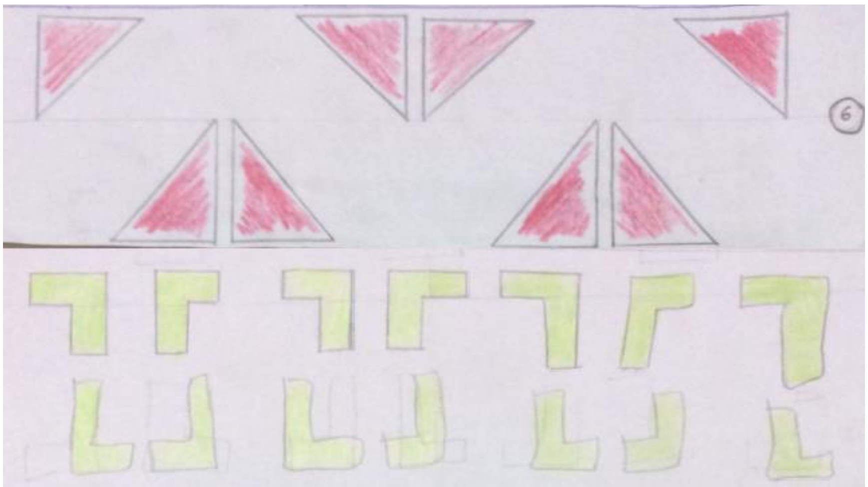
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 33 – Friso 5



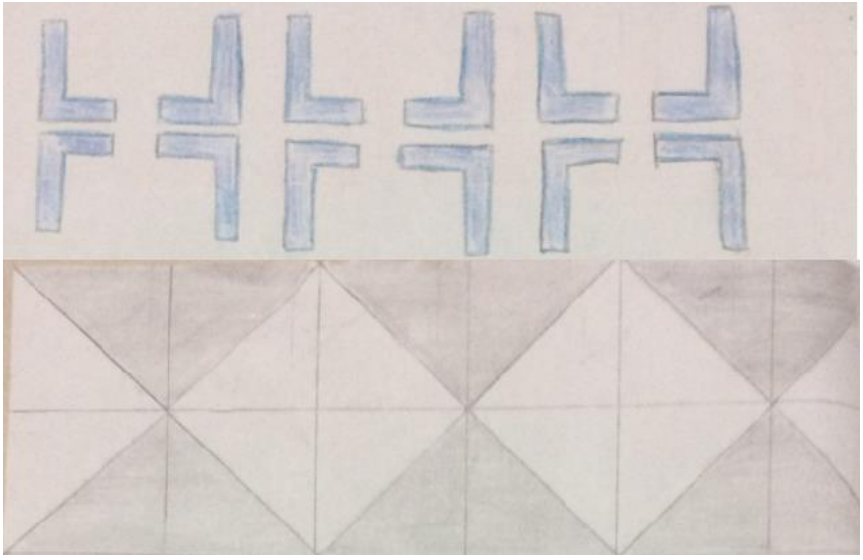
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 34 – Friso 6



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 35 – Friso 7



Fonte: Dados da pesquisa

Durante o desenvolvimento dessa atividade, os alunos mostraram um grande entusiasmo com a mesma, talvez pelo fato de terem conseguido entender como usariam as transformações geométricas e também por entenderem que há o emprego de frisos fora da sala de aula, no âmbito da Geometria.

De maneira geral, os alunos conseguiram reproduzir os frisos sem problemas, mas apresentaram um pouco mais de dificuldade na construção dos frisos referentes ao número 5 e 6.

Dessa maneira, tendo conseguido o envolvimento e a dedicação dos alunos para com o desenvolvimento desse trabalho, apresentam-se as considerações finais, juntamente com alguns depoimentos dados por eles.

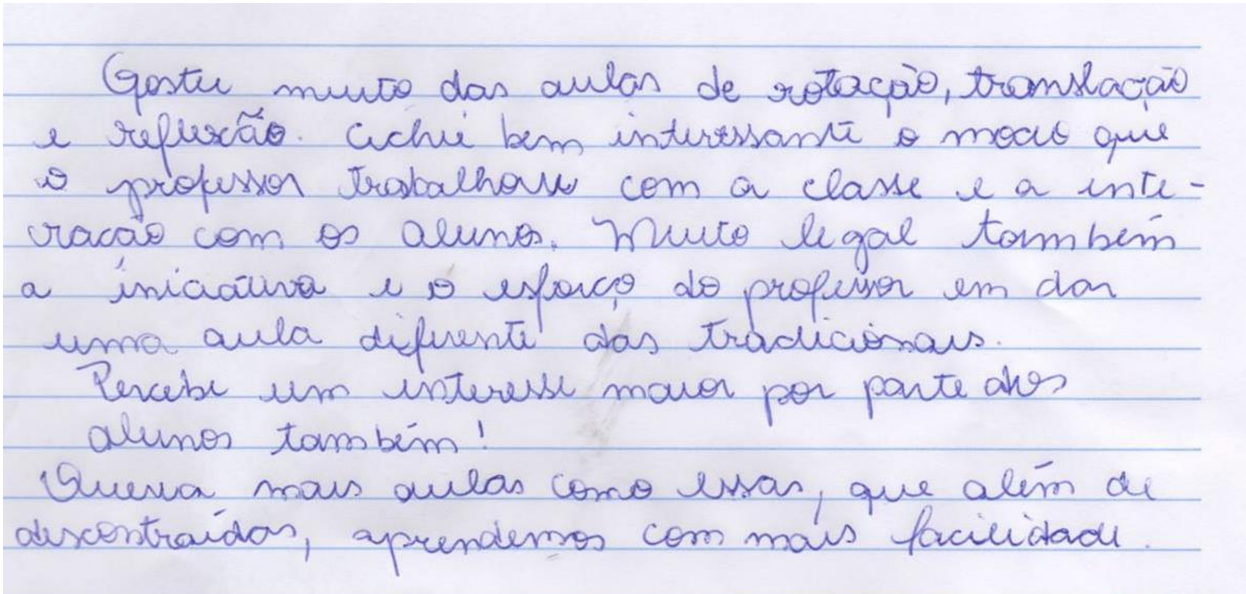
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO

Primeiramente, retomaremos a pergunta diretriz dessa pesquisa que é: “Será que, ao desenvolver atividades diferenciadas em sala de aula (apoiadas em materiais concretos, desenhos e vídeos), há uma contribuição na aprendizagem das transformações geométricas associadas às simetrias”?

Para responder a essa pergunta, nos baseamos nas experiências vividas em sala de aula durante o tempo de desenvolvimento dessa pesquisa e, em alguns dos depoimentos escritos pelos alunos para retratar tal experiência do ponto de vista deles.

Abaixo seguem alguns depoimentos, assim como nas figuras 36, 37, 38, 39 e 40.

Figura 36 – Depoimento 1



Gostei muito das aulas de rotação, translação e reflexão. Achei bem interessante o modo que o professor trabalhou com a classe e a interação com os alunos. Muito legal também a iniciativa e o esforço do professor em dar uma aula diferente das tradicionais.
Percebi um interesse maior por parte dos alunos também!
Queria mais aulas como essas, que além de descontraídas, aprendemos com mais facilidade.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 37 – Depoimento 2

O professor Renan fez algo legal e muito interessante ao reservar 2 aulas para passar explicações, exemplos e exercícios sobre os 7 tipos de friso.

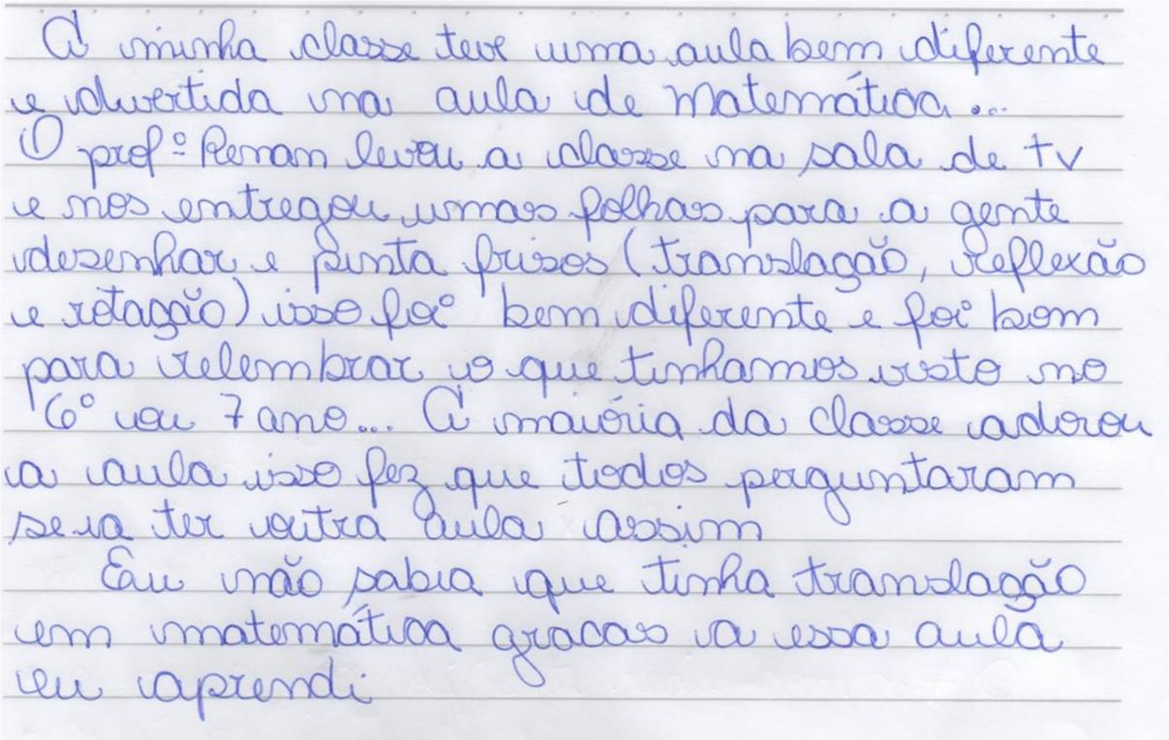
Foram aulas muito boas, os frisos são algo muito interessantes de se ver... Poderia ter mais aulas assim!

Os exercícios dados nos ajudaram a entender melhor cada movimento, e mais legal ainda de ver a classe que não sabia quase nada sobre o assunto aprendendo. Depois daquelas aulas eu fico até procurando os frisos em alguns lugares... engraçado como isso entra na cabeça.

O professor explicou muito bem, adorei o que foi dado nas aulas aulas.

Fonte: Dados da pesquisa

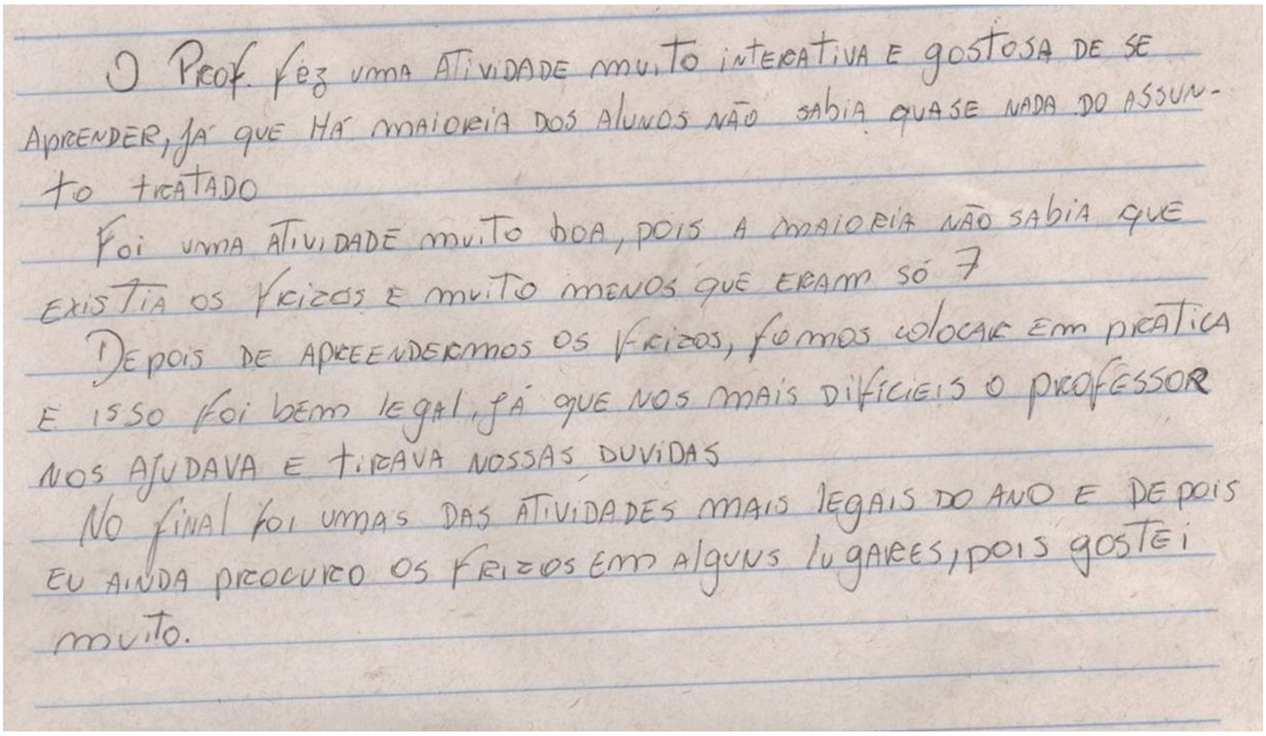
Figura 38 – Depoimento 3



A minha classe teve uma aula bem diferente
e divertida na aula de Matemática...
O profº Renan levou a classe na sala de tv
e nos entregou umas folhas para a gente
desenhar e pinta frisos (translação, reflexão
e rotação) isso foi bem diferente e foi bom
para relembrar o que tinhamos visto no
6º ou 7 ano... A maioria da classe adorou
a aula isso fez que todos perguntaram
se ia ter outra aula assim
Eu não sabia que tinha translação
em matemática graças a essa aula
eu aprendi

Fonte: Dados da pesquisa

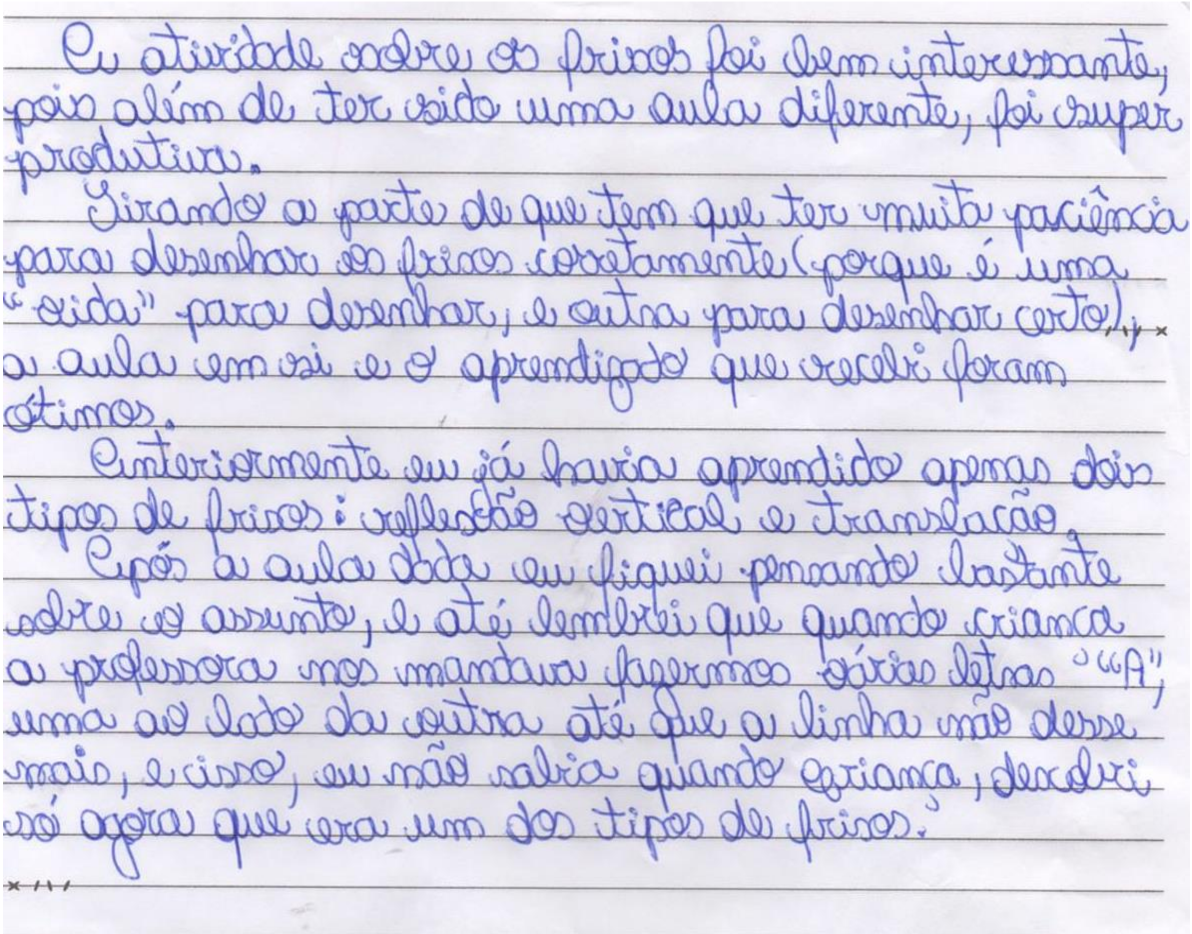
Figura 39 – Depoimento 4



O Prof. fez uma atividade muito interativa e gostosa de se
aprender, já que há maioria dos alunos não sabia quase nada do assun-
to tratado
Foi uma atividade muito boa, pois a maioria não sabia que
existia os frizos e muito menos que eram só 7
Depois de apreendermos os frizos, fomos colocar em prática
e isso foi bem legal, já que nos mais dificieis o professor
nos ajudava e tirava nossas duvidas
No final foi umas das atividades mais legais do ano e depois
eu ainda procuro os frizos em alguns lugares, pois gostei
muito.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 40 – Depoimento 5


A atividade sobre os frisos foi bem interessante, pois além de ter sido uma aula diferente, foi super produtiva.

Tirando a parte de que tem que ter muita paciência para desenhar os frisos corretamente (porque é uma "vida" para desenhar, e outra para desenhar certo), a aula em si e o aprendizado que recebi foram ótimos.

Anteriormente eu já havia aprendido apenas dois tipos de frisos: reflexão vertical e translação.

Após a aula dada eu fiquei pensando bastante sobre o assunto, e até lembrei que quando criança a professora nos mandava fazermos várias letras "A", uma ao lado da outra até que a linha não desse mais, e isso, eu não sabia quando criança, descobri só agora que era um dos tipos de frisos.

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os depoimentos dados pelos alunos e com as atividades desenvolvidas, pode ser percebido que os alunos apreciaram e apresentaram aprendizado satisfatório pois, apresentaram evolução ao longo do processo de aprendizagem das transformações geométricas, já que, nas atividades iniciais apresentaram alguns erros que foram sendo superados ao longo do processo, chegando ao auge deste estudo.

Ainda pensando em alguns depoimentos, outros fatos que tornam relevantes é o fato de um aluno procurar frisos em todos os lugares e outro aluno relacionar o friso com algo que fazia nos anos iniciais escolares.

É possível concluir que aulas diferenciadas ajudam no desenvolvimento de alguns conceitos, mas cabe ao professor identificar a melhor maneira de abordar os conteúdos com seus alunos, pois cada turma reage de uma maneira diferente a determinada abordagem metodológica

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CEMIN, K. L. *Ensino de Combinatória: Problemas de Divisão, Teoria de Vergnaud e Metodologia da Engenharia Didática.* 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008

NETO, A. S. M. et al. **Sistema COC de Ensino:** Apostila de Ensino. Ribeirão Preto: Pearson Education do Brasil, [201-], 9º ano, Grupo 3.

OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP). [2015]. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 30 abr. 2015

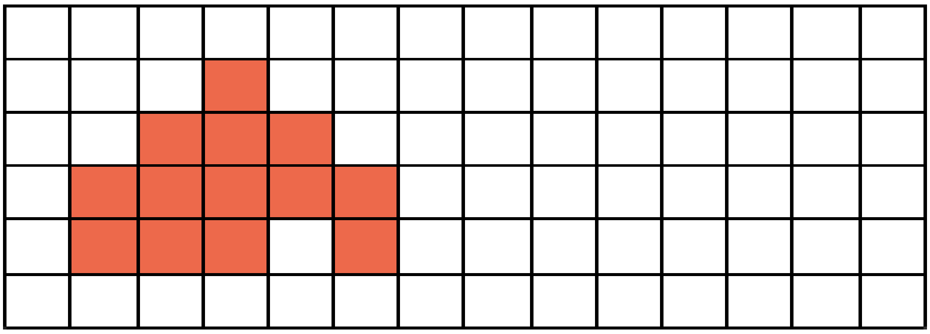
PASQUINI, R. C.G.; BORTOLOSSI, H. J. **Simetria – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Série história da matemática para o ensino; v.9)

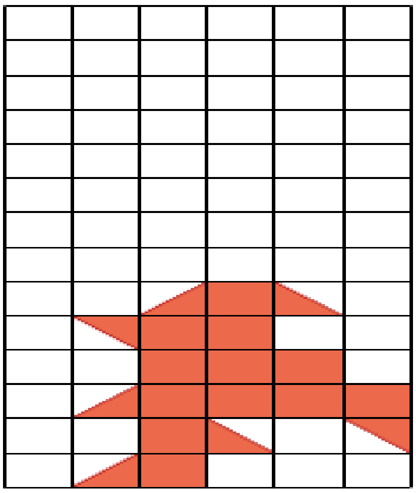
ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. Friezes and Mosaics. In:______. **Mathematics and Technology.** Montreal: Springer, 2008. p. 45 – 64.

YOUTUBE. **Os Azulejos de Alhambra.** [2015] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=SQtE3-Rz5x8>. Acesso em: 30 abr. 2015

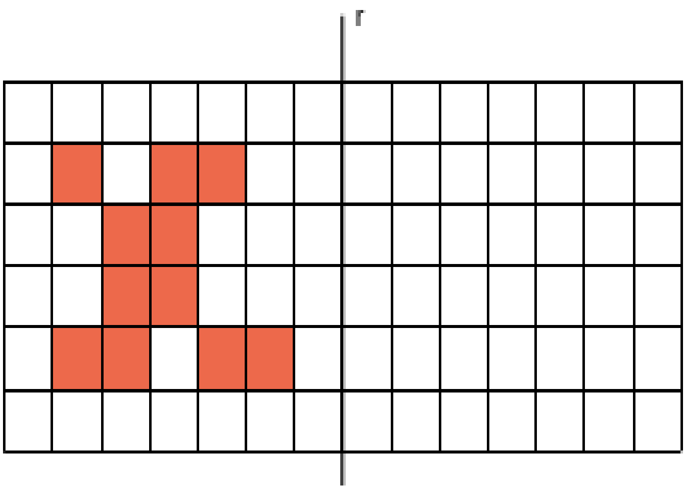
ANEXO A

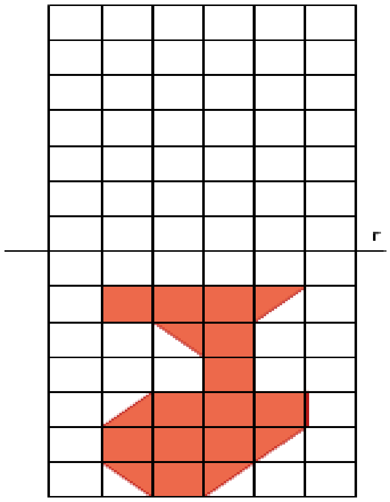
1) Aplique um movimento de translação e construa a figura transladada no quadriculado abaixo.



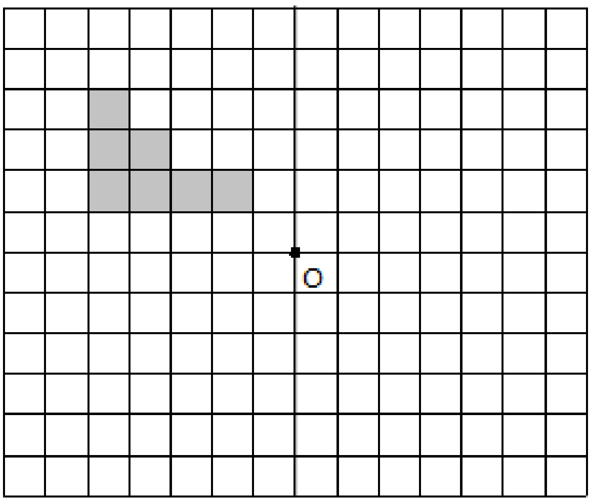


2) Aplique o movimento de reflexão em torna da reta r e construa uma figura congruente à figura dada em cada item.

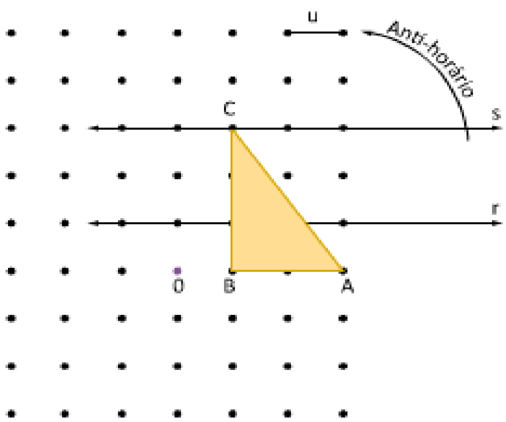




3) Construa uma figura semelhante à figura dada por meio de uma rotação de 180º, no sentido horário, em torno do ponto O.



4) Construa uma figura semelhante à figura dada por meio de uma rotação de 90º, no sentido anti-horário, em torno do ponto O.

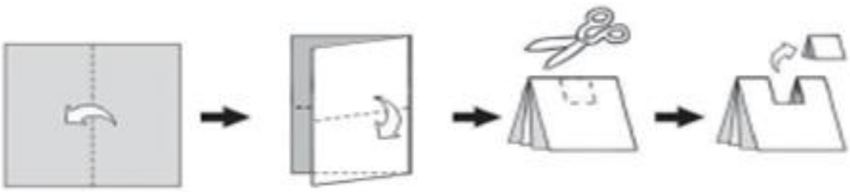


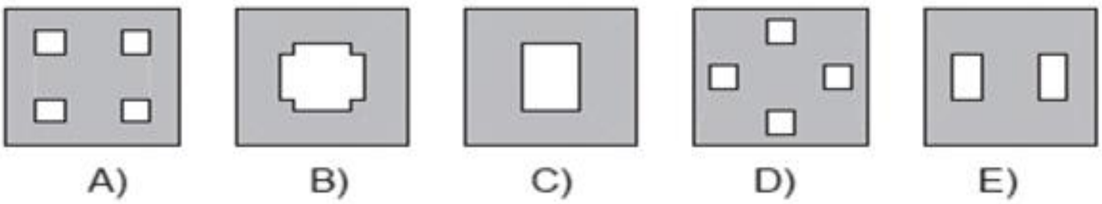
ANEXO B

1) Para uma atividade com sua turma, uma professora distribuiu 100 cadeiras em volta de uma grande mesa redonda e numerou-as consecutivamente de 1 a 100. A professora, que é muito caprichosa, colocou as cadeiras voltadas para o centro da mesa, mantendo a mesma distância entre cada cadeira e suas duas vizinhas. Qual é o número da cadeira que ficou exatamente à frente da cadeira com o número 27?

(A) 76
(B) 77
(C) 78
(D) 79
(E) 80

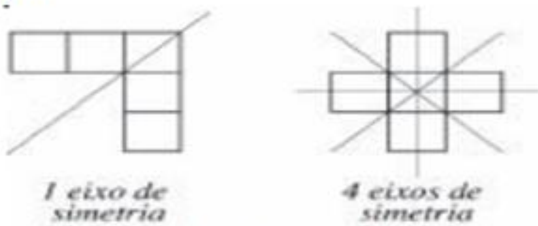
2) Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura. Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?



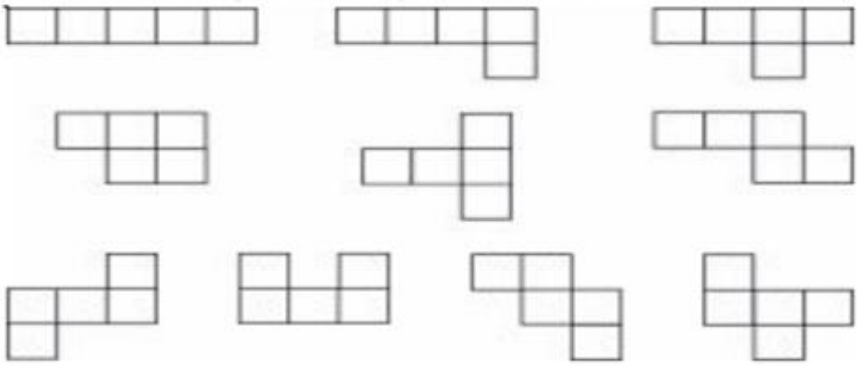


3) As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.

Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.

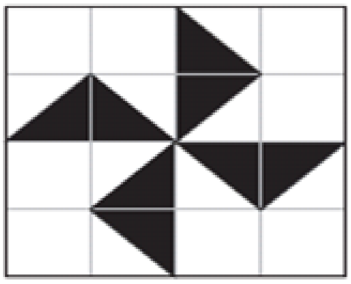


As figuras abaixo também são formadas por cinco quadrados iguais. Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?



(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

4) A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?



A) $\frac{1}{2}$

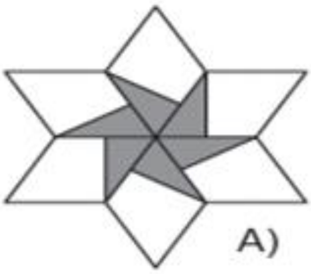
B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{16}$

5) A figura mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango. Dos cinco padrões abaixo, apenas um **não** pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?

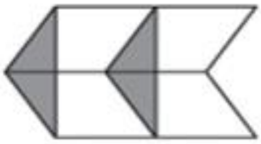


A)

B)

C)

D)



E)

6) A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

A) $\frac{1}{2}$

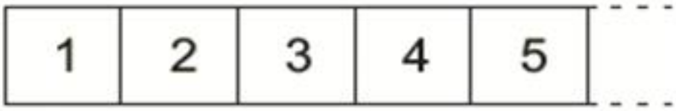
B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

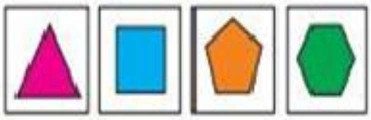
E) $\frac{9}{16}$

7) A figura mostra parte de uma tira retangular de papel dividida em quadradinhos numerados a partir de 1. Quando essa tira é dobrada ao meio, o quadradinho com o número 19 fica em cima do que tem o número 6. Quantos são os quadradinhos?

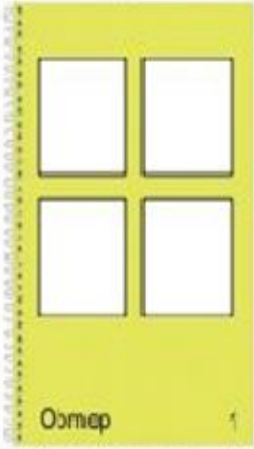


A) 24
B) 25
C) 26
D) 27
E) 28

8) Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.



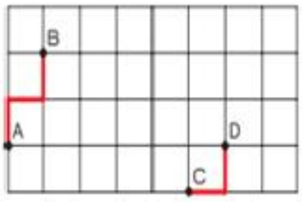
Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum. Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele pode ser visto de quatro maneiras diferentes (); já o quadrado só pode ser visto de uma única maneira ().

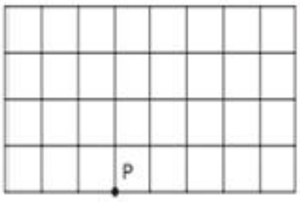


a) De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?

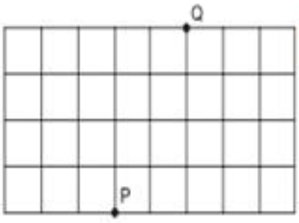
b) De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?

9) No quadriculado ao lado, as linhas horizontais e verticais representam ruas. Os pontos onde as ruas se cortam são as esquinas e a distância entre duas esquinas consecutivas quaisquer é 100 metros. No quadriculado estão indicadas quatro esquinas **A**, **B**, **C** e **D**. Qualquer caminho ligando as esquinas **A** e **B** tem, no mínimo, 300 metros; dizemos então que a *distância* entre **A** e **B** é 300 metros. Do mesmo modo, a distância entre as esquinas **C** e **D** é 200 metros.



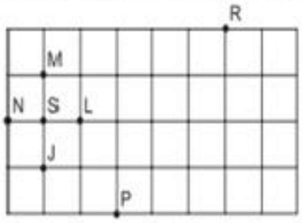


a) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas que estão a 300 metros da esquina **P**.



b) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas cujas distâncias à esquina **P** e à esquina **Q** são iguais.

c) A figura mostra uma esquina **S** e quatro esquinas vizinhas **J**, **L**, **M** e **N**. Calcule a soma das distâncias de cada uma dessas esquinas aos pontos **P** e **R**.



esquina	distância a P	distância a R	distância a P + distância a R
S			
J			
L			
M			
N			

d) Explique por que não há esquinas cujas distâncias às esquinas **P** e **R**, do item anterior, sejam iguais.