

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Programa nacional de mestrado profissional em matemática –
PROFMAT

PROPOSTAS PARA O ENSINO DA SEMELHANÇA

DAVID BRAGA PIRES DA SILVA

Orientador: Mestre Eduardo Wagner

RIO DE JANEIRO

2013

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Programa nacional de mestrado profissional em matemática –
PROFMAT

PROPOSTAS PARA O ENSINO DA SEMELHANÇA

DAVID BRAGA PIRES DA SILVA

Orientador: Mestre Eduardo Wagner

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, para obtenção do título de Mestre pelo Programa nacional de Mestrado profissional em Matemática – PROFMAT

RIO DE JANEIRO

2013

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor da minha vida e que nunca me desamparou na caminhada.

À família, que esteve sempre presente nos bons e maus momentos.

Ao IMPA, onde sempre fui recebido com total atenção e respeito, e que me permitiu atingir esse grande objetivo em minha vida.

Aos grandes mestres, como o professor Paulo César Pinto de Carvalho e principalmente o mestre Elon Lages Lima, que compartilharam comigo seus profundos conhecimentos e suas sabedorias inigualáveis.

Ao meu orientador, Eduardo Wagner que sempre foi incansável em tirar as minhas dúvidas e me levar a pensar de maneira mais elegante.

RESUMO

A semelhança, por sua importância e ligação direta com o mundo em que vivemos, merece ser abordada com mais cuidado e completude, uma vez que, mesmo intrinsecamente, faz parte das nossas memórias mais infantis, quando brincávamos com miniaturas do mundo real. Seja nas mais remotas histórias da humanidade ou nas modernas lentes ou câmeras, a semelhança esteve e está presente no cotidiano das pessoas, sendo utilizada como ferramenta para as nossas realizações. Este trabalho tem por objetivo principal levar os professores de matemática e os alunos a pensarem a semelhança num sentido mais amplo. Pois, praticamente todos os livros da literatura matemática abordam esse conceito de uma forma restrita aos triângulos. Com isso, propomos esta obra com o intuito de complementar essa lacuna no ensino da matemática. Com uma linguagem simples e de fácil compreensão espera-se que o leitor compreenda o conceito de semelhança na sua essência bem como as demonstrações apresentadas e as belas aplicações da semelhança.

ABSTRACT

The similarity, given its importance and direct link with the world in which we live, should be addressed with more attention and completeness, since even intrinsically it is part of our childhood memories, when we used to play with miniatures of the real world. Either in the remotest history of mankind or in the modern lenses of cameras, the similarity was and still is present in people's daily life being used as a tool for achievements. The main goal of this paper is to make math teachers and students think about the similarity in a broader sense. Almost all the books of the mathematical literature address that concept in a way restricted to triangles. Therefore, we propose this paper in order to fulfill that gap in mathematics teaching. With a simple language and easy to understand it is hoped that the reader understands both the concept of similarity in its essence and the demonstrations and beautiful applications of similarity.

SUMÁRIO

1. Parte dedicada ao aluno.....	8
1.1 Introdução	8
1.2 Semelhança	10
1.2.1 Definição de semelhança	10
1.2.2 Semelhanças no plano	11
1.2.3 Exercícios	20
1.2.4 Semelhanças no espaço	26
1.2.5 Exercícios	30
2. Parte dedicada ao professor.....	34
2.1 Definição de semelhança	34
2.2 Teoremas - relação entre semelhança - área - volume.....	35
2.3 Semelhança de triângulos	39
3. Uma breve abordagem histórica sobre a semelhança	47
3.1 Conclusão.....	54
4. Referências bibliográficas	55

1. Introdução

O presente trabalho tem por objetivo trazer à tona a discussão sobre a inserção do conteúdo de semelhança no Ensino Médio.

Durante um curto espaço de tempo, esse conceito é trabalhado no ensino fundamental e dificilmente volta a ser abordado em outro momento da vida escolar do aluno. Porém, devido a sua grande aplicabilidade e relevância, consideramos tal prática um equívoco e propomos um material completo que possa trabalhar novamente a semelhança no Ensino médio, quando os alunos já serão capazes de compreender o conceito na sua essência (devido ao estudo anterior da Geometria Espacial).

O trabalho é dividido em três partes principais. A primeira é dedicada ao aluno, é nessa parte que os professores encontrarão uma proposta de como o conceito de semelhança deveria ser transmitido aos alunos, servindo assim como um material aonde professores podem buscar recursos para suas aulas e também alunos podem ler e tirar suas dúvidas e resolver exercícios. Para isso, essa parte conta com exercícios resolvidos e propostos contextualizados e que chamem atenção para o caráter prático da semelhança.

A segunda parte é dedicada ao professor, nela são encontrados os conceitos rigorosamente matemáticos e demonstrações concisas que são necessárias ao entendimento dos transmissores do conhecimento. Nessa parte, o professor terá o embasamento teórico que não é tão aprofundado na primeira parte, ou seja, algumas lacunas (sejam elas demonstrações ou conceitos) que ficarem abertas na parte dedicada ao aluno serão preenchidas.

Na terceira parte do trabalho, são expostos alguns aspectos da semelhança que são interessantes e, a meu ver, são necessários para que o leitor possa contemplar a beleza matemática que há no conceito de semelhança. Numa breve descrição, a parte que trata de uma abordagem histórica expõe a semelhança presente em vários momentos da história da humanidade desde Tales de Mileto, por exemplo, até os quadros de Da Vinci.

1. Parte dedicada ao aluno

1.1 Introdução

Fazendo uma breve análise dos livros didáticos de matemática, podemos perceber que abordam a semelhança apenas para o caso dos triângulos. O conceito de semelhança está inteiramente presente na vida cotidiana sempre que paramos para observar uma ampliação ou uma redução de imagens. A ideia de semelhança é entendida intuitivamente muito cedo pelas crianças quando, ao assistirem um desenho animado ou mesmo observam figuras em livros ou revistas, percebem que um mesmo desenho pode ser reproduzido em diferentes tamanhos. Por exemplo, todos são capazes de reconhecer as figuras abaixo como semelhantes.

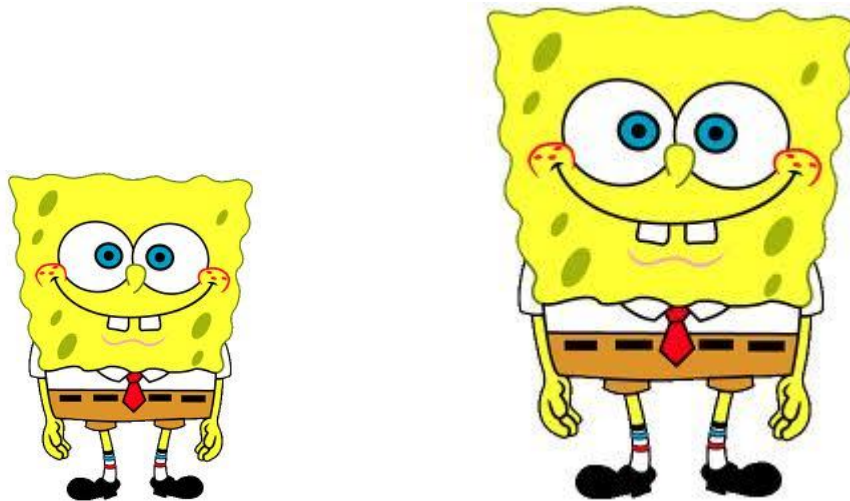


Figura 1.1

Intuitivamente, quando as meninas brincam de boneca durante a infância, ou mesmo os meninos ao brincarem com carrinhos em miniatura já desenvolvem o conceito de semelhança observando o mundo real. Para as meninas, as bonecas são representações reduzidas de pessoas adultas no seu mundo imaginário e para os meninos os carrinhos em miniatura são reduções dos velozes carros que circulam pelas ruas.

A semelhança é a base de toda a medição. Ela revela o segredo de fazer um mapa e desenhos em escala, e também explica alguns aspectos de imagens fotográficas.

O nosso trabalho propõe uma abordagem mais ampla do conteúdo de semelhança no Ensino Médio. Durante o ensino fundamental, os alunos têm

seu primeiro contato com o conceito de semelhança mais voltado para o caso dos triângulos, algumas outras figuras planas e até mesmo alguns sólidos geométricos também são abordados, mas sem muita profundidade. Geralmente no ensino médio esse conteúdo não volta a ser abordado como deveria o que consideramos um equívoco, já que está totalmente presente na Arquitetura, nas Engenharias e nas Artes.

A nossa proposta é que o conceito de semelhança volte a ser abordado no ensino médio com a devida profundidade e para isso, o nosso trabalho mostrará de uma forma clara e simples como esse tema poderia ser abordado.

O trabalho é dividido em duas partes. A primeira consiste numa parte escrita que aborde o conceito de semelhança desde as figuras planas mais simples até os sólidos geométricos, perpassando pelos conceitos de comprimento, área e volume, bem como de suas respectivas razões de semelhança. Essa parte se assemelhará muito com um capítulo de um livro texto cujo alvo principal é o entendimento do aluno, e para isso vários exemplos serão expostos e exercícios serão propostos.

Na segunda parte trataremos os conceitos de uma maneira matematicamente mais rigorosa. É neste momento que faremos as devidas demonstrações que faltarem na primeira parte. Agora, o público alvo são os professores e esse Apêndice fornecerá o embasamento teórico necessário para um desenvolvimento mais satisfatório das aulas propostas.

1.2 Semelhança

Este capítulo tem por objetivo o ensino-aprendizagem do conteúdo de semelhança no sentido mais amplo.

1.2.1 Definição

Duas figuras são semelhantes quando todos os segmentos que aparecem em uma aparecem na outra, multiplicados por um fator constante. Essa definição mostra que, se duas figuras são semelhantes, uma é a ampliação ou a redução da outra, sejam elas no plano ou no espaço.

Exemplo:

A figura abaixo representa uma redução de um desenho animado, neste caso o motorista dos Simpsons.

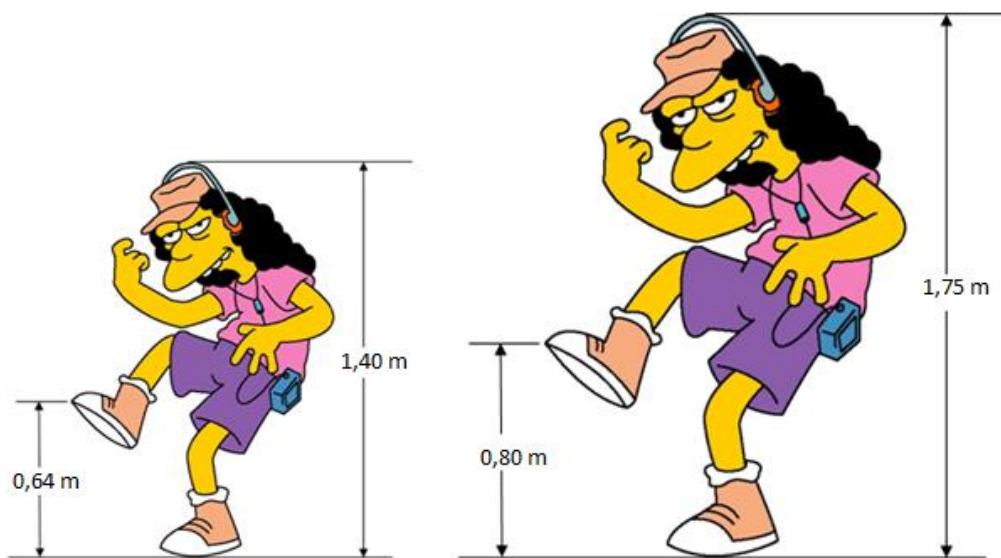


Figura 1.2

Observe que para obtermos a figura maior, basta multiplicarmos a menor por 1,25. Temos por exemplo, que $0,64 \cdot 1,25 = 0,8$ e $1,4 \cdot 1,25 = 1,75$. Com isso, temos que a razão de semelhança destas figuras é a constante $r = 1,25$.

É importante ressaltar que as figuras acima são aceitas como semelhantes uma vez que são anunciadas dessa maneira. Seria impossível

medir todos os segmentos a fim de nos certificarmos de que as figuras são realmente semelhantes. Seria um exagero de rigor, mesmo que pautado na definição, além de totalmente inviável.

1.2.2 Semelhanças no plano

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os seus lados forem proporcionais.

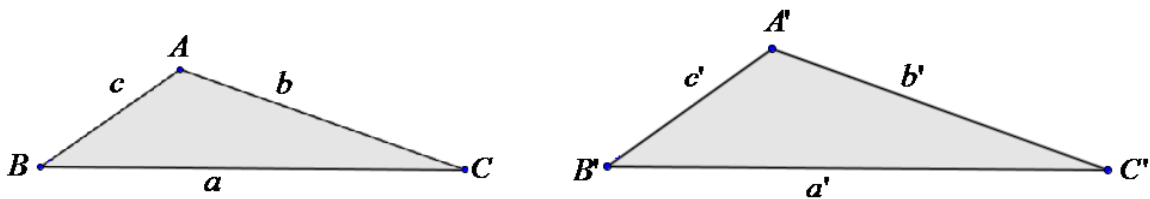


Figura 1.3

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

O número r é uma constante chamada de razão de semelhança das duas figuras.

Cabe observar que existem três formas de se concluir que dois triângulos são semelhantes. A primeira é a da definição, ou seja, se os lados dos triângulos são proporcionais, então eles são semelhantes. A segunda maneira é quando os dois triângulos possuírem os ângulos internos congruentes entre si. E a outra é quando os dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais. Então é importante se atentar ao fato de que triângulos semelhantes possuem lados proporcionais e conseqüentemente possuem ângulos internos congruentes entre si – o recíproco é verdadeiro. Todos esses fatos estão demonstrados na parte dedicada aos professores.

A seguir, trataremos cada um dos casos com mais detalhes.

1º Caso

Se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes.

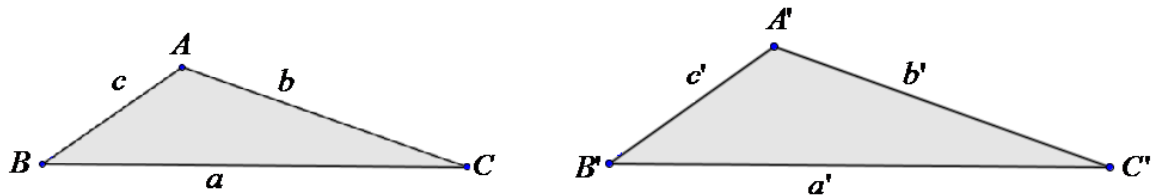


Figura 1.4

Neste caso:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Consequentemente, os ângulos internos $A \equiv A'$, $B \equiv B'$ e $C \equiv C'$

Exemplo:

Verifique se os triângulos a seguir são semelhantes.

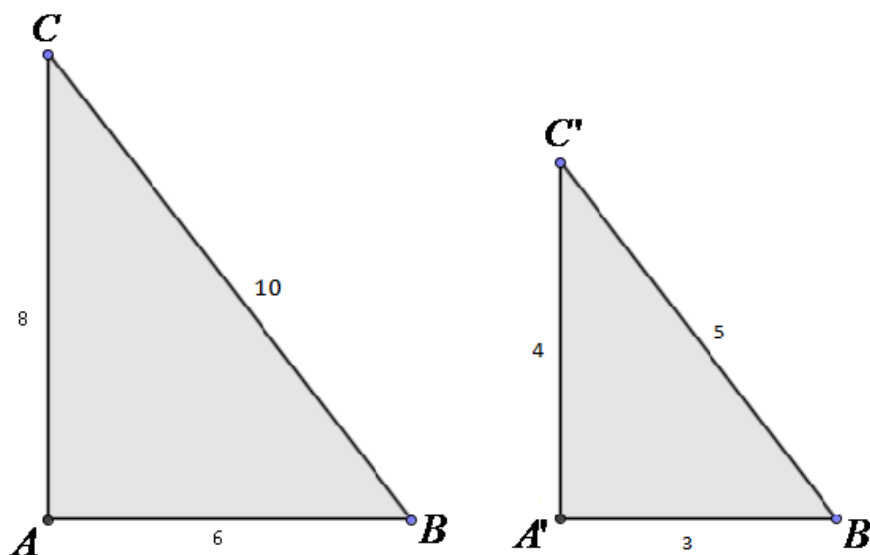


Figura 1.5

Temos que verificar se os lados homólogos obedecem à mesma razão, que por hora será a razão de semelhança.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Note que todos os lados homólogos são proporcionais e têm a mesma razão de semelhança $\frac{1}{2}$, portanto os triângulos são semelhantes.

2º Caso

Se os dois triângulos possuírem os ângulos internos, respectivamente congruentes entre si, os dois triângulos são semelhantes.

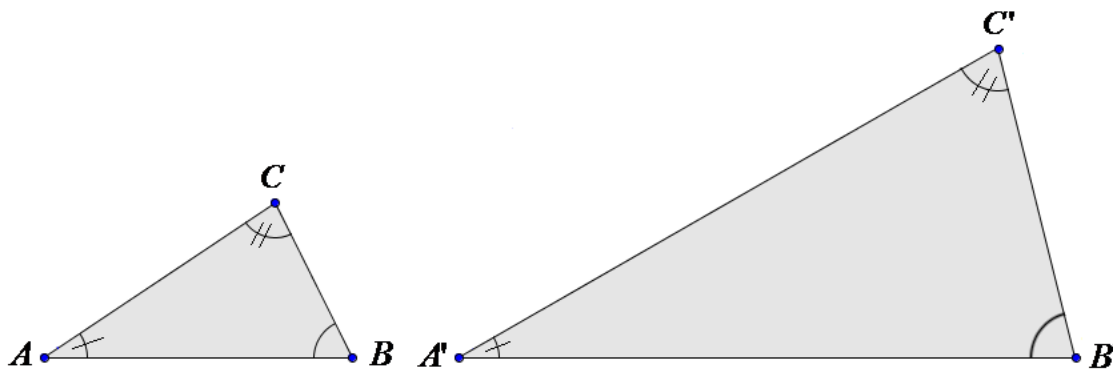


Figura 1.6

Neste caso:

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ e } \angle C = \angle C'$$

Consequentemente,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Logo, se dois triângulos possuem ângulos, respectivamente congruentes entre si, então são semelhantes. Cabe observar que o mesmo não vale para polígonos de gênero maior que três.

Observe os retângulos abaixo

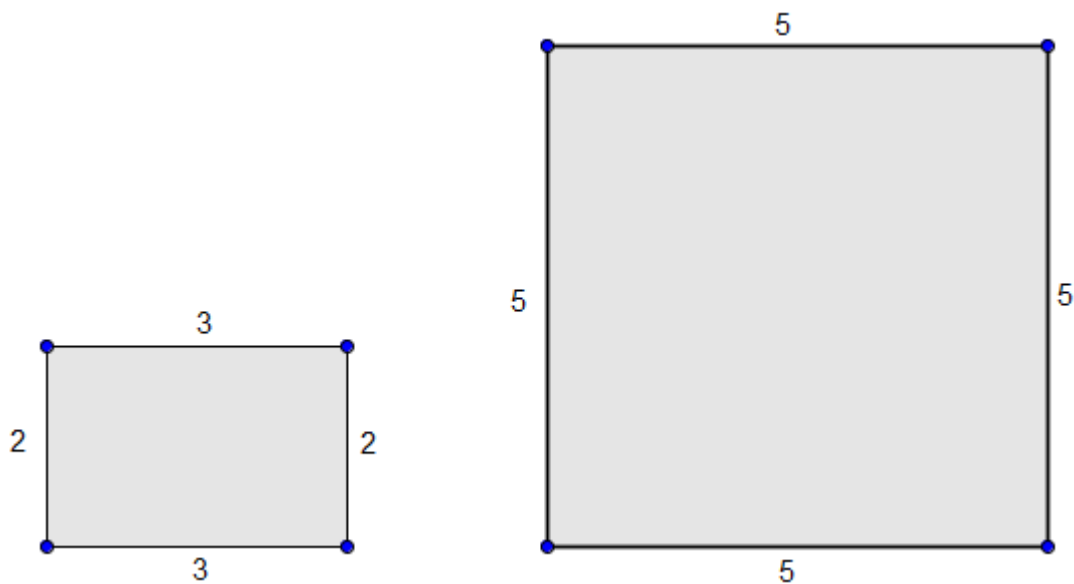


Figura 1.7

Possuem ângulos congruentes, mas os lados não são proporcionais, pois

$\frac{2}{5} \neq \frac{3}{5}$ e, portanto, não são semelhantes.

Sendo assim, figuras com ângulos congruentes não é garantia de figuras semelhantes. Esse fato só vale para os triângulos.

Veja o exemplo a seguir:

Obter o valor da medida x na figura abaixo:

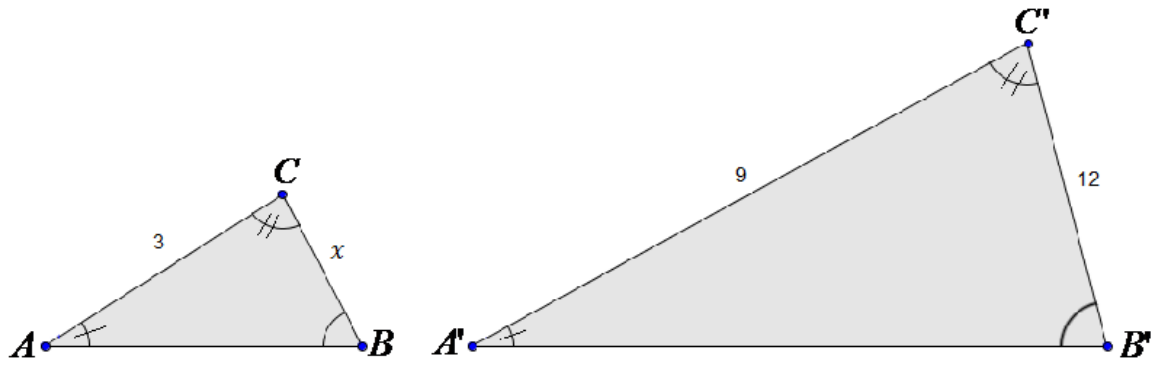


Figura 1.8

Como os triângulos possuem ângulos congruentes entre si, logo, são semelhantes e, portanto os lados homólogos são proporcionais, com isso

$$\frac{3}{9} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 4$$

3º Caso

Se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes.

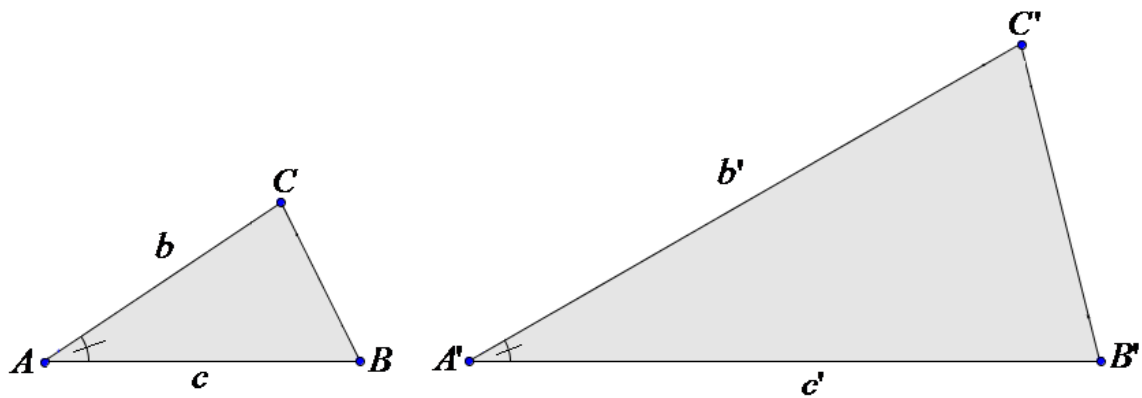


Figura 1.9

Neste caso:

$$\angle A \equiv \angle A' \text{ e } \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Consequentemente,

$$\angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B' \text{ e } \angle C \equiv \angle C' \text{ e } \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Veremos agora um exemplo interessante, em que a consequência de os triângulos serem semelhantes é o recurso usado para solucionar o problema:

Num triângulo ABC de lado $AC=12$, a reta AD divide internamente o lado BC em dois segmentos: $BD=18$ e $DC=6$. Se o ângulo $ABD=x$ e o ângulo $ACD=y$, o ângulo BDA é dado por:

Ilustração da figura do texto

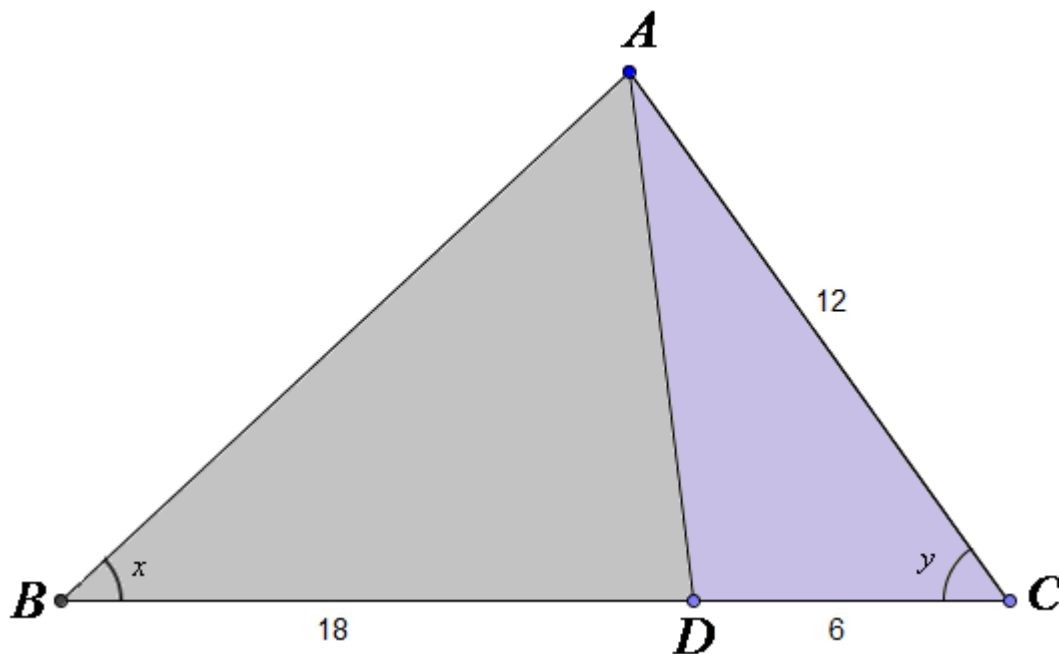


Figura 1.10

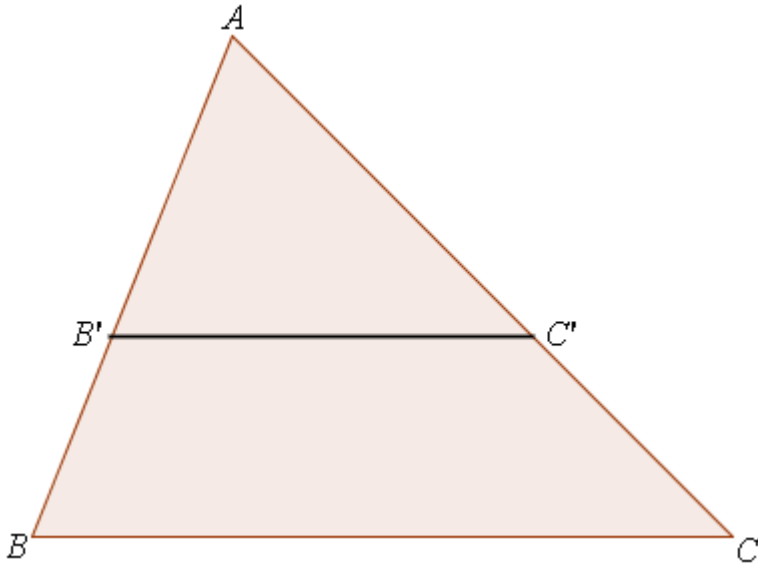
Observe que os triângulos ABC e DAC são semelhantes, pois,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{24}{12} = \frac{12}{6} \text{ e possuem o ângulo } C \text{ (adjacente aos lados}$$

proporcionais) comum. Como AC e DC são homólogos, temos que o ângulo

$\angle DAC = x$ e como o ângulo $\angle BAD$ é ângulo externo do triângulo $\triangle ADC$, temos que o ângulo $\angle BDA = x + y$.

Observação: No triângulo $\triangle ABC$, se tomarmos o segmento $B'C'$ paralelo ao lado BC , com $B' \in AB$ e $C' \in AC$, temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AB'C'$ são semelhantes.



$$BC \parallel B'C' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AB'C'$$

Semelhança de polígonos

Sabemos que todo polígono pode ser dividido em triângulos, observe os polígonos abaixo que foram divididos em vários triângulos através dos vértices A e A' .

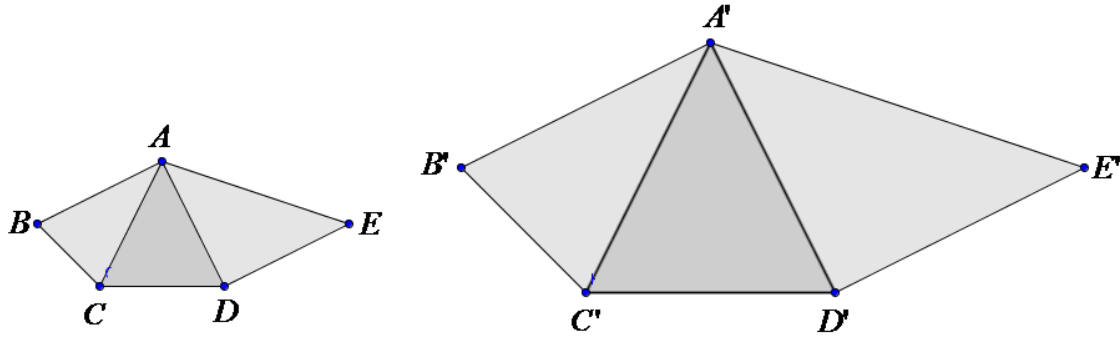


Figura 1.11

Dizemos que dois polígonos são semelhantes se puderem ser divididos em triângulos respectivamente semelhantes. Observando os polígonos acima, temos que:

- Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.
- Os triângulos ACD e $A'C'D'$ são semelhantes.
- Os triângulos ADE e $A'D'E'$ são semelhantes.

Portanto, podemos afirmar que os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são semelhantes. Concluimos que a razão de semelhança r vale não apenas para lados proporcionais, mas para quaisquer segmentos correspondentes, inclusive as diagonais dos polígonos.

Assim:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'} = r$$

Temos ainda que, para quaisquer polígonos semelhantes, a razão r entre lados homólogos também é igual à razão entre seus perímetros. E ainda que, a razão entre suas áreas é igual à r^2 .

Demonstração:

Sejam dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$, de razão de semelhança r e lados homólogos AB e $B'C'$.

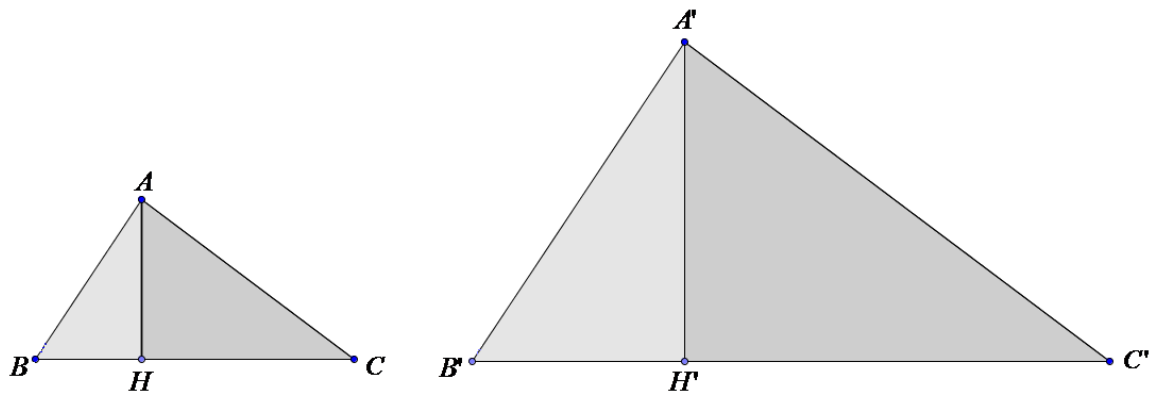


Figura 1.12

Sendo assim, temos

$$r = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'}$$

Seja S e S' , respectivamente, as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, logo

$$S = \frac{BC \cdot AH}{2} \text{ e } S' = \frac{B'C' \cdot A'H'}{2}$$

Observe agora que

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{BC \cdot AH}{2}}{\frac{B'C' \cdot A'H'}{2}} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AH}{A'H'} = r \cdot r = r^2$$

Como todos os polígonos semelhantes, são divididos em triângulos semelhantes, temos que a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre estes polígonos. E em geral, esta regra vale para todas as figuras planas semelhantes.

A seguir, observe alguns exercícios resolvidos.

1.2.3 Exercícios

Exercícios resolvidos:

1) Sejam três retângulos R_1 , R_2 e R_3 . Se R_1 é semelhante a R_2 e R_2 é semelhante a R_3 .

a) R_1 é semelhante a R_3 ?

b) Caso sejam semelhantes, o que podemos dizer sobre a razão de semelhança entre R_1 e R_3 ?

Solução:

Seja r a razão de semelhança entre R_1 e R_2 e k a razão de semelhança entre R_2 e R_3 . Sendo assim, os retângulos ficam da seguinte forma:

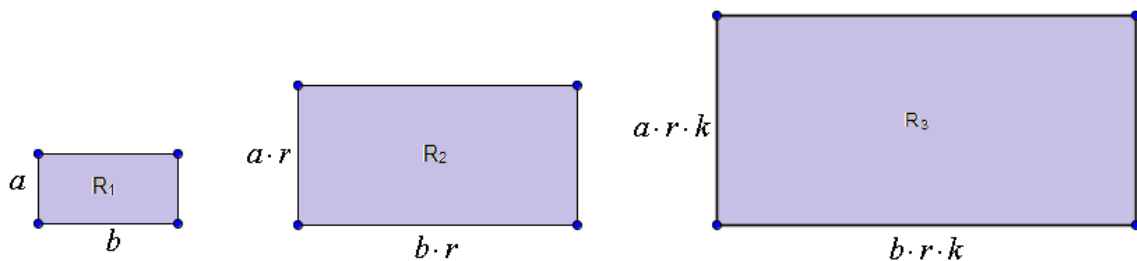


Figura 1.13

a) Sim, pois os lados são proporcionais, ou seja,

$$\frac{a \cdot r \cdot k}{a} = \frac{b \cdot r \cdot k}{b}$$

b) Seja v a razão de semelhança entre R_1 e R_3 , então,

$$v = \frac{a \cdot r \cdot k}{a} = \frac{b \cdot r \cdot k}{b} = r \cdot k$$

Portanto, a razão de semelhança entre R_1 e R_2 é o produto das constantes r e k .

2) As alturas correspondentes de dois triângulos semelhantes valem 5 e 20. Obter a razão entre as áreas destes triângulos:

Solução:

Razão de semelhança:

$$r = \frac{5}{20}$$

Como a razão entre as áreas é: r^2

Temos:

$$r^2 = \left(\frac{5}{20}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Portanto, a razão entre as áreas dos triângulos vale $\frac{1}{16}$.

Exercícios propostos:

1. Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados (em particular, dois quadrados) são figuras semelhantes. Quando é que dois retângulos são semelhantes?
2. Usando semelhança de triângulos, mas não diretamente a noção de área, prove que o produto da base pela altura de um paralelogramo não depende de qual lado se tomou como base.
3. Um triângulo teve seus lados aumentados de 30%, obtendo-se um novo triângulo semelhante ao primeiro.
 - a) Qual a razão de semelhança?
 - b) Qual foi o percentual de aumento de sua área?
4. Sejam OX , OY semirretas de origem O e $A(x,y)$ a área do triângulo de vértice O e base XY , com $OX = x$, $OY = y$. Prove que $A(x,y)$ é diretamente proporcional a x e y e conclua que $\frac{A(x,y)}{A(x',y')} = \frac{x \cdot y}{x' \cdot y'}$.
5. No exercício anterior tem-se $A(x,y) = k \cdot x \cdot y$. Determine k supondo que o ângulo $XOY = 90^\circ$, 60° e 45° .
6. Por meio de oito pontos, divide em três partes iguais cada lado do quadrado circunscrito a um círculo de raio r . Corte os quatro cantos do quadrado, obtendo um octógono cujos vértices são oito pontos de subdivisão. Mostre que a área desse octógono é igual a $\frac{28r^2}{9}$. De que modo este processo conduz a um valor aproximado de π ? Qual é esse valor?

7. Um quadrado tem lado 5cm . Qual será o perímetro do outro quadrado, sabendo-se que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo é $3,14$?

8. Trace no plano as semirretas OX , OY , OZ com a mesma origem O , de modo que OZ esteja no interior do ângulo XOY . Por cada ponto P em OZ , sejam Q o pé da perpendicular baixada de P sobre OX e S a interseção com OY da paralela a OX passando por P . Prove que a razão $\frac{PQ}{OS}$ não depende do ponto P tomado em OZ .

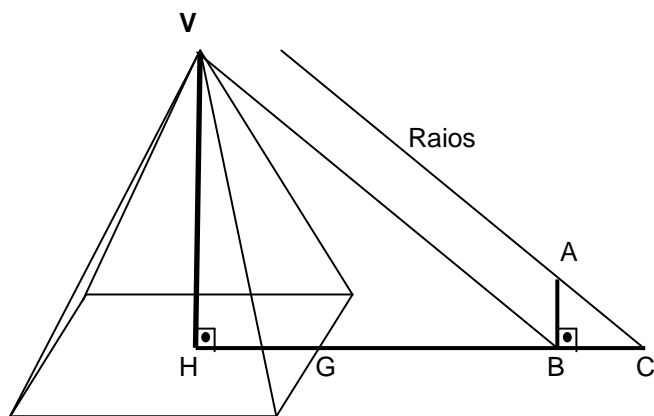
9. Sejam A , B , C e D pontos sobre a circunferência, dispostos na mesma ordem dos números de um mostrador de relógio. Sobre o segmento AC tome um ponto E tal que os ângulos ABE e DBC sejam iguais. Prove que os triângulos ABE e DBC são semelhantes, o mesmo ocorrendo com os triângulos ABE e BCE . Conclua daí que $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. (“Num quadrilátero inscrito, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos” .)

10. O resultado do exercício anterior é conhecido como Teorema de Ptolomeu. Mostre que ele pode ser usado para exprimir o lado do polígono regular de $2n$ lados, inscritos no círculo de raio r , em função do polígono regular de n lados inscritos no mesmo círculo.

11. Dados um triângulo ABC e um retângulo R , ache um retângulo semelhante a R com um vértice sobre AB , outro sobre AC e os dois vértices restantes sobre o lado BC . Em particular, mostre como obter um quadrado que tenha um lado sobre BC e os vértices restantes sobre AB e AC . [Sugestão: tome um pequeno retângulo, semelhante a R , com um lado sobre BC e um vértice sobre AB . Ligue o quarto vértice a A e prolongue até encontrar AC .

12. A pirâmide de Quéops, construída por volta de 2.500 a.C. é considerada uma das grandes maravilhas do mundo antigo; sua base é um

quadrado cujos lados medem cerca de 230 metros. O filósofo grego Tales, nascido na cidade de Mileto por volta do ano 585 a.C., conseguiu medir a altura da pirâmide de Quéops. Partindo do princípio de que existe uma razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projeta no chão, e que esta razão é a mesma para diferentes objetos no mesmo instante. No caso da pirâmide de Quéops ele usou apenas um bastão e as medidas das sombras da pirâmide e do bastão, num mesmo instante.



Sabendo que o bastão AB usado por Tales, media 2 metros, a sombra da pirâmide GB media 155 metros e que a sombra do bastão BC mede 3,6 metros. Daí pode-se afirmar que a medida da altura da pirâmide de Quéops calculada por Tales de Mileto foi de: (o ponto H é o centro do quadrado)

13. Num triângulo onde o ângulo de vértice é a metade de cada um dos ângulos da base, mostre que a bissetriz de um ângulo de base decompõe o triângulo total em dois triângulos parciais, ambos isósceles, um dos quais é semelhante ao triângulo dado. Conclua que a base do triângulo inicial divide cada um dos lados em média e extrema razão.

14. Use o Exercício anterior para exprimir em função de r o lado do decágono regular inscrito num círculo de raio r e, a partir daí calcular a área desse decágono.

15. A planta de uma casa, que é uma redução da casa no real, foi feita na escala (razão de semelhança). Uma sala retangular dessa casa tem 5cm e 6cm de dimensão nessa planta. Nessas condições:

1. Quais as dimensões reais dessa sala?
2. Qual a área da sala na planta?
3. Qual a área da sala no real?

1.2.4 Semelhanças no espaço.

A definição de semelhança se estende para o estudo das figuras espaciais. Para entender melhor as semelhanças no espaço, vamos observar algumas semelhanças entre sólidos geométricos.

Considere uma pirâmide cuja base é um polígono qualquer. Se seccionarmos essa pirâmide por um plano paralelo à base, dividiremos a pirâmide em dois outros sólidos, observe.

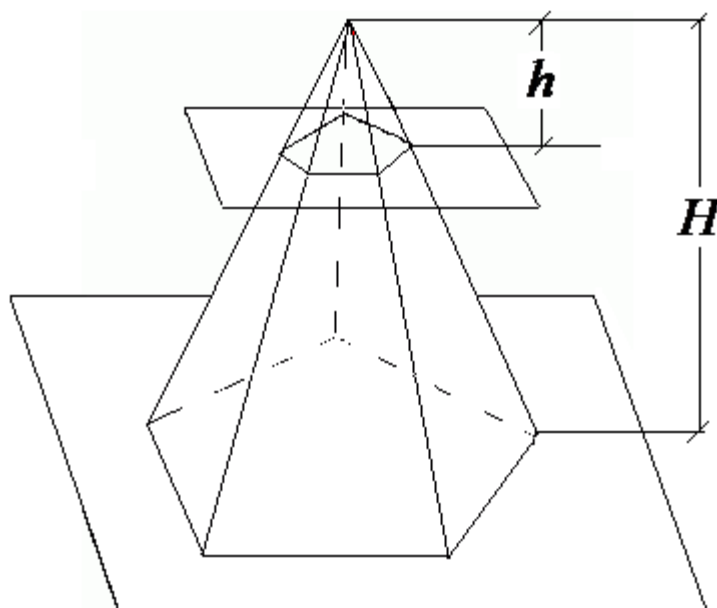


Figura 1.14

Ao seccionar a pirâmide com um plano paralelo à sua base encontramos uma segunda pirâmide semelhante à primeira, ou seja, os segmentos correspondentes são proporcionais. De maneira análoga ao que foi anunciado na página 17, onde foi declarado que qualquer reta que intersecta um triângulo e é paralela a um dos lados forma um novo triângulo semelhante ao original, estendemos esse raciocínio para o espaço, mais especificamente para o caso das pirâmides seccionadas por planos paralelos às suas bases. Teremos então uma razão r de semelhança. Aplicando a semelhança entre as figuras, teremos:

Ao seccionar a pirâmide encontramos uma segunda pirâmide semelhante à primeira, ou seja, os segmentos correspondentes são proporcionais. Teremos então uma razão r de semelhança. Aplicando a semelhança entre as figuras, teremos:

$$\frac{a_b}{a_B} = \frac{a_l}{a_L} = \frac{a_p}{a_P} = \frac{h}{H} = r$$

Onde a_b e a_B são as medidas das arestas das bases, a_l e a_L são medidas das arestas laterais, a_p e a_P são os apótemas das bases e h e H são as alturas das pirâmides. Temos ainda que, a razão entre superfícies correspondentes das pirâmides é r^2 e a razão entre seus volumes é r^3 .

De um modo geral, se dois sólidos geométricos são semelhantes, a razão de semelhança é igual à razão entre dois segmentos correspondentes quaisquer dos dois sólidos, a razão entre áreas correspondentes é igual ao quadrado da razão de semelhança e a razão entre seus volumes é o cubo da razão de semelhança.

Demonstração:

Sejam duas pirâmides semelhantes P_1 e P_2 de razão de semelhança r e alturas, respectivamente, H e H' e áreas das bases, respectivamente, S e S' e volumes, respectivamente, V e V' .

Observe que $r = \frac{H}{H'}$. Já sabemos que $\frac{S}{S'} = r^2$.

Como $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$ e $V' = \frac{1}{3} \cdot S' \cdot H'$, temos que

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S \cdot H}{\frac{1}{3} \cdot S' \cdot H'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{H}{H'} = r^2 \cdot r = r^3$$

Como todos os poliedros semelhantes, são divididos em pirâmides semelhantes, temos que a razão entre duas regiões homólogas de dois poliedros semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre estes poliedros e a razão entre os volumes de dois poliedros semelhantes

é igual ao cubo da razão de semelhança entre estes poliedros. E em geral, esta regra vale para todos os sólidos geométricos semelhantes.

A seguir, exploraremos um pouco mais esses conceitos nos próximos exemplos.

Há um quebra cabeça bastante conhecido, que surgiu nos anos 80, chamado “cubo mágico”, que consiste em um cubo dividido em diversos cubos menores.

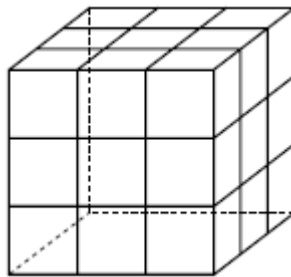


Figura 1.15

Observando melhor, vemos que cada aresta desse cubo foi dividida em três partes iguais. Se observarmos atentamente, veremos que cada face ficou dividida em nove quadrados. Ou seja: dividindo cada aresta em três partes iguais, a área de cada face ficou dividida em $3^2 = 9$ quadrados menores. Podemos também observar que o cubo ficou dividido em cubinhos menores, cujas arestas são iguais à terça parte da aresta do cubo inicial.

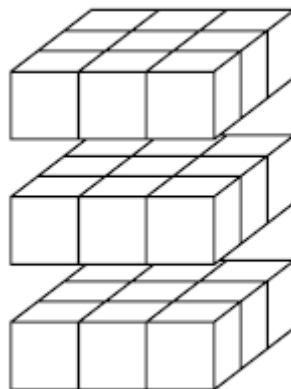


Figura 1.16

Observe que podemos dividir o cubo em três placas, sendo cada placa formada de $3^2 = 9$ cubinhos. Assim, teremos $3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$ cubinhos. Isso nos permite concluir que, se a razão entre as medidas das arestas dos dois cubos (menor e maior) é $r = 3$, a razão entre suas áreas é $r^2 = 3^2 = 9$ e a razão entre seus volumes é $r^3 = 3^3 = 27$, como já descrito anteriormente.

Curiosidade.

Um problema matemático, que despertou curiosidade e mobilizou inúmeros matemáticos na Grécia Antiga, foi o da duplicação do cubo. Ou seja, dado um cubo de aresta a , é possível montar outro cubo que tenha o dobro do volume do primeiro?

Como vimos a razão de semelhança entre os volumes de dois cubos (que são sólidos semelhantes) deve ser igual ao cubo da razão de semelhança entre as arestas.

Assim, devemos ter:

$$V_2 = 2 \cdot V_1$$

Portanto:

$$x^3 = 2 \cdot a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2 \cdot a^3} \Rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

Não é possível obter com régua e compasso um segmento $a \cdot \sqrt[3]{2}$ dado o segmento a , pois a partir dos trabalhos em álgebra de Ruffini, Abel e Galois, no século XIX, demonstrou-se que é impossível fazer tal construção. Temos que não é possível montar outro cubo que tenha o dobro do volume do primeiro. Porém com uma calculadora, podemos obter um cubo com uma aresta muito próxima de $a \cdot \sqrt[3]{2}$, mas nunca igual.

Cabe ressaltar que na geometria das dobraduras tal construção é possível, $\sqrt[3]{2}$ é a solução da equação $x^3 - 2 = 0$ e com dobraduras de uma folha de papel, é possível resolver qualquer equação cúbica $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$, o que não é possível de ser feito com régua e compasso. Para um detalhamento maior sobre o assunto, visitar [12].

1.2.5 Exercícios

Exercícios resolvidos:

1) Uma tulipa de suco tem 15cm de profundidade e sua capacidade é de 300ml . O suco é servido com 3cm de espuma. Calcule a quantidade de suco contido na tulipa?

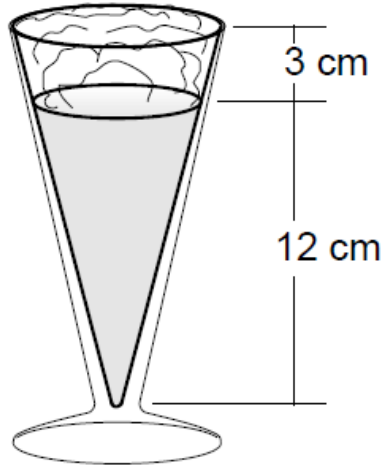


Figura 1.17

Observe que a figura obtida pelo suco e a tulipa são semelhantes e portanto, temos que a razão entre as alturas dessas figuras elevada ao cubo é igual a razão entre seus volumes. Portanto

$$\left(\frac{12}{15}\right)^3 = \frac{V_{\text{suco}}}{300} \Rightarrow V_{\text{suco}} = 153,6\text{ml}$$

Observa-se que, aproximadamente 50% do volume é espuma e 50% é suco; portanto o consumidor na hora de pagar pelos 300ml , na verdade está pagando pela metade disso. Então já sabe: “suco só se for sem espuma”.

2) Uma loja vende miniaturas do Cristo Redentor confeccionadas em madeira não oca. São dois tamanhos das miniaturas, sendo que uma delas tem a metade da altura da outra.

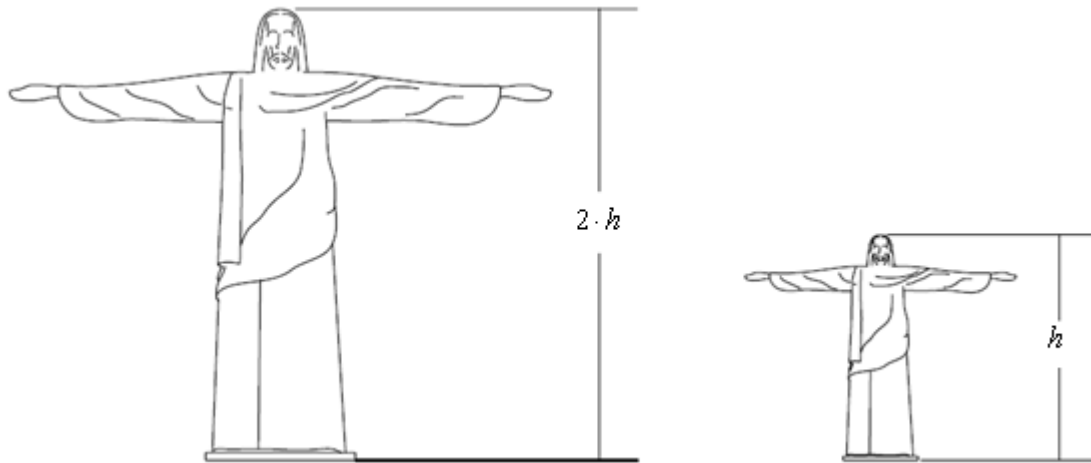


Figura 1.18

Presumindo-se que o preço é proporcional ao volume de madeira gasto na confecção das miniaturas, qual deve ser o preço da maior, se a menor custa R\$5,00?

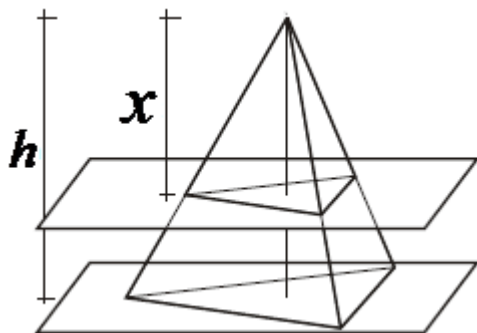
Solução:

Como as duas imagens são semelhantes, a razão entre dois comprimentos homólogos é igual à razão de semelhança r , portanto $r = \frac{2h}{h} = 2$. Com isso, temos que a razão entre os seus volumes é $r^3 = 2^3 = 8$.

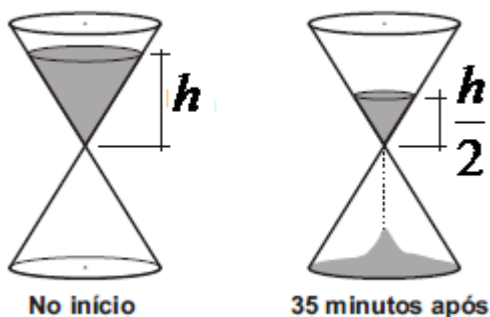
Como o preço é proporcional ao volume, e o volume da estatueta maior é oito vezes o volume da menor, seu preço deve ser $R\$5,00 \cdot 8 = R\$40,00$

Exercícios propostos:

1. Prove que dois cubos ou duas esferas quaisquer são figuras semelhantes.
2. Um cubo teve suas arestas aumentadas de 20% do seu tamanho. Qual foi percentual de aumento do volume desse cubo?
3. A maquete de uma praça é feita na escala 1:50. Se a praça tem $6000m^2$ de área, qual será a área da maquete?
4. Pai e filho possuem corpos de formas semelhantes. Porém, enquanto o pai mede $1,75m$, seu filho mede $1,40m$. Se o filho pesa $40kg$, qual deverá ser, aproximadamente, o peso do pai?
5. De que modo se poderia usar uma balança para calcular o volume de um sólido?
6. Uma pessoa vai revestir o chão do quarto e da sala de sua casa, com um mesmo tipo de lajota. As medidas da sala valem exatamente o dobro das medidas do quarto. Se ela necessita de seis caixas de lajota para revestir o quarto, quantas caixas serão necessárias para revestir a sala?
7. Você já estudou, em Química, que, nos átomos, os elétrons giram em torno do núcleo a uma distância de 104 vezes o raio do núcleo. Uma pessoa resolveu montar um modelo de átomo, escolhendo, para representar seu núcleo, uma esfera de isopor com $1cm$ de raio. A que distância dessa esfera ela deverá colocar os elétrons?
8. Dividindo-se uma pirâmide de altura h com um plano paralelo ao da base, à distância x do vértice, obtém-se duas partes de áreas laterais iguais. Qual o valor de x ?



9. Uma ampulheta é formada por dois cones de revolução iguais, com eixos verticais e justapostos pelo vértice, o qual tem um pequeno orifício que permite a passagem de areia da parte de cima para a parte de baixo. Ao ser colocada para marcar um intervalo de tempo, toda a areia está na parte de cima, e, 35 minutos após, a altura da areia na parte de cima reduziu-se à metade, como mostra a figura. Supondo que em cada minuto a quantidade de areia que passa do cone de cima para o de baixo é constante, em quanto tempo mais toda a areia terá passado para a parte de baixo ?



10. Dadas as semirretas não coplanares OX , OY , OZ com a mesma origem O , seja $V(x,y,z)$ o volume da pirâmide de vértice O cuja base é o triângulo XYZ , com $OX = x$, $OY = y$ e $OZ = z$.

a) Prove que $V(x,y,z)$ é diretamente proporcional a x , y e z e conclua que $\frac{V(x,y,z)}{V(x',y',z')} = \frac{x \cdot y \cdot z}{x' \cdot y' \cdot z'}$.

b) Se os ângulos XOY e XOZ e YOZ são retos, mostre que

$$V(x,y,z) = \frac{x \cdot y \cdot z}{6}.$$

2. Parte dedicada ao professor

2.1 Introdução

A ideia inicial de semelhança está intrinsecamente ligada à “mudança de escala”, ou seja, ampliação ou redução de uma determinada figura, alterando suas medidas, porém sem modificar suas proporções.

Geralmente a definição de semelhança está particularmente ligada a polígonos, isto é, “ângulos iguais e lados homólogos proporcionais”.

Entretanto, em algumas situações, teremos figuras que são semelhantes mesmo não sendo polígonos. Por exemplo, duas circunferências são semelhantes embora não possuam lados ou ângulos para comparar.

A definição a seguir é geral, e nem mesmo cita ângulo, sendo extremamente importante para o estudo da semelhança.

2.1 Definição de semelhança

Definição 1: Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo.

Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r , quando existe uma correspondência biunívoca $g:F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F' , com a seguinte propriedade:

Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X'=g(X)$, $Y'=g(Y)$ são seus correspondentes em F' então $X'Y'=r \cdot XY$.

A correspondência biunívoca $g:F \rightarrow F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r , chama-se uma semelhança de razão r entre F e F' . Com isso, teremos as seguintes definições:

- a) Se $X'=g(X)$, diz-se que os pontos X e X' são homólogos.
- b) Se $X'=g(X)$ e $Y'=g(Y)$, diz-se que os segmentos XY e $X'Y'$ são homólogos.

Veremos agora dois teoremas importantes que são a relação entre semelhança e área e semelhança e volume.

2.2 Teoremas - relação entre semelhança - área - volume

Teorema 1: A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança

Considerações iniciais.

- 1) A área do retângulo é o produto da base pela altura ;
- 2) Se multiplicarmos a base e a altura de um retângulo por um número positivo r , temos que a área desse retângulo fica multiplicado por r^2 ;

Demonstração:

Sejam os retângulos F e F' abaixo; onde obtemos F' multiplicando cada dimensão de F por um número positivo r .

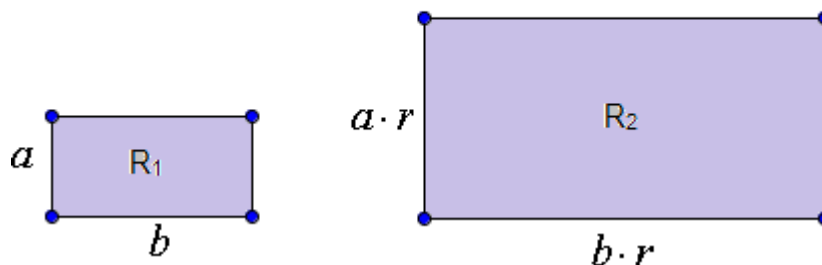


Figura 2.1

$$A(F) = a \cdot b \text{ e } A(F') = (a \cdot r) \cdot (b \cdot r) = (a \cdot b) \cdot r^2 \Rightarrow A(F') = A(F) \cdot r^2$$

- 3) Um polígono retangular é a reunião de vários retângulos justapostos. Ou seja, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado;
- 4) Define-se a área da figura F como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F ;
- 5) Considere $A(F)$ = área da figura F .

Demonstração:

Seja $\varphi: F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F' . Como vimos anteriormente, $A(F') = A(F) \cdot r^2$ quando se trata de um retângulo e, portanto também quando F e F' são polígonos retangulares. Assim, a semelhança φ transforma todo polígono retangular P , contido em F no polígono retangular P' , contido em F' , tal que $A(P') = A(P) \cdot r^2$. Assim, a área de F' é o número real cujas aproximações por falta são iguais a r^2 vezes as aproximações por falta da área de F . Desta forma, temos:

$$A(F') = r^2 \cdot A(F) \Rightarrow \frac{A(F')}{A(F)} = r^2$$

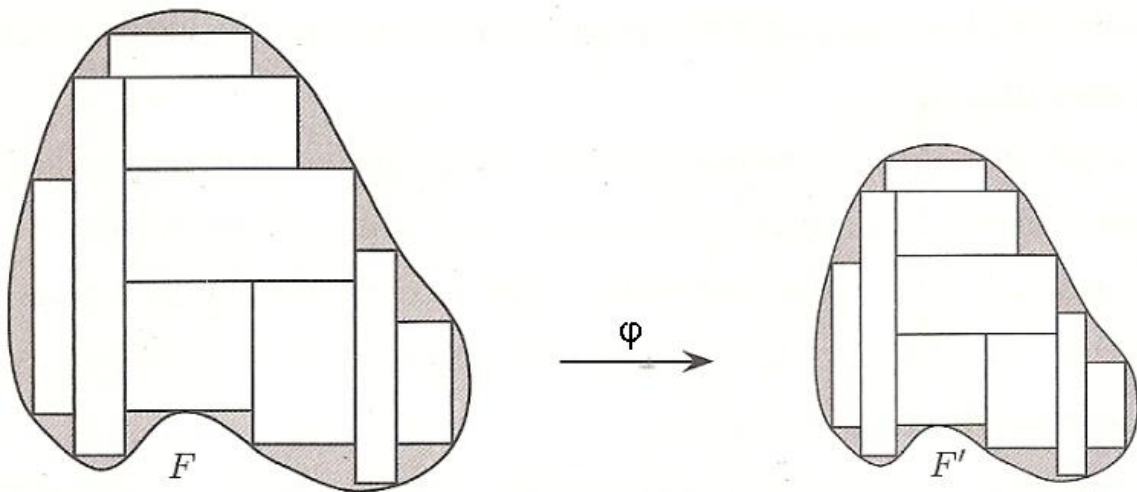


Figura 2.2

Teorema 2: A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança

Considerações iniciais.

- 1) Seja um paralelepípedo retângulo P , cujas arestas medem a , b e c , temos que seu volume é dado por $vol(P) = a \cdot b \cdot c$;
- 2) Se multiplicarmos as arestas de um paralelepípedo retângulo por um número positivo r , temos que o volume desse paralelepípedo fica multiplicado por r^3 ;

Demonstração:

Sejam os paralelepípedos retângulos F e F' abaixo; onde obtemos F' , multiplicando cada dimensão de F por um número positivo r .

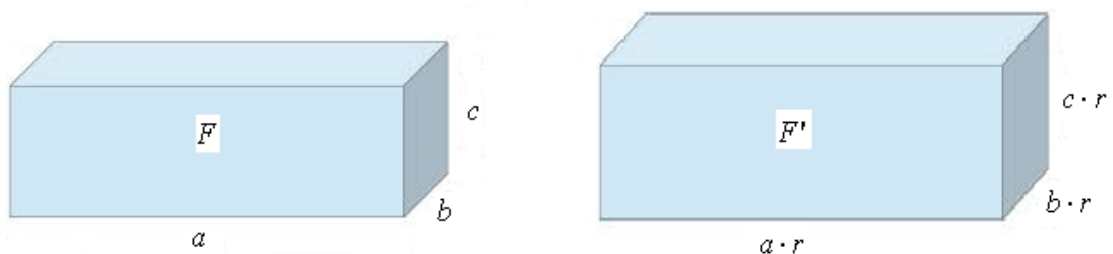


Figura 2.3

$$V(F) = a \cdot b \cdot c$$

$$V(F') = (a \cdot r) \cdot (b \cdot r) \cdot (c \cdot r) \Rightarrow V(F') = (a \cdot b \cdot c) \cdot r^3 \Rightarrow V(F') = V(F) \cdot r^3$$

- 3) Um poliedro retangular é todo sólido formado pela reunião de um número finito de paralelepípedos retângulos justapostos. O volume do poliedro retangular é a soma dos volumes dos paralelepípedos retângulos que o constituem;
- 4) Define-se o volume do sólido S como o número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S ;
- 5) Considere $V(S) =$ volume do sólido S .

Demonstração:

Seja $\varphi: S \rightarrow S'$ uma semelhança de razão r entre os sólidos S e S' . Como vimos anteriormente, $V(S') = V(S) \cdot r^3$ quando se trata de um paralelepípedo retângulo e portanto também quando S e S' são poliedros retangulares. Assim, a semelhança φ transforma todo poliedro retangular P , contido em S no poliedro retangular P' , contido em S' , tal que $V(P') = V(P) \cdot r^3$.

Assim, o volume de S' é o número real cujas aproximações por falta são iguais a r^3 vezes as aproximações por falta do volume de S . Desta forma, temos:

$$V(S') = r^3 \cdot V(S) \Rightarrow \frac{V(S')}{V(S)} = r^3$$

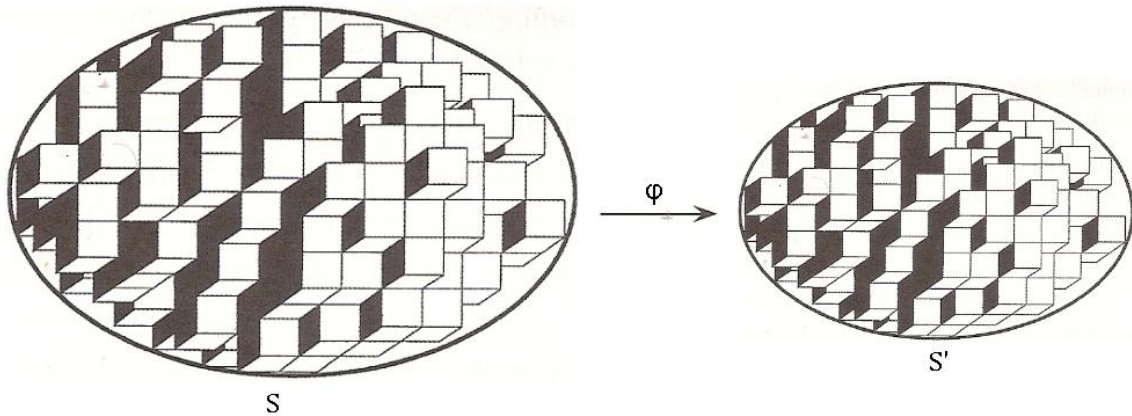


Figura 2.4

Agora, iremos abordar uma parte importantíssima da semelhança: a semelhança de triângulos. Pois, esta figura, em particular, tem uma propriedade que a torna singular: se dois triângulos possuem ângulos congruentes, logo são semelhantes. Esta propriedade não é válida para os outros polígonos. Como vimos nas páginas 14 e 15: podemos ter dois polígonos com ângulos congruentes, mas não necessariamente semelhantes; por ter essa característica sui generis, o triângulo é uma figura especial para o estudo da semelhança.

2.3 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os seus lados forem proporcionais (1).

Considerando dois triângulos ABC e $A'B'C'$ como na figura a seguir

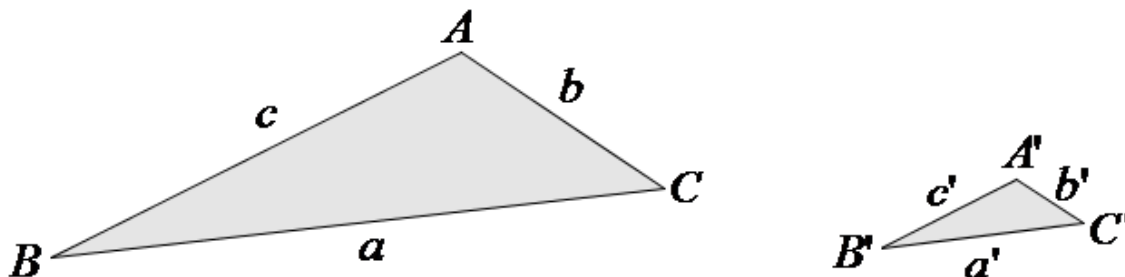


Figura 2.5

Dizer que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$ significa que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

O número r positivo é uma constante chamada de razão de semelhança das duas figuras.

Embora a afirmação (1) tenha sido utilizada como uma definição, na verdade ela é um teorema que pode ser demonstrado utilizando-se a própria definição de semelhança vista anteriormente. Para maiores aprofundamentos, recomenda-se o livro *Medida e Forma em Geometria* de Elon Lages Lima.

Apesar da condição apresentada acima ser necessária e suficiente para que haja semelhança entre triângulos, podemos identificar que dois triângulos são semelhantes caso se enquadrem em uma das três condições abaixo:

- a) têm lados proporcionais;
- b) têm ângulos internos congruentes entre si;

c) têm ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.

Esses casos a), b) e c) são os casos de semelhança que existem e faremos as demonstrações deles.

Para isso, precisamos do teorema de Thales, ao qual enunciaremos a seguir:

Sejam r , s e t retas paralelas. Escolhemos pontos A , A' pertencentes a r , B , B' pertencentes a s e C e C' pertencentes a t , de modo que A , B e C e A' , B' e C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

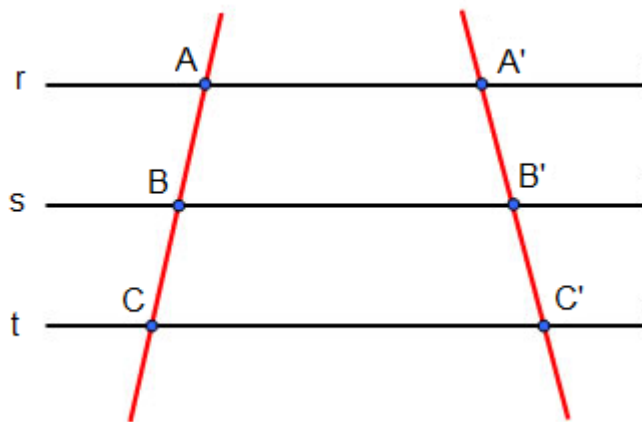


Figura 2.6

Uma consequência do teorema de Thales que é fundamental para o estudo de semelhança de triângulos é o fato de

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Demonstração:

Do teorema de Thales, temos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot B'C'}{A'B'}$$
 com isso, temos

$$AB + BC = AB + \frac{AB \cdot B'C'}{A'B'} = AB \left(1 + \frac{B'C'}{A'B'} \right) = AB \left(\frac{A'B' + B'C'}{A'B'} \right) \Rightarrow$$

$$AB + BC = \frac{AB}{A'B'} (A'B' + B'C') \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'}$$

Como $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ e $AC = AB + BC$ e $A'C' = A'B' + B'C'$, segue que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Um caso particular do teorema de Thales

Observe a figura a seguir

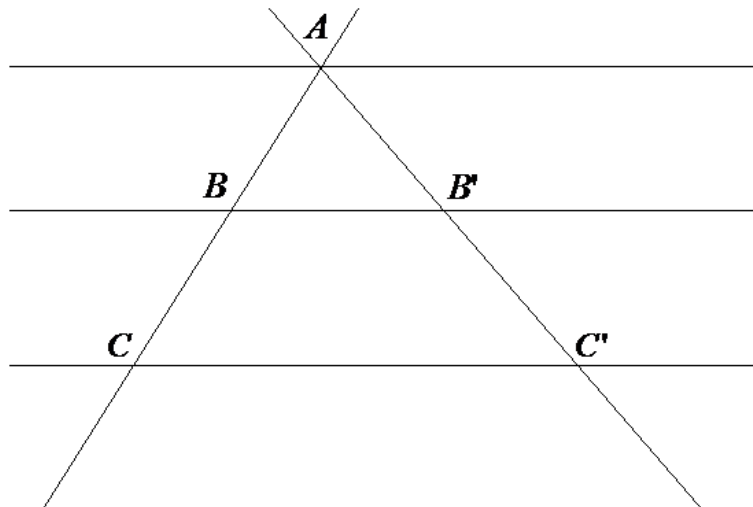


Figura 2.7

Do teorema de Thales, temos $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$. Esse caso terá um papel fundamental nas demonstrações dos casos de semelhança.

Para cada caso a seguir, toma-se a correspondência de vértices dos triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ como $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$.

Casos de semelhança

a) 1° caso: *LLL*

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{r}$$

Então temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e em particular $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ e $\angle C = \angle C'$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, tomemos $r > 1$. Sobre o lado $A'B'$ marque o ponto X , tal que $A'X = AB$.

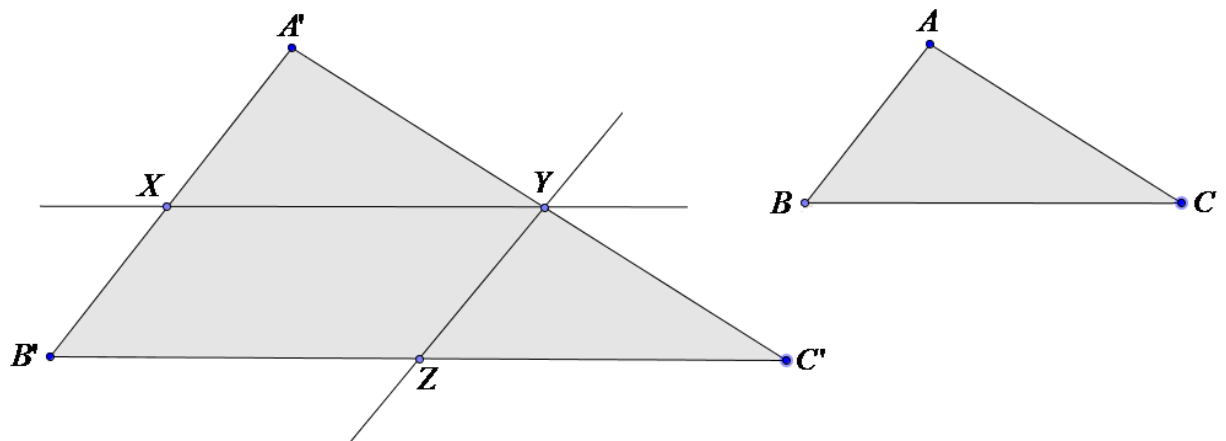


Figura 2.8

Trace uma reta paralela ao lado $B'C'$ e que passa pelo ponto X . A interseção dessa reta com o lado $A'C'$ é o ponto Y . Pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{A'X}{A'B'} = \frac{A'Y}{A'C'} = \frac{1}{r}$$

Pois, $A'X = AB$. Com isso,

$$\frac{A'Y}{A'C'} = \frac{1}{r} \Rightarrow A'Y = A'C' \cdot \frac{1}{r} = AC$$

Trace agora a reta paralela ao lado $A'B'$ que passa por Y , ao qual intersecta o lado $B'C'$ no ponto Z . Perceba que o quadrilátero $XYZB'$ é um paralelogramo e portanto, $XY = B'Z$. Novamente pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{B'Z}{B'C'} = \frac{A'Y}{A'C'} \Rightarrow \frac{XY}{B'C'} = \frac{A'Y}{A'C'} = \frac{1}{r} \Rightarrow XY = B'C' \cdot \frac{1}{r} = BC$$

Assim, temos $A'X = AB$, $A'Y = AC$ e $XY = BC$, ou seja, os triângulos ABC e $A'XY$ são congruentes, pelo caso *LLL* de congruência. Portanto, temos $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ e $\angle C = \angle C'$.

b) 2º caso: *AAA*

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ e } \angle C = \angle C'$$

Então temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e em particular

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Demonstração:

Suponha inicialmente, sem perda de generalidade que $A'B' > AB$, $A'C' > AC$ e $B'C' > BC$.

Seja X um ponto pertencente ao lado $A'B'$, tal que $A'X = AB$.

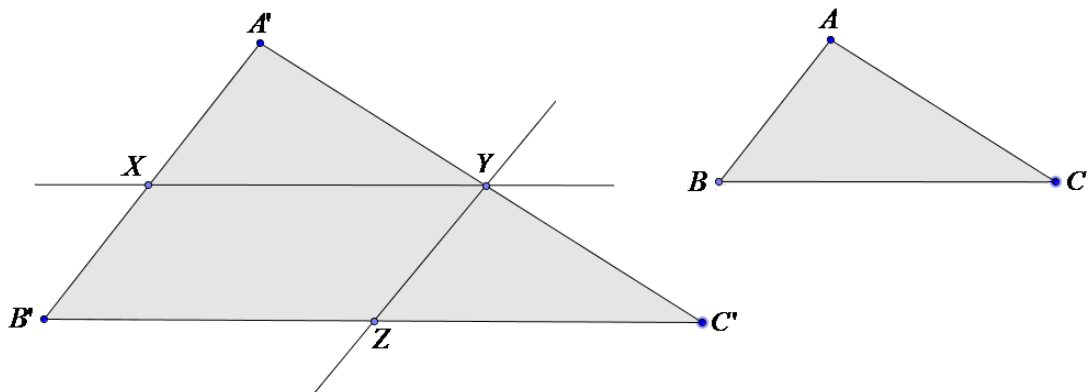


Figura 2.9

Trace uma reta paralela ao lado $B'C'$ que intersecta o lado $A'C'$ no ponto Y . Observe que os triângulos $A'XY$ e ABC são congruentes pelo caso ALA , pois $A'X = AB$ e os ângulos do triângulo $A'B'C'$ são congruentes aos ângulos do triângulo $A'XY$ e os ângulos dos triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pela própria tese e conseqüentemente os ângulos do triângulo ABC são congruentes aos ângulos do triângulo $A'XY$. Pelo teorema de Thales, temos:

$$\frac{A'X}{A'B'} = \frac{A'Y}{A'C'}$$

Trace agora a reta paralela ao lado $A'B'$ que passa pelo ponto Y , ao qual intersecta o lado $B'C'$ no ponto Z . Perceba que o quadrilátero $XYZB'$ é um paralelogramo e, portanto, $XY = B'Z$. E novamente pelo teorema de Thales, temos:

$$\frac{B'Z}{B'C'} = \frac{A'Y}{A'C'} \Rightarrow \frac{XY}{B'C'} = \frac{A'Y}{A'C'} \Rightarrow \frac{XY}{B'C'} = \frac{A'Y}{A'C'} = \frac{A'X}{A'B'}$$

Como os triângulos ABC e $A'XY$ são congruentes, segue que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

c) 3º caso: LAL

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = r \text{ e } \angle A = \angle A'$$

Então temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e em particular

$$\angle B = \angle B', \angle C = \angle C' \text{ e } \frac{B'C'}{BC} = r$$

Demonstração:

Suponha inicialmente, sem perda de generalidade que $A'B' > AB$, $A'C' > AC$ e $B'C' > BC$. Seja X um ponto pertencente ao lado $A'B'$, tal que $A'X = AB$.

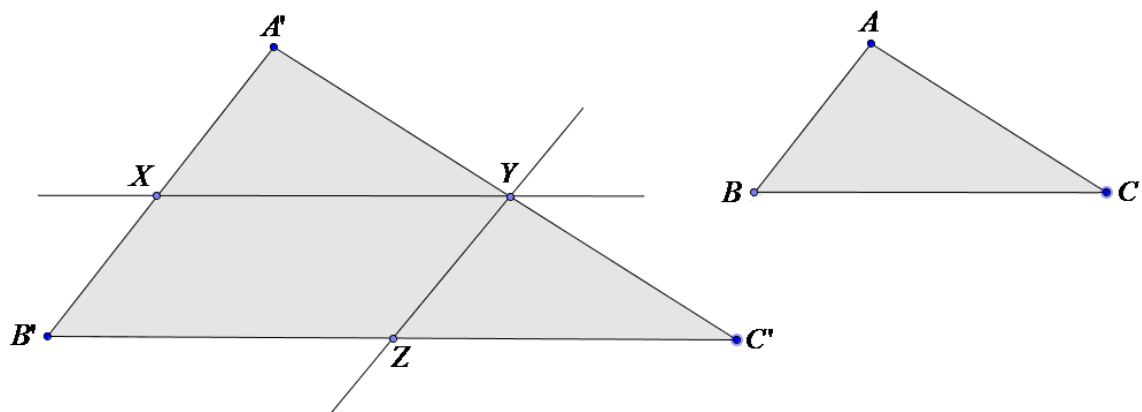


Figura 2.10

Trace uma reta paralela ao lado $B'C'$ que intersecta o lado $A'C'$ no ponto Y . Pelo teorema de Thales, temos:

$\frac{A'B'}{A'X} = \frac{A'C'}{A'Y}$, como $A'X = AB$, temos que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{A'Y}$. Como $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ (da hipótese), temos que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{A'Y} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{A'Y} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow A'Y = AC$

Observe que os triângulos $A'XY$ e ABC são congruentes pelo caso LAL , pois $A'X = AB$, $A'Y = AC$ e $\angle A = \angle A'$ e conseqüentemente $XY = BC$. Trace agora a reta paralela ao lado $A'B'$ que passa por Y , ao qual intersecta o lado $B'C'$ no ponto Z . Perceba que o quadrilátero $XYZB'$ é um paralelogramo e portanto, $XY = B'Z$. E novamente pelo teorema de Thales, temos:

$$\frac{B'C'}{B'Z} = \frac{A'C'}{A'Y} \Rightarrow \frac{B'C'}{XY} = \frac{A'C'}{A'Y} \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

Como o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'XY$, temos que os ângulos do triângulo ABC são congruentes aos ângulos do triângulo

$$A'B'C' \text{ e } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = r.$$

Vimos que a definição de semelhança não cita ângulos, porem cabe ressaltar que figuras semelhantes preservam ângulos. Por exemplo: seja a semelhança $\varphi: F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F' , tal que os pontos X , Y e Z pertençam a F e os pontos $X' = \varphi(X)$,

$Y' = \varphi(Y)$ e $Z' = \varphi(Z)$ pertençam a F' , de modo que X' , Y' e Z' sejam os pontos homólogos de X , Y e Z ; então os ângulos XYZ e $X'Y'Z'$ são iguais.

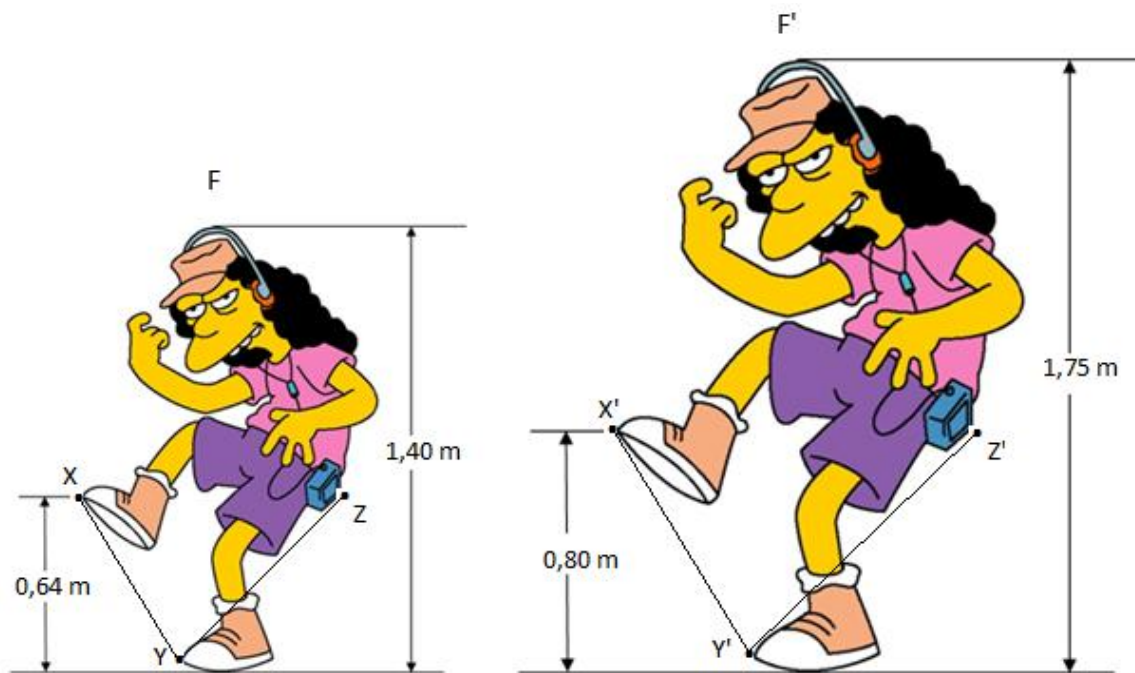


Figura 2.11

As figuras F e F' são semelhantes e possuem os pontos homólogos X e X' , Y e Y' , Z e Z' . Portanto, os ângulos XYZ e $X'Y'Z'$ são iguais.

Assim, não se deve ter a falsa impressão de que se duas figuras tem ângulos iguais então elas são semelhantes, o fato de possuírem ângulos congruentes não garante que as figuras sejam semelhantes. Por exemplo, podemos comparar um quadrado e um retângulo não quadrado. Porém, se duas figuras são semelhantes, então seus ângulos (caso possuam) serão congruentes. Para maiores aprofundamentos recomendamos a leitura do livro *Medida e Forma em Geometria* de Elon Lages Lima, que trata também de alguns outros conceitos da geometria.

3. Uma breve abordagem histórica sobre a semelhança

Atribui-se a Tales de Mileto, a primeira utilização do conceito de semelhança de triângulos da história da humanidade. Cerca de seiscentos anos antes de Cristo, segundo historiadores, Tales assombrou o Faraó e alguns sábios egípcios quando, durante sua viagem, calculou com razoável precisão a altura da pirâmide de Quéops [2]. Tales fincou uma espécie de cajado ortogonalmente ao solo e aguardou até o momento em que a sombra do cajado projetada no solo tivesse a mesma medida do cajado. Neste momento, pediu que o auxiliassem a medir rapidamente a sombra da pirâmide e afirmou que a altura da mesma tinha medida igual à de sua sombra [3].

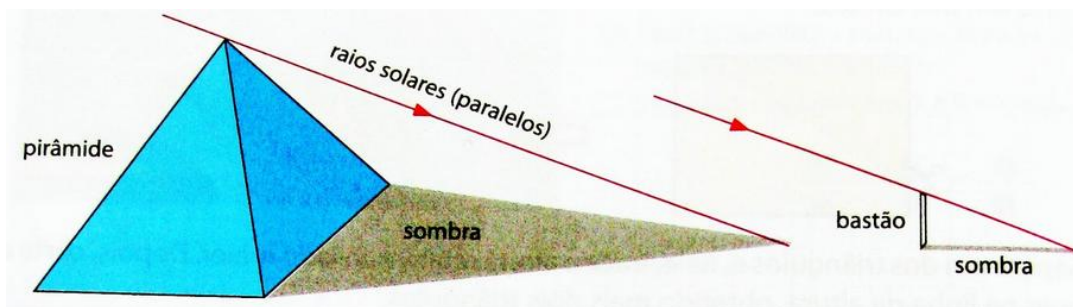


Figura 3.1

Com o objetivo de se obter exatidão no valor da altura da pirâmide, Tales ainda deveria ter pedido que se medisse o comprimento do lado da base da pirâmide para que se somasse metade desse valor ao comprimento da sombra já medida [5]. Não se sabe se realmente o fez, mas Tales realmente impressionou pela capacidade. Observe a figura abaixo onde a semelhança de triângulos é explicitada:

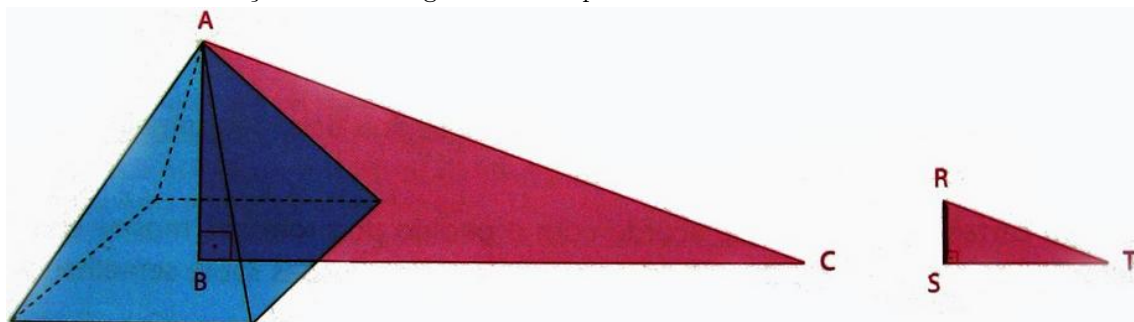


Figura 3.2

Nesta situação, os triângulos ABC e RST são semelhantes, pois os ângulos B e S são congruentes e os A e R também (caso AA).

Tales, fundador da escola Jônica na Grécia antiga, após esse feito ganhou fama e a admiração dos seus contemporâneos. Por conta dessa e de outras contribuições, Tales é considerado um dos sete grandes sábios da Grécia Antiga e está entre os grandes matemáticos da história.

Esta seria a primeira utilização explícita da semelhança na história da humanidade, mas será mesmo que antes desse episódio, ela nunca foi utilizada?

No próprio Egito, temos o exemplo das três grandes pirâmides de Gizé. Construídas muito antes da visita de Tales, as três pirâmides mais famosas do Egito (Quéops, Quefren e Miquerinos), situadas no planalto de Gizé, são bons exemplos e merecem ser analisadas.

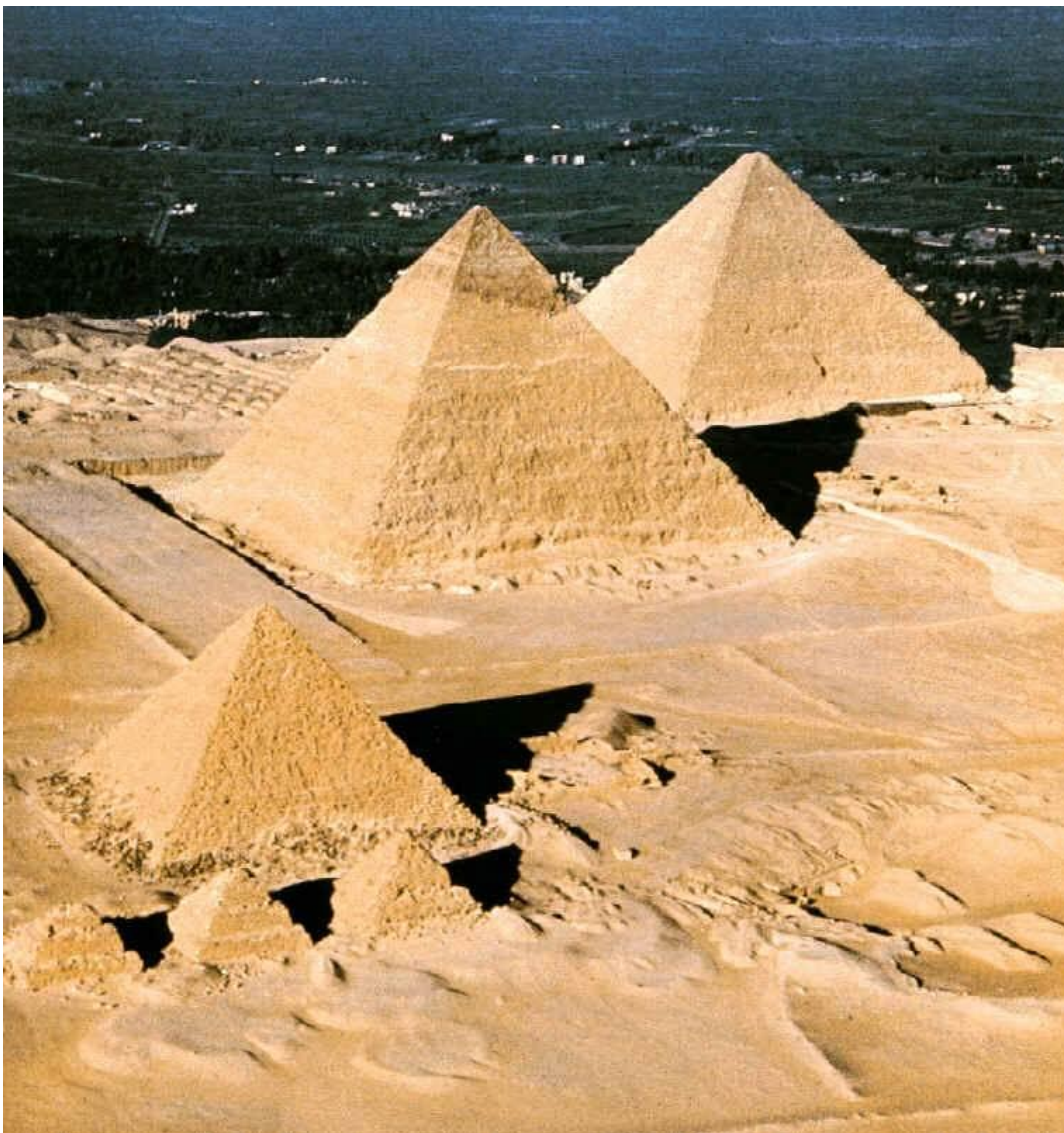


Figura 3.3

Todas as três tem base quadrada, portanto suas bases são semelhantes. Abaixo, estão descritas as medidas originais de cada uma:

Quéops: O lado da base mede aproximadamente $230m$ e a sua altura original mede $147m$ (hoje mede $136m$ aproximadamente).

Quefren: Lado da base medindo $206m$ e altura original $137m$.

Miquerinos: Lado da base com $108m$ aproximadamente e altura original aproximada de $66m$.

Todas as três pirâmides tem as projeções ortogonais de seus vértices no centro das bases. Podemos observar se existem semelhanças entre as pirâmides fazendo as respectivas razões entre o lado da base e a altura de cada uma. Os resultados aproximados são descritos a seguir.

Quéops: 1,56 Quefren: 1,51 Miquerinos: 1,63

Podemos observar a pequena diferença entre os números, ou seja, podemos afirmar então que as três pirâmides são “quase” semelhantes. Não se sabe se foi essa a intenção dos construtores, mas eles chegaram perto de construir três pirâmides semelhantes (analisando apenas o aspecto exterior de cada uma). Caso tenham realizado esse feito intencionalmente, merecem ainda mais admiração e respeito do que já tem, uma vez que não tinham recursos eficazes para medir alturas e ângulos na época da construção.

Mesmo antes da construção das pirâmides, não podemos descartar o uso da semelhança, ainda que intrinsecamente, nas construções primitivas, bem como no artesanato e nas artes.

Depois do episódio de Tales no Egito, a geometria passou a ser trabalhada com mais intensidade pelos gregos e desenvolvida, entre outros propósitos, para ser utilizada nas artes e na arquitetura [2].

Tanto na arquitetura grega quanto na romana, podemos observar que muitas construções se utilizavam da razão áurea (considerada como a razão da beleza matemática). Esta razão é definida da seguinte maneira: Diz-se que o segmento a está dividido em proporção áurea, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo [4].

Observe a figura a seguir que representa a razão áurea em um retângulo:

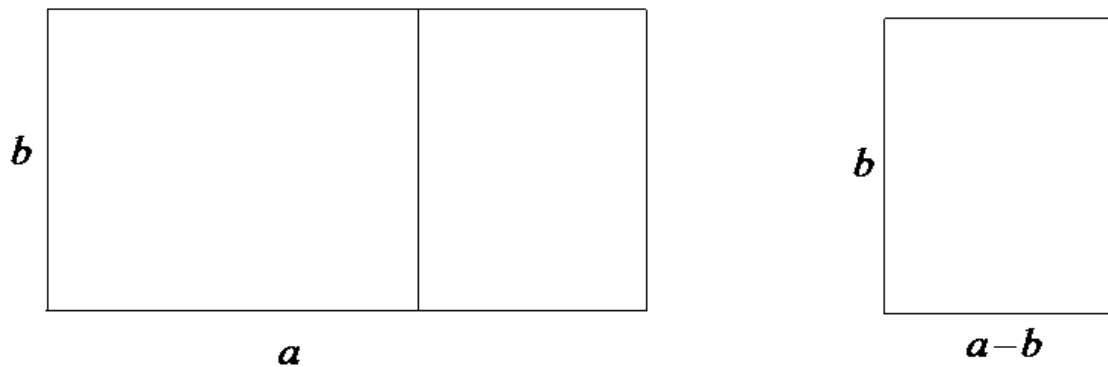


Figura 3.4

Dizemos que os dois retângulos são semelhantes, pois o segundo foi obtido a partir do primeiro de modo que a seguinte razão fosse verdadeira:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

A razão de semelhança entre os dois é igual à razão entre a e b . Mas seria possível definir o valor dessa razão? Vejamos:

Se, na proporção acima chamarmos a razão entre a e b de x e dividirmos o segundo membro da equação por a , obteremos a seguinte equação:

$$x = \frac{a}{b}, \text{ então, da equação acima: } x = \frac{x^{-1}}{1-x^{-1}}$$

Desenvolvendo a proporção, obtemos a seguinte equação do 2º grau:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação obtemos os seguintes resultados:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como o valor x'' é negativo, a razão áurea é x' . Como a raiz quadrada de 5 é aproximadamente 2,236 então uma razoável aproximação para a razão áurea é 1,618.

Na figura acima, o retângulo gerado pela razão áurea é semelhante ao retângulo original. Esse resultado foi largamente utilizado na arquitetura. Observe a seguir uma foto do Panteon de Atenas, onde retângulos semelhantes (com razões áureas) estão presentes. Observe:



Figura 3.5

Talvez a razão áurea possa ter se destacado mais do que deveria ao longo da história, mas certamente ela esteve presente em vários elementos de diversas áreas como nos quadros de Da Vinci e até hoje em dia, onde as bandeiras nacionais só são consideradas oficiais se obedecerem a essa razão.

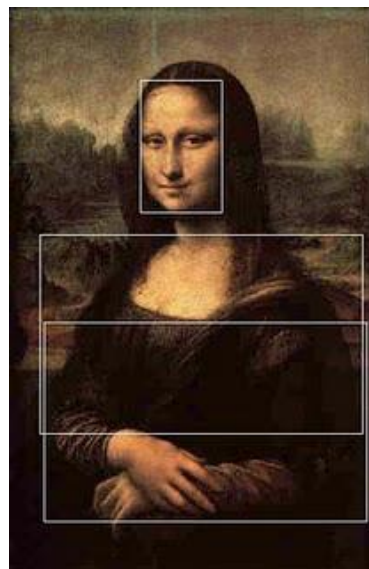


Figura 3.6

Voltando um pouco na história, podemos dizer que a semelhança foi a base para o desenvolvimento da trigonometria. Por exemplo, podemos afirmar que se um triângulo retângulo tem um de seus ângulos agudos medindo 30° , então um dos catetos é igual à metade da hipotenusa. Obviamente que essa afirmação nos remete tanto a ideia de seno de um ângulo, quanto à de que todos os triângulos dessa família de triângulos descrita acima são semelhantes.

As razões trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente) nada mais são do que resultados da semelhança de triângulos aplicados à mesma família de triângulos retângulos, ou seja, a triângulos semelhantes. É claro que, se dois triângulos retângulos são semelhantes e, tomando um dos ângulos agudos de um deles como referencial e posteriormente o ângulo congruente no outro, as razões entre dois lados quaisquer em um é igual à razão entre os lados correspondentes no outro [2].

Assim, basta fixar alguns nomes para razões específicas e as razões trigonométricas no triângulo retângulo estarão definidas.

Num triângulo retângulo qualquer, o seno de um ângulo agudo é definido como a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa do triângulo. O cosseno de um ângulo agudo é definido como a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa do triângulo. E a tangente de um ângulo agudo é definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.

Não se pode deixar de citar os notáveis feitos de três geômetras e astrônomos da antiguidade: Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.), Erastóstenes (276 - 194 a.C.) e Hiparco (século II a.C.).

Aristarco de Samos acreditava que a Terra girava em torno do sol, por isso é considerado o Copérnico da era antiga. Ele usou ideias da trigonometria (que é baseada na semelhança de triângulos) para medir, com razoável precisão a distância da Terra ao Sol, já conhecendo a distância Terra-Lua [3].

Erastóstenes, quase na mesma época, era bibliotecário chefe na biblioteca de Alexandria e, utilizando a ideia de que os raios de Sol incidem sobre a Terra paralelamente, mediu a distância entre as cidades de Sirene e Alexandria reparando que, no mesmo horário as sombras produzidas pelo mesmo objeto eram diferentes. Erastóstenes então utilizou também a trigonometria para calcular com uma margem de erro muito baixa a medida da circunferência da Terra [2].

Hiparco era grego, viveu algum tempo em Alexandria, mas foi em Rodas que construiu um observatório onde catalogou mais de 800 estrelas. No entanto sua maior contribuição para a astronomia foi ter deduzido o valor correto para a razão entre o tamanho da sombra que a Terra projeta no espaço e o diâmetro da Lua. Ele também calculou que a Lua está distante entre 62 e 74 vezes o raio da Terra (o resultado

real fica entre 57 e 64), e determinou a duração do ano (e a duração das estações) com uma excelente margem de erro [2].

Para a época em que viveram, esses foram feitos ainda mais notáveis se considerarmos que os instrumentos utilizados eram primitivos, porém eficazes. Esses são apenas alguns exemplos de como a semelhança se tornou uma ferramenta poderosa para a humanidade, e de como podemos usar as suas aplicações na astronomia, na Física e na vida cotidiana de um modo geral, basta que o professor faça essa conexão. Para os alunos, provavelmente a aprendizagem do conceito de semelhança será muito mais satisfatória se passarem a enxergar dessa forma, como também um meio de se estudar outras disciplinas e o mundo que o cerca.

3.1.1 Conclusão

O ensino da semelhança apenas é uma formalização matemática do que todo ser humano carrega no seu subconsciente. Desde crianças somos estimulados a identificar e interagir com objetos semelhantes, vemos a semelhança presente na arquitetura, nas artes e até mesmo nos aparelhos eletrônicos que utilizamos todos os dias. Os tablets, por exemplo, não são exatamente computadores e nem celulares, mas pode funcionar como os dois ao mesmo tempo, além de terem formatos semelhantes aos modernos smartphones.

O ensino da semelhança deveria ser tratado como parte do currículo de matemática do Ensino Médio, uma vez que está tão presente em nossa trajetória de vida e em elementos da nossa cultura. Deveria ser abordado após o conteúdo de Geometria Espacial para que os alunos possam compreender o conceito de semelhança na sua essência, pois ele vale tanto para o plano quanto para o espaço.

O ensino da semelhança, que é esquecido durante o ensino médio, deveria ser retomado para que os alunos tenham a oportunidade de conhecer suas aplicações e desdobramentos, uma vez que uma definição da carreira profissional é iminente. Esse conteúdo merece uma atenção especial por parte dos professores, para que esses não privem os alunos de se apropriarem dessa linguagem.

Em algum momento de sua vida escolar, os alunos até resolvem alguma questão onde necessitam do conceito de semelhança aplicado a sólidos geométricos ou até mesmo a figuras no plano, utilizam-no como ferramenta, mas não o entendem completamente e muito menos descobrem o quão mais poderiam aprender sobre o assunto. Se o fizessem, provavelmente sentiriam muito mais segurança em resolver determinados tipos de problema não só em matemática, mas também em física que se utiliza do conceito de semelhança em vários momentos.

Historicamente, a semelhança foi largamente utilizada para as realizações humanas, portanto é um conteúdo de grande importância e uma poderosa ferramenta na resolução de problemas.

A ideia de se aprender realmente semelhança, além dos benefícios já citados, daria ao aluno mais um instrumento para que o mesmo compreendesse melhor o seu cotidiano e a sua história, fazendo assim uma leitura mais correta e realista desse mundo onde os avanços tecnológicos acontecem de forma tão acelerada.

4. Referências Bibliográficas

- [1] Aaboe, Asger. Episódios da História Antiga da Matemática. SBM, 1984.
- [2] Boyer, Carl B. A História da Matemática - 2ª edição, editora Ciência Moderna - 1996.
- [3] <http://www.famat.ufu.br/eventos/semat6/docs>
- [4] <http://www.chabad.org.br/BIBLIOTECA/artigos/divina/home.html>
- [5] <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/calpiramide.html>
- [6] <http://www.slideshare.net/porqueira/teorema-de-tales-autor-antonio-carlos-carneiro-barroso-em-23062009>
- [7] Apostol, Tom. Projecto Matemática em Acção - Semelhanças. Versão Portuguesa produzida por CMAF - Universidade de Lisboa.
- [8] Barbosa, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. 4. ed. Fortaleza. SBM 1997.
- [9] Lima, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria - Comprimento, Área, Volume e Semelhança. 4. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.
- [10] Wagner, Eduardo. FGV Ensino Médio Digital - Matemática - Curso 2 - Geometria - Aula 3 Proporcionalidade e Semelhança. Disponível em <http://ensinomediodigital.fgv.br/disciplinas/matematica/curso2/aula3/curso.aspx?ida=3&idc=21&title=Matem%eltica+-+Curso+2+-+Aula+3+-+Proporcionalidade+e+semelhan%e7a>.
- [11] Web site telecurso. Matemática, aula 66 pdf, sólidos semelhantes. Disponível em http://www.vestibular1.com.br/revisoes/matematica/aulas_matematica/aula66.pdf.
- [12] <http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/origami.pdf>