



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –**  
**PROFMAT**

**EDÍLSON ABREU DUARTE**

**PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO**

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2015**

EDÍLSON ABREU DUARTE

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

FORTALEZA – CEARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Duarte, Edilson Abreu.

Princípio da indução finita em conteúdos do ensino médio [recurso eletrônico] / Edilson Abreu Duarte. - 2015.

1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 72 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Demonstrações. 2. Indução. 3. Ensino Médio. I. Título.

**EDÍLSON ABREU DUARTE**

**PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO**

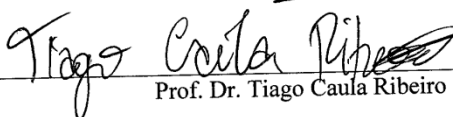
Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 29 de outubro de 2015.

**AVALIAÇÃO**



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Herminio Borges Neto  
Universidade Federal do Ceará – UFC



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro  
Universidade Estadual do Ceará – UECE



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes  
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedico à minha esposa, pais e amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer principalmente a minha família pelo apoio e torcida. No âmbito acadêmico, queria agradecer ao Professor Dr. João Montenegro que foi decisivo para a minha conclusão desse mestrado, assim como na minha graduação na matemática. Além do Professor Dr. Hermínio Borges por endossar a minha ideia, sua ajuda foi indispensável. E por fim, a todos os amigos que entenderam minhas ausências nesse período de conclusão do curso.

"Saber muito não lhe torna inteligente. A inteligência se traduz na forma que você recolhe, julga, maneja e, sobretudo, onde e como aplica esta informação." (Carl Sagan)

## RESUMO

Nesse trabalho, tentaremos estimular a ideia de como o princípio da indução matemática, um dos métodos de demonstrações da matemática, pode ser usado no ensino médio. Para isso, mostramos alguns tipos de demonstrações mais utilizadas na matemática: a demonstração direta, demonstração indireta, demonstração por absurdo e, por fim, a demonstração por indução. E, assim, mostrar várias provas de teoremas que estão em conteúdos do ensino médio por meio da indução. Mas não apenas mostrando o usual da indução, e sim o passo a passo do raciocínio indutivo, desde a conjectura ao processo algébrico das fórmulas. Sempre enfatizando que a formação da conjectura, observando os padrões que surgem, é parte essencial para a formação matemática do aluno. Sendo o diferencial desse trabalho, a tentativa de trazer o raciocínio indutivo por essência, fazendo com que os professores de ensino médio tenham uma visão diferente das demonstrações, principalmente da indução, na sala de aula.

**Palavras chave:** Demonstrações. Indução. Ensino médio.



## **ABSTRACT**

In this work, we will try to encourage the idea of how the principle of mathematical induction, one of the methods of mathematical statements, can be used in high school. For this, we show some types of frequently used statements in mathematics, direct, indirect demonstration, demonstration by absurd and, finally, the proof by induction. And so, show several proofs of theorems that are in high school content through induction. But not just showing the usual induction, and the step by step of inductive reasoning, Since the algebraic process conjecture of formulas. Always emphasizing that the formation of the conjecture, noting patterns that arise, is an essential part of student training. Being the difference of this work, this attempt to bring inductive reasoning by essence, making the high school teachers have a different view of the demonstrations, mainly of induction, in the classroom.

**Keywords:** Statements. Induction. High school.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Triângulo tetângulo .....	17
Figura 2 – Quadrado DEFG .....	17
Figura 3 – Gráfico da função contínua .....	21
Figura 4 – Hexágono ABCDEF .....	42
Figura 5 – Hexágono ABCDEF.....	42
Figura 6– Hexágono ABCDEF.....	43
Figura 7– Hexágono ABCDEF.....	43
Figura 8 –Torre de Hanói.....	46
Figura 9 –Torre de Hanói.....	48
Figura 10. –Torre de Hanói.....	48
Figura 11–Torre de Hanói.....	48
Figura 12–Torre de Hanói.....	49
Figura 13 –Torre de Hanói.....	49
Figura 14 –Hexaedro .....	61
Figura 15– Poliedro de 8 faces nãoconvexo.....	61
Figura 16– Octaedro .....	62
Figura 17– Poliedro de 10 faces nãoconvexo.....	62
Figura 18 – Poliedro de 7 faces nãoconvexo.....	62
Figura 19– Poliedro de 10 faces nãoconvexo.....	63
Figura 20–Dodecaedro.....	63

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>PRINCIPAIS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS.....</b>	<b>15</b>
2.1	DEMONSTRAÇÃO DIRETA.....	19
2.2	DEMONSTRAÇÃO INDIRETA.....	20
2.3	DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO.....	20
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA INDUÇÃO.....</b>	<b>23</b>
3.1	OS AXIOMAS DE PEANO.....	24
3.2	PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO.....	26
3.3	PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO.....	27
3.4	MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA.....	28
3.5	INDUÇÃO SOBRE CONJUNTOS BEM ORDENADOS.....	30
3.6	MÉTODO DA INDUÇÃO COMPLETA.....	32
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS DE INDUÇÃO EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO.....</b>	<b>36</b>
4.1	SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA.....	36
4.2	SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA FINITA.....	38
4.3	NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO CONVÊXO.....	40
4.4	A TORRE DE HANÓI.....	46
4.5	A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	49
4.6	O TRIÂNGULO DE PASCAL.....	52
4.7	RELAÇÃO DE EULER.....	60
<b>5</b>	<b>- DISCUSSÃO.....</b>	<b>66</b>
<b>6</b>	<b>- CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>70</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho tentaremos mostrar como um dos processos matemáticos mais elegantes pode ser usado em salas de aula do ensino médio, tentando apresentar alguns exemplos da história e discutindo sua importância, trazendo assim uma visão sobre a indução matemática dentro do contexto do aluno e do professor desse período da nossa vida acadêmica.

No contexto da história da evolução humana, temos vários fatos que mostram como a Matemática foi de grande importância para chegarmos ao nosso patamar intelectual. Segundo Burton (2007) “a matemática é um dos mais antigos instrumentos intelectuais, tem uma longa história, entrelaçada com marcantes personalidades e realizações de destaque”, sem mencionarmos o aspecto tecnológico, que é uma consequência direta desse avanço intelectual. Há uma relação direta do raciocínio matemático com o desenvolvimento da raça humana.

A Matemática se desenvolveu e a história dela nos mostra como foi duro o caminho desse processo. A maior prova desse desenvolvimento são os vários teoremas e teorias que foram estabelecidas e que abrangem várias áreas do conhecimento humano. Sendo os métodos de demonstração desses teoremas e teorias, o que mais impressionam. São exatamente essas demonstrações que mostram o nível de abstração que nos diferencia dos outros animais.

Os grandes pioneiros nas demonstrações foram os gregos, sendo os principais representantes dessa genialidade, Pitágoras (570 a.c.), Euclides (300 a.c.) e Arquimedes (250 a. c.). Mas o método axiomático, apresentado nos Elementos de Euclides, foi um marco na consolidação dessa maneira de formar conhecimento matemático, e, com certeza, a matemática não teria a mesma credibilidade se não fossem essas demonstrações que embasam as teorias e teoremas.

No ensino médio pouco se trabalha demonstrações matemáticas. Fazendo com que os alunos não compreendam o porquê dos conteúdos e acabam por tomar os teoremas como se fossem dogmas religiosos. Não há questionamento nem construção do conhecimento. Simplesmente há uma afirmação que é tomada como verdade absoluta e a partir dela vão aos exercícios, aprendendo-se de forma automatizada os conceitos e teoremas.

Há uma necessidade do aluno interagir com a matemática. “Formamos o conceito de um objeto a partir da ação sobre ele, construindo atributos e relações, depois elaborando

composições” (NETO, 1997). A interação com os principais conceitos matemáticos são de grande importância para essa composição de conteúdos sólidos e compreensíveis.

*“Para Aristóteles, o argumento lógico de acordo com seus métodos, é a única maneira certa de alcançar o conhecimento científico (...), pode-se escolher qualquer axiomas que se quer e tirar conclusões a partir deles, se alguém quiser alcançar o conhecimento, deve-se começar com ‘verdadeiros’ axiomas. A questão torna-se então, como se pode ter certeza de que uns dos axiomas são verdadeiros. Aristóteles respondeu que essas premissas primárias são aprendidas por indução, por tirar conclusões a partir de nossa própria percepção sentido de numerosos exemplos (...). Por outro lado, as regras de Aristóteles de se obter conhecimento, começando com axiomas e usando manifestações para obter novos resultados tornou-se o modelo para os matemáticos até os dias atuais.” (KATZ, VITOR; 2004, p. 44)*

Um método de demonstração que trabalha muito essa prática de relações com o conteúdo e conceito: o da Indução. “É com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é, ao mesmo tempo, sutil e delicado” (Hefez, 2009).

O Método de Indução Matemática foi observado implicitamente pela primeira vez com Euclides, Nos Elementos, para Katz (2004). Nele, há seguinte proposição: “Se tantos números quantos se queira estiverem em proporção continuada, e se se subtrai ao segundo e ao último o primeiro, então o excesso do segundo está para o primeiro como o excesso do último está para a soma de todos antes dele“.Essa é a proposição 35 do Livro IX Dos Elementos. Mas o primeiro a utilizar, segundo Burton (2007), abertamente esse método foi Pascal em “*Traité du triangle arithmétique*” - Tratado sobre o Triângulo aritmético - de 1653, no qual demonstrou, pela primeira vez com indução, algumas características do seu triângulo famoso.

Na grade curricular do ensino médio não há a indução matemática, por isso esse trabalho tem como objetivo principal trazer os conceitos essenciais desse método tão importante, dando um foco maior nas aplicabilidades em conteúdos desse nível de ensino, visando mostrar quanto essa parte da matemática é acessível aos conteúdos e ao público desse período escolar, com isso, vislumbrando a inclusão desse método ao currículo do ensino médio.

Assim, buscamos uma melhor ferramenta de aprendizagem para outros conteúdos já contidos no mesmo currículo, dando uma ênfase no processo indutivo, tentando refletir sobre a situação problema e chegando a um padrão e a partir daí aplicar o método da indução.

Seguimos a corrente de vários colegas professores, tais como Abramo Hefez, Paulo César A. Perreira, Anderson C. dos Santos, dentre outros que acreditam na importância desse método para o desenvolvimento matemático de nossos alunos. Todos eles têm trabalhos ou artigos relacionados aos seus interesses de incluir o método da indução matemática nos currículos do ensino médio.

No capítulo inicial, vamos mostrar o que é uma demonstração matemática, seus processos e as definições contidas nessas ferramentas de justificação de teorias, diferenciando explicação, prova e demonstração no processo da construção do conhecimento matemático.

Apresentamos, também alguns tipos de demonstrações mais usadas na matemática. São elas: demonstração direta, demonstração por absurdo, demonstração contrapositiva e demonstração por indução, dando exemplos e tentando dar uma visão da importância desse tipo de recurso para formação do raciocínio matemático do indivíduo. Daí, chegaremos ao nosso foco, que são as provas usando indução matemática.

No segundo capítulo, vamos dar um embasamento teórico para as demonstrações por indução matemática, tomando os axiomas de Peano como o principal tema e a construção dos Naturais. Peano contribuiu substancialmente para a matemática com mais de 200 livros, é considerado um dos pioneiros da teoria dos conjuntos e da lógica matemática, além do Princípio da Boa Ordem que tem uma relação muito forte com o nosso método em questão. Por isso é de grande importância detalhar esse tema, mostrando como podemos usar a indução para justificar a boa ordem e a boa ordem para justificar a indução.

Com isso poderemos proceder a uma construção mais clara dos conteúdos que queremos utilizar nos nossos problemas, partindo daí para o princípio da indução, com sua generalização e depois para o segundo princípio da indução, ou princípio da Indução Completa, sempre, em cada um dos conceitos, apresentando um exemplo que utilize o conceito em questão.

Ainda temos uma visão geral do processo indutivo através do uso dos conjuntos, mostrando que o processo de indução é aplicável para conjuntos bem ordenados, não só para os naturais e inteiros, e a importância dessa ampliação do processo da indução para a computação, conceitos que não são muito usados nos livros acadêmicos de matemática, mas sim em livros de computação, que é uma falha, pois esse processo ampliou a abrangência da indução e nos dá uma visão mais completa desse método e suas aplicações. Com isso poderemos formar um conceito mais sólido embasando todo o trabalho, nessa etapa vamos buscar opções que mostrem como é a essência do método indutivo, desde a busca da conjectura até um processo algébrico mais viável, sempre tentando dar uma visão de professor

de ensino médio, ou seja, buscando mostrar todo o raciocínio dedutivo partindo da hipótese de indução para chegar ao objetivo desejado.

No terceiro capítulo vamos expor vários problemas que estão contidos nos conteúdos apresentados no currículo de matemática no ensino médio. Vamos solucioná-los usando o princípio da indução. Em alguns, usando um pouco mais do que a indução apenas, devido à necessidade que o problema apresenta, não só mostrando como a indução é aplicável em conteúdos importantes do ensino médio, mas, também procurando levar o raciocínio de cada conjectura, por meio de tabelas ou exemplos, fazendo com que essa lógica seja um fato importante no uso desse processo de demonstração.

Muitos autores têm como foco principal apenas a passagem da hipótese de indução em si, apresentando o padrão ou a fórmula que se quer demonstrar, sem se preocupar com a produção do conhecimento que a conjectura pode levar, incluindo a própria solução do problema. A partir disso, surgiu a ideia desse trabalho: mostrar esse passo lógico que alguns autores não apresentam.

Com isso, poderemos chegar a conclusões para que possamos pensar melhor sobre algumas práticas adotadas nas aulas de matemática. Com a intenção de trazer para os professores do ensino médio um artifício a mais para sua prática em sala, elevando o nível dos alunos e dos próprios professores, tentando ter uma reflexão mais profunda sobre esse tema tão importante para a formação do raciocínio matemático.

## 2 PRINCIPAIS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Nas ciências naturais em geral, para uma determinada ideia ou teoria ser aceita na comunidade científica exige-se um conjunto de evidências que possam nos garantir que seja verdade. Mas como podemos fundamentar essas afirmações, ou justificá-las? Foi René Descartes o primeiro a fundamentar o chamado método científico moderno. Em sua obra o Discurso do Método, de 1637, ele tentou dar resposta a esse questionamento. Descartes sugeriu um aparelhamento dos fenômenos naturais usando a matemática, o observável dos fenômenos e seus padrões, e que, para compreendermos o contexto geral, temos que entender cada etapa do fenômeno.

A matemática, como parte dessa ciência moderna, tem seus métodos que fundamentam suas teorias, são as chamadas demonstrações matemática. Essas são um pouco anteriores ao método científico moderno, já que Euclides e Arquimedes já as usavam em seus cálculos, dentre outros.

Com a evolução da matemática os métodos evoluíram junto e fizeram parte desse processo, confundindo-se com a própria matemática. “Usualmente, consideramos a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina” (LIMA, 2013).

O ramo do conhecimento humano que mais caracteriza os seres que possuem um intelecto capaz de abstrações é a matemática, um dos fenômenos que mais nos diferenciam dos outros animais. Para Carl Sagan, famoso físico americano e divulgador das ciências, toda civilização inteligente terá, com certeza, a matemática como base do seu avanço científico. “Não importa a tua aparência, a matéria de que és feito ou de onde vieste. Desde que vivas neste universo, e tenhas um modesto talento para a matemática, mais cedo ou mais tarde o encontrarás.” (SAGAN, 1985).

O grande salto evolutivo dado pela nossa espécie foi a capacidade de planejar, de antever, de abstrair situações e a nossa habilidade de fazer matemática é um retrato fiel dessa nossa capacidade de abstração. Nossas habilidades em matemática não consistem apenas nas operações básicas, como somar, subtrair, multiplicar e dividir. Até porque muitos animais menos evoluídos tem essa capacidade. O que nos diferencia é fazer matemática no abstrato, apenas na curiosidade de se ter uma solução, de saber. Então, à medida que nos distanciamos do entendimento da matemática, mais nos tornamos parecidos com os outros animais menos evoluídos.



Infelizmente nosso processo de aprendizagem de matemática na escola básica tem tirado de pauta essa parte importante de construção de conhecimento da matemática. As demonstrações e provas matemáticas pouco são usadas pelos professores, apesar desse tipo de metodologia de ensino da matemática estar contida nos PCNs, principalmente na parte de Geometria, fazendo com que nossos alunos sejam cada vez menos capazes de abstrair ou esboçar criatividade.

Para Veloso (1998) as demonstrações nos levam a “aprender a raciocinar (o fazer matemático da intuição) e compreender a natureza da Matemática (a introspecção sobre como funciona aquilo que foi feito)”. Então, não podemos dissociar um processo de construção de conhecimento tão importante do ensino da matemática. Não compreender os processos de formação da matemática é tirar do aluno a capacidade de abstrair, habilidade primordial da nossa escala evolucionar.

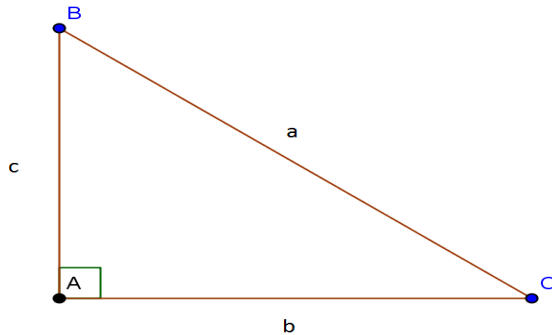
Mas alguns aspectos da Matemática são confusos na cabeça dos professores dessa matéria. Muitos não sabem a distinção entre explicação, prova e demonstração. Apesar de prova e demonstração serem muito parecidos, há uma tênue diferença entre ambas. Segundo Lima (2013) “explicação é um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado, podendo ser discutido, recusado ou aceito”. Já prova é “explicação aceita por uma dada comunidade, num dado momento, cujo significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores”. Demonstração é “prova aceita pela comunidade (no nosso caso, matemática), fundamentada em procedimentos, métodos ou explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizados conforme regras determinadas”.

Para ficarem mais claras essas definições podemos dar alguns exemplos, até porque existem várias formas de obtermos provas na matemática.

Para exemplificar, podemos usar uma prova para o Teorema de Pitágoras completando um quadrado, presente em muitos livros do ensino médio. Vejamos:

Dado um triângulo retângulo  $ABC$  reto em  $A$ , de medidas  $med(BC) = a, med(AC) = b$  e  $med(AB) = c$ , que segue na figura abaixo:

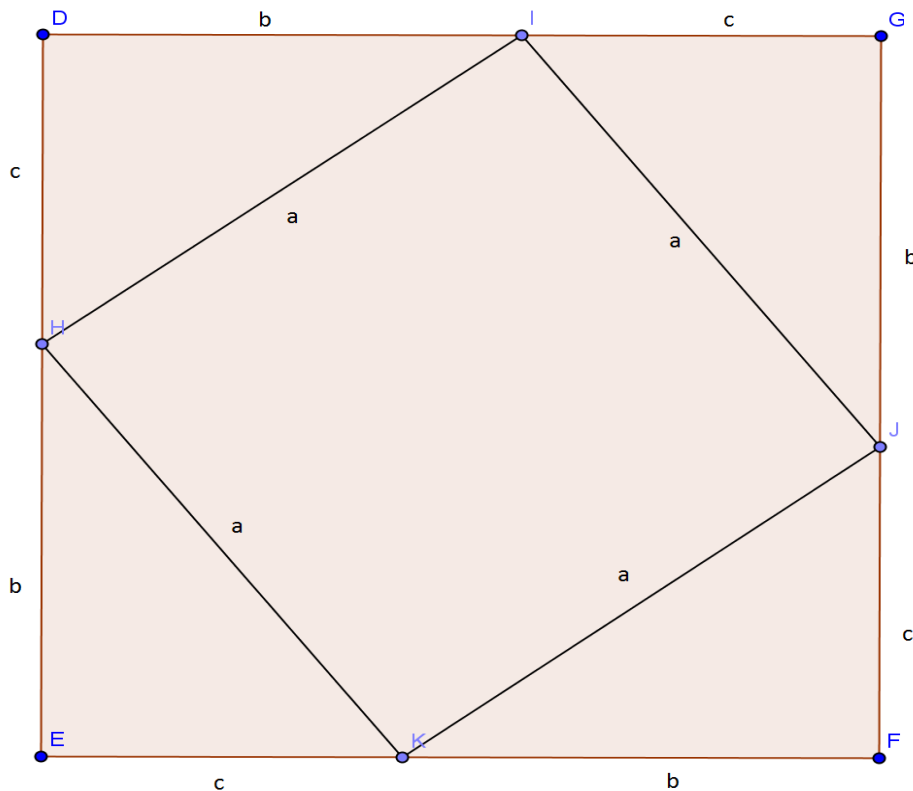
Figura 1 – Triângulo retângulo



Fonte: Elaboração própria

Vamos considerar um quadrado DEFG cuja medida do lado é  $c + b$ . Ou seja,  $med(DE) = med(EF) = med(FG) = med(DG) = c + b$ . Daí marcaremos os vértices H, I, J, K sobre os lados desse quadrado. Assim inscrito no quadrado DEFG, teremos outro quadrado HIJK com medida do lado igual a  $c$ , como mostra a figura 2.

Figura 2 – Quadrado DEFG



Fonte: Elaboração própria

Assim, ao observarmos a figura 2, podemos concluir que a área do quadrado DEFG é a área do quadrilátero HIJK, que é um quadrado, pois os quatro lados tem a mesma medida  $a$  (hipotenusa dos triângulos retângulos de catetos  $b$  e  $c$ ) e seus ângulos internos

medem cada um  $90^\circ$ , mais as áreas dos quatro triângulos retângulos, de lados  $b$  e  $c$ , que são congruentes pelo critério lado, ângulo, lado.

Portanto, teremos

$$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$$

E podemos concluir que

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2,$$

E por fim

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

Como queríamos provar.

Apesar de em Oliveira e Fernandes (2012) considerarem isso uma demonstração direta, pelas interpretações adotadas nesse trabalho tomaremos como uma prova, pois, ela é restrita à apenas para triângulos construtíveis com régua e compasso. No caso de um triângulo com catetos medindo  $\pi$  a demonstração não é possível com figuras.

Outro tipo de prova é usando exemplos, que é muito comum na sala de aula. Nas progressões aritméticas, quando queremos mostrar que em uma Progressão Aritmética (P.A) de número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética dos termos extremos, usamos várias P.As e observamos o fato. Como podemos formar infinitas progressões, fica inviável ser válido para todas elas. Por isso não é considerada demonstração.

Um problema interessante desse tipo, enfrentado pelos matemáticos, foi o chamado Último Teorema de Fermat. No qual o famoso matemático francês afirmava que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos  $a, b, c$  e  $n$ , com  $n > 2$  que satisfaça a equação  $a^n = b^n + c^n$ . Como existem infinitos números inteiros positivos, é impossível fazer o teste para todos. Logo, seria necessária uma demonstração matemática completa para determinar a veracidade desse teorema e essa demonstração só foi apresentada em 1993, pelo matemático britânico Andrew Wiles.

Existem vários tipos de demonstrações consideradas na matemática. Na verdade, são técnicas diferentes de se concluir se um determinado fato matemático é verdade ou não. São elas: a Demonstração direta, a Demonstração por contraposição ou “prova indireta”, a Demonstração por Absurdo e a Demonstração por Indução que é o foco principal desse trabalho.

## 2.1 DEMONSTRAÇÃO DIRETA

A demonstração direta é aquela na qual tomamos a hipótese como verdade e a partir de fatos verdadeiros e lógicos mostramos que a tese é verdade. Falando de outra maneira, para chegarmos a uma conclusão B, usaremos uma premissa A verdadeira ou várias premissas verdadeiras.

Vejamos um exemplo de demonstração direta: existem vários fatos curiosos na Matemática e muitos deles são importantes demonstrar. Um desses fatos é o número 1089, o chamado número mágico. Ocorre o seguinte: escolha qualquer número de três algarismos distintos, por exemplo, 781, invertamos a ordem dos seus algarismos, ficando 187, e subtraímos os primeiro pelo segundo,  $781 - 187 = 594$ . Agora vamos inverter a ordem dos algarismos desse número obtido da subtração e somarmos os dois.  $594 + 495 = 1089$ .

Em casos cujo algarismo das centenas for menor que o da unidade, por exemplo, 234, o procedimento da troca dos algarismos fica 432, que é maior que 234. Então, fazemos a subtração  $432 - 234 = 198$ , pois se fizéssemos ao contrário o resultado seria negativo. Continuando, agora temos que somar  $198 + 891 = 1089$ .

Esse fato matemático tem uma demonstração direta. Vejamos:

Escolhendo um número de três algarismos distintos ABC, onde A, B e C são os algarismos escolhidos, ou seja, os valores de A, B e C estão no conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , podemos escrever esse número na forma  $100A + 10B + C$ . Invertendo a ordem dos algarismos teremos  $100C + 10B + A$ . Subtraindo os dois números:

$$100A + 10B + C - (100C + 10B + A)$$

Sem perda de generalidade vamos tomar  $C < A$  (caso  $A < C$  o procedimento é similar), teremos que decompor os algarismos da dezena e centena do primeiro número, ficando:

$$100(A - 1) + [10(B - 1) + 100] + C + 10 - (100C + 10B + A)$$

Assim, obteremos

$$100(A - C - 1) + 90 + (C - A + 10)$$

Agora invertendo a ordem desse número, teremos:

$$100(C - A + 10) + 90 + (A - C - 1)$$

Por fim, vamos somá-los:

$$100(A - C - 1) + 90 + (C - A + 10) + 100(C - A + 10) + 90 + (A - C - 1)$$

$$100(A - C - 1 + C - A + 10) + 90 + 90 + (C - A + 10 + A - C - 1)$$

$$100 + 180 + 9 = 1089$$

Logo, independente de que sejam os algarismos A, B e C, a soma será 1089.

Essa demonstração veio da curiosidade de se mostrar um fato interessante que, por se tratar de muitos números com três algarismos distintos, temos que mostrar ao aluno que fica muito trabalhoso testar todos eles e que não podemos ter certeza que irá ser válido para todos eles. Daí a importância de se demonstrar esse tipo de fato.

## 2.2 DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

Agora a demonstração contrapositiva ou demonstração Indireta se trata de um método que consiste em usar premissas da lógica, no qual se a forma positiva de uma proposição for verdade equivale à veracidade da sua contrapositiva. Esse caso é usado em exemplos que ficam mais fáceis comprovarmos a segunda forma.

Vejam um exemplo, do livro de Oliveira e Fernandez (2012). Vamos provar que se  $N^2$  é par, então  $N$  é par. Assim, podemos obter a hipótese de que  $N^2$  é par e queremos verificar se  $N$  é par, ou seja, a tese. Podemos até tentar conjecturar atribuindo valores a  $N$  e verificando alguns exemplos, mas como há infinitos valores para  $N$ , para a matemática não tem efeito de demonstração. Então, vamos usar o método por contraposição.

Assim, nossa proposição ficará: Se  $N$  não é par, então  $N^2$  não é par. Agora, nossa hipótese é  $N$  não é par e a tese  $N^2$  não é par.

Logo temos a demonstração: Tomaremos  $N$  como não par, ou seja, ímpar. Então podemos escrever  $N = 2q + 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} N^2 &= (2q + 1)(2q + 1) = 4q^2 + 4q + 1 \\ &= 2(2q^2 + 2q) + 1 = 2p + 1 \end{aligned}$$

Sendo  $p = 2q^2 + 2q$ , podemos concluir, com isso, que  $N^2 = 2p + 1$  é ímpar, provando nossa proposição.

## 2.3 DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

Outra forma de demonstração é a por absurdo ou ainda *reductio ad absurdum*. Nessa demonstração, novamente, usamos conceitos da lógica. Dada uma determinada assertiva, para verificarmos sua veracidade negamos essa mesma assertiva, assumindo que ela é falsa. Daí, usando argumentos lógicos, chegamos a um absurdo ou uma contradição. Nessa demonstração, quando supomos a falsidade do nosso argumento, chegaremos a um resultado que contradiz a lógica ou a hipótese.

Vejamus um exemplo muito interessante contido em “A first course in abstract algebra”, de John B. Fraleigh, que justifica um teorema consagrado do século XXI, que é o teorema do ponto fixo de Brouwer, teorema este que leva o nome do matemático holandês que viveu entre os séculos XIX e XX. O trabalho de Brouwer como matemático abrangeu várias áreas como topologia, teoria dos conjuntos, análise complexa, dentre outras.

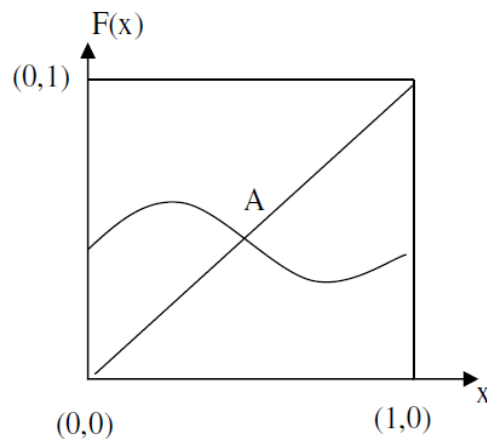
No caso unidimensional, o teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Toda função real contínua  $F$  definida no intervalo fechado  $[a, b]$  com valores no mesmo intervalo, tem um ponto  $x_0$  neste intervalo tal que  $F(x_0) = x_0$ .

Para demonstrar esse teorema, neste caso, usaremos a técnica de demonstração por absurdo, ou seja, vamos supor que não existe um ponto fixo, e daí, encontraremos uma contradição com o fato da função ser contínua.

Vamos tomar uma função contínua  $F(x)$  representada no gráfico a seguir, definida no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . Esse intervalo se encaixa nas características exigidas para o teorema, pois é fechado, limitado e convexo. Também o domínio e o contradomínio são iguais ao intervalo unitário, como também podemos afirmar que é uma função contínua. Basta observarmos o gráfico.

Figura 3- Gráfico da função contínua



fonte: PRADO, 2005

Agora vamos supor que esse ponto não exista. Usando tricotomia, temos três opções:  $F(x) - x > 0$ , ou  $F(x) - x < 0$  ou  $F(x) - x = 0$ . Assim, vamos verificar primeiramente, para qualquer valor de  $x$  no intervalo dado, se  $F(x) - x > 0$ . Com  $x = 1$ , termos que  $F(x) > 1$ , já extrapolando nosso intervalo. Logo, é um absurdo. Testando agora para  $F(x) - x < 0$  e tomando  $x = 0$ , termos que  $F(x) < 0$ . Contradizendo novamente nossa

hipótese, agora contradizendo o contradomínio da função contínua. Assim, temos que  $F(x) = x$ . Isso nos diz que o gráfico nunca pode estar sempre do mesmo lado da reta identidade. Ou seja, o gráfico  $F(x)$  tem que interceptar em algum ponto a reta identidade. Resultando que existe um  $x_0$  tal que  $F(x_0) = x_0$ .

Lembrando que usamos o intervalo  $[0,1]$ , mas que pode ser ampliado para qualquer intervalo fechado  $[a,b]$ . Além de podermos ampliar para outros espaços maiores que o  $\mathbb{R}^2$ . Mas deixaremos para outra oportunidade. Então, fica mostrado que, independente do gráfico, há sempre um ponto que permanece na mesma posição inicial.

Terminada nossa demonstração por absurdo, nossa última técnica matemática de demonstração é a Indução. Uma técnica que já é usada desde a época de Euclides, mas só foi formalizada com Peano, no século XX. Também conhecida como recursiva, “além de ser um método para definir conjuntos, é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais” (LIMA, 2013). Vamos então detalhar todo esse processo no próximo capítulo.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA INDUÇÃO

Indução finita, indução matemática ou demonstração recursiva são alguns nomes usados para essa técnica matemática de demonstração bastante usada para justificar problemas de matemática, principalmente em se tratando de conjuntos numéricos. É, com certeza, um dos instrumentos matemáticos mais úteis, simples e elegantes do acervo de demonstrações apresentados nesse trabalho.

Os grandes passos a serem dados nas demonstrações, que usam indução, são, exatamente, o processo de conjecturar o padrão apresentado no problema e após isso aplicar a hipótese de indução para chegarmos onde queremos. O processo de conjecturar um determinado padrão ou fórmula é possível em vários casos, para isso podemos usar uma tabela ou ainda apenas observação de alguns exemplos. Mas, veremos que, em alguns casos, esse processo não nos traz muitos benefícios e sim mais problemas. Por isso, tentaremos apresentar essas saídas úteis, não só na conjectura, mas também na passagem da hipótese indutiva.

Como já foi dito antes, a indução finita já é usada desde os tempos de Euclides, passando por Descartes e Pascal. Mas, foi Peano, com a intenção de definir o conjunto numérico dos naturais, que desenvolveu um conjunto de axiomas que definiu as propriedades desse conjunto, são os chamados Axiomas de Peano. “É, uma concepção que privilegia as técnicas de transformação algébrica dissociada das situações reais e preocupada apenas com o emprego de regras e propriedades no trabalho com expressões algébricas” (SAVIOLI, 2007).

Vamos apresentar aqui esses conceitos com a intenção de trazer para o ambiente do ensino médio essas ideias, onde podemos apresentar exemplos de conjuntos infinitos e como certificar que certas propriedades são aplicáveis a esses conjuntos.

Começando com os axiomas de Peano, depois Princípio da Boa Ordenação, passando pelo Princípio da Indução Finita, a Generalização do Princípio da Indução Finita e a Segunda Forma do Princípio de Indução ou Indução completa e também a indução sobre conjuntos ordenados, mostrando que o método é útil não apenas para os conjuntos numéricos dos naturais e inteiros. Sempre tentando apresentar exemplos que se aplicam a cada definição, de maneira que possamos entender o processo indutivo.

Toda essa fundamentação será útil para continuarmos nossa argumentação e mostrarmos que é um ramo da matemática de fácil entendimento, não só para alunos de nível acadêmico.



### 3.1 OS AXIOMAS DE PEANO

Os Axiomas de Peano, também conhecidos como axiomas de Dedekind-Peano ou ainda Postulados de Peano, são um conjunto de axiomas desenvolvidos por Peano para dar um tratamento lógico ao conjunto dos números naturais.

Usaremos  $P(n)$  para indicar o "sucessor" do número  $n$  e, para o zero utiliza-se o símbolo  $0$ . E são eles:

- i.  $0$  é um número natural;
- ii. Todo número natural  $n$  tem um sucessor  $P(n)$ ;
- iii.  $0$  não é sucessor de nenhum número e o único com esta propriedade;
- iv. Se  $P(n) = P(m)$ , então  $n = m$
- v. Dado um conjunto de naturais  $P$  tal que:
  - a)  $0 \in P$
  - b)  $n \in P$ , implica que  $P(n) \in P$ .

Então,  $P = \mathbb{N}$ .

Há vários autores que consideram esses axiomas tomando o  $1$  como menor elemento dos naturais. Um exemplo é Elon Lages Lima (2006). No entanto, não há o menor problema de ordem axiomática, começar do  $0$  ou do  $1$ , ou de qualquer natural. O que é precisamos definir qual o menor elemento deste conjunto. Como veremos a seguir:

De maneira mais formal podemos descrever esses axiomas, segundo Lima (2006) considerando o menor elemento o  $1$ , por não considerar o zero como sendo um número natural:

- i. Existe uma função injetiva  $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . A imagem  $P(n)$  de cada número natural  $n \in \mathbb{N}$  chama-se sucessor de  $n$ .
- ii. Existe um único natural  $1 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \neq P(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- iii. Se um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  é tal que  $1 \in P$  e  $P(X) \subset X$  (ou seja,  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(n) \in X$ ) então  $X = \mathbb{N}$ .

Podemos ainda interpretar essas afirmações. O item i. nos diz que todo número natural possui apenas um sucessor natural. Já na afirmação ii. existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo  $1$  e chamado de "número um". E por fim, o iii. complementa que se um conjunto de números naturais contém o número  $1$  e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com  $\mathbb{N}$ , isto é, contém todos os números naturais.

A partir desses axiomas podemos construir também todas as operações dos naturais e uma forma de provar certas propriedades desse conjunto. A ideia geral do axioma iii. é que podemos encontrar qualquer outro número natural a partir do 1, com repetidas aplicações da operação de encontrar o sucessor. Com esses fatores apresentados, podemos demonstrar as operações soma e multiplicação dos naturais. Vejamos essa argumentação do professor Elon Lages Lima novamente:

Para a adição, tomaremos um número qualquer  $k$  e definiremos a soma como sendo  $k+n$ , para todo  $n$  natural.

“Fixado  $k$ , a correspondência  $n \rightarrow k + n$  será uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = k + n$ , chamada ‘somar  $k$ ’. Ela se define por recorrência, a partir dos seguintes dados: (S1)  $k + 1 = s(k)$ , (S2)  $k + s(n) = s(k + n)$ .

Portanto,  $k + 1$  é, por definição, o sucessor de  $k$ . E, se conhecermos  $k + n$ , saberemos o valor de  $k + s(n)$ : por definição, tem-se  $k + s(n) = s(k + n)$ . Isto nos permite conhecer  $k + n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (e todo  $k \in \mathbb{N}$ ). Usando as notações definitivas  $n + 1$  em vez de  $s(n)$  e  $(k + n) + 1$  em vez de  $s(k + n)$ , a igualdade (S2) se escreve assim: (S2')  $k + (n + 1) = (k + n) + 1$ . Assim, as igualdades (S1) e (S2) ou, equivalentemente, (S1) e (S2') definem por recorrência a soma  $k + n$  de dois números naturais quaisquer  $k$  e  $n$ ”. (LIMA, **O princípio da indução**. p. 04)

A multiplicação também é justificada de maneira semelhante à adição. Tomando um natural  $m$  fixo, a multiplicação por  $m$  a todo natural  $n$  implica no produto  $m \cdot n$ . E para demonstrar usaremos os axiomas citados,

“definido por indução da seguinte maneira:

(P1)  $1 \cdot m = m$ .

(P2)  $(n + 1) m = n \cdot m + m$ .

O produto  $n \cdot k$  escreve-se também  $n \cdot k$  e lê-se “ $n$  vezes  $k$ ”. A definição acima diz, portanto, que uma vez  $k$  é igual a  $k$  e  $n + 1$  vezes  $k$  é igual a  $n$  vezes  $k$  mais (uma vez)  $k$ . Assim, por definição,  $2 \cdot k = k + k$ ,  $3 \cdot k = k + k + k$ , etc.” (LIMA, **O princípio da indução**. p. 04)

Temos que  $1 \cdot m = m$  está definido, logo  $m \in \mathbb{N}$ . Agora vamos supor, por hipótese de indução, que é válido para  $n = k$ . Pela hipótese  $m \cdot k \in \mathbb{N}$ , então temos que  $m \cdot (k + 1) = m \cdot k + m$  está definido, o que significa que  $m \cdot (k + 1) \in \mathbb{N}$ .

Os naturais trazem uma ideia de ordenação junto com a adição, ou seja, podemos dizer que, dados os naturais  $m$  e  $n$ ,  $m$  é maior que  $n$ , e denotamos da forma:  $m > n$ , ou que  $n$  é menor que  $m$ :  $n < m$ , significando que existe um  $p \in \mathbb{N}$ , tal que  $m = n + p$ . E também podemos usar a notação  $n \leq m$  para que  $n < m$  ou  $m = n$ .

Com essas definições podemos mostrar um princípio muito importante que é o da boa ordem ou boa ordenação. Observamos que esse princípio é equivalente ao método da indução, pois um implica o outro e vice-versa.

Note que, no desenvolvimento dessa teoria, usamos o princípio da indução para demonstrar o princípio da boa ordenação. Mas, alguns autores usam o sentido contrário, usando a boa ordem para demonstrar a indução, como Gonçalves (2015) que usa esse processo em Introdução à álgebra, além de outros autores.

### 3.2 PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

O Princípio da Boa Ordenação nos diz que todo subconjunto  $A$  contido no conjunto dos Naturais ( $\mathbb{N}$ ) possui um elemento mínimo ou menor elemento, ou seja, um elemento  $n_0 \in A$  tal que  $n_0 \leq n$  para todo  $n \in N$ . Para demonstrar este princípio usaremos uma argumentação de Elon Lages Lima do seu livro de Análise Real volume 1: Funções de uma variável real.

Seja  $\mathbb{I}_n$  o conjunto de todos os naturais menores ou iguais que  $n$ . Se  $1 \in A$  então 1 é o menor elemento de  $A$ , não há o que provar. Mas se  $1 \notin A$ , consideremos o conjunto  $X$  dos naturais  $n$  tal que  $\mathbb{I}_n \subset N - A$ . Como  $\mathbb{I}_1 = \{1\} \subset N - A$ , notaremos que  $1 \in X$ . Por outro lado, como  $A$  não é vazio, deduzimos que  $N \neq X$ . Assim deve existir  $n \in X$  tal que  $n + 1 \notin X$ . Então,  $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset N - A$  mas  $n_0 = n + 1 \in A$ . Portanto  $n_0$  é o menor elemento do conjunto  $A$ .

Vejam um exemplo que podemos aplicar esse princípio que é o chamado Teorema de Arquimedes, que diz: se  $a$  e  $b$  são dois inteiros positivos quaisquer, então existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $n \cdot a \geq b$ .

Para demonstrar esse teorema vamos supor que  $a$  e  $b$  são dois inteiros positivos quaisquer tal que  $n \cdot a < b$  para todo  $n$  inteiro positivo. Assim, o conjunto  $A = \{b - n \cdot a / n \in \mathbb{N}\}$  possui apenas inteiros positivos. Pelo princípio da boa ordenação podemos dizer que o conjunto  $A$  possui um elemento mínimo. Tomando esse elemento mínimo como sendo  $x = b - k \cdot a$ . Também temos que  $x' = b - (k + 1) \cdot a$  pertence ao conjunto  $A$ , pois  $A$  contém todos os inteiros positivos nesse formato. Assim:

$$b - (k + 1) \cdot a = (b - ka) - a < b - ka$$

Daí, concluímos que  $b - k \cdot a$  não é o menor elemento de  $A$ , contradição. Logo, o Teorema de Arquimedes é verdadeiro.

A partir desse princípio também podemos demonstrar vários resultados que envolvam números naturais sem que seja necessário o uso da indução. Inclusive o princípio da indução generalizada ou como chamamos nesse trabalho, princípio da indução completa.

### 3.3 PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

Devido a equivalência dos dois princípios vamos enuncia-lo e demonstrá-lo usando o Princípio da Boa Ordem.

Teorema – Tomemos um conjunto  $P$ , tal que  $P \subset \mathbb{N}$ , dos Naturais, satisfazendo as seguintes condições:

- i.  $1 \in P$
- ii. Para todo natural  $p$ , se  $p \in P$ , então  $p + 1 \in P$ .

Com isso podemos afirmar que  $P$  é o próprio conjunto dos Naturais, ou seja,  $P = \mathbb{N}$ .

Vamos demonstrar isso usando *reductio ad absurdum*. Por absurdo, vamos supor que  $P$  não é o conjunto dos Naturais e seja  $A$  o conjunto de todos os naturais que não pertencem a  $P$ , ou seja:  $A = \{a \in \mathbb{N} \text{ e } a \notin P\}$ .

Assim,  $A$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$ , e usando o Princípio da Boa Ordem, existe um elemento mínimo  $a_0$  de  $A$ . Pelo item i, 1 pertence a  $P$ , de forma que  $a_0 > 1$ , com isso,  $a_0 - 1$  é um natural que não pertence a  $A$ . Concluimos, então, que  $a_0 - 1 \in P$ . Agora pelo item ii, temos que  $(a_0 - 1) + 1 = a_0 \in P$ . Que é um absurdo, pois  $a_0$  pertence a  $A = \mathbb{N} - P$ , ou seja,  $a_0 \notin P$ . Podemos concluir que:  $A = \emptyset$  e  $P = \mathbb{N}$ , ou ainda, de para não contradizermos o Princípio da Boa Ordem, a apenas um subconjunto de  $\mathbb{N}$  se aplica as propriedades i e ii, o próprio  $\mathbb{N}$ .

O conjunto dos números naturais talvez esteja longe de ser considerado simples, mas, com certeza, foi o primeiro conjunto de números que a humanidade utilizou. São os números que usamos para contar e é exatamente esse conjunto primordial, que serve como base para todos os outros conjuntos numéricos. Leopold Kronecker (1823–1891) dizia: ‘God created the natural numbers, and all the rest is the work of man’ (Deus criou os números naturais e todo o resto foi obra do homem). Isso serve como referência a essa base que os números naturais são para o resto da matemática.

Com o intuito de dar uma maior formalização aos números naturais, o matemático Italiano Giuseppe Peano (1858–1932), desenvolveu um conjunto de axiomas para poder construí-los de forma lógica, formalizando assim esse tão primordial conjunto numérico.

### 3.4 MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Os tópicos anteriores serviram como base para nosso método de indução, a chamada indução matemática. Desses tópicos que apresentamos podemos definir esse método da indução ou princípio da indução. Segundo Hefez(2009):

Seja  $P(n)$  uma proposição aberta sobre o conjunto dos naturais. Vamos supor que:

- i.  $P(1)$  é verdadeira;
- ii. Se, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  é verdadeira, então  $P(n+1)$  também verdadeira.

Assim,  $P(n)$  é válido para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

Podemos afirmar que  $P(n)$  é uma assertiva indexada por  $n$  natural, onde  $n$ , número natural, influencia diretamente nossa assertiva. Podemos dizer que uma propriedade  $P(n)$  que atende as assertivas i e ii, sendo um conjunto  $P = \{n; P(n) \text{ é verdadeiro}\} \subset \mathbb{N}$ . Sendo  $P(1)$  verdadeiro, por i, então  $1 \in P$ . Ou seja, vemos que para uma constante inicial 1, a nossa propriedade é válida.

Já por ii, verificamos se a nossa assertiva  $P$  também é aplicável quando o associamos uma variável  $n$  e seu sucessor. Daí, tiramos que  $P$  é que possui todos os sucessores de todos os seus elementos, ou seja,  $P = \mathbb{N}$ .

Vejamos outro exemplo sobre esse tema feito pelo matemático francês Levi Bem Gerson (1288–1344). A afirmação é a seguinte: o quadrado da soma dos naturais maiores que um e menor é igual ao cubo desse número natural somado com o quadrado do somatório de todos os antecessores de  $n$ . Vejamos alguns valores de naturais e tentar conjecturar uma fórmula.

Para apenas 1 número natural, ou seja, o quadrado do número um é igual ao cubo de um somado com o quadrado do seu único antecessor, que é o zero.

$$1^2 = 1 + 0 = 1^3 + (1 - 1)^2 = 1$$

Para dois números naturais, ou seja, o quadrado da soma dos dois primeiros naturais, é igual ao cubo de dois somado com o quadrado da soma dos seus antecessores.

$$(1 + 2)^2 = 2^3 + 1^2 = 2^3 + (2 - 1)^2 = 9$$

Para três números naturais, teremos:

$$(1 + 2 + 3)^2 = 3^3 + (2 + 1)^2 = 3^3 + (3 - 1 + 1)^2 = 36$$

Para quatro números naturais, teremos:

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 4^3 + (3 + 2 + 1)^2 = 4^3 + (4 - 1 + 2 + 1)^2 = 100$$

Note que podemos generalizar usando  $n$  números naturais, obtendo desses exemplos a expressão:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = n^3 + (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1))^2$$

Primeiro vamos verificar se nossa propriedade é válida quando  $n = 1$ :

$$1^2 = 1^3 + (1 - 1)^2$$

$$1 = 1 + 0$$

$$1 = 1$$

Logo é válido para o primeiro quesito da indução. Agora, suponha, por hipótese de indução que  $n = k$  seja verdadeiro, ou seja:

$$(1 + 2 + \dots + k)^2 = k^3 + (1 + 2 + \dots + k - 1)^2$$

Daí vamos verificar se para  $n = k + 1$  também é válido, assim obtemos:

$$(1 + 2 + \dots + k + k + 1)^2 = (k + 1)^3 + (1 + 2 + \dots + k)^2 \text{ (I)}$$

Para nos ajudar usaremos a afirmação

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \text{ (II)}.$$

Afirmação que provaremos depois. Assim, teremos em (I):

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = (k + 1)^3 + (1 + 2 + \dots + k)^2$$

Subtraindo  $(k + 1)^3$  a ambos os membros da igualdade, ficaremos com:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2$$

Logo, se (II) for verdadeiro teremos provado o que queríamos. Vamos, então, demonstrar a afirmação (II). Novamente por indução:

Para  $n = 1$ , teremos:

$$1^3 = 1^2$$

$$1 = 1$$

Supondo, por hipótese de indução que para  $n = k$  seja válido para nossa propriedade (II):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2$$

Concluindo nossa demonstração, verificaremos para  $n = k + 1$ :

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + 1)^2$$

$$(1 + 2 + \dots + k)^2 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + 1)^2$$

$$\left[ \frac{k(k + 1)}{2} \right]^2 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + 1)^2$$

$$\frac{k^2(k + 1)^2}{2^2} + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + 1)^2$$

Colocando, no primeiro membro,  $(k + 1)^2$  em evidência, obtemos:

$$\left[ \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} \right]^2 = (1 + 2 + \dots + k + 1)^2$$

Como  $1 + 2 + \dots + k + 1 = \frac{(k+1+1)(k+1)}{2}$ , teremos:

$$(1 + 2 + \dots + k + 1)^2 = (1 + 2 + \dots + k + 1)^2 \quad \blacksquare$$

Com isso podemos dizer que essa propriedade é válida para todos os números naturais, pois preenche os requisitos da indução matemática. Caso, alguma das igualdades não fosse verdadeira, nossa propriedade não serviria para os naturais. No processo dessa demonstração foi possível conjecturarmos a fórmula usando alguns exemplos, porém em nem todos os casos são possíveis fazer essa observação facilmente.

Lembrando que Levi Bem Gerson não usou indução matemática para demonstrar essa afirmação, apesar de que, na sua época, vários matemáticos já utilizavam esse método para suas provas.

Porém, há casos que algumas propriedades são válidas apenas para um intervalo de naturais, não limitado superiormente, ou seja, a propriedade só é válida a partir de um determinado número natural dado. Por exemplo, quando afirmamos que qualquer número natural é primo ou um produto de números primos. Essa afirmação também pode ser demonstrada por meio da indução. Veremos esse princípio, que também é chamado de Indução Completa, após a indução sobre conjuntos bem ordenados.

### 3.5 INDUÇÃO SOBRE CONJUNTOS BEM ORDENADOS

Outra definição da indução é a baseada em conjuntos bem ordenados e seus elementos. Um conjunto ordenado é um conjunto que possui uma relação de ordem  $x \leq y$ , já um conjunto bem ordenado é aquele que, além de ser ordenado, tem um elemento mínimo. Na verdade, todas as definições anteriores utilizam conjuntos, mas em particular o conjunto dos naturais e os inteiros. O que veremos nessa parte do trabalho é que o método da indução é cabível para qualquer conjunto bem ordenado.

Quando a indução passou a valer para qualquer conjunto bem ordenado, ela tornou-se uma ferramenta para a área computacional. Na computação, um dos passos de um algoritmo está em repetir o próprio algoritmo e um método recursivo encaixa-se muito bem nesse processo. Isso porque no processo recursivo podemos obter um elemento ou uma sequência de elementos infinita a partir de um componente finito, que é a essência da indução. Os princípios desse processo de indução sobre conjuntos ordenados são divididos em três:

- i. A regra básica que garante a existência do elemento inicial do conjunto. Sendo essa regra útil para definir que o conjunto não é vazio e esse elemento inicial será a estrutura para construir o conjunto. Como se fosse a pedra fundamental do conjunto.
- ii. A cláusula de indução é fase a indução em si ou passo indutivo. Ela que estabelecerá de que forma iremos combinar os elementos do conjunto de maneira a encontrar novos elementos. Ela estabelece os artifícios (as operações) que permitem constituir ou originar “novos” objetos, ou seja, municiam as operações (regras) de geração de objetos “mais complexos”, a partir de objetos “mais simples”, explicitando como cada elemento é originado a partir do anterior.
- iii. A cláusula extrema nos traz a garantia que se um elemento pode ser encontrado através da regra básica e a cláusula de indução um número limitado de vezes, então esse elemento está contido no conjunto. Essa regra nos diz que se temos um subconjunto T do conjunto S e se todos os elementos desse subconjunto satisfazem a regra básica e a cláusula de indução, então  $T=S$ .

Essas regras nos dizem quais são os objetos iniciais (por meio das cláusulas básicas) e quais são os procedimentos (as operações) que por interação e reiteração dão lugar a todos os demais objetos.

Esses três passos, nada mais são que o princípio da indução aplicado em conjuntos bem ordenados. Não apenas nos naturais e inteiros. Essa ideia, de usar elementos de um conjunto na construção de outros conjuntos, é usada pelo professor José Othon, da Universidade Federal do Ceará, em uma apostila de educação matemática criada para alunos do curso de licenciatura em Matemática. O que ele fez, na verdade, foi usar essas regras de indução passo a passo, partindo de um conjunto vazio e justificando as operações com conjuntos até chegar às operações com números naturais, mostrando suas propriedades através desses conjuntos. Uma forma de justificar as operações básicas dos naturais e suas propriedades, embora pecasse na formalidade dessa construção.

Os Axiomas de Peano são um exemplo desse raciocínio aplicado para construir os Números Naturais. Vejamos:

(Cláusula básica) O Zero é um número natural;

(Cláusula de Indução) Se  $n$  for um número natural, então o sucessor de  $n$ ,  $n + 1$ , também é um número natural;



(Cláusula Extrema) Os únicos números naturais são aqueles determinados pelas duas cláusulas acima aplicadas um número finito de vezes.

Nessas afirmações temos noções primitivas que é o zero (o único objeto inicial) e de sucessor (única operação geratriz), noções que nos dão uma ideia de tal maneira que zero não seja sucessor de nenhum outro número e exista um e apenas um sucessor de cada elemento.

Vejamos um exemplo de como podemos encontrar os elementos de um conjunto só com essas três cláusulas. Dado um conjunto  $I$  de números inteiros não negativos, onde  $I = \{x / x \geq 0 \text{ e } \exists y[x = 2y]\}$ . Podemos definir esse conjunto usando as cláusulas em questão:

1. (Cláusula básica)  $0 \in I$ ;
2. (Cláusula de Indução) Se  $n \in I$ , então  $(n + 2) \in I$ .
3. (Cláusula Extrema) Um número inteiro é um elemento de  $I$  quando pode ser encontrado usando as cláusulas 1 e 2 um número limitado de vezes.

Essa abordagem, como já dito antes, também é muito usada nas ciências da computação para se criar algoritmos e este fato que torna importante o aprendizado desse raciocínio ainda no ensino médio, já que nossa sociedade está se tornando cada vez mais informatizada e há uma necessidade cada vez maior de se compreender melhor a linguagem computacional.

### 3.6 MÉTODO DA INDUÇÃO COMPLETA

Usando o Princípio da Boa Ordenação para mostrar que se um conjunto indutivo  $P$  contém o número  $a$ , então  $P$  contém todos os números naturais maiores do que  $a$ . Vamos analisar cada parte dessa afirmação.

Primeiramente, um conjunto indutivo é um conjunto que podemos obter usando um conjunto de regras básicas, todos os elementos a partir de um elemento inicial. Em seguida, afirmamos que nesse conjunto não precisa, necessariamente, ter como elemento inicial o um ou o zero. Mesmo que seja um subconjunto, de elemento inicial  $a$ , desse conjunto indutivo, as regras da indução ainda serão válidas.

A demonstração desta proposição se faz por absurdo, normalmente usada quando se aplica a Boa Ordenação. Supondo então que existam números naturais, maiores do que  $a$ , que não estão no conjunto indutivo  $P$ . Seja  $b$  o menor desses números. Como  $b > a$ , usando as

definições apresentadas, podemos escrever  $b = c + 1$ , onde, pela definição de  $b$ , tem-se necessariamente  $c \in P$ . Mas, como  $P$  é indutivo, isto obriga que  $b = c + 1 \in P$ , absurdo.

A hipótese que acabamos de mostrar pode ser escrita da seguinte maneira:

Seja  $P(n)$  uma sentença aberta sobre os números naturais, tal que:

- i.  $P(a)$  é verdadeiro, e que,
- ii. Qualquer  $n$ ,  $P(a)$  e  $P(a + 1)$  e ... e  $P(n)$ , teremos  $P(n+1)$  é verdadeiro.

Então,  $P(n)$  é verdadeiro para todo  $n \geq a$ .

Vejamos a demonstração desse princípio apresentado por Hefez (2013).

Considere o conjunto  $V = \{n \in \mathbb{N}; P(n)\}$ , onde  $V$  é conjunto dos naturais cuja propriedade  $P(n)$  é válida. Agora consideremos o conjunto  $V' = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\}$ . Como pela condição *i*, temos que  $a + 0 = a \in V$ , então,  $0 \in V'$ . Ainda se  $m \in V'$ , então  $a + m \in V$  e, por *ii*, temos que  $a + m + 1 \in V$ ; logo  $m + 1 \in V'$ . Assim, pelo Axioma da Indução, temos que  $V' = \mathbb{N}$ . Concluimos que  $\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V$ , provando o que queríamos.

Vejamos um exemplo desta forma do princípio da indução. Demonstraremos agora um teorema clássico da aritmética, que é o Teorema Fundamental da Aritmética. Ele nos diz que todo número natural maior que um pode ser escrito, de modo único, como um produto de números primos. Vamos enunciar esse teorema de maneira mais precisa **formal**.

Todo número natural  $n$  maior que um pode ser escrito, de uma única forma, como um produto do tipo:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m, \text{ com } m \geq 1, \text{ com } m \in \mathbb{N}, \text{ e os } p_i \text{ são números primos, com } 1 \leq i \leq m.$$

De início vamos definir o que é o número primo. Segundo Hefez (2013) número primo é “um número natural que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio”. Sendo um número natural maior que um que não é primo é chamado de composto.

Para demonstrarmos esse teorema vamos usar a forma de indução em questão. Para cada  $n$  natural maior ou igual a 2, tomaremos a proposição  $p(n)$ :  $n$  é escrito na forma de um produto de números primos. Como é fácil verificar para os números menores que 10 vamos fazer a partir do  $p(10)$  para mostrarmos que no nosso método podemos escolher qualquer subconjunto dos naturais, bastando escolher um elemento mínimo desse subconjunto. Podemos escrever:  $10 = 2 \cdot 5$ , como 2 é primo e 5 também fica provada para  $p(10)$ .

Agora, por hipótese de indução, tomaremos  $p(k)$  como verdade para todo natural  $k$  maior ou igual a 2 e menor ou igual que  $n$ . Teremos que provar que  $p(k+1)$  também é verdade.

Vamos demonstrar em dois passos:

- i. Se  $k+1$  for um número primo, então  $p(k+1)$  é verdade não há o que mostrar.
- ii. Se  $k+1$  for um número composto, então existem  $a$  e  $b$  naturais, com  $2 \leq a \leq k$  e  $2 \leq b \leq k$ , tais que  $k+1 = a \cdot b$ . Usando nossa hipótese, temos que existem os naturais  $a$  e  $b$ , tais que  $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_s$  e  $b = b_1 \cdot \dots \cdot b_r$ , com os  $a_i$  e  $b_i$  primos. Assim,  $k+1 = a_1 \cdot \dots \cdot a_s \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_r$ . Comprovando que  $k+1$  também é escrito por um produto de números primos.

Para finalizar, vamos mostrar a unicidade dessa escrita. Para demonstrar essa unicidade temos que usar a proposição que diz: se  $p, p_1, \dots, p_n$  são números primos e, se  $p$  divide  $p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ , então  $p = p_i$  para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ . Essa proposição pode ser demonstrada usando indução sobre  $n$  usando o lema de Euclides, que diz: dados  $a, b$  e  $p \in \mathbb{Z}$ , com  $p$  primo. Se  $p|ab$ , então  $p|a$  ou  $p|b$ .

Voltando a unicidade, vamos supor que temos  $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ , onde os  $p_i$  e  $q_j$  são números primos. Pela proposição apresentada, como  $p_1|q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ , temos que  $p_i = q_j$  para algum  $j$ , pois, quando reordenamos  $q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ , podemos supor que seja  $q_1$ . Assim,  $p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ . Como  $p_1 \cdot \dots \cdot p_r < n$ , teremos que  $r = s$  e os  $p_i$  e  $q_j$  são iguais dois a dois.

Esse tipo de demonstração com a indução completa é aplicável quando um determinado subconjunto dos naturais com um menor elemento qualquer  $a$  possui uma certa propriedade. Tanto o menor elemento  $a$  possui essa propriedade como todos os seus sucessores.

Mas é esse raciocínio que a indução determina como se fosse um conjunto de dominós colocados numa sequência (formação), de um jeito que a queda do primeiro dominó força a queda do segundo, que força a queda do terceiro, e assim por diante, até todos os dominós caírem.

Na indução, ao invés de serem dominós, temos uma sequência de afirmações  $P(1)$ ,  $P(2)$ , ...,  $P(n)$  ..., e temos que provar as duas etapas:

- i. A primeira afirmação  $P(1)$  é verdadeira;

- ii. Sempre que uma afirmação for verdade a imediatamente seguinte também tem que ser verdadeira.

Dessa maneira, concluímos que todas as afirmações  $P(1)$ ,  $P(2)$ , ... ,  $P(n)$ , ... são verdadeiras. Um pensamento simples de se compreender, por isso vemos como um raciocínio acessível aos alunos do ensino médio.

## 4 EXEMPLOS DE INDUÇÃO EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO

Note que todos os exemplos citados são bem interessantes do ponto de vista de uma Matemática do ensino superior. Na sequência, iremos dar exemplos de aplicações da indução em conteúdos do ensino médio para melhor embasar nosso argumento de que é possível apresentar tal conteúdo para esse currículo dos adolescentes.

Começaremos com exemplos simples e que a maioria dos livros e textos que falam de indução apresentam, mas posteriormente tentaremos trazer algo pouco usual, porém sempre aplicado no ensino médio.

### 4.1 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA.

Uma progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o seu antecessor somado a uma constante  $r$ , que chamamos de razão. Assim, temos uma P.A.  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , sendo a soma dos seus termos  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ .

Para ensinar essa fórmula, os professores de Matemática usualmente contam a história de Friederich Gauss, que, quando era jovem, surpreendeu seu professor mostrando que a soma dos termos equidistantes é igual à soma dos termos extremos, obtendo um total de somas que é metade dos números de termos da progressão.

Essa história é muito útil para a didática da aula, mas como demonstração matemática não é válida. Podemos usá-la para conjecturar a nossa fórmula e, a partir daí, aplicar a indução sobre  $n$  para podermos comprovar sua veracidade.

Vejamos o raciocínio do Gauss para tentarmos conjecturar essa fórmula. A história diz que o professor passou uma atividade pedindo que os alunos somassem todos os números de 1 a 100. Daí, em poucos minutos o prodígio Gauss trouxe a resposta: 5050. Curioso, o professor pediu que ele explicasse seu raciocínio. E Gauss o fez:

Temos a soma:  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$ ;

Note que se agruparmos os equidistantes teremos:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51).$$

Com todas as somas dando 101. Como agrupamos de dois em dois números, de um total de 100 números, teremos 50 somas, ou seja, metade do total de números. Então, basta resolvermos a multiplicação  $50 \times 101 = 5050$ .

O que Gauss fez, foi usar uma propriedade das progressões aritméticas, que diz: a soma dos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Com isso, podemos

conjecturar nossa fórmula. Temos então que  $50 \times 101 = \frac{100}{2} \times (1 + 100)$ . Isso nada mais é que o pensamento usado por Gauss transformado em uma expressão numérica.

Assim, podemos afirmar que 100 é o número de termos da progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo 1 e o último termo é o próprio 100. Na nomenclatura das PAs, chamamos o primeiro termo de  $a_1$  e em uma PA com  $n$  termos o último termo chamamos de  $a_n$ . Com isso, observando a expressão que desenvolveu Gauss, para encontrar o resultado podemos escrever a fórmula da soma  $S_n$  dos termos de uma PA com  $n$  termos da forma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Levantada a conjectura, vamos verificar sua veracidade usando a indução, primeiro observando se é verdade para  $n=1$ . Fica claro que  $S_1$  é o próprio  $a_1$  pois só temos esse elemento. Então, tomamos como verdadeiro para  $n=k$  e teremos:

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2}$$

Vamos verificar se para  $n=k+1$  é verdadeiro, ou seja, se a assertiva seguinte é válida:

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_{k+1}) \cdot (k + 1)}{2}$$

Sendo que podemos escrever  $S_{k+1}$  da seguinte forma:

$$S_{k+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}_{S_k} + a_{k+1}$$

Usando nossa hipótese de indução, que  $S_k$  é verdadeiro, vamos substituí-lo na expressão anterior, ficando:

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} + a_{k+1}$$

Sendo  $a_{n+1} = a_n + r$ , pela definição de progressão aritmética, teremos:

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} + a_k + r$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot k + a_k \cdot k}{2} + a_k + r$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot k + a_k \cdot k + 2a_k + 2r}{2}$$

Organizando de uma maneira que nos interessa teremos:

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot k + a_k \cdot k + a_k + a_k + 2r}{2}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot k + a_k \cdot k + a_1 + (k-1)r + a_k + 2r}{2}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot k + a_k \cdot k + a_1 + kr - r + a_k + 2r}{2}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot k + a_1 + a_k \cdot k + a_k + kr + r}{2}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1 \cdot (k+1) + a_k \cdot (k+1) + r \cdot (k+1)}{2}$$

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_k + r) \cdot (k+1)}{2}$$

Por fim teremos:

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_{k+1}) \cdot (k+1)}{2}$$

Como queríamos demonstrar, essa propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Assim temos uma veracidade matemática para essa fórmula tão usada na sala de aula. Podemos, assim, ver claramente como funciona o processo de conjectura e o raciocínio indutivo. Vendo como usamos a hipótese de indução para chegar ao próximo evento, que era o que queríamos demonstrar. E isso é a essência da indução, uma etapa que tem reflexo na seguinte.

#### 4.2 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA FINITA

Uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é o produto do seu antecessor com uma constante  $q$  chamada razão. Com isso, vamos determinar que sequência  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  tem a soma dos seus termos como sendo  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ .

Vamos raciocinar para chegarmos a nossa conjectura. Senão, vejamos:

Com 1 termo:

$$S_1 = a_1 = \frac{a_1(q^1 - 1)}{(q - 1)}$$

Com 2 termos:

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1q = a_1(q + 1) = \frac{a_1(q^2 - 1)}{(q - 1)}$$

Com 3 termos:

$$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = a_1(1 + q + q^2) = \frac{a_1(q^3 - 1)}{(q - 1)}$$

Usando o padrão que surgiu nesses três exemplos podemos conjecturar nossa fórmula, usando com  $n$  termos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Essa expressão é facilmente encontrada em vários livros do ensino médio, mas vamos mostrar usando a indução. Para isso vamos seguir os passos já conhecidos sobre  $n$ :

Primeiro verificando para  $n=1$ :

$$S_1 = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = a_1$$

Logo é verdadeiro para  $n=1$ . Seguindo com o nosso método, tomando como verdadeiro para  $n=k$ , teremos:

$$S_k = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{a_k \cdot q - a_1}{q - 1}$$

Para nossa assertiva ser verdadeira temos que mostrar que vale para  $n=k+1$ . Daí, teremos:

$$S_{k+1} = \frac{a_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1}$$

E podemos escrever:

$$S_{k+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}_{S_k} + a_{k+1}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} + a_{k+1}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_k q - a_1 + (q - 1) \cdot a_k q}{q - 1}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_k q - a_1 + a_k q^2 - a_k q}{q - 1}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_k q^2 - a_1}{q - 1}$$

$$S_{k+1} = \frac{a_{k+1} q - a_1}{q - 1}$$

Logo, é verdade para  $n=k+1$ , e nossa fórmula é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Com isso, fechamos mais um caso de indução em conteúdo do ensino médio. Lembrando que existe uma demonstração direta que mostra essa fórmula e que é, muitas vezes, mais viável para alunos do ensino médio. Porém, é importante termos outras opções.



Vejam no caso a seguir um caso também interessante que é o número de diagonais de um polígono.

### 4.3 NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO CONVÊXO

Nesse exemplo, temos a oportunidade de mostrar uma maneira boa de visualizar o conceito de indução para o melhor entendimento do aluno do ensino médio, pois podemos usar uma tabela e mostrar o efeito dominó da propriedade sobre os naturais.

Primeiro vamos explicitar a definição de diagonal de um polígono. Segundo Vasconcelos (2006), “diagonais de um polígono são definidas como sendo os segmentos de retas que une dois vértices não adjacentes deste polígono”. Sendo que, em vários livros de ensino médio e fundamental apresentam uma forma interessante de mostrar isso. O raciocínio é: tomamos o número de lados e multiplicamos pelo total de diagonais que saem de cada vértice. Mas, quando observamos esse produto e comparamos com a figura do polígono com suas diagonais expressas, vemos que o total de diagonais é a metade do valor desse produto. Pois, nesse processo, acabamos por contar cada diagonal duas vezes, pois as diagonais AC e CA são as mesmas.

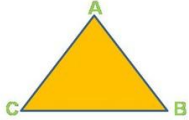
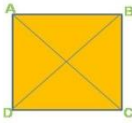

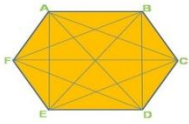
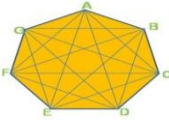
Usando esse raciocínio podemos desenvolver uma tabela para organizar nosso pensamento, com isso podemos entender melhor o que a sequência de eventos nos mostra. Esse tipo de prática em sala de aulas pode trazer ao aluno um avanço considerável no raciocínio matemático. O aluno pode vivenciar como se faz a matemática, observando vários casos e notando os padrões que venham a surgir. Sendo o próximo passo a conjectura, que é o salto abstrato que é uma característica da matemática.

Usaremos o quadro seguinte, que está dividido da seguinte forma: nas linhas temos o número de lados que cada polígono possui, além do desenho do polígono ao lado, e nas colunas temos, na primeira, o número de vértices, na segunda, o número de diagonais que saem de cada vértice e na última o total de diagonais. Esse total de diagonais é obtido pelo resultado do produto das duas colunas anteriores dividido por dois, pois não podemos contar a mesma diagonal mais de uma vez.

É importante que o aluno entenda que fica muito trabalhoso fazer todos os exemplos de polígonos, pois temos infinitos tipos de polígonos. Esse processo de conjectura acaba tornando-se o único meio de verificarmos nossa assertiva, pois é impossível mostrarmos todos os infinitos exemplos de polígonos.

Agora vejamos o quadro e vamos buscar entender esse padrão.

Quadro 1 – Número de diagonais de um polígono

Número de lados/figura		Números de vértices	Diagonais por vértice	Número de diagonais
3		3	$3-3=0$	$\frac{3 \cdot 0}{2} = 0$
4		4	$4-3=1$	$\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$
5		5	$5-3=2$	$\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$
6		6	$6-3=3$	$\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$
7		7	$7-3=4$	$\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$
...	...	...	...	...
$n$		$n$	$n-3$	$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

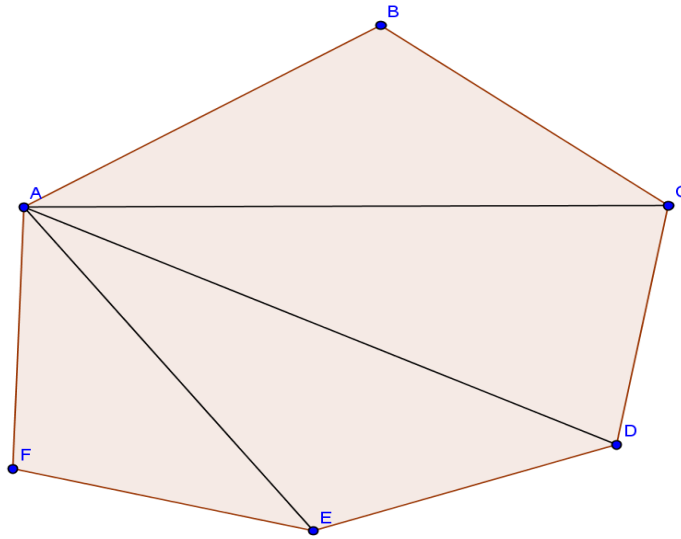
Fonte: Elaboração própria

Podemos então esclarecer ao aluno que não é possível observar todos os exemplos, pois o valor de  $n$  pode variar infinitamente e que os resultados que obtemos com a observação não são suficientes para os conceitos científicos. Quem nos garante que um valor além desses que mostramos também está correto? Levando, assim, o aluno ao próximo nível de abstração, que é a demonstração matemática.

A indução encaixa muito bem com esse exemplo, pois nos mostra que seguindo o ritmo de observações para  $n$  lados e verificando para  $n+1$  lados também, irá valer para qualquer número, que é natural, de lados. Chamaremos de  $d$  o total de diagonais de um polígono, obtendo a expressão  $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ .

Antes da indução em si, vamos apresentar um raciocínio utilizado por Vasconcelos (2006) para deduzir a fórmula que torna a indução mais viável. Usando um hexágono, vamos observar, um por um, seus vértices. Vejamos o hexágono ABCDEF e as diagonais do vértice A.

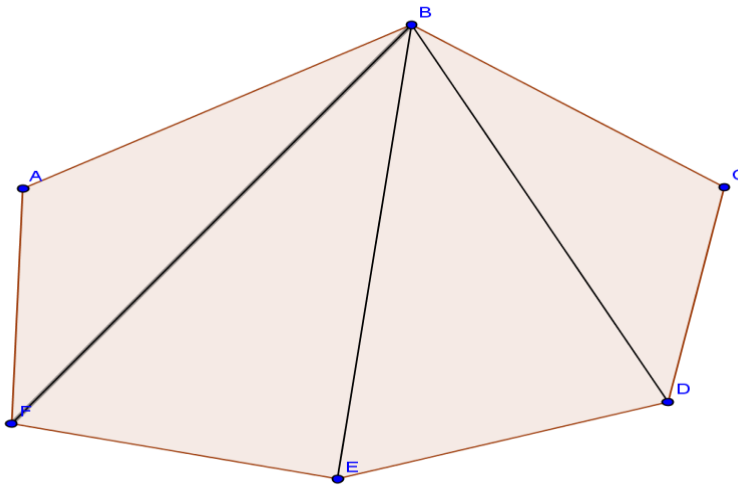
Figura 4 – Hexágono ABCDEF



Fonte: Elaboração própria

No vértice A saem três diagonais, que são AC, AD e AE. Nesse caso, não podemos ligar A aos vértices B e F, pois esses segmentos já são lados do hexágono. Então são três vértices a menos fazendo um total de  $(6 - 3)$  diagonais.

Figura 5 - Hexágono ABCDEF

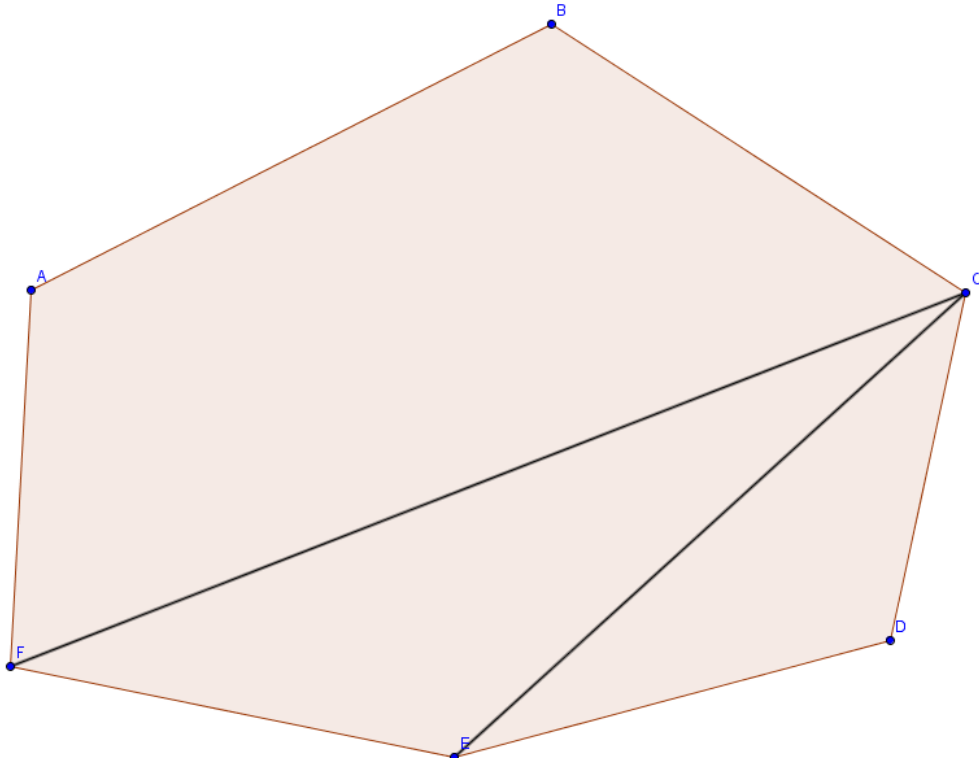


Fonte: Elaboração própria

No vértice B também tem três vértices saindo dele BF, BE e BD. Novamente seus vértices consecutivos ficam de fora pelo mesmo motivo e totalizando  $(6 - 3)$  diagonais.

Figura 6 – Hexágono ABCDEF

(7.91, 8.94)

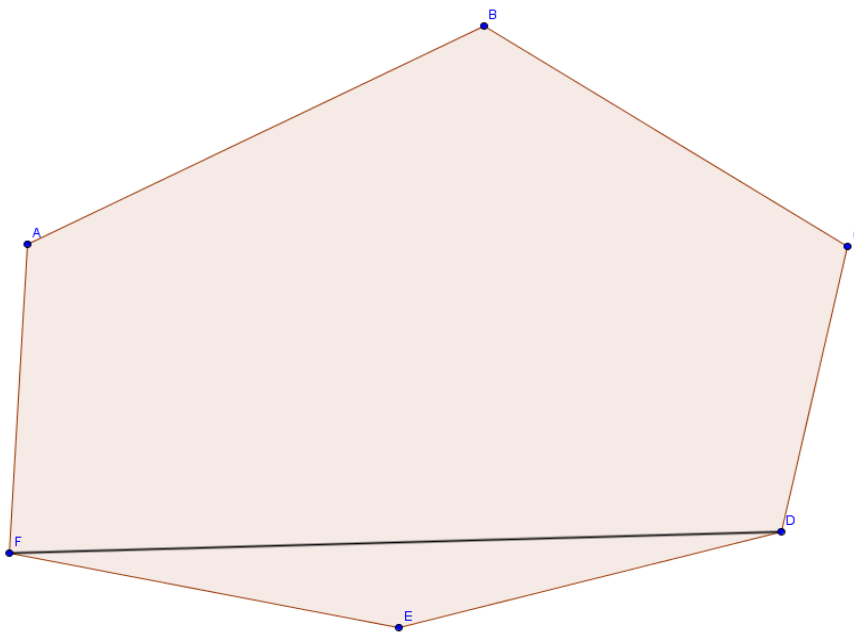


Fonte: Elaboração própria.

Note que já no vértice C temos apenas duas diagonais, CF e CE. Nesse caso não contamos com a diagonal CA, pois é a mesma AC. Com isso, temos quatro vértices a menos para formar diagonais com C. Ficando assim  $(6-4)$  diagonais.

Figura 7 – Hexágono ABCDEF

(7.91, 8.94)



Fonte: Elaboração própria

Agora no vértice D teremos apenas uma diagonal DF. Note que as diagonais DA e DB são as mesmas que AD e DB, respectivamente. Nesse caso serão cinco vértices a menos para ligar com D, ficando (6-5) diagonais.

Por fim, não existe mais nenhuma diagonal a se mostrar, pois recorreremos no erro de contá-las duas vezes. Com isso, o total de diagonais será a soma de diagonais de cada vértice:

$$3 + 3 + 2 + 1 = 9$$

Se observarmos com atenção o processo utilizado no hexágono, podemos dizer que contamos o número de diagonais que saem do cada vértice. Nos dois primeiros vértices o número de diagonais é igual, o total de vértices menos três, que são exatamente o próprio vértice em questão e os dois vértices adjacentes. A partir do terceiro vértice sempre diminui um vértice para não haver repetição dos segmentos, pois o segmento AC é o mesmo CA. No quarto diminui mais um vértice e assim por diante. Vamos verificar com outro polígono. Se usarmos o esse mesmo raciocínio com o octógono, obteremos a seguinte soma:

$$(8 - 3) + (8 - 3) + (8 - 4) + (8 - 5) + (8 - 6) + (8 - 7) = 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 20$$

Vejam com a fórmula apresentada na tabela 1:

$$d = \frac{(8 - 3) \cdot 8}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Logo, também é verdade para um octógono. Podemos dar inúmeros exemplos e verificarmos os resultados, mas, por mais que déssemos mil exemplos, teríamos ainda infinitos tipos de polígonos para mostrar. Daí, podemos adaptar esse raciocínio para nossa prova matemática em questão, a indução.

Vamos usar uma fórmula geral para esse pensamento, tomando, novamente,  $d$  como sendo o número de diagonais e  $n$  o número de lados.

$$d = (n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Está aí nosso raciocínio transformado em fórmula e temos então que provar com nosso método em questão. Para usar indução nesse caso fica mais simples que usando a fórmula apresentada na nossa tabela 1. Senão vejamos:

Primeiro verificando para  $n = 3$ . Teremos:

$$d = 3 - 3 = 0$$

Como o triângulo não possui diagonais, para esse caso temos que é verdadeiro. Assim, tomaremos como verdade para  $n=k$  e usaremos a conjectura usada com a soma de diagonais de cada vértice e obtermos:

$$d = (k - 3) + (k - 3) + (k - 4) + (k - 5) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Desenvolvendo essa expressão:

$$d = (k - 3) + (k - 3) + (k - 4) + (k - 5) + \dots + [k - (k - 3)] + [k - (k - 2)] + \\ + [k - (k - 1)]$$

Reorganizando essa soma teremos:

$$d = k + k + k + \dots + k - 3 - 3 - 4 - 5 - \dots - (k - 2) - (k - 1)$$

Como temos um total de  $(k-2)$  kás e podemos escrever  $-3 = -1 -2$  teremos a expressão:

$$d = k \cdot (k - 2) - [1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1)]$$

Podemos, ainda, escrever que  $1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) = \frac{k(k+1)}{2} - k$ .

Substituindo em  $d$ :

$$d = k(k - 2) + \frac{k(k + 1)}{2} - k$$

Desenvolvendo essa expressão teremos:

$$d = \frac{k^2 - 3k}{2} = \frac{(k - 3)k}{2}$$

Logo, vimos que o resultado foi o mesmo da fórmula da nossa tabela. E esse desenvolvimento nos ajudará na solução da nossa indução.

Com isso vamos verificar para  $n = k+1$ :

$$d = (k + 1 - 3) + (k + 1 - 3) + (k + 1 - 4) + (k + 1 - 5) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$d = (k - 2) + (k - 2) + (k - 3) + (k - 4) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Temos, por hipótese de indução que:

$$(k - 3) + (k - 3) + (k - 4) + (k - 5) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{(k - 3)k}{2}$$

$$\frac{(k - 3)k}{2} - (k - 3) = (k - 3) + (k - 4) + (k - 5) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Com isso podemos substituir em  $d$  que obteremos:

$$d = (k - 2) + (k - 2) + \frac{(k - 3)k}{2} - (k - 3)$$

Desenvolvendo, teremos:

$$d = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k + 1)(k - 2)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 1 - 3)}{2}$$

Logo, encontramos o que queríamos, ou seja, é verdadeiro para  $n=k+1$ , sendo válido para qualquer  $n$  natural. Nesse caso foi possível usarmos exemplos para encontrarmos nossa fórmula, isto é, nosso objetivo a ser provado.

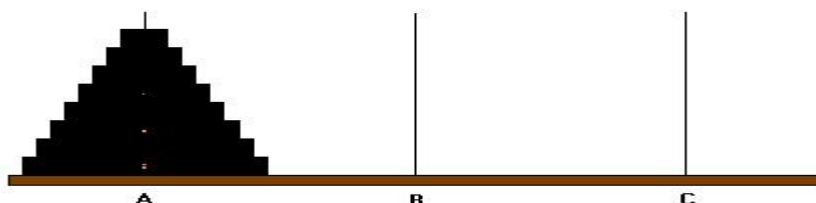
#### 4.4 A TORRE DE HANÓI

Um dos artifícios que vários professores usam para chamar a atenção dos alunos nas suas aulas, é aplicação de jogos que possam trazer um momento de diversão para os discentes e ao mesmo tempo um desenvolvimento cognitivo, as chamadas aplicações lúdicas do conhecimento. Então, segue agora um jogo muito conhecido no mundo e de fácil fabricação com uma forma de aplicação lúdica do princípio da indução finita. A chamada torre de Hanói.

A Torre de Hanói é um jogo inventado pelo matemático Francês Edouard Lucas (1842 – 1891) que o publicou em 1883 usando um pseudônimo Professor N. Claus, que é um anagrama do seu nome. Outro fato que pode chamar a atenção dos alunos é que Edouard criou toda uma história para ilustrar sua ideia, dando para o jogo ares de uma lenda oriental.

O jogo é bem simples, é feito de  $n$  discos de diâmetros diferentes com um furo no centro. Há uma base com três hastes na qual os discos serão postos um sobre os outros. O jogo é bem elementar, os discos estão sobre uma das hastes de forma que nenhum disco esteja sobre outro de diâmetro menor. Note na figura seguinte:

Figura 8 – Torre de Hanói



Fonte: Internet

A regra é bem simples, devemos passar a pilha de disco da primeira haste para a última, transferindo um disco de cada vez, desde que seja respeitada a regra de que nenhum disco esteja por cima de um de raio menor.

Mas, o que queremos aqui é relacionar esse jogo com a indução matemática. Para isso, perguntamo-nos se isso é possível, fazer esse transporte de disco para  $n$  natural? E se for possível qual seria o menor número de movimentos possíveis com esses  $n$  discos? Para responder essas perguntas usaremos a indução.

Vejam a primeira pergunta. Seja  $P(n)$  o jogo que com  $n$  discos seja possível solucioná-lo. Sendo  $A$  o conjunto de naturais no qual seja possível o nosso jogo  $P(n)$ . Primeiro para  $n=1$ , isso claramente é possível, logo é verdade para  $P(1)$ . Tomando como verdade para  $n=k$ , ou seja,  $P(k)$ , vamos verificar para  $n=k+1$ .

Para mostrar para  $P(k+1)$  temos que fazer a solução para  $P(k)$ , ou seja, resolvendo o problema para os  $k$  discos superiores da pilha de discos. Levando todos eles para uma das hastes que estão vazias. O que é possível, pois é nossa hipótese de indução. Após isso, vamos levar o disco que restou na pilha inicial, que é o maior disco, para a outra haste vazia. Logo, solucionaremos novamente para os  $k$  discos que estão juntos, levando-os para a haste que está o disco maior. Assim, sendo para  $P(k+1)$  também tem solução e, com isso, nosso problema tem solução para todo  $n$  natural ou, ainda,  $A = N$ .

Já o segundo questionamento, o número mínimo de movimentos para solucionar o jogo com  $n$  peças, temos que fazer uma contagem de alguns valores para  $n$  e conjecturar uma fórmula, usando o princípio da indução, novamente, para comprová-la. Para nos ajudar nesse processo, analisaremos os movimentos do jogo, usaremos uma tabela que relaciona o total de discos de 1 a 6 e os movimentos mínimos para solucionar cada um.

Quadro 2 – Análise de movimentos em relação ao número de peças

Quantidades de discos	Quantidade de movimentos de cada peça						Total de movimentos
	Peça 1	Peça 2	Peça 3	Peça 4	Peça 5	Peça 6	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	$3 = 2 \times 1 + 1$
3	4	2	1	0	0	0	$7 = 2 \times 3 + 1$
4	8	4	2	1	0	0	$15 = 2 \times 7 + 1$
5	16	8	4	2	1	0	$31 = 2 \times 15 + 1$
6	32	16	8	4	2	1	$63 = 2 \times 31 + 1$

Fonte: Artigo Alexandre Costa

Chamando o total de movimentos de  $n$  peças de  $M_n$ , podemos observar que  $M_{n+1} = 2M_n + 1$ , com  $M_1 = 1$ . Temos assim uma recorrência de 1ª ordem que tem como solução a expressão  $M_n = 2^n - 1$ . Assim, temos nossa conjectura e vamos agora mostrar que essa é válida para todo  $n$  natural.

Por indução, verificando se nossa afirmação é válida para  $n = 1$ :

$$M_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

E como vimos anteriormente,  $M_1 = 1$ , então é verdadeiro para essa etapa. Seguindo nossa prova, por hipótese de indução, tomaremos como verdade para  $n = k$ . Obtendo que:

$$M_k = 2^k - 1$$



Agora veremos se para  $n = k + 1$  é verdade. Têm-se que,

$$M_{k+1} = 2M_k + 1$$

Substituindo  $M_k$  na expressão anterior, teremos:

$$M_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1$$

$$M_{k+1} = 2 * 2^k - 2 + 1$$

$$M_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

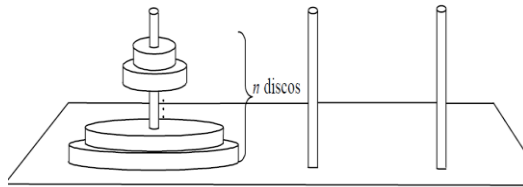
Logo, está provado para  $n=k+1$ , valendo para todo valor de  $n \in N$ .

Podemos mostrar essa solução de outra maneira, mostrando um raciocínio que é a essência do processo indutivo, o chamado efeito dominó da indução. Usando a fórmula que deduzimos na tabela (hipótese de indução) e dela chegando no valor do sucessor desse evento.

Vejamos:

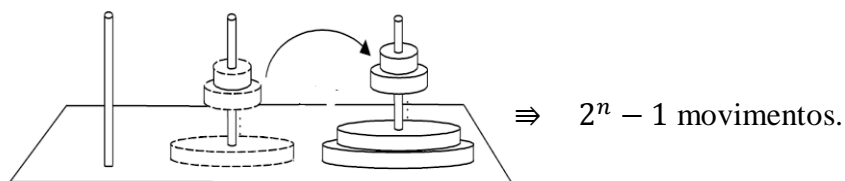
Para o jogo com um disco já foi demonstrado, então, para transportarmos  $n$  discos, precisamos de  $2^n - 1$  movimentos. Então precisamos mostrar para  $n+1$  discos. Vejamos nas figuras abaixo o processo.

Figura 9 – Torre de Hanói



Fonte: Elaboração própria

Figura 10 – Torre de Hanói

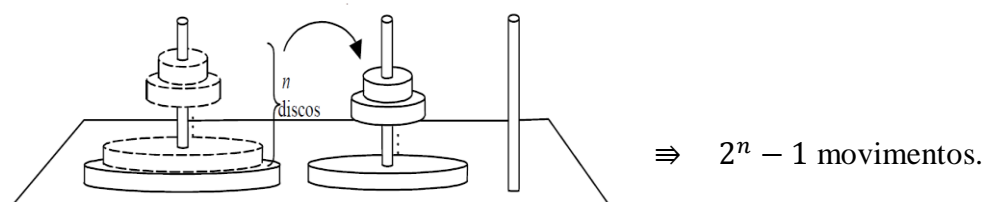


Fonte: Elaboração Própria

Agora se adicionarmos mais um disco, para termos que fazer mais movimentos:

Primeiro transportar os  $n$  discos para a segunda haste.

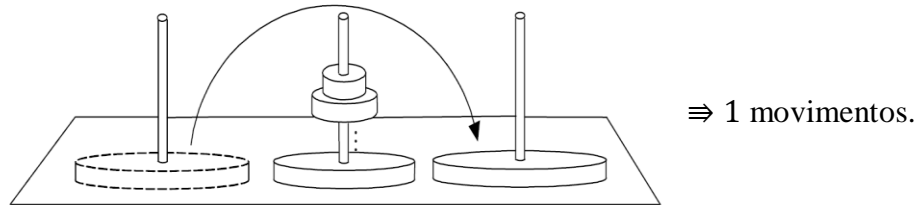
Figura 11 – Torre de Hanói



Fonte: Elaboração própria

Agora, transportaremos o último disco para a terceira haste.

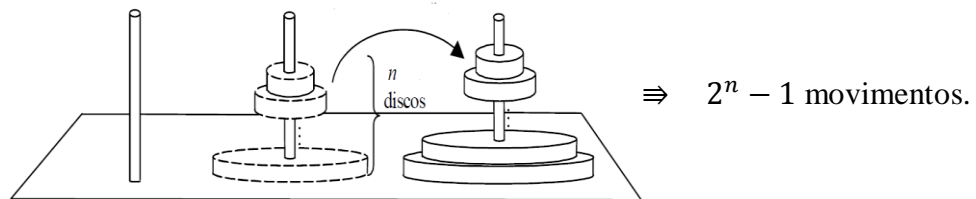
Figura 12 – Torre de Hanói



Fonte: Elaboração própria

E por fim, vamos transportar novamente os  $n$  discos, agora para a terceira haste.

Figura 13 – Torre de Hanói



Fonte: Elaboração própria

Se somarmos as três etapas, teremos:

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Logo, temos que a nossa assertiva, por indução, é válida para todo  $n$  natural. Esse processo apresentado mostra como o método indutivo é na sua essência. Uma etapa é obtida da sua anterior, fazendo um efeito dominó, no qual uma etapa define a seguinte. Em termos numéricos, uma propriedade de um elemento afeta o seu sucessor e esse é um ótimo exemplo para se mostrar na sala de aula de maneira bem didática para os alunos.

#### 4.5 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Muitos acreditam que a Idade Média foi uma era de total infertilidade da cultura e das ciências, mas isso não é de todo verdade. Nesse período, surgiu um dos mais conhecidos e brilhantes matemáticos da nossa história, Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci que em italiano significa filho de Bonaccio. Ele viveu entre 1175 e 1250, nasceu em Pisa, mas viveu por muito tempo na Argélia, pois seu pai era um diplomata italiano.

Lá, ele teve contato com um novo tipo de representação numérica que eram os algarismos hindu-arábicos. Nesse período, na Europa ocidental, eram usados os algarismos

romanos e Fibonacci trouxe, nos seus escritos do *Liber Abaci* (Livro dos Cálculos), para o continente Europeu essa novidade que dominava a matemática do mundo árabe.

Segundo Burton (2011), apesar de Fibonacci ter abordado vários temas em seus inúmeros trabalhos, ele é mais conhecido pela famosa sequência de Fibonacci, que, aliás, só foi dado seu nome a essa sequência no século XIX pelo matemático Edouard Lucas, o criador da torre de Hanói, que em um dos seus escritos citou uma passagem do Livro de Cálculos de Fibonacci e mencionava o seguinte problema: “Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.” Daí, então essa sequência ficou conhecida como Sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é definida da forma: Dado  $F_n$  o  $n$ ésimo termo da sequência onde  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , com  $F_1 = F_2 = 1$  e  $n \geq 3$ . Podemos dizer de maneira mais informal que nada mais é que uma série de números e, para encontrarmos cada número da sequência, devemos adicionar os dois termos anteriores a ele. Dessa forma, obtemos uma recorrência de 2ª ordem. Assim, aplicando a fórmula, obtemos a sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Essa sequência possui várias aplicações na Matemática e também é muito observável na natureza. Tais como o número de ouro que é formado pela razão dos termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Quanto mais para o infinito a sequência segue, mais a razão aproxima-se do número de ouro, que é denotado pela letra grega  $\phi$  ( $\Phi$ ). Esse número foi associado, por muitos artistas renascentistas, como a razão que dava harmonia, por isso, muitas obras desse período tem esse padrão numérico.

Além desse aspecto artístico, a sequência de Fibonacci tem propriedades matemáticas especiais e curiosas. Dentre várias citaremos uma delas para aplicarmos o método da indução. Aplicável em um conteúdo do ensino médio que são as matrizes.

Os matemáticos observaram um padrão interessante com a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . As potências dessa matriz revelaram um padrão relacionado com essa sequência em questão, vejamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \times \begin{bmatrix} 2+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que estão surgindo números da sequência de Fibonacci.  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$ ,  $F_5 = 5$  e  $F_6 = 8$ . Se substituirmos nos exemplos dados, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{bmatrix}$$

Podemos notar, pelos exemplos, um padrão no resultados dessas potências. Substituindo, para generalizar, a potência por  $n$ , teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Essa propriedade diz que podemos encontrar os termos da sequência de Fibonacci utilizando uma matriz quando elevada a  $n$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Usaremos indução para mostrar essa conjectura que acabamos de observar sobre essa sequência.

Para começarmos vamos testar para  $n = 1$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

Logo, é verdade para  $n = 1$ . Agora, por hipótese de indução, vamos assumir que é verdade para  $n = k$  e verificar se vale a propriedade para  $n = k + 1$ . Senão, vejamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

Multiplicando os dois lados por  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}$$

Como, pela definição da sequência,  $F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$ ,  $F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$ , teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

Comprovando que também é válido para  $n = k+1$ , logo é válido para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Vimos, assim, que podemos observar, através de exemplos, o padrão e mostrar, através da indução, que esse padrão é válido para todos os naturais.

#### 4.6 O TRIÂNGULO DE PASCAL

Blaise Pascal (1623 -1662) é um matemático Francês que não necessita de muitas apresentações, pois é um dos mais reconhecidos matemáticos da história. Pascal contribuiu com seus estudos para várias áreas da matemática. Antes dos seus vinte anos já havia começado suas pesquisas originais, dentre elas a criação de uma máquina de calcular; a investigação a ação de fluidos sob a pressão do ar na física; deu início, junto com Fermat, em 1654, a ideias sobre probabilidade com a intenção de dar uma dinâmica maior para jogos de cartas; e o desenvolvimento do seu famoso triângulo numérico, o chamado triângulo de Pascal.

Mas, mesmo com produções na matemática, física, filosofia e até religião, muitos consideram que Pascal não usou todo o seu potencial. Isso devido ele ter passado por problemas de saúde em grande parte de sua vida.

Esse triângulo era chamado, por ele, de triângulo aritmético, um triângulo de números que já era utilizado por vários matemáticos ao redor do mundo a mais de 500 anos. Podemos dar uma visão da indução nesse teorema do chamado triângulo de Pascal. Onde temos a expressão:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^{n-k} b^k$$

Com  $n$  inteiro positivo e os valores de  $C_k^n$  os coeficientes binomiais. O triângulo aritmético é nada mais que uma tabela numérica infinita que lista os coeficientes de binômios, e onde a  $n$ ésima linha apresenta os coeficientes do binômio  $(a + b)^n$ . Vejamos:

$(a + b)^0$	1					
$(a + b)^1$	1	1				
$(a + b)^2$	1	2	1			
$(a + b)^3$	1	3	3	1		
$(a + b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a + b)^5$	1	5	10	10	5	1

Fonte: elaboração própria

Note que, por exemplo, a linha 1, 4, 6, 4, 1 contém os coeficientes do polinômio  $(a + b)^4$ . Essa tabela se mostra muito útil no desenvolvimento de expressões binomiais grandes, além de determinar mais facilmente resultados de combinações simples. E esse tipo de triângulo já era usado bem antes de Pascal por matemáticos a mais de 500 anos. Apesar de Pascal não ser o descobridor desse triângulo de coeficientes, ele recebe esse nome devido a Pascal ter sido o primeiro a fazer um estudo mais aprofundado de suas propriedades.

Pascal usava, muitas vezes, o triângulo para solucionar problemas de probabilidade em jogos de azar, numa passagem bem específica temos, “a utilização do triângulo aritmético para determinar o número de jogos necessário entre dois jogadores com uma grande quantidade de jogos”.

Com seus estudos sobre esse triângulo, Pascal observou que poderíamos escrevê-lo usando uma propriedade bem simples dele.

- I) Todas as linhas começam e terminam por 1.
- II) Cada elemento de uma linha, fora os das pontas, é a soma dos dois elementos que estão à cima dele.
- III) Ainda temos que, os elementos equidistantes são iguais.
- IV) O segundo elemento de cada linha e o penúltimo são sempre iguais à ordem  $n$  da linha, ou seja, igual a  $n$ .
- V) Existem  $n+1$  elementos em cada linha de ordem  $n$  e a soma dos  $n$  elementos de uma linha é sempre igual a  $2^n$ , essa propriedade é chamada teorema das linhas.
- VI) Temos também o teorema das colunas que diz que a soma dos elementos de qualquer coluna, do primeiro elemento até um elemento qualquer, é sempre igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha subsequentemente abaixo.

Assim, podemos encontrar todos os elementos que precisarmos. Vejamos essas propriedades no quadro a seguir:

Quadro 4 – Potências de  $a + b$

Polinômio	Ordem							Soma dos elementos
$(a + b)^0$	0	1						$1 = 2^0$
$(a + b)^1$	1	1	1					$2 = 2^1$
$(a + b)^2$	2	1	$2=1+1$	1				$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$
$(a + b)^3$	3	1	$3=2+1$	$3=2+1$	1			$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$
$(a + b)^4$	4	1	$4=3+1$	$6=3+3$	$4=3+1$	1		$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
$(a + b)^5$	5	1	$5=4+1$	$10=4+6$	$10=6+4$	$5=4+1$	1	$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

Fonte: Elaboração própria

Note que tudo na tabela confere com as propriedades descritas. Podemos então encontrar o polinômio  $(a + b)^6$  usando a última linha da nossa tabela: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Daí se usarmos a regra obteremos a seguinte linha: 1,  $5+1=6$ ,  $5+10=15$ ,  $10+10=20$ ,  $10+5=15$ ,  $5+1=6$ , 1. Com isso, nosso polinômio será:

$$(a + b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6.$$

Como a relação entre os coeficientes desses polinômios são, na verdade, uma combinação simples, os matemáticos começaram a utilizar a notação  $\binom{n}{k}$ , onde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , para representar os coeficientes de  $a^{n-k}b^k$  quando desenvolvemos o polinômio

$(a + b)^n$ . Com essa notação o binômio fica:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Dada esta notação, podemos agora reescrever nossa tabela da seguinte forma:

Quadro 5 – Potências de  $a + b$ 

$(a + b)^0$	$\binom{0}{0}$					
$(a + b)^1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
$(a + b)^2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
$(a + b)^3$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
$(a + b)^4$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
$(a + b)^5$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Fonte: Elaboração própria

Note que a propriedade I é facilmente demonstrada, pois a primeira coluna e a última são sempre da forma  $\binom{n}{0}$  e  $\binom{n}{n}$ , lembrando que  $0! = 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Vejamos:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

Comparando as duas tabelas, podemos observar algumas igualdades e conjecturar uma fórmula para a propriedade II que diz que cada elemento de uma linha, a fora os das pontas, é a soma dos dois elementos que estão à cima dele. Senão, vejamos alguns exemplos:

$$i) \quad \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$$

$$ii) \quad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$$

$$iii) \quad \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

$$iv) \quad \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$$

Com isso, podemos chegar a seguinte conclusão em relação ao padrão apresentado:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Ou ainda podemos escrever



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Onde  $\binom{n}{k}$  é o elemento da linha  $n$  com coluna  $k$ . Obtemos aí uma fórmula para encontrar cada termo do triângulo usando os dois termos da linha anterior acima dele e a esquerda. Vamos demonstrar isso desenvolvendo a definição de  $\binom{n}{k}$ .

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Logo, fica demonstrada essa propriedade II. Agora, vamos demonstrar a propriedade III, que diz que os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais. Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq k$  teremos:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Vejamos,

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Usando novamente a definição para mostrar a propriedade IV. O segundo elemento e o penúltimo elemento de cada linha são iguais à ordem da linha, ou seja, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , teremos:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Ora, temos que,

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Por outro lado,

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Para demonstrar as propriedades V e VI, vamos usar a indução matemática, que é o foco principal desse trabalho. A propriedade V, também conhecida como teorema das

linhas, nos diz que a soma de todos os termos da linha teremos uma potência de 2. Assim, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Começando com  $n = 0$ , teremos:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

Sendo verdade para  $n=0$ , assumiremos, por hipótese de indução, que para  $n=k$  também seja verdade.

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k$$

Vamos verificar se para  $n = k+1$  também é verdadeira a igualdade. Então temos que mostrar:

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \binom{k+1}{3} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$$

Podemos afirmar que pela propriedade I que:

$$\binom{k+1}{0} = 1 = \binom{k}{0}$$

E ainda, pela propriedade III, que:

$$\binom{k+1}{1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}$$

$$\binom{k+1}{2} = \binom{k}{1} + \binom{k}{2}$$

$$\binom{k+1}{3} = \binom{k}{2} + \binom{k}{3}$$

...

$$\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}$$

E assim, decompondo cada termo como os anteriores e substituindo na expressão, teremos:

$$\begin{aligned} & \binom{k}{0} + \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] + \left[ \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] + \left[ \binom{k}{2} + \binom{k}{3} \right] + \cdots + \left[ \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] + \binom{k}{k} = \\ & = \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \cdots + \binom{k}{k} \right] + \left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \cdots + \binom{k}{k} \right] = \\ & \qquad \qquad \qquad 2^k + 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

Então pelo Princípio da Indução matemática, a propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Novamente usaremos a indução para mostrar a propriedade VI, também conhecida como teorema das colunas, que nos diz que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , é válido:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Nesse caso, vamos fixar  $n$  e fazer a indução sobre  $k$ . Daí, começaremos nossa indução com  $k=0$ .

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+0+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n}$$

Logo, temos como verdade para  $k=0$ . Agora, por hipótese de indução, tomaremos para  $k=q$ , como verdade.

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \cdots + \binom{n+q}{n} = \binom{n+q+1}{n+1}$$

Para que, com isso, possamos verificar se para  $k=q+1$  também é verdadeiro. Senão, temos que mostrar:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \cdots + \binom{n+q+1}{n} = \binom{n+q+2}{n+1}$$

Temos, por hipótese de indução que:

$$\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \cdots + \binom{n+q}{n}}_{\binom{n+q+1}{n+1}} + \binom{n+q+1}{n}$$

Usando a propriedade II, teremos:

$$\binom{n+q+1}{n+1} + \binom{n+q+1}{n} = \binom{n+q+2}{n+1}$$

Com isso, fica demonstrado que a propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Encerrando, assim, as demonstrações das propriedades indicadas. Vamos agora, para finalizar esse tópico, demonstrar que é válida a expansão do binômio dado no início do capítulo, o chamado binômio de Newton.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

Pelo princípio da indução matemática, vamos verificar para  $n=1$ .

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

Vamos tomar, por hipótese de indução, como verdadeiro para  $n=q$ , e então vamos verificar se também é válido para  $n=q+1$ .

$$\begin{aligned} (a+b)^q &= \binom{q}{0} a^q + \binom{q}{1} a^{q-1} b + \binom{q}{2} a^{q-2} b^2 + \dots + \binom{q}{k-1} a b^{q-1} + \binom{q}{k} b^q = \\ &= \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k} b^k \end{aligned}$$

Temos, que

$$\begin{aligned} (a+b)^{q+1} &= (a+b)^q (a+b) = \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k} b^k \right] (a+b) = \\ &= a \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k} b^k \right] + b \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k} b^k \right] = \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k+1} b^k \right] + \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q-k} b^{k+1} \right] \\ &= \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q+1-k} b^k \right] + \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q+1-(k+1)} b^{k+1} \right] = \\ &= \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q+1-k} b^k \right] + \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q+1-(k+1)} b^{k+1} \right] = \\ &= \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} a^{q+1-k} b^k \right] + \left[ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k-1} a^{(q+1)-k} b^k \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{q}{0} a^{(q+1)-0} b^0 + \sum_{k=1}^q \left[ \binom{q}{k} + \binom{q}{k-1} \right] a^{(q+1)-k} b^k + \binom{q}{q} a^{(q+1)-(q+1)} b^{q+1} = \\
&= \binom{q+1}{0} a^{(q+1)-0} b^0 + \sum_{k=1}^q \binom{q+1}{k} a^{(q+1)-k} b^k + \binom{q+1}{q+1} a^{(q+1)-(q+1)} b^{q+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{q+1} \binom{q+1}{k} a^{(q+1)-k} b^k
\end{aligned}$$

Logo, também é verdade para  $n=q+1$ . Com isso, é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ficando provado o binômio de Newton.

#### 4.7 RELAÇÃO DE EULER

Ao final desse trabalho, surgiu um novo tema que se encaixa bem com o tipo de raciocínio que o professor tem que ter para entender como o método da indução pode ser aplicado em salas de Ensino Médio. Esse tema é a relação de Euler em poliedros convexos. É uma fórmula que relaciona o número de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo.

Leonard Euler foi um matemático Suíço que nasceu em 1707 na cidade de Basel e morreu em 1783. É considerado um dos maiores de todos os tempos devido a sua vasta contribuição em muitas áreas da Matemática e uma dessas atuações está a relação estudada nessa parte do trabalho.

Mas a grande questão é como levar esse conteúdo para um aluno do Ensino médio. Esse tipo de assunto é apropriado para usarmos o raciocínio indutivo, pois é de fácil verificação. Porém, primeiramente, vamos definir os conceitos apresentados.

Primeiro vamos definir o conceito de polígono, pois está diretamente ligado a definição de poliedro. Então,

“chama-se polígono a região de um plano delimitada por um número finito de segmentos de reta, contidos nesse plano, que satisfazem às seguintes condições: Cada extremidade de qualquer segmento é extremidade de exatamente dois segmentos; dois segmentos consecutivos quaisquer nunca são colineares; dois segmentos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.” (AZEVEDO; MANUEL, 1999, p. 55)

Agora vamos definir o que é um poliedro convexo. Daí, temos que dar duas definições: Poliedro e Poliedro convexo. Sendo um poliedro

“a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições: Cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois

polígonos; dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares; dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.” (AZEVEDO; MANUEL, 1999, p. 56).

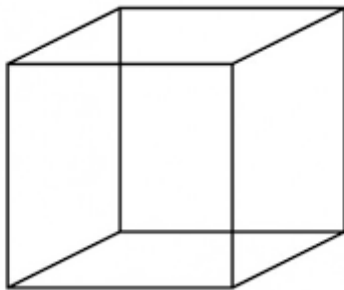
É um poliedro convexo para Azevedo (1999) é um poliedro que satisfaz à seguinte condição: fixado cada face, as demais se encontram num mesmo semiespaço (em relação à fixada).

Essa parte é importante ser esclarecida para os alunos, pois mostraremos a eles que a relação apresentada não funciona em todos os poliedros, apenas funcionará em poliedros convexos. Daí a importância de saber diferenciá-los.

Continuando a fase de definições, temos que saber quais os elementos que formam um poliedro que são as faces, arestas e vértices. Os polígonos, no poliedro, são as faces, os lados dos polígonos são as arestas e o encontro desses lados são os vértices.

Identificados esses elementos básicos de um poliedro, vamos dar exemplos de alguns poliedros convexos e não convexos como atividade para os alunos e contar o total de faces, arestas e vértices. Ao total de faces chamaremos de  $F$ , vértices de  $V$  e arestas de  $A$ . Vejamos:

Figura 14 – Hexaedro

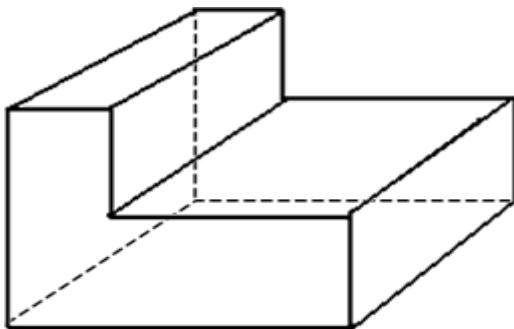


Nesse caso, temos o chamado Cubo ou hexaedro:

$$F = 6, V = 8 \text{ e } A = 12$$

Fonte: Internet

Figura 15- poliedro de 8 faces não convexo

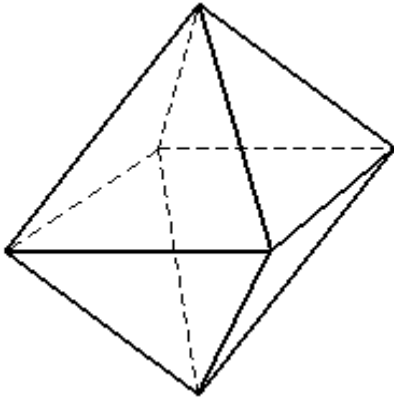


Nesse caso, temos poliedro não convexo:

$$F = 8, V = 12 \text{ e } A = 18$$

Fonte: Internet

Figura 16 – Octaedro

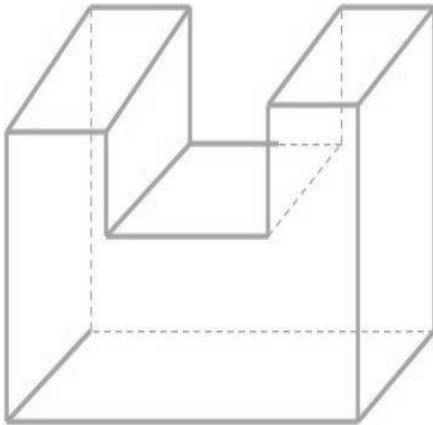


Agora, temos um octaedro:

$$F= 8, V = 6 \text{ e } A = 12$$

Fonte: Internet

Figura 17 – Poliedro de 10 faces não convexo



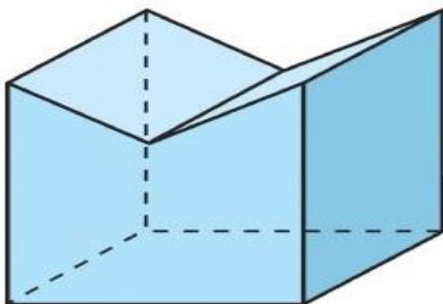
Agora, temos outro não convexo:

$$F= 10, V = 16 \text{ e } A = 24$$

Fonte: Internet

Usando vários exemplos, podemos fazer com que os alunos percebam o padrão que aparecem, então vejamos mais alguns, assim, depois vamos por esses valores em uma tabela e observar o que está acontecendo e conjecturar nossa hipótese.

Figura 18 - Poliedro de 7 faces não convexo

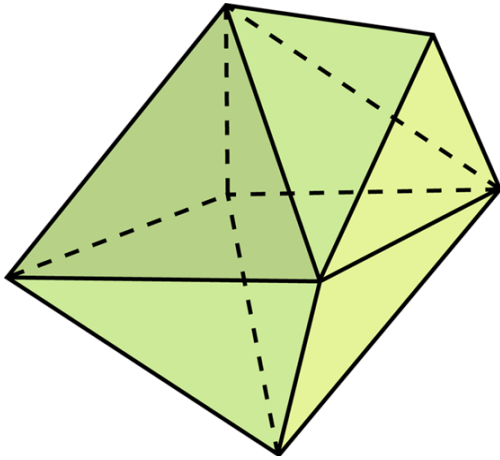


Continuando com não convexo:

$$F= 7, V = 10 \text{ e } A = 14$$

Fonte: Internet

Figura 19 - Poliedro de 10 faces não convexo

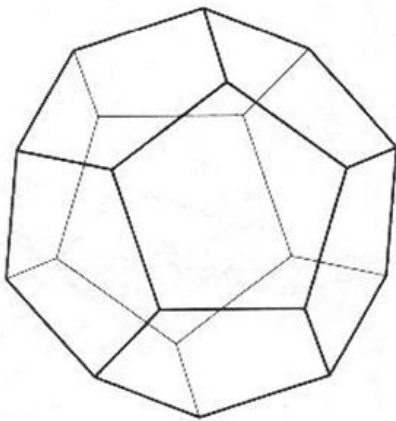


Um poliedro convexo, mas irregular:

$$F= 10, V =7 \text{ e } A = 15$$

Fonte: Internet

Figura 20 - Dodecaedro



Por fim, um dodecaedro:

$$F= 12, V = 20 \text{ e } A = 30$$

Fonte: Internet

Devemos enfatizar que quanto mais faces tem o polígono, mais complicado fica de contar vértices e arestas. Se possível, o professor pode apresentar mais exemplos de poliedros com mais faces para dificultar a visualização desses elementos.

Isso mostrará ao aluno a necessidade de encontrar um padrão, ou seja, que entender o padrão é mais viável que contar cada elemento um a um. E esse foi o processo que levou aos matemáticos a tentar criar uma fórmula para esse tipo de situação, facilitando seus estudos e ampliando-os para mais poliedros.

Agora vamos desenvolver uma tabela, dividindo em poliedros convexos e não convexos, e tentar conjecturar uma regra que relacione o número de faces, vértices e arestas.



Quadro 6 – Poliedros convexos

Poliedros convexos			
Poliedros	Faces	Vértices	Arestas
Cubo	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Figura 16	10	7	15
Dodecaedro	12	20	30

Fonte: Elaboração própria

Observando a tabela, deixamos que os alunos encontrem a relação objetivada. Sendo que o professor deve deixar o aluno perceber por si só o padrão. Quando isso não ocorre, há uma falha do processo de aprendizagem do raciocínio. Por isso, é importante que o professor tenha a paciência de deixar o aluno perceber só esse padrão.

Então, eles chegarão na ideia que o número de faces somado com o número de vértices passa duas unidades do número de arestas. Se chamarmos de  $F$  o número de faces,  $V$  o número de vértices e  $A$  o número de arestas, pela ideia percebida, conjecturamos a fórmula:

$$F + V = A + 2$$

Com isso, vimos um padrão aplicável a, pelo menos, quatro poliedros convexos. Mas surge o questionamento: esse padrão também vale para não convexos? Vamos para a tabela dos poliedros não convexos:

Quadro 7 – Poliedros não convexos

Poliedros não convexos			
Poliedros	Faces	Vértices	Arestas
Figura 12	8	12	18
Figura 14	10	16	24
Figura 15	7	10	14

Fonte: Elaboração própria

Daí, temos que deixar que percebam que em dois, dos três exemplos, a relação observada funciona, mas, devido a isso, não podemos afirmar que ela é válida para todos os poliedros não convexos. Resta-nos verificar se é válido para todos os convexos. Fato observado na primeira tabela. Como não podemos cobrir todos os poliedros convexos, temos que recorrer a nossa demonstração usada nesse capítulo: a indução.

Usaremos a demonstração obtida em um artigo de Oliveira e Gandulfo (2010), para comprovarmos a conjectura tirada das tabelas, a fórmula  $F + V = A + 2$ , onde  $F$  é o número de faces,  $V$  o de vértices e o  $A$  número de arestas. Primeiro, devemos retirar uma face

do poliedro  $P$ , obtendo um poliedro aberto, que chamaremos  $P_n$  e vamos tomar o número de faces dele por  $F_n$ ,  $V_n$  vértices e  $A_n$  arestas. Assim, como retiramos uma face nossa relação ficará:

$$F_n + V_n = A_n + 1$$

Pelo método de indução vamos verificar quando  $F_n = 1$ , pois tomaremos um polígono convexo  $P_1$  com  $k$  lados, assim,  $V_n = k$  e  $A_n = k$ . Com isso, teremos nossa fórmula  $F_n + V_n = A_n + 1 \therefore 1 + k = k + 1 \therefore 1 = 1$ . Logo, é verdade para  $F_n = 1$ .

Agora, por hipótese de indução, vamos supor que para um polígono  $P_q$  de  $F_q$  faces,  $V_q$  vértices e  $A_q$  arestas é válido  $F_q + V_q = A_q + 1$ . Assim, vamos verificar se é válido para um polígono com  $F_q + 1$  faces. Temos assim que:

- i)  $F_{q+1} = F_q + 1$ ;
- ii)  $A_{q+1} = A_q + p - w$ , onde  $p$  é o total de arestas da face adicionada e  $w$  o total de arestas coincidentes.
- iii)  $V_{q+1} = V_q + p - (w + 1)$ ; onde  $w$  são as arestas coincidentes e  $w + 1$  vértices coincidentes.

Usando nossa hipótese de indução, e substituindo os novos valores nela, obteremos:

$$F_q + V_q = A_q + 1$$

$$F_{q+1} - 1 + V_{q+1} - p + (w + 1) = A_{q+1} - p + w$$

$$F_{q+1} + V_{q+1} = A_{q+1} - p + p + w - w + 1$$

$$F_{q+1} + V_{q+1} = A_{q+1} + 1$$

Logo, é válida para o poliedro  $P_n$ .

Como podemos considerar o poliedro  $P$  com  $F$  faces,  $V$  vértices e  $A$  arestas, e que  $F_n = F - 1$ ,  $V_n = V$  e  $A_n = A$ , com isso obtendo para nosso poliedro  $P$  a relação:

$$F + V = A + 2 \quad \blacksquare$$

## 5 - DISCUSSÃO

A Indução Matemática apresentada nesse trabalho mostrou-se muito útil na justificativa dos teoremas e de claro entendimento nos conceitos desses teoremas, uma ideia de indução que é bem simples, além de podermos mostrar como se define o conjunto dos números Naturais, que foi a intenção inicial do Peano.

Na comparação com os outros tipos de demonstrações da matemática, a indução é uma das mais viáveis, do ponto de vista cognitivo, para o nível de conteúdos do ensino médio. Isso porque na maioria das demonstrações por indução, há primeiro o processo de conjecturar a hipótese e nesse processo exercitamos nosso raciocínio lógico.

Além do processo da aplicação dos axiomas de Peano, usamos nossa experiência matemática em geral com aritmética, geometria, álgebra e esse tipo de raciocínio lógico que aplicamos na conjectura é um treinamento importante para o senso crítico, além de poder tornar a aula bem participativa por parte dos alunos.

Sabemos que a computação está intimamente ligada à Matemática, não só por meio do sistema binário, que é a essência das máquinas digitais, mas por programas que desenvolvem todo o funcionamento dos computadores. A linguagem desses programas são desenvolvidas pelos algoritmos. E, por sua vez, a indução, um método recorrente, se encaixa com o processo de lógica aplicada nos algoritmos. Isso nos mostra outra grande importância de termos um conhecimento mais amplo do processo da indução.

Em breve, esse tipo de conhecimento será básico, pois, o ritmo com que os computadores espalham-se na nossa sociedade fará com que todos tenham conhecimento mais profundo dessas máquinas que regem nosso dia a dia.

Das demonstrações citadas nesse trabalho, algumas delas se destacam, ou pelo conteúdo, ou pela dificuldade de se encontrar a solução. Do capítulo 2, temos a demonstração do ponto fixo de Brouwer, que nos traz a *reductio ad absurdum* com uma forma bem interessante do princípio do terceiro excluído. Um raciocínio simples de entender que poderia ser usado com mais frequência na sala de aula.

No capítulo 3, temos o Teorema Fundamental da Álgebra onde a Indução pode ser aplicada para demonstrar esse importante Teorema da Teoria dos Números. Nesse capítulo temos também exemplos de como a indução é aplicada em quaisquer conjuntos bem ordenados e como os axiomas de Peano ficariam sob essa ótica.

E outra demonstração é das diagonais de um polígono regular, apresentada no último capítulo. Muitos professores na sala de aula usam apenas uma tabela para justificar a

fórmula. O que chama a atenção dessa demonstração é o uso de figuras e um raciocínio sobre a sequência formada pela quantidade de diagonais de cada polígono. Fazendo essa observação, conjecturamos a fórmula e por fim usamos a indução para justificá-la.

Outro tema que se destaca, é a do triângulo de Pascal e a expansão binomial. Mostrando que podemos aplicar, não só a indução, mas também a demonstração direta para justificarmos todas aquelas propriedades que observamos nos estudos desse tema. Além da relação de Euler que é bastante utilizada nas salas de ensino médio, sendo justificada por meio da indução. Uma forma elegante de se demonstrar esse importante conceito do conteúdo de geometria espacial.

A intenção de mostrar essas ferramentas, usadas pelos matemáticos para justificar os teoremas, é de mostrar aos discentes que há a necessidade de haver um questionamento sobre a veracidade de alguns padrões que surgem nos números e que muitas vezes alguns desses padrões podem ser ilusórios.

Esse processo também nos leva a melhora do nível dos professores e conseqüentemente dos alunos. Decorar os teoremas não é o ideal, mas sim, entender de onde esses teoremas são originados. No próprio desenvolver desse trabalho, várias teorias ficaram mais elucidadas, bem como uma prática maior da Álgebra e da Aritmética, fazendo com que os alunos tenham que praticar essas duas áreas da matemática básicas, mas importantíssimas.

## 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia inicial do trabalho, apresentar a Indução Matemática em conteúdos do ensino médio, mostrou-se bastante viável, pelo menos no ponto de vista de justificar alguns teoremas apresentados nesses conteúdos. O conjunto dos Naturais, que é o conjunto primordial para a Matemática, pode ser construído através dos axiomas de Peano, ou seja, é de grande importância para embasar as teorias subsequentes que vem dessa construção de conjunto.

Esse tipo de comportamento, de justificar as afirmações, é importante para o desenvolvimento crítico do aluno. Então, quando estimulamos ao questionamento sobre a veracidade dos fatos que o senso comum nos traz, estamos usando da Ciência para formar o caráter. Certos padrões podem ser ilusórios e somente com métodos de demonstrações podemos comprová-los. Um exemplo dado nesse trabalho é a não convergência da sequência harmônica.

Esse costume de não utilizarmos demonstrações nas aulas de Matemática em salas do ensino médio, traz consequências não só para a formação do aluno, mas também contribui para o nível dos professores. Esse desuso das técnicas de demonstração faz com que esses artifícios caiam no esquecimento dos docentes da Matemática e prezar pelo bom nível dos professores nas salas de aula é de grande importância para o futuro da Matemática no Brasil.

Assim, as sugestões de temas, que utilizam a Indução em conteúdos do ensino médio, serviram para mostrar como essa ferramenta é aplicável na sala de aula e que, além de elevar o nível dos alunos, pode fazer com que haja uma retomada de técnicas importantes para professores que se acostumaram com o desuso de demonstrações.

Com certeza, há uma necessidade de mudança no pensamento de ensino do nosso país. A sala de aula não serve apenas para preparar os alunos para fazerem o Enem. Por esse tipo de pensamento muitos conteúdos de Matemática são retirados dos planejamentos dos professores. A construção da Matemática no aluno não leva a eles entenderem só de números e operações, leva à construção de um raciocínio lógico e de soluções de problemas e de questionamentos em gerais.

Então, foram apresentadas várias demonstrações que são de difíceis soluções ou de maior dificuldade de ser encontrada em livros ou internet. Claro, que algumas foram desenvolvidas no próprio trabalho como a da sequência harmônica, que por muitos autores é demonstrada através de limite de sequências.

Com o intuito de mostrar que a Matemática das escolas precisa ter o nível elevado, esse trabalho é apenas uma ideia que pode ser base para outras ainda melhores. Temos que pensar numa melhora substancial, não só para os alunos, mas também para os professores.

Isso inclui a própria formação desses docentes em muitas licenciaturas em Matemática que estão dissociadas dos conteúdos do ensino médio. Não excluindo, dessa formação, a Matemática mais avançada, mas deverá haver uma relação parcial desses conteúdos e suas aplicações em sala de aula.

## REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, M. F. **Geometria euclidiana espacial**. Fortaleza, 1999. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABTDkAL/geoesp-a4>>. Acessado em: 14 de set. 2015.
- BURTON, D.M. **The history of mathematics: an introduction**, Nova Iorque, NY, 7 th Ed. University of New Hampshire, 2011.
- COSTA, A. **Torre de hanói, uma proposta de atividade para o ensino médio**, PUC/RS, 2010.
- STANAT F. D; MCALLISTER D. F. **Discrete mathematics in computer science**. Englewood Cliffs, NJ. 1977.
- FRALEIGH, J. B. **A first course in abstract álgebra**.
- GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**, Rio de Janeiro, RJ. 5ª edição, IMPA, 2015.
- HEFEZ, A. **Aritmética, Coleção PROFMAT**, Rio de Janeiro, 1ª Ed. SBM, 2013.
- HEFEZ, A. **Indução Matemática**, PIC – OBMEP/ SBM, 2009.
- KATZ, J.V. **A history of mathematics: an introduction**, Chicago, IL, 3ª Ed. University of the District of Columbia, 2009.
- LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de Uma Variável, Volume 1**. Rio de Janeiro, RJ, 12. Ed. IMPA, 2014.
- LIMA, E. L. Princípio da indução. Disponível em <<http://www.ime.unicamp.br/~lramos/me100/elonOBM.pdf>>. Acessado em: 14 de set. 2015.
- LIMA, L. M. M. **Construções algorítmicas e demonstrações axiomáticas**, mestrado profissional em matemática – PROFMAT, 2013.
- NETO, E.R. **Didática da Matemática**, São Paulo, SP, Ed. 9º. Editora Ática, 1997.
- OLIVEIRA, I. A. A; GANDULFO, A. M. R. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, BA. 2010.
- OLIVEIRA, K. I. M; FERNÁNDEZ A. J. C. **Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções**, Rio de Janeiro, RJ, 2ª Ed. 2012.
- PEREIRA, P. C. A. **O Princípio da Indução Finita – uma abordagem no ensino médio**, dissertação de mestrado profissional em matemática – PROFMAT. 2013.
- PRADO; ELEUTÉRIO. **A Crítica de Brouwer ao Teorema de Brouwer e a Prova de Existência na Teoria de Equilíbrio Geral**. Disponível em <[http://www.fea.usp.br/feaecon/incs/download.php?i=134&file=./media/livros/file\\_134.pdf](http://www.fea.usp.br/feaecon/incs/download.php?i=134&file=./media/livros/file_134.pdf)> . Acessado em: 14 de set. 2015.
- SAGAN. C. **Contato**, São Paulo, SP, 5ª reimpressão, Companhia das Letras. 1997.

SANTOS, A. C. **O uso de demonstrações no ambiente escolar a partir do princípio de indução finita**, Trabalho de conclusão de curso, IMPA, 2013.

SAVIOLI, A. M. P. D. Uma **reflexão sobre a indução finita: relato de uma experiência**. BOLEMA, Rio Claro, ano 20, n.27, 2007.

VASCONCELOS, E. S, **Descobrimo uma nova fórmula para o número de diagonais em polígonos convexos**. UNIARAXÁ/ISE, 2006.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais**. Lisboa: IIE, 1998