UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Uma análise da abordagem do tema funções nos principais vestibulares de instituições públicas do Estado de São Paulo e no ENEM

Helen Milene da Silva Santos Rodrigues

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM DO TEMA FUNÇÕES NOS PRINCIPAIS VESTIBULARES DE INSTITUIÇÕES PÚBLICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO E NO ENEM

HELEN MILENE DA SILVA SANTOS RODRIGUES

Sob a Orientação do Professor

Wanderson José Lambert

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Agosto de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

HELEN MILENE DA SILVA SANTOS RODRIGUES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 17/08/2015

Wanderson José Lambert. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Aline Mauricio Barbosa. Dr.ª UFRRJ

Agnaldo da Conceição Esquincalha. Dr. UERJ

A Deus, fonte de toda sabedoria, que tem me conduzido durante toda a minha vida e em todos os sentidos: pessoal, profissional e acadêmico. Ao meu marido, que esteve ao meu lado em todos os momentos e aos meus familiares que, além de tudo, compreenderam a minha ausência.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Wanderson José Lambert, por ministrar aulas em duas disciplinas e por todo incentivo e dedicação em orientar meu trabalho.

À Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Seropédica, RJ, pelo acolhimento e infra-estrutura fornecidos.

À coordenação, professores e tutores do PROFMAT, pela organização e apoio.

Ao meu marido, minha fortaleza em todos os momentos, que abraçou comigo este desafiador projeto de me deslocar semanalmente para Seropédica, superando comigo todos os momentos de estresse.

Zilda e Dimas, meus pais, que além de tudo, me educaram para que eu entendesse a importância do estudo e da dedicação àquilo em que se acredita.

Aos colegas da turma 2013, especialmente meus companheiros de estudo, Alessandro, José Carlos e Victor, que me ajudaram a estudar para as avaliações do PROFMAT e, principalmente, para o Exame Nacional de Qualificação: para que Carnaval se poderíamos estudar juntos?! Por todos os teoremas, dicas e macetes que aprendemos juntos e por todas as risadas: Obrigada!

Aos meus colegas de trabalho e gestores do Colégio Embraer Juarez Wanderley, que me incentivaram e possibilitaram que meu horário de trabalho me permitisse estudar.

Ao meu irmão Marcos, cunhada Bruna e afilhado Fernando, meu pequeno presente que Deus enviou para que eu acreditasse que tudo valeria a pena. Às grandes amigas Jane, Fabiana, Carol e Dieine, que não me deixaram desistir da dissertação e a todos os meus amigos, padrinhos e afilhados, que não desistiram de mim e entenderam a minha ausência. Sem o apoio de vocês eu não teria tido forças.

Enfim, agradeço aos meus atuais e ex-alunos, que me inspiram diariamente e que me impulsionam a buscar a melhoria da educação e a acreditar num país melhor.

RESUMO

RODRIGUES, Helen Milene da Silva Santos. **Uma análise da abordagem do tema funções nos principais vestibulares de instituições públicas do Estado de São Paulo e no ENEM.** 2015. 154 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

O tema funções aparece no Ensino Médio não apenas como um tópico na disciplina de Matemática, mas também nas disciplinas de Física, Química e Geografia, a partir da análise de fenômenos que envolvem a relação entre duas ou mais variáveis e também através da análise de gráficos e tabelas. A importância desse tema instigou a pesquisadora em analisar as diferentes abordagens que têm sido utilizadas na avaliação do aprendizado desse tema nos vestibulares das três principais universidades públicas do Estado de São Paulo (USP, Unicamp e Unesp) e no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Nesse sentido, faz-se necessário um breve relato do histórico do vestibular no Brasil, desde seu surgimento até os dias de hoje. E, ainda, contextualizar o surgimento e a utilização do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no processo de seleção dos alunos às universidades públicas e privadas. Para isso, a primeira etapa consistiu em resolver e analisar cada uma das questões de matemática das últimas provas desses exames, desde 2010 até 2014, visando responder aos questionamentos: Como o tema funções é abordado nos três principais vestibulares do Estado de São Paulo e no ENEM? Que tipos de funções são mais abordadas em cada um? Qual é o enfoque principal: fórmula, gráfico ou tabela? Na segunda etapa, um grupo de alunos resolveu uma amostra das questões dos quatro exames para que fosse possível analisar o desempenho deles na realização dessas questões: erros mais comuns, nível de dificuldade das questões e dos vestibulares. Com isso, a etapa final baseou-se na comparação dos dados da análise prévia com os dados obtidos pelo grupo de alunos, construindo hipóteses acerca das razões dos erros e acertos das questões. Espera-se que a presente pesquisa sirva de instrumento aos professores que, conhecendo as principais características desses exames, possam instruir seus alunos; e aos alunos, que além desse fator, se utilizem das questões comentadas para estudo.

Palavras-chave: vestibulares, ENEM, Função, Ensino Médio

ABSTRACT

RODRIGUES, Helen Milene da Silva Santos. **An analysis of the approach of the topic of functions in the main vestibulares in public institutions in Sao Paulo state and in the ENEM**. 2015. 154 pages. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

The topic of functions appears in Ensino Médio (Secondary/High School) not only as a topic of mathematics, but also in the subjects of Physics, Chemistry and Geography, from the analysis of the phenomena that involves two or more variables and also through the analysis of charts and tables. The importance of this topic inspired the author of this research to analyse the different approaches that have been used in the evaluation of the learning of the topic in vestibulares (test used and prepared by universities and for admission in universities in Brazil**)** from the three main public universisties in the state of Sao Paulo (Usp, Unicamp e Unesp) and ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio, a test used for admission in universities in Brazil). In this context, a brief historical background of the vestibular in Brazil is necessary, since it first appeared until today. And also, to contextualize the appearance and use of the Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) in the selection process of students who are entering public and private universities. For that, the first stage is to solve and analyse each of the mathematics questions of the last exams, since 2010 until 2014, with view to answering these questions: How the topic of function is approached in the three main vestibulares in the state of Sao Paulo and ENEM? What types of functions are tackled by each one? What is the main focus: formulas, charts or tables? In the second stage, a group of students solved a sample of the questions from four of the exams for it to be possible to analyse their performance when completing the tasks: common mistakes, level of difficulty of the question and the level of difficulty of the vestibulares. With this, the final stage was based on the comparison of data of previous analysis with the data collected through the group of students, creating hypotheses concerning reasons for getting the questions right or wrong. Hopefully this research will work as an instrument for teachers, who knowing the main characteristics of the exams, are able to instruct students; and to students, in addition to that, to make use of the commented questions to study.

Keywords: vestibulares, ENEM, Function, High School

LISTA DE ABREVIATURAS

PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
USP	Universidade de São Paulo
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNESP	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
Fuvest	Fundação Universitária para o Vestibular
Comvest	Comissão Permanente para os Vestibulares
Vunesp	Vestibular da Universidade Estadual Paulista
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
IFES	Instituições Federais de Ensino Superior
Sisu	Sistema de Seleção Unificada
MEC	Ministério da Educação
ProUni	Programa Universidade para Todos
IES	Instituições de Ensino Superior
Fies	Fundo de Financiamento Estudantil
FCMSC-SP	Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

LISTA DE TABELAS E GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O tema funções aparece no Ensino Médio não apenas como um tópico na disciplina de Matemática, mas também nas disciplinas de Física, Química e Geografia, a partir da análise de fenômenos que envolvem duas ou mais variáveis e também através da análise de gráficos e tabelas.

Para corroborar a ideia da importância deste tema, tem-se o trecho dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), no que se refere a Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias:

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 2000, p.43,44)

A importância do tema instigou a autora dessa pesquisa a analisar as diferentes abordagens que têm sido utilizadas na avaliação de seu aprendizado nos vestibulares da USP, Unicamp, Unesp e no ENEM: diferentes formas de representar a função: gráfico, tabela, fórmula; tipos de funções e abordagens contextualizadas no cotidiano ou no contexto essencialmente algébrico da matemática.

Esse tema de pesquisa não é novo. Diversos autores têm se debruçado sobre ele. Dentre esses trabalhos, pode-se citar o de José Luciano Coutinho Lima (LIMA 2011), cuja abordagem contextualiza o surgimento dos vestibulares no Brasil, bem como analisa a participação da matemática nos vestibulares da USP, Unicamp e UFSCar. Além da análise do percentual de participação da matemática em cada uma das provas, Lima classifica as questões de matemática desses vestibulares em: Mecânico, Semi-contextualizado e Contextualizado e quantifica os conteúdos mais abordados em cada uma das provas. Segundo Lima, os temas: Logaritmo, Funções, Gráficos, Funções e Equações do 1º grau estão presentes na lista dos 5 temas mais abordados nos vestibulares analisados.

Um outro trabalho versando sobre o estudo comparativo entre vestibular e o ENEM é proposto por André Gaglianone de Almeida Kasprzykowski (KASPRZYKOWSKI, 2014), no qual o autor discute as provas do vestibular da UFRJ nas fases objetivas (testes) e discursivas e as provas do ENEM. Neste trabalho, o autor faz vários comentários sobre as habilidades avaliadas em cada prova e o nível de dificuldade enfrentado pelos alunos.

Seguindo esta ideia de analisar diferentes vestibulares e tecendo comentários construtivos sobre as provas, a presente pesquisa visa analisá-los sob o ponto de vista do tema das funções, mensurando, de forma não exaustiva, o desempenho de alunos da segunda e terceira séries do Ensino Médio na realização de questões desses exames, selecionadas de acordo com diferentes abordagens nele encontradas, para responder aos seguintes questionamentos: Como o tema funções é abordado nos três principais vestibulares do Estado de São Paulo e no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)? Que tipos de funções são mais abordadas por cada um? Qual é o enfoque principal: fórmula, gráfico ou tabela? Qual o desempenho de um grupo de alunos na realização de algumas questões destes vestibulares?
Nesse sentido, faz-se necessário um breve relato do histórico do vestibular no Brasil, desde seu surgimento até os dias de hoje. E, ainda, contextualizar o surgimento e a utilização do ENEM no processo de seleção dos alunos às universidades.

Este contexto histórico é abordado no capítulo 1, no qual também é abordado o surgimento da Fuvest, Comvest e Vunesp, que preparam, organizam e corrigem os vestibulares da USP, Unicamp e Unesp, respectivamente. A escolha dos vestibulares de universidades do estado de São Paulo deve-se ao fato da autora trabalhar no estado há diversos anos e esses serem os principais vestibulares enfrentado por seus discentes.

Neste capítulo, ainda, é possível analisar o desenvolvimento desses vestibulares ao longo dos últimos anos. Dados como: número de questões da prova, número de questões de matemática, tipo de questões (múltipla escolha e dissertativas), quantidade de fases do vestibular, estão presentes para que seja possível entender o contexto de cada prova atualmente frente ao seu histórico.

No capítulo 2 são apresentadas as questões que envolvem o tema funções de cada uma dessas provas, de 2009 a 2014. Além de apresentadas, todas as questões são resolvidas e comentadas. A resolução das questões foi apresentada com o intuito de fornecer um material para professores do Ensino Médio, bem como para alunos que queiram estudar o tema sob a perspectiva de abordagem desses vestibulares.

Os comentários trazem uma visão pessoal da autora acerca de: nível de dificuldade; abordagem do tema funções: gráfico, fórmula, tabela ou, ainda, interpretação de situação problema; e, ainda, acerca de adequação ao cotidiano escolar do Ensino Médio, no qual a autora apresenta alguns tópicos que, segundo sua visão, são pouco abordados no decorrer deste segmento de ensino.

Ao final da análise de cada vestibular, são apresentados gráficos que resumem os temas mais abordados em cada um, como: função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, composta e, ainda, a abordagem predominante dessas questões: análise de gráficos ou tabelas, fórmula, situação problema.

E, ainda, ao final deste capítulo, é apresentado um resumo dos dados que permite comparar cada uma das provas analisadas, inferindo acerca da abordagem de preferência de cada uma, bem como à participação percentual deste tema nas provas de Matemática.

Finalmente, o capítulo 3 apresenta 12 questões (do tipo múltipla escolha) desses vestibulares, que foram selecionadas e aplicadas a 80 alunos voluntários da 2ª Série (21 alunos) e 3ª Série (59 alunos) do Ensino Médio de um colégio particular da cidade de São José dos Campos, SP, que possui 200 alunos por série, sendo todos bolsistas e estudantes de período integral, numa carga horária de 50 aulas semanais.

Além das questões, neste capítulo são apresentados os gráficos que ilustram a quantidade de alunos que assinalou cada um dos itens e uma análise da autora, confrontando esses dados com os comentários feitos no capítulo anterior.

1 HISTÓRICO DOS VESTIBULARES E DO ENEM

Os vestibulares no mundo todo têm servido como a principal (em muitos casos a única) forma de acesso de alunos ao ensino superior. Por muitos anos, a cultura arraigada no Brasil sobre os vestibulares era de que “cada instituição possuía a sua própria forma de acesso”. Esse, muitas vezes, constituía-se um processo elitista, pois só poderiam realizar os vestibulares as pessoas que pudessem pagar tanto as taxas de inscrição quanto a hospedagem, pois muitas vezes as provas eram realizadas em pouquíssimas cidades do Brasil e a grande maioria dos estudantes precisava se deslocar para realizá-los.

A criação do ENEM como uma nova forma de acesso trouxe várias benesses no sentido que tornou o acesso às universidades, principalmente às públicas, bem mais acessível ao público. Por outro lado ele sofre críticas devido a muitas vezes selecionar alunos para áreas, principalmente a de exatas, sem uma base satisfatória.

Para traçar um paralelo adequado entre essas duas formas de acesso, tece-se um breve histórico sobre os vestibulares. Como dito anteriormente, o fato da autora ser docente no estado de São Paulo motivou para que o estudo se fixasse nas principais instituições públicas desse estado.

1.1 Breve resumo da história dos vestibulares no Brasil

Para se compreender o histórico dos vestibulares no Brasil, apresenta-se um resumo do artigo: “Ensino Superior e Universidade no Brasil”, de Luiz Antônio Cunha (CUNHA, 2000).

No período da colonização do Brasil, Portugal não incentivou e, ao contrário, proibiu que fossem criadas universidades em sua colônia, com a pretensão de impedir que os estudos universitários fomentassem movimentos independentistas. No entanto, concedia bolsas para alguns filhos de colonos estudarem em Coimbra e, além disso, permitiu que jesuítas criassem o primeiro estabelecimento de ensino superior no Brasil em 1550 voltado ao ensino de Filosofia e Teologia.

> Os jesuítas criaram, ao todo, 17 colégios no Brasil, destinados a estudantes internos e externos, sem a finalidade exclusiva de formação de sacerdotes. Os alunos eram filhos de funcionários públicos, de senhores de engenho, de criadores de gado, de artesãos e, no século XVIII, também de mineradores. Nesses colégios era oferecido o ensino das primeiras letras e o ensino secundário. Em alguns, acrescia-se o ensino superior em Artes e Teologia. O curso de Artes, também chamado de Ciências Naturais ou Filosofia, tinha duração de três anos. Compreendia o ensino de Lógica, de Física, de Matemática, de Ética e de Metafísica. O curso de Teologia, de quatro anos,

> conferia o grau de doutor. Em 1553, começaram a funcionar os cursos de Artes e de Teologia. No século XVIII, o Colégio da Bahia desenvolveu os estudos de Matemática a ponto de criar uma faculdade específica para seu ensino. Cursos superiores foram também oferecidos no Rio de Janeiro, em São Paulo, em Pernambuco, no Maranhão e no Pará. (CUNHA, 2000, p.152)

O príncipe regente criou cátedras de ensino superior ao invés de universidades: em 1808, de Medicina, na Bahia e no Rio de Janeiro; e em 1810, Engenharia, na Academia Militar do Rio de Janeiro.

Desse modo, "as instituições de ensino superior atualmente existentes resultaram da multiplicação e da diferenciação das instituições criadas ao início do século XIX, quando foi atribuído ao Brasil o status de Reino Unido a Portugal e Algarve" (CUNHA, 2000, p.153).

Desde 1808, a admissão dos candidatos a esses cursos superiores estava condicionada a aprovação nos "exames de estudos preparatórios" em cada um dos estabelecimentos de ensino. No entanto, a partir de 1837, os alunos concluintes do curso secundário do Colégio Pedro II tinham o privilégio de matrícula em qualquer escola superior do Império sem a necessidade da realização dos exames.

No entanto, esse privilégio dos alunos do Colégio Pedro II (então nomeado de Ginásio Nacional) passou a ser reivindicado por outras escolas secundárias e, desse modo, em 1891 os ginásios mantidos pelos governos estaduais que tivessem o mesmo currículo do Ginásio Nacional e se submetessem à fiscalização do governo federal também estariam dispensados dos exames. E ainda, em 1901, esse privilégio foi estendido aos ginásios particulares.

Essa reforma foi um marco na expansão e facilitação do acesso ao ensino superior, que de 1891 até 1910, teve a criação de 27 escolas superiores no Brasil. No entanto, "à medida que o ensino superior se transformava pela facilitação do acesso, mediante a multiplicação de escolas e a modificação das condições de ingresso, cresciam as resistências a esse processo. Elas vieram determinar outra reforma de ensino em 1911" (CUNHA, 2000, p.158) que visava retomar a função de discriminação social do sistema educacional.

Desse modo, em 1911, uma nova reforma introduziu os exames de admissão a todas as escolas superiores e para todos os pretendentes, sem garantias de privilégios a quaisquer alunos, advindos de quaisquer instituições. E ainda, em 1915, uma nova reforma buscou corrigir distorções da anterior, mantendo, contudo "a destituição do privilégio dos diplomas do Colégio Pedro II (e dos que lhe eram equiparados) de garantir aos seus possuidores matrículas nas escolas superiores; e a instituição dos exames de admissão, então rebatizados de exames vestibulares, para a seleção dos candidatos ao ensino superior”. (CUNHA, 2000, p.160).

No entanto, “não bastava a aprovação no exame vestibular para que um candidato fosse admitido em um curso superior. Ele precisava apresentar, também, o certificado de aprovação das matérias do curso ginasial, realizado no Colégio Pedro II ou nos estabelecimentos estaduais a ele equiparados e fiscalizados pelo Conselho Superior de Ensino. (...) A exigência do certificado do ensino secundário era um meio de estabelecer controle adicional sobre o acesso às escolas” (CUNHA, 2000, p.161).

Foi então que, em 1925, um novo decreto intensificou o caráter seletivo e discriminatório dos exames vestibulares, adotando um critério de *numerus clausus*, no qual a faculdade limitava o número de vagas a cada ano (anteriormente, todos os aprovados teriam direito à vaga), diminuindo, assim, o número de estudantes em alguns cursos e sua migração para os cursos menos procurados.

Novas universidades foram surgindo, os vestibulares continuaram com essa característica seletiva discriminatória, reformas foram propostas e leis foram sancionadas. No entanto, a ideia de que o aumento do número de alunos nos cursos de graduação implicava na degradação de sua qualidade já era presente e ficava cada vez mais forte.

Em 1996, com a LDB 9394, os exames vestibulares deixam de ser mencionados pela primeira vez desde 1910, viabilizando, assim, a utilização dos resultados dos alunos durante o decorrer do Ensino Médio para o processo de seleção, com os critérios a serem definidos por cada instituição.

> Assim, uma universidade poderá definir que os candidatos serão selecionados e escolhidos mediante exames vestibulares, sem levar em conta o desempenho no ensino médio. Outras universidades poderão renunciar a tais exames, estabelecendo que considerarão apenas os resultados do ensino médio ou poderão, ainda, estabelecer que uma parte das vagas será preenchida por candidatos selecionados mediante exames vestibulares e outra parte, mediante os resultados do ensino médio. (CUNHA, 2000, p.201)

É nesse contexto que surge o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) em 1998, que além de avaliar o Ensino Médio no país, também serve às instituições na seleção de candidatos.

1.2 O surgimento do ENEM

O ENEM foi criado em 1998 para avaliar o desempenho dos estudantes ao final da Educação Básica. No entanto, a partir de 2009 ele também passou a ser utilizado como seleção para o ingresso no Ensino Superior, como fase única das universidades, ou como complemento do processo de seleção.

Segundo dados do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – www.inep.gov.br), no período entre 1998 e 2008 a prova continha 63 questões, elaboradas a partir de uma matriz com 21 habilidades, com cada uma delas avaliada por três questões. Além das questões objetivas, a prova era composta por uma redação. Nesse período, não era possível comparar desempenho de alunos de um ano para o outro, pois a prova não era elaborada com esse intuito.

No entanto, a partir de 2009, cada área do conhecimento passou a ser avaliada por 45 questões, num total de 180 questões e uma redação, resolvidas em dois dias, a saber: primeiro dia: Ciências da Natureza e Ciências Humanas; segundo dia: Matemática, Códigos e Linguagem e Redação.

> A utilização do novo ENEM como forma de seleção unificada nos processos seletivos das Instituições Federais de Ensino Superior (IFES) tem como principais objetivos democratizar as oportunidades de acesso às vagas federais de ensino superior, possibilitar a mobilidade acadêmica e induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio. Nesse âmbito há que esclarecer que as IFES possuem autonomia e, como tal, poderão optar entre quatro possibilidades de utilização do novo ENEM como processo seletivo, a saber: • Como fase única, com o sistema de seleção unificada, informatizado e on-line; • Como primeira fase; • Combinado com o vestibular da instituição; • Como fase única para as vagas remanescentes do vestibular. Nesse âmbito, foi criado o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), que é um sistema informatizado, gerenciado pelo MEC, por meio do qual as IFES participantes selecionarão novos estudantes exclusivamente pela nota obtida no ENEM de 2009. (ANDRIOLA, 2011, p.116)

Para se ter uma melhor análise da abrangência e atuação do ENEM ao longo dos últimos anos, apresenta-se um pequeno histórico, destacando alguns momentos de mudança no processo de avaliação e trechos de notícias ao longo de sua história, que evidenciam o aumento do número de inscritos a cada ano:

Agosto de 1999: Número de inscritos ao ENEM chega aos 346 mil

A segunda edição do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), marcado para o dia 29 de agosto, contará com a presença de 346.819 inscritos, 120% a mais que no ano passado. (...) O uso do Enem vem crescendo. Até agora, 45 universidades já confirmaram a utilização do exame como um dos critérios de ingresso aos cursos de graduação. No ano passado, apenas quatro instituições aproveitaram os resultados para seleção de alunos.

Disponível em: http://portal.inep.gov.br/c/journal/view_article_content?groupId=10157&articleId=20734&version=1.0. Acesso em: 08 Mai.2015

Desde 2004, o ENEM é utilizado como critério de seleção para os estudantes que pretendem concorrer a uma bolsa no Programa Universidade para Todos (ProUni). Além disso, cerca de 539 Instituições de Ensino Superior (IES), já usam o resultado do exame como critério de seleção para o ingresso no ensino superior, seja complementando ou substituindo (total ou parcialmente) o vestibular.

Julho de 2005: ENEM 2005 tem número recorde de inscritos, diz presidente do INEP

O presidente do Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais), Eliezer Pacheco, disse nesta quinta-feira que o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) terá um recorde de participantes neste ano.

Segundo Pacheco, cerca de três milhões de estudantes se inscreveram para fazer a avaliação, prevista para ocorrer no dia 28 de agosto. (...)

De acordo com o Inep, o recorde anterior foi registrado em 2003, com aproximadamente 1,9 milhão de participantes.

Para Pacheco, o número de inscritos cresceu porque os alunos são obrigados a fazer a prova para poderem participar do ProUni (Programa Universidade para Todos), que concede bolsas em instituições particulares de ensino superior.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u17636.shtml. Acesso em 06 Mai. 2015

Setembro de 2009: Enem 2009: MEC divulga balanço de inscritos; número de 4,1 milhões de candidatos é recorde

O MEC (Ministério da Educação) divulgou nesta quarta-feira (30) o número oficial de inscritos no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) 2009. São esperados 4.147.527 de estudantes na avaliação deste sábado e domingo.

Disponível em: http://educacao.uol.com.br/ultnot/2009/09/30/ult1811u375.jhtm. Acesso em 09 Mai. 2015

Quase 6,5 milhões de inscritos no ENEM 2012

O Enem 2012 teve 6.497.466 candidatos inscritos. (...) O número representa um novo recorde, com 275.769 inscritos a mais que em 2011. (...) "O grande volume de inscrições, em todos os Estados, demonstra de maneira clara a importância do Enem como indutor de melhorias no Ensino Médio, e como fator de inclusão social", ressaltou o presidente do Inep, professor Luiz Cláudio Costa. De acordo com Costa, "o Enem democratiza a educação e dá oportunidade aos estudantes brasileiros de participar das vagas nas universidades públicas, promovendo o acesso a programas de governo como o Programa Universidade Para Todos (ProUni) e Fundo de Financiamento Estudantil (Fies). Sem dúvida nenhuma, é uma ação de Estado importante para o desenvolvimento do país".

Disponível em: http://portal.inep.gov.br/rss_enem/-/asset_publisher/oV0H/content/id/93481. Acesso em 08 Mai. 2015

Maio de 2014: Inscritos para o Enem 2014 somam mais de 9,5 milhões, anuncia governo

O ministro da Educação, Henrique Paim, e o presidente do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), Chico Soares, anunciaram neste sábado (24), em Brasília, que 9.519.827 pessoas se inscreveram para a prova do ENEM 2014.

De acordo com os dados divulgados, houve um aumento de 21,8% no número de inscritos em relação à edição de 2013, quando 7.834.017 se inscreveram. Em 2012, foram 6.495.446 inscritos e em 2011 haviam sido 6.221.697.

O ministro da Educação comemorou o aumento no número de inscritos e afirmou que os dados mostram que o brasileiro acredita "cada vez mais que pode mudar sua vida por meio da educação".

"É importante destacar esse aumento de 21% porque todo ano achamos que chegamos a um patamar que não tem mais possibilidade de crescer. Tivemos a confirmação da expectativa no país em torno da questão educacional. O imaginário do estudante vem mudando. As pessoas estão acreditando cada vez mais que podem mudar sua vida por meio da educação", disse a jornalistas.

O exame deverá ser usado pelas 115 universidades e institutos federais para acesso a cursos de graduação.

Disponível em: http://g1.globo.com/educacao/enem/2014/noticia/2014/05/inscritos-para-o-enem-2014-somam-mais-de-95-milhoes-anuncia-governo.html. Acesso em 08 Mai.2015

A tabela abaixo evidencia o aumento no número de inscritos no ENEM a cada ano, desde a sua criação, e ilustra a democratização do acesso à seleção das universidades.

Tabela 1: Número de inscritos no ENEM por ano

Ano	Nº de inscritos	Ano	Nº de inscritos	Ano	Nº de inscritos
1998	157 221	2004	1 552 316	2010	4 611 505
1999	346 953	2005	3 004 491	2011	5 366 780
2000	390 180	2006	3 742 827	2012	5 790 989
2001	1 624 131	2007	3 568 592	2013	7 173 574
2002	1 829 170	2008	4 018 070	2014	9 519 827
2003	1 876 387	2009	4 576 126		

Dados obtidos em notícias divulgadas no site do INEP (www.inep.gov.br)

Vale ressaltar que, diferentemente dos demais vestibulares, a datação do ENEM refere-se ao ano de aplicação da prova, e não ano de ingresso dos alunos. Desse modo, o ENEM 2009 equivale às provas de 2010 da Unesp, Unicamp e Fuvest.

Sendo assim, para efeito de análise das questões, serão adotadas as nomenclaturas: Ano-Calendário, que se refere ao ano de aplicação da prova e Ano-Vestibular, que se refere ao nome público de cada prova, para consulta e busca em sites.

Tabela 2: Resumo dos dados da prova do ENEM

Período	Número de Questões
1998 – 2008	Prova por habilidades: 63 questões para avaliar 21 habilidades do Ensino Médio em geral, sem caracterizar por disciplina.
2009 – 2015	45 questões de Matemática

1.3 Histórico da Fuvest – vestibular para ingresso na USP (Universidade de São Paulo)

O vestibular da Fuvest (Fundação Universitária para o Vestibular), teve início em 1977, contando com duas fases para selecionar os candidatos para a USP (Universidade de São Paulo) e FCMSC-SP (Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo).

Segundo Almeida (2006, p.233), no contexto de profissionalização do processo de realização e aplicação dos vestibulares, surgem algumas fundações, vinculadas ou não às instâncias universitárias, dentre elas, a Fuvest – vinculada à Universidade de São Paulo.

Para efeito de indicação, será utilizado o ano de ingresso dos candidatos selecionados, por exemplo, a primeira fase da Fuvest 2015 ocorre em 2014, e os candidatos realizam a segunda fase em janeiro de 2015 para ingresso neste mesmo ano. Desse modo, esse vestibular é indicado como Fuvest 2015. Contudo, na análise das questões, ele será caracterizado como: Ano-Calendário 2014, Ano-Vestibular 2015.

No site da Fuvest (http://www.fuvest.br/vest1980/provas/provas.stm) é possível encontrar a maioria das provas anteriores, desde 1980, e a partir dessa fonte, elaborou-se o histórico a seguir.

No período de 1980 a 1989, a primeira fase do vestibular era composta por 96 questões, sendo 12 de Matemática.

Em 1990, a prova passou a conter 80 questões, sendo 10 de Matemática. Enquanto que as provas de 1991 a 1994 continham 72 questões, ainda com 10 questões de Matemática.

De 1995 a 2002, a primeira fase passou a ser composta por duas provas, com 80 questões cada. Desse modo, a prova de Matemática passou a conter 20 questões, e era aplicada juntamente com História, Química e Geografia (nos anos posteriores, até 2002, a prova de Química foi substituída por Biologia). As provas das sete disciplinas da segunda fase eram realizadas em cinco dias distintos, sendo a prova de Matemática, com 10 questões dissertativas. O ano de 2002 é o primeiro ano que contém as provas de 2ª fase no site da Fuvest.

Entre 2003 e 2006, a prova da primeira fase passou a ter 100 questões e ser realizada em apenas um dia. Neste caso, a prova de Matemática voltou a ter 12 questões e a prova da segunda fase continuou com as 10 questões dissertativas.

Já as provas de 2007 a 2009 passaram a ter 90 questões, sendo 10 de Matemática e, na segunda fase, 10 questões dissertativas.

Em 2010, a prova da primeira fase continuou com 10 questões de Matemática de um total de 90 questões. No entanto, a segunda fase passou a ser realizada em 3 dias, sendo:

Primeiro dia: 10 questões de Português e uma Redação;

Segundo dia: 20 questões relacionadas às disciplinas do Núcleo Comum do Ensino Médio: Matemática, Física, Química, Biologia, História, Geografia e Inglês, com o conteúdo de cada questão podendo abranger conhecimentos de mais de uma disciplina;

Terceiro dia: de acordo com a carreira escolhida, o número de questões de 2 ou 3 (das 6 disciplinas) compõem o caderno de cada candidato. Neste caso, tem-se 6 questões de cada disciplina e, de acordo com a carreira, o candidato deve resolver 6 de duas disciplinas, ou as 4 primeiras questões de 3 disciplinas.

Este último formato é o adotado até o vestibular de 2015, ano de conclusão dessa dissertação.

Tabela 3: Resumo dos dados do vestibular da USP (Fuvest)

	Número de Questões de Matemática	
Período (ano Vestibular)	**1ª Fase: Questões objetivas**	**2ª Fase: Questões Dissertativas**
1980 – 1989	12	-
1990 – 1994	10	-
1995 – 2002	20	10
2003 – 2006	12	10
2007 – 2009	10	10
2010 – 2015	10	1º dia: 20 questões do núcleo comum do ensino médio (podendo cada questão envolver conhecimentos de mais de uma disciplina) 2º dia: 6 ou 4 questões de matemática, de acordo com a carreira escolhida.

1.4 Histórico da Comvest (Comissão Permanente para os Vestibulares) – vestibular para ingresso na Unicamp (Universidade Estadual de Campinas)

Os dados seguintes foram organizados a partir das provas anteriores contidas no site da Comvest (https://www.comvest.unicamp.br).

Em 1987 e 1988, a prova da primeira fase de seleção da Unicamp, elaborada pela Comvest continha uma redação e 12 questões dissertativas, sendo 2 de Matemática. Já a segunda fase, realizada em 4 dias (Língua Portuguesa e Literatura e Biologia, Física e Língua Estrangeira, Geografia e Química, Matemática e História) era composta por 16 questões dissertativas de cada disciplina.

De 1989 até 1995, a prova de Matemática passou a ser realizada conjuntamente com a prova de Língua estrangeira (Português e Biologia, Química e História, Física e Geografia, eram os demais pares de provas aplicadas simultaneamente).

Já em 1996, apesar da primeira fase permanecer com redação e 12 questões dissertativas ao todo, sendo duas de Matemática, a segunda fase passou a conter 12 questões dissertativas de cada disciplina. A partir de 1998, a Comvest passou a disponibilizar provas comentadas no site e esse formato de prova manteve-se até 2010.

A partir de 2011, a prova da primeira fase passou a ser de múltipla escolha, com 48 questões com quatro alternativas cada e, destas, 10 de Matemática. A prova da segunda fase continuou com questões dissertativas, no entanto o agrupamento das disciplinas ocorreu da seguinte maneira: 24 questões de Ciências da Natureza, 18 de Ciências Humanas e Artes e 8 de Língua Inglesa, 12 questões de Língua Portuguesa e Literatura e 12 questões de Matemática.

Em 2015, a prova da primeira fase continha 90 questões de múltipla escolha, com quatro alternativas. Já a prova da segunda fase continha 6 questões dissertativas de cada disciplina, sendo Matemática realizada juntamente com História e Geografia. Física, Química e Biologia compõe outro dia de prova, com 6 questões cada e, Língua Portuguesa e Literatura dividem o outro dia com a Redação.

Tabela 4: Resumo dos dados do Vestibular da Unicamp (Comvest)

	Número de Questões de Matemática	
Período (ano Vestibular)	**1ª Fase**	**2ª Fase**
1987 – 1995	2 Questões dissertativas	16 Questões dissertativas
1996 – 2010	2 Questões dissertativas	12 Questões dissertativas
2011 – 2014	10 a 12 Questões objetivas (no manual do candidato consta a informação de 48 questões de conhecimentos gerais – a autora encontrou entre 10 a 12 questões de matemática ao analisar a prova)	12 Questões dissertativas
2015	15 Questões objetivas (no manual do candidato consta a informação de 90 questões de conhecimentos gerais – a autora encontrou 15 questões de matemática ao analisar a prova)	6 Questões dissertativas

1.5 Histórico da Vunesp – vestibular para ingresso na Unesp (Universidade Estadual Paulista)

A Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista – VUNESP – foi criada em 1979 para realizar o vestibular da Unesp e outros vestibulares e concursos para instituições públicas ou privadas.

De 1998 a 2009, o vestibular da Unesp foi realizado em 3 dias, com uma única fase, sendo o primeiro dia com 84 questões de múltipla escolha com cinco alternativas, sendo 12 de Matemática; o segundo dia, com a prova de conhecimentos específicos de acordo com a área escolhida, com questões dissertativas: Humanidades (10 questões de História, 9 de Geografia e 6 de Língua Portuguesa), Biológicas (10 questões de Biologia, 6 de Química, 5 de Física e 4 de Matemática) e Exatas (10 questões de Matemática, 9 de Física e 6 de Química); e o terceiro dia, com 10 questões dissertativas de Língua Portuguesa e uma redação.

De 2010 a 2015, o vestibular passou a ser realizado em duas fases: a primeira, composta por uma prova com 90 questões de múltipla escolha, sendo 30 de cada área do conhecimento (Linguagens e Códigos, Ciências Humanas, Ciências da Natureza e Matemática). De acordo com a análise da autora, são em média, 8 questões de Matemática nessa fase.

A segunda fase é realizada em dois dias, num total de 36 questões dissertativas, sendo: primeiro dia: 12 questões de Ciências Humanas e 12 de Ciências da Natureza e Matemática (pela análise da autora, com 3 questões exclusivas de Matemática); segundo dia: 12 questões discursivas de Linguagens e Códigos e uma redação.

Tabela 5: Resumo dos dados do Vestibular da Unesp (Vunesp)

	Número de Questões de Matemática	
Período (Ano Vestibular)	**1ª Fase**	**2ª Fase**
1998 – 2009	10 Questões objetivas	Biológicas: 4 dissertativas Exatas: 10 dissertativas
2010 – 2015	30 Questões objetivas da área do conhecimento (química, física, biologia e matemática), em média 8 questões de matemática, segundo análise da autora	12 Questões dissertativas da área do conhecimento, em média 3 questões de matemática.

2 ANÁLISE DE QUESTÕES DE FUNÇÕES DOS VESTIBULARES

Devido ao objetivo do trabalho estar fortemente relacionado ao tema “funções”, optou-se por analisar as questões cuja abordagem sobre função seja explícita. Por exemplo, não se utilizou questões que são essencialmente resolução de equações ou inequações, sem a abordagem direta do conceito de funções.

Para análise dessas questões, escolheu-se analisar as provas que ocorreram no ano-calendário 2009, visto que foi o ano em que o ENEM passou a ser realizado com 45 questões de Matemática. Convém ressaltar que o ENEM utiliza como base o ano corrente, e os demais vestibulares, o ano de ingresso dos candidatos. Desse modo, os vestibulares da Fuvest, Unicamp e Unesp de 2010 correspondem ao ano de aplicação do ENEM de 2009.

A metodologia de estudo baseia-se na resolução e análise das questões desses exames, bem como apresentação de gráficos que ilustrem a frequência do aparecimento de cada abordagem nas diferentes provas. Além disso, pretende-se analisar o desempenho dos alunos na resolução dessas questões conjecturando abordagens que eles considerem mais simples ou mais complexas a partir dos resultados obtidos no teste.

As questões serão organizadas por exame, começando pelas mais atuais até as mais antigas. Após cada questão será apresentada uma resolução e, ao final da análise de cada exame, gráficos que ilustrem os tópicos abordados.

3.1 Análise de questões do vestibular da Unesp

Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2015	1ª fase – Unesp	Q.1
Conteúdos	Função exponencial; Logaritmo natural				
Comando	Obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula da função; valor da variável dependente				

No artigo "Desmatamento na Amazônia Brasileira: com que intensidade vem ocorrendo?", o pesquisador Philip M. Fearnside, do INPA, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0).e^{kt}$, em que D(t) representa a área de desmatamento no instante t, sendo t medido em anos desde o instante inicial, D(0) a área de desmatamento no instante inicial t = 0, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja 0,6% e usando a aproximação $\ln 2 \cong 0,69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente

a) 51

b) 115

c) 15

d) 151

e) 11

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

Considerando a taxa média anual de desmatamento k = 0,6%, tem-se: $D(t) = D(0).e^{0,006t}$.

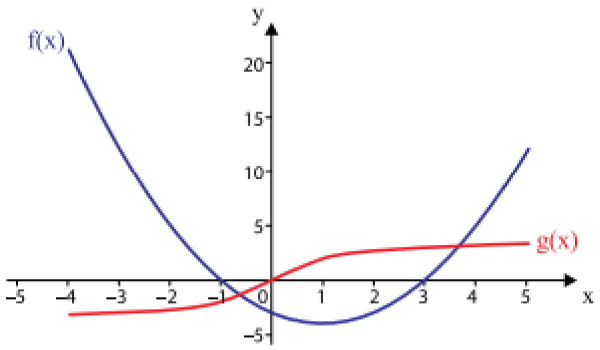
Deve-se obter t para que D(t) = 2D(0):

$$2D(0) = D(0).e^{0,006t} \Leftrightarrow e^{0,006t} = 2 \Leftrightarrow \ln e^{0,06t} = \ln 2 \Leftrightarrow 0,06t = 0,69 \Leftrightarrow t = 115$$

Comentários: Trata-se de um tipo de questão frequentemente abordada nos livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio. Contudo, o trabalho mais exaustivo refere-se aos logaritmos decimais e, assim, o logaritmo natural costuma ser considerado mais difícil pelos alunos. A questão fica restrita ao campo algébrico, sem a necessidade de trabalho com gráfico.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2014	1ª fase – Unesp	Q.2
Conteúdos	Análise de gráfico, Inequação produto				
Comando	Resolver inequação produto				
Dados	Gráficos cartesianos de duas funções				

Os gráficos de duas funções f(x) e g(x), definidas de *R* em *R*, estão representados no mesmo plano cartesiano.



No intervalo [– 4, 5], o conjunto solução da inequação f(x) · g (x) < 0 é:

a) {x ∈ R/ – 1 < x < 3}.

b) {x ∈ R/ – 1 < x < 0 ou 3 < x ≤ 5}.

c) {x ∈ R/ – 4 ≤ x < – 1 ou 0 < x < 3}.

d) {x ∈ R/ – 4 < x < 0}.

e) {x ∈ R/ – 4 ≤ x < – 1 ou 3 < x < 5}.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: C

A partir da análise do gráfico, pode-se obter o seguinte estudo de sinais:

-4 -1 0 3 5

f(x)	+	-	-	+
g(x)	-	-	+	+
f(x).g(x)	-	+	-	+

Desse modo, o intervalo solicitado é $\{x \in R / -4 \leq x < -1 \text{ ou } 0 < x < 3\}$

Comentários: A questão é apresentada graficamente e a resposta é solicitada algebricamente, apesar de não ser necessário efetuar cálculos, é necessário que o aluno perceba a necessidade de fazer a ‘regra de sinais’ da multiplicação.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	1ª fase – Unesp	Q.3
Conteúdos	Fórmula e gráfico de função				
Comando	Identificar tipo de função representada por gráfico				
Dados	Gráfico cartesiano				

A revista Pesquisa Fapesp, na edição de novembro de 2012, publicou o artigo intitulado Conhecimento Livre, que trata dos repositórios de artigos científicos disponibilizados gratuitamente aos interessados, por meio eletrônico. Nesse artigo, há um gráfico que mostra o crescimento do número dos repositórios institucionais no mundo, entre os anos de 1991 e 2011.

Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no período analisado, o crescimento do número de repositórios institucionais no mundo foi, aproximadamente,

a) exponencial.
b) linear.
c) logarítmico.
d) senoidal.
e) nulo.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: A

A partir do gráfico, tem-se que se o crescimento foi exponencial, pois se assemelha ao gráfico da função $f : R \rightarrow R_+^* \;/\; f(x) = a^x, a > 1$.

Comentários: Para o aluno que sabe diferenciar o aspecto gráfico das funções abordadas nas alternativas, a questão se torna simples pois limita-se a essa identificação.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	2ª fase – Unesp	Q.4
Conteúdos	Funções trigonométricas, valor mínimo da função quadrática				
Comando	Determinar valor da variável independente que minimiza a função				
Dados	Fórmula de função trigonométrica composta, cosseno de arco duplo				

Sabendo-se que cos(2x) = cos²x – sen²x, para quais valores de x a função $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0\le x\le 2\pi$?

RESOLUÇÃO

De acordo com a fórmula do cosseno do arco duplo, a função f pode ser escrita como:

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}[\cos^2 x-\text{sen}^2 x].$$

Como $\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x=1-\cos^2 x$, tem-se:

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}[\cos^2 x-(1-\cos^2 x)]$$

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}(2\cos^2 x-1) \qquad .$$

$$f(x)=\cos^2 x+\cos x-\frac{1}{2}$$

O valor mínimo dessa função quadrática na variável cos x é dado por:

$\cos x=-\frac{1}{2.1} \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$, que possui soluções $x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$ no intervalo $0\le x\le 2\pi$.

Comentários: Trata-se de uma questão que costuma ter alto índice de erros, pois é necessário utilizar identidades trigonométricas (apesar de ter sido fornecida a fórmula de cos (2x), também era necessário utilizar a relação fundamental da trigonometria) e, ainda, associar o valor mínimo da função quadrática do tipo f(x) = ax² + bx + c com a função encontrada, que depende do cosseno de x.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2012	1ª fase – Unesp	Q.5
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo				
Comando	Determinar valor da variável independente				
Dados	Fórmula da função; valor da variável dependente				

Em 2010, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realizou o último censo populacional brasileiro, que mostrou que o país possuía cerca de 190 milhões de habitantes. Supondo que a taxa de crescimento populacional do nosso país não se altere para o próximo século, e que a população se estabilizará em torno de 280 milhões de habitantes, um modelo matemático capaz de aproximar o número de habitantes (P), em milhões, a cada ano (t), a partir de 1970, é dado por: $P(t)=\left[280-190.e^{-0,019.(t-1970)}\right]$

Baseado nesse modelo, e tomando a aproximação para o logaritmo natural $\ln\left(\frac{14}{95}\right)\cong -1,9$, a população brasileira será 90% da suposta população de estabilização aproximadamente no ano de:

a) 2065

b) 2070

c) 2075

d) 2080

e) 2085

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

Deve-se obter t para que a população atinja 90% da suposta população de estabilização (280 milhões). Ou seja:

$$0,9.280=\left[280-190.e^{-0,019.(t-1970)}\right]\Leftrightarrow 190.e^{-0,019(t-1970)}=280-0,9.280$$

$$\Leftrightarrow 190.e^{-0,019(t-1970)}=280.0,1\Leftrightarrow e^{-0,019(t-1970)}=\frac{14}{95}\Leftrightarrow \ln e^{-0,019(t-1970)}=\ln\frac{14}{95}$$

$$\Leftrightarrow t-1970=\frac{-1,9}{-0,019}\Leftrightarrow t-1970=100\Leftrightarrow t=2070$$

Comentários: Assim como a primeira questão de exponencial, essa também está na base natural, o que já caracteriza um fator dificultador devido ao escasso trabalho deste tema durante o Ensino Médio. Além disso, os números utilizados na questão assustam os alunos na resolução.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	1ª fase – Unesp	Q.6
Conteúdos	Função exponencial				
Comando	Determinar valor da variável dependente				
Dados	Fórmula da função; valor da variável independente				

Ambientalistas, após estudos sobre o impacto que possa vir a ser causado à população de certa espécie de pássaros pela construção de um grande conjunto de edifícios residenciais próximo ao sopé da Serra do Japi, em Jundiaí, SP, concluíram que a quantidade de tais pássaros, naquela região, em função do tempo, pode ser expressa, aproximadamente, pela função

$$P(t) = \frac{P_0}{4 - 3.(2^{-t})} \ ,$$

onde t representa o tempo, em anos, e P_0 a população de pássaros na data de início da construção do conjunto.

Baseado nessas informações, pode-se afirmar que:

a) após 1 ano do início da construção do conjunto, $P(t)$ estará reduzida a 30% de P_0.

b) após 1 ano do início da construção do conjunto, $P(t)$ será reduzida de 30% de P_0.

c) após 2 anos do início da construção do conjunto, $P(t)$ estará reduzida a 40% de P_0.

d) após 2 anos do início da construção do conjunto, $P(t)$ será reduzida de 40% de P_0.

e) $P(t)$ não será inferior a 25% de P_0.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Tem-se que $2^{-t} > 0, \ \forall t \in R$.

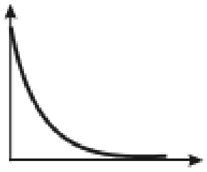
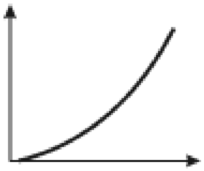
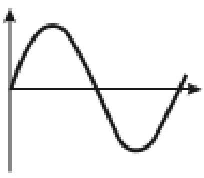
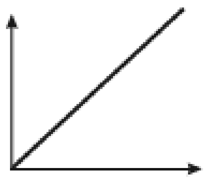
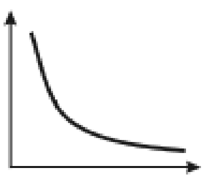
Desse modo, $-3(2^{-t}) < 0 \Rightarrow 4 - 3(2^{-t}) < 4 \Rightarrow \frac{1}{4 - 3.(2^{-t})} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P_0}{4 - 3.(2^{-t})} > \frac{P_0}{4}$

Ou seja, $P(t) > \frac{P_0}{4}$.

Comentários: Trata-se de uma questão que é facilmente resolvida analisando que, ao aumentar o valor de t, a potência 2^{-t} tende a zero e, assim, a função tende a $P_0/4$. Contudo, para o aluno que não tiver essa percepção, a questão torna-se mais demorada por ter que analisá-la para 2 valores distintos de t.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	1ª fase – Unesp	Q.7
Conteúdos	Gráfico de funções				
Comando	Relacionar gráficos de funções às suas fórmulas				
Dados	Gráficos e fórmulas				

A tabela apresenta, na coluna da esquerda, a descrição de alguns tipos de funções e, na coluna da direita, representações de alguns gráficos de funções, cujas variáveis independentes, definidas no domínio dos números reais, estão representadas nos eixos das abscissas.

Algumas funções	Alguns gráficos de funções
I. Em uma prova de corrida dos 100 m rasos, a velocidade média V_m de um atleta é uma função de seu tempo de percurso t: $V_m(t) = \frac{100}{t}$	a. 
II. O perímetro P de um triângulo equilátero é uma função de seu lado L: $P(L) = 3 \cdot L$	b. 
III. A quantidade Q de uma dada substância química num organismo vivo, onde Q_0 é a quantidade inicial da substância no organismo, é uma função do tempo de meia vida t dessa substância naquele organismo: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t}$	c. 
IV. A área A de um círculo é uma função de seu raio r: $A(r) = \pi \cdot r^2$	d. 
V. A altura H que uma pedra amarrada a um cabo de comprimento fixo L possui ao ser girada, com velocidade constante num plano β vertical e perpendicular ao solo, em relação ao centro de giro, é uma função do ângulo α, em radianos, formado pelo cabo e uma reta horizontal contida no plano β: $H(\alpha) = L \cdot (\text{sen}\alpha)$	e. 

O conjunto de pares ordenados que relaciona cada função à sua respectiva representação gráfica é:

a) {(I, a), (II, d), (III, e), (IV, b), (V, c)}.

b) {(I, c), (II, d), (III, a), (IV, b), (V, e)}.

c) {(I, d), (II, e), (III, a), (IV, b), (V, c)}.

d) {(I, e), (II, d), (III, a), (IV, b), (V, c)}.

e) {(I, e), (II, d), (III, b), (IV, a), (V, c)}.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

I – O gráfico corresponde a um ramo de hipérbole (pois t>0): e

II – Trata-se de uma função linear crescente, portanto o gráfico é uma linha reta ascendente: d

III – Trata-se de uma função exponencial com o valor da base entre 0 e 1 e, por isso, uma curva exponencial decrescente: a

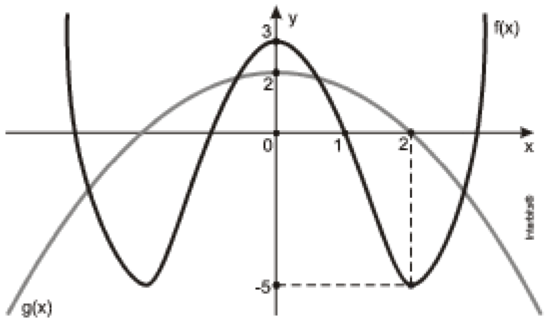
IV – A área do círculo é um arco de parábola, pois r>0: b

V – Trata-se da função seno: c

Comentários: Parecida com a questão 3, essa questão apresenta fórmulas e gráficos e solicita que o aluno faça a correspondência correta. O caso que causa maior dúvida é o das funções I e III, relacionada aos gráficos A e E, no qual o aluno precisaria inferir que no gráfico E o gráfico passa assintoticamente aos eixos, enquanto que o gráfico A, intercepta o eixo y.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	1ª fase – Unesp	Q.8
Conteúdos	Análise de gráfico, função composta				
Comando	Determinar valor da função				
Dados	Gráfico de funções, abscissa do ponto				

Através dos gráficos das funções f(x) e g(x), os valores de f(g(0)) e g(f(1)) são, respectivamente:



a) –5 e 0.

b) –5 e 2.

c) 0 e 0.

d) 2 e –5.

e) 2 e 0.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

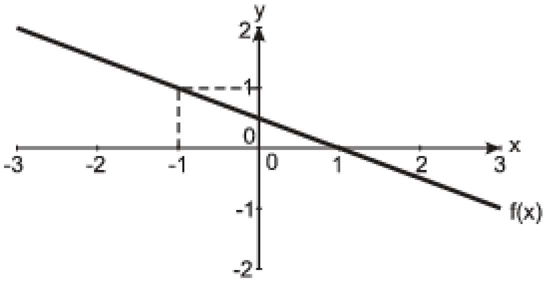
Do gráfico, tem-se: g(0) = 2 e f(1) = 0.

Desse modo, f(g(0)) = f(2) = –5 e g(f(1)) = g(0) = 2

Comentários: Tem-se uma questão de cálculos fáceis, que pressupõe a compreensão do conceito de função composta, bem como a percepção gráfica do valor numérico da função.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	1ª fase – Unesp	Q.9
Conteúdos	Análise de gráfico, Função afim				
Comando	Determinar fórmula, analisar crescimento e sinais da função				
Dados	Gráfico				

Observe o gráfico da função f(x) e analise as informações a seu respeito.



I – Se $x_1, x_2 \in Dom(f)$ e $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$.

II – Se $x > 1$, então $f(x) < 0$.

III – O ponto (2, –2) pertence ao gráfico de $f(x)$.

IV – A lei de formação de $f(x)$ representada no gráfico é dada por $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)$.

A alternativa que corresponde a todas as afirmações verdadeiras é:

a) I e III.

b) I, II e III.

c) I e IV.

d) II, III e IV.

e) II e IV.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

I – Como a função é decrescente, para $x_2 > x_1$, tem-se $f(x_2) < f(x_1)$: Falsa.

II – A função é decrescente e a raiz é x = 1. Logo, f(x)< 0 se x>1: Verdadeira.

III e IV: O gráfico passa pelos pontos (-1,1) e (1,0) e, por isso, sua fórmula é:

$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, desse modo, o ponto (2, -2) não pertence ao gráfico de f(x) e a fórmula do item IV está correta.

Comentários: Além da necessidade de converter a função do registro gráfico para o algébrico, a notação algébrica de domínio e sinal da função pode ser um fator dificultador.

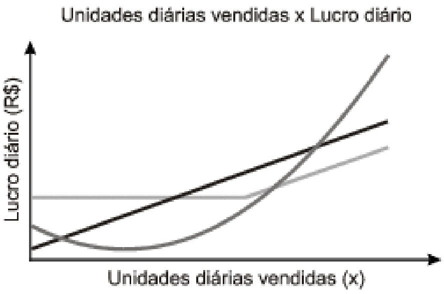
Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	2ª fase – Unesp	Q.10
Conteúdos	Função afim, função quadrática, inequação, gráfico				
Comando	Determinar intervalo da variável independente que satisfaça condições da variável dependente				
Dados	Fórmulas e gráficos				

Três empresas A, B e C comercializam o mesmo produto e seus lucros diários (L(x)), em reais, variam de acordo com o número de unidades diárias vendidas (x) segundo as relações:

Empresa A: $L_A(x) = \frac{10}{9}x^2 - \frac{130}{9}x + \frac{580}{9}$

Empresa B: $L_B(x) = 10x + 20$

Empresa C: $L_C(x) = \begin{cases} 120, \ se\ x < 15 \\ 10x - 30, \ se\ x \geq 15 \end{cases}$



Determine em que intervalo deve variar o número de unidades diárias vendidas para que o lucro da empresa B supere os lucros da empresa A e da empresa C.

RESOLUÇÃO

Deve-se obter a solução do sistema de inequações: $\begin{cases} L_B > L_A & (1) \\ L_B > L_C & (2) \end{cases}$

(1) $L_B = 10x + 20 > \frac{10}{9}x^2 - \frac{130}{9}x + \frac{580}{9} = L_A \Rightarrow 10x^2 - 130x + 580 - 90x - 180 < 0$

$\Rightarrow x^2 - 22x + 40 < 0 \Rightarrow 2 < x < 20$

(2) $x < 15 \ e \ 10x + 20 > 120 \ \Rightarrow 10 < x < 15 \ e$

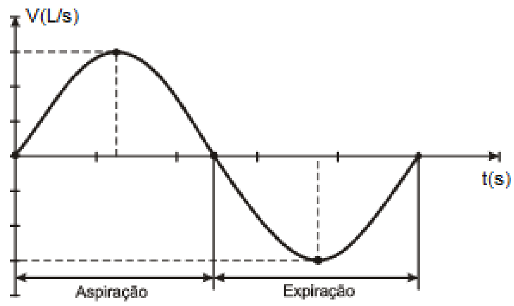
$x \geq 15 \ e \ 10x + 20 > 10x - 30 \ \Rightarrow x \geq 15,$ ou seja, $x > 10$

Desse modo, a solução é a interseção de (1) e (2): 10 < x < 20

Comentários: Trata-se de uma questão de resolução de inequações. Contudo, o fato da apresentação ser gráfica pressupõe a necessidade da interpretação do gráfico para montar o sistema, o que pode dificultar a resolução.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	1ª fase – Unesp	Q.11
Conteúdos	Função trigonométrica, gráfico				
Comando	Determinar coeficientes de função trigonométrica composta				
Dados	Gráfico				

Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade (Litros/segundo) de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 L/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

a) $V(t) = \dfrac{2\pi}{5}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{5}t\right)$

b) $V(t) = \dfrac{3}{5}\operatorname{sen}\left(\dfrac{5}{2\pi}t\right)$

c) $V(t) = 0,6\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

d) $V(t) = 0,6\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

e) $V(t) = \dfrac{5}{2\pi}\cos(0,6t)$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

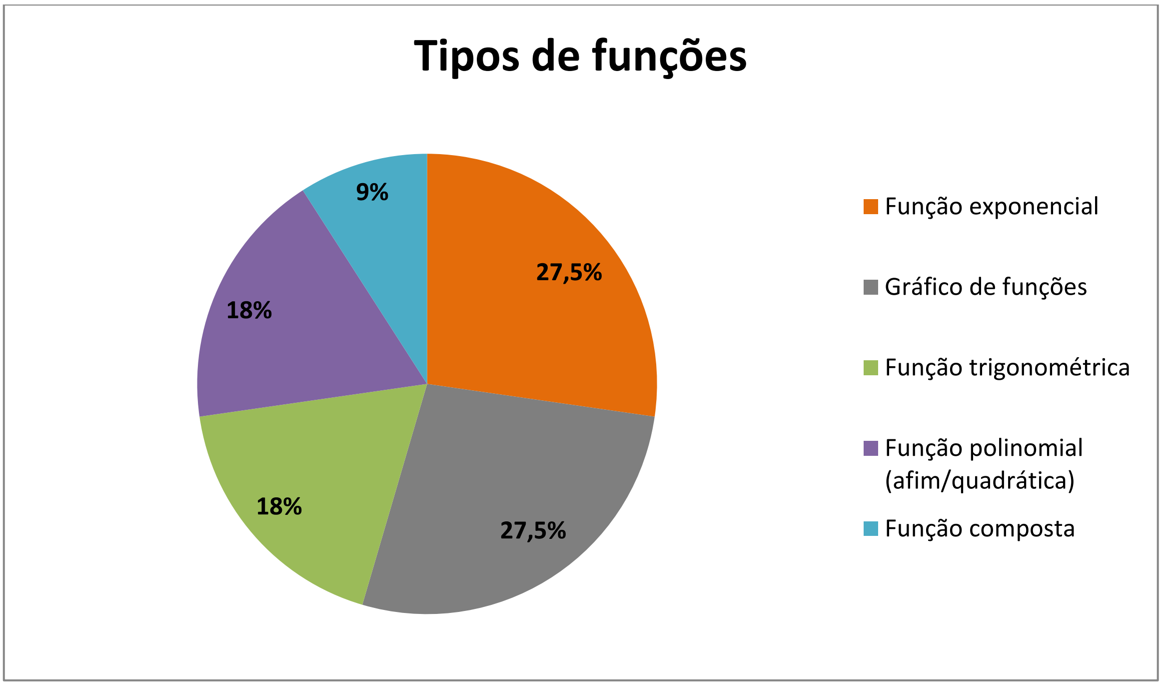
O gráfico corresponde a uma função seno cujo máximo é 0,6 L/s e cujo período é 5 s. Desse modo, tem-se: $V(t) = 0,6\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$.

Comentários: Os conceitos básicos e mais abordados das funções trigonométricas: período e conjunto imagem e diferenciação entre função seno e cosseno são suficientes para a resolução dessa questão.

3.1.1 Análise gráfica do vestibular da Unesp

Para resumir os dados obtidos com a análise das páginas anteriores, os gráficos abaixo ilustram os temas de maior ocorrência nas provas da Unesp entre os anos de 2009 e 2014, bem como a característica predominante da abordagem de função: gráfico ou fórmula.

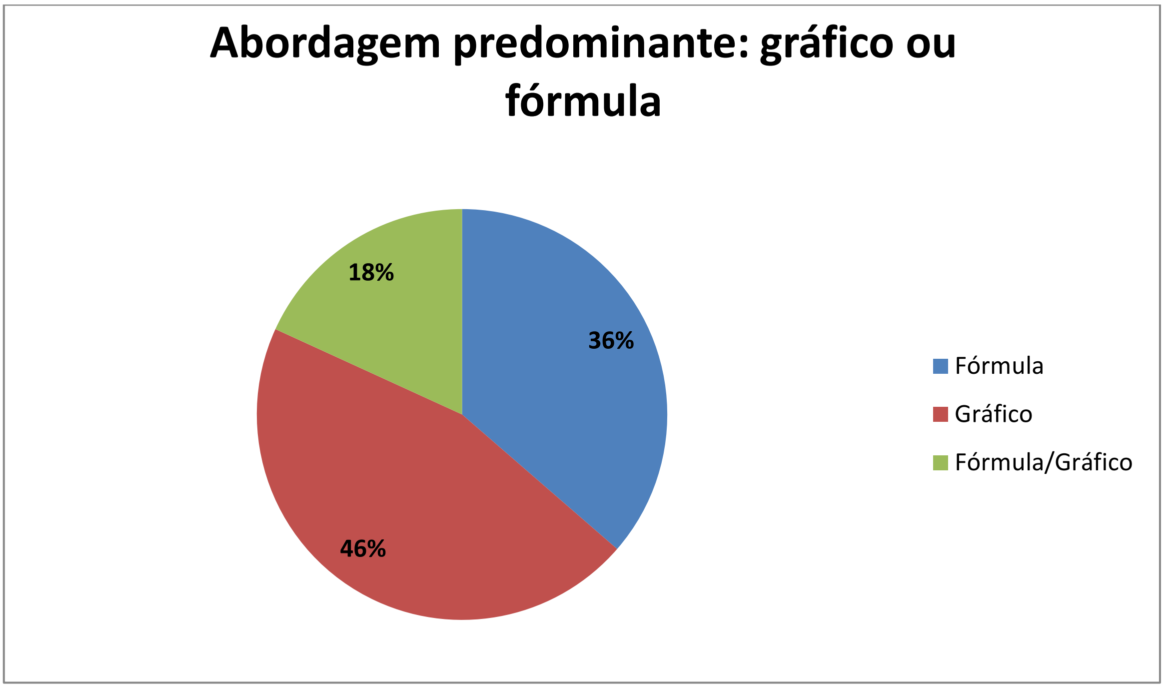
Gráfico 1: Unesp – Tipos de funções mais abordadas – quantidade e porcentagem



Pode-se perceber do Gráfico 1, que há uma predominância de funções exponenciais nesse vestibular. Muitas vezes esse tópico não é muito bem abordado no ensino médio talvez pela crença que o assunto não seja tão importante ou porque os alunos possam achar difícil. Entretanto, acredita-se que devido às inúmeras aplicações desse assunto durante a graduação do aluno em diversas áreas do conhecimento (matemática, física, química, biologia, engenharias) ele seja um tópico tão explorado e cobrado nos vestibulares. Percebe-se, pelo gráfico, que ele é ainda mais explorado que as funções quadráticas e lineares, as quais são mais estudadas durante o ensino médio e os alunos tem maior familiaridade e facilidade com o conteúdo desse tópico.

Funções trigonométricas também são bastante exploradas, compartilhando a metade das questões com as funções quadráticas e afins. Nos bancos escolares esse também é um tópico menos explorado por parte dos docentes no ensino médio, entretanto, percebe-se que ele deveria ser igualmente estudado visto a frequência desse conteúdo no vestibular.

Gráfico 2: Unesp – Abordagem predominante das questões – quantidade e porcentagem

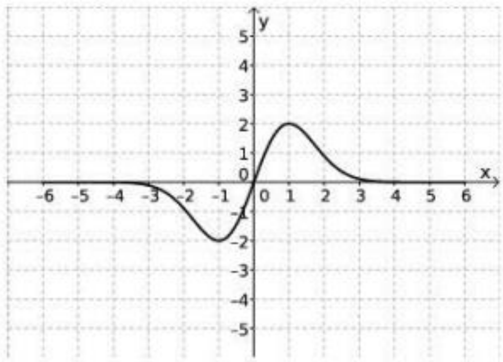


Outra característica bastante peculiar do Gráfico 1, também percebida no Gráfico 2, é que o vestibular priorizou bastante a parte gráfica das funções. Acredita-se que isso é um crescente nos vestibulares, visto que em muito o vestibular passou a dar mais valor à capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno, ao invés de fazê-lo trabalhar com extensas fórmulas algébricas, principalmente, em questões da primeira fase.

2.2 Análise de questões do vestibular da Unicamp

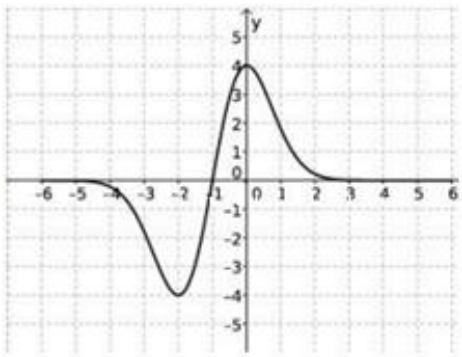
Ano-Calendário	2014	**Ano-Vestibular**	2015	**1ª fase – Unicamp**	**Q.1**
Conteúdos	Função composta, gráfico				
Comando	Identificar gráfico de uma função composta				
Dados	Gráfico, fórmula				

A figura abaixo exibe o gráfico de uma função $y = f(x)$:

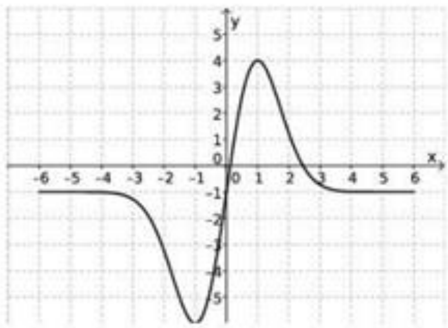


Então, o gráfico de $y = 2f(x-1)$ é dado por:

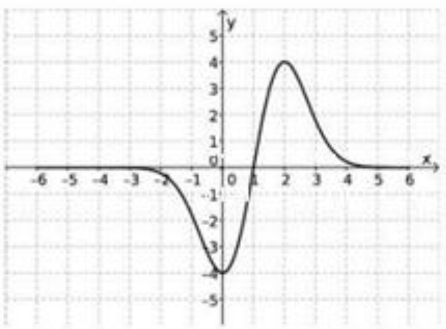
a)



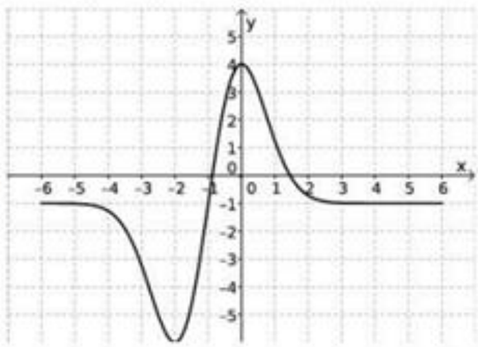
c)



b)



d)



RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

Dado o gráfico da função f, o gráfico de f(x – 1) é o deslocamento horizontal de f, uma unidade para a direita. E, ainda, 2f(x – 1) dobra o conjunto imagem, passando de [–2, 2] para [–4,4]. Desse modo, a alternativa correta é o item B.

Comentários: Além de ser resolvida utilizando os conceitos de composição e translação de função, a questão poderia ser resolvida utilizando-se coordenadas de pontos. No entanto, em geral, os alunos consideram a análise gráfica mais complexa do que se fosse fornecida a fórmula para a obtenção dos pontos. No entanto, vale ressaltar que os conceitos de translação, rotação, expansão e compressão são, em geral, pouco explorados durante o Ensino Médio.

Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2015	2ª fase – Unicamp	Q.2
Conteúdos	Função afim, inequação produto, função composta				
Comando	Resolver inequação produto, calcular valor de constante a partir de igualdade de compostas				
Dados	Fórmulas de funções				

Seja a um número real positivo e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real a.

a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x)g(x) > 0$.

b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo número real x.

RESOLUÇÃO

a) $f(x).g(x) = a(x+3).(9-2x) > 0 \Leftrightarrow a(-2x^2 + 3x + 27) > 0$

Como $a > 0$, tem-se que: $-2x^2 + 3x + 27 > 0$, ou seja, $-3 < x < 4{,}5$.

Desse modo, as soluções inteiras são: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ou seja, são 7 soluções inteiras.

b) $f(g(x)) = f(9-2x) = a(9-2x) + 3a = -2ax + 12a$

$g(f(x)) = g(ax+3a) = 9 - 2(ax+3a) = -2ax - 6a + 9$

$f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow -2ax + 12a = -2ax - 6a + 9 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Comentários: Trata-se de dois itens clássicos no trabalho com funções: inequação produto e composição de funções. No entanto, acredita-se que a presença da constante a no primeiro item possa dificultar a resolução pelo fato de que o aluno possa se confundir com a presença de “outra letra” na resolução da questão, não diferenciando constante e variável.

Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2015	2ª fase – Unicamp	Q.3
Conteúdos	Função exponencial, função logarítmica				
Comando	Obter valor das variáveis dependente e independente				
Dados	Fórmula, valor de x, valor de f(x).				

Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x.

a) Mostre que $f(\log_{10}(2+\sqrt{3}))$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_{10} 2 \approx 0,3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

RESOLUÇÃO

a)

$$f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x} = 10.10^x + \frac{10}{10^x} = 10\left(10^x + \frac{1}{10^x}\right)$$

$$f(\log_{10}(2+\sqrt{3})) = 10\left(10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} + \frac{1}{10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})}}\right) = 10\left(2+\sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

$$f(\log_{10}(2+\sqrt{3}) = 10(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) = 40 \in Z$$

b)

$$f(x) = 10\left(10^x + \frac{1}{10^x}\right) = 52 \Rightarrow \frac{10.10^{2x}+10}{10^x} = 52 \Rightarrow 10.(10^x)^2 - 52.10^x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 5.(10^x)^2 - 26.10^x + 5 = 0 \Rightarrow 10^x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4.5.5}}{10} \Rightarrow 10^x = 5 \text{ ou } 10^x = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x = \log_{10} 5 \; ou \; x = \log_{10} 5^{-1} = -\log_{10} 5$$

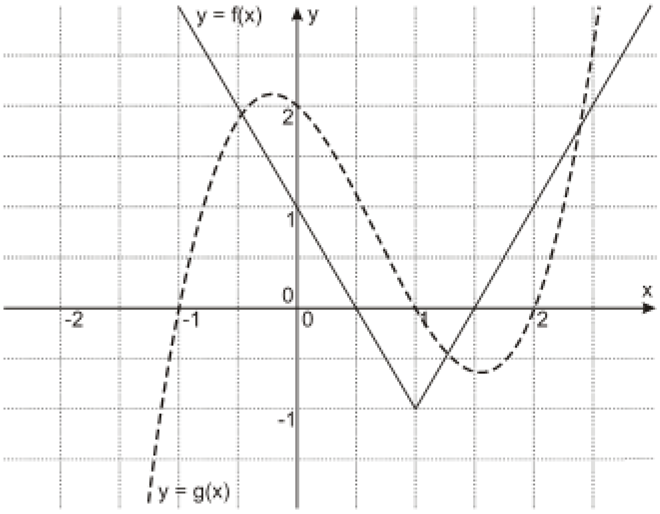
Como $\log_{10} 2 \approx 0,3$, tem-se que $\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0,3 = 0,7$

Então, $x = 0,7$ ou $x = -0,7$.

Comentários: Nessa questão é necessária a utilização das propriedades básicas da potenciação, bem como as propriedades de logaritmo. Caso o aluno se esqueça da consequência da definição de logaritmo $a^{\log_a b} = b$, o item a pode se tornar mais difícil. Além disso, a racionalização do denominador $2+\sqrt{3}$ também pode ser um fator dificultador.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2014	1ª fase – Unicamp	Q.4
Conteúdos	Função composta, gráfico				
Comando	Determinar valor da função composta				
Dados	Gráfico				

Considere as funções f e g, cujos gráficos estão representados na figura abaixo.



O valor de $f(g(1)) - g(f(1))$ é igual a

a) 0.

b) – 1.

c) 2.

d) 1.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

Do gráfico, tem-se: g(1) = 0 e f(1) = -1.

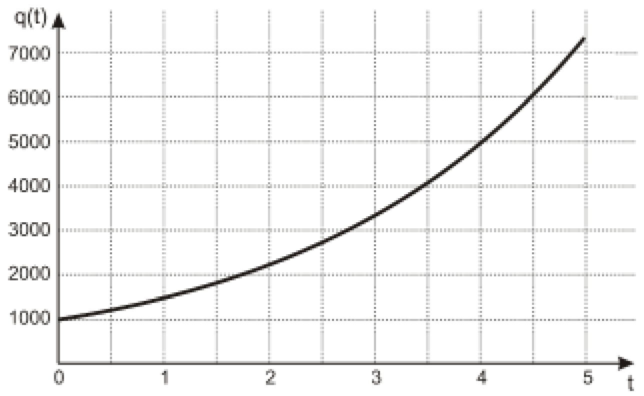
Desse modo, f(g(1)) = f(0) = 1 e g(f(1)) = g(-1) = 0

Então, $f(g(1)) - g(f(1)) = 1 - 0 = 1$

Comentários: Tem-se uma questão de cálculos fáceis, que pressupõe a compreensão do conceito de função composta, bem como a percepção gráfica do valor numérico da função. É similar à questão 8 da Unesp.

Ano-Calendário	2013	**Ano-Vestibular**	2014	**1ª fase – Unicamp**	**Q.5**
Conteúdos	Função exponencial, gráfico				
Comando	Identificar fórmula a partir do gráfico				
Dados	Gráfico				

O gráfico abaixo exibe a curva de potencial biótico $q(t)$ para uma população de micro-organismos, ao longo do tempo t.



Sendo a e b constantes reais, a função que pode representar esse potencial é

a) $q(t) = at + b.$

b) $q(t) = a\,b^t.$

c) $q(t) = at^2 + bt.$

d) $q(t) = a + \log_b t.$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

O gráfico apresenta uma curva do tipo exponencial crescente, encontrada no item B.

Comentários: Trata-se de uma questão que não necessita de cálculos devido às alternativas que foram apresentadas. Basta que o aluno conheça o aspecto gráfico da função exponencial e saiba reconhecer sua fórmula, pois há uma única fórmula do tipo de função exponencial.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2014	2ª fase – Unicamp	Q.6
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Determinar coeficientes da função				
Dados	Fórmula da função, coordenadas de ponto				

Sejam a e b reais. Considere as funções quadráticas da forma $f(x)=x^2+ax+b$, definidas para todo x real.

a) Sabendo que o gráfico de $y=f(x)$ intercepta o eixo y no ponto (0,1) e é tangente ao eixo x, determine os possíveis valores de a e b.

b) Quando $a+b=1$ os gráficos dessas funções quadráticas têm um ponto em comum. Determine as coordenadas desse ponto.

RESOLUÇÃO

a) O gráfico da função passa pelo ponto (0,1), logo:

$f(0)=1 \Rightarrow 0^2+a.0+b=1 \Rightarrow b=1$

A função $f(x)=x^2+ax+1$ possui apenas uma raiz real, pois o gráfico tangencia o eixo x, assim: $\Delta=0 \Rightarrow a^2-4.1.1=0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a=2$ ou $a=-2$

b) Se $a+b=1$, tem-se que $b=1-a$, então: $f(x)=x^2+ax+1-a$, sem perda de generalidade, tomando a = 0 e a = 1: $f_1(x)=x^2+1 \; e \; f_2(x)=x^2+x$, cujas interseções são obtidas por:

$f_1(x)=f_2(x) \Rightarrow x^2+1=x^2+x \Rightarrow x=1 \; e \; f_1(1)=f_2(1)=2$, ou seja, o ponto comum é: (1,2)

Comentários: O item a é considerado mais fácil do que o item b, pois apesar de ambos apresentarem as constantes a e b, o item a fornece um ponto do gráfico que já permite a obtenção do valor de b. Contudo, a necessidade da utilização do discriminante da função nem sempre é recordado pelos alunos. Já no item b, a utilização de um valor qualquer para uma constante, sem perda de generalidade, não é algo comumente abordado no Ensino Médio, o que deve caracterizar baixo índice de acerto nessa questão.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2014	2ª fase – Unicamp	Q.7
Conteúdos	Função logarítmica e função composta				
Comando	Obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0,5 + \log_3(t+1)$, onde o tempo $t \geq 0$ é dado em anos.

a) Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?

b) Suponha que outro arbusto, nessa mesma fase de desenvolvimento, tem sua altura expressa pela função composta $g(t) = h(3t+2)$. Verifique que a diferença $g(t) - h(t)$ é uma constante, isto é, não depende de t.

RESOLUÇÃO

a) $h(t) = 0,5 \Rightarrow 0,5 + \log_3(t+1) = 0,5 \Rightarrow \log_3(t+1) = 0 \Rightarrow t = 0$

$h(t) = 1,5 \Rightarrow 0,5 + \log_3(t+1) = 1,5 \Rightarrow t = 2$

O tempo necessário é 2 anos.

b) $g(t) = h(3t+2) = 0,5 + \log(3t+2+1) = 0,5 + \log(3t+3)$, então

$$g(t) - h(t) = 0,5 + \log_3(3t+3) - [0,5 + \log_3(t+1)] = \log_3[3(t+1)] - \log_3(t+1) = \log_3 \frac{3(t+1)}{t+1} \Rightarrow$$

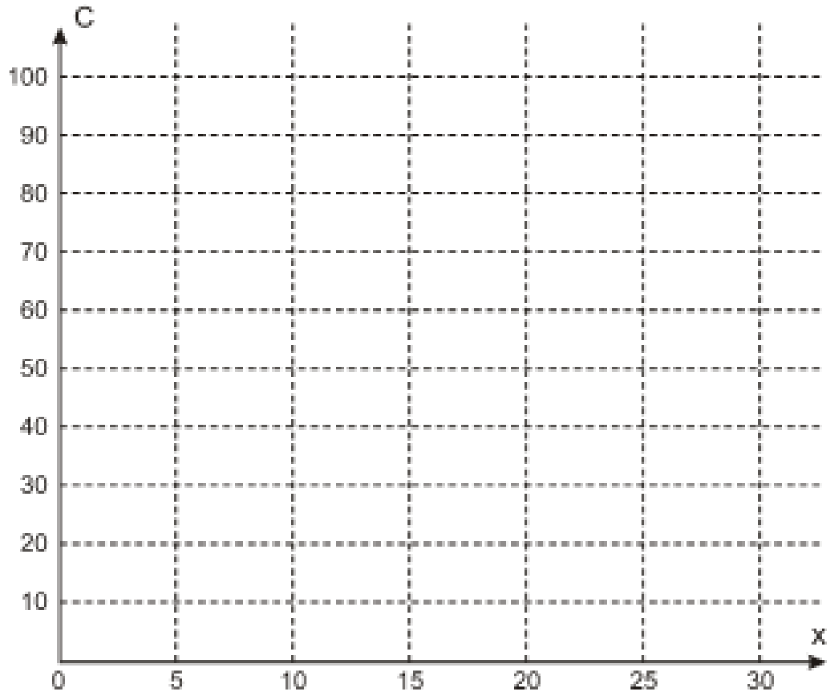
$g(t) - h(t) = \log_3 3 = 1$, ou seja, é uma constante

Comentários: Para analisar o tempo necessário para que a altura do arbusto aumente de 0,5 m para 1,5m é necessário que sejam calculados o instante de cada uma das alturas. No entanto, como a altura 0,5 m ocorre no tempo t = 0, o fato de não ser calculado, não impede o aluno de encontrar o tempo correto, mesmo não fazendo todos os cálculos. No item b, apesar da aplicação da função composta ser elementar, o fato de ser necessário utilizar propriedades operatórias dos logaritmos pode ser um fator dificultador.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2014	2ª fase – Unicamp	Q.8
Conteúdos	Função afim, gráfico				
Comando	Construir gráfico				
Dados	Valores das variáveis dependente e independente				

O consumo mensal de água nas residências de uma pequena cidade é cobrado como se descreve a seguir. Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a 20 reais. Para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos. Considere $c(x)$ a função que associa o gasto mensal com o consumo de x metros cúbicos de água.

a) Esboce o gráfico da função $c(x)$ no plano cartesiano para x entre 0 e 30.

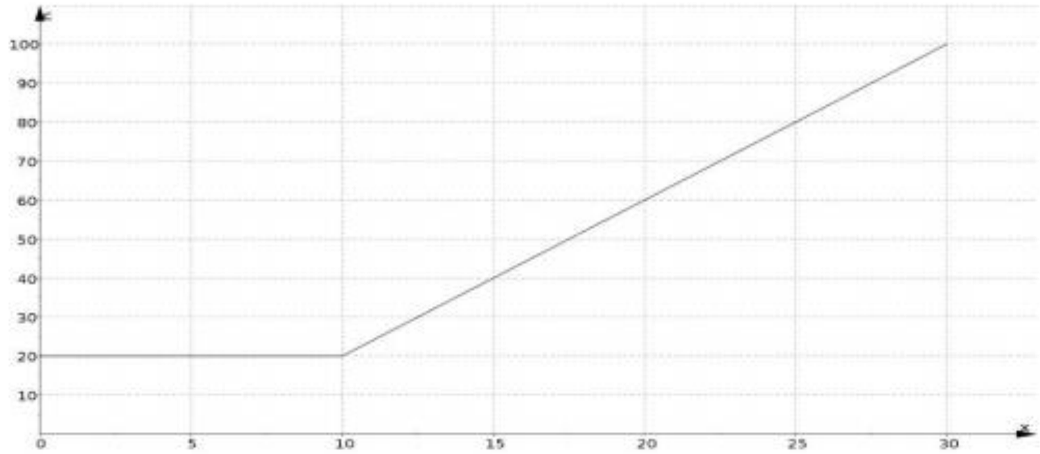


b) Para um consumo mensal de 4 metros cúbicos de água, qual é o preço efetivamente pago por metro cúbico? E para um consumo mensal de 25 metros cúbicos?

RESOLUÇÃO

a) A função c(x) é dada por:

$$c(x)=\begin{cases}20, \ se \ 0 \le x \le 10 \\ 20+4(x-10), \ se \ x>10\end{cases}$$, cujo gráfico é:



b) O preço unitário é dado por $\frac{c(x)}{x}$, desse modo, tem-se:

$$x=4 \Rightarrow \frac{c(4)}{4}=\frac{20}{4}=5 \ reais \ por \ m^3$$

$$x=25 \Rightarrow \frac{c(25)}{25}=\frac{20+4(25-10)}{25}=\frac{80}{25}=3,20 \ reais \ por \ m^3$$

Comentários: Entre as questões da Unesp e Unicamp já analisadas, trata-se da primeira em que é necessário fazer uma conversão da função na linguagem natural para a linguagem algébrica ou gráfica. Além disso, é a primeira questão que solicita que se faça o esboço do gráfico. Acredita-se que seja mais difícil obter a segunda sentença da fórmula da função, por ter que considerar que o valor de 4 reais seja cobrado para (x – 10) litros.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	1ª fase – Unicamp	Q.09
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo				
Comando	Determinar valor da variável independente				
Dados	Fórmula da função				

Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$$

sendo t o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

a) $12[\log(7) - 1]$ minutos.

b) $12[1 - \log(7)]$ minutos.

c) $12\log(7)$ minutos.

d) $[1 - \log(7)]/12$ minutos.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: C

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$$

$$140 = (740 - 40) \times 10^{-t/12} + 40 \Rightarrow \frac{100}{700} = 10^{-t/12} \Rightarrow \log 10^{-t/12} = \log 7^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-t}{12} = -\log 7 \Rightarrow t = 12\log 7$$

Comentários: Trata-se de uma questão frequente em livros didáticos, em que se solicita o valor da variável independente de uma função exponencial, necessitando assim, do uso do logaritmo. No entanto, essa aplicação é precedida da necessidade de substituir dados do enunciado na fórmula da questão, que é fornecida a partir de algumas constantes. Desse modo, a interpretação dos dados é necessária.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	2ª fase – Unicamp	Q.10
Conteúdos	Função afim				
Comando	Obter fórmula a partir de dados da tabela				
Dados	Valores das variáveis dependente e independente				

A numeração dos calçados obedece a padrões distintos, conforme o país. No Brasil, essa numeração varia de um em um, e vai de 33 a 45, para adultos. Nos Estados Unidos a numeração varia de meio em meio, e vai de 3,5 a 14 para homens e de 5 a 15,5 para mulheres.

a) Considere a tabela abaixo.

Numeração brasileira (t)	Comprimento do calçado (x)
35	23,8 cm
42	27,3 cm

Suponha que as grandezas estão relacionadas por funções afins $t(x) = ax + b$ para a numeração brasileira e $x(t) = ct + d$ para o comprimento do calçado. Encontre os valores dos parâmetros a e b da expressão que permite obter a numeração dos calçados brasileiros em termos do comprimento, ou os valores dos parâmetros c e d da expressão que fornece o comprimento em termos da numeração.

b) A numeração dos calçados femininos nos Estados Unidos pode ser estabelecida de maneira aproximada pela função real f definida por $f(x) = 5(x - 20) / 3$, em que x é o comprimento do calçado em cm. Sabendo que a numeração dos calçados n_k forma uma progressão aritmética de razão 0,5 e primeiro termo $n_1 = 5$, em que $n_k = f(c_k)$, com k natural, calcule o comprimento c_5.

RESOLUÇÃO

a) Seja t(x) = ax+b, da tabela, tem-se:

$$\begin{cases} 35 = 23,8a + b \\ 42 = 27,3a + b \end{cases} \Rightarrow 3,5a = 7 \Rightarrow a = 2 \ e \ b = 35 - 47,6 \Rightarrow b = -12,6$$

Desse modo, t(x) = 2x – 12,6

E, ainda, seja x(t) = ct + d, da tabela, tem-se:

$$\begin{cases} 23,8 = 35c + d \\ 27,3 = 42c + d \end{cases} \Rightarrow 7c = 3,5 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \ e \ d = 27,3 - 21 \Rightarrow d = 6,3$$

Desse modo, x(t) = x/2+6,3

b) Da progressão aritmética, tem-se que: $n_5 = 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 7 \Rightarrow f(c_5) = n_5 = 7$

Desse modo, como $f(x) = \frac{5(x-20)}{3}$, tem-se

$$f(c_5) = \frac{5(c_5 - 20)}{3} = 7 \Rightarrow 5c_5 - 100 = 21 \Rightarrow c_5 = \frac{121}{5} = 24,2$$

Comentários: O item a solicita a obtenção das fórmulas de duas funções inversas a partir dos pares ordenados que constam em uma tabela. Contudo, pelo fato de não ter sido citado que são funções inversas, acredita-se que muitos alunos nem se atentarão a isso. No item b, a necessidade da resolução da P.A antes da função pode ser um fator dificultador.

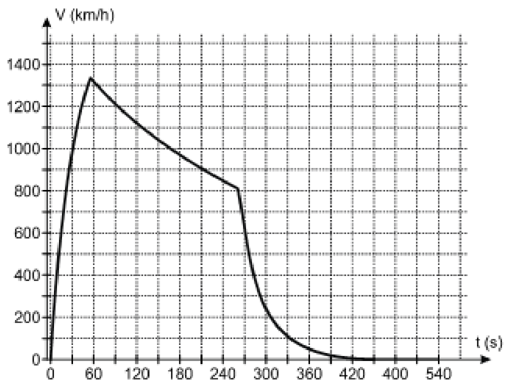
Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	2ª fase – Unicamp	Q.11
Conteúdos	Gráfico, tabela, função linear				
Comando	Determinar valor da variável dependente, identificar dados no gráfico				
Dados	Gráfico e tabela				

Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na tabela e no gráfico abaixo.

a) Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no 30º segundo.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

b) Com base no gráfico, determine o valor aproximado da velocidade máxima atingida e o tempo, em segundos, em que Felix superou a velocidade do som. Considere a velocidade do som igual a 1.100 km/h.



RESOLUÇÃO

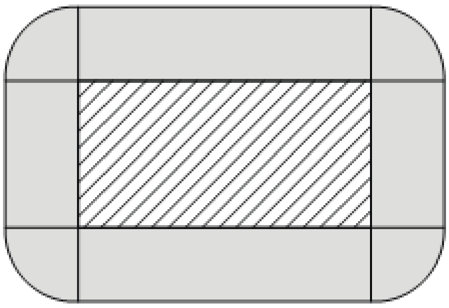
a) Trata-se de uma função linear f: N→N tal que f(x)=35x. Desse modo, no 30º segundo, tem-se: f(30) = 1050 km/h.

b) Do gráfico, tem-se que a velocidade máxima foi um pouco maior do que 1300 km/h e que a velocidade do som foi superada em torno de 45 s.

Comentários: Novamente é apresentado uma tabela para se obter a fórmula da função. No entanto, esse item pressupõe a identificação de uma função linear. O item b refere-se a simples interpretação de gráfico, contudo, ao aplicar essa questão a um grupo de alunos (anteriormente à dissertação) a autora percebeu que muitos tentaram utilizar de fórmulas da Física para resolvê-la, considerando-a de difícil resolução.

Ano-Calendário	2012	**Ano-Vestibular**	2013	**2ª fase – Unicamp**	**Q.12**
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo				
Comando	Obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

A superfície de um reservatório de água para abastecimento público tem 320.000 m² de área, formato retangular e um dos seus lados mede o dobro do outro. Essa superfície é representada pela região hachurada na ilustração abaixo. De acordo com o Código Florestal, é necessário manter ao redor do reservatório uma faixa de terra livre, denominada Área de Proteção Permanente (APP), como ilustra a figura abaixo. Essa faixa deve ter largura constante e igual a 100 m, medidos a partir da borda do reservatório.



a) Calcule a área da faixa de terra denominada APP nesse caso. (não se aplica ao tema funções)

b) Suponha que a água do reservatório diminui de acordo com a expressão $V(t) = V_0\, 2^{-t}$, em que V_0 é o volume inicial e t é o tempo decorrido em meses. Qual é o tempo necessário para que o volume se reduza a 10% do volume inicial? Utilize, se necessário, $\log_{10} 2 \approx 0,30$.

RESOLUÇÃO

a) (Não se aplica ao tema funções)

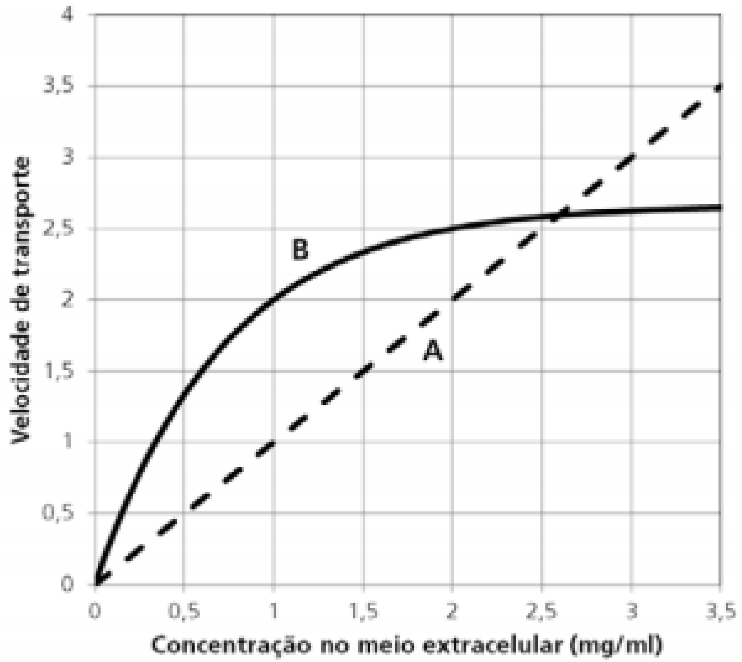
b) Deve-se obter $V(t) = \frac{1}{10}V_0$, ou seja,

$$\frac{1}{10}V_0 = V_0\, 2^{-t} \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{10} \Rightarrow \log 2^{-t} = \log 10^{-1} \Rightarrow t.\log 2 = \log 10 \Rightarrow t = \frac{1}{\log 2} \approx \frac{1}{0,3} \approx 3,3\,\text{meses}$$

Comentários: Refere-se a uma aplicação clássica dos logaritmos na resolução de função exponencial a partir do valor da variável dependente. Necessita da aplicação direta da definição de logaritmo.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2012	1ª fase – Unicamp	Q.13
Conteúdos	Função logarítmica, gráfico				
Comando	Identificar fórmula da função				
Dados	Gráfico				

Hemácias de um animal foram colocadas em meio de cultura em vários frascos com diferentes concentrações das substâncias A e B, marcadas com isótopo de hidrogênio. Dessa forma os pesquisadores puderam acompanhar a entrada dessas substâncias nas hemácias, como mostra o gráfico apresentado a seguir



Seja x a concentração de substância B no meio extracelular e y a velocidade de transporte. Observando-se o formato da curva B e os valores de x e y em determinados pontos, podemos concluir que a função que melhor relaciona essas duas grandezas é

a) $y = \frac{4 + \log_2(x)}{2}$

b) $y = 1 - \log_2(x + 1)$

c) $y = \frac{8}{3}(1 - 2^{-2x})$

d) $y = 3^x - 1$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: C

A partir do gráfico, obtém-se os pares coordenados: (0, 0), (1, 2) e (2; 2,5).

No item A, o ponto (0,0) não satisfaz às condições de existência do logaritmo.

O ponto (0,0) também não satisfaz à fórmula do item B.

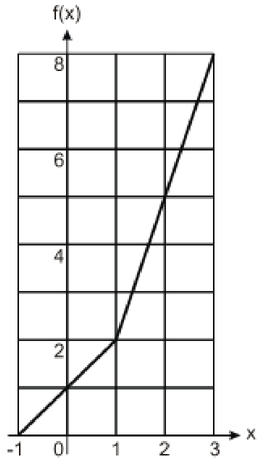
No item D, é o ponto (2; 2,5) que não satisfaz à fórmula.

Já a fórmula do item C satisfaz os três pontos identificados no gráfico.

Comentários: Diferentemente de outras questões do mesmo tipo, nessa questão não bastava apenas um conhecimento dos comportamentos clássicos das funções exponencial e logarítmica. Contudo, após identificados os três pontos citados, a resolução torna-se possível a partir da análise das alternativas.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2012	2ª fase – Unicamp	Q.14
Conteúdos	Função modular, gráfico				
Comando	Determinar coeficiente da função				
Dados	Fórmula da função e gráfico				

Considere a função $f(x) = 2x + |x + p|$, definida para x real.



a) A figura acima mostra o gráfico de f(x) para um valor específico de p. Determine esse valor.

b) Supondo, agora, que p = –3, determine os valores de x que satisfazem a equação f(x) = 12.

RESOLUÇÃO

a) Da definição de módulo, tem-se: $f(x) = \begin{cases} 2x + x + p, \text{ se } x \geq -p \\ 2x - x - p, \text{ se } x < -p \end{cases}$, ou seja,

$f(x) = \begin{cases} 3x + p, \text{ se } x \geq -p \\ x - p, \text{ se } x < -p \end{cases}$. Desse modo, para x = 1, tem-se: $3.1 + p = 1 - p \Rightarrow p = -1$.

b) Para p = –3, tem-se: $f(x) = \begin{cases} 3x - 3, \text{ se } x \geq 3 \\ x + 3, \text{ se } x < 3 \end{cases}$ e, assim:

Se $x \geq 3 \Rightarrow 3x - 3 = 12 \Rightarrow x = 5$

Se $x < 3 \Rightarrow x + 3 = 12 \Rightarrow x = 9$ (não convém, pois $x < 3$), logo, x = 5.

Comentários: Função modular composta não costuma ser muito trabalhada no Ensino Médio, por isso acredita-se que essa questão seja considerada difícil pelos alunos.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2012	2ª fase – Unicamp	Q.15
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo, gráfico				
Comando	Esboçar gráfico, obter valor de constantes da fórmula				
Dados	Fórmula e tabela				

Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma

$P(T) = a.10^{bT}$,

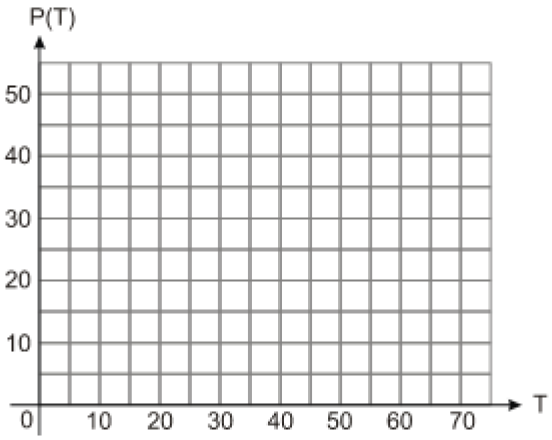
em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

Temperatura (ºC)	Perda anual de capacidade (%)
0	1,6
55	20,0

Com base na expressão de P(T) e nos dados da tabela,

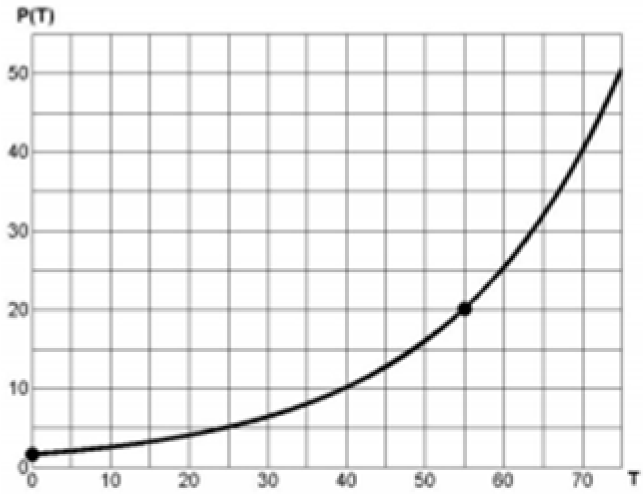
a) esboce, abaixo, a curva que representa a função P(T), exibindo o percentual exato para T = 0 e T = 55;

b) determine as constantes a e b para a bateria em questão. Se necessário, use $\log_{10}(2) \approx 0,30$, $\log_{10}(3) \approx 0,48$ e $\log_{10}(5) \approx 0,70$.



RESOLUÇÃO

a) A função é do tipo $P(T) = a.10^{bT}$, com a e b positivos. Logo, trata-se de uma curva exponencial crescente e que passa pelos pontos (0; 1,6) e (55, 20), cujo esboço é:



b) Substituindo os pares coordenados na função $P(T) = a.10^{bT}$, obtém-se:

$1{,}6 = a.10^{b.0} \Rightarrow a = 1{,}6$ e

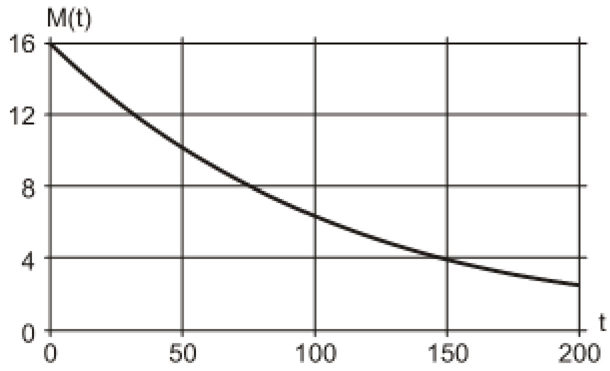
$$20 = 1{,}6.10^{b.55} \Rightarrow 10^{55b} = \frac{100}{8} \Rightarrow 55b = \log 100 - \log 8 \Rightarrow 55b = 2 - 0{,}9 \Rightarrow b = \frac{1{,}1}{55} = \frac{1}{50}$$

As constantes são a = 1,6 e b = 1/50.

Comentários: Para o esboço do gráfico é necessário conhecer o comportamento de uma função exponencial crescente. No item b, é necessário utilizar os pares de pontos conhecidos para determinar as constantes da fórmula, utilizando-se, para isso, a definição de logaritmo.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	1ª fase – Unicamp	Q.16
Conteúdos	Função exponencial, gráfico				
Comando	Identificar fórmula a partir de gráfico				
Dados	Gráfico				

Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que



a) $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{75}}$.

b) $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{50}}$.

c) $M(t) = 2^{5 - \frac{t}{50}}$.

d) $M(t) = 2^{5 - \frac{t}{150}}$.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: A

Seja $M(t) = 2^{at+b}$, tem-se que M(0) = 16 e M(150) = 4, ou seja:

$$M(0) = 16 \Rightarrow 2^{a.0+b} = 16 \Rightarrow 2^b = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$M(150) = 4 \Rightarrow 2^{a.150+b} = 4 \Rightarrow 150a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{75}$$

Desse modo, $M(t) = 2^{-\frac{1}{75}t + 4} = 2^{4 - \frac{t}{75}}$

Comentários: Esta questão diferencia-se um pouco do tipo de abordagem das questões de função exponencial que envolvem gráfico que são mais abordadas no Ensino Médio. Em geral, é apresentada a estrutura da fórmula para que, a partir de coordenadas de pontos conhecidos, sejam obtidos os valores das constantes presentes na fórmula. Contudo, como as alternativas fornecem uma mesma estrutura do tipo $M(t) = 2^{at+b}$, a resolução torna-se similar a essas outras questões.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	2ª fase – Unicamp	Q.17
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Determinar coeficientes de função quadrática				
Dados	Tabela com três pares coordenados				

Uma grande preocupação atual é a poluição, particularmente aquela emitida pelo crescente número de veículos automotores circulando no planeta. Ao funcionar, o motor de um carro queima combustível, gerando CO_2, além de outros gases e resíduos poluentes.

a) Considere um carro que, trafegando a uma determinada velocidade constante, emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de combustível que consome. Nesse caso, quantos quilogramas de CO_2 ele emitiu em uma viagem de 378 km, sabendo que fez 13,5 km por litro de gasolina nesse percurso?

b) A quantidade de CO_2 produzida por quilômetro percorrido depende da velocidade do carro. Suponha que, para o carro em questão, a função c(v) que fornece a quantidade de CO_2, em g/km, com relação à velocidade v, para velocidades entre 20 e 40 km/h, seja dada por um polinômio do segundo grau. Determine esse polinômio com base nos dados da tabela abaixo.

Velocidade (km/h)	Emissão de CO_2 (g/km)
20	400
30	250
40	200

RESOLUÇÃO

a) Não corresponde ao tema função.

b) C(v) é um polinômio de 2º grau, logo: $c(v) = av^2 + bv + c$.

Substituindo os pares coordenados da tabela, tem-se:

$$\begin{cases} 400 = a.20^2 + b.20 + c \\ 250 = a.30^2 + b.30 + c \\ 200 = a.40^2 + b.40 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 400a + 20b + c = 400 \\ 900a + 30b + c = 250 \\ 1600a + 40b + c = 200 \end{cases} ,\ a = \frac{1}{2},\ b = -40,\ c = 1000$$

Ou seja, a função solicitada é $c(v) = \dfrac{v^2}{2} - 40v + 1000$

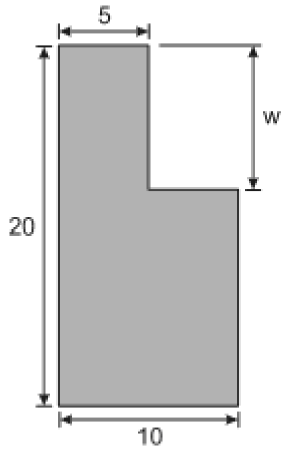
Comentários: O item b desta questão traz uma abordagem clássica de determinar os coeficientes da fórmula da função quadrática a partir de pares de pontos que, no caso, foram determinados a partir da tabela.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	2ª fase – Unicamp	Q.18
Conteúdos	Função afim, função inversa				
Comando	Determinar fórmula de função e valor de função				
Dados	Fórmula de função				

Uma placa retangular de madeira, com dimensões 10 x 20 cm, deve ser recortada conforme mostra a figura abaixo. Depois de efetuado o recorte, as coordenadas do centro de gravidade da placa (em função da medida w) serão dadas por

$$x_{CG}(w) = \frac{400 - 15w}{80 - 2w} \text{ e } y_{CG}(w) = \frac{400 + (w - 20)^2}{80 - 2w},$$

em que x_{CG} é a coordenada horizontal e y_{CG} é a coordenada vertical do centro de gravidade, tomando o canto inferior esquerdo como a origem.



a) Defina A(w), a função que fornece a área da placa recortada em relação a w. Determine as coordenadas do centro de gravidade quando A(w) = 150 cm².

b) Determine uma expressão geral para $w(x_{CG})$, a função que fornece a dimensão w em relação à coordenada x_{CG}, e calcule y_{CG} quando x_{CG} = 7/2 cm.

RESOLUÇÃO

a) Área total do retângulo 20 . 10 = 200 cm². Área do retângulo retirado 5w.

Logo, A(w) = 200 – 5w.

Para A(w) = 150, tem-se: 5w = 200 – 150 → w = 10.

Desse modo, tem-se:

$$x_{CG}(10) = \frac{400-150}{80-20} = \frac{250}{60} = \frac{25}{6} \text{ e } y_{CG}(10) = \frac{400+(10-20)^2}{80-20} = \frac{400+100}{60} = \frac{25}{3}$$

b) Tem-se que $x_{CG}(w) = \dfrac{400-15w}{80-2w}$, ou seja,

$$x_{CG}(80-2w) = 400-15w \Rightarrow (15-2x_{CG})w = 400-80x_{CG} \Rightarrow w(x_{CG}) = \frac{400-80x_{CG}}{15-2x_{CG}}$$

Se $x_{CG} = \dfrac{7}{2}$, então $w\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{400-80\left(\frac{7}{2}\right)}{15-2\left(\frac{7}{2}\right)} = \dfrac{400-280}{15-7} = \dfrac{120}{8} = 15$ e, assim,

$$y_{CG}(15) = \frac{400+(15-20)^2}{80-2.15} = \frac{400+25}{50} = \frac{17}{2}$$

Comentários: Para a resolução do item a é necessário que o aluno utilize o conceito elementar de área de retângulo. No entanto, o fato de ter sido fornecido o valor da variável dependente para que, dela se obtenha o valor da variável independente, costuma ser um fator dificultador. O item b demanda uma construção mais elaborada, pois é necessária a obtenção da fórmula da função inversa da função fornecida e, além disso, determinar valores a partir da fórmula obtida.

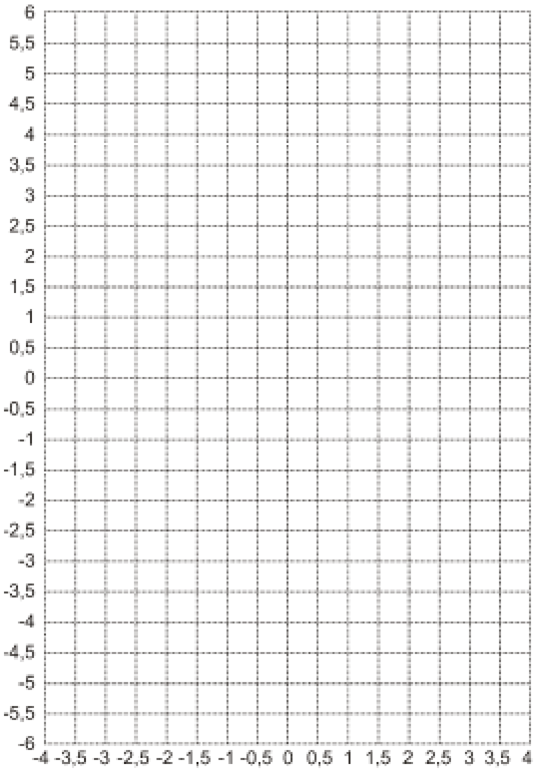
Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	2ª fase – Unicamp	Q.19
Conteúdos	Pontos fixo, gráfico				
Comando	Determinar pontos fixos e construir gráfico				
Dados	Fórmula de função, conceito de ponto fixo				

Define-se como ponto fixo de uma função f o número real x tal que f(x) = x. Seja dada a função

$$f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)} + 1.$$

a) Calcule os pontos fixos de f(x).

b) Na região quadriculada abaixo, represente o gráfico da função f(x) e o gráfico de g(x) = x, indicando explicitamente os pontos calculados no item (a).



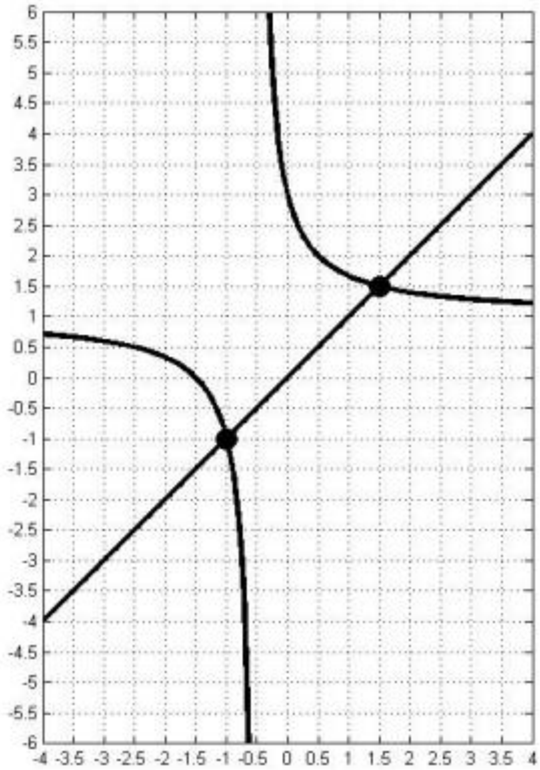
RESOLUÇÃO

a) Tem-se que

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} + 1 = x \Rightarrow x - 1 = \frac{2}{2x+1} \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Então, os pontos fixos são $x = -1 \ e \ x = \frac{3}{2}$.

b) Os gráficos de f(x) e g(x), cujos pontos fixos estão assinalados, são:



Comentários: A abordagem do item a é essencialmente algébrica, envolvendo conceitos simples do trabalho com frações algébricas. Contudo, o trabalho com frações algébricas costuma gerar erros pois alguns alunos costumam se perder no processo de solução. No entanto, o processo de construção do gráfico do item b é mais elaborado e, além dos pontos fixos, a percepção de que se trata de uma hipérbole, bem como a necessidade de conhecimento acerca das assíntotas não costuma ser amplamente trabalho durante o Ensino Médio.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	2ª fase – Unicamp	Q.20
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo				
Comando	Determinar coeficientes de função trigonométrica composta				
Dados	Gráfico				

Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após T anos de uso é dado pela seguinte função:

$P(T) = 100(1 - 2^{-0,1T})$

a) Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas?

b) Os novos computadores dessa empresa vêm com um processador menos suscetível a falhas. Para o modelo mais recente, embora o percentual de processadores que apresentam falhas também seja dado por uma função na forma $Q(T) = 100\left(1 - 2^{cT}\right)$, o percentual de processadores defeituosos após 10 anos de uso equivale a 1/4 do valor observado, nesse mesmo período, para o modelo antigo (ou seja, o valor obtido empregando-se a função P(T) acima). Determine, nesse caso, o valor da constante c. Se necessário, utilize $\log_2 7 \approx 2,81$.

RESOLUÇÃO

a) Tem-se que

$P(T) = 75 \Rightarrow 100(1 - 2^{-0,1T}) = 75 \Rightarrow 2^{-0,1T} = 0,25 \Rightarrow 2^{-0,1T} = 2^{-2} \Rightarrow T = 20$

b) $Q(10) = \frac{1}{4}P(10) \Rightarrow 100(1 - 2^{10C}) = \frac{100}{4}(1 - 2^{-0,1.10}) \Rightarrow 2^{10C} = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow 2^{10C+3} = 7 \Rightarrow 10C + 3 = \log_2 7 \Rightarrow 10C = 2,81 - 3 \Rightarrow C = -0,019$

Comentários: No item a é preciso resolver uma equação exponencial simples. No entanto, é preciso que o aluno fique atento que o valor de T na fórmula já está em percentual, deste modo, deve-se igualar a 75 e não a 0,75. Contudo, o item b amplia o nível de dificuldade comparando dados das duas funções e, ainda, necessitando de logaritmo para a resolução, o que torna a resolução mais complexa.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	1ª fase – Unicamp	Q.21
Conteúdos	Função de grandezas inversamente proporcionais, gráfico de setores, porcentagem				
Comando	Determinar fórmula da função				
Dados	Tabela e Gráfico de Setores				

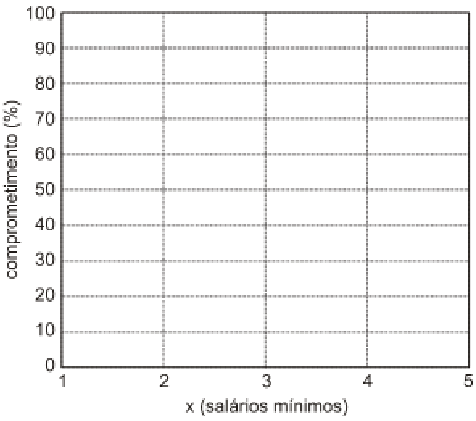
As mensalidades dos planos de saúde são estabelecidas por faixa etária. A tabela a seguir fornece os valores das mensalidades do plano "Geração Saúde". Sabendo que o salário mínimo nacional vale, hoje, R$ 465,00, responda às perguntas a seguir.

Faixa Etária	Mensalidade(R$)
Até 15 anos	120,00
de 16 a 30 anos	180,00
de 31 a 45 anos	260,00
de 46 a 60 anos	372,00
61 anos ou mais	558,00

a) O gráfico em formato de pizza a seguir mostra o comprometimento do rendimento mensal de uma pessoa que recebe 8 salários mínimos por mês e aderiu ao plano de saúde "Geração Saúde". Em cada fatia do gráfico, estão indicados o item referente ao gasto e o ângulo correspondente, em graus. Determine a que faixa etária pertence essa pessoa.

b) O comprometimento do rendimento mensal de uma pessoa com o plano de saúde "Geração Saúde" varia de acordo com o salário que ela recebe.

Suponha que x seja a quantidade de salários mínimos recebida mensalmente por uma pessoa que tem 56 anos, e que C(x) seja a função que fornece o comprometimento salarial, em porcentagem, com o plano de saúde. Note que x não precisa ser um número inteiro. Determine a expressão de C(x) para $x \geq 1$, e trace a curva correspondente a essa função no gráfico a seguir.



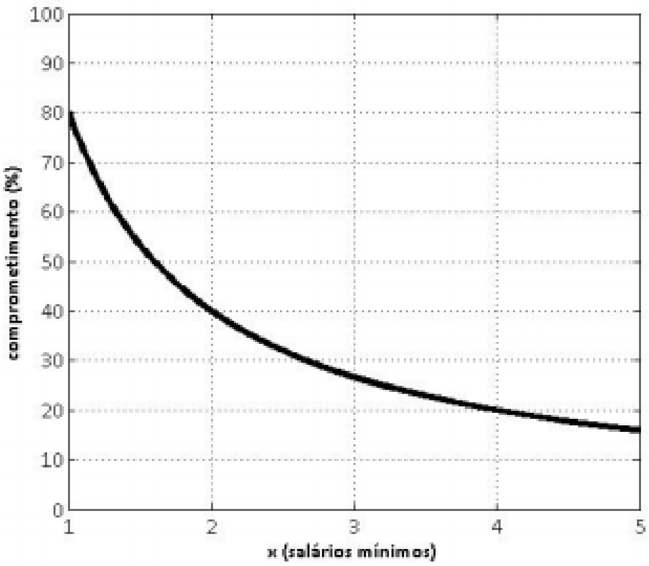
RESOLUÇÃO

a) Oito salários mínimos correspondem a 465 x 8 = R$ 3720,00.

Se o ângulo do setor correspondente ao gasto com o plano de saúde é de 54º, tem-se: $\frac{54^{o}}{360^{o}} \cdot 3720 = 0{,}15.3720 = 558\ reais$, ou seja, a pessoa pertence à faixa etária de 61 anos ou mais.

b) A mensalidade do plano de saúde para essa idade custa R$ 372,00.

Se a pessoa ganha 1 salário mínimo, o percentual destinado à mensalidade do plano de saúde é $\frac{372}{465} \cdot 100 = 80\%$. No caso de um salário de x salários mínimos, o percentual destinado à mensalidade do plano de saúde é $C(x) = \frac{80}{x}$, cujo gráfico é:



Comentários: O item a não se refere diretamente ao conceito de função tal como é o objetivo do trabalho, mas foi abordado aqui por tratar de gráfico de setores. O item b aborda grandezas inversamente proporcionais e seu gráfico, hipérbole, que costuma ser pouco abordado durante o Ensino Médio.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	2ª fase – Unicamp	Q.22
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Obter abscissa do vértice da parábola				
Dados	Tabela, fórmula				

Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 efetuou um levantamento das vendas dos modelos que ela produz.

Um resumo do levantamento é apresentado na tabela a seguir.

Modelo	Preço (R$)	Aparelhos vendidos (milhares)
A	150	78
B	180	70
C	250	52
D	320	36

a) Em face dos ótimos resultados obtidos nas vendas, a empresa resolveu sortear um prêmio entre seus clientes. Cada proprietário de um aparelho da empresa receberá um cupom para cada R$ 100,00 gastos na compra, não sendo possível receber uma fração de cupom. Supondo que cada proprietário adquiriu apenas um aparelho e que todos os proprietários resgataram seus cupons, calcule o número total de cupons e a probabilidade de que o prêmio seja entregue a alguma pessoa que tenha adquirido um aparelho com preço superior a R$ 300,00.

b) A empresa pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela função $n(p) = 115 - 0{,}25p$, em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais). Determine o valor de p que maximiza a receita bruta da empresa com o novo modelo, que é dada por $n \times p$.

RESOLUÇÃO

a) A partir dos dados, tem-se a nova tabela.

Modelo	Preço (R$)	Aparelhos vendidos (milhares)	Cupons por comprador	Total de Cupons
A	150	78	1	78 000
B	180	70	1	70 000
C	250	52	2	104 000
D	320	36	3	108 000
				360 000

Desse modo, a probabilidade que o prêmio seja para alguém que comprou o modelo D (preço superior a R$ 300,00) é:

$$P = \frac{108\,000}{360\,000} = \frac{3}{10} \Rightarrow 30\%$$

b) A receita é $R(p) = (115 - 0,25p)p \Rightarrow R(p) = -0,25p^2 + 115p$, cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo. Desse modo, o valor que maximiza a receita é a abscissa do vértice da parábola.

$x_V = -\dfrac{115}{2(-0,25)} = \dfrac{115}{0,5} = 230$, ou seja, R$ 230,00.

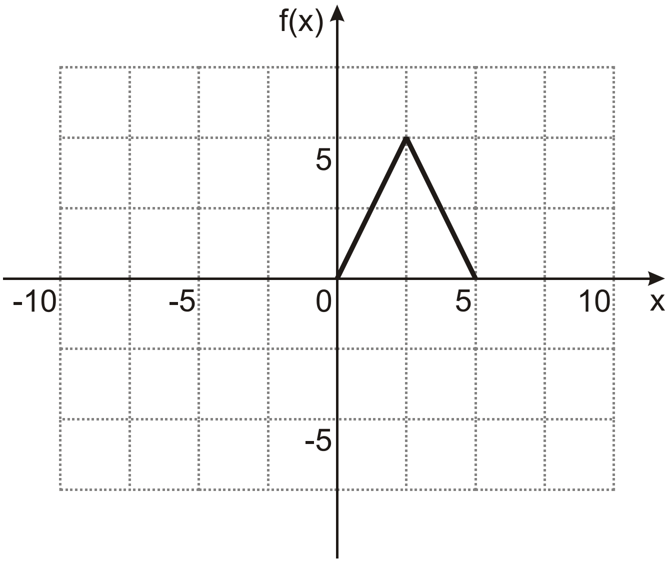
Comentários: O item a não contempla o conceito de função. A dificuldade que alguns alunos costumam relatar a respeito da resolução de exercícios do tipo do item b está no conceito de receita. No entanto, como esta questão conceitua receita, isso não deve ser um fator dificultador.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	2ª fase – Unicamp	Q.23
Conteúdos	Função ímpar, função periódica, gráfico				
Comando	Determinar coeficientes de função trigonométrica composta				
Dados	Gráfico, fórmula				

Suponha que f: R→R seja uma função ímpar (isto é, f(–x) = –f(x)) e periódica, com período 10 (isto é, f(x) = f(x+10)). O gráfico da função no intervalo [0, 5] é apresentado a seguir.

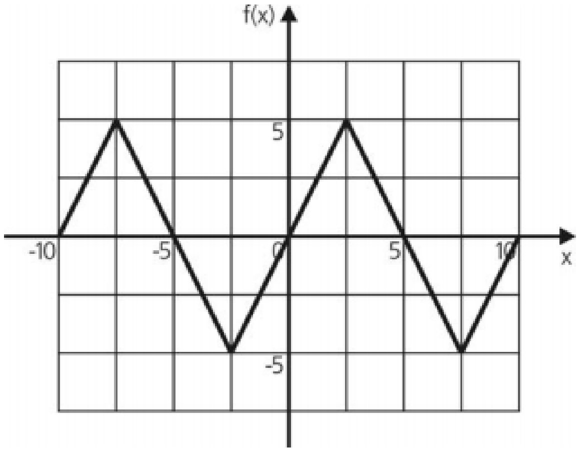
a) Complete o gráfico, mostrando a função no intervalo [-10, 10], e calcule o valor de f(99).

b) Dadas as funções $g(y) = y^2 - 4y$ e h(x) = g(f(x)), calcule h(3) e determine a expressão de h(x) para $2{,}5 \leq x \leq 5$.



RESOLUÇÃO

a) Como a função é ímpar, o gráfico possui simetria em relação à origem. Desse modo, tem-se o gráfico.



Como a função tem período 10, tem-se que f(99) = f(9). Utilizando-se o intervalo [7,5; 10], tem-se a função f(x) = 2x – 20, de modo que f(9) = – 2 = f(99).

Ou seja, f(99) = – 2.

b) No intervalo de [2,5; 5] a função é f(x) = –2x + 10, ou seja, f(3) = 4.

Desse modo, h(3) = g(f(3)) = g(4) = 16 – 16 = 0

E, ainda, h(x) = g(f(x)) = g(–2x + 10) = $(–2x + 10)^2$ – 4(–2x + 10), ou seja,

h(x) = $4x^2$– 32x + 60, para 2,5 ≤ x ≤ 5.

Comentários: Os conceitos de paridade e periodicidade de função costumam ser pouco enfatizados durante o Ensino Médio. Deste modo, o item a não parece tão elementar. Acredita-se que alguns alunos copiariam o trecho compreendido entre [0, 5] nos demais intervalos, sem levar em consideração o fato da função f ser ímpar. Em relação ao item b, apesar de ser de resolução mais complexa, o fato do intervalo solicitado estar explícito no gráfico, a solicitação de h(3) costuma ter um índice maior de acerto. Isso não costuma ocorrer também com a segunda solicitação do item b, pois o processo de obtenção da fórmula da função composta costuma ser mais complexo.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	2ª fase – Unicamp	Q.24
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo				
Comando	Representar gráfico, resolver sistema de equações				
Dados	Fórmulas de funções exponenciais				

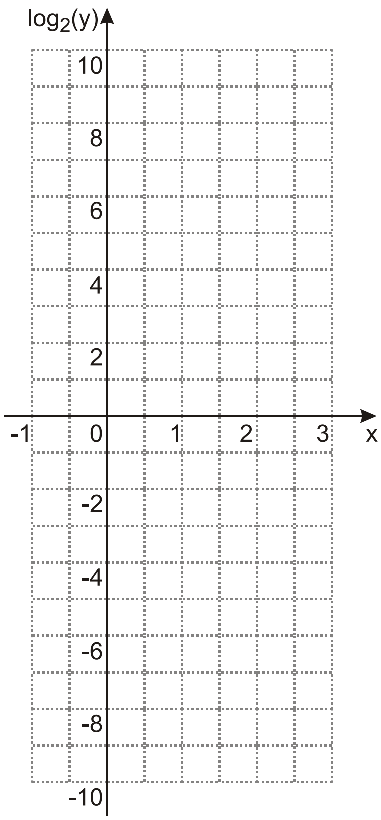
Sejam dadas as funções $f(x) = \dfrac{8}{4^{2x}}$ e $g(x) = 4^x$.

a) Represente a curva y = f(x) no gráfico a seguir, em que o eixo vertical fornece $\log_2 y$.

b) Determine os valores de y e z que resolvem o sistema de equações

$$\begin{cases} f(z) = g(y) \\ f(y)/g(z) = 1 \end{cases}$$

Dica: converta o sistema acima em um sistema linear equivalente.

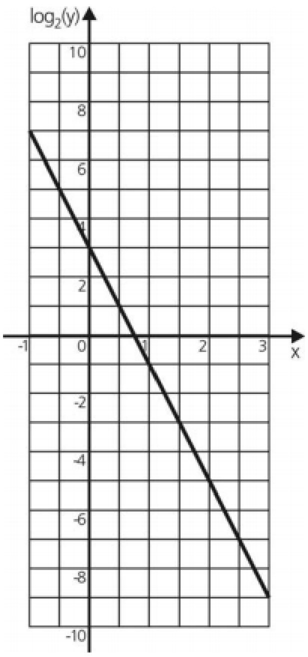


RESOLUÇÃO

a) Se y = f(x), então,

$$\log_2 y = \log_2[f(x)] \Rightarrow \log_2 y = \log_2\left(\frac{8}{4^{2x}}\right) \Rightarrow \log_2 y = \log_2 8 - \log_2 4^{2x} \Rightarrow \log_2 y = 3 - 4x$$

Desse modo, o gráfico é a curva representada abaixo.



b) O sistema $\begin{cases} f(z) = g(y) \\ f(y)/g(z) = 1 \end{cases}$ pode ser escrito como:

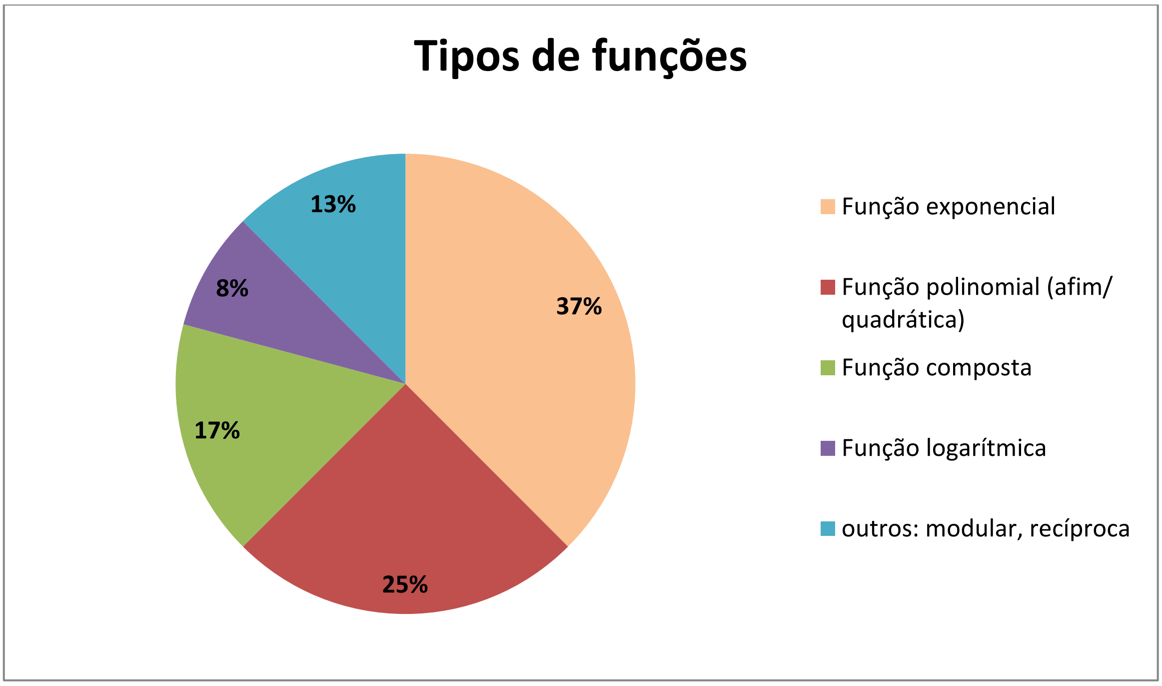
$$\begin{cases} \dfrac{8}{4^{2z}} = 4^y \\ \dfrac{\frac{8}{4^{2y}}}{4^z} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 8 - \log_2 4^{2z} = \log_2 4^y \\ \log_2 8 - \log_2 4^{2y} = \log_2 4^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 4z = 2y \\ 3 - 4y = 2z \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ e } z = \frac{1}{2}$$

Comentários: Apesar de ter uma solicitação simples, acredita-se que os alunos sentem dificuldade em interpretar o comando do item a, pois a linearização de funções logaritmícas não é comumente abordada no Ensino Médio. No entanto, acredita-se que o comando do item b seja mais familiar aos alunos, apesar de que a necessidade de utilizar propriedades logarítmicas e ainda resolver o sistema de equações nas incógnitas y e z não torne a questão fácil.

3.2.1 Análise gráfica do vestibular da Unicamp

Para resumir os dados obtidos com a análise das páginas anteriores, os gráficos abaixo ilustram os temas de maior ocorrência nas provas da Unicamp entre os anos de 2009 e 2014, bem como a característica predominante da abordagem de função: gráfico, fórmula ou tabela.

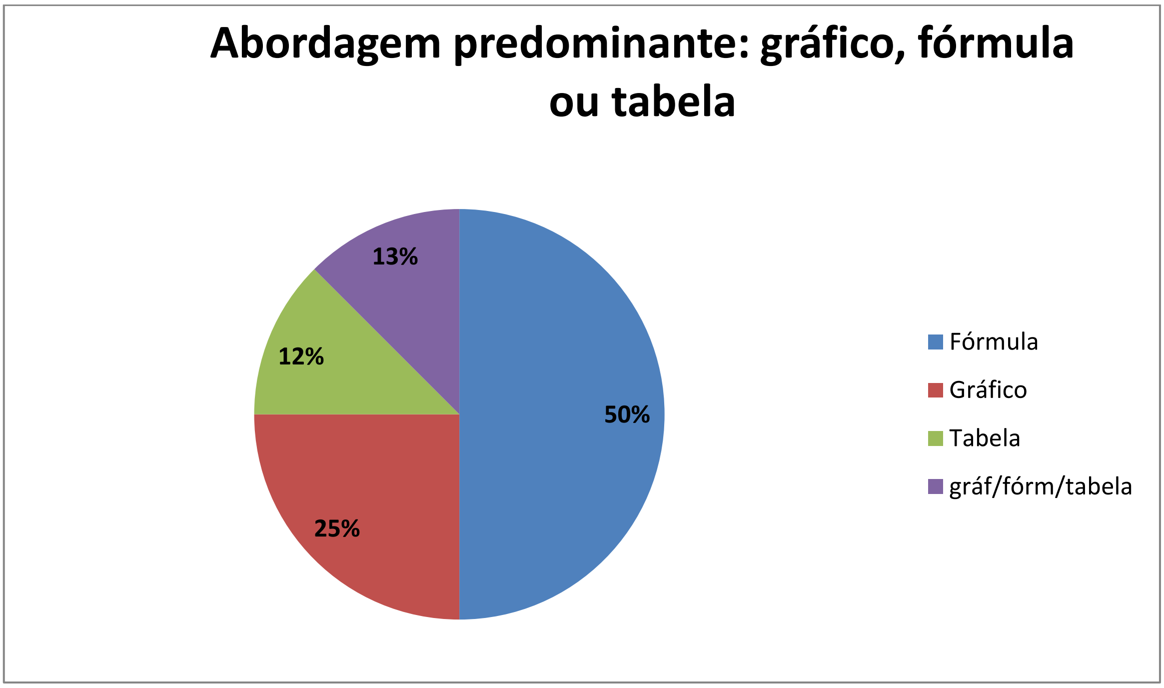
Gráfico 3: Unicamp – Tipos de funções mais abordadas – quantidade e porcentagem



Como no caso do Unesp, pode-se perceber através do Gráfico 3, que há uma predominância de funções exponenciais nesse vestibular. Desse modo, ressalta-se que devido a grande ocorrência de dois dos mais prestigiosos vestibulares do estado de São Paulo, tal tópico deva merecer uma atenção especial por parte dos professores e coordenadores.

Neste vestibular percebe-se uma variedade maior de tipos de funções que são exploradas. Em particular, não há tanta atenção às funções trigonométricas, mas as funções polinomiais são também bastante exploradas, bem como a composição de funções. Funções modulares e recíprocas são exemplos de funções exploradas que muitas vezes não são cobradas ou ensinadas no ensino médio.

Gráfico 4: Unicamp – Abordagem predominante das questões – quantidade e porcentagem

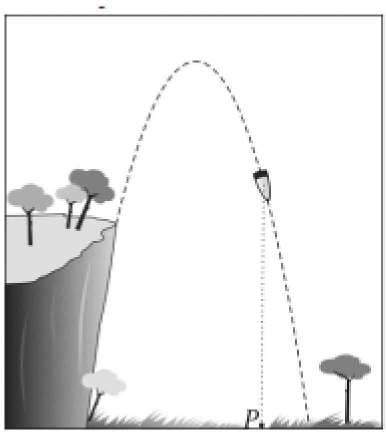


Diferentemente do vestibular da Unesp, através do Gráfico 4, pode-se perceber que o vestibular da Unicamp priorizou a utilização de fórmulas, abordando o tratamento algébrico de modo preponderante em relação ao gráfico. Entretanto, vale destacar que muitas dessas fórmulas são fornecidas ou pelo menos alguma dica é dada na questão. Contudo, a prova é relativamente equilibrada visto que há também uma boa cobrança de gráficos, tabelas e a união de gráficos, fórmulas e tabelas.

2.3 Análise de questões do vestibular da Fuvest

Ano-Calendário	2014	**Ano-Vestibular**	2015	**1ª fase – Fuvest**	**Q.1**
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Obter fórmula para obter valor da variável independente				
Dados	Gráfico				

A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



a) 60

b) 90

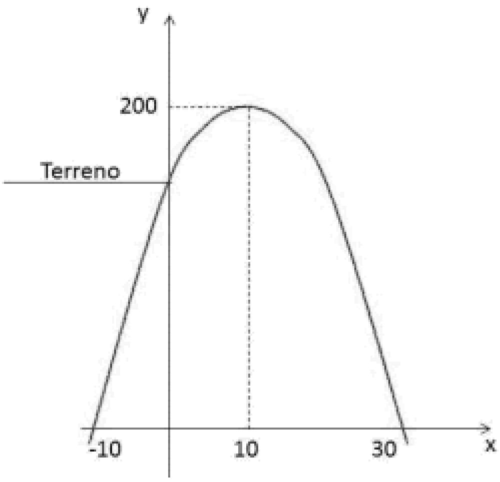
c) 120

d) 150

e) 180

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: D

Traçando os eixos conforme figura, tem-se:



De acordo com a figura, uma das raízes é 30 e o vértice é (10, 200). Desse modo, a outra raiz é -10.

Sendo assim, a fórmula da função é do tipo: $y = a(x - 30)(x + 10)$ e, substituindo as coordenadas do vértice, tem-se: $200 = a.(-20).20 \rightarrow a = -1/2$.

A altura do lançamento é $f(0) \rightarrow f(0) = -1/2(0-30)(0 + 10) = 150$

Comentários: A questão apresenta o gráfico da função quadrática, não associada aos eixos coordenados. Deste modo, o aluno precisa, primeiramente, associá-la aos eixos coordenados para, obtendo a fórmula da função, calcular a altura do lançamento. Além disso, é preciso que o aluno recorde-se do eixo de simetria da parábola para que possa ter pares de pontos suficientes para obter a fórmula. Acredita-se que não seja uma questão fácil.

Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2015	2ª fase – Fuvest	Q.2
Conteúdos	Função afim				
Comando	Esboçar gráfico, calcular valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

A função f está definida da seguinte maneira: para cada inteiro **ímpar** n,

$$f(x) = \begin{cases} x-(n-1), \ se \ n-1 \le x \le n \\ n+1-x, \ se \ n \le x \le n+1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f para $0 \le x \le 6$.

b) Encontre os valores de x, $0 \le x \le 6$, tais que $f(x) = \frac{1}{5}$

RESOLUÇÃO

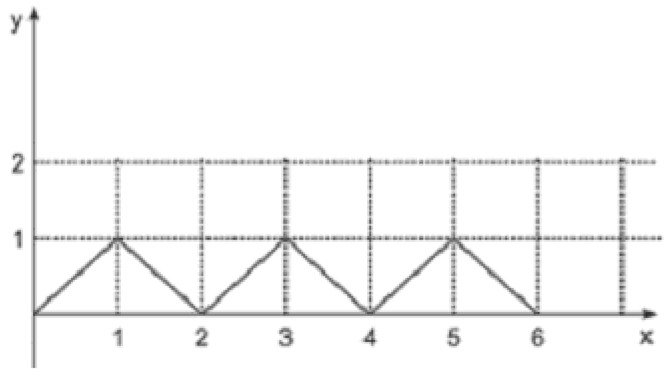
a) A função f é definida pelas fórmulas:

$$n=1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, \ se \ 0 \le x \le 1 \\ 2-x, \ se \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$n=3 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2, \ se \ 2 \le x \le 3 \\ 4-x, \ se \ 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$n=5 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-4, \ se \ 4 \le x \le 5 \\ 6-x, \ se \ 5 \le x \le 6 \end{cases}$$

O gráfico da função é:



b) Considerando $f(x) = \frac{1}{5}$, tem-se:

$$x = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$2 - x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{5}$$

$$x - 2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

$$4 - x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{19}{5}$$

$$x - 4 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{21}{5}$$

$$6 - x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{29}{5}$$

Comentários: Apesar de referir-se a fórmulas de função afim, esta questão aborda um item pouco explorado durante o Ensino Médio: função definida por mais de uma sentença. Além disso, o fato de ter que se analisar os valores pares e ímpares de n também é um aspecto dificultador da questão.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2014	2ª fase – Fuvest	Q.3
Conteúdos	Função racional				
Comando	Obter interseções e esboçar o gráfico				
Dados	Fórmula				

Dados m e n inteiros, considere a função f definida por

$$f(x) = 2 - \frac{m}{x+n} \text{, para } x \neq -n.$$

a) No caso em que m = n = 2, mostre que a igualdade $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ se verifica.

b) No caso em que m = n = 2, ache as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

c) No caso em que m = n = 2, esboce a parte do gráfico de f em que x > – 2, levando em conta as informações obtidas nos itens a) e b). Utilize o par de eixos dados na página de respostas.

d) Existe um par de inteiros (m, n) $\neq$ (2, 2) tal que a condição $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ continue sendo satisfeita?

RESOLUÇÃO

a) Se m = n = 2, então

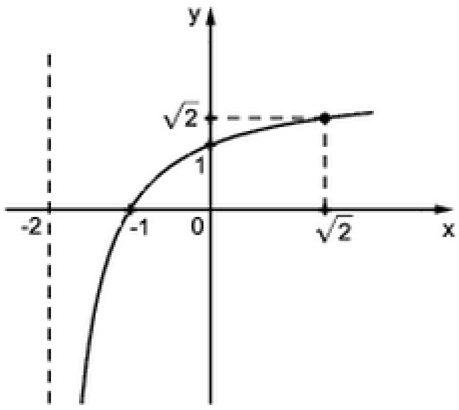
$$f(\sqrt{2}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}+2} = 2 - \frac{2(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = 2 - \frac{2\sqrt{2}-4}{2-4} = 2 + (\sqrt{2}-2) = \sqrt{2}$$

b) Se m = n = 2, então $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x+2}$, *com* $x \neq -2$.

Para x = 0: $f(0) = 2 - \dfrac{2}{0+2} \Rightarrow f(0) = 1$, ou seja, intersecta o eixo y no ponto (0, 1).

Para y = 0: $0 = 2 - \dfrac{2}{x+2} \Rightarrow 2(x+2) = 2 \Rightarrow x = -1$, ou seja, intersecta o eixo x no ponto (– 1, 0).

c) Dos itens a e b, tem-se que o gráfico passa pelos pontos (– 1, 0), (0, 1) e $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e, além disso, tem-se pela fórmula que se trata de um ramo de hipérbole cuja assíntota vertical é x = – 2.



d) Para $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, tem-se:

$$\sqrt{2}=2-\frac{m}{\sqrt{2}+n}\Leftrightarrow\frac{m}{\sqrt{2}+n}=2-\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(n+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow m=2n+\sqrt{2}\left(2-n\right)-2$$
$$\Leftrightarrow m-2n+2=\sqrt{2}\left(2-n\right)$$

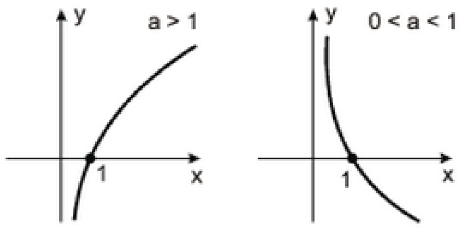
Como $m,n\in Z,\ (2-n)\in Z\ e\ (m-2n+2)\in Z$, para que a igualdade seja verdadeira,

$2-n=0\ e\ m-2n+2=0$, ou seja, m = n = 2.

Comentários: Trata-se de uma questão que envolve alguns conceitos que costumam ser confundidos: apesar da fórmula da função ter coeficientes simples, o fato de ela ser fornecida a partir dos parâmetros m e n, costuma ser a questão que "fica por último" na resolução da prova, pois os alunos se assustam com a presença de tantas letras além de x e f(x).

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	1ª fase – Fuvest	Q.4
Conteúdos	Função logarítmica				
Comando	Obter domínio da função				
Dados	Fórmula				

Seja f uma função a valores reais, com domínio $D \subset R$, tal que $f(x) = \log_{10}(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1))$, para todo $x \in D$.



Gráficos da função logarítmica de base a.

O conjunto que pode ser o domínio D é:

a) $\{x \in R; 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in R; x \leq 0 \ ou \ x \geq 1\}$
c) $\left\{x \in R; \frac{1}{3} < x < 10\right\}$
d) $\left\{x \in R; x \leq \frac{1}{3} \ ou \ x \geq 10\right\}$
e) $\left\{x \in R; \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: A

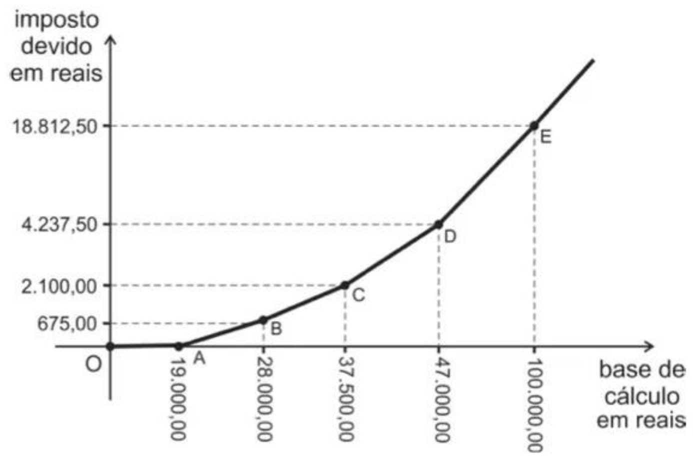
Tem-se que $x^2 - x + 1 > 0$ e, assim,

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 1 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Comentários: Nesta questão é necessário aplicar as condições de existência do logaritmo para calcular o domínio e, ainda, resolver inequação do 2º grau. Acredita-se que os itens a e b podem ser confundidos pois o estudo de sinais da função costuma ser pouco compreendido pelos alunos.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2013	1ª fase – Fuvest	Q.5
Conteúdos	Função afim, função definida por várias sentenças				
Comando	Obter valor da variável dependente				
Dados	Gráfico				

O imposto de renda devido por uma pessoa física à Receita Federal é função da chamada base de cálculo, que se calcula subtraindo o valor das deduções do valor dos rendimentos tributáveis. O gráfico dessa função, representado na figura, é a união dos segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e da semirreta $\overrightarrow{DE}$. João preparou sua declaração tendo apurado como base de cálculo o valor de R$ 43.800,00. Pouco antes de enviar a declaração, ele encontrou um documento esquecido numa gaveta que comprovava uma renda tributável adicional de R$ 1.000,00.



Ao corrigir a declaração, informando essa renda adicional, o valor do imposto devido será acrescido de

a) R$ 100,00

b) R$ 200,00

c) R$ 225,00

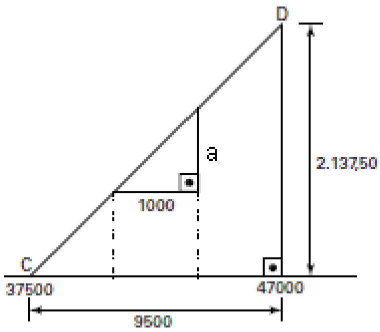
d) R$ 450,00

e) R$ 600,00

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: C

O valor de R$ 43800,00 encontra-se no intervalo entre os pontos C e D, e acrescentando-se R$ 1000,00, ele continua nesse intervalo.

Seja a o valor a ser acrescido, tem-se, a partir da taxa de variação da função afim, ou semelhança de triângulos:



$$\frac{2137{,}50}{9500} = \frac{a}{1000} \Leftrightarrow a = \frac{21375}{95} = 225$$

Comentários: Para a resolução desta questão pode ser utilizada a fórmula da função afim, ou apenas a taxa de variação (ou coeficiente angular) como foi utilizado na resolução. Contudo, acredita-se que a maioria dos alunos encontraria a fórmula para, depois, obter o valor solicitado. Desse modo, a questão demandaria mais tempo que o necessário.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2012	1ª fase – Fuvest	Q.6
Conteúdos	Função racional				
Comando	Obter a função produto				
Dados	Fórmula				

Considere a função $f(x) = 1 - \dfrac{4x}{(x+1)^2}$, a qual está definida para $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x).f(-x)$ é igual a

a) –1

b) 1

c) x + 1

d) x² + 1

e) (x – 1)²

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: B

$$f(x).f(-x) = \left(1 - \frac{4x}{(x+1)^2}\right).\left(1 - \frac{4(-x)}{(-x+1)^2}\right) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}.\frac{x^2 + 2x + 1}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(x+1)^2}.\frac{(x+1)^2}{(1-x)^2} = 1$$

Comentários: Trata-se de uma questão de abordagem essencialmente algébrica. Em questões desse tipo, um fator que costuma levar alunos ao erro é a subtração presente na fórmula da função, pois os alunos costumam se esquecer de distribuir o sinal de menos para todo o numerador. Contudo, neste caso, não há soma ou subtração no numerador, o que não acarretaria neste erro. Acredita-se, porém, que a necessidade da fatoração para simplificação da fração possa ser fator de erro.

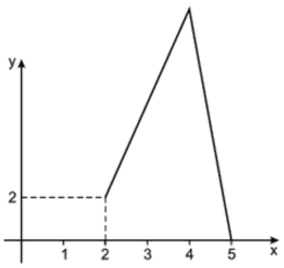
Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2012	2ª fase – Fuvest	Q.7
Conteúdos	Função definida por várias sentenças, função afim				
Comando	Esboçar o gráfico, calcular área sob o gráfico, obter valor da variável dependente				
Dados	Fórmula e gráfico				

Considere a função f, cujo domínio é o intervalo fechado [0, 5] e que está definida pelas condições:

- para $0 \leq x \leq 1$, tem-se f(x) = 3x + 1;

- para $1 < x < 2$, tem-se f(x) = –2x + 6;

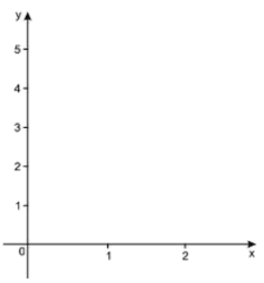
- f é linear no intervalo [2, 4] e também no intervalo [4, 5], conforme mostra a figura a seguir;



- a área sob o gráfico de f no intervalo [2, 5] é o triplo da área sob o gráfico de f no intervalo [0, 2].

Com base nessas informações,

a) desenhe, no sistema de coordenadas indicados a seguir, o gráfico de f no intervalo [0, 2].

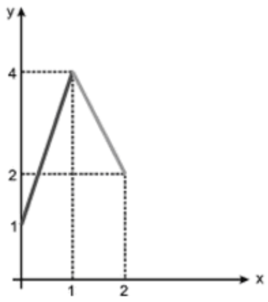


b) determine a área sob o gráfico de f no intervalo [0, 2];

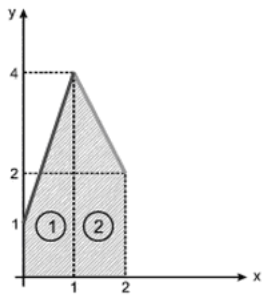
c) determine f(4).

RESOLUÇÃO

a)

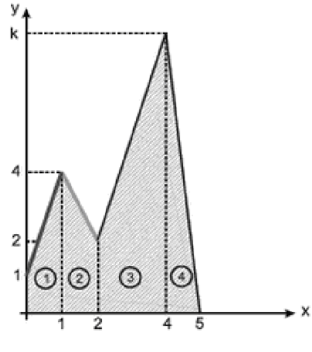


b) $A = A_1 + A_2 = \dfrac{(1+4).1}{2} + \dfrac{(2+4).1}{2} = \dfrac{11}{2}$



c) Seja f(4) = k, tem-se que:

$A_3 + A_4 = 3(A_1 + A_2) \Leftrightarrow \dfrac{(2+k).2}{2} + \dfrac{1.k}{2} = 3 \cdot \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow 3k + 4 = 33 \Leftrightarrow k = \dfrac{29}{3}$, ou seja, $f(4) = \dfrac{29}{3}$



Comentários: Para a resolução desta questão é necessário construir o gráfico da função para calcular a área sob ele. Contudo, o fato da fórmula ser formada por duas sentenças pode ser um fator dificultador.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	1ª fase – Fuvest	Q.8
Conteúdos	Função composta				
Comando	Calcular função composta e igualar funções				
Dados	Fórmulas				

Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: D

$f(g(x))= 2(x^2 + 5x + 3) - 9 = 2x^2 + 10x - 3$

Como $f(g(x)) = g(x)$, tem-se:

$2x^2 + 10x - 3 = x^2 + 5x + 3 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$, de onde $x = -6$ ou $x = 1$.

Desse modo, $|-6| + |1| = 7$

Comentários: Por se tratar de uma questão elementar de função composta, acredita-se que essa aplicação seja simples aos alunos. Contudo, a solicitação de soma dos valores absolutos das raízes pode ser razão de erro.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2011	1ª fase – Fuvest	Q.9
Conteúdos	Função exponencial				
Comando	Obter valor das constantes da fórmula				
Dados	Pares de pontos				

Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1, 0) e (0, -3/4). Então o produto abc vale

a) 4

b) 2

c) 0

d) –2

e) –4

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: A

Como a imagem inicia-se a partir de – 1, tem-se que a = – 1.

Logo, $f(x) = -1 + 2^{bx+c}$

Como f(1) = 0, tem-se: $0 = -1 + 2^{b+c} \Rightarrow 2^{b+c} = 1 \Rightarrow b + c = 0$

Como f(0) = -3/4, tem-se: $-\dfrac{3}{4} = -1 + 2^{c} \Rightarrow 2^{c} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow c = -2 \ e \ b = 2$

Desse modo, abc = –1.2.(–2) = 4

Comentários: Acredita-se que poucos alunos compreendem, numa primeira análise, a informação da imagem como semirreta para a obtenção do valor da constante a. Talvez se o gráfico fosse fornecido, mostrando esse comportamento, a compreensão poderia ser mais clara.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	1ª fase – Fuvest	Q.10
Conteúdos	Função quadrática, função composta				
Comando	Obter abscissa do vértice				
Dados	Fórmula da função, igualdade entre funções				

A função $f : R \to R$ tem como gráfico uma parábola e satisfaz $f(x+1) - f(x) = 6x - 2$, para todo número real x. Então, o menor valor de f(x) ocorre quando x é igual a

a) $\frac{11}{6}$

b) $\frac{7}{6}$

c) $\frac{5}{6}$

d) 0

e) $-\frac{5}{6}$

RESOLUÇÃO: Alternativa Correta: C

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$$
$$f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b$$

Como $f(x+1) - f(x) = 6x - 2$, tem-se: $2ax + a + b = 6x - 2$

e, do conceito de identidade de polinômios: $2a = 6 \Rightarrow a = 3$; $a + b = -2 \Rightarrow b = -5$.

Desse modo, $f(x) = 3x^2 - 5x + c$

O menor valor de f(x) ocorre para a abscissa do vértice, ou seja:

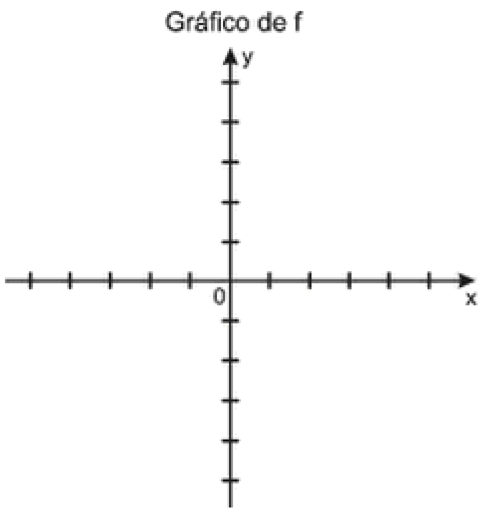
$$x_V = -\frac{-5}{2.3} = \frac{5}{6}$$

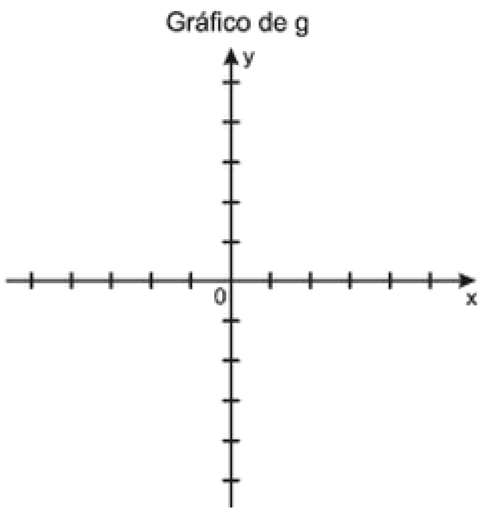
Comentários: Trata-se de uma questão de cálculos simples e resolução complexa pois, além do fato de que a percepção da identidade de polinômios costuma não ser imediata, o aluno também precisa se lembrar da abscissa do vértice da função quadrática.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	2ª fase – Fuvest	Q.11
Conteúdos	Função modular, função composta				
Comando	Esboçar gráfico, obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula da função				

Seja $f(x) = |x| - 1$, $\forall x \in R$, e considere também a função composta $g(x) = f(f(x))$, $\forall x \in R$.

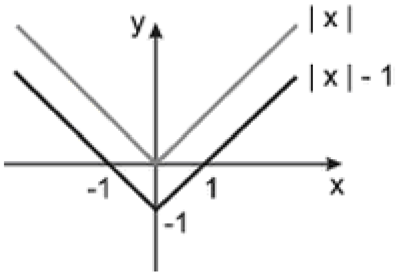
a) Esboce o gráfico da função f, no desenho da folha de respostas (abaixo), indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
b) Esboce o gráfico da função g, no desenho da folha de respostas (abaixo), indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
c) Determine os valores de x para os quais g(x) = 5





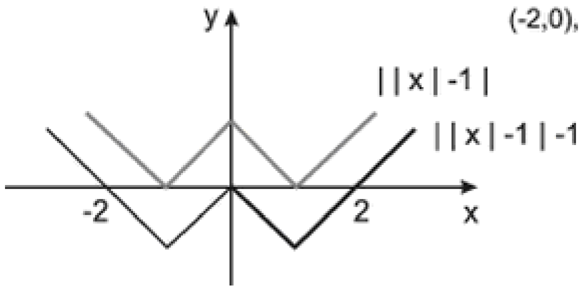
RESOLUÇÃO

a)



(1,0), (-1,0) e (0,-1)

b)



(-2,0), (2,0) e (0,0)

c)

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow f(f(x)) = 5 \Leftrightarrow \big|\,|x| - 1\big| - 1 = 5 \Leftrightarrow \big|\,|x| - 1\big| = 6 \Leftrightarrow$$

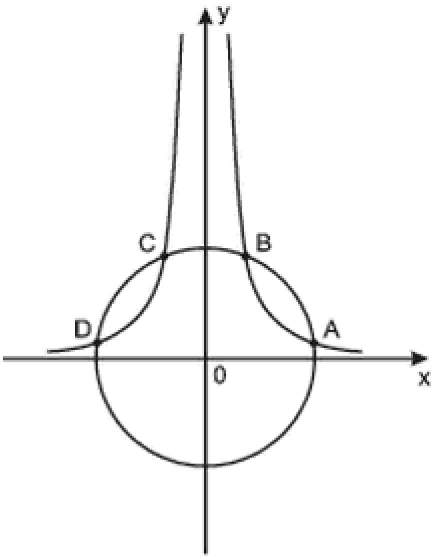
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| - 1 = 6 \Leftrightarrow x = \pm 7 \\ |x| - 1 = -6 \Leftrightarrow |x| = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Sendo assim, S = { – 7, 7}

Comentários: A resolução dos itens a e b se torna simples utilizando o conceito de translação de gráficos. Contudo, esse tema não tem sido amplamente abordado no Ensino Médio. A resolução algébrica do item c pode ser fator de erro quando se tem |x| = -5, pois alguns alunos costumam encontrar solução para essa equação por aplicarem incorretamente a definição de módulo.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2010	2ª fase – Fuvest	Q.12
Conteúdos	Função racional modular, circunferência (Geometria Analítica)				
Comando	Obter interseções, calcular área				
Dados	Fórmula da função, gráfico da circunferência				

No sistema ortogonal de coordenadas cartesianas Oxy da figura, estão representados a circunferência de centro na origem e raio 3, bem como o gráfico da função $y = \dfrac{\sqrt{8}}{|x|}$.



Nessas condições, determine:

a) as coordenadas dos pontos A, B, C, D de interseção da circunferência com o gráfico da função.

b) a área do pentágono OABCD.

RESOLUÇÃO

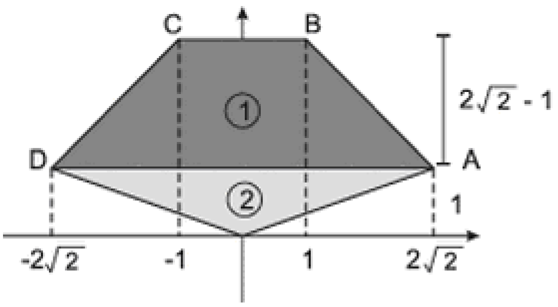
a) A circunferência de raio 3 e centro na origem tem equação: $x^2 + y^2 = 9$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = \dfrac{\sqrt{8}}{|x|} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{8}{x^2} = 9 \Leftrightarrow x^4 - 9x^2 + 8 = 0$$, cujas soluções são:

$$para\ x = -2\sqrt{2},\ \ y = 1$$
$$para\ x = 2\sqrt{2},\ y = 1$$
$$para\ x = 1,\ \ y = 2\sqrt{2}$$
$$para\ x = -1,\ \ y = 2\sqrt{2}$$

Sendo assim, os pontos são $A(-2\sqrt{2},1),\ B(1, 2\sqrt{2}),\ C(-1,\ 2\sqrt{2}),\ D(-2\sqrt{2},1)$

b) Tem-se a seguinte figura, que pode ser decomposta em um trapézio e um triângulo.



$$Área\ 1 = \frac{(2+4\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{2(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}{2} = 7\,;\ \ Área\ 2 = \frac{4\sqrt{2}.1}{2} = 2\sqrt{2}$$

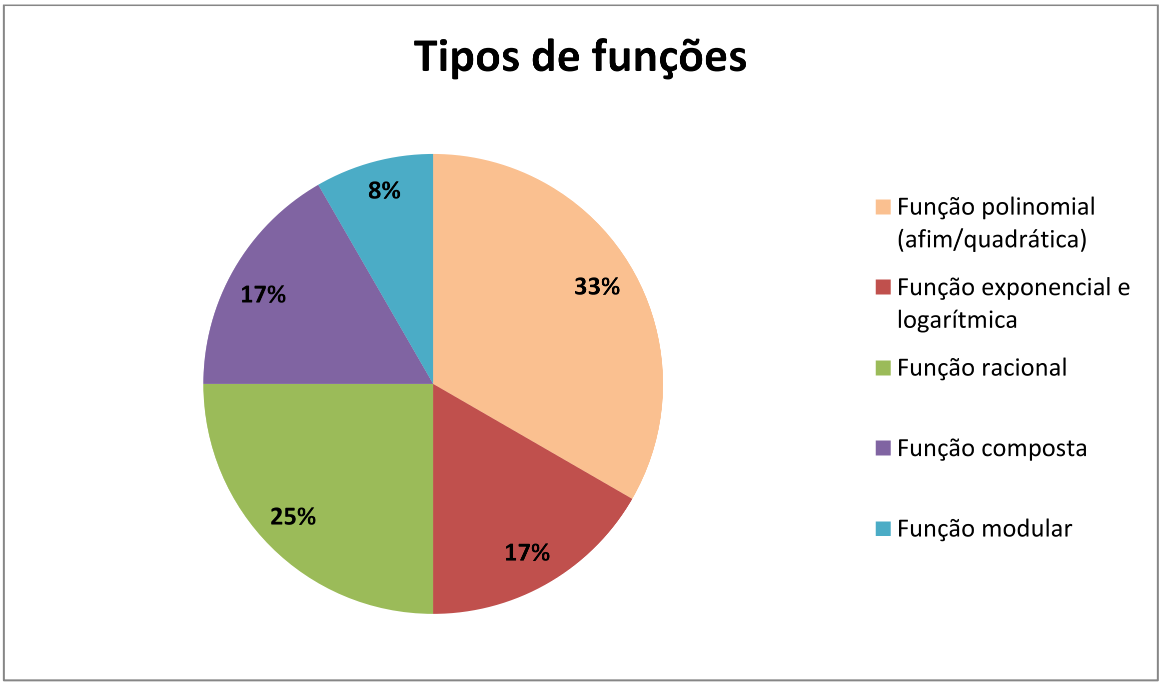
Sendo assim, a área da figura é $7 + 2\sqrt{2}$ u.a.

Comentários: Trata-se de um tipo de questão com aparência assustadora, do tipo que os alunos acabam nem tentando fazer. De fato, possui cálculos não muito amigáveis aos alunos, que costumam achar que estão errados quando encontram alguma solução irracional na resolução de equações. É importante, para a resolução do item b, que seja feita a decomposição da figura em pelo menos um trapézio e um triângulo, pois a utilização do determinante para o cálculo da área tornaria a questão ainda mais trabalhosa.

2.3.1 Análise gráfica do vestibular da Fuvest

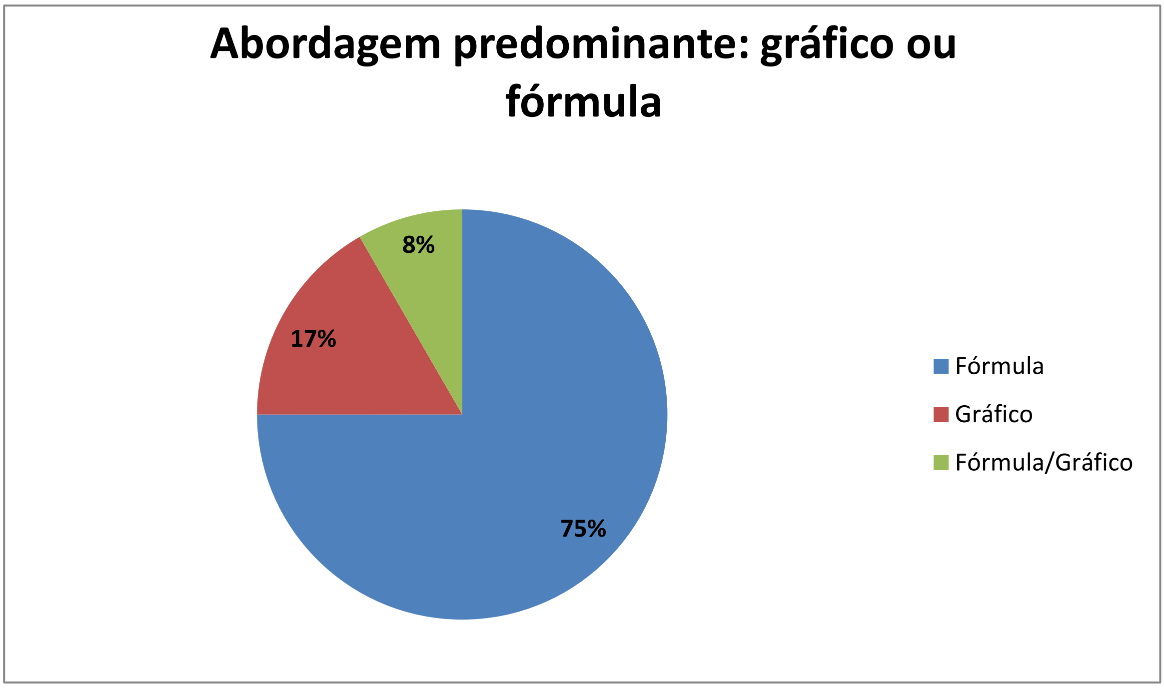
Para resumir os dados obtidos com a análise das páginas anteriores, os gráficos abaixo ilustram os temas de maior ocorrência nas provas da Fuvest entre os anos de 2009 e 2014, bem como a característica predominante da abordagem de função: gráfico ou fórmula.

Gráfico 5: Fuvest – Tipos de funções mais abordadas – quantidade e porcentagem



Através do Gráfico 5, pode-se ver que diferentemente dos vestibulares anteriores da Unesp e UNICAMP, houve um maior predomínio de funções polinomiais. Também há aqui uma grande variedade de funções que são pouco exploradas no ensino médio, tais como funções racionais e modulares. Em termos de tópicos, esse vestibular foi o que apresentou o maior espectro de possibilidades e equilíbrio entre as questões cobradas.

Gráfico 6: Fuvest – Abordagem predominante das questões – quantidade e porcentagem



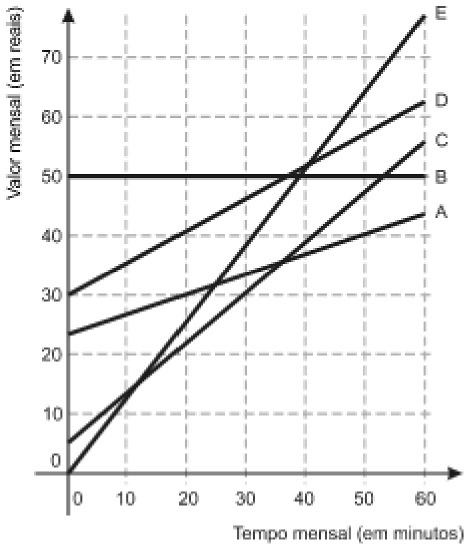
Através do Gráfico 6, pode-se ver que é dada uma importância significativa ao emprego de fórmulas em detrimento a utilização de gráficos. Explora-se nesse vestibular mais o conhecimento algébrico. Esse vestibular é o mais tradicional do Brasil, talvez essa tradição se reflita em como as questões são elaboradas, pois antigamente havia uma maior priorização de questões algébricas por parte da maioria dos vestibulares.

3.4 Análise de questões do ENEM

Ano-Calendário	2014	**Ano-Vestibular**	2014	**ENEM**	**Q.1**
Conteúdos	Função afim				
Comando	Analisar gráficos de função crescente para resolver inequação				
Dados	Gráfico				

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.

Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: C

Se a pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês, o plano mais vantajoso é aquele que permite o maior tempo mensal de chamada por este valor. Deste modo, de acordo com a análise dos gráficos, tem-se a proposta C.

Comentários: Trata-se de uma questão de análise de gráfico de função afim. Acredita-se que o índice de acerto seja alto por ser uma análise simples.

Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2014	ENEM	Q.2
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Obter fórmula a partir de pares ordenados				
Dados	Pares coordenados				

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x.$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x.$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2.$

e) $y = x.$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: A

Como as notas serão alteradas de x para y, tem-se os pares ordenados: (0, 0), (10, 10) e (5, 6), que já não podem satisfazer a uma função afim.

Sendo assim, a função poderá ser do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c.$, com $a \neq 0$.

$(0,0) \Rightarrow c = 0$

$(5,6) \Rightarrow 25a + 5b = 6$, ou seja, $\begin{cases} 50a + 10b = 12 \\ 100a + 10b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{25} \ e \ b = \frac{7}{5}$

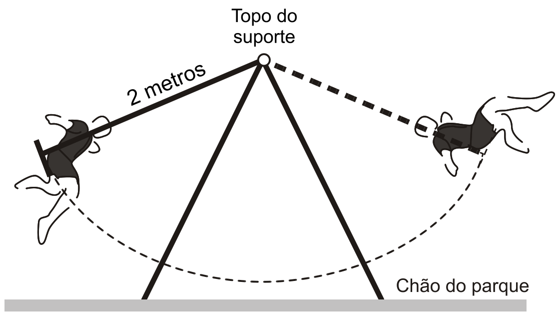
$(10,10) \Rightarrow 100a + 10b = 10$

Desse modo, $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

Comentários: Trata-se de uma questão cuja abordagem similar costuma ser frequente em livros didáticos: obtenção da fórmula da função quadrática a partir de três pares coordenados. Contudo, a abordagem feita é diferente da comumente abordada, pois não explicita que os dados referem-se a pares coordenados.

Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2014	ENEM	Q.3
Conteúdos	Função irracional, equação da circunferência				
Comando	Obter fórmula a partir de dados da circunferência				
Dados	Gráfico				

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
c) $f(x) = x^2 - 2$
d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

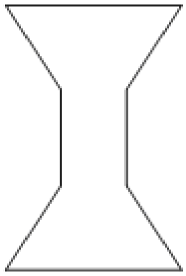
Tem-se que a trajetória descrita pelo assento do balanço é parte da circunferência de centro na origem e raio de medida 2 metros, ou seja: $x^2 + y^2 = 4$.

Sabe-se que $y < 0$, então $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, com $-2 \le x \le 2$.

Comentários: A questão é de cálculo simples, mas de execução pouco similar às abordagens dos livros didáticos. Em geral, circunferência e função não são trabalhadas conjuntamente. Desse modo, acredita-se que seja uma questão com alto índice de erros.

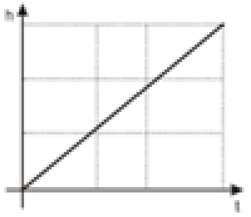
Ano-Calendário	2014	Ano-Vestibular	2014	ENEM	Q.4
Conteúdos	Análise de gráficos				
Comando	Identificar gráfico que representa fenômeno				
Dados	Situação problema, figura				

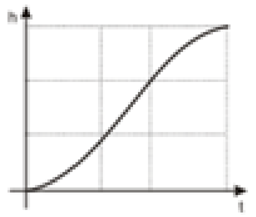
Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.

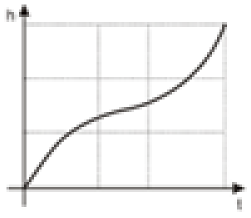


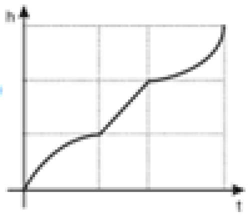
No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

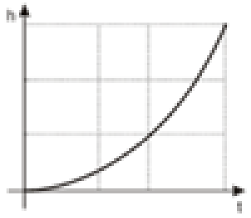
O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é:

a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

A taxa de crescimento da altura no tronco de cone inferior aumenta com o tempo, o que é caracterizado por uma função exponencial.

No tronco de cone superior, a mesma taxa diminui com o tempo, caracterizando uma função logarítmica.

E, no cilindro, a taxa é constante, ou seja, uma função afim,

Desse modo, o gráfico que expressa a altura da água na escultura em função do tempo decorrido é o do item D.

Comentários: Para a resolução desta questão, é necessário interpretar o fenômeno e identificar a representação gráfica que melhor se ajusta a ele. Acredita-se que a maioria das respostas fique entre os itens D e E.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2013	ENEM	Q.5
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400,$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0

b) 19,8

c) 20,0

d) 38,0

e) 39,0

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

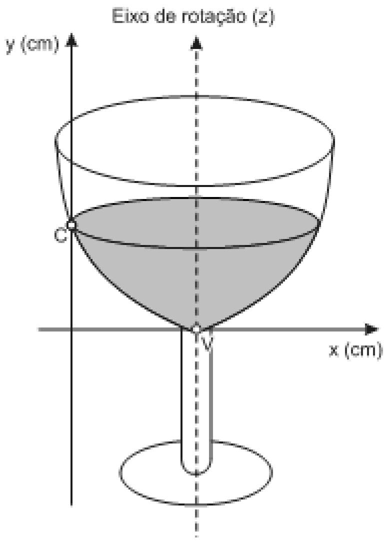
Para obter o valor de t > 0 para o qual $T(t) = 39.$, tem-se:

$$-\frac{t^2}{4} + 400 = 39 \Leftrightarrow t^2 = 4(361) \Leftrightarrow t = \sqrt{4 \cdot 361} = 2 \cdot 19 = 38$$

Comentários: Acredita-se que seja uma questão de resolução simples, por se tratar apenas da substituição do valor da variável dependente na fórmula. No entanto, em resolução de equações com fração, os alunos costumam multiplicar apenas um termo da equação pelo denominador, esquecendo-se do número que acompanha a fração, não encontrando o valor esperado.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2013	ENEM	Q.6
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Obter valor de constante da fórmula				
Dados	Gráfico, fórmula				

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C,$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

A abscissa do vértice da parábola $y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ é igual a $-\frac{(-6)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = 2.$

Como o vértice é raiz da função, para x = 2, y = 0.

Desse modo, $f(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{3.2^2}{2} - 6.2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 6$

Comentários: Trata-se de uma questão de função quadrática em que é necessário obter o valor do termo independente. Para isso, é necessário observar que a abscissa do vértice é a raiz da função. Acredita-se que o que pode levar os alunos a errarem a questão é o fato de falar da rotação em torno do eixo z, fato pouco abordado no Ensino Médio. Apesar de não ser necessário para a resolução, pode ser um fator complicador.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2013	ENEM	Q.7
Conteúdos	Função exponencial, logaritmo				
Comando	Obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A\cdot(2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54
e) 100

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Deve-se obter t de modo que $M(t) = 0{,}1\cdot A$. Como a meia-vida do césio-137 é 30 anos, tem-se:

$$M(30) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow A\cdot(2{,}7)^{k\cdot 30} = \frac{A}{2} \Leftrightarrow (2{,}7)^{k} = 2^{-\frac{1}{30}}.$$

Para obter t que forneça M(t) = 0,1A, tem-se:

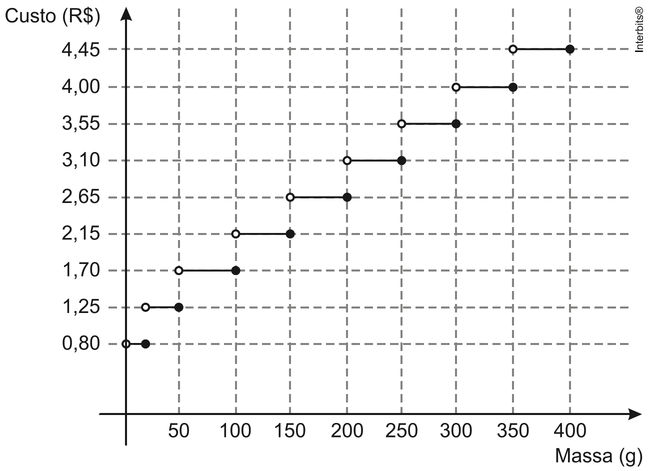
$$M(t) = 0{,}1\cdot A \Leftrightarrow A\cdot[(2{,}7)^{k}]^{t} = 0{,}1\cdot A$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{-\frac{1}{30}}\right)^{t} = 10^{-1} \Leftrightarrow \log 2^{-\frac{t}{30}} = \log 10^{-1} \Leftrightarrow -\frac{t}{30}\cdot\log 2 = -1\cdot\log 10 \Rightarrow -\frac{t}{30}\cdot 0{,}3 \cong -1 \Rightarrow t \cong 100,$$

Comentários: Trata-se de uma questão de função exponencial em que é necessário obter o valor do termo independente. Para isso, é necessário utilizar valor do logaritmo fornecido no enunciado. Acredita-se que a substituição de $(2{,}7)^{k}$ por $2^{-\frac{1}{30}}$ seja um fator que pode dificultar a resolução da questão.

Ano-Calendário	2013	Ano-Vestibular	2013	ENEM	Q.8
Conteúdos	Função constante				
Comando	Calcular valor da função a partir do gráfico				
Dados	Gráfico				

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100g, três de 200g e uma de 350g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

a) 8,35.
b) 12,50.
c) 14,40.
d) 15,35.
e) 18,05.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

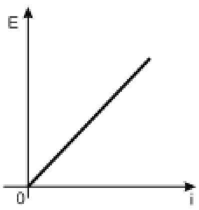
De acordo com o gráfico, tem-se: $2 \cdot 1{,}7 + 3 \cdot 2{,}65 + 4 = R\$\,15{,}35.$

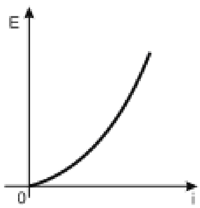
Comentários: Trata-se de uma questão de cálculos simples e análise de gráfico. Acredita-se que tenha um baixo nível de dificuldade.

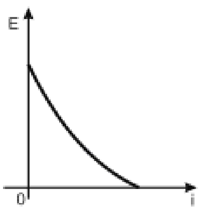
Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2012	ENEM	Q.9
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Identificar gráfico				
Dados	Grandezas inversamente e diretamente proporcionais				

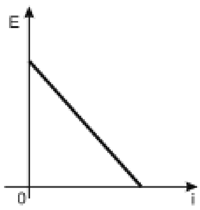
Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

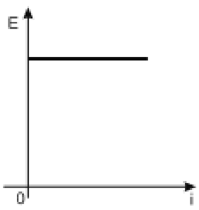
Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?

a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

Do enunciado, tem-se: $P = R \cdot i^2$ e $E = k \cdot P$, sendo k a constante de proporcionalidade.

Desse modo, $E = k.R.i^2$ e, como k e R são constantes, trata-se de uma função quadrática E em função de i, representada pelo gráfico do item D.

Comentários: Trata-se de uma questão que solicita a interpretação do enunciado e sua elaboração gráfica. Acredita-se que os alunos ficariam em dúvida entre os itens a e d, devido a ideia de proporcionalidade, não percebendo o fato da variável i estar ao quadrado, no caso do item a.

Ano-Calendário	2012	**Ano-Vestibular**	2012	**ENEM**	**Q.10**
Conteúdos	Função afim				
Comando	Obter valor da variável independente que iguala as funções				
Dados	Fórmulas				

As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$

$Q_D = 46 - 2P$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5

b) 11

c) 13

d) 23

e) 33

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

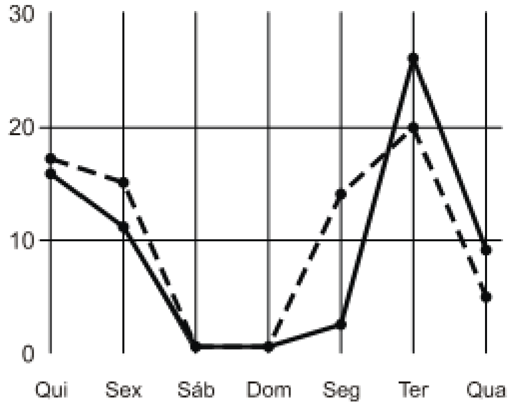
O preço de equilíbrio é obtido igualando-se as fórmulas das funções. Desse modo,

$$Q_O = Q_D \Leftrightarrow -20 + 4P = 46 - 2P \Rightarrow 4P + 2P = 46 + 20 \Rightarrow P = 11$$

Comentários: Trata-se de uma questão simples, de igualdade de funções, com resolução direta e cálculos elementares.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2012	ENEM	Q.11
Conteúdos	Análise de Gráfico				
Comando	Obter fórmula para obter valor da variável independente				
Dados	Gráfico				

A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha continua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

a) segunda e na terça-feira.

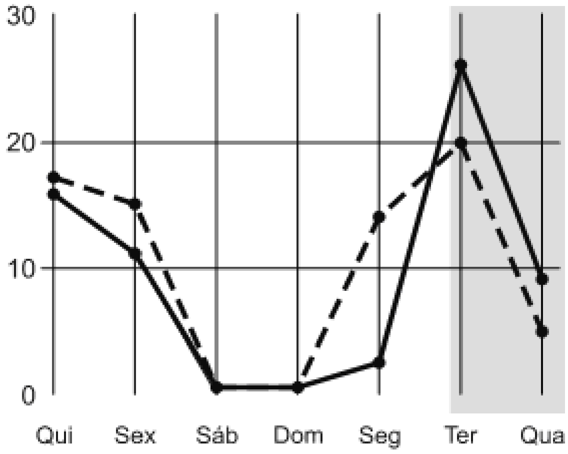
b) terça e na quarta-feira.

c) terça e na quinta-feira.

d) quinta-feira, no sábado e no domingo.

e) segunda, na quinta e na sexta-feira.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: B

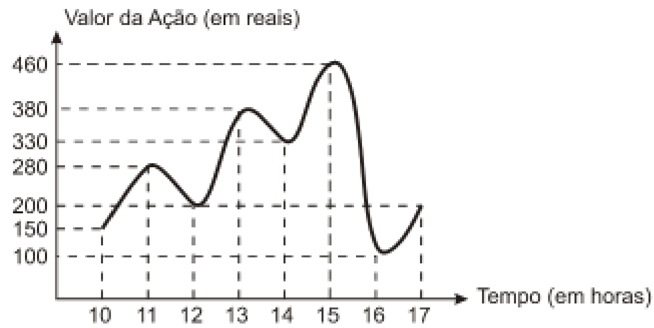


De acordo com os gráficos, observa-se que o número de reclamações resolvidas excede o de reclamações recebidas ocorre na terça e na quarta-feira.

Comentários: Esta questão é de simples análise de gráfico, tendo um baixo nível de dificuldade.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2012	ENEM	Q.12
Conteúdos	Gráfico e tabela				
Comando	Análise de gráfico e tabela				
Dados	Gráfico e tabela				

O gráfico fornece os valores das ações da empresa *XPN*, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: A

Considerando os dados do gráfico e da tabela é possível obter a nova tabela a seguir:

Investidor	Compra	Venda	Lucro	Prejuízo
1	150	460	310	-
2	150	200	50	-
3	380	460	80	-
4	460	100	-	360
6	100	200	100	-

Desse modo, tem-se que o investidor 1 fez o melhor negócio.

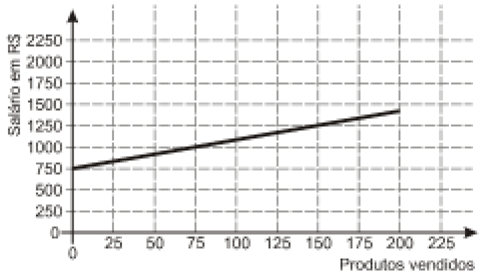
Comentários: Esta questão necessita de cálculos aritméticos básicos, associados à análise de gráfico e tabela. Acredita-se que seja de alto índice de acerto.

Ano-Calendário	2012	Ano-Vestibular	2012	ENEM	Q.13
Conteúdos	Função afim, função definida por mais de uma sentença				
Comando	Identificar gráfico de função				
Dados	Situação problema				

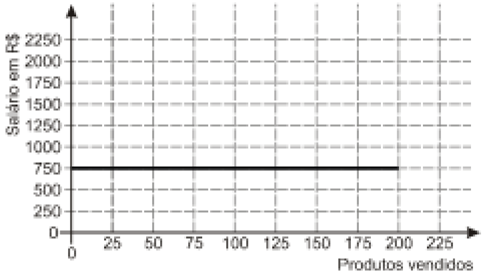
Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$750,00, mais uma comissão de R$3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.

Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é

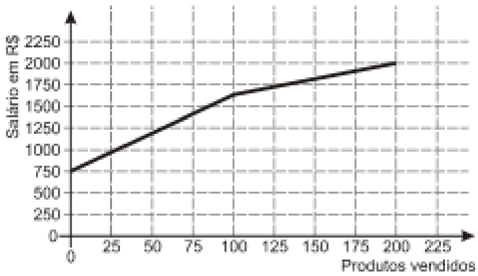
a)



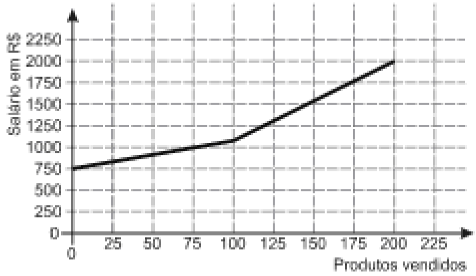
d)



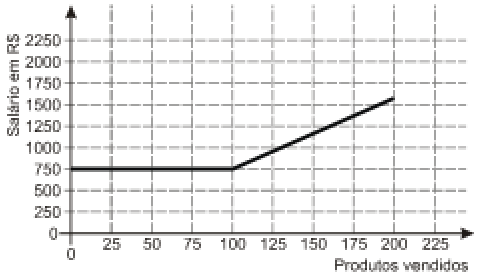
b)



e)



c)



RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Do enunciado, tem-se que a função $f : R \to R$ que descreve a relação entre o salário f(x) e o número x de produtos vendidos, é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 750, \ se \ 0 \le x \le 100 \\ 9(x - 100) + 3.100 + 750, \ se \ x > 100 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 750, \ se \ 0 \le x \le 100 \\ 9x + 150, \ se \ x > 100 \end{cases}$$

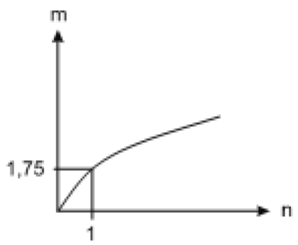
Desse modo, tem-se os dados f(0) = 750, f(100) = 1050, f(200) = 1950, cujo gráfico que melhor os representa é o do item e.

Outro modo de proceder a resolução é observar que, no primeiro intervalo, a taxa de variação é menor do que no segundo. Desse modo, o único gráfico que se adequa a essa situação é o do item e.

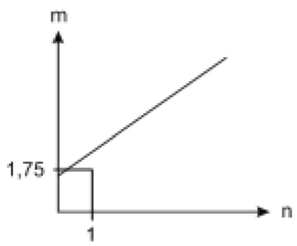
Comentários: A questão pode ser resolvida a partir dos dados do enunciado, obtendo as fórmulas da função, ou por análise da situação, utilizando a taxa de variação da função afim. Este último processo torna a questão de resolução mais simples.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2011	ENEM	Q.14
Conteúdos	Função linear				
Comando	Identificar gráfico que representa a função				
Dados	Situação problema				

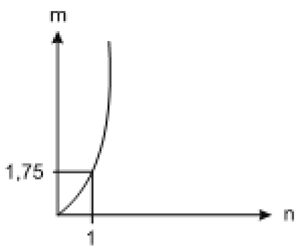
As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é



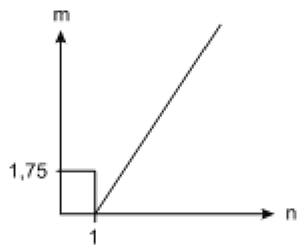
a)



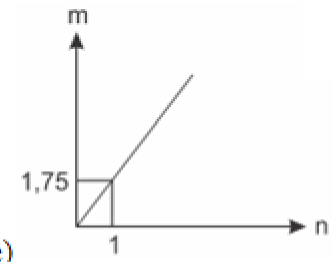
b)



c)



d)



e)

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Tem-se que o gráfico deverá representar uma função linear, por se tratar de grandezas diretamente proporcionais. O único com esta característica é o do item e.

Pode-se também utilizar a fórmula da função: $m = f(n) = 1,75 \cdot n$, onde *n* é o número de quilogramas comprados, de modo que o gráfico correto é o que passa pelo ponto (1; 1,75)

Comentários: Trata-se de uma questão simples de interpretação do fenômeno como função linear.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2011	ENEM	Q.15
Conteúdos	Função afim				
Comando	Obter fórmula de funções				
Dados	Situação problema				

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$

b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350.000) = 120(n + 150.000)$

e) $350(n + 100.000) = 150(n + 120.000)$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: A

Sejam P_A e P_B os preços (em milhares de reais) das empresas A e B, respectivamente:

Empresa A: $P_A = 100n + 350$

Empresa B: $P_B = 120n + 150$

Para que a escolha seja indiferente, tem-se que $P_A = P_B$:

$100n + 350 = 120n + 150$.

Comentários: Novamente é necessária a habilidade de interpretar o problema e equacionar a fórmula da função a partir desses dados. Como não é necessária a resolução da equação, acredita-se que a execução seja simples. Contudo, como não é solicitada que a fórmula seja obtida com os preços em milhares de reais, isso pode ser um fator dificultador.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2011	ENEM	Q.16
Conteúdos	Função afim				
Comando	Obter fórmula da função				
Dados	Situação problema				

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) $y = 4300x$

b) $y = 884\ 905x$

c) $y = 872\ 005 + 4300x$

d) $y = 876\ 305 + 4300x$

e) $y = 880\ 605 + 4300x$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: C

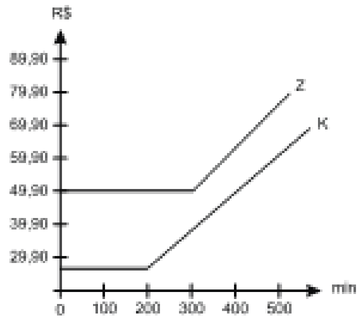
De acordo com o enunciado, tem-se que a taxa de variação da função afim considerada é 4300. Como janeiro é o primeiro mês, tem-se que o coeficiente linear da função é dado por 880605 – 4300 – 4300 = 872005. Ou seja, $y = 4300x + 872005$.

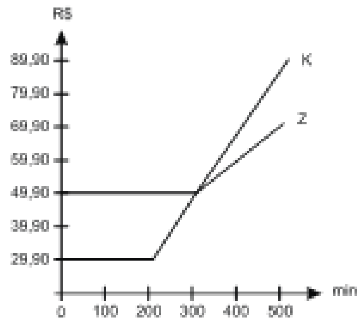
Comentários: Apesar de simples, esta questão costuma propiciar o erro ao considerar janeiro como mês zero, o que acarreta na resposta da alternativa D.

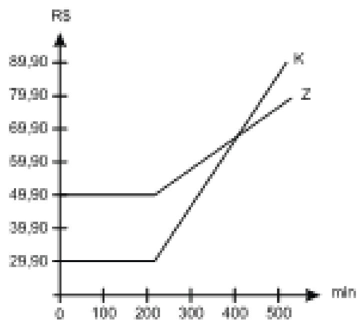
Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2011	ENEM	Q.17
Conteúdos	Função afim				
Comando	Identificar gráfico que representa função				
Dados	Situação problema				

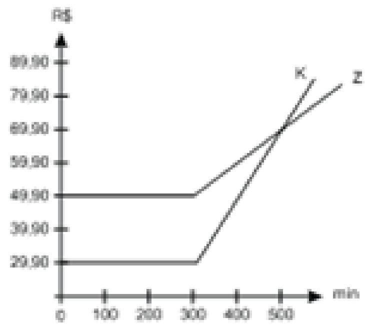
Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

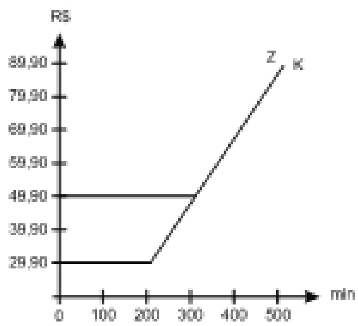
O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

a)


d)


b)


e)


c)


RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

Do texto, tem-se:

Plano K: $y = \begin{cases} 29{,}90, \ se \ 0 < t \leq 200 \\ 29{,}90 + (t - 200).0{,}20, \ se \ t > 200 \end{cases}$

Plano Z: $y = \begin{cases} 49{,}90, \ se \ 0 < t \leq 300 \\ 49{,}90 + (t - 300).0{,}10, \ se \ t > 300 \end{cases}$

Desse modo, tem-se que a resposta correta é a do item D.

Comentários: Além da resolução algébrica apresentada, a identificação do gráfico também é possível analisando-se taxa de variação das funções em cada intervalo. Acredita-se que seja uma questão de fácil identificação.

Ano-Calendário	2011	Ano-Vestibular	2011	ENEM	Q.18
Conteúdos	Função logarítmica				
Comando	Obter valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica.

M_W e M_0 se relacionam pela fórmula: $M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$, onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY, Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

a) $10^{-5,10}$
b) $10^{-0,73}$
c) $10^{12,00}$
d) $10^{21,65}$
e) $10^{27,00}$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Como $M_W = 7{,}3$, tem-se:

$$7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\cdot\log_{10} M_o \Leftrightarrow 18 = \frac{2}{3}\cdot\log_{10} M_o \Leftrightarrow 27 = \log_{10} M_o \Leftrightarrow M_o = 10^{27}$$

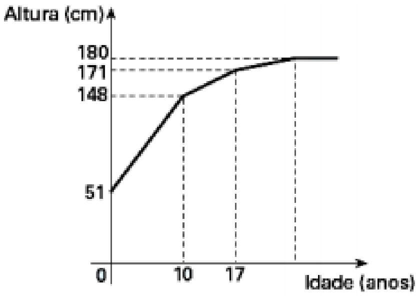
Comentários: Trata-se de uma questão para obter o valor do logaritmando a partir do valor da variável dependente. Considera-se que, apesar de conter apenas a aplicação direta da definição de logaritmo, alguns alunos possam ter dificuldade em isolar o logaritmo na equação.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2010	ENEM	Q.19
Conteúdos	Função afim				
Comando	Identificar gráfico que representa função				
Dados	Situação problema				

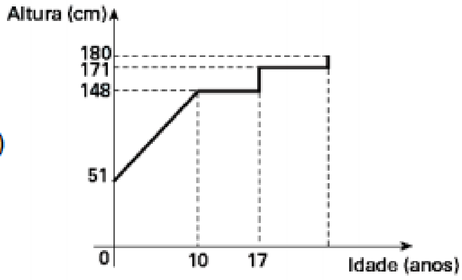
Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

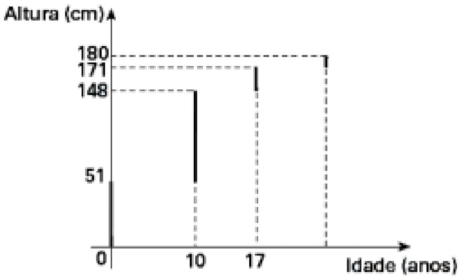
a)



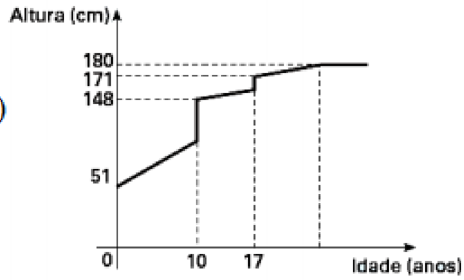
b)



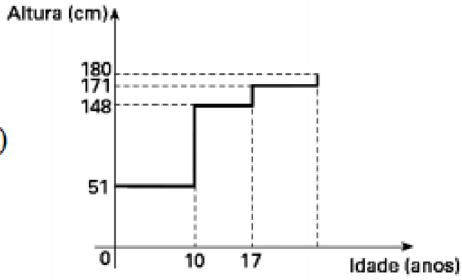
c)



d)



e)



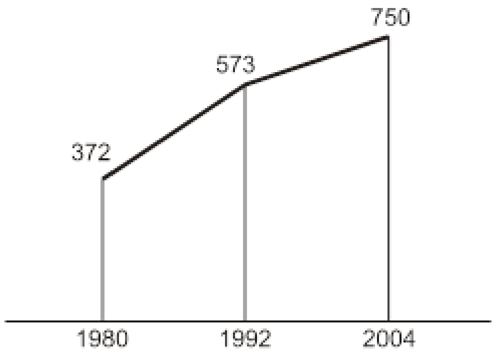
RESOLUÇÃO: Alternativa correta: A

O gráfico A é o mais adequado, pois a inclinação de 10 a 17 é maior que a inclinação para valores maiores que 17.

Comentários: Trata-se de uma questão de identificação simples, que não necessita determinar fórmula de função, apenas o gráfico a partir da situação problema exposta.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2010	ENEM	Q.20
Conteúdos	Função afim				
Comando	Obter taxa de variação da função				
Dados	Gráfico				

O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



Favela Tem Memória. *Época*. Nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado).

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 e 968, então o número de favelas em 2016 será

a) menor que 1150.

b) 218 unidades maior que em 2004.

c) maior que 1150 e menor que 1200.

d) 177 unidades maior que em 2010.

e) maior que 1200.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: C

Tem-se que a variação entre 2004 e 2010 é 968 – 750 = 218 favelas.

Desse modo, nos próximos 6 anos haverá um novo acréscimo de 218 favelas. Assim, o número de favelas em 2016 será: 968 + 218 = 1186 favelas.

Comentários: Acredita-se que a dificuldade nesta questão pode estar associada à falta de atenção quanto ao período em que a variação se manterá constante. Exceto esse fato, tem-se uma questão com cálculos fáceis.

Ano-Calendário	2010	Ano-Vestibular	2010	ENEM	Q.21
Conteúdos	Valor da função				
Comando	Determinar valor de variável dependente e variável independente				
Dados	Fórmula				

Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e as faixas de normalidade preconizadas.

O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares.

As fórmulas que determinam esses índices são:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa}(\text{kg})}{[\text{altura}(\text{m})]^2} \qquad \text{RIP} = \frac{\text{altura}(\text{cm})}{\sqrt[3]{\text{massa}(\text{kg})}}$$

ARAÚJO. C. G. S.; RICARDO, D.R. *Índice de Massa Corporal: Um Questionamento Científicio Baseado em Evidências.* Arq.Bras. Cardiologia, volume 79, n.o 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m^2, então ela possui RIP igual a

a) $0{,}4\ \text{cm/kg}^{1/3}$

b) $2{,}5\ \text{cm/kg}^{1/3}$

c) $8\ \text{cm/kg}^{1/3}$

d) $20\ \text{cm/kg}^{1/3}$

e) $40\ \text{cm/kg}^{1/3}$

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Considerando h a altura da menina, tem-se:

$$25 = \frac{64}{h^2} \Rightarrow h^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow h = \frac{8}{5} = 1{,}6m = 160\,cm$$

Desse modo, o RIP é:

$$RIP = \frac{160}{\sqrt[3]{64}} = \frac{160}{4} = 40\,cm/kg^{\frac{1}{3}}$$

Comentários: Trata-se de uma aplicação simples de função composta, sem a necessidade de formular a nova função. Acredita-se que um fator que possa levar ao erro seja a mudança da unidade de medida da primeira para a segunda função: metros para centímetros. Neste caso, a alternativa encontrada seria a do item a.

Ano-Calendário	2010	**Ano-Vestibular**	2010	**ENEM**	**Q.22**
Conteúdos	Função quadrática e função fim				
Comando	Calcular valor da variável independente				
Dados	Fórmula				

Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \ para \ 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \ para \ t \geq 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48°C e retirada quando a temperatura for 200°C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

a) 100.

b) 108.

c) 128.

d) 130.

e) 150.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

Tem-se que: T(0) = 20^{o}C e T(100) = 160^{o}C, logo :

$$48 = \frac{7}{5} \cdot t + 20 \Leftrightarrow t = 20 \text{min}$$

$$200 = \frac{2}{125} \cdot t^2 - \frac{16}{5} \cdot t + 320 \Leftrightarrow 2t^2 - 400t + 15000 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 200t + 7500 = 0$$

Resolvendo, tem-se t = 150 min ou t = 50 min (não convém).

Desse modo, o tempo de permanência no forno será de 150 – 20 = 130 min.

Comentários: Para esta questão é necessário perceber que, para cada valor solicitado, é necessário utilizar uma sentença da função. Acredita-se que não seja de grande nível de dificuldade. No entanto, a resolução da equação quadrática na segunda parte da questão é mais trabalhosa, por se tratar de números "maiores" com cálculos mais trabalhosos. Desse modo, acredita-se que este pode ser um fator dificultador.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2009	ENEM	Q.23
Conteúdos	Função quadrática				
Comando	Obter fórmula				
Dados	Situação problema				

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.

b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.

c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.

d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.

e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

Seja x o valor do desconto, em centavos, tem-se:

$V= (1,5 - 0,01x). (10000 + 100x) = 15000 + 150x - 100x - x^2$

$V = 15000 + 50x - x^2$

Comentários: Esta questão pressupõe o entendimento de que o valor arrecadado é o produto da quantidade vendida pelo preço praticado por litro. Acredita-se que um possível dificultador seja o fato de que o preço x está em centavos e, assim, deve-se lembrar de multiplicar por 0,01.

Ano-Calendário	2009	**Ano-Vestibular**	2009	**ENEM**	**Q.24**
Conteúdos	Função afim				
Comando	Obter fórmula				
Dados	Tabela				

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	**nível da água (y)**
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) y = 30x.

b) y = 25x + 20,2.

c) y = 1,27x.

d) y = 0,7x.

e) y = 0,07x + 6.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Tem-se uma função afim y = ax + b. Para cada aumento de 5 bolas, o nível da água sobe 0,35 cm.

Desse modo, a = $\frac{7,05 - 6,70}{15 - 10} = 0,07$

E assim, y = 0,07x + b $\Rightarrow$ 7,05 = 0,07.1,05 + b $\Leftrightarrow$ b = 6

A fórmula da função é y = 0,07x + 6.

Comentários: Tem-se uma questão simples de função afim. Acredita-se que seja de fácil execução pois assemelha-se ao tipo de exercício comumente abordado em livro didático.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2009	ENEM	Q.25
Conteúdos	Taxa de variação média				
Comando	Calcular taxa de variação média				
Dados	Tabela				

A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – ppm)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	1,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Cadernos do Gestar II, Matemática TP3. Disponível em: www.mec.gov.br. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em ppm) e a produção (em toneladas) é

a) inferior a 0,18.

b) superior a 0,18 e inferior a 0,50.

c) superior a 0,50 e inferior a 1,50.

d) superior a 1,50 e inferior a 2,80.

e) superior a 2,80.

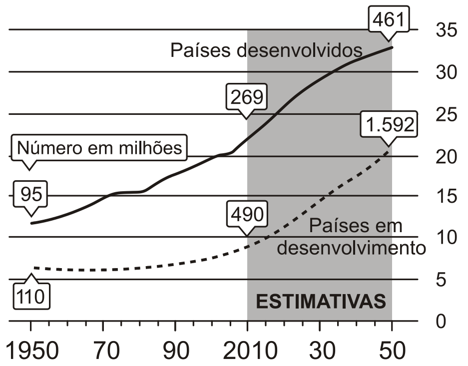
RESOLUÇÃO: Alternativa correta: D

Tem-se que a taxa de variação média é = $\frac{4-2{,}14}{2-1{,}1}=\frac{1{,}86}{0{,}9}\approx 2{,}06$, 1,50 < 2,06 < 2,80

Comentários: Questão de cálculo simples. Contudo, acredita-se que o que pode ser um aspecto dificultador é a solicitação de taxa de variação média, visto que é um conceito menos abordado.

Ano-Calendário	2009	Ano-Vestibular	2009	ENEM	Q.26
Conteúdos	Função exponencial				
Comando	Obter valor da variável dependente				
Dados	Fórmula				

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: *Perspectivas da População Mundial*, ONU, 2009.
Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que o modelo exponencial $y = 363\ e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

a) 490 e 510 milhões.

b) 550 e 620 milhões.

c) 780 e 800 milhões.

d) 810 e 860 milhões.

e) 870 e 910 milhões.

RESOLUÇÃO: Alternativa correta: E

Tem-se que $y = 363\ e^{0,03x}$. Como $x = 30$, tem-se $y = 363.e^{0,03.30} \Leftrightarrow y = 363.e^{0,9}$

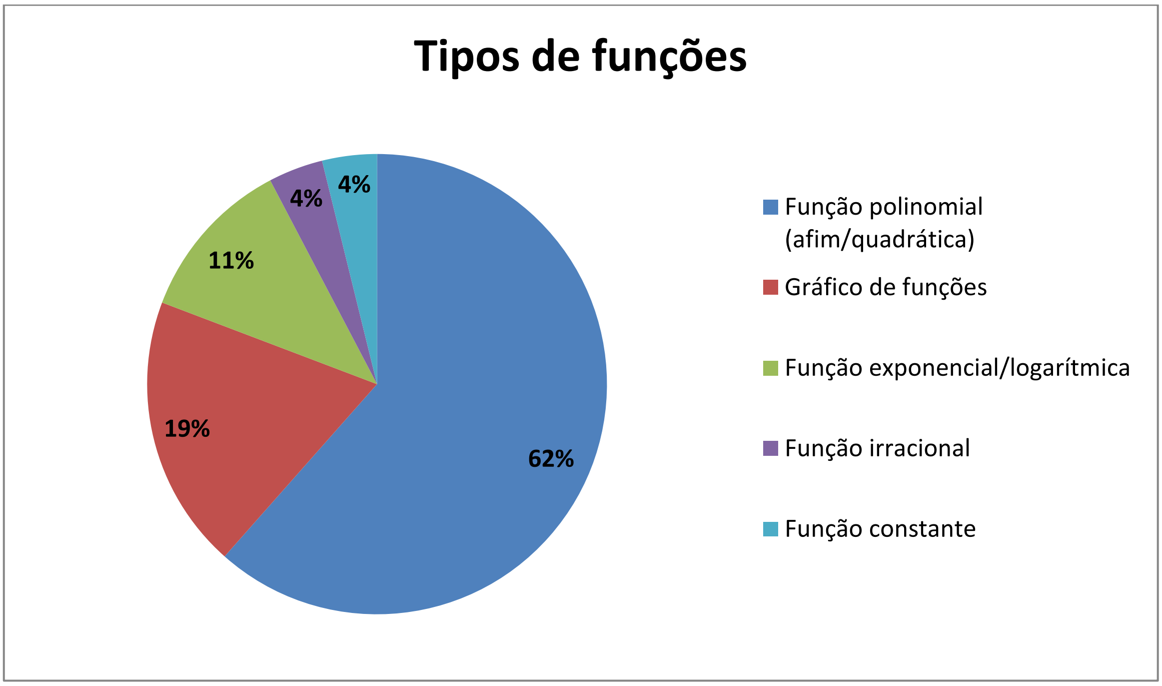
$\Leftrightarrow y = 363.(e^{0,3})^3 \Leftrightarrow y = 363.(1,35)^3 \approx 893$

Comentários: Apesar de apresentar substituição direta do valor da variável independente na fórmula, acredita-se que a utilização da aproximação fornecida não seja tão simples.

2.4.1 Análise gráfica do ENEM

Para resumir os dados obtidos com a análise das páginas anteriores, os gráficos abaixo ilustram os temas de maior ocorrência nas provas da ENEM entre os anos de 2009 e 2014, bem como a característica predominante da abordagem de função: gráfico ou fórmula.

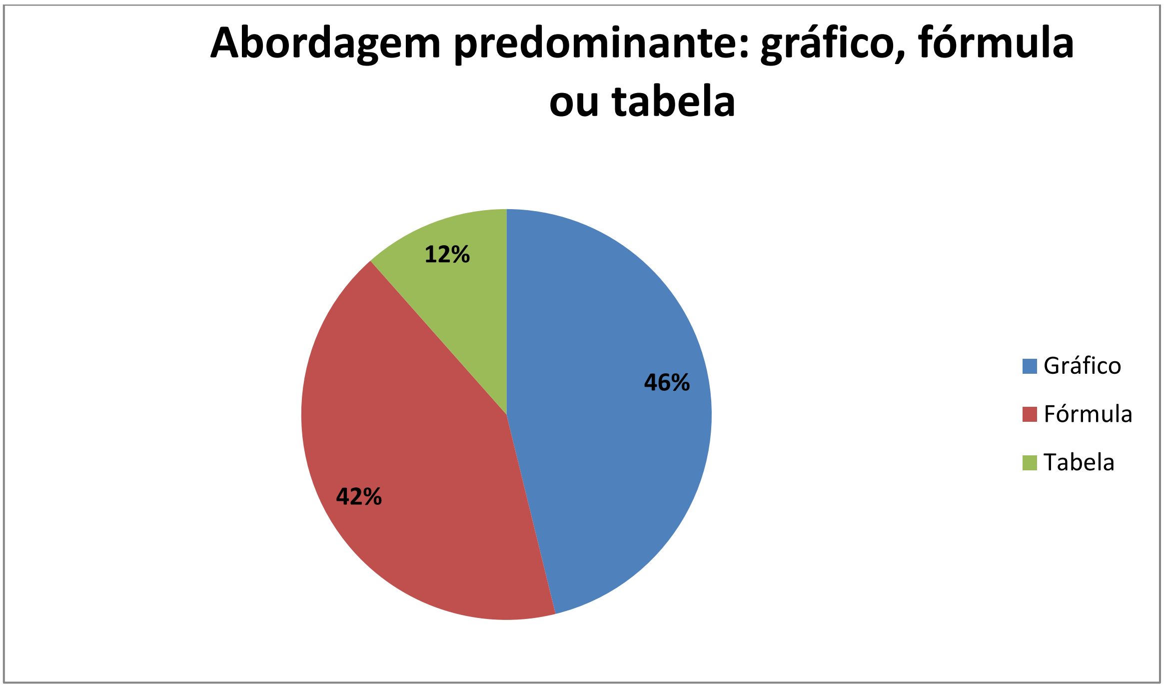
Gráfico 7: ENEM – Tipos de funções mais abordadas – quantidade e porcentagem



O ENEM foi o exame que mais priorizou as funções polinomiais. Acredita-se que isso deva-se muito ao fato dos alunos no ensino fundamental serem melhor treinados com relação a essas funções. Isso causa um certo desequilíbrio para a proposição de políticas públicas para a melhoria da formação do jovem aluno, pois a prova apresentou um desequilíbrio bastante grande dando a falsa impressão ao aluno que as únicas funções importantes a serem estudadas são as afins e lineares.

Essa estratégia de montagem de prova pode ser bastante perniciosa, pois pode trazer alunos pouco preparados para cursos de exatas no qual há uma exigência de que o aluno tenha tido prévios e sólidos conhecimentos acerca de um grupo mais geral de funções.

Gráfico 8: ENEM – Abordagem predominante das questões – quantidade e porcentagem



O Gráfico 8, mostra que o ENEM, apesar de priorizar funções polinomiais, está em consonância em priorizar gráficos e a leitura e compreensão de textos dando uma maior contextualização do conceito de funções entre diversas áreas do conhecimento humano. Por um lado se há um desequilíbrio nos tópicos tratados, acredita-se que é bastante saudável essa abordagem dos assuntos, pois torna o assunto mais interessante e de fácil assimilação por parte dos alunos.

Logo abaixo, apresenta-se um comparativo entre as provas listando outras tantas características delas.

3.5 Análise geral das provas

Após cada uma das provas foram apresentados gráficos para ilustrar os tipos de função mais abordados, bem como a abordagem predominante.

Contudo, para possibilitar melhor compreensão e visualização global dessas abordagens, apresenta-se uma análise comparativa das provas.

No período pesquisado (2009 – 2014), algumas das provas analisadas sofreram alterações quanto ao número total de questões, ao tipo de questões (múltipla escolha ou dissertativa) e quanto ao total de questões de matemática, inclusive por algumas das provas passarem a considerar a 'Área do Conhecimento' e não a disciplina de modo isolado.

Desse modo, a quantidade questões de matemática ao longo dos últimos anos é aproximada, visto que algumas questões são apresentadas como interdisciplinares.

A tabela a seguir ilustra a participação do tema das funções nos quatro exames abordados neste trabalho ao longo do período analisado.

Tabela 6: Resumo dos dados das provas no período de 2009 a 2014

Provas	**Nº de questões de Matemática***	**Nº de questões que envolvem funções**	**Percentual de questões que envolvem funções**
Unesp	66	11	16,7 %
Unicamp	132	24	18,2 %
Fuvest	96	12	12,5 %
ENEM	270	26	9,6%
	564	73	12,9%

* Valor aproximado no caso das provas da Unesp, Unicamp e Fuvest

As tabelas a seguir resumem os tipos de funções abordados por cada um dos vestibulares, bem como as principais abordagens feitas por eles: gráfico, tabela ou fórmula.

Tabela 7: Distribuição das questões quanto ao tipo de função

	Polinomial (afim e quadrática)	Exponencial e Logarítmica	Análise de Gráficos	Composta	Outros: recíproca, modular, trigonométrica etc.
Unesp	2	3	3	1	2
Unicamp	6	11	0	4	3
Fuvest	4	2	0	2	4
ENEM	16	3	5	0	2
	28	19	8	7	11

Tabela 8: Distribuição das questões quanto à abordagem predominante

	Fórmula	Gráfico	Tabela	Fórmula e Gráfico
Unesp	4	5	0	2
Unicamp	12	6	3	3
Fuvest	9	2	0	1
ENEM	11	12	3	0
	36	25	6	6

A partir da análise desses dados, vale ressaltar alguns aspectos das provas:

- As funções polinomiais (afim e quadrática) são predominantes na prova do ENEM;
- No caso da Unicamp, com 24 questões analisadas, possui 11 questões (quase metade) envolvendo conceitos de exponencial ou logaritmo;
- Unesp e ENEM privilegiam a análise de gráfico para a resolução das questões, no caso do ENEM, 12 das 23 questões são de abordagem gráfica;
- Das 12 questões analisadas da Fuvest, 9 priorizam a abordagem algébrica das funções, a partir do uso de fórmulas. Processo similar ocorre com a Unicamp, em que metade das questões priorizam o uso das fórmulas;
- A abordagem das funções por meio de tabela é pouco (ou nada) explorado.

Sendo assim, acredita-se que este pode ser um material de apoio ao trabalho do professor de Ensino Médio, na preparação de suas aulas e provas, tendo em vista a preparação de seus alunos à realização das provas abordadas neste trabalho.

3 APLICAÇÃO E ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

De cada um dos exames citados, foram retiradas 3 questões de múltipla escolha, de acordo com os temas de maior ocorrência em cada um.

Todas as questões foram analisadas no capítulo anterior e, agora, são apresentadas com o número de alunos que assinalaram cada uma das alternativas para, assim, postular acerca do nível de dificuldade de cada uma.

Essas 12 questões foram aplicadas a dois grupos de alunos voluntários: 21 alunos da 2ª série e 59 alunos da 3ª série, no mês de junho de 2015, com duração máxima de 100 minutos, com a maioria dos alunos resolvendo o teste em pouco mais de 60 minutos. A correção das questões foi baseada apenas na alternativa assinalada, não sendo considerados os rascunhos dos cálculos.

Vale ressaltar que ambos os grupos de alunos foram alunos da autora da pesquisa na 1ª série, quando os temas de funções foram abordados, de modo similar com as duas turmas. Contudo, a turma da 2ª série teve uma carga horária de 6 aulas semanais de matemática, enquanto que a 3ª série, teve 5 aulas de matemática por semana. Desse modo, apesar da teoria ter sido abordada com o mesmo número de aulas nas duas turmas, as aulas destinadas à resolução de exercícios foram em maior número para os alunos da turma da 2ª série.

Acredita-se que essa abordagem acerca do número de aulas destinado ao trabalho das funções possa ser tema de trabalhos futuros, bem como a redução do currículo mínimo de matemática, para que os temas possam ser melhor explorados, de modo a possibilitar maior compreensão por parte dos alunos.

Para efeito de análise, além de serem apresentados os gráficos com os dados de cada um dos grupos de alunos, nos comentários acerca de cada questão também serão apresentados os percentuais de acerto de cada questão do grupo de 80 alunos como um todo.

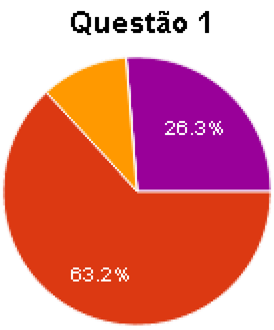
3.1 Questões da Unesp

Questão 1

No artigo "Desmatamento na Amazônia Brasileira: com que intensidade vem ocorrendo?", o pesquisador Philip M. Fearnside, do INPA, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0).e^{kt}$, em que D(t) representa a área de desmatamento no instante t, sendo t medido em anos desde o instante inicial, D(0) a área de desmatamento no instante inicial t = 0, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja 0,6% e usando a aproximação $\ln 2 \cong 0,69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente

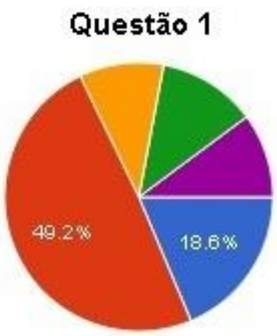
a) 51
b) 115
c) 15
d) 151
e) 11

Gráfico 9: Respostas da 2ª Série – Questão 1



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	0	0%
b	12	63.2%
c	2	10.5%
d	0	0%
e	5	26.3%

Gráfico 10: Respostas da 3ª Série – Questão 1



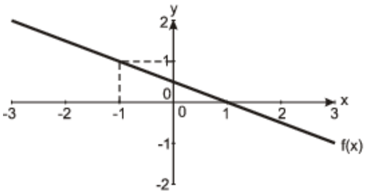
Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	11	18.6%
b	29	49.2%
c	6	10.2%
d	7	11.9%
e	6	10.2%

Nos dois grupos, a alternativa mais assinalada foi a correta. É interessante o fato de que, no grupo da 2ª série nenhum dos alunos assinalou as alternativas a e d. Acredita-se que o fato do maior índice de acerto ter ocorrido na 2ª série deve-se ao fato de ser um tema trabalhado mais recentemente com eles do que com os alunos da 3ª série.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 51,25%.

Questão 2

Observe o gráfico da função f(x) e analise as informações a seu respeito.



I – Se $x_1, x_2 \in Dom(f)$ e $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$.

II – Se $x > 1$, então $f(x) < 0$.

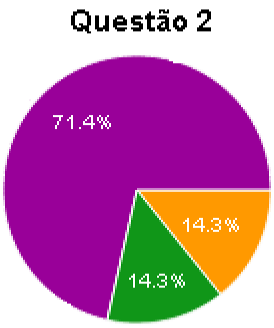
III – O ponto (2, –2) pertence ao gráfico de $f(x)$.

IV – A lei de formação de $f(x)$ representada no gráfico é dada por $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)$.

A alternativa que corresponde a todas as afirmações verdadeiras é:

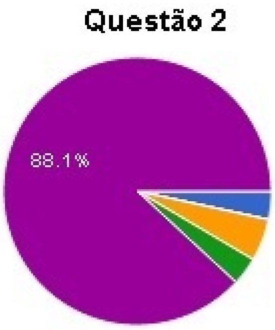
a) I e III. b) I, II e III. c) I e IV. d) II, III e IV. e) II e IV.

Gráfico 11: Respostas da 2ª Série – Questão 2



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	0	0%
b	0	0%
c	3	14.3%
d	3	14.3%
e	15	71.4%

Gráfico 12: Respostas da 3ª Série – Questão 2



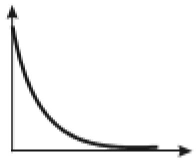
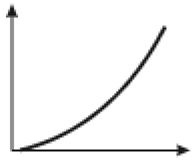
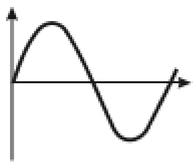
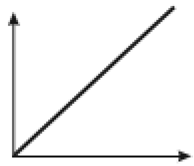
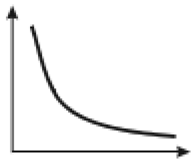
Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	2	3.4%
b	0	0%
c	3	5.1%
d	2	3.4%
e	52	88.1%

Nesta questão, o percentual de acertos nas duas séries foi alto. Acredita-se que os alunos que marcaram os itens c e d tenham sentido dificuldades quanto às notações utilizadas, visto que a fórmula da função foi obtida corretamente.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 83,75%.

Questão 3

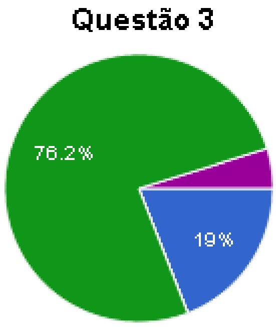
A tabela apresenta, na coluna da esquerda, a descrição de alguns tipos de funções e, na coluna da direita, representações de alguns gráficos de funções, cujas variáveis independentes, definidas no domínio dos números reais, estão representadas nos eixos das abscissas.

Algumas funções	Alguns gráficos de funções
I. Em uma prova de corrida dos 100 m rasos, a velocidade média V_m de um atleta é uma função de seu tempo de percurso t: $V_m(t) = \frac{100}{t}$	a. 
II. O perímetro P de um triângulo equilátero é uma função de seu lado L: $P(L) = 3 \cdot L$	b. 
III. A quantidade Q de uma dada substância química num organismo vivo, onde Q_0 é a quantidade inicial da substância no organismo, é uma função do tempo de meia vida t dessa substância naquele organismo: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t}$	c. 
IV. A área A de um círculo é uma função de seu raio r: $A(r) = \pi \cdot r^2$	d. 
V. A altura H que uma pedra amarrada a um cabo de comprimento fixo L possui ao ser girada, com velocidade constante num plano β vertical e perpendicular ao solo, em relação ao centro de giro, é uma função do ângulo α, em radianos, formado pelo cabo e uma reta horizontal contida no plano β: $H(\alpha) = L \cdot (\text{sen}\alpha)$	e. 

O conjunto de pares ordenados que relaciona cada função à sua respectiva representação gráfica é:

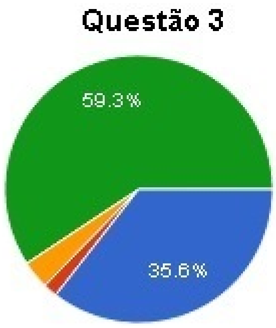
a) {(I, a), (II, d), (III, e), (IV, b), (V, c)}.
b) {(I, c), (II, d), (III, a), (IV, b), (V, e)}.
c) {(I, d), (II, e), (III, a), (IV, b), (V, c)}.
d) {(I, e), (II, d), (III, a), (IV, b), (V, c)}.
e) {(I, e), (II, d), (III, b), (IV, a), (V, c)}.

Gráfico 13: Respostas da 2ª Série – Questão 3



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	4	19%
b	0	0%
c	0	0%
d	16	76.2%
e	1	4.8%

Gráfico 14: Respostas da 3ª Série – Questão 3



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	21	35.6%
b	1	1.7%
c	2	3.4%
d	35	59.3%
e	0	0%

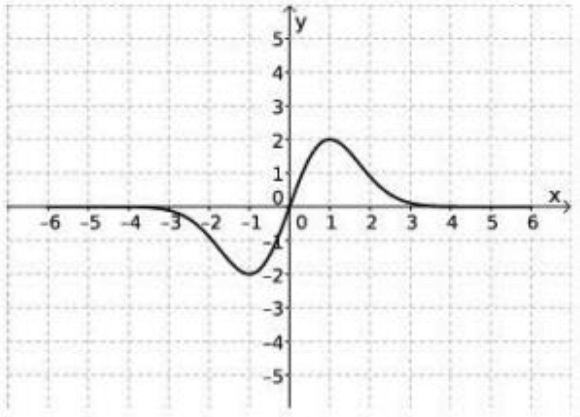
Sobressai, nesta questão, o número de alunos da 3ª série que assinalaram o item a. Já era esperado que houvesse dúvidas entre os gráficos A e E, como analisado no capítulo anterior. Contudo, o percentual de alunos da 3ª série que se confundiu foi bem superior ao da 2ª série.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 63,75%.

3.2 Questões da Unicamp

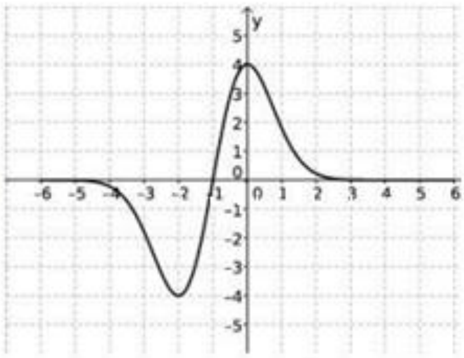
Questão 4

A figura abaixo exibe o gráfico de uma função $y = f(x)$:

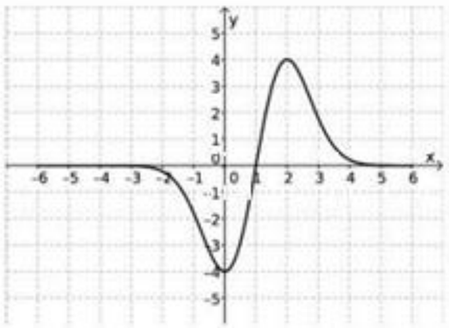


Então, o gráfico de $y = 2f(x-1)$ é dado por:

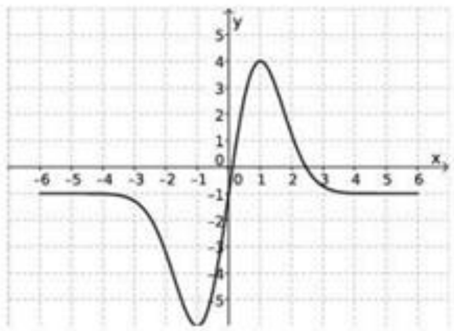
a)



b)



c)



d)

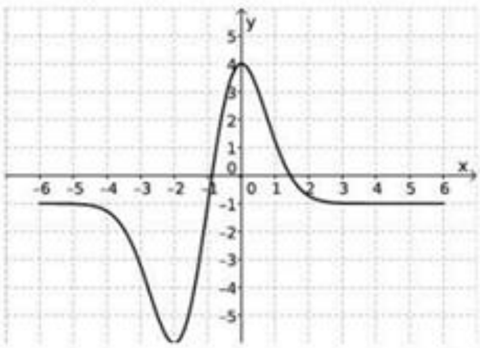
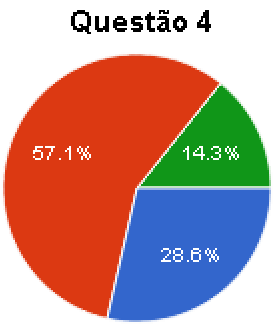
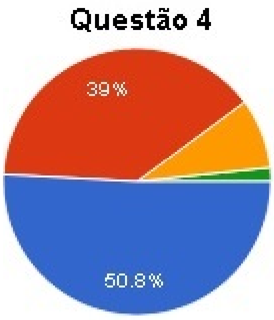


Gráfico 15: Respostas da 2ª Série – Questão 4



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	6	28.6%
b	12	57.1%
c	0	0%
d	3	14.3%

Gráfico 16: Respostas da 3ª Série – Questão 4



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	30	50.8%
b	23	39%
c	5	8.5%
d	1	1.7%

Esta é a primeira questão analisada em que a maioria das respostas da 3ª série não corresponde ao item correto, o que não aconteceu com a 2ª série, na qual a maioria dos alunos assinalou corretamente.

Acredita-se que os alunos que erraram não pensaram em substituir valores de x e obter os valores de y associados a eles para identificar a opção correta.

Além disso, os que assinalaram o item A, pensaram corretamente na expansão vertical e pensaram no deslocamento horizontal. Contudo, fizeram o deslocamento horizontal no sentido contrário.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 43,75%.

Questão 5

Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$$

sendo t o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

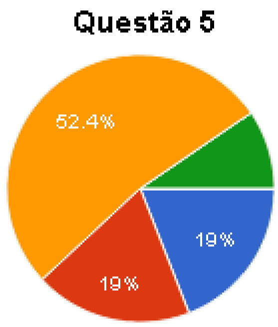
a) $12[\log(7)-1]$ minutos.

b) $12[1-\log(7)]$ minutos.

c) $12\log(7)$ minutos.

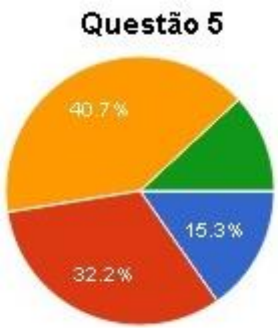
d) $[1-\log(7)]/12$ minutos.

Gráfico 17: Respostas da 2ª Série – Questão 5



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	4	19%
b	4	19%
c	11	52.4%
d	2	9.5%

Gráfico 18: Respostas da 3ª Série – Questão 5



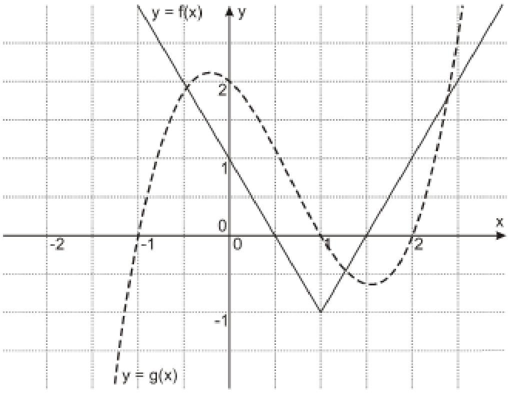
Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	9	15.3%
b	19	32.2%
c	24	40.7%
d	7	11.9%

Novamente, os alunos da 2ª série tiveram melhor resultado, em que pouco mais da metade dos alunos acertaram a questão. No caso da 3ª série, apesar do item correto ter sido o mais assinalado, também o item B foi bastante assinalado.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 43,75%.

Questão 6

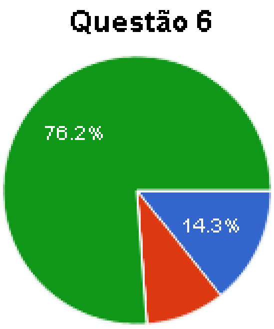
Considere as funções f e g, cujos gráficos estão representados na figura abaixo.



O valor de $f(g(1)) - g(f(1))$ é igual a

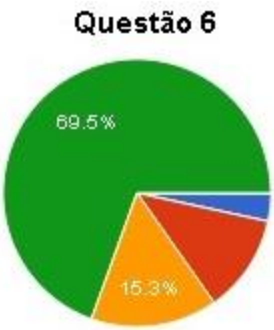
a) 0. b) – 1. c) 2. d) 1.

Gráfico 19: Respostas da 2ª Série – Questão 6



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	3	14.3%
b	2	9.5%
c	0	0%
d	16	76.2%

Gráfico 20: Respostas da 3ª Série – Questão 6



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	2	3.4%
b	7	11.9%
c	9	15.3%
d	41	69.5%

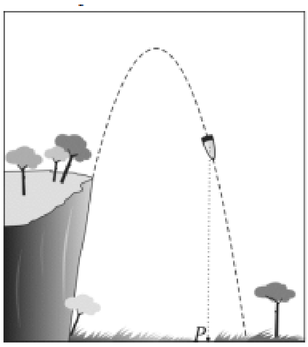
Questão com alto índice de acerto, como já era esperado no capítulo anterior, por se tratar de uma questão com identificação gráfica, na qual a o conceito de função composta é aplicado de modo simples.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 71,25%.

3.3 Questões da Fuvest

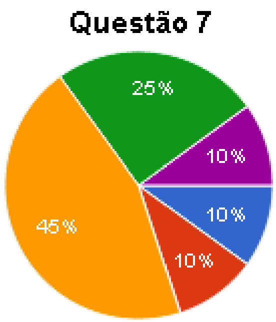
Questão 7

A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



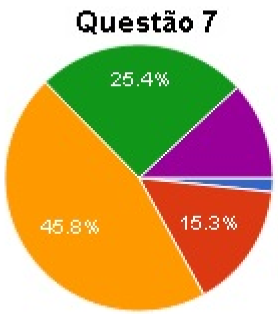
a) 60
b) 90
c) 120
d) 150
e) 180

Gráfico 21: Respostas da 2ª Série – Questão 7



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	2	10%
b	2	10%
c	9	45%
d	5	25%
e	2	10%

Gráfico 22: Respostas da 3ª Série – Questão 7



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	1	1.7%
b	9	15.3%
c	27	45.8%
d	15	25.4%
e	7	11.9%

Esta é a primeira questão em que os dois grupos tiveram o maior número de pessoas assinalando o item incorreto. Já era esperado que o número de acertos desta questão fosse baixo, por se tratar de uma questão mais difícil, por ter que, além de elaborar a fórmula, era necessário associar o gráfico a um plano cartesiano.

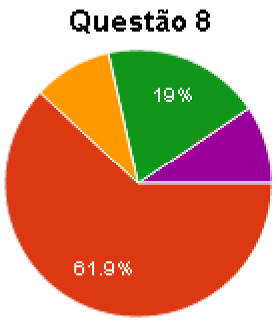
O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 25%.

Questão 8

Considere a função $f(x) = 1 - \dfrac{4x}{(x+1)^2}$, a qual está definida para $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x).f(-x)$ é igual a

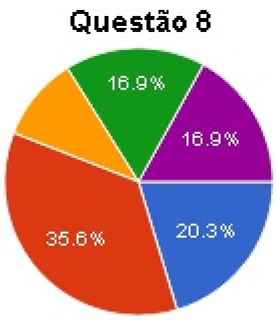
a) -1
b) 1
c) x + 1
d) $x^2 + 1$
e) $(x - 1)^2$

Gráfico 23: Respostas da 2ª Série – Questão 8



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	0	0%
b	13	61.9%
c	2	9.5%
d	4	19%
e	2	9.5%

Gráfico 24: Respostas da 3ª Série – Questão 8



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	12	20.3%
b	21	35.6%
c	6	10.2%
d	10	16.9%
e	10	16.9%

Os dois grupos tiveram o maior número de pessoas indicando a resposta correta. No entanto, a 3ª série teve respostas mais diversificadas. Acredita-se que os erros são, essencialmente, decorrentes de simplificações incorretas e dificuldade em produto notáveis, especialmente a relação incorreta $(x + 1)^2 = x^2 + 1$.

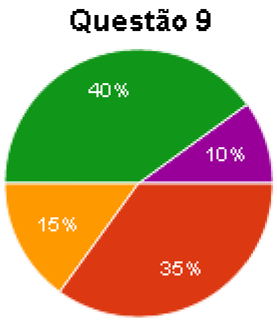
O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 42,5%.

Questão 9

Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a

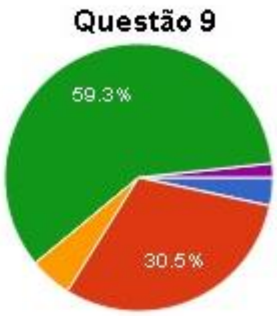
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Gráfico 25: Respostas da 2ª Série – Questão 9



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	0	0%
b	7	35%
c	3	15%
d	8	40%
e	2	10%

Gráfico 26: Respostas da 3ª Série – Questão 9



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	2	3.4%
b	18	30.5%
c	3	5.1%
d	35	59.3%
e	1	1.7%

Novamente o item correto foi o que teve maior percentual nos dois grupos. O item b foi o segundo mais marcado. Ao invés de ser a soma dos valores absolutos das raízes é o valor absoluto da soma das raízes. Desse modo, acredita-se que esta interpretação errada tenha sido o motivo do erro, pois o processo algébrico deve ter sido feito corretamente por 75% da turma da 2ª série e por cerca de 90% da turma da 3ª série, que assinalaram os itens b ou d.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 53,75%.

3.4 Questões do ENEM

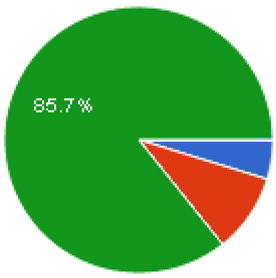
Questão 10

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?
a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0

Gráfico 27: Respostas da 2ª Série – Questão 10

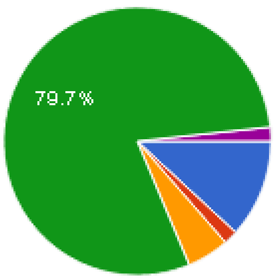
Questão 10



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	1	4.8%
b	2	9.5%
c	0	0%
d	18	85.7%
e	0	0%

Gráfico 28: Respostas da 3ª Série – Questão 10

Questão 10

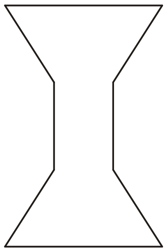


Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	7	11.9%
b	1	1.7%
c	3	5.1%
d	47	79.7%
e	1	1.7%

Trata-se de uma questão de substituição direta do valor da variável dependente e cálculo da variável independente e isso pode ser comprovado pelo alto índice de acerto em ambas as turmas. Os itens a, b e c foram marcados pelos alunos que, provavelmente, substituíram o valor 39 na variável t e não em T.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 81,25%.

Questão 11



Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.

No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

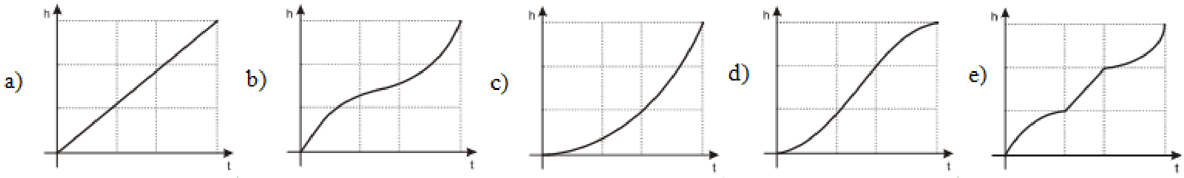
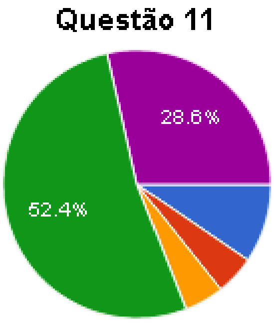
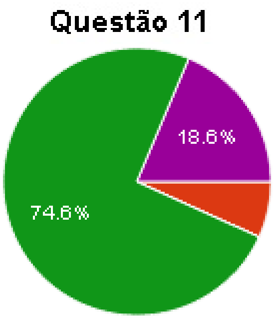


Gráfico 29: Respostas da 2ª Série – Questão 11



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	2	9.5%
b	1	4.8%
c	1	4.8%
d	11	52.4%
e	6	28.6%

Gráfico 30: Respostas da 3ª Série – Questão 11



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	0	0%
b	4	6.8%
c	0	0%
d	44	74.6%
e	11	18.6%

As duas turmas tiveram o maior percentual de alunos assinalando o item correto. Além disso, como era esperado na análise do capítulo anterior, a maioria das respostas ficou entre os itens d e e, nos quais as mudanças do gráfico são coerentes com as marcações de escala do plano, mas que têm comportamentos ‘invertidos’ nos extremos do gráfico.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 68,75%.

Questão 12

Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \le t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \ge 100 \end{cases}$$

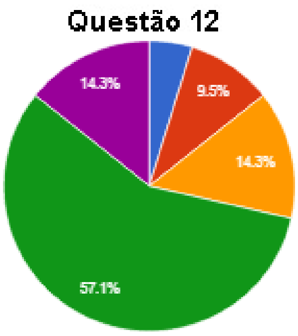
em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48°C e retirada quando a temperatura for 200°C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

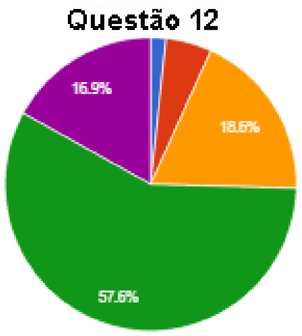
a) 100. b) 108. c) 128. d) 130. e) 150.

Gráfico 31: Respostas da 2ª Série – Questão 12



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	1	4.8%
b	2	9.5%
c	3	14.3%
d	12	57.1%
e	3	14.3%

Gráfico 32: Respostas da 3ª Série – Questão 12



Resposta	Nº de Alunos	Percentual de Alunos
a	1	1.7%
b	3	5.1%
c	11	18.6%
d	34	57.6%
e	10	16.9%

Pouco mais da metade dos alunos das duas turmas acertou esta questão. Contudo, as respostas variaram entre as demais alternativas. Acredita-se que seja devido à necessidade de utilização de duas sentenças para resolvê-la.

O percentual de acerto desta questão, considerando a turma de 80 alunos foi de 57,5%.

CONCLUSÃO

A primeira pergunta a qual este trabalho destinou-se a responder refere-se a: Como o tema funções é abordado nos três principais vestibulares do Estado de São Paulo e no ENEM? Para isso, queria-se analisar os tipos de funções e o enfoque principal abordado por cada um deles.

Esse estudo foi realizado no capítulo 3, no qual, além das resoluções das questões, foi possível quantificar e qualificar a abordagem dessas funções.

Percebeu-se que a abordagem algébrica ou algébrica-gráfica (a partir de fórmulas) tem prioridade em detrimento das abordagens de gráfico e, ainda mais, de tabela (abordagem menos utilizada em todas as provas analisadas).

Apenas na prova do ENEM a abordagem gráfica se destaca, representando quase metade das questões analisadas.

Quanto ao tipo de função, percebeu-se que as funções polinomiais de 1º e 2º graus (afim e quadrática) representam 38,3% das questões analisadas, pois totalizam 28 de um total de 73 questões. Entretanto, há um desequilíbrio bastante grande no ENEM que priorizou fortemente tais grupos de questões.

Em segundo lugar, têm-se as funções exponencial e logarítmica, com destaque para as provas da Unicamp, em que 46% das questões analisadas abordam pelo menos um destes temas.

Desse modo, acredita-se que, em se tratando de preparação para esses vestibulares e ENEM, é ideal que o professor tenha em vista que o trabalho com funções polinomiais, exponencial e logarítmica merecem enfoque. E, ainda, em se tratando particularmente de ENEM, é muito importante que sejam trabalhados gráficos, buscando análise de dados e, também, compreensão de como um fenômeno descrito se comporta graficamente.

O segundo objetivo deste trabalho era o de analisar o desempenho de um grupo de alunos na realização de um teste com questões das provas destes vestibulares.

Para a realização das questões não fosse comprometido pelo fator tempo e cansaço, resolveu-se escolher apenas 12 questões de múltipla escolha (3 de cada uma das provas) para a composição deste teste.

A análise destas questões consta no capítulo 3, apresentando novamente as questões escolhidas, bem como ilustrando as respostas dos alunos, e fazendo-se uma inferência acerca das razões de erros e/ou acertos.

Analisando o grupo como um todo, sem a distinção das séries, é possível perceber que a maior média de acertos está nas questões do ENEM (69,6%), seguida da Unesp (66,25%), Unicamp (52,92%) e, por fim, da Fuvest (49,42%).

O maior acerto referente às questões do ENEM já era esperado, pois o trabalho priorizando análise gráfica e com menos álgebra costuma ser mais atrativo aos alunos.

Neste sentido, era esperado que o resultado da Fuvest fosse o mais baixo, pois entre as quatro provas analisadas, a Fuvest costuma ser a que tem a fama de ser mais difícil e, a partir dos dados analisados, a que tem mais notação algébrica.

É claro que as questões analisadas no teste refletem apenas uma amostra desses dados, mas acredita-se que essa seja a tendência das provas.

Desse modo, espera-se que este trabalho sirva de apoio pedagógico ao professor do Ensino Médio que queira aprofundar seus conhecimentos acerca das abordagens que os vestibulares têm utilizado ao que se refere ao tema funções e, ainda, sirva como material de estudo aos vestibulandos que queiram analisar peculiaridades de abordagem do tema por cada um desses exames.

Vale ressaltar que em 7 das 12 questões analisadas, a turma da 2ª série obteve desempenho superior à da 3ª série. Acredita-se que alguns fatores podem ter influenciado nesse resultado:

- Por se tratar de alunos voluntários, o número de alunos da 3ª série (atualmente alunos da autora da pesquisa) foi superior aos da 2ª. Acredita-se que seja possível que os alunos da 2ª que tenham se disponibilizado a responder o teste sejam os que têm mais facilidade com a matemática e, por isso os resultados teriam sido superiores. E, ainda, com a proximidade dos vestibulares e ENEM para a turma da 3ª série, uma diversidade maior de alunos (com facilidade ou não) tenha se disponibilizado ao teste;
- Devido à proximidade temporal de aprendizado de funções, para os alunos da 2ª série alguns temas estariam "mais frescos", possibilitando maior número de acertos;
- A carga horária semana de aulas de Matemática na 1ª série para as duas turmas foi diferente: 6 aulas para a turma da 2ª série e 5 para a 3ª. Em relação às aulas de conteúdo, em ambas as turmas foram utilizados planejamentos similares. Contudo, a turma da 2ª série contou com mais aulas para resolução de exercícios.

Desse modo, acredita-se que essas situações possam permitir desdobramentos para trabalhos futuros, a partir do mesmo tema (funções) ou não.

E, para concluir, deixa-se uma reflexão acerca do currículo de Matemática: analisando o enfoque dos vestibulares e ENEM a partir das funções polinomiais, exponencial e logarítmica, o trabalho básico com funções trigonométricas e compostas (sem a necessidade de obter f(x), tendo-se f(g(x)) e g(x), por exemplo), acredita-se que seria possível rever o currículo de ensino de funções, minimizando o trabalho com algumas abordagens essencialmente algébricas (como a obtenção de função a partir de composta) no Ensino Médios e enfocando-as de modo mais abrangente no Ensino Superior, apenas aos alunos que precisarem desses conceitos mais algébricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALMEIDA, Silvia Maria Leite de. **Acesso à educação superior no Brasil: uma cartografia da legislação de 1824 a 2003.** 2006, 389 p. Tese (doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12180/000616175.pdf?sequen. Acesso em 03 Abr. 2015.

[2] ANDRIOLA, W. B. Doze motivos favoráveis à adoção do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) pelas Instituições Federais de Ensino Superior (IFES). **Ensaio: aval. pol. públ. Educ., Rio de Janeiro, v. 19, n. 70, p. 107-126, jan./mar. 2011**. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ensaio/v19n70/v19n70a07.pdf.Acesso em 09 Mai. 2015

[3] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, 2000, 58 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 03 Mar. 2015.

[4] COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES (COMVEST). **Provas dos vestibulares anteriores.** Disponível em: http://www.comvest.unicamp.br. Acesso em 06 Fev. 2015

[5] CUNHA, L. A. R. **Ensino superior e universidade no Brasil. A reforma universitária nos anos 60 e 70.** In: LOPES, E. M.; FARIA FILHO, L. M.; VEIGA, C. G. *500 anos de educação no Brasil*. Belo Horizonte: Autêntica, 2000, p.178-189. Disponível em: www.densf.xpg.com.br/ensino_superior_e_universidade_no_brasil.doc. Acesso em 19 Mar. 2015.

[6] FUNDAÇÃO PARA O VESTIBULAR DA UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (VUNESP). **Provas dos vestibulares anteriores.** Disponível em: http://www.vestibular.unesp.br. Acesso em 06 Fev. 2015.

[7] FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR (FUVEST). **Provas dos vestibulares anteriores.** Disponível em: http://www.fuvest.br/vest1980/provas/provas.stm. Acesso em 06 Fev. 2015.

[8] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Provas do ENEM.** Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos. Acesso em 06 Fev. 2015.

[9] KASPRZYKOWSKI, André Gaglianone de Almeida. **Análise Comparativa da Prova de Matemática do ENEM e do Vestibular da UFRJ**, 2014, 66p., Dissertação (Mestrado em Rede Nacional em Matemática- PROFMAT). Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1024. Acesso em 20 Jul. 2015.

[10] LIMA, José Luciano Coutinho. **Contextualização e conteúdos das questões de Matemática do ENEM e dos vestibulares da USP, UNICAMP e UFSCar**. 2011, 146 p. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. Disponível em: http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4165. Acesso em 10 Jul. 2015.