UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JULIO CESAR MATIS DE FREITAS

# TRABALHANDO POLIEDROS ATRAVÉS DE APRENDIZAGEM COOPERATIVA UTILIZANDO SOFTWARES

JUAZEIRO DO NORTE

2015

JULIO CESAR MATIS DE FREITAS

# TRABALHANDO POLIEDROS ATRAVÉS DE APRENDIZAGEM COOPERATIVA UTILIZANDO SOFTWARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa

JUAZEIRO DO NORTE

2015

JULIO CESAR MATIAS DE FREITAS

# TRABALHANDO POLIEDROS ATRAVÉS DE APRENDIZAGEM COOPERATIVA UTILIZANDO SOFTWARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24/ 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira
Univ. Regional do Cariri (URCA) e
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Profa. Dra. Clarice Dias de Albuquerque
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

**AGRADECIMENTOS**

A Deus, por mais uma grande conquista alcançada na minha vida.

A minha esposa Eva Cristiane Firmino Bezerra, pela compreensão e apoio nesse período de intensa luta.

Aos meus filhos, Ana Júlia Bezerra Freitas, Nícolas Bezerra Freitas e Breno Bezerra Freitas pelos vários momentos que estive ausente ou não pude acompanhá-los em suas brincadeiras, pois precisava estudar intensamente.

Aos Professores da Universidade Federal do Ceará, pelo conhecimento e sabedoria transmitida e pela paciência e compreensão nos momentos de desânimo.

A professora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa pela orientação dada a esse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Núcleo Gestor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Virgílio Correia Lima, pelo apoio e incentivo que me concederam.

Aos colegas da turma de Mestrado por todas as contribuições na aprendizagem e momentos de alegrias que me propiciaram, em especial aos meus companheiros, Francisco Eudes, Carlos Augusto, Airton e Edjam, que em momentos de dificuldades me apoiaram.

Aos companheiros de viagem Francisco Rosiglei, Cícero Sorares, Francisco Eudes e Carlos Augusto pelos momentos de intenso debate ao longo das nossas viagens.

Enfim a todas as pessoas que de uma forma direta ou indireta me impulsionaram na busca dessa conquista tão importante na minha vida.

“Há diversos tipos de curiosidade; uma de interesse, que nos leva ao desejo de aprender o que nos pode ser útil, e outra, de orgulho, que provém do desejo de saber o que os outros ignoram.”(Addison , Joseph)

# RESUMO

Este trabalho tem como tema central a aplicação de técnicas de ensino de geometria espacial em especial o ensino de poliedros, destacando-se o Teorema de Euler e os poliedros regulares (poliedros de Platão). Analisamos as definições, teoremas e suas demonstrações, destacando um pouco da história do matemático Leonhardo Euler, e as curiosidades acerca do seu teorema para poliedros. Discutimos ainda as dificuldades educacionais do ensino de matemática e os elementos que podem estar ligados a essa dificuldade como também alternativas que podem ser aplicadas na prática de ensino dos professores dessa área. Diante das dificuldades propomos uma metodologia de ensino baseada na combinação de duas técnicas: uso de softwares e aprendizagem cooperativa, pois, ambas vem sendo muito discutidas como alternativa viável de ensino. Destacamos inclusive quais as principais vertentes de pensamento do uso de software como ferramenta de ensino ou máquina de ensinar, assim como, analisamos as características de ensino cooperativo, apresentando as dificuldades encontradas na tentativa de implantação desse método de ensino, além, de ressaltarmos também as vantagens alcançadas após a superação dos obstáculos iniciais. Analisou-se também os softwares Poly e Educandus que foram utilizados no projeto de ensino diferenciado, onde destacamos as potencialidades, além das limitações que estes apresentavam, sugerindo alternativas para a devida complementação do professor que acompanhe os alunos envolvidos no estudo. Sugerimos também, atividade direcionada para o uso do Poly, no intuito de levar o participante a explorar todos os recursos do software ao máximo para assim minimizarmos as dificuldades de visualização e representação dos poliedros. Por último aplicamos avaliações qualitativas e quantitativas onde verificamos as potencialidades da metodologia utilizada em comparação com o ensino convencional, além de fazermos uma análise dos erros mais comuns cometidos pelos alunos do ensino convencional e os alunos do ensino experimental.


**Palavras-chave**: Ensino de matemática, Poliedros, Teorema de Euler, Uso de Softwares, Aprendizagem Cooperativa.

## ABSTRACT

This work is focused on the application of spatial geometry teaching techniques especially the teaching of polyhedrons, being detached the Euler's theorem and regular polyhedrons (Plato's polyhedrons). Initially we analyzed the definitions and theorems and their respective demonstrations, including some history of the fantastic mathematical Leonhardo Euler, and his curiosities about his theorem for polyhedrons. We also discussed the educational difficulties of mathematics teaching and the elements that can be linked to these difficulties as well as alternatives that may be applied to teachers' teaching practice in this area. With so many difficulties, we proposed a teaching methodology based on a combination of two techniques: use of software and cooperative learning, for both methods have been much discussed as a viable alternative to education. We also detached the main thought strands of the use of software as a teaching tool or teaching machine, as well as we analyzed the cooperative teaching characteristics, showing the difficulties encountered when we tried to implement this teaching method, in addition, we also put in relief the advantages achieved after overcoming the initial obstacles. It was also analyzed the softwares Poly and Educandus that have been used in the different educational project, where we detached their potential beyond their limitations, suggesting alternatives for due complementation of the teacher who accompanied the students involved in the study. We also suggested, activities directed for the use of Poly in order to lead the participant to explore the software's potential to its maximum in order to minimize the visualization difficulties and representation of polyhedrons. Finally, we applied qualitative and quantitative assessments where we verified the potential of the used methodology compared to formal education, and we did an analysis of the most common mistakes made by the students of formal education and the students of experimental education.


**Keywords**: mathematics education, Polyhedron, Euler's theorem, Software Use, Cooperative Learning.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE GRÁFICOS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas |
| IBGE | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística |
| NBR | Norma Brasileira Regulamentar |
| PUCPR | Pontificia Universidade Católica do Paraná |
| SIBI | Sistema Integrado de Bibliotecas |
| trad. | Tradutor |
| GE | Grupo Experimental |
| GC | Grupo Controle |

## LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $ | Dólar |
| % | Porcentágem |
| £ | Libra |
| ¥ | Ilene |
| € | Euro |
| § | Seção |
| © | Copyright |
| ® | Marca Registrada |

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A realidade do ensino de matemática no Brasil é preocupante, pois, os alunos que adentram o Ensino Médio apresentam grande defasagem nos conteúdos oriundos desta disciplina, as deficiências se tornam mais intensas quando falamos de geometria, pois alguns livros deixam esse conteúdo para o fim do ano, o que aumenta ainda mais as lacunas no ensino deste ramo da matemática. Diante de tamanha dificuldade não é raro que muitos professores de matemática se encontrem extremamente preocupados ou até mesmo desmotivados. Levando em conta essa situação faz-se necessário a busca por alternativas que nos ajude a superar o desinteresse e o descaso dos alunos pela aprendizagem de matemática. Dentre os principais motivadores do desinteresse dos alunos podemos destacar ambientes familiares desestruturados, aversão cultural a matemática, competição com várias opções para o ócio (Whatsapp, facebook) e talvez a principal delas seja o acúmulo de dificuldades ao longo dos anos do ensino fundamental.

Na tentativa de encontrar alternativas que nos ajude a superar esses obstáculos, precisamos de técnicas de ensino que motivem os jovens a participar do processo de ensino aprendizagem desta disciplina essencial ao desenvolvimento da humanidade. Foi com esse intuito que propusemos este trabalho, o qual sugere a fusão de duas técnicas de ensino, a aprendizagem cooperativa e o uso de software educacional.

Não é de hoje que a tecnologia aplicada a educação vem sendo explorada e testada de várias maneiras, pois é consenso entre os pensadores da educação que ela é uma fonte promissora para um melhor resultado no processo ensino aprendizagem, porém, também é fato que a forma mais adequada de aplicá-la ainda não foi determinada. Por esse motivo estamos testando no nosso trabalho a utilização de softwares como ferramenta de ensino incorporada na aprendizagem cooperativa.

No capítulo 2 abordamos o fascínio que os poliedros exercem sobre os homens ao longo da história da humanidade. Também definimos de forma rigorosa e clara o que são poliedros, utilizando como referência Lima (2006, p. 232-233), pois para todas as demonstrações de nosso trabalho precisaremos de uma alicerce bem estruturado. Nesse mesmo capítulo são apresentadas algumas considerações históricas sobre a vida e obra do grande matemático Leonhard Euler, assim como, os vários episódios em torno do seu Teorema para Poliedros. Destacamos ainda a análise e a demonstração da existência de apenas cinco poliedros regulares (poliedros platônicos). Demonstramos também a soma dos ângulos das faces de um poliedro e em seguida analisamos a técnica de contagem das diagonais utilizando combinação do número de vértices.

No capítulo 3 destacamos a importância histórica da matemática na evolução da sociedade e os preconceitos ao qual esta ciência foi submetida ao longo do tempo, devido a ignorância e as crendices que associavam a curiosidade dos matemáticos a coisa do demônio. Destacamos ainda que na verdade a matemática é um bem cultural e um direito de todos e sem dúvida um pré-requisito necessário para uma plena cidadania.

Utilizando para isso os três contextos, formativo, instrumental e de ciência sugeridos nos PCN's espera-se que o aluno adquira novas informações e instrumentos necessários para a continuidade de seus estudos. Para que esses objetivos sejam atingidos deixamos claro a importância do planejamento, do cuidado e zelo que devemos ter por sua execução, passando para o aluno um pensamento mais significativo e prazeroso. Ressaltando inclusive a importância do equilíbrio que o professor de matemática deve ter ao trabalhar as componentes são essenciais ao ensino de matemática (conceituação, manipulação e aplicação). Ressaltamos que as características da conceituação compreende à formulação correta e objetiva dos conceitos matemáticos, que a manipulação é habilidade e destreza no manuseio das propriedades matemáticas e a culminância de todo o processo é aplicação que compreende a resolução de situações problemas, de fato essas três componentes são indispensáveis e com bom senso e planejamento do professor podemos mesclá-las de forma a atingirmos o nosso objetivo de ensino.

Outro ponto que salientamos foi a dificuldade apresentada no ensino de Geometria Espacial, pois, os alunos apresentam uma enorme dificuldade de visualização de objetos tridimensionais representados em um plano bidimensional. Dessa forma nos motivamos a desenvolver esse trabalho que envolve a fusão de duas técnicas de ensino (aprendizagem cooperativa e uso de softwares), para que as característica de um complemente a do outro, ajudando dessa forma o aluno a superar as dificuldades citadas anteriormente.

No capítulo 4 analisamos as importantes característica da aprendizagem cooperativa, como participação ativa, mediação da aprendizagem, construção coletiva do conhecimento, interatividade e estimulo dos processos de expressão e comunicação, dentre outras. Essas qualidades contribuem de forma estratégica para o desenvolvimento de pessoas capazes de superar a competitividade selvagem que a nossa sociedade capitalista nos impõe. Cooperação e colaboração são atitudes essenciais na formação do ser humano, fortalecendo assim o trabalho em sala de aula. Esperamos também que o trabalho em grupo motive os alunos que apresentam maior dificuldade, pois sabemos que quanto maior a dificuldade de aprender matemática maior a rejeição, causando dessa forma um bloqueio que torna impossível o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

No capítulo 5 abordamos a importância das tecnologias ao longo dos tempos e hoje essa capacidade é um bem cultural da humanidade. Percebemos de forma clara que toda ação humana deve ser comedida, pois, por melhor que seja as intenções por traz da criação de uma ferramenta, se mal utilizada pode causar mais danos do que benefícios. Dessa forma buscamos entender melhor como os softwares podem ser aplicados na educação, analisando questões como, quais as dificuldades que encontramos ao trabalhar com softwares no ambiente escolar? Que métodos são mais plausíveis? Que resultados ou problemas podemos encontrar? Qual a postura que o professor deve ter diante de um trabalho utilizando software? De que forma a escola pode ajudar esse trabalho? Como os alunos se relacionam com esses recursos? A nossa ideia inicial é que os softwares Poly e Educandus devem ser aplicados como ferramentas de suporte, de forma a complementar os conteúdos apresentados em sala de aula e aprofundá-los durante os encontros dos grupos de aprendizagem cooperativa ou ainda como ferramenta de enriquecimento e ilustração de imagens, áudios, simulações, etc. de forma à ampliar a visão espacial e a capacidade de utilizar o raciocínio lógico dedutivo dos alunos envolvidos no nosso projeto.

No capítulo 6 descrevemos as características da escola na qual trabalhamos. Destacamos o quadro de professores e suas formações, problemas estruturais, resultados de diagnósticos e provas externas. Comentamos também um pouco sobre a turma na qual aplicamos o projeto Trabalhando poliedros através da aprendizagem cooperativa utilizando software, enfatizando as dificuldades e as potencialidades da mesma.

No capítulo 7 abordamos as impressões acerca da implantação do nosso projeto, buscando passar para o leitor interessados em utilizar essa prática de ensino as situações encontradas na efetivação dessa ideia. Discorremos sobre as dificuldades encontradas na seleção dos alunos, pois, existe um grande desinteresse dos alunos em ter que estudar algumas horas a mais. Também tivemos problemas na montagem das células, pois alguns alunos não aceitaram estar nos mesmos grupos porém, nenhuma dessa dificuldades nos desencorajou de levar o projeto a frente. Após a implantação do projeto os problemas passaram, e começamos a colher os frutos positivos da turma que aceitou participar, dentre eles podemos citar que os alunos do grupo experimental (GE), se destacou em um maior número de atividades realizadas como por exemplo, na participação mais efetiva nas aulas presenciais, na apresentação do seminário e também na prova individual e não pesquisada que usamos para a avaliação quantitativa. Observamos ainda que os erros cometidos pelos grupos poderiam ter diminuído se eles tivessem uma base de matemática do ensino fundamental mais sólida, pois observamos que apesar de compreender os aspectos básicos relativos ao Teorema de Euler, operaram os valores de forma equivocada, o que vem a diminuir assim o rendimento na avaliação quantitativa.

Por fim apresentamos algumas considerações e conclusões relativas ao desenvolvimento deste projeto de ensino de poliedros.

## 2 O HOMEM E O ENCANTAMENTO COM OS POLIEDROS

Os poliedros são formas geométricas belíssimas, talvez por esse motivo seduz reis, faraós e estudiosos desde a antiguidade, existem registros de estudos de várias civilizações, como egípcios, chineses e babilônios. Um dos documentos mais famosos é o papiro de Rhind onde foram encontrados cálculos relativos a inclinação da pirâmide, há também registros no papiro de Moscovo que descreve como calcular o volume de um tronco de pirâmide, dessa forma, percebemos uma grande relevância histórica e matemática da análise dos poliedros do ponto de vista da construção do conhecimento humano.

O interesse quase que natural pelas formas poliédricas, não era puramente estética/arquitetônico, más sim, de utilidade e até mesmo de diversão, pois numa escavação junto a cidade de Pádua foi descoberto um dodecaedro etrusco que data de (500 a.C.), que era uma peça utilizada em jogos de tabuleiro e os egípcios usavam um icosaedro como dado com a mesma finalidade.

Atualmente os poliedros são encontrados no nosso cotidiano, em embalagens de produtos, nos projetos arquitetônicos, nas artes, na produção de joias, etc. Além disso, podemos encontrar aplicações em coisas simples como queda da água do telhado de uma casa, até coisas mais complexas como estruturas tridimensional de moléculas de elementos químicos. Uma aplicação importante do estudo dos poliedros está ligado ao design industrial (na confecção de moldes de vinil e decomposições de chapas metálicas) que através de suas planificações buscam o volume ótimo usando a menor quantidade de material.

Temos estudos de poliedros em computação gráfica como uma malha de controle para a representação de superfícies suaves e mais complicadas, que é muito utilizada na produção de filmes em animação e também em jogos de última geração. Os poliedros regulares também conhecidos como sólidos platônicos (cubo ou hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) se manifestam na natureza (cristais, moléculas, etc.). Na meteorologia e climatologia, destacam-se cada vez mais os modelos baseados em um icosaedro refinado por subdivisão para analisar o fluxo atmosférico meteorológico.

Estudar elementos tão belos já seria motivo suficiente para os aficionados pela matemática, porém, em vista de todas essas aplicações importantes citadas anteriormente fica devidamente justificado a importância social/científica para o estudo dos poliedros. Quando estudamos os poliedros o ponto mais polêmico e desafiador é o que trata do teorema de Euler, ao qual destacaremos nesse trabalho, devido a importância estratégica para alcançarmos o nosso objetivo de um ensino matemático mais coerente e significativo.

## 2.1 Curiosidades históricas em torno do Teorema de Euler para poliedros

O Teorema de Euler para poliedros foi descoberto em 1758, foi o único teorema que o próprio Euler enunciou e não demonstrou, talvez por que a definição de poliedros que Euler pensava não seja igual a definição dos tempos atuais, devido a esse fato, se não forem tomados os devidos cuidados com a definição de poliedros, o teorema em questão pode apresentar contra exemplos, ver Fig. 2 . Segundo o professor Lima,

> Todo mundo sabe que, para poder demonstrar um teorema, é necessário em primeiro lugar que todos os conceitos mencionados no enunciado tenham sido previamente definidos (ou façam parte de uma relação explícita de elementos primitivos, aceitos sem definição) e, em segundo lugar, que sejam declaradas explicitamente as hipóteses ou condições que tais conceitos devem cumprir (LIMA, 1991, P.20).

Como no ano de 1758 a definição de poliedro convexo ainda não estava devidamente estabelecida, e o matemático Leonhard Euler não se atentou em fazê-la, nem tão pouco o matemático Cauchy, que ao fazer a demonstração do teorema $V - A + F = 2$ deixou alguns detalhes que são apontados e corrigidos por LIMA (1991), que dessa forma contribuiu para aumentar o rigor da demonstração.

Também podemos citar que alguns livros didáticos do Ensino Médio adotam demonstrações equivocadas desse teorema e ainda o expressam de forma deselegante, pois devemos escrevê-lo na seguinte expressão $V - A + F = 2$, onde $V$ é o número de vértices, $A$ número de arestas e $F$ é o número de faces, e não deve ser expresso como $V + F = A + 2$, pois $V - A + F$, tem um significado muito importante na matemática e que devido a sua importância tem o nome de característica de Euler-Poincaré de um poliedro $P$. Essa sentença aparece em topologia, em análise, em geometria diferencial, etc. não queremos dizer aqui que a sentença acima está errada de um ponto de vista da manipulação de equações e sim por uma questão histórica e estética.

Então como explicar o fato de ser tão importante e afirmar que é um teorema que pode ter contra-exemplos, na verdade se não definirmos adequadamente o que é poliedro o teorema apresentaria brechas e não seria verdadeiro sempre, no entanto se fizermos uma devida definição podemos provar que o Teorema é verdadeiro. A questão aqui, é que na época em que Euler enunciou essa relação, não existia uma devida definição para poliedro.

Outro fato marcante que podemos destacar é que esse teorema esteve envolvido em algumas polêmicas sobre a autoria de quem veio a percebê-lo primeiro, tal fato surgiu devido Leibiniz ter encontrado em 1675 manuscritos de Descartes de 1639 nos quais o mesmo produziu resultados de onde se poderia retirar a fórmula $V - A + F = 2$, no entanto tudo indica que ele não notou tal relação. Essa possibilidade foi totalmente descartada após estudos de Henri Lebesgue, pois ele observou que em nenhum momento Descarte faz referência ao elemento "aresta", e sem considerar as arestas essa relação não tem sentido.

Considerando todas essas informações, o nosso próximo passo será o de definirmos os poliedros, para assim, não incorrermos em contra-exemplos.

## 2.2 Estudo dos poliedros.

Devemos atentar que essa definição deve ser adequada com o nível do público que estamos trabalhando, mas, não podemos incorrer em erros devido a ânsia de simplificar as informações para que os alunos compreendam. Poderíamos inclusive destacar que em alguns livros didáticos existem simplificações exageradas, por exemplo: *"os poliedros são sólidos limitados por superfícies planas poligonais."*, essa definição pode dar margem a alguns problemas ver Fig. 2. Se Figuras como essa se enquadrarem na definição de poliedro teríamos grande dificuldades em desenvolvermos uma demonstração para o Teorema de Euler e por conseguinte para outros elementos do poliedro. Dessa forma descrevemos uma definição devidamente rigorosa.

**Definição 1:** Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Existem outros elementos dignos de destaque vistos também na Fig. 1. São eles:

1. Diagonal de uma face é qualquer diagonal do polígono dessa face;
2. Diagonal do poliedro é qualquer segmento de reta cujo extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face;
3. A região formada por todas as faces do poliedro é chamada de superfície do poliedro;
4. A região delimitada por todas as faces do poliedro é o interior do poliedro;

Essa definição foi adotada parcialmente pois segundo os autores citados anteriormente ela excede aos objetivos do Ensino Médio.

**Definição 2:** Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

**Definição 3:** Um poliedro é dito convexo se ao considerarmos dois pontos pertencentes a ele, o segmento de reta que une esses dois pontos está inteiramente contido nesse poliedro. Ver Fig. (3, 4), exemplos de poliedros não convexos, Fig. (5, 6).

Figura 1 – Elementos básicos de um poliedro

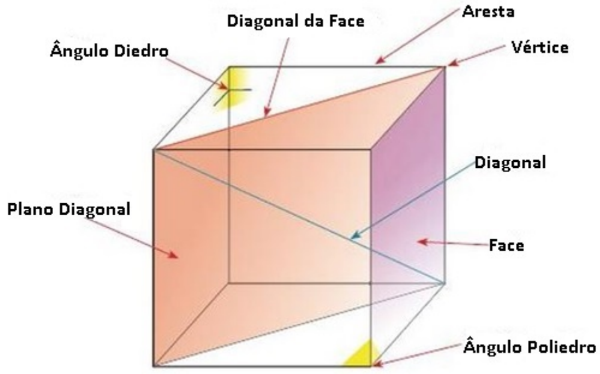



Figura 2 – Caso que contraria a definição de alguns livros do ensino médio

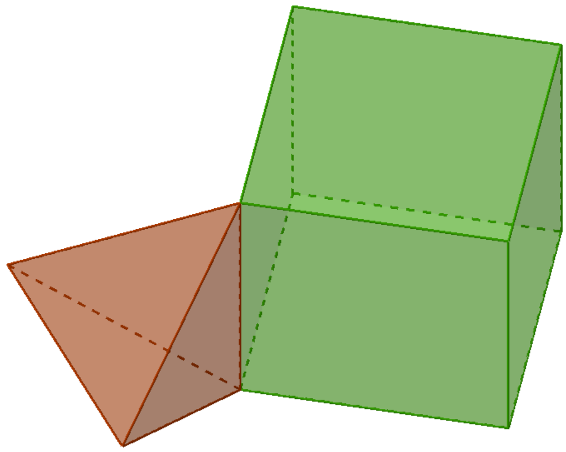


Figura 3 – Poliedro convexo, segmentos de reta inteiramente contido no poliedro

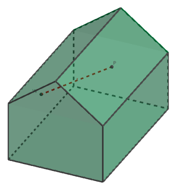


Figura 4 – Poliedro convexo, segmento de reta furando o poliedro, toca no máximo em dois pontos

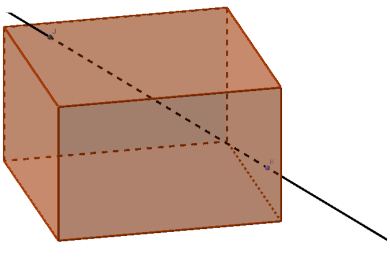


Figura 5 – Segmento de reta não está inteiramente contido no poliedro

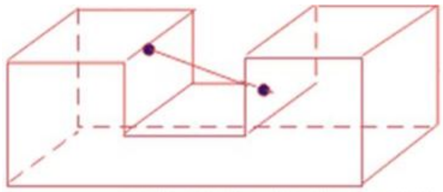
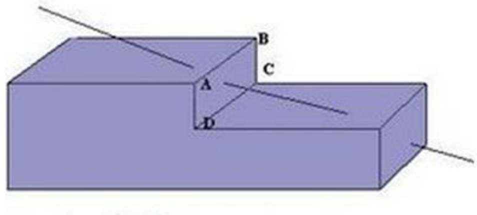


Figura 6 – A reta fura as faces em quatro pontos




### 2.3 Um pouco da História de Leonhard Euler

Para falarmos do Teorema de Leonhard Euler para poliedros, não podemos deixar de comentar um pouco da vida desse extraordinário matemático, que tanto contribuiu para o engrandecimento da matemática, e portanto para o desenvolvimento da humanidade.

Leonhard Paul Euler, entrou na universidade no ano de 1720 aos 13 anos. Em 1723 recebeu o título de mestre. Foi discípulo de Johann Bernoulli e suas primeiras publicações datam de 1726, onde publicou *Construção de curvas isócronas em um meio resistente qualquer*. Em 1727, ele escreveu *Reflexões sobre um problema náutico*, que foi proposto pela ilustre Academia Real de Paris, recebendo menção honrosa, um notório reconhecimento por seu trabalho e genialidade.

No ano de 1727 resolveu partir para Rússia e por sugestão de Daniel e Nicolaus II Bernoulli, Euler foi contratado para a seção de medicina da "Academia de Ciências e Artes Curiosas", chegando a São Petersburgo com apenas 20 anos de idade. Esse foi um período de conflitos muito intensos, pois a rivalidade entre os seguidores de Descartes, Newton e Leibniz se intensificavam. Nesse período turbulento, Euler foi transferido da seção de medicina para a Academia de Matemática, tornando-se professor de matemática em São Petersburgo.

No ano de 1738, Euler perdeu a visão direita e ficou com a esquerda muito prejudicada, em consequência de uma doença cutânea que afetou os gânglios linfáticos do pescoço. Devido aos problemas políticos da Rússia, resolveu aceitar o convite de Frederico II e partiu para Prússia em 1741, constituindo moradia em Berlim, durante o período que esteve nesse país produziu gande número de trabalhos dentre os quais se destaca, *um tratado de mecânica analítica* em 2 volumes, e foi escrito em 1736, *Uma Introdução à Arte da Aritmética* para Uso nas Escolas Elementares afiliadas à Academia Imperial de São Petersburgo, em 2 volumes; em 1739, uma *Teoria da Música*, completou em 1738, uma *Ciência Naval*, que só seria publicada em 1749 com 2 volumes.

Chegando em Berlim foi convidado a fazer parte da Sociedade de Cientistas, que estava se reformulando seguindo o exemplo da Academia de Ciências de Paris. Nesse período o próprio Frederico II solicitou que Euler se dedicasse a questões que favorecessem as campanhas militares da época, Euler comentou:

> Nestes dias quase ninguém mais duvida da grande utilidade da matemática, pois as várias disciplinas e artes necessárias para o cotidiano não podem ser tratadas sem sua ajuda. Contudo, muitos dizem que essa utilidade pertence apenas às partes mais simples desta ciência, assim dizendo, aos seus elementos, enquanto à matemática "superior"é negada qualquer utilidade. [...] A crítica à matemática superior, por estar se aprofundando muito na sua busca da verdade, deveria ser considerada uma razão para elogiar esta ciência e não para culpá-la (D'AMBROSIO, 2009, P.22).

Nesse período Euler sentia-se no ambiente perfeito para suas pesquisas. Em 1746 foi nomeado diretor da seção de matemática da Academia de Ciência de Berlim, tendo assumido mesmo que informalmente o cargo de presidente da academia após a morte de Maupertuis. Em meio a várias condições favoráveis erradicou-se em Berlim.

As disputas políticas e os debates filosófico-teológico entre Descartes, Newton e Liebniz estavam cada vez mais intensos, especialmente após a publicação do controvertido *Princípio da Mínima Ação*, que foi proposto por Maupertuis. Estes fatos incomodaram Euler, inclusive ele percebeu que Frederico II não considerava as suas pesquisas importantes, fazendo-o sentir-se desprestigiado, diminuindo assim a satisfação em permanecer na cidade de Berlim, este fato agravou-se após o fim da Guerra dos Sete Anos em 1763, quando Frederico II recusou-se a nomeá-lo presidente da Academia de Berlim.

Enquanto em Berlim, a produção de Euler foi intensa, tendo sido catalogados cerca de 400 trabalhos, a quantidade de manuscritos foi tão grande que alguns só foram publicados após a sua morte. Dentre ele podemos destacar, *Teoria do Movimento de Planetas e Cometas* ambos publicados em 1744, *Novos Princípio de Artilharia* publicado em 1745 e no mesmo ano produziu *Introdução às Ciências Naturais* que só foi publicado em 1862 após a sua morte, em 1748 o *Introdução à Análise dos Infinitos*, e *Reflexões sobre o Espaço e o Tempo.*

Diante do seu descontentamento em 1766 Euler decidiu voltar para São Petersburgo, atendendo ao convite de Catarina II, a Grande, nessa ocasião lhe foi oferecido altíssimo salário, excelente moradia e emprego para seus filhos, começando assim outra fase de grande produção acadêmica para esse ilustre Matemático.

No ano de 1771, Leonhard Euler perdeu a visão do olho esquerdo ficando totalmente cego, porém, devido a sua privilegiada memória ditava seus textos para alguns assistentes. No dia 7 de setembro de 1783 Leonhard Euler veio a falecer, possivelmente de um acidente vascular cerebral. Foi sepultado no mosteiro Alexander Nevsky Navra um dos mais importantes da Rússia.

Na sua segunda estadia em São Petersburgo, produziu cerca de 275 trabalhos entre 1766 e 1783, dentre os quais destacaremos *Introdução Completa à Álgebra*, 2 vols. Esse livro de matemática é o segundo mais impresso do mundo, só perdendo para os elementos de Euclides. Após a sua morte Leonhard Euler foi devidamente homenageado e glorificado pelo governo russo assim como pelas Academias da Europa, refletindo através desses elogios o reconhecimento da grande contribuição que ele deixou para toda a humanidade.

## 2.4 Teorema de Euler para poliedros convexos

Como já definimos devidamente poliedro convexo, podemos agora partir para a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos, pois sob esse contexto a demonstração é mais acessível, não se tornando inadequada para os alunos do ensino médio.

**Definição 4**: Superfície poligonal convexa é a região cujo o bordo é uma única poligonal fechada onde o ponto inicial é igual ao ponto final.

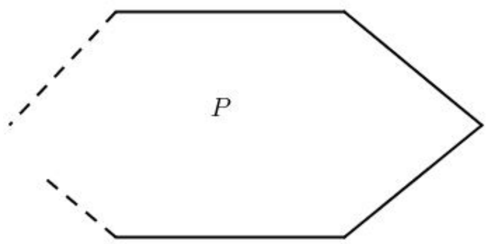
**Teorema 1.** *Seja $P$ um poliedro convexo com $V$ vértices, $A$ arestas e $F$ faces, temos que $V - A + F = 2$.*

**Demonstração:** Seja P um polígono convexo, com $V$ vértices, $A$ arestas e $F$ faces, conforme Figura (7). Ao analisarmos os elementos básicos é fácil ver que, por ser um polígono, $F = 1$, suponhamos que $V = V_1$ e $A = A_1$, ambos arbitrários.

Como todo polígono o número de vértice é igual ao número de lados, ou seja $V_1 - A_1 = 0$, logo para uma superfície poligonal plana vale

$$V_1 - A_1 + F_1 = 1. \qquad (1)$$

Figura 7 – Póligono qualquer




Consideremos agora um polígono $P_2$ com as seguintes características o número de arestas $A_2 = K$ e os Vértices $V_2 = K$. Ao unirmos as duas regiões poligonais $P_1$ e $P_2$, através de um lado (aresta) que se encaixe perfeitamente, conforme Fig. 8 dois lados passam a ser uma aresta e quatro vértices passa a ser apenas dois.

Ao considerarmos o polígono inicial P1, devemos colocar polígonos adicionais de forma a atender as seguinte condições de construção:

1 - os polígonos adicionais devem ser colocados em torno do polígono inicial até que não sobrem nenhuma aresta livre;

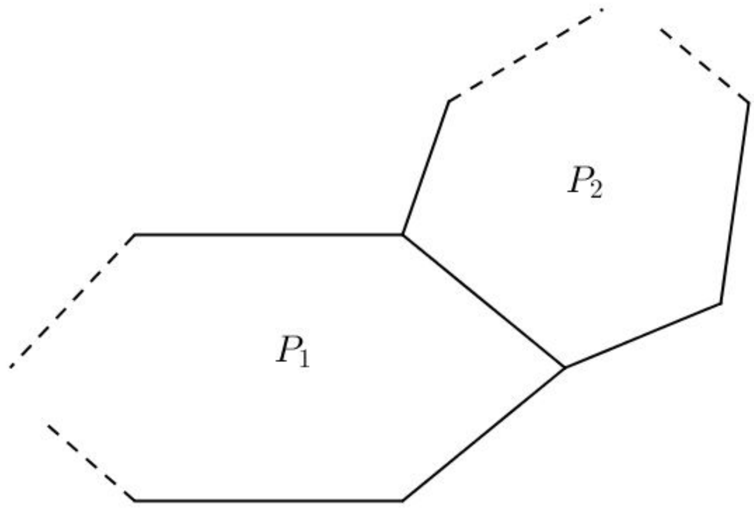
2 - nenhuma nova face deve estar contida em planos que já contenha algum outro polígono;

3 - o número de faces a ser colocada deve ser finito, sendo que em determinado momento ao acrescentarmos um certo polígono, possamos fechar a região poligonal.

Ao unirmos os polígonos $P_1$ e $P_2$, teremos:

1. Número de faces $F = F_1 + F_2 = 1 + 1$;
2. Número de Arestas $A = A_1 + A_2 = A_1 + K - 1$;

Figura 8 – Junção dos Polígonos $P_1$ e $P_2$




3. Número de Vértices $V = V_1 + V_2 = V_1 + K - 2$.

Aplicando esses novos valores em $V - A + F$, obtemos

$$\begin{gathered} V - A + F = (V_1 + K - 2) - (A_1 + K - 1) + (F_1 + 1) = \\ V_1 - A_1 + F_1 + K - K - 2 + 1 + 1 = \\ V_1 - A_1 + F_1 = 1, \end{gathered}$$

de acordo com a sentença (1).

Seguindo esse raciocínio, podemos acrescentar polígonos convexos para moldarmos uma superfície poligonal convexa, até obtermos um poliedro convexo de acordo com a Definição(2).

Consideremos então uma região poligonal composta pelos polígonos convexos $P_1, P_2, P_3, ..., P_i$ conforme Fig. 9. Suponhamos que a quantidade de Vértices $V_i$, Arestas $A_i$ e Faces $F_i$, onde $(i \geq 1)$, suponhamos ainda que ao adicionarmos uma nova face $P_{i+1}$, a nossa região poligonal continue aberta, obtemos $V_{i+1}$ vértices, $A_{i+1}$ arestas e $F_{i+1}$ faces. Ao considerarmos o número de (arestas) de $P_{i+1}$ igual a $n$ e dessa forma $n$ vértices, seja $r$ o número de vértices coincidem $(2 \leq r < n)$, com os vértices da **Figura** (9), oberemos na nova superfície poligonal $P_{i+1}$ polígonos e consequentemente $n - r$ vértices, $n - r + 1$ arestas e uma face a mais. Dessa forma seguindo o raciocínio anterior temos

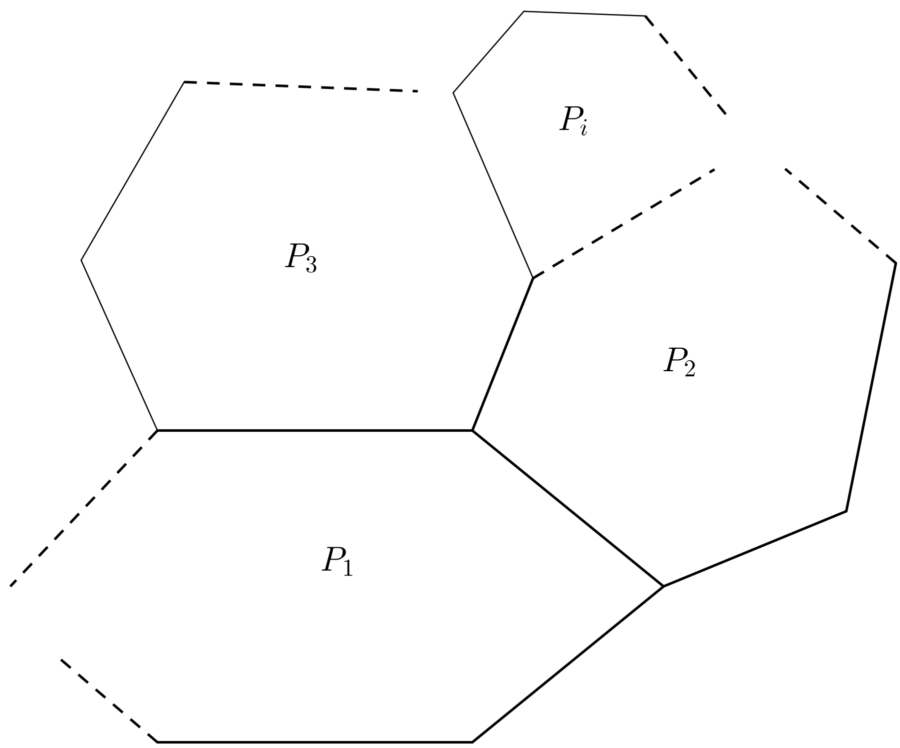
$$\begin{gathered} V_{i+1} - A_{i+1} + F_{i+1} = (V_i + n - r) - (A_i + n - r + 1) + (F_i + 1) = \\ V_i - A_i + F_i + n - n - r + r - 1 + 1 = V_i - A_i + F_i \qquad (2) \end{gathered}$$

Relacionando (1) e (2)

$$\begin{gathered} i = 1 \Rightarrow V_1 - A_1 + F_1 = 1; \\ i = 2 \Rightarrow V_2 - A_2 + F_2 = 1; \\ i = 3 \Rightarrow V_3 - A_3 + F_3 = 1; \\ i = 4 \Rightarrow V_4 - A_4 + F_4 = 1; \end{gathered}$$

.

Figura 9 – Junção dos Polígonos $P_1$ até $P_i$




.

.

Para

$$i + 1 \Rightarrow V_{i+1} - A_{i+1} + F_{i+1} = 1, \forall i,\ i \in N^* \qquad (3)$$

Como o número de faces de um poliedro é finito, em algum momento ao adicionarmos uma face adequada o fecharemos. Dessa forma não é difícil perceber que não adicionamos vértices e tão pouco arestas, no entanto, terá sido adicionado uma face.

Como a superfície contem $V_{i+1}$ vértices, $A_{i+1}$ arestas e $F_{i+1}$ faces, ao adicionarmos a última face teremos uma quantidade

$$V = V_{i+1},\ A = A_{i+1} \text{ e } F = F_{i+1} + 1.$$

pois não adicionamos novos vértices e nem novas arestas, no entanto teremos $F = F_{i+1}+1$, pois estamos adicionando uma nova face, logo:

$$V - A + F = V_{i+1} + A_{i+1} + F_{i+1} + 1 =,$$

como sabemos da sentença (3),

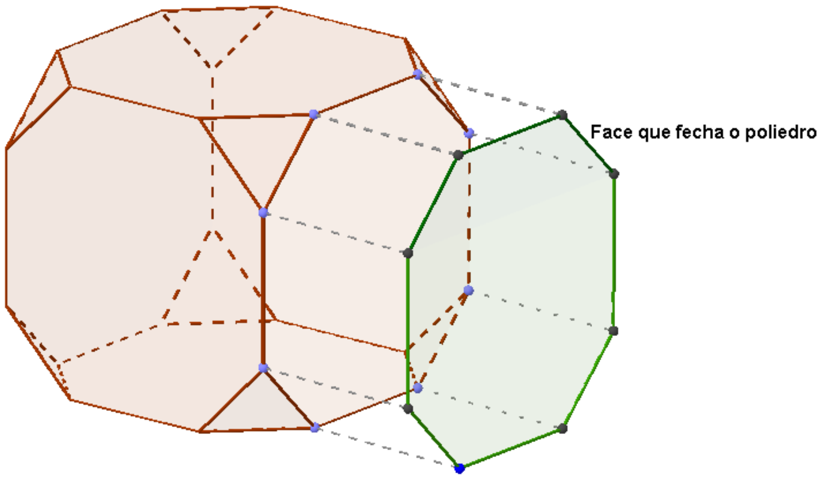
$$V_{i+1} + A_{i+1} + F_{i+1} = 1,$$

então

$$V - A + F = 1 + 1 =$$

$$V - A + F = 2\ \square.$$

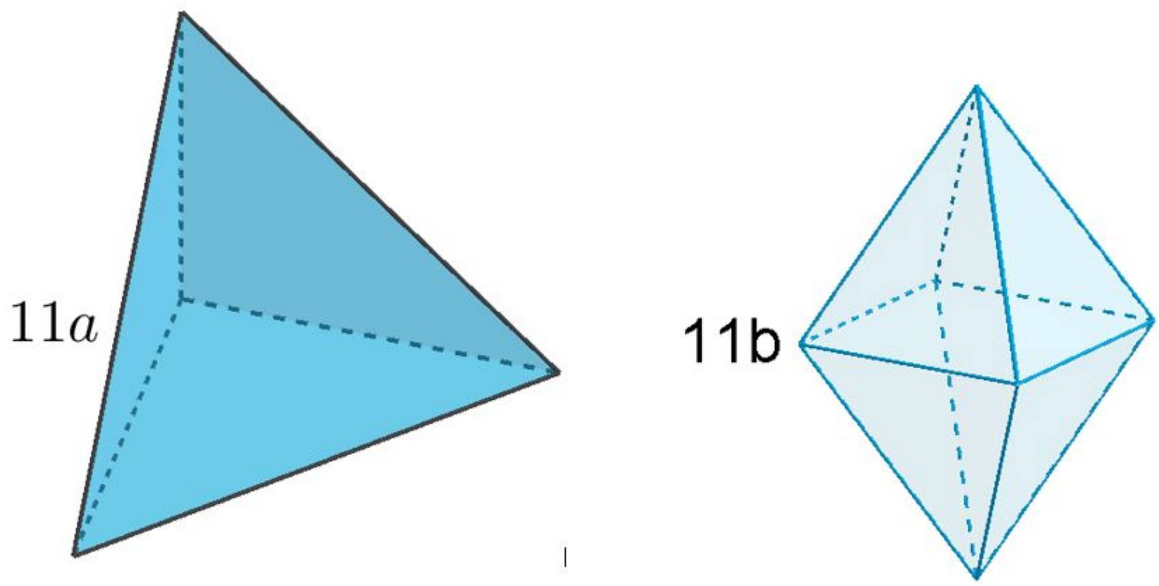
Figura 10 – Colocando a superfície poligonal que fecha o Poliedro




### 2.5 Poliedros que satisfazem o Teorema de Euler

Agora estamos em condições de analisar alguns casos, para constatar a veracidade do Teorema de Euler. Como podemos observar nas Fig. 11a e 11b, os poliedros são convexos, e portanto que $V - A + F = 2$. De fato,

Figura 11 – Poliedros convexos




Observemos agora o que acontece quando fazemos essa mesma verificação com um poliedro não convexo. Nas Fig. 12 e 13 temos poliedro não convexos conforme

Tabela 1 – Análise do teorema de Euler nos poliedros convexos Fig. 11a e 11b

| **Elementos** | **Figura 11a** | **Figura 11b** |
|---|---|---|
| **V** | 4 | 6 |
| **A** | 6 | 12 |
| **F** | 4 | 8 |
| **Verificação** | 4-6+4=2 | 6-12+8=2 |

Definição 3.

Figura 12 – Poliedro não convexo com reentrância

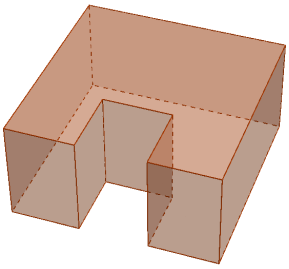
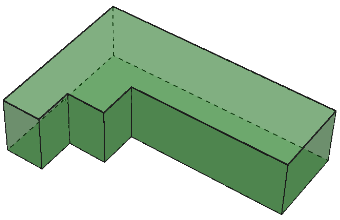


Figura 13 – Poliedro não convexo



Os poliedros das fig. 12 e 13, apesar de não serem convexos apresentam resultado de $V - A + F = 2$, verdadeiro. Vamos analisar abaixo a validade de cada um deles.

No poliedro da Fig. 12, $V = 16$, $A = 24$ e $F = 10$, se substituirmos em $V - A + F = 2$ temos, $16 - 24 + 10 = 2$, mostrando que nesse caso o teorema é verdadeiro mesmo o poliedro não sendo convexo. Façamos agora uma análise sobre o poliedro da Figura 13, de acordo com os dados da Tabela 2, percebemos que o teorema também se aplica a alguns poliedros não convexos.

Figura 14 – Poliedros não convexos em que o Teorema de Euler não se aplica

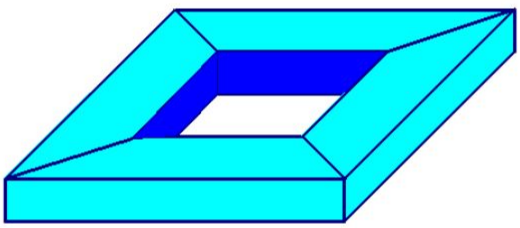


Tabela 2 – Análise dos poliedros não convexos figuras 12 e 13

| Elementos | Figura 12 | Figura 13 |
|---|---|---|
| $V$ | 16 | 16 |
| $A$ | 24 | 24 |
| $F$ | 10 | 10 |
| Verificação | $16 - 24 + 10 = 2$ | $16 - 24 + 10 = 2$ |

Analisando o poliedro da Fig. 14, percebemos que ele não é convexo, diferente dos dois casos anteriores não obedece ao teorema em questão, ver Tabela 3.

Tabela 3 – Análise de poliedro não convexo dafigura 14

| Elementos | Figura 14 |
|---|---|
| $V$ | 16 |
| $A$ | 32 |
| $F$ | 16 |
| Verificação | $16 - 32 + 16 = 0$ |

Vimos que nas Fig. 11a e 11b, como esperado o teorema se aplica, pois os poliedros em questão são convexos, já nas Fig. 12 e 13 apesar de não serem convexos o resultado foi positivo, porém na Fig. 14 a verificação não se confirmou, daí percebemos que a hipótese ser convexo é necessária más, não é suficiente para determinar a abrangência do teorema em questão. Estes questionamentos perduraram por mais de um século, até que, Poincaré em 1893, percebeu que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia[1], ao notar que $V - A + F$ é uma invariante topológica. Para maiores detalhes veja LIMA (1991).

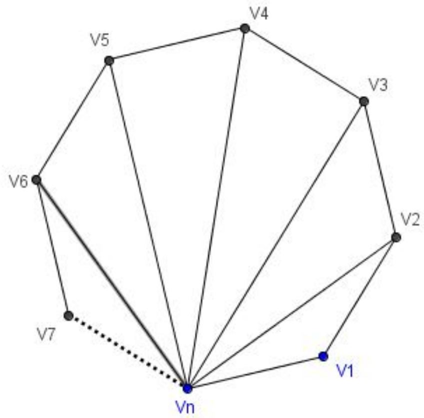
[1]Topologia (do grego topos, "lugar", e logos, "estudo") é o ramo da matemática que estuda os espaços topológicos, sendo considerado como uma extensão da geometria.

## 2.6 Soma dos ângulos das faces de um poliedro.

De acordo com o significado da palavra poliedro, que vem do grego "polyedros", (poli) muitas e (edro) faces, é crucial entendermos alguns aspectos matemáticos ligados aos polígonos que constituem o poliedro.

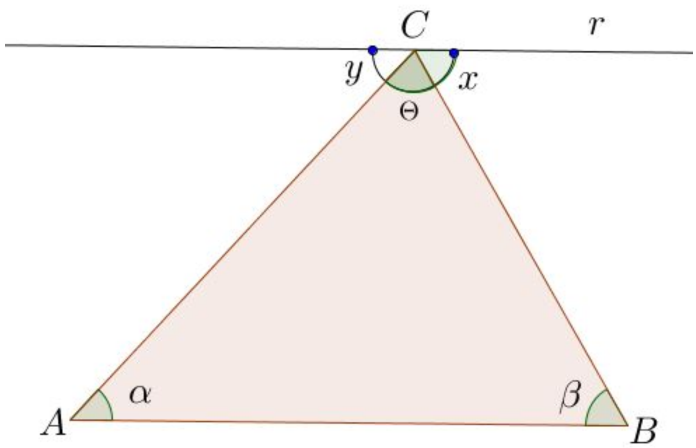
Consideremos um polígono \$P$" de $n$ lados. Se considerarmos um dos seus vértices $V_n$ e ligarmos todos os segmentos de reta desse ponto até os outros vértices não adjascentes, teremos produzido $(n-2)$ triângulos. (Ver Figura 15).

Figura 15 – Polígono dividido em $(n-2)$ triângulos




**Teorema 2.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.*
**Demonstração:** Considere o triângulo ABC cujo as medidas do ângulos seja Â=$\alpha$, $\hat{\text{B}}$=$\beta$ e $\hat{\text{C}}$=$\theta$, conforme Fig.2 abaixo.Traçamos por C uma reta paralela ao lado AB,

Figura 16 – Triângulo qualquer




Observe que

$$x+\theta+y = 180^{\circ},$$

pois formam um ângulo raso em C. Sabemos também que

$$x = \beta \text{ e } y = \alpha \qquad (1)$$

pois são ângulos alternos internos. Como

$$x+\theta+y = 180, \qquad (2)$$

substituindo (1 ) em (2), temos

$$\beta+\theta+\alpha=180^{o} \qquad \square.$$

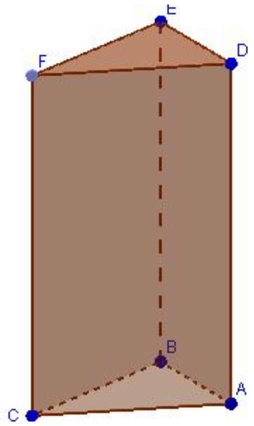
**Teorema 3.** *A soma dos Ângulos internos de um polígono é* $S = (n-2).180^{o}$*.*

Demonstração: De fato sabemos de nossa análise anterior que ao dividir o polígono temos $n-2$ triângulos. Do teorema 2 temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180^{o}$. Assim seja $S$ a soma de todos os ângulos dos $n-2$ triângulos, então $S = (n-2).180^{o}$ $\square$.

Conforme a definição de poliedro convexo, faz-se necessário determinarmos a soma dos ângulos de todas as faces desse poliedro.

Inicialmente analisemos o seguinte poliedro (ver figura 17). Observamos que suas faces são 3 retângulos nas laterais e 2 triângulos nas bases superior e inferior. Utilizando a equação demonstrada acima, $S = (n-2).180^{o}$, para os quadriláteros temos: $n = 4$, logo cada quadrilátero possui $S = 360$

Figura 17 – Primas de Base Triangular




Como temos 3 faces quadrangulares vemos que a soma dos ângulos dessas faces é $3.360^{o} = 1080^{o}$. De forma análoga obtemos que a soma dos ângulos das duas bases triangulares é $2.180^{o} = 360^{o}$. Seja $S_p$ a soma dos ângulos da face de um poliedro, logo $S_p = 1080^{o} + 360^{o} = 1440^{o}$, obtendo assim, a soma dos ângulos das faces desse prisma.

Vamos analisar a soma dos ângulos de mais um poliedro seguindo a ideia de separar face por face. Na Fig. 4, percebemos que são 6 faces quadrangulares e 2 hexagonais, dessa forma temos:

Para $n = 4$

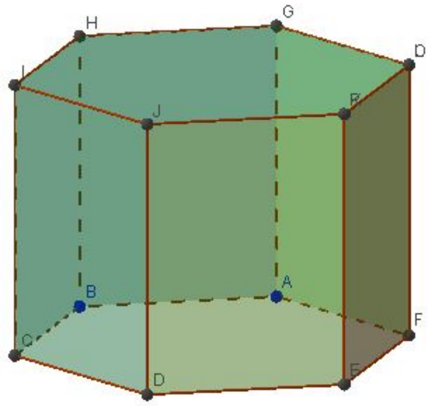
$$S_4 = (4-2) \times 180^{o} =$$
$$S_4 = 2 \times 180^{o} = 360^{o}$$

Como são 6 faces retangulares,

$$= 6 \times 360 = 2160^{o}.$$

Procedendo de forma análoga para as bases inferior e superior, que são hexágonos

Figura 18 – Primas de Base Hexagonal




temos,

$$S_6 = (6-2) \times 180 = 4.180 = 720.$$

Como temos duas faces, então

$$2 \times 720 = 1440.$$

Logo concluímos que

$$S_p = 2160^o + 1440^o = 3600,$$

ou seja, a soma dos ângulos das faces de prisma de base hexagonal é $Sn = 3600^o$. Analisando cada um dos elementos desses poliedros, conforme os cálculos abaixo, percebemos que $1440 = 4.360 = (6-2).360$, e ainda que $3600^o = 10.360^o = (12-2).360^o$, os números 6 e 12 são respectivamente o número de vértices de cada um dos poliedros.

Mais geralmente temos o seguinte teorema.

**Teorema 4.** *A soma $S_p$ dos ângulos das faces de um poliedro convexo que têm "V"vértices é dado por $S_p = (V-2).360^o$.*

Demonstração: Seja um poliedro convexo $\backslash P$", com $V$ vértices, $A$ arestas e $F$ faces. Consideremos ainda, que o número de faces variam de (4 a F), pois o número mínimo de faces presentes em um poliedro é 4 e que o número de arestas de cada face sejam indicados por $(n_1, n_2, n_3, ..., n_F)$, onde $n_1 = 3$.

Pelo Teorema 2, podemos calcular individualmente a soma dos ângulos de cada uma das faces:

$S_1 = (n_1-2) \times 180^o, S_2 = (n_2-2) \times 180^o, S_3 = (n_3-2) \times 180^o, ..., S_F = (n_F-2) \times 180^o$, agora podemos somar os ângulos das faces um a um, logo

$$S_p = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_F =$$
$$S_p = (n_1-2) \times 180^o + (n_2-2) \times 180^o + (n_3-2) \times 180^o + ... + (nF-2) \times 180^o =$$
$$S_p = 180^o \times n_1 - 2 \times 180^o + 180^o \times n_2 - 2 \times 180^o + 180^o \times n_3 - 2 \times 180^o + ... + 180^o \times n_F - 2 \times 180^o =$$
$$S_p = 180^o \cdot n_1 + 180^o \cdot n_2 + 180^o \cdot n_3 + ... + 180^o \cdot n_F - 2 \cdot 180^o - 2 \cdot 180^o - 2 \cdot 180^o - ... - 2 \cdot 180^o =,$$

observe que os fatores $-2 \cdot 180^o$ se repetem "F"vezes, e que podemos fatorar

$$180^o \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F),$$

então

$$S_p = 180^o \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F) - F \cdot 360^o,$$

como sabemos que

$$(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F) = 2A,$$

podemos substituir na sentença anterior e ficamos com,

$$S_p = 180^o \cdot 2A - F \cdot 360^o =,$$

ou seja,

$$S_p = 360^o A - F \cdot 360^o,$$

fatorando o

$$360^o,\ S_p = 360^o \cdot (A - F)(1).$$

Pelo Teorema de Euler temos,

$$V - A + F = 2,\ V - 2 = A - F\ (2),$$

substituindo (2) em (1), obtendo a equação desejada,

$$S_p = (V - 2) \cdot 360^o,\ \square$$

### 2.7 Cálculo do número de diagonais de um poliedro

Durante a nossa busca por entendermos melhor os poliedros, não poderíamos deixar de analisar o número de diagonais. Apesar de vários autores de livros destinados ao Ensino Médio não incluírem nas suas obras, entendemos que esta atitude gera um desperdício da oportunidade de utilizar os conhecimentos adquiridos na parte de combinatória, promovendo um link entre dois conteúdos matemáticos de áreas diferentes.

Para que possamos entender melhor os próximos passos, faz-se necessário algumas definições, como diagonal de um poliedro e combinação simples:

**Definição 6**: Diagonal de um poliedro é qualquer segmento de reta cujos extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face.

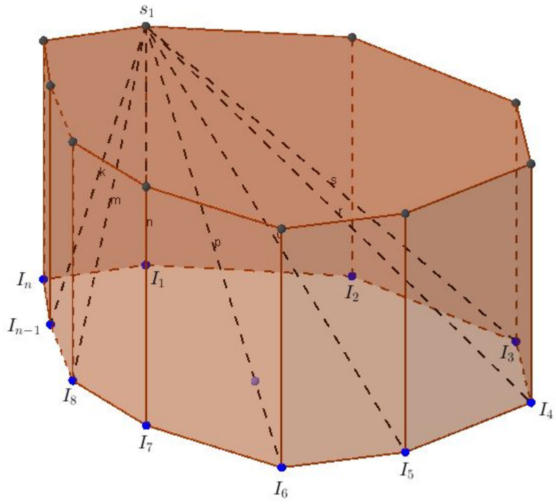
**Definição 7**: Seja um conjunto $I = a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$, formado por $n$ elementos e seja $p$, $p \leq n$. Chama-se combinação simples de p elementos de I, todo subconjunto de $I$ formado por $p$ elementos.

O cálculo das combinações simples podem ser obtidos através da seguinte equação, que a admitiremos sem demonstração:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!.p!}$$

Estaremos admitindo que outras definições como fatorial e arranjos, são conhecidas pelo o leitor, e não as demonstraremos por não fazer parte do foco central do nosso trabalho.

Figura 19 – Exemplos de algumas diagonais de um prisma




Quando pensamos em ligar pontos dos vértices de um poliedro convexo, nos deparamos com um problema que pode ser resolvido com uma contagem direta, no entanto, quanto mais complexo for o poliedro, mais difícil se torna essa tarefa. Dessa forma é interessante que conheçamos uma técnica eficiente que nos auxilie nessa tarefa.

Inicialmente precisamos analisar que tipo de agrupamento geramos ao ligar dois vértices de um poliedro convexo, ver Fig. 19 pois se ligarmos $I_1$ a $I_2$ obtemos um segmento de reta $(I_1I_2)$, que é uma arestas, se ligarmos $S_1$ a $I_2$, temos uma diagonal da face e não do poliedro, no entanto se ligarmos $S_1I_3, S_1I_4, ...S_1I_n - 1$, encontramos alguns casos de diagonais do poliedro em questão. Pela definição 7 percebemos que ao ligar esses vértices, obtemos agrupamentos que se enquadram em uma combinação, pois, um segmento de reta $S_1I_3 \cong I_3S_3$, a mudança de posição das letras não gera um novo agrupamento.

Dessa forma apresentamos este tema dando enfoque ao aspecto de que a maneira de ligar um número finito de vértices $V$, perpassa por um problema de combinação simples e promove uma interação importante entre contagem e geometria espacial.

A quantidade de diagonais de um poliedro convexo (ver definição 6) pode ser calculada usando a seguinte técnica:

1º - Verificamos de quantas formas podemos ligar os $V$ vértices do poliedro convexo dois a dois, não esquecendo que ao fazer esse procedimento, contamos todos os segmentos possíveis, incluindo arestas e diagonais da face do poliedro;

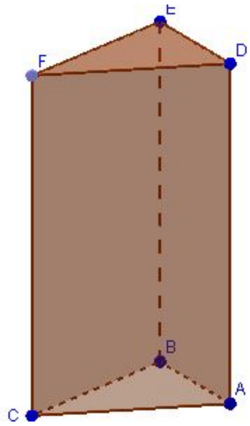
2º - Retiramos os segmentos que formam as arestas do poliedro;

3° - Retiramos os segmentos que formam diagonais das faces.

Seguindo esses simples passos encontramos o número de diagonais do poliedro convexo. Para deixar mais claro as nossas sugestões vamos analisar alguns exemplos.

*Exemplo.*: Vamos determinar o número de diagonais da Fig.v 19 prisma de base triangular. Analisando os elementos básicos do poliedro verificamos que o mesmo tem, número

Figura 20 – Primas de Base Triangular




de vértices $V = 6$, arestas $A = 9$ e faces $F = 5$ assim, podemos utilizar os passos sugeridos acima.
1- através de uma combinação determinamos todos os segmentos possíveis ligando os vértices 2 a 2;

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!.2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2.1} = \frac{30}{2} = 15,$$

encontrando assim, 15 segmentos de reta distintos. Não podemos esquecer que contamos as arestas e as diagonais das faces, devemos retirá-las do total encontrado. De acordo com a Fig. 19 o número de arestas são 9, dessa forma não podemos contá-las como diagonais do poliedro. Só nos falta saber quantos seguimentos são diagonais da face, pois, estas também não podem ser contadas. para determinarmos as diagonais das faces é necessário analisar individualmente todos os polígonos que compõe o poliedro.

Como o prisma de base triangular contém 3 faces laterais (quadrangulares) e as 2 bases superior e inferior que são triângulos.

Nesse ponto podemos inclusive analisar como determinar as diagonais de um polígono convexo. Em alguns livros temos as diagonais de polígonos convexos sendo calculada através da fórmula

$$D_F = \frac{n.(n-3)}{2},$$

no entanto, a tarefa de ligar pontos no plano também apresenta as mesmas características de ligar pontos no espaço, dessa forma podemos aplicar a mesma ideia inicial e com isso mostraremos que essa equação é consequência direta do desenvolvimento de uma combinação.

**Teorema 5.** *O número de diagonais de um polígono pode ser obtido pela equação*

$$D_p = \frac{n.(n-3)}{2},$$

*onde "$n \geq 3$" é número de vértices.*

Como a quantidade de vértices é igual ao número de lados, podemos nos referir a $n$ como sendo os lados do polígono.

**Demonstração 5:** Seja $P$ um polígono com $n$ vértices e $D_p$ o número de diagonais do polígono, considerando todas as maneiras de ligar esses vértices dois a dois, podemos utilizar a equação proposta acima

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!.2!},$$

devemos lembrar que quando ligamos todos os pontos obtemos segmentos que são lados e os que são diagonais, então para determiná-las precisamos separar o número de lados, ou seja,

$$D_p = \frac{n!}{(n-2)!.2!} - n =,$$

desenvolvendo essas contas temos

$$D_p = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!.2!} - n =$$

$$D_p = \frac{n.(n-1)}{2.1} - n =$$

$$D_p = \frac{n.(n-1)}{2} - \frac{2n}{2} =,$$

fatorando o $n$

$$D_p = \frac{n.(n-1-2)}{2} =,$$

concluindo assim que

$$D_p = \frac{n.(n-3)}{2} \;\square.$$

Agora podemos dar continuidade ao cálculo das diagonais do prisma de base triangular. Podemos verificar que uma face quadrangular tem

$$D_F = \frac{4.(4-3)}{2} = 2,$$

e como temos 3 faces quadrangulares $3 \times 2 = 6$ diagonais da faces. As faces superior e inferior são triângulos, portanto não temos diagonais nesse caso. Assim,

$$\Sigma D_F = 6 + 0 = 6.$$

Consequentemente temos que, dos 15 segmentos de reta 9 são arestas, 6 são diagonais das faces. Denotando por $D_P$ diagonais do poliedro, temos,

$$D_P = 15 - 9 - 6 = 0,$$

ou seja, o número de diagonais do prisma de base triangular é nulo.

**Exemplo**: Agora vamos estudar o prisma de base hexagonal Fig. 18, observamos que temos 12 vértices, 8 faces e 18 arestas, seguindo um procedimento análogo ao exemplo anterior temos,

$$C_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!.2!} = \frac{12.11.10!}{10!.2.1} = \frac{132}{2} = 66.$$

Como temos 6 faces quadrangulares do exemplo anterior sabemos que cada uma delas tem 2 diagonais nas faces,

$$D_F = 6.2 = 12.$$

As faces superior e inferior são hexágonos, seja $D_{FH}$ as diagonais da face hexagonal, temos o número de diagonais de uma face igual a,

$$D_{FH} = \frac{6.(6-3)}{2} = \frac{18}{2} = 9,$$

como são duas faces superior e inferior, $2 \times 9 = 18$ diagonais, logo a soma das diagonais das faces laterias seguidas das faces superior e inferior é dada por,

$$12 + 18 = 30$$

Podemos agora concluir o nosso procedimento verificando que é possível traçar 66 segmentos de reta utilizando os seus 12 vértices tomados 2 a 2, onde 18 são arestas e $D_F = 12 + 18 = 30$ são diagonais das faces, portanto os segmentos restantes são diagonais do primas $D_P$,

$$D_P = 66 - 18 - (12 + 18) \Rightarrow D_p = 18$$

De uma forma resumida podemos escrever a seguinte sentença, que pode nos auxiliar no cálculo do número de diagonais de qualquer poliedro convexo.

$$D_P = C_{V,2} - A - \Sigma D_F.$$

## 2.8 Poliedros de Platão

Durante o estudo dos poliedros no Ensino Médio, cinco deles recebe grande destaque devido a características como todas arestas congruentes, mesmo número de arestas em cada vértice, a existência de apenas cinco classes de poliedros regulares, que são (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e o icosaedro), a eles também são dado o nome de sólidos de Platão.

Para realizarmos uma análise criteriosa acerca desse poliedros faremos as devidas definições de poliedros regulares e poliedros de Platão, estaremos utilizando uma notação específica a qual segue a devida legenda:
$I_R$ - Propriedade I do poliedro regular;
$II_R$ - Propriedade II do poliedro regular.

De forma análoga quando nos referirmos aos poliedros de Platão utilizaremos:
$I_P$ - Propriedade I dos poliedros de Platão ;
$II_P$ - Propriedade II dos poliedros de Platão;
$III_P$ - Propriedade III dos poliedros de Platão.

**Definição 8:** Um poliedro convexo é regular se, e somente se, forem obedecidas as seguintes condições:
$I_R$ - todas as suas faces são regiões poligonais regulares e congruentes entre si;
$II_R$ - todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

**Definição 9**: Um poliedro é dito de Platão quando:
$I_P$ - todas as faces têm o mesmo número de arestas;
$II_P$ - todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;
$III_P$ - Vale para o poliedro a relação de Euler, $V - A + F = 2$.

Se observarmos essas três condições em momento nenhum elas citam que os polígonos das faces devem ser congruentes entre si, ou seja, existem poliedros de Platão que não são regulares. Esta afirmação pode ser observado quando analisamos a definição de poliedros regulares e a comparamos com a definição de poliedros de Platão. Este fato nos proporcionando condições de enunciar o próximo teorema.

**Teorema 6.** *Todo poliedro regular é de Platão, no entanto, nem todo poliedro de Platão é regular.*

**Demonstração.**

Um poliedro regular tem todas as suas faces congruentes entre si, daí podemos perceber que todas as suas faces têm o mesmo número de arestas. Esse fato mostra que a sentença $I_P$ equivale a $I_R$.

Da sentenças $II_P$ e $II_R$ podemos concluir que todos os ângulos poliédricos são congruentes entre si, logo tem mesmo número de arestas. Além disso, como os poliedros regulares são convexos e segue que é válido o teorema de Euler, $V - A + F = 2$. Estes três fatos verificados mostram que todo poliedro regular é de Platão.

Poderíamos mais precisamente dizer que existem apenas cinco classes de poliedros regulares, inclusive devemos destacar aqui que Euclides conclui a sua obra os elementos fazendo a seguinte afirmação "...nenhuma outra figura, além das ditas cinco figuras, pode ser construída de modo a ficar contida por figuras, de lados e ângulos internos iguais, e iguais entre si.", inclusive alguns autores cogitam que o objetivo principal dos Elementos é precisamente demonstrar essa afirmação.

Como demonstramos o Teorema de Euler anteriormente, buscaremos verificar a existência de cinco classes de poliedros regulares utilizando essa ferramenta fundamental no nosso trabalho.

**Teorema 7.** *Existem apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.*

**Demonstação.**

Seja $P$ um poliedro (convexo) regular com $V$ vértices, $A$ arestas e $F$ faces. Também consideremos os polígonos das faces desse poliedro destacando que $n$ seja o seu número de lados, com $n \geq 3$, e que $p$ seja o número de arestas que chegam em cada vértice, com $p \geq 3$, pois o menor número de arestas de um ângulo poliédrico é 3 . Percebemos ainda que pelo fato de dois lados de faces distintas ao se unirem formarem uma única aresta, de onde temos que

$$2A = nF \Rightarrow F = \frac{2A}{n}. \qquad (1)$$

Outro fato que podemos destacar é que toda aresta é comum a dois vértices, assim percebemos que

$$pV = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{p}. \qquad (2)$$

Como os poliedros são convexos, vale $V - A + F = 2$. Se substituirmos de forma adequada as sentenças (1) e (2), nessa equação, temos:

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow \frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{n} = 2,$$

dividindo ambos os membros da equação por $2A$, pois $A \neq 0$

$$\frac{\frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{n}}{2A} = \frac{2}{2A}$$

$$\frac{\frac{2A}{p}}{2A} - \frac{A}{2A} + \frac{\frac{2A}{n}}{2A} = \frac{2}{2A} \Leftrightarrow \frac{A}{pA} - \frac{1}{2} + \frac{A}{nA} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A},$$

como $A > 0$, podemos afirmar que $\frac{1}{A} > 0$, logo

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} > 0$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2},$$

nossa hipótese inicial é que $n \geq 3$, vamos verificar o valor de $p$ para $n = 3$,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{p}>\frac{3-2}{6} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{p}>\frac{1}{6} \Rightarrow p<6,$$

como afirmamos que $p \geq 3$ e $p < 6$, concluímos que os valores assumidos por $p$ quando $n = 3$ são $p = \{3, 4, 5\}$. Assim podemos entender que, com triângulos nas faces, temos apenas três poliedros regulares.

Continuando a nossa análise podemos verificar para n=4, temos:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{2-1}{4} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{4} \Rightarrow p<4.$$

Nesse caso como $p$ deve ser número inteiro percebemos que só pode assumir $p = 3$, logo concluímos que com faces quadrangulares só temos um poliedro e chegam 3 arestas em cada vértice do mesmo.

Ainda podemos analisar para n=5, ou seja, com faces pentagonais.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{5}>\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{5-3}{10} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{3}{10} \Rightarrow p<\frac{10}{3},$$

novamente como $p$ deve ser número inteiro, então, $p = 3$. Concluímos então que com faces pentagonais só temos um poliedro e chegam 3 arestas em cada vértice.

Até o momento já temos 3 poliedros com faces triangulares, 1 com faces quadrangulares e 1 com faces pentagonais. Suponhamos agora que exista um poliedro regular com hexágono nas faces, logo teríamos n=6, dessa forma

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{6}>\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{3-1}{6} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{p}>\frac{1}{3} \Rightarrow p<3,$$

o que é um absurdo, pois admitimos a hipótese de que o menor número de aresta que chegam em um vértice de um poliedro é igual a 3, logo percebemos que só existem 5 poliedros regulares $\square$.

Concluímos que só existem 5 poliedros regulares. Falta determinar quais são eles, assim utilizando as ferramentas demonstradas até aqui podemos verificar que: Consideremos que

$$F=\frac{2A}{n}. \qquad (1)$$

$$V=\frac{2A}{p}. \qquad (2),$$

aplicadas ao Teorema de Euler $V - A + F = 2$, e considerando que com faces triangulares $n = 3$ o $p = \{3, 4, 5\}$, obteremos os elementos básicos de cada poliedro. Para $n = 3$,

$$\frac{2A}{3} - A + \frac{2A}{3} = 2 \Rightarrow$$
$$2A - 3A + 2A = 6 \Rightarrow A = 6,$$

dessa forma

$$F = \frac{2A}{3} \Rightarrow F = \frac{2.6}{3} \Rightarrow F = 4,$$

da equação (2) para p=3 obtemos,

$$V = \frac{2.6}{3} \Rightarrow V = 4,$$

o poliedro em questão tem 4 vértices, 6 arestas e 4 faces, ou seja, tetraedro regular.

De forma análoga podemos obter mais 4 poliedros regulares, conforme Tabela 4.

Tabela 4 – Características dos poliedros regulares

| **n** | **p** | **V** | **A** | **F** | **Nome do poliedro** |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | Tetraedro |
| 3 | 4 | 6 | 12 | 8 | Octaedro |
| 3 | 5 | 12 | 30 | 20 | Icosaedro |
| 4 | 3 | 8 | 12 | 6 | Hexaedro |
| 5 | 3 | 20 | 30 | 12 | Dodecaedro |

Concluímos aqui o estudo dos poliedros e os poliedros de Platão, que é o programa mais comum de encontrarmos no Ensino Médio.

# 3 O ENSINO DE MATEMÁTICA

Desde o início da humanidade, a matemática é conhecida pelos homens que desenvolviam uma série de atividades, estabelecendo relações em seu meio, porém sem reflexões científicas. De acordo com o brasileiro Aguinaldo Prandini Ricieri, a matemática surgiu nos primórdios com a percepção que no mundo estão presentes padrões geométricos muito bem definidos, que podem ser comprovados através de cálculos ao analisarmos as várias formas da natureza.

Outro aspecto que gostaríamos de expor, é que na idade das trevas a matemática foi associada ao medo. Santo Agostinho alertava sobre o perigo do relacionamento com os matemáticos, pois os via como enviados do diabo. Hoje, pelos mais diversos motivos a matemática é a disciplina mais temida dos alunos.

Mesmo sabendo que usamos a matemática cotidianamente, e que a mesma nos auxilia na compreensão do meio em que vivemos, a nossa sociedade talvez pelos mitos e crenças voltadas a esta disciplina, faz com que nossos alunos enfrentem as aulas desta disciplina como um fardo ou algo de difícil assimilação e que somente os sábios poderão compreender e fazer uso da mesma.

Porém, é essa visão sombria que permeia o ensino da matemática que devemos desmistificar, e levar ao nosso aluno a ideia de que todos podem e devem usufruir deste bem cultural, que motiva a curiosidade, como também desenvolve as competências e habilidades necessárias a resolução de problemas. A matemática torna-se hoje essencial a vida humana, sem ela seria impossível a evolução e o desenvolvimento mundial, contudo, nem todos se dão conta de tal importância, e deixam-se levar pelos depoimentos que matemática é para poucos.

Assim é importante compreendermos que:

> Aprender matemática é um direito básico de todas as pessoas e uma resposta a necessidades individuais e sociais ... de natureza cultural, prática e cívica que têm a ver ao mesmo tempo com o desenvolvimento dos alunos enquanto individuais e membros da sociedade e com o progresso desta no seu conjunto ... Neste sentido, seria impossível que não se proporcionasse a todos a oportunidade de aprender matemática de um modo realmente significativo (ABRANTES, 1999, p.15).

Dessa forma, a matemática é um direito básico de todo cidadão, e deve ser abordada de modo significativo. Ao desenvolver e planejar o currículo a ser trabalhado em sala, o professor precisa buscar o que é essencial e necessário ao desenvolvimento das competências e habilidades que possibilitem a formação geral do educando, para que ele tenha condição de modificar através dos seus conhecimentos o meio em que vive para benefício de todos.

Assim podemos questionar, o que é essencial no ensino da matemática? Que meios devemos utilizar para alcançarmos os objetivos propostos? Como avaliarmos se o nosso aluno adquiriu as competências e habilidades em matemática?

Os PCN's do Ensino Médio apresentam em seu contexto o papel formativo, instrumental e de ciências da matemática, como também a aquisição de informações e instrumentos para que o aluno possa continuar aprendendo. Com relação ao papel formativo da Matemática os PCN's apontam a sua contribuição no desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Já o caráter instrumental da Matemática, deve ser visto pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Além do caráter formativo e instrumental a Matemática deve ser percebida como ciência, onde as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Através dos três contextos formativo, instrumental e de ciência espera-se que o aluno adquira novas informações e instrumentos necessários aos estudos posteriores, ou seja, detenha condições básicas para continuar aprendendo e aperfeiçoando-se ao longo da vida. Atualmente, pensar em educação é pensar na formação de pessoas capazes de viver em uma sociedade em constante e rápida transformação, podendo selecionar e processar informações.

É preciso dar uma dimensão mais dinâmica ao ensino, possibilitar a criação de um ambiente favorável à exploração e construção de conhecimento, abrir espaços para uma educação mais significativa e dialógica. Hoje, a sala de aula é caracterizada por atividades realizadas pelos alunos e pelo professor, com o intuito de construir conceitos, levando questionamentos a serem discutidos, relacionando conteúdos escolares com atividades vivenciadas no cotidiano, onde o aluno desenvolve sua própria linguagem, relacionada à sua compreensão, interpretando e realmente aprendendo a realidade matemática. O mesmo deve ter um espaço marcado por um ambiente cooperativo e estimulante para o seu desenvolvimento e para que se promova a interação entre os diversos significados que serão apreendidos.

Inicialmente, precisamos entender que o ensino de matemática perpassa por dois aspectos essenciais que são o planejamento e a execução. Esses dois elementos devem ter como foco o desenvolvimento gradativo das habilidades dos alunos em lidar com os mecanismos inerentes da matemática como, raciocínio lógico, capacidade de cálculos para que eles tenham condições de aplicá-la em seu cotidiano.

## 3.1 Pontos estratégicos do ensino de matemática

Para obtermos sucesso nessa jornada o ensino de matemática deve conter segundo Lima 1991 "... três componentes fundamentais ... conceituação, manipulação e aplicação", trabalhando de forma adequada essas três componentes obteremos resultados satisfatórios na aprendizagem, dentre eles podemos destacar

> ... o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento das três componentes básicas (LIMA, 2001, p.140).

De fato, quando ensinamos matemática não podemos nos sustentar sem as devidas definições, estas nos dão suporte para desenvolvermos as demonstrações e provas que devem ser manipuladas de forma adequada para que possamos verificar a validade das nossas hipóteses que são essenciais para uma compreensão plena de situações diversas. Dessa forma podemos aplicar esses conceitos na resolução de situações problemas, somente assim percebemos que os objetivos do ensino aprendizagem da matemática ocorreram de forma harmônica e equilibrada.

Podemos destacar que a conceituação compreende à formulação correta e objetiva dos conceitos matemáticos, aspectos esses característicos desta disciplina, favorecendo dessa forma o raciocínio lógico e dedutivo do aluno. A partir desse ponto é extremamente importante que o aluno demonstre habilidade e destreza no manuseio das propriedades matemáticas, dessa forma poupando-o de desperdiçar energia e tempo.

Após os elementos mais técnicos da matemática serem desenvolvidos podemos partir para a aplicação desses conceitos na resolução de situações-problemas, para assim atingirmos a tão almejada contextualização. Devemos perceber que o que torna a matemática indispensável no processo evolutivo da sociedade, é a sua capacidade de mediante uma devida análise conseguirmos aplicá-la na resolução de problemas, seja das ciências naturais seja das ciências sociais ou de outra área qualquer, dessa forma está claro que para isso acontecer devidamente devemos ter preparado o alicerce do pensamento matemático.

> De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade (BRASIL, 1999, p.43).

Sabemos que esta etapa tem um papel muito importante no ensino-aprendizagem desta disciplina, pois a prática/aplicação atribui significado e torna mais aprazível alguns conceitos matemáticos. No entanto, não podemos deixar esta ânsia por criar significado sobrepor as duas fases anteriores (conceituação e manipulação) o frágil equilíbrio entre as três componentes não deve ser comprometido, ensino não é modismo e não acontece da noite pro dia.

Neste aspecto percebemos que alguns autores exageram na contextualização deixando de lado uma devida conceituação esquecendo de trabalhar os elementos iniciais e essenciais a manipulação. Na verdade alguns livros didáticos exageram tanto na tentativa de omitir a parte mais conceitual que chegam a dar exemplos grosseiros e arbitrárias construindo assim concepções matemática totalmente equivocadas. Segundo os PCN's

> Vale uma ressalva sobre as ineficazes contextualizações artificiais, em que a situação evocada nada tem de essencialmente ligada ao conceito ou ao procedimento visado, como também não são educativas as contextualizações pretensamente baseadas na realidade, mas com aspectos totalmente fantasiosos (BRASIL, 2006, p.135)

Percebemos ainda, que quando buscamos aplicar os conhecimentos matemáticos precisamos fazer algumas considerações acerca do problema, ou seja, precisamos conhecer com propriedade o assunto ao qual queremos aplicar a modelagem matemática, dessa forma entendemos que existe uma complexidade adicional que exige uma certa maturidade na hora da resolução. Este fato deixa mais evidente a importância da conceituação e manipulação, para só então partirmos para a aplicação. No entanto, as diretrizes Curriculares para o ensino médio nos diz que;

> Se por um lado a ideia de situação-problema pode parecer paradoxal, pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução, por outro lado, a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos. A modelagem matemática, percebida como estratégia de ensino, apresenta fortes conexões com a ideia de resolução de problemas apresentada anteriormente. Ante uma situação-problema ligada ao "mundo real", com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento(BRASIL, 2006, p.84 e 85).

Assim, não queremos aqui carregar a matemática de conceitos e demonstrações macabras e amedrontadoras, não é esse o nosso pensamento, pois sabemos de experiências passadas que excessos de conceituação deixando de lado a manipulação e a aplicação causou nos anos 60 no ?chamado período da matemática moderna?, uma perda muito grande de objetividade, destacando coisas irrelevantes e deixando de destacar aspectos essenciais.

O excesso de manipulação também é desmotivador e não favorece a criatividade do estudante, esse problema é sem dúvida agravado pelos próprios livros didáticos que muitas vezes cobram listas enormes e sem criatividade que não favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, e tão pouco os motivam, junte-se a isso que alguns professores valorizam essa prática, talvez até por sua formação orientá-lo nesse sentido. A manipulação é estrategicamente importante, mas, deve ser devidamente dosada e criativamente selecionada.

Nas orientações curriculares para o Ensino Médio são apresentados quatro blocos de conteúdos: números e operações, funções, geometria, análise de dados e probabilidade. No entanto, vamos nos deter a geometria espacial, por termos escolhido como referência para esta pesquisa. Segundo as orientações curriculares para o Ensino Médio 2006: O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização.

Percebemos assim, que os alunos, ao ingressarem no ensino médio, deveriam aprofundar os conhecimentos prévios já absorvidos no Ensino Fundamental, consolidando-os. Apesar disso, a maioria dos nossos alunos não compreende ou até não chegou a estudar, no ensino fundamental, os conteúdos referentes à geometria, precisando que o professor inicie seu trabalho, num nível mais baixo, para que os mesmos não fiquem a margem ou não consigam compreender os conceitos referentes a esse conteúdo.

Outro aspecto de fundamental importância no estudo da Geometria é a interdisciplinaridade com física e química, ajudando na consolidação da ideia como, por exemplo, de grandeza. Nesta fase, o aluno já deve ter condições de compreender certas demonstrações que resultam em fórmulas, precisando que se dê uma atenção a este aspecto, pois esta prática ajudará na aquisição de um conhecimento mais elaborado e solidificado.

O ensino da matemática no contexto atual requer uma postura de reflexão, avaliação, ação, na qual a percepção e o bom senso do professor são essenciais para manter o devido equilíbrio entre as componentes anteriormente citadas. Devemos saber quando precisamos motivar os alunos com contextualização e somente depois conceituarmos e manipularmos, voltando ao problema motivador e nesse momento com condições de resolvê-lo, como também devido a uma decisão pedagógica podemos conceituar, manipular e só então contextualizar. Essas decisões cruciais no ensino aprendizagem de qualquer disciplina são características do professor que por conhecer adequadamente a área que ensina, planeja e toma decisões estratégicas para alcançar o sucesso nos objetivos propostos.

Dessa forma faz-se necessário a aquisição de metodologias que viabilizem e possibilitem aprendizagem, pois não podemos continuar com a visão que matemática é para poucos, mas sim um bem cultural de toda a humanidade. Com esse pensamento decidimos desenvolver este estudo, de forma a verificar a sua viabilidade ou inviabilidade, para que esse nosso trabalho possa servir de direcionamento para aquele que procure por alternativas de ensino.

## 3.2 O ensino de geometria espacial

A importância do ensino de geometria está no desenvolvimento da capacidade dos alunos de poderem visualizar e analisar o meio em que vivem, ampliando dessa forma as ferramentas que os mesmos utilizarão para resolver problemas, fazer estimativas, orientar-se no espaço, comparar distâncias, entre outras coisas que o faz interferir e interagir com sua realidade física e espacial.

> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato perceber as relações entre as representações planas dos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhe deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades e partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física (BRASIL, 1999, p.22)

O desenvolvimento matemático perpassa por etapas como manipulação de objetos concretos, possibilitando conhecer e sentir o objeto em estudo, após esse momento partimos através de artifícios matemáticos para o aprimoramento dos conhecimentos que só são possíveis devido à capacidade de abstração adquirida ao longo de todo um processo de ensino em que o aluno deve migrar do concreto para o abstrato de forma gradativa ao longo de todo ensino fundamental. Devido conhecermos a realidade dramática da defasagem dos alunos que adentram o ensino médio, trabalharemos esse conteúdo utilizando técnicas pedagógicas diversas, como materiais concretos e apresentações de seminário, em consonância com as aulas expositivas e demonstrações dos teoremas na tentativa de tornarmos o ensino de poliedros mais significativo e prazeroso.

No ensino médio o aluno deverá estar pronto para ser apresentado a conceitos mais elaborados do ponto de vista geométrico, ou seja, trabalhar os elementos espaciais (sólidos geométricos), ampliando assim sua capacidade mental e visão espacial.

Contudo, a realidade é um pouco diferente da que esperamos, os alunos que adentram a escola no ensino médio apresentam uma enorme deficiência no conhecimento matemático e em se tratando de geometria a maioria deles não conhecem se quer os conceitos básicos como: ponto, reta e plano. Essa realidade gera uma questão no mínimo inusitada. Como desenvolver a visão espacial no aluno que não identifica nem as formas planas?

Dessa forma, a missão do professor do ensino médio de desenvolver as habilidades e competências com relação à geometria espacial, torna-se muito difícil. Primeiro pela falta de conhecimentos básicos e segundo, pela falta de recursos visuais indispensáveis ao entendimento das formas geométricas, pois na maioria das escolas públicas só dispomos do livro didático, quadro e giz.

Representar formas sólidas no quadro usando apenas giz, não é um procedimento fácil, nem muito menos de fácil compreensão, podendo fazer com que os alunos construam conceitos equivocados através de uma percepção errônea do desenho.

E mesmo que o professor demonstre habilidade em construir essas formas, nada garante que o aluno a visualizará de forma correta, pois a visão espacial precisa ser aprimorada. Um outro ponto que atrapalha a aprendizagem da geometria espacial é a maneira que as editoras distribuem os conteúdos, geralmente em blocos onde, os conceitos relativos a geometria estão no fim do livro, caso o livro não seja estudado por completo, os alunos deixaram de estudar quaisquer conceito sobre ela.

> Por meio da experiência em sala de aula, pude perceber também que os alunos apresentam grandes dificuldades em visualizar, ou, pelo menos, imaginar os objetos espaciais quando representados em ambientes bidimensionais, tais como representações impressas em livros e apostilas ou até mesmo na tela de computador.(BARBOSA, 2006, Pag.22).

Todas essas dificuldades citadas anteriormente nos motivou a buscar uma maneira alternativa para facilitar o ensino aprendizagem deste conteúdo essencial ao desenvolvimento da lógica matemática.

Devido já termos trabalhado os conceitos básicos que estruturam o ensino de geometria espacial durante o primeiro bimestres, como por exemplo, os axiomas de Euclides e os respectivos teoremas que são comprováveis a partir deles, decidimos trabalhar com as aplicações desses conceitos no estudo dos poliedros, Teorema de Euler e poliedros de Platão, mostrando de forma precisa e significativa as nuances e curiosidades que permeiam esta parte do ensino de matemática.

Na tentativa de aprimorar a aprendizagem acerca dos conteúdos citados anteriormente aplicaremos uma metodologia composta com duas técnicas, uso de softwares e aprendizagem cooperativa, pois acreditamos que com a potencialidade das mesmas podemos obter frutos positivos de modo a ampliar o nosso leque de técnicas voltadas ao ensino de matemática.

# 4 EDUCAÇÃO COOPERATIVA

Vivemos numa sociedade marcada pela competição e o individualismo, onde o conhecimento muitas vezes é algo almejado não pelas possibilidades de construir uma sociedade mais justa e igualitária, mas sobretudo para aquisição de um status ou prestígio social. Ações de cooperação, ajuda na construção coletiva para que todos consigam adquirir as competências e habilidades necessárias a formação não são práticas disseminadas no cotidiano escolar, ou seja, o aprender a conhecer e a visão de preparar o aluno apenas para vestibulares, ENEM, concursos predominam sobre o aprender a ser, aprender a conviver e o aprender a fazer.

Cooperação, colaboração são atitudes essenciais a formação do ser humano, o ambiente escolar precisa criar uma cultura cooperativa onde todos tenham objetivos comuns e sintam-se responsáveis pelo crescimento de todo o grupo. Desta forma, a escola fortalecerá o trabalho em sala de aula como reflexo de uma cultura que deve permear toda a comunidade escolar.

Segundo teóricos a aprendizagem cooperativa é um instrumento de formação que promove uma motivação para aprendizagem de todos que fazem parte do processo, é um meio de socialização de saberes que possibilita a democratização do conhecimento sem preconceitos ou hierarquias, onde as diferenças e semelhanças de pensamentos convergem para um propósito comum.

Pesquisas mostram grandes vantagens de trabalhar a aprendizagem cooperativa em detrimento do ensino- aprendizagem baseado em competições e trabalhos individuais.

Assim, buscamos realizar esta pesquisa que busca visualizar as potencialidades desta metodologia e difundir no ambiente escolar para que tenhamos melhores resultados em relação ao processo ensino aprendizagem.

Para isto, buscamos a luz de teóricos a fundamentação teórica sobre o que é e como deve ser implantada a aprendizagem cooperativa.

Uma proposta colaborativa se caracteriza segundo Torres, pela:

> Participação ativa do aluno no processo de aprendizagem; mediação da aprendizagem feita por professores e tutores; construção coletiva do conhecimento, que emerge da troca entre pares, das atividades práticas dos alunos, de suas reflexões, de seus debates e questionamentos; interatividade entre os diversos atores que atuam no processo; estimulação dos processos de expressão e comunicação; flexibilização dos papéis no processo das comunicações e das relações a fim de permitir a construção coletiva do saber; sistematização do planejamento, do desenvolvimento e da avaliação das atividades; aceitação das diversidades e diferenças entre alunos; desenvolvimento da autonomia do aluno no processo ensino-aprendizagem; valorização da liberdade com responsabilidade; comprometimento com a autoria; valorização do processo e não do produto

(TORRES, 2004, p.50).

Diante de tantos pontos positivos como nos negar a buscar meios de efetivar a aprendizagem cooperativa no interior das nossas salas de aula. O que observamos, é que não é fácil implantá-la, pois não é apenas organizando grupos que conseguiremos efetivar o processo, mas sobretudo, passa pela compreensão e maturidade do que é realmente participar, cooperar e contribuir na construção do conhecimento coletivamente.

No entanto, seria necessário que os professores fossem preparados para utilizar esta metodologia, mas sabemos, que nas próprias licenciaturas não temos uma abordagem significativa de aprendizagem cooperativa.

No Brasil, a aprendizagem cooperativa é uma metodologia nova. No Ceará as manifestações que conhecemos partiram de iniciativas de grupos de estudantes que implantaram em sua localidade. É o caso do PRECE (Programa de Educação em células cooperativas) que iniciou em 1994, na comunidade de Cipó em Pentecoste- CE. A partir desta iniciativa a UFC criou o Programa de Aprendizagem Cooperativa em Células Estudantis com o objetivo de aumentar os índices de conclusão de curso.

Em 2011, foi criada a primeira Escola Estadual de Educação Profissional que tem uma universidade como cogestora (UFC), na cidade de Pentecoste com o objetivo de contribuir com suporte técnico na implantação da metodologia da aprendizagem cooperativa.

Segundo Firmiano (2011) os principais eventos relacionados a aprendizagem cooperativa são:

✓Final do século XIX

✓✓Coronel Frances Parker: Promoveu a aprendizagem cooperativa, democracia e a devoção à liberdade nas escolas públicas.

✓Começo do século XX

✓✓Escola Lancaster se estabeleceu nos Estados Unidos (Joseph Lancaster e Andrew Bell usaram grupos de aprendizagem cooperativa extensivamente na Europa e trouxeram a idéia para os EUA em 1806, Nova York). O Movimento da Escola Comum nos EUA: forte ênfase na aprendizagem cooperativa.

✓✓Movimento da Escola Nova: John Dewey e outros; Dewey promoveu grupos de aprendizagem cooperativa como uma parte do seu famoso projeto de método de instrução. Teoria da Interdependência Social & Dinâmica de Grupo: Kurt Koffka & Kurt Lewin, Psicólogos da Gestalt.

✓Anos 40

✓✓Teorias e pesquisas sobre cooperação e competição: Morton Deutsch.

✓Anos 50

✓✓Teoria da aprendizagem cognitiva: Jean Piaget e Lev Vygotsky. Movimento de dinâmica em grupo aplicado, Deutsch, Laboratórios Nacionais de Treinamento. Pesquisas de Deutsch sobre confiança, situações individualistas; Estudos.

✓Anos 60

✓✓Pesquisas de Stuart Cook sobre cooperação. Pesquisas de Spencer Kagan sobre cooperação e competição em crianças. Movimento de Aprendizagem por Investigação (descoberta): Bruner, Suchman. B. F. Skinner, Aprendizagem Programada, Modificação de Comportamento. David e Roger Johnson começaram a treinar professores em aprendizagem cooperativa na Universidade de Minnesota.

✓Anos 70

✓✓David Johnson escreveu Psicologia Social da Educação. Robert Hamblin: Pesquisa comportamental sobre cooperação / competição. Primeiro Simpósio Anual de AP A (Entre os apresentadores estavam David e Roger Johnson, Stuart Cook, Elliot Aronson, Elizabeth Cohen, e outros). Revisão das pesquisas de David e Roger Johnson sobre cooperação / competição. Robert Slavin começou o desenvolvimento de currículos cooperativos. Shlomo e Yael Sharan, Ensino em pequenos grupos (Investigação em grupo). Elliot Aronson, Sala de aula Jigsaw (quebra-cabeça). Edição sobre Cooperação do Jornal de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação. Primeira conferência Internacional sobre aprendizagem cooperativa, Tel Aviv, Israel.

✓Anos 80

✓✓David e Roger Johnson, Meta-análise de Pesquisa em Cooperação. Elizabeth Cohen, desenhanda células de trabalho. Spencer Kagan desenvolveu abordagens estruturais para aprendizagem cooperativa. David e Roger Johnson escreveram Cooperação & Competição: Teoria & Pesquisa.

✓Anos 90

✓✓A aprendizagem cooperativa ganha popularidade entre educadores do ensino superior. Primeira conferência anual sobre Liderança em Aprendizagem Cooperativa, Minneapolis. David e Roger Johnson e Karl Smith adaptaram a aprendizagem cooperativa para a sala de aula de faculdades, e escreveram. Aprendizagem Ativa: Cooperação na Sala de Aula da Faculdade.

De acordo com Jonhnson e Johnson(1999) para que a aprendizagem seja cooperativa é necessário que se verifiquem as seguintes características específicas que não atuam isoladamente, mas são interdenpendentes.

1. Interdependência positiva;
2. Responsabilidade individual;
3. Interação frente a frente permitindo o desenvolvimento de competências sociais;
4. Desenvolvimento de competências interpessoais e grupais;
5. Avaliação do processo do trabalho da célula de modo a melhorar o funcionamento do mesmo.

Assim, o aluno precisa entender a existência de uma dependência mútua entre eles e a célula de aprendizagem, ou seja, cumprir com as funções que lhes forem postas, criar um compromisso com a aprendizagem do outro compreendendo que quando um falha todos falham.

Ao implementar a aprendizagem cooperativa em sala de aula os estudiosos apresentam três fases:

1. Pré-implementação;
2. Implementação;
3. Pós implementação.

Neste processo o professor deverá seguir os seguintes passos, desempenhando os respectivos papeis:

**1 - Pré-implementação**

1.1 - Especificar os objetivos do ensino (acadêmicos e sociais)

1.1.1 - O professor deve explicar porque vai usar a aprendizagem cooperativa, descrever seus benefícios e os resultados normalmente conseguidos com a sua utilização. Deve ainda explicar os objetivos de cada atividade.

1.2 - Determinar o tamanho das células e distribuir os estudantes pelas mesmas.

1.2.1 - O tamanho da célula pode varia entre três ou quatro integrantes dependendo da atividade. As células devem ser heterogêneas e devem manter a sua constituição durante algum tempo.

1.3 - Atribuir papel aos estudantes.

1.3.1 - Primeiramente deve atribuir papeis de acordo com as competências dos estudantes e depois garantir a rotatividade dos mesmos entre os estudantes.

1.4 - Arrumar a disposição da sala de aula.

1.4.1 - O professor deve organizar os espaços em sala para que as células possam interagir e movimentar-se facilmente. Os estudantes de uma mesma célula devem se sentar frente a frente. A sala deve ter elementos favorecedores da metodologia, como quadros construídos pelos estudantes.

1.5 - Planejar os materiais de ensino para promover a interdependência.

1.5.1 - Os materiais devem possibilitar que cada estudante individualmente contribua para o sucesso da célula.

1.6 - Distribuir tarefas.

1.6.1 - Selecionar métodos que se adapte a aprendizagem de cada atividade. As tarefas das células devem ser interessantes e variadas e cada estudante deve ficar responsável por uma atividade. O professor deve explicar claramente os procedimentos, estipular o tempo para cada tarefa e verificar se os estudantes compreenderam os procedimentos.

1.7 - Estabelecer os critérios de sucesso .

1.7.1 - O professor deve informar as competências que serão avaliadas, deve criar fichas para avaliar os trabalhos das células.

1.8 - Estruturar a interdependência positiva e a responsabilidade .

1.8.1 - O tamanho da célula deve ser pequeno para que cada estudante participe e tenha uma responsabilidade. Cada estudante deve ser capaz de defender sua posição e a posição da célula.

1.9 - Estabelecer os comportamentos desejados.

1.9.1 - As competências para trabalhar em célula devem ser ensinadas. Deve ainda treinar os estudantes para a resolução de conflitos e proporcionar dinâmicas para que os estudantes se conheçam e aprendam as habilidades sociais.

**2 - Durante a implementação**

2.1 - Controlar o comportamento e o tempo.

2.1.1 - O professor deve circular pela sala e observar como as células trabalham. É bom ainda ter um relógio na parede na sala para controlar o tempo de cada atividade.

2.2 - Intervir se necessário.

2.2.1 - Intervir quando perceber que há distrações ou conflitos. O professor deve ensinar como prevenir conflitos.

2.3 - Prestar ajuda.

2.3.1 - Fornecer recursos ou pontos de vistas adicionais e fazer os estudantes refletirem sobre o trabalho que esta sendo realizado.

2.4 - Elogiar.

2.4.1 - O professor deve elogiar os estudantes, assim como a célula a qual fazem parte, quando trabalharem adequadamente e cumprirem suas responsabilidades.

**3 - Pós-implementação**

3.1 - Promover o encerramento através da sumarização.

3.1.1 - O professor deve sintetizar os pontos mais importantes da aula ou pedir a cada célula que sintetize o seu trabalho e o apresente a turma. Isso permiti ao professor verificar o nível de conhecimento dos estudantes.

3.2 - Avaliar a aprendizagem.

3.2.1 - Usar fichas de observação para avaliar o trabalho de cada célula. Essas fichas devem ser elaboradas junto com os estudantes durante a pré-implementação. O professor deve informar o nível de desempenho das células e fornecer feedback dos trabalhos.

3.3 - Refletir sobre o trabalho desenvolvido.

3.3.1 - Os registros dos trabalhos devem ser guardados e partilhados com as informações dos grupos. No final da aula fazer novamente reflexão sobre as competências que foram usadas utilizando a tabela T, de um lado coloca as coisas boas que aconteceram e de outro as que ainda precisam melhorar.

Quanto aos papéis que os alunos podem assumir ao formar uma célula de aprendizagem, temos: articulador, verificador, relator, gestor do tempo e dos recursos, medidor e observador.

Ao sugerirmos o trabalho de aprendizagem cooperativa para os alunos do 3º ano da EEFM Virgílio Correia Lima, conversamos sobre a importância do trabalho em grupo, da ajuda e comprometimento com o outro. No momento, não distribuímos funções ou papéis aos alunos, deixando que eles se organizassem e buscassem o meio mais eficaz de trabalho grupal, tendo em vista grupos formados por alunos de localidades diferentes que mereciam um planejamento específico.

Para a pesquisa criamos quatro grupos de aprendizagem cooperativa que teve início no dia 23 de fevereiro de 2015, com exposição do processo que deveria ocorrer durante os encontros. Para cada equipe foi disponibilizado uma ficha para registro e acompanhamento das medidas tomadas pelo grupo para alcançarem o objetivo proposto que era de compreender e apreender o Teorema de Euler para poliedros e poliedros de Platão utilizando softwares educativos que subsidiassem e facilitassem o processo ensino aprendizagem.

# 5 HUMANIDADE E TECNOLOGIA

Durante toda a história da humanidade observamos a busca do homem em manipular o meio em que vive, seja no fato de procurar cavernas para se proteger, seja na forma de viver em grupo, manipulando o fogo, utilizando ossos como arma, etc. criamos tecnologias que sem elas talvez não tivéssemos perdurado como espécie dominante. Nossa história está intimamente ligada a evolução das tecnologias, não podemos dissociar uma da outra, pois a tecnologia faz parte da cultura humana.

Dessa forma, como podemos entender o que é tecnologia? Segundo (Medeiros, 2010, P.10) Medeiros, José Adelino (1946 - 1996) pag. 10; livro: O que é tecnologia."... tecnologia é o conhecimento utilizado na criação ou no aperfeiçoamento de produtos e serviços, veremos que seus limites contêm praticamente todos as atividades humanas".

Compreendemos então, que tecnologia é a culminância de todas as experiências e estudos práticos e/ou científicos, aplicados à obtenção de melhor qualidade de vida de uma comunidade ou nação, pois criam condições ideais para melhor realizar os produtos ou serviços que essa comunidade necessita, proporcionando mais tempo livre para o homem cria.

A criação das tecnologias surge das necessidades que uma determinada atividade desse povo apresenta, porém a sua implantação/utilização requer uma análise cuidadosa para que a mesma não venha a ser prejudicial. Não são raros os exemplos em que a aquisição de uma tecnologia causa o desemprego de dezenas de funcionários, em contra partida essa tecnologia produz mais rapidamente e eficientemente o bem ou serviço que os homens realizavam, ou ainda segundo (Filho, 1994) "essa conquista tecnológica trouxe consigo também alguns dissabores talvez seja um termo suave demais, em alguns casos, verdadeiras tragédias, hecatombes."De fato, se analisarmos com cuidado o nosso passado recente, que benefícios podemos esperar da bomba atômica ou ainda, do fato da alta produção de alimentos que causam câncer.

Nesse ponto devemos estar atentos aos motivos que geram a aquisição das novas tecnologias, pois muitas pessoas ou talvez nações são movidas somente em função da ganancia e não do bem comum. Desta forma percebemos que ligadas as tecnologias vem a decisão humana de como usá-la, é nesse ponto que podemos perceber boas aplicações ou mal aplicações enfim, as tecnologias por si só não são nem boas nem más, o uso que é dado a ela é que pode trazer problemas, e a decisão de como ela será usada é uma escolha humana.

O simples ato de desenvolver técnicas para realização de uma determinada tarefa de forma mais rápida, prática e eficaz se relaciona diretamente com a tecnologia, embora técnica e tecnologia não tenham o mesmo significado, a técnica do saber fazer é a habilidade ou arte inata do homem. Estudiosos afirmam que a técnica resolve os problemas fundamentais do homem, e a tecnologia satisfaz também seus desejos e sonhos.

Quando educadores falam de sonhos, não existe um que seja mais almejado que conseguir técnicas, procedimentos, meios matérias/equipamentos (tecnologias), que proporcionem a promoção de um ensino aprendizagem mais efetivo e eficaz. A aplicação de tecnologias na educação sempre foi vista como fonte promissora para um melhor resultado no processo ensino aprendizagem.

Analisando a primeira grande revolução tecnológica ligada ao ensino provocada por Comenius (1592 - 1670), na utilização do livro como ferramenta de ensino e aprendizagem, com a invenção da cartilha e do livro texto, podemos hoje criar expectativas enormes acerca das novas tecnologias que superam o livro em vários aspectos, dentre eles podemos citar alguns como a interatividade, fóruns, blogs simuladores, vídeos, animações, etc., coisas que eram impossíveis de obter através dos livros convencionais.

A inserção das tecnologias no entanto, não é realidade de todos, a democratização da tecnologia requer políticas públicas que superem vários problemas educacionais que viabilizariam esse processo como a erradicação do analfabetismo pois, falar em inclusão digital em um país que tem cerca de 14 milhões de analfabetos e ocupa o 8º lugar no ranque mundial de analfabetismo entre adultos, pode parecer um pouco demagógico.

No entanto nós que trabalhamos na educação não podemos nos desencorajar a estudar e analisar novos métodos de ensino pois, vivemos na Sociedade da informação, e a escola, como instituição responsável pela aquisição de conhecimentos atitudinais, conceituais e procedimentais, não pode ficar à margem desta sociedade, onde as tecnologias evoluem de forma rápida e globalizada, exigindo pessoas qualificadas, não somente com relação a conhecimentos teóricos, más, sobretudo com competências e habilidades para utilizá-las no cotidiano.

Hoje, em meio à revolução tecnológica, a escola tem que preparar seus alunos, visando a realidade em que se encontram, ou seja, vivemos numa sociedade globalizada onde as pessoas têm acesso aos mais diversos meios tecnológicos. No entanto, nem todos têm a possibilidade de usufruir ou utilizar os mesmos, ficando mais uma vez à margem da sociedade.

Os PCN's Parâmetros Curriculares Nacionais, afirmam que:

> A denominada 'revolução da informática'promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central no processo de desenvolvimento, em geral. É possível afirmar que, nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias (BRASIL, 1999, p.15).

Assim, o papel da escola torna-se o de realizar a inclusão digital, possibilitando a aquisição de competências e habilidades em manejar as tecnologias em benefício da melhoria da qualidade de vida.

Vale ressaltar, que a utilização das tecnologias na escola, principalmente o computador necessita de procedimentos que promovam condições de aprendizagem e não somente, a utilização de mais um equipamento na escola.

Considerando-se tal afirmação, não podemos ignorar o grande desafio que as nossas escolas precisam enfrentar para levar este conhecimento tecnológico, tendo em vista que nem todas as escolas, professores, alunos, comunidade em geral, têm acesso a esses meios.

Desta forma, percebemos que a educação precisa se estruturar para a realidade tecnológica, implementando-a tanto no que se refere à aquisição, quanto à utilização dos meios tecnológicos.

## 5.1 Informática e os métodos voltados para educação

A implantação da informática na educação perpassa por questões problemáticas, como por exemplo, a aquisição de equipamentos que quase sempre são bem caras, aquisição dos softwares que devem ser cuidadosamente escolhidos de acordo com os objetivos educacionais a construção de um ambiente adequado para colocar os equipamentos, treinamento dos profissionais da educação entres ouros aspectos menos importantes dos quais não trataremos aqui.

Com relação a aquisição dos recursos necessários para equipar as escolas, os governos Federais e Estaduais têm investido pesadamente na compra de vários equipamentos, muitas vezes desordenadamente e aparentemente sem planejamento adequado, estes fatos são fáceis de se observar em várias escolhas que tem material totalmente ultrapassado, uma grande quantidade de hardwares quebrados ou por mau uso ou por falta de profissional treinado para efetuar a devida manutenção dos softwares ou até mesmo reposição de peças.

Um exemplo da falta de planejamento é a aquisição do software educandus, realizada pelo governo do estado do Ceará, em contrato de 5 anos de utilização do mesmo, porém, cada escola só recebia uma licença que limitava a instalação em apenas um computador, esse fato gerava a inconveniência de apenas um professor por vez poder utilizá-lo. Ainda podemos citar que após um ano e seis meses do contrato o governo passou a instalar o sistema operacional Linux em todos os seus computadores como medida de economia, pois o Windows tem licença muito cara, porém, o software cujo o contrato ainda valia por mais três anos e meio só funcionava na plataforma Windows.

Muitas vezes podemos imaginar que as pessoas que estão a frente não se comunicam e que agem movidas por impulso ou modismo, na educação não podemos agir na busca de uma modernidade ilusória, pois segundo o professor Lima

> "... dirigentes do nosso pais, os quais, na ânsia de uma modernidade ilusória e em busca de uma publicidade fácil, colocam a aquisição de máquinas acima do aperfeiçoamento, da melhoria das condições de trabalho e da remuneração adequada dos professores"(LIMA, 2001, p.150,

151).

Para realizarmos uma escolha adequada de um software devemos ter em mente que esses programas destinados a educação seguem duas tendências principais que são as instrucionistas e os construcionistas, mesmo ambas tendo como elementos indissociável, o professor, o aluno, o computador e o software ou programa computacional.

Analisando a abordagem instrucionista temos o computador pensado como uma máquina de ensinar, com instrução programada de estimulo resposta, um modelo skinneriano que

> “estabeleceu a distinção entre respostas produzidas em reação a estímulos (teoria do reforço) e resposta operante comportamento-operante, que são fornecidas sem estimulação operante. Propôs um método de aprendizagem por instrução programada através do suso de máquinas de ensinar que prevê uma única resposta para determinado estímulo. Embora a instrução programada tenha sido considerada como a solução para todos os problemas educacionais, ela não provocou os efeitos esperados.”(ALMEIDA, 2000, p.24).

Esse tipo de abordagem é estruturado de forma modular obedecendo uma determinada lógica que atende as perspectivas pedagógica da equipe que formulou o software. Dessa forma o aluno é submetido a uma série de conteúdos de forma sequencial, onde é sabatinado a cerca desses conteúdos estudado, podendo mediante as respostas corretas, avançar para o próximo módulo ou voltar e repeti-lo caso as respostas que tenha dado não sejam corretas.

Esses softwares foram muito difundidos e existem alguns realmente bem elaborados, com muitas ilustrações e recursos áudio-visuais que facilitam a compreensão-visualização de alguns conceitos /formas dos conteúdos que estejamos estudando. Um elemento que pode aumentar a eficiência desse tipo de software é colocá-lo acompanhado por um professor, que possa expandir algumas possibilidades ou ainda através de levantamento de hipóteses ou questionamentos levar o educando a extrapolar as limitações do programa utilizado. Este fato nem sempre é observado e geralmente o responsável por essas aulas é um técnico de informática, pelo simples fato do mesmo entender da máquina e do funcionamento do software, provocando uma grande limitação e uma subutilização do material.

Outras tecnologias inseridas na sala de aula como por exemplo os recursos áudio visuais, e ainda o sistema de tele-esnino apresentaram problemas na sua implantação, os filmes utilizados não vão ensinar ao aluno a pensar por si só e as vídeo-aulas não podem abranger todos os tipos de questionamentos e ampliar as definições, ou seja, a versatilidade das aulas é o papel essencial do professor e para que isso funcione devemos estar apoiados em uma proposta pedagógica sólida com objetivos claros.

Nas mesmas perspectivas dos recursos áudio visuais citados anteriormente, temos uma outra visão da implantação do computador como mais um meio disponível, e que pode ser usado como fonte de pesquisa ou para digitar um trabalho, assistir um vídeo, etc, tarefas essas que antes podiam ser feitas por outros equipamentos individuais, como por exemplo, a televisão ou pesquisar em um livro, muda-se o jeito de utilização, não mudam os modos e as visões pedagógicos, em consequência não conseguimos resultados melhores. Para que consigamos que qualquer meio influencie diretamente na aprendizagem precisamos ver os meios com um olhar que não seja de transmissão de conhecimentos e sim de desenvolvimento de pensadores. É nessa perspectiva que resolvemos desenvolver esse projeto de aprendizagem cooperativa utilizando softwares como apoio ao educando nos momentos em que eles se reunirem para estudar em grupo e o apoio do professor não for possível, pois acreditamos que esses elementos juntos tem características que se somam, podendo ampliar a capacidade de ensino aprendizagem dos poliedros.

## 5.2 Informática na educação como máquina de ensinar X ferramenta educacional.

Os questionamentos acerca de como devemos utilizar o computador em sala de aula/educação é motivo de profundas discussões e alguns autores acreditam inclusive que, para haver a grande revolução no ensino-aprendizagem é preciso que determine a maneira mais eficaz de utilizar esses meios, é por esse motivo que nos motivamos a implantar nosso projeto, pois o mesmo apresenta características interessantes e inovadoras.

Drucker exalta a importância de

> “repensar o papel e a função da educação escolar seu foco, sua finalidade, seus valores ... A tecnologia será importante, mas principalmente por que irá nos forçar a fazer coisas novas, e não porque irá permitir que façamos melhor as coisas velhas”. (ALMEIDA, 1993, p.15).

De fato é necessário que a inserção do computador na educação aconteça juntamente com a mudança da visão de escola e com a mudança de postura e de metodologias do professor. É verdade que todas as tecnologias utilizadas na educação, seja da régua ou o giz, até o advento do computador, não deveriam ser de ensinar melhor ou pior, pelo contrário deveriam promover os meios necessários a aprendizagem. Essa visão coloca o professor numa posição que está além de repassar o conhecimento, ele assume a função de mediador, instigador, provocador do ato de pensar e através dessa postura desenvolver o conhecimento dos educandos.

Uma mudança acerca do modo de agir do professor perpassa por várias questões que vão desde a sua formação nos cursos de licenciatura Lima (2001, P. 156) “Ocorre porém que o elemento crucial para transmissão do conhecimento matemático, que é o professor, não está recebendo um formação adequada para exercer a sua importante tarefa.”até a sua inserção no ambiente escolar. Essa mudança pode representar um grande conflito interpessoal e interinstitucional, pois conforme Prado (1993: 99)

> "o aprendizado de um novo referencial educacional envolve mudança de mentalidade (...). Mudanças de valores, concepções, ideias e, consequentemente, de atitude não é um ato mecânico. É um processo reflexivo, depurativo, de reconstrução, que implica em transformação, e transformar significa conhecer".(ALMEIDA, 1993, p.16).

Prado descreve de forma privilegiada os aspectos interpessoais que as mudanças de atitude e postura do professor apresenta, no entanto, ainda podemos acrescentar as mudanças interinstitucionais, pois as atitudes individuais são afetadas de forma direta pelo ambiente e pelo grupo onde esse profissional trabalha. Se na tentativa de trabalhar de forma diferenciada o ambiente não proporciona as condições mínimas para que as atividades sejam realizadas de forma adequada ou ainda se durante sua mudança de postura for mal visto pela equipe com a qual trabalha, se o professor com técnica convencionais for considerado o competente e o inovador como o "enrolão", não teremos um dos fatores motivador mais importante para que a mudança aconteça, que é a valorização do profissional. Também não podemos deixar de lado o caso contrário, de professores que se escondem atrás dos recursos na tentativa de não estudar e não preparar devidamente a sua aula, pelo fato de termos uma gama de recursos tecnológicos ao nosso dispor não devemos esperar que esses recursos sejam suficientes para promover o ensino-aprendizagem adequados.

Alguns professores aproveitam os recursos tecnológicos para trabalhar menos, o que não é necessariamente errado, porem, deixar de preparar a aula é um ato irresponsável e fadado a fracasso, pois nenhuma tecnologia substitui um bom planejamento. O fato é que a informática na educação é uma grande novidade, muitas serão ainda as surpresas positivas ou negativas acerca de sua implantação na educação. Assim nos resta, buscar, pesquisar e testar a luz dos pensadores da educação para podermos desfrutar de forma plena das possibilidades que a mesma apresenta.

As abordagens do instrucionismo e construcionismos são as mais difundidas quando o assunto é educação com o uso de TICs, devemos destacar que os softwares Poly e Educandus, atende a primeira proposta.

A abordagem instrucionistas consiste da utilização do computador como ferramenta de ensino, onde o aluno é colocado em frente ao computador e através de um software, previamente escolhido pelo professor, é exposto as componentes curriculares que se espera que o mesmo aprenda. Neste contexto não existe uma busca para o desenvolvimento de novas formas de pensar, este fato é um dos elementos que causam mais críticas a esse método. Ainda podemos destacar que a postura do professor é de auxiliar, orientar ou ainda se for um profissional devidamente preparado, pode assumir o papel de provocador, instigador buscando extrapolar as limitações do software.

Estes programas são em geral do tipo CAI (Instrução Auxiliada por Computador) ou ICAI (Instrução Inteligente Auxiliada por Computador), geralmente são criados por uma equipe de especialistas que passam para o software as suas ideias/noções acerca do que os alunos devem aprender e como devem aprender. Ainda temos uma quantidade de programas relacionado a teoria comportamentalista. Neste modelo o aluno tem posição passiva, atuando apenas na verificação de cada módulo, resolvendo um teste, nesse caso o computador funciona como uma máquina de ensinar otimizada, pois tem grande quantidade de informação e enquanto tiver energia apresenta-os pacientemente.As classes desse tipo de programa são do tipo tutorial, exercício-e-prática, jogos educacionais ou algumas simulações dentro de certas limitações.

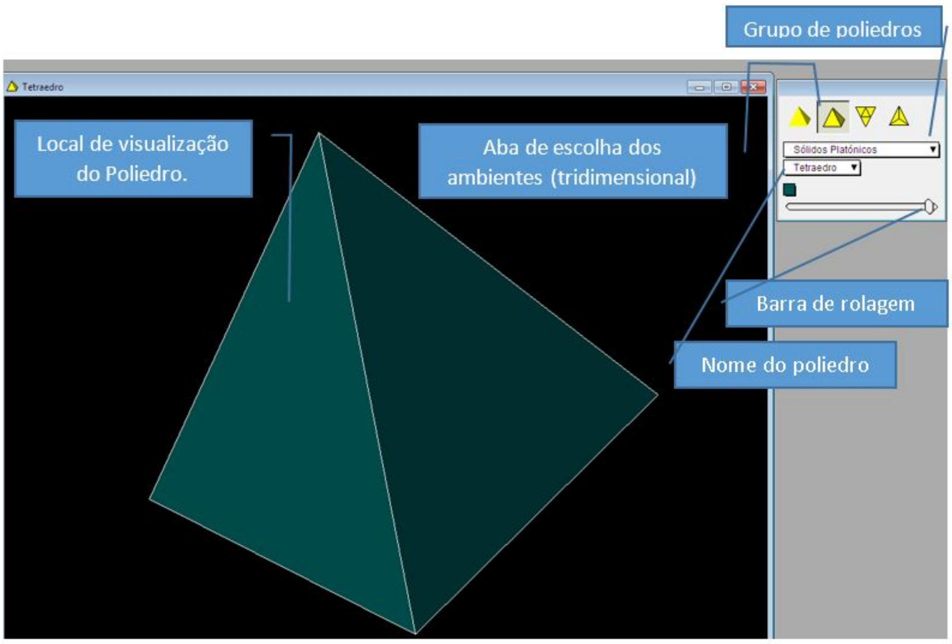
Devido as limitações citadas acima procuramos aplicar atividades específicas, com objetivos claros e simples, esperamos também que os debates e questionamentos do grupo de estudo contribua de forma a extrapolar as limitações dos softwares.

## 5.3 Conhecendo o software Poly

O software Poly é um recurso bastante útil, pois possibilita a visualização de diversos poliedros de uma forma dinâmica, o aluno pode visualizar os sólidos de Platão de três maneiras distintas:

1 - Na forma tridimensional; ver Fig. 21

Figura 21 – Descrição da tela inicial do Poly




2 - Na planificação do poliedro na forma bidimensional; ver Fig. 22

3 - Na forma de uma incrustação topológica. ver Fig. 23

Uma das características marcantes do poly é poder ver os sólidos em movimento, fato este que pode ser obtido como um simples movimento do mouse na tela, dessa forma o aluno pode girar os poliedros em várias direções melhorando a percepção tridimensional, característica que comentada anteriormente precisa ser desenvolvida e requer algum treino. Ainda podemos destacar a planificação que acontece em tempo real

Figura 22 – Tetraedro regular planificado

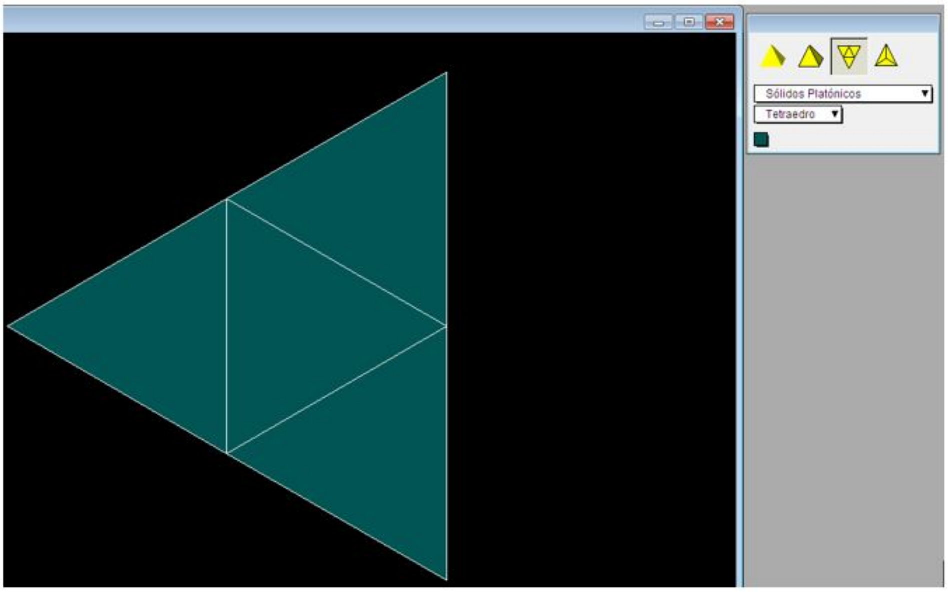
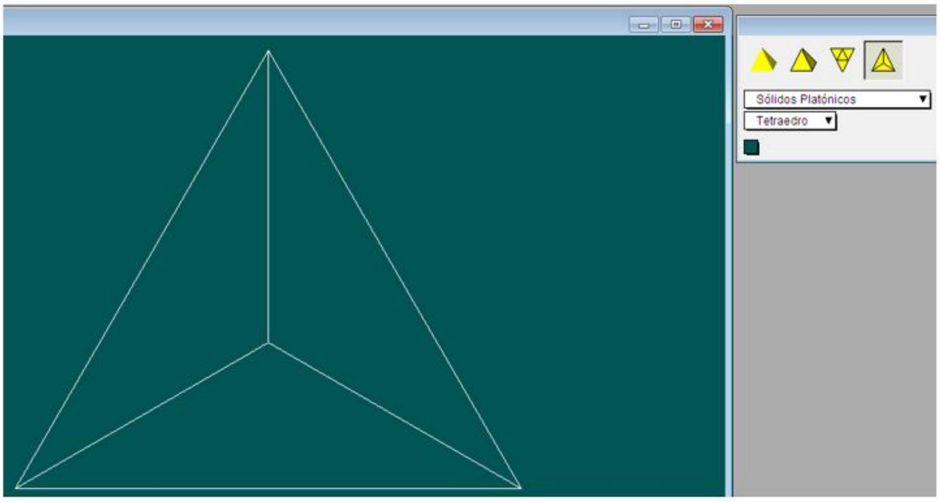



Figura 23 – Visualização das arestas do poliedro de forma topológica



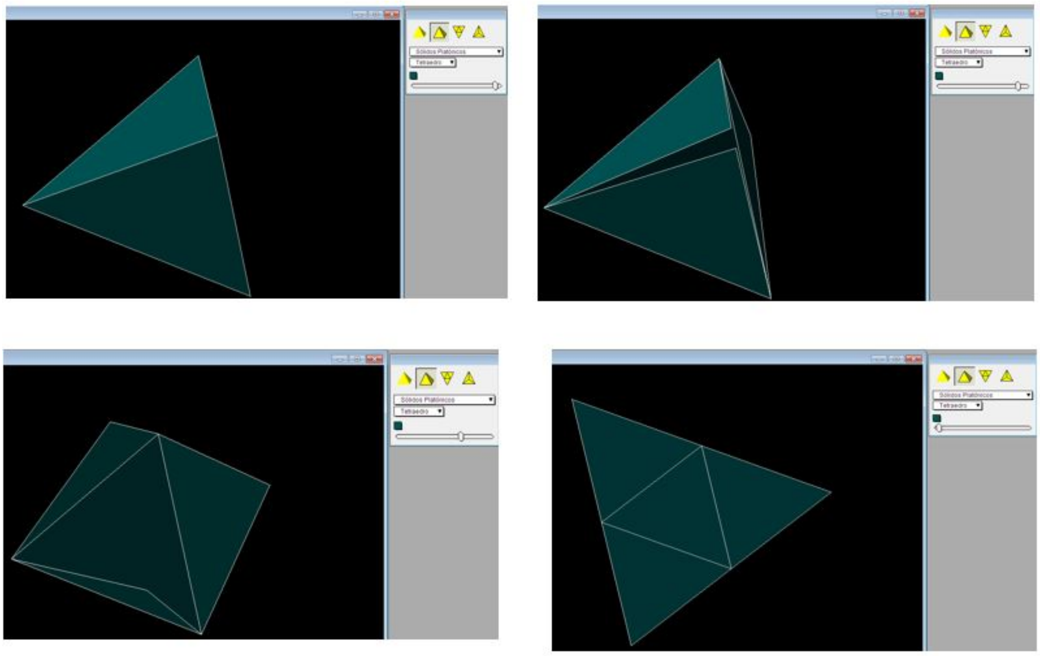

à medida que o aluno move uma pequena barra de comando do software ver Fig. 24, o poliedro começa a se abrir progressivamente até obtermos a visualização completa da planificação de forma clara e intuitiva.

O software Poly apresenta um designe bastantes limpo e simples, estas características fazem com que o software possa ser utilizado por qualquer pessoa que tenha a curiosidade e vontade de se encantar com belas formas matemáticas.

No nosso trabalho destacamos e exploramos apenas os poliedros convexos, porém os alunos ou usuários curiosos pode explorar um número enorme de outras formas geométricas, dentre elas destacamos os sólidos de Arquimedes, primas e antiprismas, sólidos de Johnson, sólidos de Catalan, dipirâmides e deltoedros, esferas e domos geodésicos.

Disponibilizamos esse software aos alunos no intuito de ajudar a desenvolver

Figura 24 – Sequência de imagens da planificação do tetraedro



a visão espacial dos mesmos, e para garantir a devida utilização do Poly sugerimos que algumas questões fossem resolvidas. Esta atividade foi aplicada somente para os alunos que estão participando do nosso projeto.

## 5.4 Conhecendo o software Educandus

A primeira pergunta que podemos fazer é quem produziu esse software? Esse software de nome Educandus foi criado por uma equipe de engenheiros do ITA, quando no ano de 1990 fundaram uma empresa de mesmo nome "Educandus", essa equipe foi formada com profissionais com experiência na área educacional e em tecnologia da Informação. Dessa forma se especializou na incorporação de tecnologias para o aprimoramento do processo de ensino aprendizagem.

Atualmente essa empresa já desenvolveu softwares e ambiente online para todas os anos do ensino fundamental I e II assim como para os três anos do ensino médio, trabalham com várias disciplinas, dentre elas estamos analisando a plataforma destinada a matemática, devemos ressaltar que o software que utilizamos não é a versão online e sim a versão antiga fornecida em cd rom ao projeto alvora desenvolvido pelo governo do estado do ceará, destacamos ainda que o material foi avaliado pelo MEC e qualificou-se como adequado ao ensino.

Devemos ressaltar que devido ao fato desse software ser particular, nosso trabalha não tem intuito de ressaltar e nem denegrir o trabalho ou nome dessa empresa, nosso interesse é apenas verificar as possibilidades da aplicação do mesmo como ferramenta que auxilia as células de aprendizagem cooperativa. Outro ponto que devemos considerar que esta empresa tem vários recursos online inclusive o software de matemática aqui analisado, e que este sofreu reformulações e aprimoramentos, no entanto, nos deteremos a analisar apenas a versão que foi fornecida ao governo do estado do Ceará através do projeto alvorada.

Como já falamos anteriormente este software na versão que estamos analisando só funciona na plataforma Windows, após a devida instalação verifica-se um ícone referente ao módulo de matemática, que com um duplo clique abre a aba descrita a baixo, ver Fig. 25,onde destacamos as funcionalidades básicas da mesma:

Figura 25 – Descrição da tela inicial do EDUCANDUS


1 - Todo o conteúdo do ensino médio é dividido 12 módulos gerais aos quais são divididos em subtópicos mais específicos, podendo variar em quantidade dependendo da abrangência do módulo principal, a nossa análise se restringe a geometria espacial;

2 - Subtópico de poliedros convexos, tema específico da nossa abordagem;

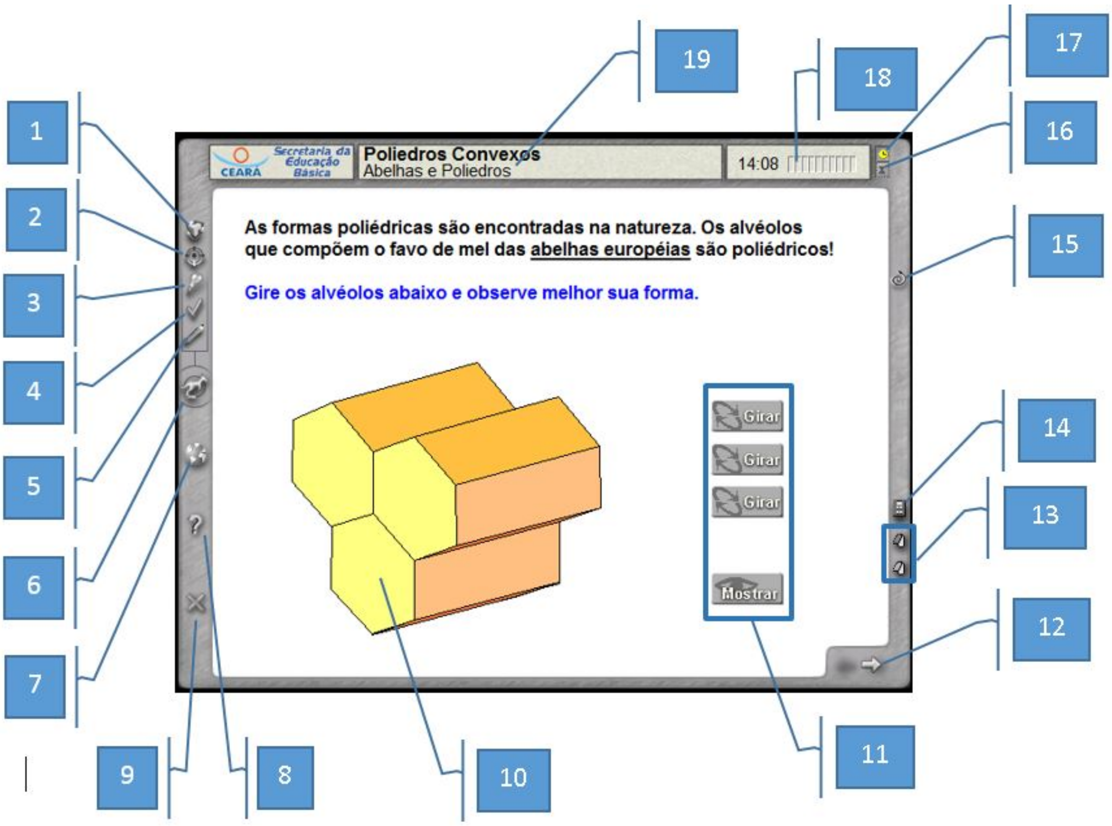
3 - Instruções de uso do software, temos vários recursos que são descritos de forma detalhada por esta seção;

4 - Botão de saída do software;

Como pode ser visto pela Fig.25 e pela descrição da mesma o acesso a informação está devidamente estrutura em tópicos e subtópicos, qualquer usuário básico de computador pode manusear e acessar essas informações, se mesmo assim houver dúvidas existe um botão de ajuda descrito a Fig.25. A aula de geometria espacial está dividida em 13 subtópicos, dos quais utilizaremos no nosso projeto apenas o subtópico (Poliedro convexo), o qual está dividido em 38 slides, dentre exposição de conceitos, simulações multimídia, avaliação de compreensão, sumário (resumo) e exercícios.

Vamos analisar o slide de abertura desta aula e mostrar todas as funcionalidades do mesmo.

Figura 26 – Descrição das funcionalidades do slide inicial da aula de poliedros




Análise das características do slide inicial do módulo de poliedros convexos conforme Fig.26:

1 - Atalho para as práticas ou simulações, que são geralmente uma situação do cotidiano no intuito de motivar o aluno a se interessar pelo módulo;

2 - Atalho para os objetivos da aula;

3 - Atalho para os principais conceitos do conteúdo;

4 - Atalho para o sumário do conteúdo;

5 - Atalho para as questões propostas, embasadas na teoria, as mesmas são acompanhadas com dicas e soluções passo a passo;

6 - Atalho para um gerenciador do módulo, a partir dessa janela podemos escolher que slides ou práticas/simulações permanecem na exploração do conteúdo;

7 - Atalho para o início do programa, onde podemos escolher um novo módulo ou sair do mesmo;

8 - Atalho para um tutorial que auxilia nas noções básicas do programa;

9 - Atalho para sair do módulo;

10 - Imagem de contextualização do conteúdo;

11 - Botões que fazem a imagem girar tridimensionalmente;

12 - Botão de avanço para uma nova questão;

13 - Bloco de notas onde o aluno pode estar anotando as dúvidas ou resumindo o conteúdo

estudado, estes blocos de notas podem ser personalizados com o nome do usuário, dessa forma fica mais fácil controlar as anotações;
14 - Inicia a calculadora do Windows para auxiliar nos cálculos;
15 - Reinicia o módulo;
16 - Indica o tempo que o aluno está estudando o módulo;
17 - Indica a hora do sistema;
18 - Indica quanto o aluno avançou na lição;
19 - Título do módulo;

O slide apresentado na Fig. 26 traz uma situação contextualizada, que fala dos alvéolos das abelhas, destacando que formas poliédricas são encontradas na natureza nos mais diversos ambientes, o software ainda disponibiliza através da imagem a possibilidade da exploração da figura de forma tridimensional e mostra os principais elementos dos poliedros como faces, vértices e arestas de forma clara e simples.

Após a apresentação do slide inicial que funciona como um elemento motivador da curiosidade do aluno, o software mostra os objetivos do módulo ver Fig. 27, destacando os principais pontos a serem desenvolvidos ao estudar esta lição. Dentre os objetivos proposto pelo software podemos destacar:
✓Poliedro convexo;
✓Reconhecer e classificar os seus elementos;
✓Classificar os poliedros;
✓Compreender a relação de Euler;
✓Definir poliedro de Platão e poliedro regular.

No slide seguinte temos a construção interativa e dinâmica de um poliedro, o interessante dessa ideia é o fato do sólido ir se formando em tempo real ver, Fig. 27a, 27b, 27c, até que a última face seja colocada, deixando claro o uso de polígonos para construir o sólido geométrico.

Apesar de ser um modo criativo e interessante, com certeza não substitui a apresentação formal, pois existem demonstrações acetáveis a nível de ensino médio, um exemplo disso seria utilizar a técnica da indução finita que segue a mesma ideia seguida pelo software.

Continuando o módulo encontramos outros recursos que realmente se apresentam bem intuitivos ver Fig.29, onde para mostrar as características de um poliedro convexo ou não convexo o software o convida a furar o sólido com uma reta, e verificar quantas faces a reta furou, essas ações acontecem de forma interativa. Após a ação de furar o sólido o aluno é submetido a algumas perguntas de múltiplas escolhas, onde se errar e chamado a repetir e analisar a simulação novamente e caso a certe avança para um próximo questionamento até que culmine em uma conclusão, que neste caso foi de verificar se um poliedro é convexo ou não convexo.

Figura 27 – Descrição do slide dos objetivos da aula sobre poliedros

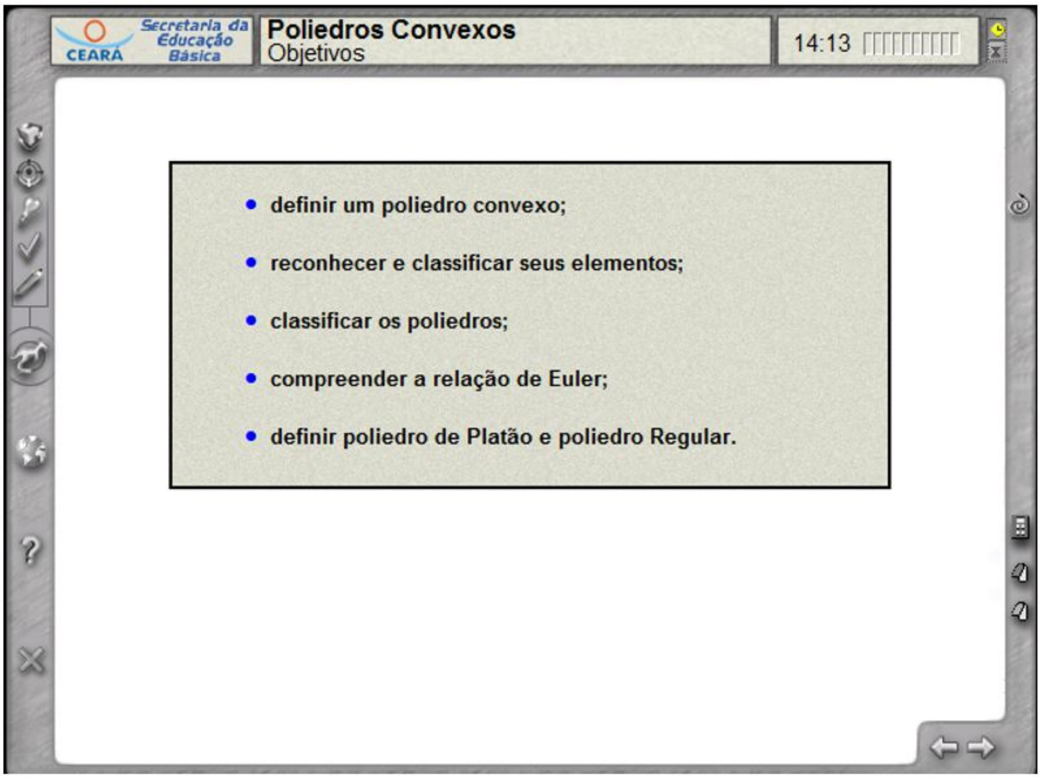
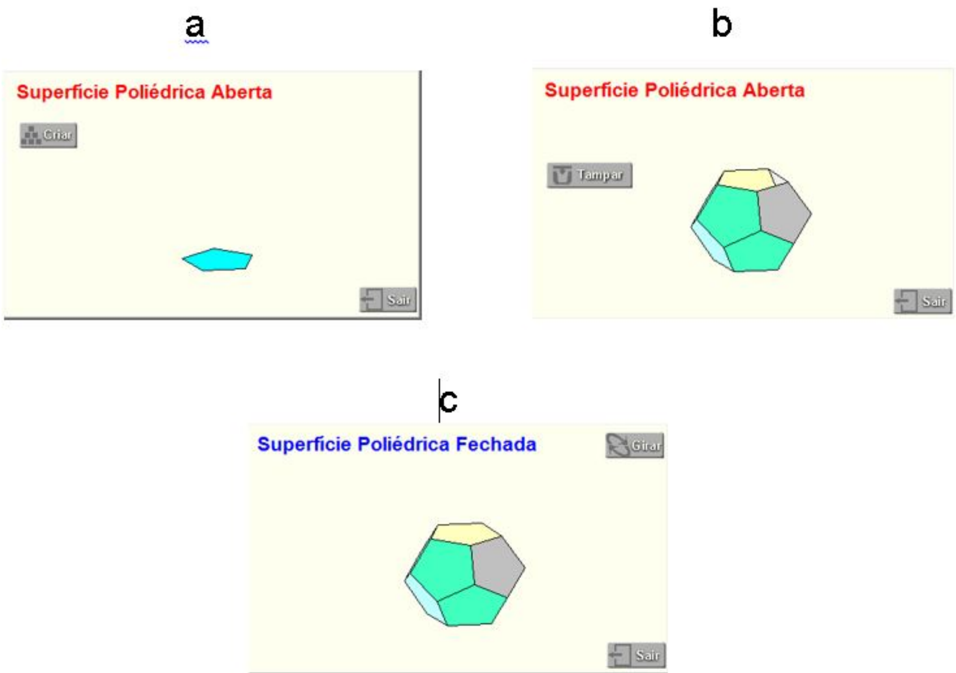
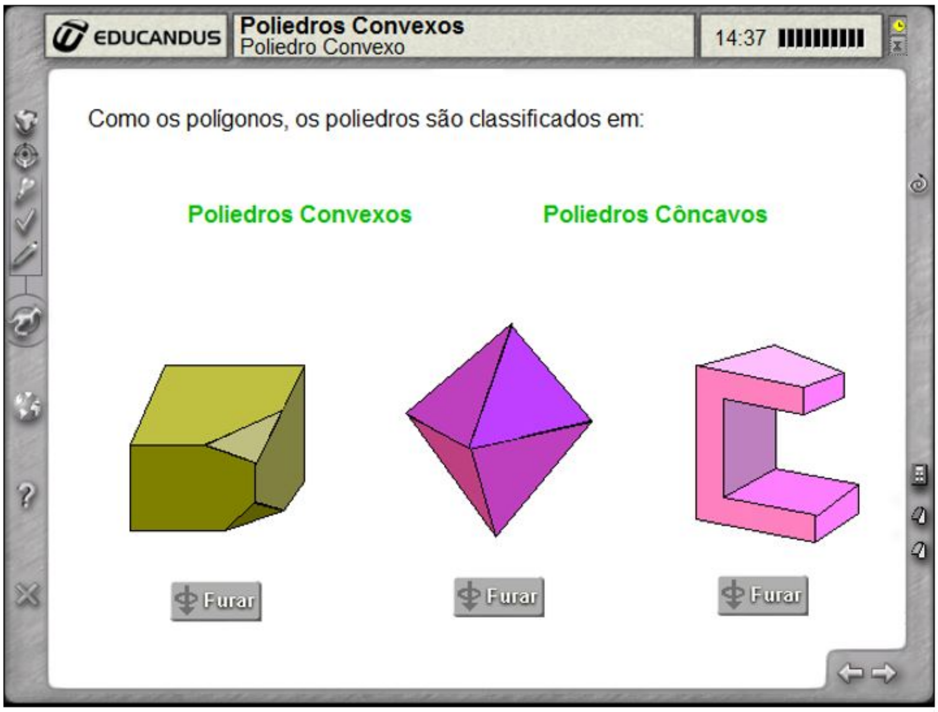



Figura 28 – Animação da construção de um poliedro



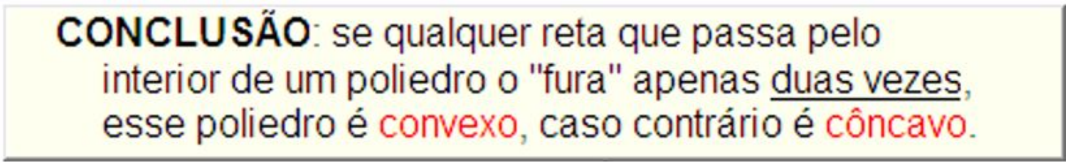

Nesta parte da apresentação podemos destacar que houver alguns elementos de avaliação, pois ao mesmo tempo que o aluno simula o experimento são feitos questionamentos acerca da observação do mesmo, no entanto, os números de intervenções são limitados e se o aluno apresentar dificuldades acerca da definição não chegara a conclusão

Figura 29 – Animação sobre poliedros convexos ou não convexo




final, pois só chegamos a definição se acertarmos as respostas, ver Fig.30, este fato não impede o aluno de avançar para o próximo módulo, o que pode gerar um problema adicional, pois, o aluno avança com o conhecimento fragmentado.

Figura 30 – Conclusão acerca de poliedros convexos ou não convexos




A ideia de manter o aluno em ação continua em vários slides seguintes, um outro exemplo que podemos citar é o de questionar o aluno acerca das características dos sólidos ver Fig.31, onde o aluno deve arrastas os nomes côncavo ou convexo para caracterizar as figuras de sólidos. Dos três sólidos mostrados dois são poliedros e caso o aluno cometa o erro de definir a esfera como um poliedro côncavo ou até mesmo convexo surge uma mensagem esclarecendo a dúvida ver Fig.32. Novamente encontramos elementos avaliativos, só que neste caso acertando ou errando o aluno chega a alguma conclusão, pois independente da escolha a definição é apresentada.

A partir desse ponto começa a tentativa de justificar a relação de Euler, de forma intuitiva. Para apresentar a ideia inicial do teorema de Euler o software foge a demonstração formal e tenta desenvolver intuitivamente a justificativa para que a relação seja verdadeira.

Após o aluno interagir preenchendo devidamente os campos ver Fig.33 e Fig.34, induz-se o aluno a questionar esses resultados, de forma a chegar em uma conclusão

Figura 31 – Animação de atividade de fixação sobre poliedros convexos ou não convexos

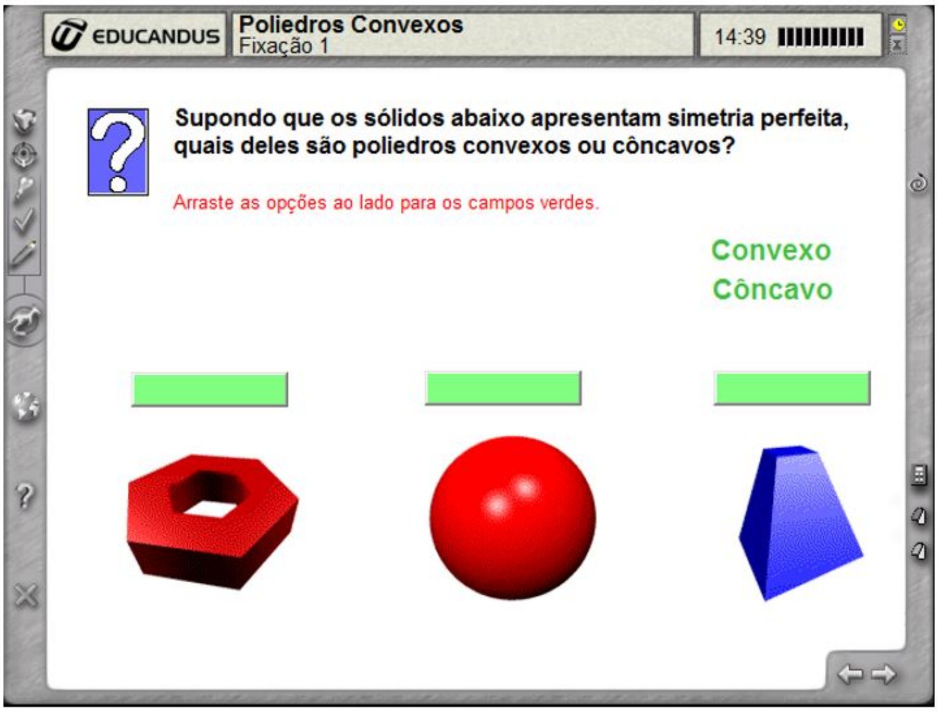
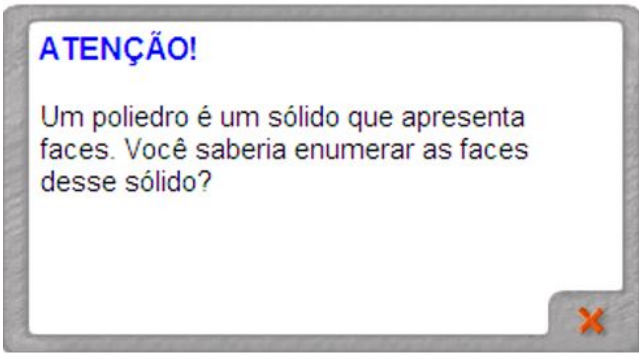



Figura 32 – Tela de orientação em caso de erro na escolha dos poliedros convexos ou não convexos




matemática acerca dos poliedros abertos.

O método utilizado é começar mostrando a relação $V - A + F = 1$, no caso de apenas um polígono, e ir acrescentando faces nesse polígono até termos um poliedro aberto que pode ser fechado ao acrescentarmos somente mais uma face, em consequência disso não se alteram vértices e nem arestas somente as faces. Assim chega-se à conclusão que a relação seria $V - A + F = 2$, para poliedro convexo fechado ver Fig.35 e Fig.36.

Essa análise é interessante e devidamente ilustrada, assim como, tentar fazer o aluno refletir a respeito de uma hipótese devido a um padrão matemático. Essa forma de intervenção pode ser de grande importância na construção do raciocínio matemático do aluno, pois o leva a questionar uma situação problema levando-o a formular hipóteses que podem se mostrar verdadeiras ou não.

Para sermos mais precisos após essa análise precisaríamos demonstra devi-

Figura 33 – Atividade intuitiva acerca dos elementos básicos do poliedros aberto

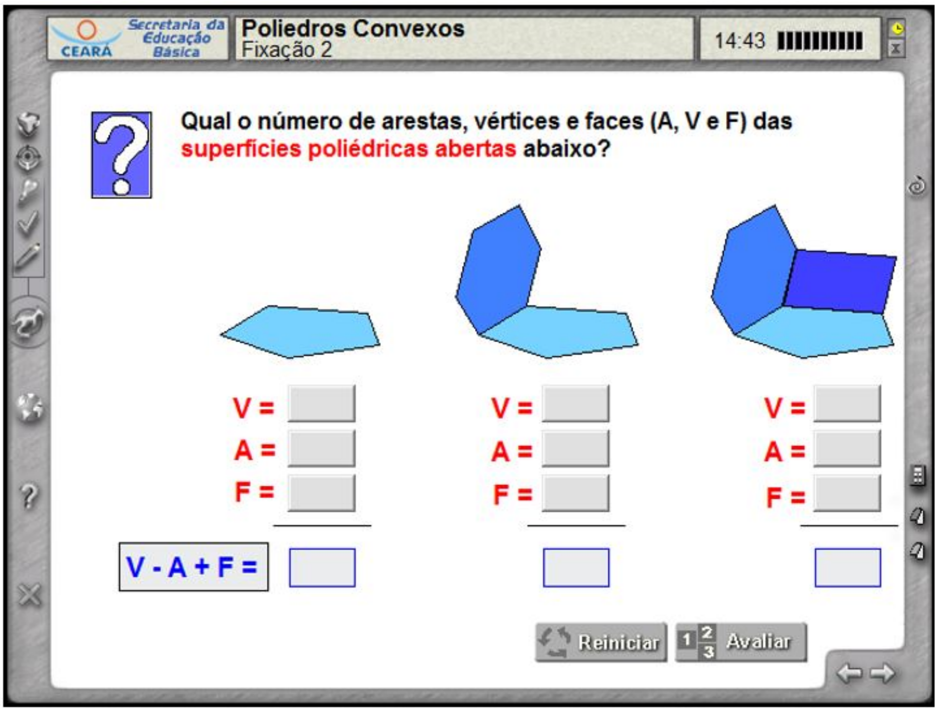
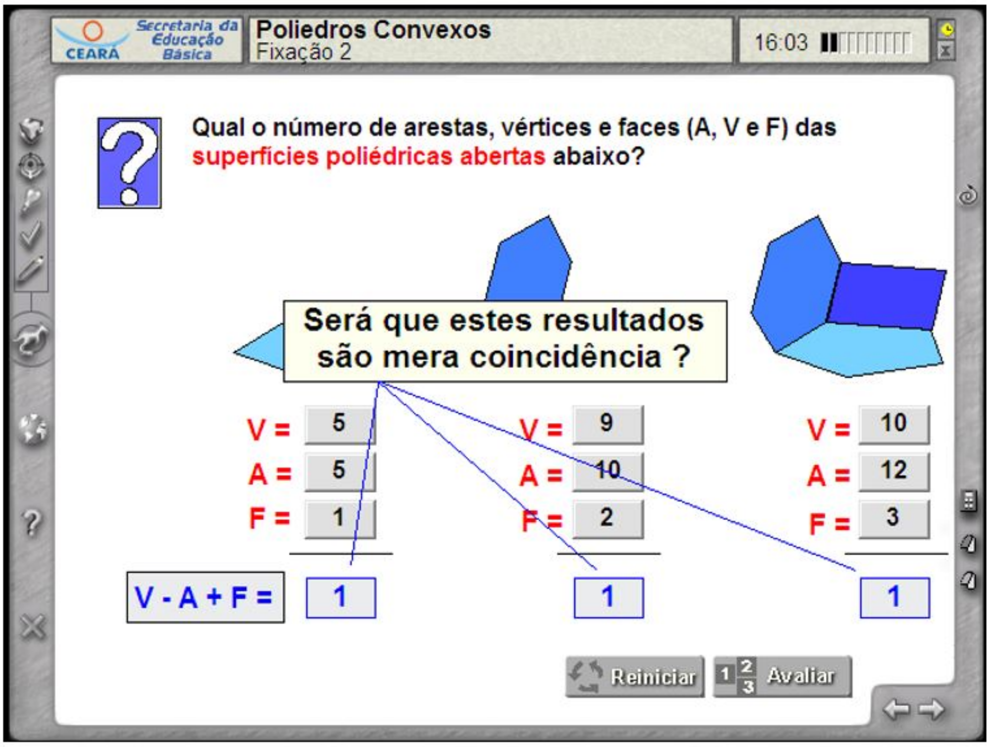



Figura 34 – Em caso de acerto levanta-se uma hipótese




damente a validade do teorema de Euler, pois segundo o professor Lima(1991) "existem técnicas ao nível de alunos de ensino médio e que ainda assim são devidamente elegantes".

Apesar de não ter demonstrado o Teorema de Euler, o software apresenta como característica algumas demonstrações mais simples ver Fig.37 são demonstradas com o rigor necessário, todavia, não houve nenhum questionamento de forma a complementar a

Figura 35 – Análise dos elementos básicos de um poliedro fechado

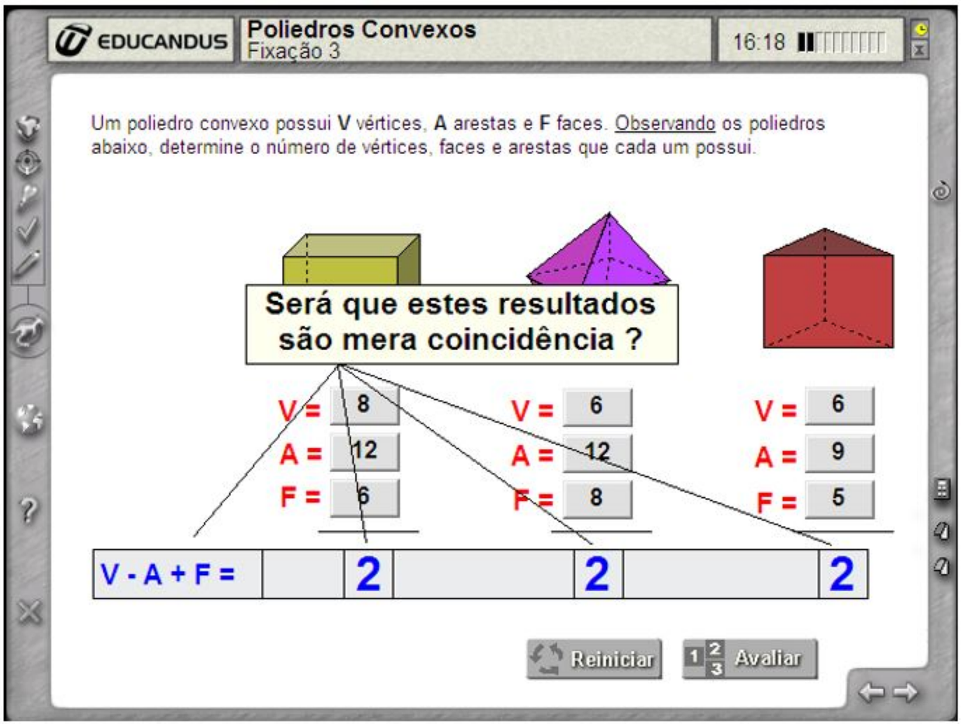
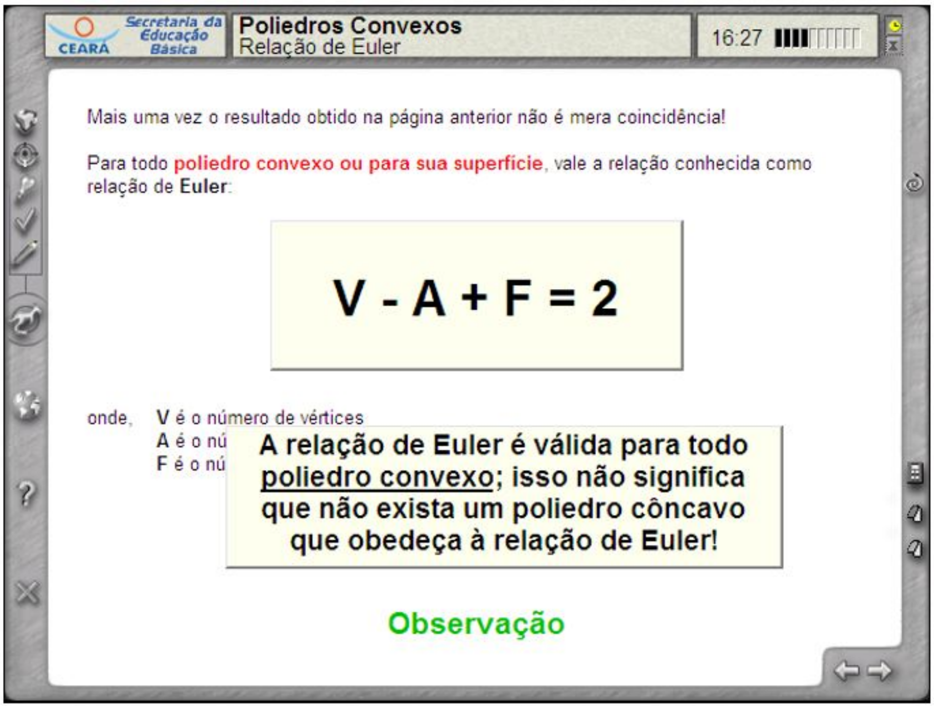



Figura 36 – Em caso de acerto enucia-se o teorema de Euler




compreensão acerca da mesma, fato este que poderia estar complementando a aprendizagem do aluno e sua capacidade de compreender a matemática.

Após a apresentação de todos os tópicos acerca do conteúdo estudado o software fecha a aula com um slide denominado resumo ver Fig.38, onde é destacado os principais assuntos estudados ressaltando o que o aluno deveria ter aprendido ao longo

Figura 37 – Soma dos ângulos das faces de um poliedro

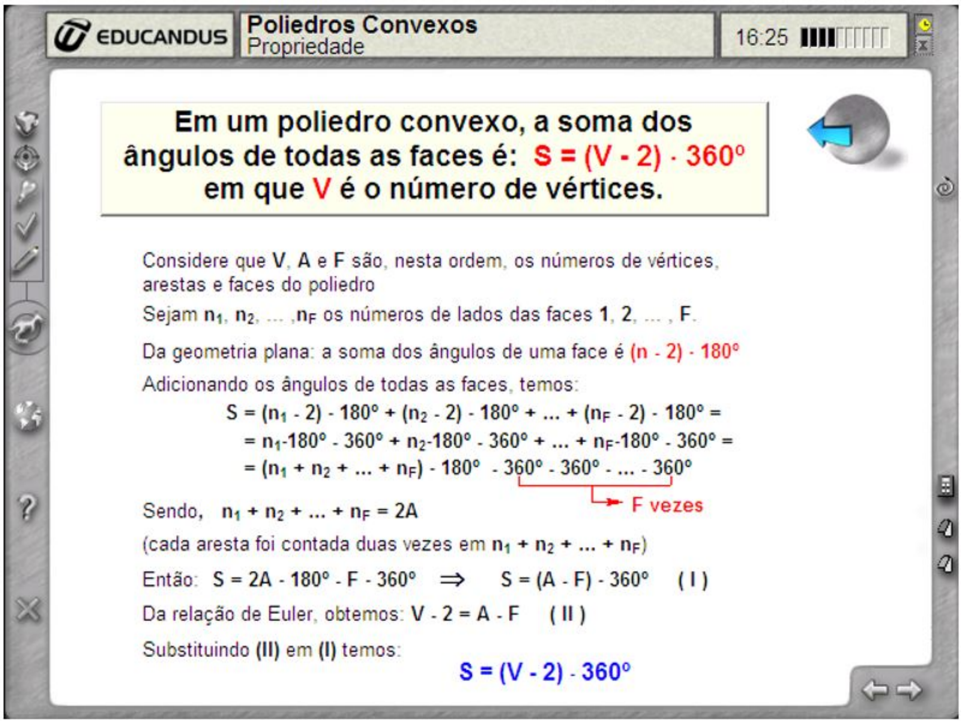
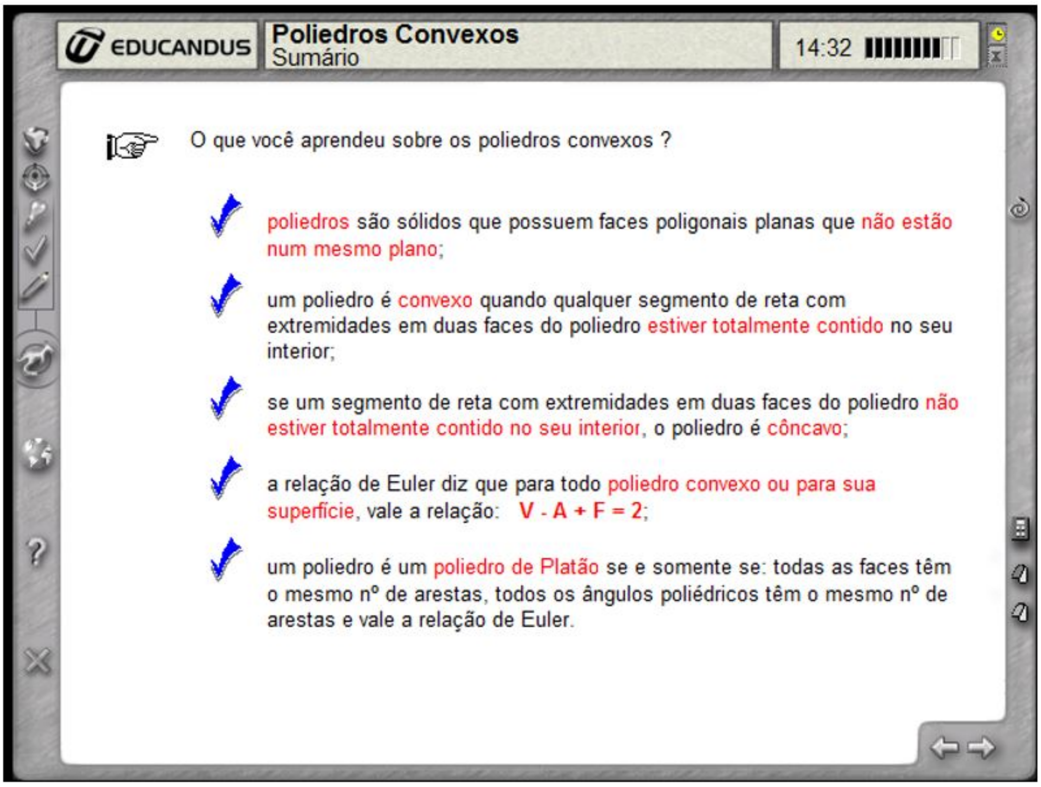


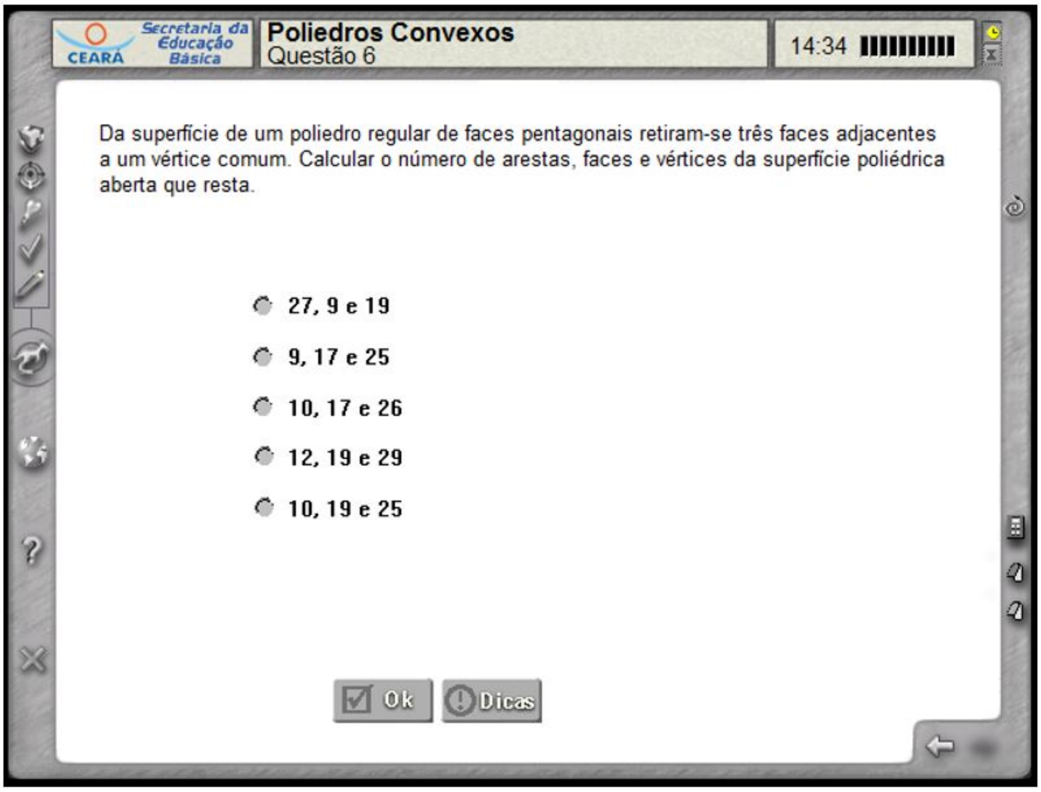

Figura 38 – Tela que apresenta o sumário




da aula, um aluno devidamente motivado ao perceber os principais pontos pode estar revendo alguns dos slides das partes que ele julgar não ter tido uma boa compreensão, ou ainda, buscar alguns outros meios de revisionar esses temas.

O software ainda apresenta uma atividade proposta organizada na modalidade de múltipla escolha ver Fig.39. Essas questões são preparadas para, em caso de erro, apresentar sugestões/dicas para o aluno fazer uma auto análise acerca do erro e tentar resolvê-la novamente. Porém, como as alternativas não mudam, cedo ou tarde o aluno chegara a resposta certa, não por necessariamente refletir e sim por tentativa e erro. Outro aspecto que deixa a desejar é a quantidade muito limitada de questões, embora este fato não impeça o aluno de buscar outras fontes de pesquisa.

Figura 39 – Exemplo de atividade proposta




De forma geral o software Educandus apresenta cada conteúdo de forma interativa, permitindo ao aluno através das experimentações, acertos e erros, demonstrações ou simulações, chegar as suas conclusões, criando seus próprios conceitos. Vale ressaltar que o programa permite retroceder ou avançar nas apresentações sempre que o aluno sentir necessidade, todavia, é nessa característica que o software apresenta o seu maior ponto fraco, pois não existe um banco de dados atrelado ao nome do usuário no intuito de colher informações acerca dos seus erros e acertos de forma a orientá-lo ou até mesmo encaminhá-lo a uma forma alternativa de mostrar o mesmo tópico. Essa ação sugerida é no mínimo simples de estruturar visto que, ao longo de toda a apresentação do módulo, o aluno é levado a responder questionamentos, acerca dos elementos básicos do poliedro, da soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo e sobre o Teorema de Euler para poliedros, entre outros. Através da interação acerto/erro, poderiam gerar um banco de dados avaliativo importante acerca da aprendizagem do educando. Com essas informações o software poderia sugerir módulos e ou atividades específicas para o tipo de erro que o discente estivesse apresentando.

Concluímos que este software, apesenta mais pontos fortes do que fracos e com isso atendera a nossa ideia de oferecer suporte aos alunos que estão estudando nas células colaborativas, visto que, estaremos também complementando e explorando os seus acertos e erros nas aulas presenciais, ao longo da apresentação desse conteúdo de fundamental importância para o ensino aprendizagem de matemática/geometria.

# 6 CONHECENDO A ESCOLA VIRGÍLIO CORREIA LIMA

A Escola de Ensino Fundamental e Médio Virgílio Correia Lima, localizada à rua Coronel Antônio Vicente n.º 274 em Pereiro, Ceará, desenvolve as modalidades de Ensino Médio Regular e Educação de Jovens e Adultos a nível de Ensino Médio, nos turnos matutino, vespertino e noturno atendendo uma matrícula de 584 alunos, com 14 funcionários, e 30 professores.

A Escola tem como missão: Fortalecer a cultura do sucesso, contribuindo para a melhoria do ensino-aprendizagem, formando cidadãos críticos e conscientes, preparados para o exercício da vida profissional e para os desafios do mundo moderno.

Sua Visão é: Uma escola voltada para o trabalho de forma eficiente; sustentável e responsável, incentivando a criatividade e o interesse social e político da comunidade escolar.

Seus valores são: Honestidade, união, respeito e democracia.

Temos na escola um núcleo gestor que é composto por um diretor geral, dois coordenadores escolares, um coordenador administrativo financeiro e uma secretaria. Para fazer parte do núcleo gestor diretores e coordenadores precisam passar por um processo seletivo através de concurso, capacitações, provas de títulos e eleição para o diretor geral.

Quanto aos organismos colegiados a instituição consta de um conselho escolar composto de todos os segmentos da comunidade escolar e o Grêmio Estudantil Nancy Campos.

Para o trabalho pedagógico na escola além dos coordenadores pedagógicos temos três coordenadores de área. Um coordenador da área de linguagens e códigos, um coordenador da área de ciência humanas e um coordenador da área de ciências da natureza e matemática que ajudam no trabalho de planejamento, organização das atividades pedagógicas, análise de avaliações, acompanhamento a sala de aula dentre outras funções.

Contamos também com professores que trabalham nos espaços integrados contendo: laboratório de ciências, laboratório de informática e centro de multimeios. No laboratório temos dois professores lotados com 100 horas, no laboratório de informática dois professores e no centro de multimeios três professores.

A escola já implantou alguns projetos dentre eles podemos citar: plano articulado dos espaços integrados, multimeios, laboratório de ciências, laboratório de informática; projetos de aprendizagens através da feira de ciências que envolve 5 categorias: linguagens, códigos e suas tecnologias, ciências humanas e suas tecnologias, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, meio ambiente e robótica. Jovem de futuro que envolve várias metodologias como: monitoria, tutoria, jovem cientista, meio ambiente, superação e outras.

Implantamos também o Projeto Professor Diretor de turma que tem um professor lotado em cada turma, com 5 horas aulas destinadas ao acompanhamento dos alunos, distribuídas da seguinte forma: uma aula para atendimento aos alunos, uma aula para atendimento aos pais, duas aulas para organização do dossiê e uma aula para ministrar a aula de formação para cidadania. Desta forma, o professor lotado como diretor de turma tem a possibilidade de aproximar-se dos alunos, pois o mesmo precisa preencher fichas biográficas com todos os dados dos alunos, acompanhar sua frequência, atender aos pais, desenvolver auto avaliações bimestrais, ministrar aulas de formação cidadã onde são tratados temas diversas dentre outras ações no decorrer do ano letivo.

Quanto aos nossos professores, todos eles são graduados na área de atuação, a maioria são especialistas e temos alguns mestrandos em Letras, matemática, física e educação. Observamos uma busca de formação continuada na maioria dos professores que fazem a escola.

Em relação aos índices de aprovação, reprovação e abandono ou evasão, distorção série ou idade, vemos que nos últimos três anos este potencial ainda não é o almejado pelos que fazem esta escola. No ano de 2014, o índice aprovação foi 71,4%, de reprovação 20,9% e 7,7% de evasão. O pior resultado foi dos primeiros anos, que mesmo com um trabalho intensificado para nivelamento e reforço escolar obteve apenas 57% de aprovação, 29,6% de reprovação e o maior índice de evasão da escola com 13,4%. Este aspecto demonstra que o aluno que está chegando no ensino médio apresenta um desnível que dificulta a aprendizagem dos mesmos, onde o aluno muitas vezes fica reprovado ou evade.

Nesse contexto, a escola busca implementar uma metodologia considerando a realidade sócio-econômica e cultural dos alunos, seu ritmo e nível de aprendizagem, analisando as marcas da história, buscando superar os problemas aprofundando os conhecimentos a luz de referenciais teóricos transformando o saber em prática e contando com a parceria de organizações governamentais e não-governamentais.

# 7 IMPLANTAÇÃO DO PROJETO DE APRENDIZAGEM COOPERATIVA COM O USO DE SOFTWARES

No dia 23/02/2015 a turma do 3º ano A da Escola de Ensino Fundamental e Médio Virgílio Correia Lima, foi convidada a participar do projeto de aprendizagem cooperativa auxiliado por tecnologias da informação.

A metodologia para seleção das amostras de alunos que participariam do projeto grupo experimental (GE) e os que seriam do grupo controle (GC), deveria ter sido através de sorteio, dessa forma garantindo a heterogeneidade do grupo e a imparcialidade da escolha, porém, não foi possível pois, durante a exposição do projeto para a turma e as ações necessárias a sua efetivação surgiu uma situação inusitada, como a aprendizagem colaborativa requer a formação de grupos e encontros periódicos para que possam estudar juntos, precisando de compromisso e força de vontade dos alunos para ajudar os membros que apresentem mais dificuldades, a maioria dos alunos afirmou não ter interesse em participar do sistema de ensino diferenciado, impossibilitando o sorteio que garantiria a aleatoriedade do processo.

Após a apresentação do projeto e das potencialidades da aprendizagem colaborativa auxiliada pelo uso de softwares no processo ensino aprendizagem, onde destacamos que esses materiais potencializam a assimilação dos conhecimentos matemáticos e que a aprendizagem cooperativa proporciona uma forma mais humana e dinâmica de estudar, ajudando o aluno a alcançar os seus objetivos, e que ao ser aprovado teríamos uma melhora nos resultados da escola, somente 8 alunos afirmaram querer participar do projeto.

Esta situação nos leva a refletir sobre quais são os objetivos dos jovens na escola, será que eles querem mesmo estudar? Será que eles vêm a escola somente por que os pais exigem? Será que eles buscam apenas um lugar para se encontrar com a galera?

Muitos são os pensadores da educação que afirmam ou cogitam que o nosso modelo de ensino já está ultrapassado e que precisamos encontrar novas técnicas ou ainda novos modelos que promovam uma efetiva aprendizagem compatível com o nível de exigência do século XXI, no entanto quando apresentamos uma possibilidade diferente nos deparamos com a rejeição que coloca em cheque as nossas intenções e nos leva a refletir sobre o que os alunos do ensino médio realmente buscam ou esperam da escola.

Não vamos adentrar a essas questões, nos deteremos apenas a análise do envolvimento dos alunos na aprendizagem de poliedros, porém, para mais aprofundamento acerca da postura dos jovens em relação ao ensino, fica como sugestão o livro Juventude e o Ensino Médio, do autor Juarez Dayrell.

Nesse ponto, podemos afirmar que os recursos tecnológicos nos auxiliaram fortemente, pois pelo simples fato dos jovens terem afinidade e/ou gostarem das novas tecnologias, conseguimos o número ideal de participantes para o projeto. Esperamos que essa afinidade com as tecnologias em conjunto com a abordagem de trabalho em grupo se mostre suficiente para melhorar a qualidade do ensino acerca do estudo dos poliedros, teorema de Euler e sólidos de Platão.

Como não pudemos fazer a escolha dos alunos de forma aleatória, realizamos uma prova diagnóstica de forma a verificar se os alunos de ambos os grupos tinham níveis de proficiência semelhantes acerca do estudo dos poliedros. As notas de ambos os grupos podem ser observadas na Tab. 7.

Tabela 5 – Notas do Diagnóstico GC X GE

| **Número GC** | **Notas GC** | **Número GE** | **Notas GE** |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,40 | 1 | 2,10 |
| 3 | 1,90 | 9 | 3,10 |
| 4 | 1,40 | 13 | 0,60 |
| 5 | 2,90 | 14 | 0,80 |
| 6 | 2,10 | 15 | 1,80 |
| 8 | 2,00 | 17 | 1,70 |
| 10 | 3,10 | 20 | 3,20 |
| 11 | 5,30 | 21 | 1,10 |
| 12 | 1,80 | 23 | 2,00 |
| 16 | 1,70 | 25 | 2,40 |
| 18 | 0,50 | 27 | 1,60 |
| 19 | 3,50 | 30 | 1,70 |
| 24 | 1,90 | 31 | 1,90 |
| 26 | 0,30 | 32 | 0,90 |
| 28 | 0,10 | 33 | 2,80 |
| 29 | 1,30 | | |
| 34 | 2,80 | | |
| 35 | 1,50 | | |
| **Média GC** | **1,92** | **Média GE** | **1,85** |

A avaliação aplicada tinha como intuito principal verificar se os alunos já tinham tido algum conhecimento prévio acerca dos estudos dos poliedros, por esse motivo o nível da prova diagnóstica foi básico cobrando apenas os conhecimentos elementares como nome do poliedro, quantidade de elementos como vértices (V), arestas (A) e faces (F), verificação básica do teorema de Euler e se os alunos conseguiam distinguir os poliedros regulares, para mais detalhes podemos observar a Avaliação na integra no anexo J, L, M.

Como podemos observar na Tab. 7 o (GC) obteve uma média de 1,92 enquanto que o (GE) obteve 1,85, isto mostra que os grupos apresentam níveis semelhantes, com exceção do aluno 11 que obteve uma nota superior a todos do grupo. Este fato não atrapalha as nossas pretensões, pois, a nota que ele obteve é inferior a média da escola. Os dados analisados na Tab. 7 mostram que não houve nenhum tipo de tendência na escolha dos membros dos grupos, pois quase todos apresentaram conhecimento muito baixo acerca de poliedros.

Ao realizarmos o primeiro encontro com o grupo experimental definindo as células de aprendizagem e apresentamos o software Educandus e o Poly. Inicialmente apresentamos os softwares e suas funcionalidades. Os alunos demonstraram dificuldades em utilizar os recursos básicos do computador, devido utilizar o equipamento apenas para acessar redes sociais, fazer alguma pesquisa na internet ou ainda ouvir músicas e assistir filmes.

Na tentativa de amenizar as frustrações mostramos que os softwares são interativos com manuseio bastante simples e intuitivos. Após, algumas demonstrações e exemplos, verificamos que estavam aptos a utilizar os softwares devidamente.

Ao definirmos os grupos surgiram algumas reclamações em relação aos seus parceiros, dessa forma os grupos foram determinados por afinidade, levando-se em consideração apenas o fato de que a célula deveria ter 3 ou no máximo 4 membros. A cada célula, foi entregue uma ficha de acompanhamento para o registro dos encontros.

Após as dificuldades iniciais serem superadas e todos os encaminhamentos serem providenciados, as aulas presenciais aconteceram como previsto no calendário escolar. Em Todas essas aulas solicitamos que atividades fossem feitas em casa e no caso dos alunos da aprendizagem cooperativa que registrassem todos os encontros e anotassem as dúvidas em caso de não telas sanado através do debate ou do uso dos softwares Poly e Eduandus. É importante salientar que as dificultadas encontradas na implantação do projeto são comuns, pois sempre que modificamos nossa prática precisamos nos adaptar para que as aulas aconteçam da melhor forma possível.

## 7.1 Andamento das aulas

Os resultados da nossa intervenção foram analisados de forma qualitativa e quantitativa. Fizemos dessa forma por acreditarmos que alguns aspectos do ensino aprendizagem não se resumem a números, no entanto, não negamos a importância de quantificar para podermos comparar de forma precisa e imparcial esses resultados.

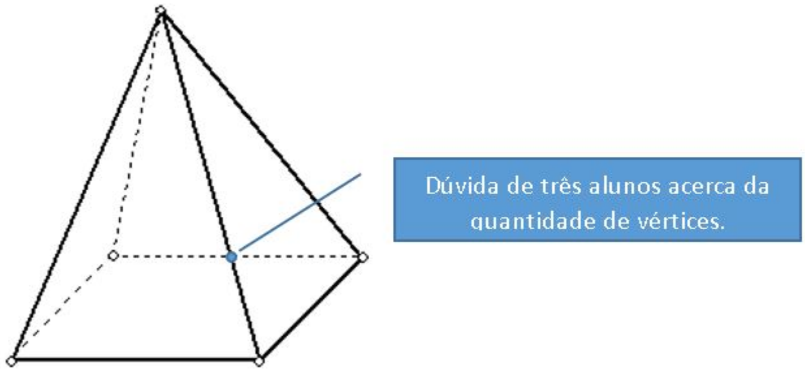
Durante a aplicação do projeto as aulas ministradas foram aplicadas para o grupo controle e os alunos do grupo experimental, onde os conteúdos foram apresentados de forma convencional através de definições no quadro branco com algumas ilustrações feitas à mão livre. Na aula de apresentação do conteúdo foi dado destaque as curiosidades históricas acerca do grande matemático Leonard Eulere o seu teorema em estudo, deixando claro que apesar de ter criado o teorema $V - A + F = 2$, ele não o demonstrou.

Os elementos do poliedro foram devidamente apresentados, sendo desenhadas, e analisadas observando os elementos básicos, faces, arestas e vértices. Também foi explorada a definição de poliedro convexo, assim como a nomenclatura designada aos mesmos em função do número de faces. Após essas discussões foi aplicada uma atividade do livro texto utilizado na escola.

Com relação a atividade aplicada sobre identificação dos elementos do poliedro e nomeação dos mesmos, os alunos se mostraram bastante ágeis e ambos os grupos de estudantes responderam sem grandes dificuldades, inclusive com alguns comentários de que estavam gostando desse conteúdo.

Apesar da simplicidade da atividade, alguns alunos apresentaram problemas acerca da visualização das formas, cometendo alguns equívocos inusitados que merecem ser citado aqui, ver Fig.40. Como afirmamos que o vértice do poliedro era formado pelo encontro de três ou mais arestas 3 alunos questionaram por que os encontros das arestas indicadas na figura não constituíam um vértice.

Figura 40 – Erro inusitado




Nesta situação os três alunos afirmavam que a pirâmide da Fig.40 tinha V= 6 vértices, pois o ponto em azul destacado nessa figura seria um encontro de arestas. Estamos destacando essa dúvida em particular, devido ser inesperado imaginar algo desse tipo, essa dúvida está diretamente ligado ao fato de termos uma representação tridimensional em um ambiente bidimensional. Para sanar esse tipo de dúvida levamos para a sala de aula os poliedros de Platão feitos em acrílico, associando de forma direta a imagem 2D ao solido real.

Dúvidas como essas reforçam, a nossa teoria de que precisamos utilizar recursos diversos para ampliar a visão espacial, e a partir daí poderemos avançar para propriedades mais complexas das formas em questão. Ambos os softwares utilizados nesse trabalho ajudam a desenvolver a visão espacial por terem recursos de visualizar o sólido de forma dinâmica em todas as direções dos eixos $(x, y, z)$. Destacamos que os softwares só foram utilizados pelo grupo que estava desenvolvendo estudos colaborativos.

Após as devidas discussões e conclusão da correção, avançamos para o cálculo do ângulo das faces de um poliedro, onde aproveitamos a oportunidade para fazermos as devidas demonstrações acerca da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono $S = (n - 2) \times 180$, e a soma dos ângulos das faces de um poliedros em função do número de vértice $Sp = (V - 2) \times 360$. Também analisamos o procedimento de contagem das diagonais de um poliedro, essa, tarefa se mostrou simples devido ao fato dos alunos terem estudado análise combinatória no ano anterior, em seguida aplicamos a atividade do livro texto. Para os alunos da aprendizagem cooperativa foi orientado que se reunissem para fazer a atividade em grupo, e que usassem os softwares caso tivessem alguma dúvida, e ainda que os mesmos revissem os conceitos explicados utilizando o educandus de forma a reforçar as ideias apresentadas na aula.

No terceiro encontro com a turma verificamos quais alunos fizeram a atividade proposta e partimos para correção. Durante a correção dessa atividade surgiram mais dúvidas acerca do procedimento de contagem das diagonais. Alguns alunos não percebiam que ao fazermos a combinação do número de vértice tomados dois a dois estávamos contando inclusive as arestas e as diagonais das faces, fazendo-se necessário a retirada desses elementos que não são diagonais de poliedro $D = C_{n,p} - A - S_{df}$. As questões relativas as somas dos ângulos das faces ficaram mais claras, apesar de alguns alunos errarem na hora de fazer as multiplicações. Para que essa falha fosse sanada sugerimos a todos os alunos que tinham dificuldades em multiplicar que estudassem a tabuada.

O Teorema de Euler só foi apresentado para os alunos no quarto encontro e graças a familiaridade que eles já tinham em lidar com os poliedros se tornou relativamente simples a apresentação do mesmo. Nós desenvolvemos inicialmente uma análise intuitiva acerca do número de vértices, arestas e faces do poliedro, de onde levantamos a hipótese, em que circunstância essa sentença $V - A + F = 2$, seria verdadeira? Nesse momento destacamos que segundo o professor Elon Lages Lima, um dos fatores que podem ter contribuído para Euler não ter demonstrado esse teorema é o fato de não existir a definição de poliedro convexo na época em que o mesmo o enunciou. Como já havíamos definido poliedro convexo, partimos para a demonstração. O modelo de demonstração adotado para alunos do Ensino Médio foi o utilizado no livro do PAIVA (1995), esse modelo segue uma ideia de demonstração por construção, (ver capítulo 2), utilizamos esse modelo por entender que faz uso de ideias simples e compatíveis com o nível do aluno do ensino médio.

Os alunos apresentaram grande rejeição a apresentação das demonstrações, em especial pelo fato de terem significativa dificuldade em trabalhar com equações algébricas, no caso da demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Mesmo sobre alguns protestos concluímos a demonstração e partimos para analisar situações problemas que podiam ser resolvidas utilizando esse teorema. Após a resolução de alguns exemplos, aplicamos a atividade do livro texto. Para os alunos da aprendizagem colaborativa foi sugerido uma atividade extra acerca da exploração do software Poly, na tentativa de explorar esse recurso ao máximo e desenvolver a visão espacial.

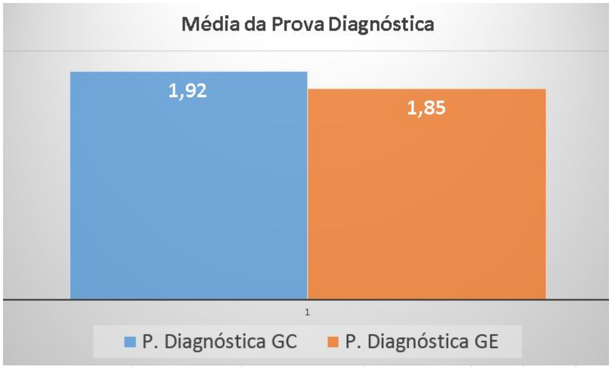
No quinto encontro, corrigimos a atividade e procuramos explicar todas as dúvidas apresentadas pelos alunos de ambos os grupos. De fato, a maioria deles apresentaram uma dificuldade relativamente alta nas questões que relacionava o dobro de arestas com a quantidade de lados dos polígonos das faces, e também quando relacionava o dobro de arestas com o produto do vértice V pelo tipo de vértice (triédrico, tetraédrico, pentaédrico). Essas questões em particular geralmente terminavam em um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis, conteúdo que é devidamente apresentado aos alunos desde o 7º ano do ensino fundamental. Os alunos com os quais estamos trabalhando são do 3º ano do ensino médio, e mesmo assim foi bastante turbulento o processo de resolução desse modelo de problema, pois os mesmos não apresentavam as competências e habilidades acerca desse conteúdo.

Para encerrarmos a apresentação dos poliedros mostramos os sólidos de Platão, e também demonstramos por qual motivo só existem cinco classes de poliedros, (ver demonstração no capítulo 2.8), fechando dessa forma as aulas expositivas que nos propusemos a trabalhar. Para que o conteúdo como um todo fosse revisado pelos os alunos de ambos os grupos solicitamos que organizassem um seminário de fechamento das aulas sobre poliedro, onde deveriam confeccionar os sólidos de Platão, e através de sorteio explicassem para os seus colegas todas as características estudadas acerca do poliedro que confeccionou.

## 7.2 Análise dos dados da pesquisa

Passaremos a analisar os dados da pesquisa. Iniciaremos com os gráficos referentes a prova diagnóstica, onde percebemos que o nível dos grupos GC é ligeiramente maior que o do GE, uma diferença de apenas 0,07, fato este que mostra que a separação dos grupos não seguiu nenhum tipo de tendência ver Gráfico 1 . Os elementos cobrados na prova diagnóstica foram de nível básico como por exemplo: a contagem dos elementos vértices(V), arestas(A) e faces (F), o nome dos poliedros, aplicação básica do teorema de Euler e quais dos poliedros são regulares. Essas notas revelam que os grupos se equivalem em termos de conhecimentos prévios acerca dos poliedros.

Gráfico 1 – Comparação das notas da Prova Diagnóstica




Em nossa pesquisa, procuramos observar as questões qualitativas pois acreditamos ques influenciam na aquisição do conhecimento e na dinamização do processo ensino aprendizagem.Vejamos ver Gráficos 2 e 3 abaixo:

Diante do Gráficos 2 e 3 percebemos que o número de atividades realizadas e a participação do grupo experimental foi superior ao grupo controle, dessa forma só precisamos verificar se essa diferença se manifesta na avaliação quantitativa.

Analisando o comportamento de ambos os grupos, percebemos que a turma, Gráfico 2 – Comparação Entre o Número de Atividades GC X GE

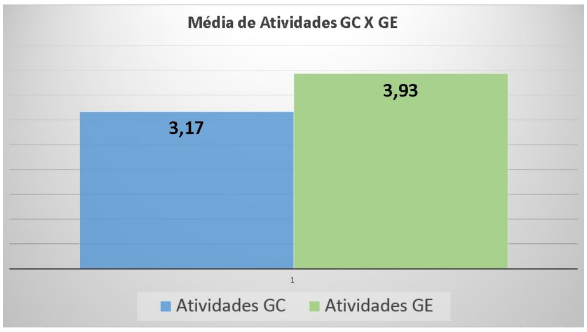
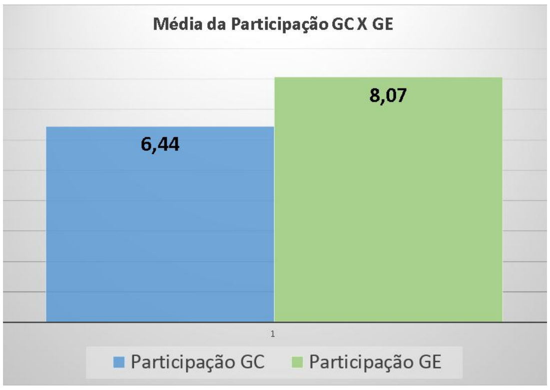



Gráfico 3 – Comparação da Participação nas Aulas GC X GE

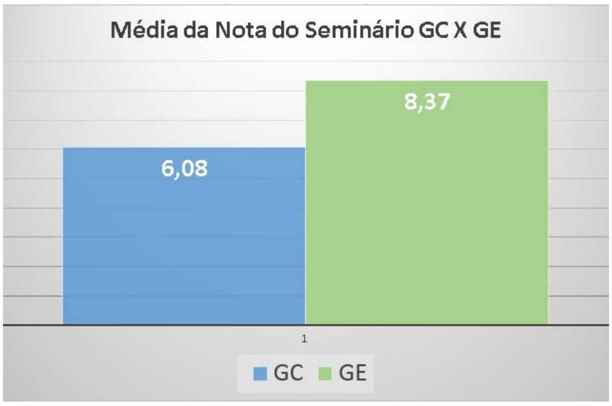



apesar de agitada, quando cobrada acerca de atividades é relativamente interessada. Esse comportamento deve estar ligado ao fato de serem alunos de 3º ano, com idades em torno de 16 a 19 anos e prestes a avançar para o ensino superior ou em busca de algumas profissões mais imediatistas.

Sobre a participação nas aulas, fazendo perguntas ou trazendo dúvidas a respeito da atividade. No grupo controle houve poucos questionamentos e nenhum dos participantes trouxe questões extras na busca de ampliar os conceitos analisados em sala de aula. Porém, o grupo experimental apresentou uma dinâmica diferente, devido a incumbência dos alunos ajudarem os colegas que não compreenderam bem o conteúdo, surgiram inúmeros questionamentos durante a apresentação do conteúdo. Ainda podemos destacar que durante as reuniões que o grupo (GE) realizou, membros mais ativos dos anotavam as dúvidas que não foram dirimidas nas reuniões para posteriormente saná-las nas aulas presenciais.

Quanto ao seminário, gráfico 4, na tentativa de avaliarmos os alunos de forma mais rigorosa fizemos vários questionamentos relacionados ao estudo dos poliedros, como número de arestas A, vértices V, faces F, a soma dos ângulos das faces do poliedro e o número de diagonais do mesmo. Podemos enfatizar que alguns grupos apresentaram de forma clara e objetiva, pois antes mesmo de fazermos qualquer questionamento, eles se encarregavam de abordar todos os aspectos básicos e ainda acrescentaram na sua apresentação, a área de cada polígono das faces do poliedro, fazendo inclusive as demonstrações da altura de um triângulo equilátero e de forma algébrica, determinaram uma fórmula

Gráfico 4 – Comparação das notas obtidas no seminário

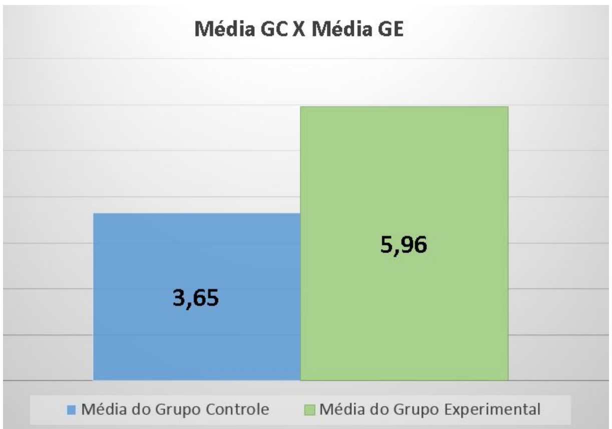



para o cálculo da área do triângulo equilátero, ampliando essa prática para a área do hexágono regular. Outra equipe também demonstrou algebricamente como determinar a diagonal do quadrado.

Esses fatos citados são pontos importantes, pois apesar de termos feito as demonstrações sob protestos, motivamos e mostramos para os alunos que tal assunto pode ser compreendido. Outro aspecto de relevância foi a perfeição com que alguns grupos confeccionaram os 5 sólidos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Muitos grupos fizeram os sólidos com palitos de churrasco, mas, teve um deles que os confeccionou com raios de bicicleta soldados e pintados de branco. Após a apresentação os sólidos foram doados para a escola.

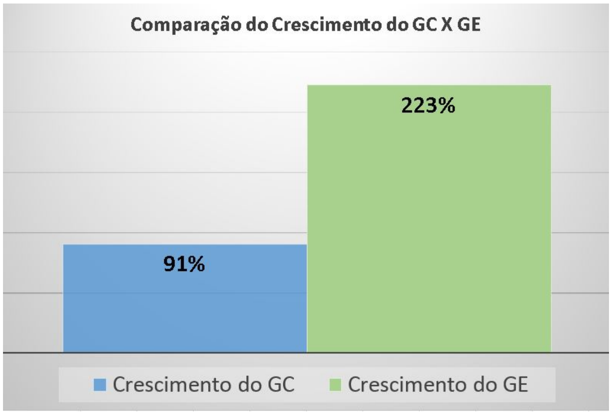
Quando observamos o Gráfico 5 percebemos a efetiva diferença de notas do GE em relação GC, comprovando que a metodologia aplicada proporcionou aos alunos envolvidos, um avanço muito significativo na aprendizagem das característica dos poliedros. Vale ressaltar que, o grupo experimental apresentou uma participação mais efetiva, realizando reuniões em contra turno para estudar em grupo e explorar os recursos dos softwares, e apresentaram o seminário de forma clara contribuindo efetivamente para este resultado.

Gráfico 5 – Notas da Prova Após a Intervenção do Projeto



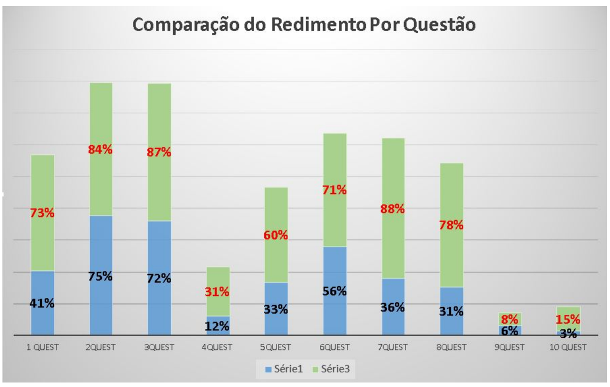

A notoriedade de como um grupo se destacou do outro pode ser observada de forma mais clara quando comparamos o crescimento do dois grupos ver Gráfico 3. Numa análise inicial percebe-se uma superioridade do grupo controle GC sobre o grupo experimental GE. Quando comparamos as médias de acertos do diagnóstico, o GC apresentou desempenho de 1,92 e o GE 1,85. Após as aulas expositivas, resolução de atividades, correções e apresentação do seminário, além das atividades desenvolvidas no contra turno pelo GE observamos crescimentos distintos dos grupos, pois o GC passou para uma média 3,65 mostrando um crescimento de 91%. Enquanto no grupo experimental GE, a intervenção do projeto, atingiu a média de 5,96 apresentando um crescimento de 223%, ver Gráfico 6.

Gráfico 6 – Comparação do crescimento GC X GE




Podemos observar que na avaliação quantitativa, os alunos do grupo experimental se sobressaíram dos alunos do grupo controle em todas as questões ver Gráfico 7, este fato já tinha sido observado pela avaliação qualitativa, pois o GE apresentou melhor rendimento em participação em sala de aula, seminários e atividades propostas. Quando comparamos o crescimento dos dois grupos em relação ao diagnóstico, é possível perceber uma diferença bastante significativa, ver Gráfico 6.

Gráfico 7 – Rendimento por questão GC X GE




De forma geral, houve uma grande diferença de postura e iniciativa dos alunos que trabalharam a aprendizagem cooperativa. Os fatos citados nos apontam para ganhos significativos nas competências, atitudes e comportamentos, os quais seriam suficientes para considerarmos a aprendizagem colaborativa uma ideia de grande impacto para o ensino de matemática. Além destes aspectos, conseguimos também bons resultados na avaliação quantitativa deixando claro que a mesclagem dessas duas técnicas de ensino deve ser considerada plausível pois produzem resultados promissores.

## 7.3 Análise dos erros cometidos na resolução da prova

A prova individual e não pesquisada foi agendada com uma semana de antecedência, sob as recomendações que os alunos aproveitassem esse intervalo de tempo para revisar todos os conteúdos estudados. A prova foi composta com 10 questões onde a dificuldade foi maior do que no diagnóstico, pois fomos fiéis ao nível das atividades que trabalhamos em sala. Todas as questões abordadas eram discursivas, desta forma poderemos analisar quais concepções corretas ou equivocadas os alunos apresentaram durante a tentativa de resolução, ver Fig. 39, 40, 41, 42, 43, 44.

Na primeira questão o aluno de número 17, que faz parte da aprendizagem cooperativa, acertou o que foi solicitado na questão, ver Fig. 41. No entanto, tentou inclusive aplicar o teorema de Euler e apesar de escrevê-lo de forma correta, comete erros básicos de operações com números inteiros. É importante salientar que essas deficiências oriundas do ensino fundamental não foi o foco do nosso trabalho. Assim de um ponto de vista analítico podemos perceber que ele lembra qual a equação que relaciona os elementos do poliedros. O aluno 17, apresentou a mesma dificuldade operatória na questão 6, ver Fig. 42, que pedia apenas para verificar se os sólidos atendiam o teorema de Euler, e ainda na questão 8, ver Fig. 43, neste caso está claro que ele infelizmente não consegue operar número inteiros, no entanto lembra da relação $V - A + F = 2$. Outro exemplo ver Fig. 44 semelhante é do aluno 25 conforme tabela de notas em anexo.

Figura 41 – Erro de operações com números inteiros

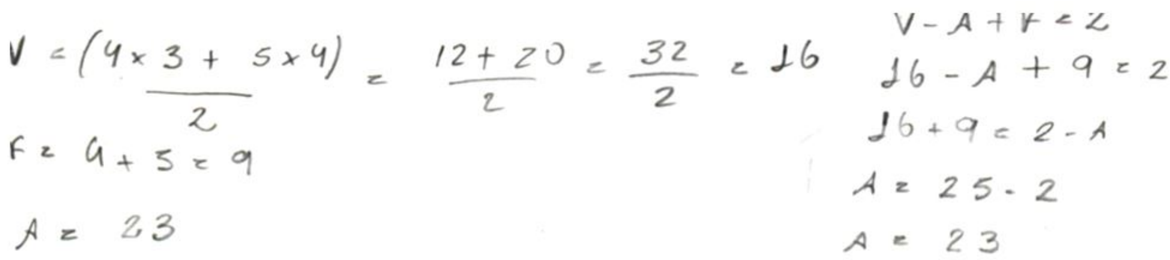
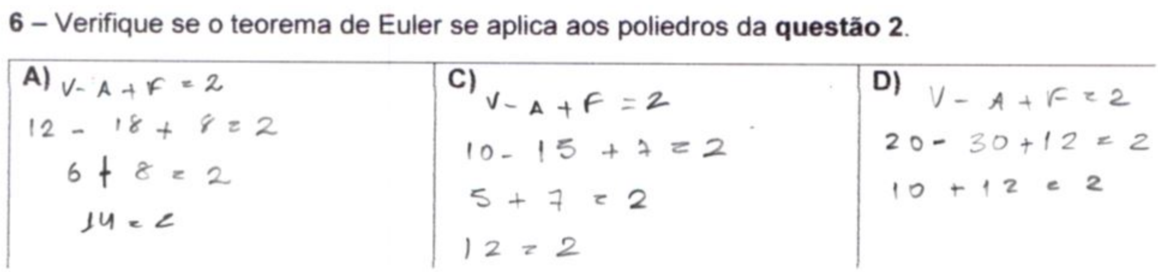
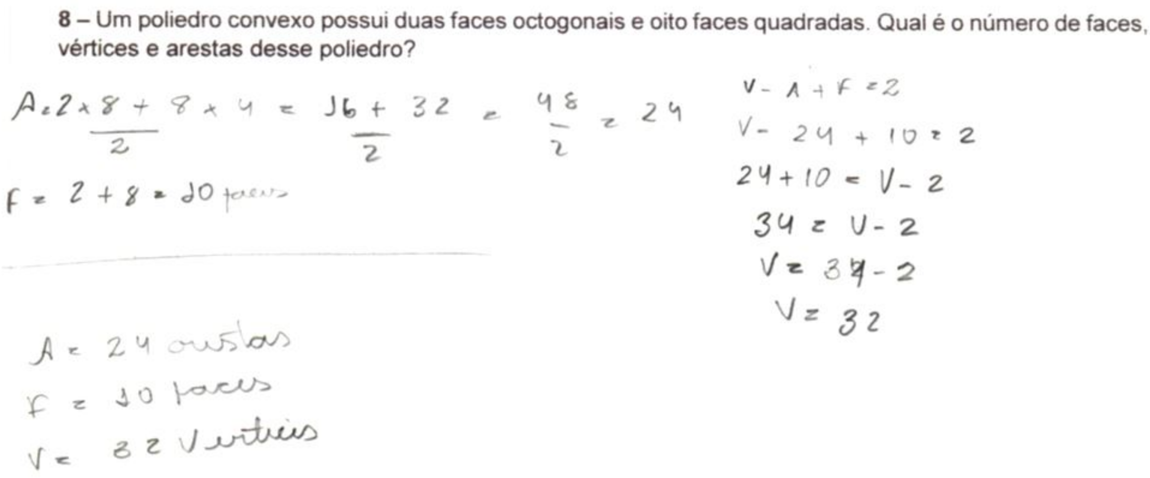



Figura 42 – 2° Erro de operações com números inteiros




Estes erros com números inteiros aconteceram com alunos de ambos os grupos, assim, se o trabalho desenvolvido no ensino fundamental não estiver devidamente estruturado, a deficiência se propaga ao longo de toda a vida estudantil desse jovem, pois, é fato que os conhecimentos matemáticos são acumulativos e a perda de qualquer etapa básica prejudica as outras que serão trabalhadas no ensino médio e a posteriori no ensino superior.

Figura 43 – 2° Erro de operações com números inteiros


**8 – Um poliedro convexo possui duas faces octogonais e oito faces quadradas. Qual é o número de faces, vértices e arestas desse poliedro?**

$A = \frac{2 \times 8 + 8 \times 4}{2} = \frac{16 + 32}{2} = \frac{48}{2} = 24$

$F = 2 + 8 = 10$ faces

$V - A + F = 2$

$V - 24 + 10 = 2$

$24 + 10 = V - 2$

$34 = V - 2$

$V = 34 - 2$

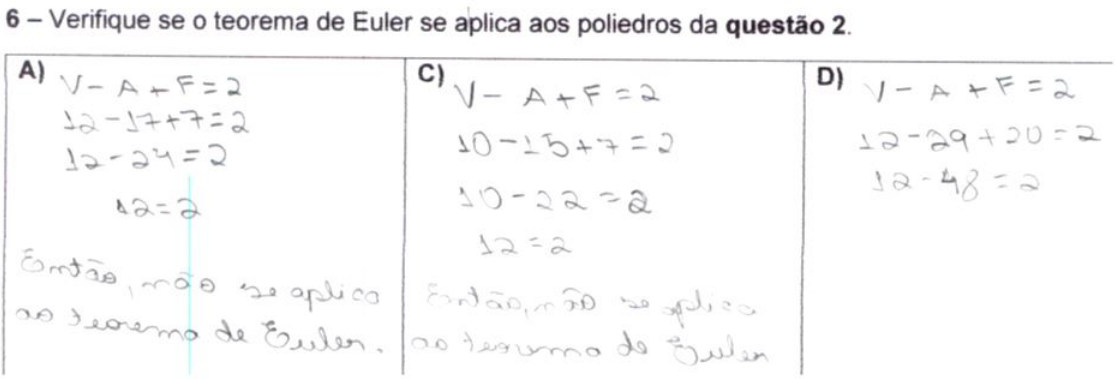
$V = 32$

A = 24 arestas

F = 10 faces

V = 32 vertices

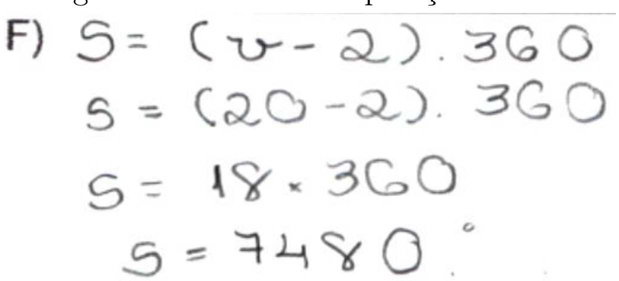
Figura 44 – 3° Erro de operações com números inteiros


**6 – Verifique se o teorema de Euler se aplica aos poliedros da questão 2.**

| A) | C) | D) |
|---|---|---|
| $V - A + F = 2$ | $V - A + F = 2$ | $V - A + F = 2$ |
| $12 - 17 + 7 = 2$ | $10 - 15 + 7 = 2$ | $12 - 29 + 20 = 2$ |
| $12 - 24 = 2$ | $10 - 22 = 2$ | $12 - 48 = 2$ |
| $12 = 2$ | $12 = 2$ | |
| Então, não se aplica ao teorema de Euler. | Então, não se aplica ao teorema de Euler | |

Outro erro comum é o que envolve a dificuldade operatória como multiplicação ou divisão, ver Fig. 45. Se verificarmos a questão 7 do aluno 13, item F apesar de conhecer a fórmula devidamente cometeu o erro na multiplicação, atrapalhando assim a sua resposta final. Dessa forma percebemos que a tarefa de mostrar os conceitos relativos aos poliedros estão sendo alcançados, porém, não conseguimos notas ainda melhores por problemas de deficiência adquiridas ao longo do ensino básico.

Figura 45 – Erro com operações básicas


F) $S = (v - 2) . 360$

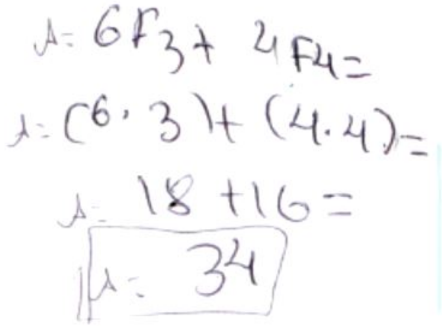
$S = (20 - 2) . 360$

$S = 18 \times 360$

$S = 7480°$

O aluno de número 9 poderia ter melhorado significativamente o seu rendimento, no entanto insistiu no mesmo erro, ver Fig. 46 . Podemos atribuir esse erro ao fato de ele ter participado de apenas 20% das reuniões para resolver as atividades. Ele cometeu esse mesmo erro nas questões 1, 5 e 8, este fato também deixa claro que ela não compreendeu porque $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$, ou seja, elE tentou apenas memorizar a fórmula. Essa técnica é muito utilizada pelos alunos, porém sabemos que há falhas drásticas, memorização sem compreensão causa confusão nas soluções matemática, e é totalmente descartada pelo nosso cérebro em um curto período de tempo.

Figura 46 – Erro de compreensão lógico/matemática




Ao analisarmos as questões 2, 3 e 6 da avaliação que requer apenas contagem direta dos elementos do poliedro, observamos que esse tipo de erro está diretamente ligado ao fato do aluno não ter desenvolvido sua visão espacial de forma adequada. Podemos perceber que a quantidade de alunos do grupo controle que erraram é significativamente maior que os alunos que usaram o Poly para aprimorar a sua visão espacial, para assim minimizar esse tipo de erro. Podemos observar as diferenças no Gráfico 7, onde os alunos que erraram a contagem direta dos elementos do poliedro na questão 2, 3 e 6, apresentando respectivamente as seguintes diferenças 9%, 15% e 15% entre os dois grupos, ver prova no apêndice.

# 8 CONCLUSÃO

Após a implantação do projeto *"trabalhando poliedros através de aprendizagem cooperativa utilizando softwares como apoio "* , observamos que inicialmente encontramos algumas dificuldades, porém acreditamos que sempre que saímos da zona de conforto passamos por algum incomodo e que os problemas iniciais podem ser superados com um pouco de boa vontade e bom senso na hora de tratá-los.

Podemos destacar que o uso de software no desenvolvimento do projeto funcionou como um elemento de motivação para os alunos participarem do modelo de trabalho cooperativo. O software *Poly* com seus recursos de geometria dinâmica, junto com o *Educandus* que traz o conteúdo estruturado de forma organizada e muito bem ilustrado, contribui de forma direta na ampliação da visão espacial dos alunos do (GE). Além disso, as reuniões em grupo para resolver as atividades direcionadas de forma a explorar ao máximo os recursos dos softwares citados, o que implica em um número de horas de estudo maior, proporcionaram o melhor rendimento do (GE), fato este observado na análise dos resultados.

Outro ponto que ficou claro na avaliação qualitativa é que a postura e o compromisso dos alunos do projeto se mostraram mais adequados, pois eles tiveram participação mais efetiva e fizeram maior número de atividades e ainda apresentaram o seminário de forma mais responsável e dinâmica, dessa forma, podemos afirmar que esses pontos citados influenciaram de forma direta na obtenção de melhores resultados na avaliação quantitativa, o que mostra sem sombra de dúvidas que este método de trabalho traz resultados positivos.

Assim, podemos concluir que os resultados do projeto foram positivos, e que essa é uma técnica viável, porém, requer um planejamento dinâmico e flexível, assim como a escolha de um software adequado, além de um pouco de disponibilidade para receber os alunos em contra turno de forma a sanar as suas dúvidas ou até mesmo para mediar os conflitos que possam surgir nos grupos. Deixamos aqui a sugestão deste projeto para que os professores interessados em utilizar novas técnicas de ensino, na busca de tornar a aprendizagem de matemática mais prazerosa e significativa. Queremos também encorajá-los a tentar aplicá-lo a outros conteúdos, bastando para isso que sejam adaptadas algumas ideias e escolhidos os softwares adequados aos seus objetivos.

# REFERÊNCIAS


ABRANTES, L.; OLIVEIRA I., P.; SERRAZINA. **A matemática na Educação Básica:**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ministério da Educação, 1999.

ALMEIDA, Maria Elizabeth. **Informática e Formação de Professores: Vol. 1**. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação MEC, 2000a.

ALMEIDA, Maria Elizabeth. **Informática e Formação de Professores: Vol. 2**. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação MEC, 2000b.

BARBOSA, Maurício da Silva. **A Geometria Espacial no Ensino Médio a Partir da Atividade Webquest, PUC-SP.** 2013. 80 f. Dissertação: (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio: Volume 2.** Brasília: MEC/SEMTEC, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnologica. **Parâmetros curriculares nacionais:**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Euler, um matemático multifacetado.. **Revista Brasileira de História da Matemática,** Brasil, v. 9, n. 17, p. 13–31, 2009.

DAYRELL, Paulo, Juarez et al CARRANO. **Juventude e ensino médio: sujeitos e currículos em diálogo**. Belo Horizonte : Editora UFMG, 2014.

FILHO, Ciro Marcondes. **Sociedade Tecnologica**. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

LIMA, Elon Lages. Teorema de Euler Sobre Poliedros. **Matemática Universitária,** Rio de Janeiro, v. 19, n. 2, p. 57–73, 1985.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática:**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino:**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio: Vol. 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MEDEIROS, José Adelino. **O Que é Tecnologia**. Curitiba: Editora brasiliense, 2010.

MIALICH, Flávia Renata. **Poliedros e Teorema de Euler, SP.** 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – UNESP , São Paulo, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Vol. 2**. 1. ed. São Paulo:Editora Moderna, 1995.

ROLKOUSKI, Emerson. **Tecnologias no enisno de matemática**. Curitiba: Editora Intersaberes, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto. **Novo Olhara Matemática: Vol. 3**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

TORRES, Patrícia Lupion. **Laboratório online de aprendizagem: Uma proposta crítica de aprendizagem colaborativa para a educação**. Tubarão: Editora Unisul, 2004.

# ANEXO A – ATIVIDADE UTILIZANDO O POLY Pag. 1

**Atividade utilizando o Poly**

1 – Inicie o programa e na tela que aparece o poliedro, clique com o botão esquerdo do mouse e faça um leve movimento para cima, isto fará o poliedro girar. Observe as características e aparência de cada um dos poliedros de Platão.

Nas questões seguintes por uma questão de organização, siga sempre a ordem do poliedro de menor número de face para o de maior número de faces.

2 – De acordo com o que estudamos, o nome dado a um poliedro está relacionado ao número de faces do mesmo. Observando com o Poly cada um dos poliedros de Platão, determine a quantidade de faces e o polígono de cada face e, por conseguinte o nome de cada um deles.

| Q. de faces (F) | Polígono da Face | Nome do Poliedro |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

3 – Como estudado nas aulas presenciais, arestas são o encontro de dois lados de cada face poligonal. Verifique a quantidade de arestas de cada poliedro de Platão.

| Q. de Arestas (A) |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

# ANEXO B – ATIVIDADE UTILIZANDO O POLY Pag. 2

4 – Planifique cada um dos poliedros de Platão e observe atentamente. Se separarmos cada um dos polígonos qual a quantidade de lados que encontraríamos?

| Q. Lados das faces |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

5 - O que podemos observar em relação as questões 3 e 4 se relacionarmos a quantidade de lados e a quantidade de arestas? Estabeleça uma relação algébrica entre essas duas grandezas.

6 – Como estudado nas aulas presenciais, vértice poliédrico é o encontro de 3 ou mais arestas, sendo que nas classes de poliedros de Platão esse valor é sempre menor ou igual 5. Verifique a quantidade de vértices de cada poliedro de Platão.

| Q. de Vértices (V) | Q. Aresta por Vértice |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

7 – De que forma a quantidade de Vértices e a quantidade de arestas se relacionam com o número de lados de todas as faces poligonais? Crie uma relação algébrica com essas grandezas.

# ANEXO C – ATIVIDADE UTILIZANDO O POLY Pag. 3

8 – Observe a tabela a seguir e complete com os dados que já foram determinados sobre cada um dos poliedros mencionados nela. A seguir, observe a última coluna e tente deduzir uma relação entre número de vértices, faces e arestas para esses poliedros.

| Poliedros | Nº de vértices (V) | Nº de Arestas (A) | Nº de Faces (F) | V+F |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro regular | | | | |
| Hexaedro regular (cubo) | | | | |
| Octaedro regular | | | | |
| Dodecaedro regular | | | | |
| Icosaedro regular | | | | |

9 – descreva algebricamente a relação observada anteriormente. A qual matemático é atribuída a autoria dessa relação? Essa relação não é sempre válida, faça um esboço de um poliedro em que a relação não é verdadeira.

10 – Existe algum caso de poliedro demonstrado pelo Poly em que a relação da questão anterior não é verdadeira?

# ANEXO D – FICHA 1 DE ACOMPANHAMENTO DE ESTUDO

**Fichamento de acompanhamento de Estudo através de aprendizagem colaborativo**

Nome de equipe: Trio Mat   Nº de membros: 03 pessoas

| Nº Membros presente | Dia | Hora Início | Hora Término | Conteúdo Estudado | Atividade desenvolvida | Recursos Utilizados | Dúvidas encontradas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 03 | 06/03/2015 | 14:00 | 15:00 | Poliedros | Exercício de Poliedros da Página 70 | Livro Didático | |
| 03 | 18/03/2015 | 13:30 | 15:00 | Teorema de Euler | Resolução do exercício do livro Página: 78 | Livro Didático. | |
| 03 | 15/04/2015 | 14:00 | 15:00 | Poliedros Teorema de Euler | Questionário do Poliedro do próprio projeto. Observação dos mesmos | Poly | |
| 03 | 24/04/2015 | 14:00 | 16:30 | Teorema de Euler | Exercício do conteúdo no site Infoescola. | Site Infoescola e livro didático | |
| | __/__/__ | | | | | | |

# ANEXO E – FICHA 2 DE ACOMPANHAMENTO DE ESTUDO

**Ficha de acompanhamento de Estudos através de aprendizagem colaborativa.**

Nome da equipe:______________________ N° de membros: 4

| N° Membros presente | Dia | Hora Início | Hora de Término | Conteúdo Estudado | Atividade desenvolvida | Recursos Utilizados | Dúvidas encontradas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alyce Marília P. Victor Sandy | 06/ 03/ 15 | 14:00h | 17:00h | Poliedros | Atividade da 70 do livro Novo olhar. | Livro Novo olhar. Poli. | Poliedros convexos e não convexos. |
| Alyce Marília P. Victor Sandy | 13/ 03/ 15 | 14:00h | 17:00h | Relação de Euler | Atividade da pagina 76 do livro Novo olhar. | Livro Novo olhar | Dedução do teorema. |
| Alyce Marília P. Victor Sandy | 20/ 03/ 15 | 14:00 h | 17:00h | Revisão de Poliedros e Relação de Euler para Provas. | Questões relacionadas ao conteúdo. | Vídeos aulas no Youtube | Teorema de Euler em questões para encontrar V, A e F. |
| Marília Alyce Sandy P. Victor | 10/ 04/ 15 | 14:00h | 17:00h | Prismas e atividade passada para a aprendizagem colaborativa. | Questões relacionadas a area da base de um Prisma. | Vídeos Aulas no Youtube | compreensão das formulas que são utilizadas |
| Alyce Marília Sandy P. Victor. | 24/ 04/ 15 | 14:00h | 17:00h | Área da superfície de um prisma. | Questões ~~da~~ pág. 81 do livro Novo olhar | Livro Novo Olhar. | dificuldades para responder a questões 32 e 36. |
| Alyce Marília Sandy P. Victor. | 06/ 05/ 15 | 14:00h | 17:00h | Volume do prisma e termino da atividade do estudo colaborativo | Questões do livro no olhar e termino das questões 9 e 7. | Livro Novo olhar e Vídeos aulas do site Descomplica | Dificuldade em responder as questões 52 e 54 do livro novo olhar. |

# ANEXO F – FICHA 3 DE ACOMPANHAMENTO DE ESTUDO

**Ficha de acompanhamento de Estudos através de aprendizagem colaborativa.**

Nome da equipe: Teresa Cristina de O. Carvalho. Luiz Fernando B. C; Luana Nogueira Queiroz; Santiago Rodrigues Silva. N° de membros: 4

| N° Membros presente | Dia | Hora Início | Hora de Término | Conteúdo Estudado | Atividade desenvolvida | Recursos Utilizados | Dúvidas encontradas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Todos | 04/ 03/ 2015 | 14:00 | 15:00 | Poliedros | Preparação para o seminário. | computador e livro. | |
| Todos | 06/ 03/ 2015 | 14:00 | 16:10 | Poliedros | Preparação p/ o seminário. | computador e livro. | |
| Luiz Fernando Luana Teresa | 22/ 03/ 2015 | 14:30 | 17:00 | Geometria espacial | responder questões ímpares | livro | |
| Luiz Fernando Luana Teresa | 23/ 03/ 2015 | 14:00 | 17:30 | geometria espacial | responder questões ímpares | livro | |
| Todos | 28/ 04/ 2015 | 18:30 | 21:30 | Poliedros | Responder a atividade do projeto, estudar p/ prova | O poly e o livro. | |
| | __/__/____ | | | | | | |

# ANEXO G – FICHA 4 DE ACOMPANHAMENTO DE ESTUDO

**Ficha de acompanhamento de Estudos através de aprendizagem colaborativa.**

Nome da equipe: Larissa - 13 / Jéssica 09 / Raynara - 27 / - Victoria Ana A. Souza - 33 N° de membros: ____________

| Membros presente | Dia | Hora Início | Hora de Término | Conteúdo Estudado | Atividade desenvolvida | Recursos Utilizados | Dúvidas encontradas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 14/05/2015 | 14h | 16:30 | Poliedros e suas propriedades. | Contagem do número de faces, vértices e arestas | Poli e Educandus. | nenhuma |
| 3 | 19/05/2015 | 14h | 16h | Poliedros | Resolução de problemas | Poli | nenhuma |
| 3 | 28/05/2015 | 13h | 16h | Área da superfície do prisma | Resolução de questões | Poli. | Achar a altura dos polígonos. |
| 3 | 04/06/2015 | 13h | 16h | Volume do prisma | Revisão do conteúdo e resolução de questões | nenhum | Aplicação do princípio de Cavalieri |
| 3 | 11/06/2015 | 14h | 16h | Área, volume de pirâmide e tronco | Questões | Poli e Educandus | Achar a constante de proporcionalidade |
| 3 | 20/06/2015 | 13h | 16:30 | Corpos Redondos | Revisão p/ prova | nenhum | Mudanças de unidade |

# ANEXO H – PROVA DIAGNÓSTICA Pag. 1

## E.E.F.M Virgílio Correia Lima

**Avaliação Diagnóstica de Matemática**

***Professor: Julio Cesar M. de Freitas Turma: ________ Data: ___/___/ 2015***

***Aluno: ...................................................................................... Nº.: ..............***

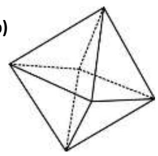
**Prova**
NOTA:

**1 –** Atribua o nome a cada um dos poliedros abaixo:

**a)**

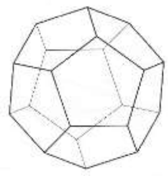
____________________

**b)**



_____________________

**c)**



______________________

**2 –** Preencha o quadro abaixo, considerando as imagens da **questão 1**.

| **Item** | **N° de vértices** | **N° de faces** | **N° de arestas** |
|---|---|---|---|
| **A** | | | |
| **B** | | | |
| **C** | | | |

**3 –** Um poliedro é constituído por vinte ângulos triédricos. Quantas arestas possui o poliedro?

**4 –** Um poliedro convexo é constituído por seis ângulos triédricos e quatro ângulos tetraédricos (quatro arestas). Quantas arestas possui o poliedro?

**5 –** Verifique se o teorema de Euler se aplica aos poliedros da **questão 1**.

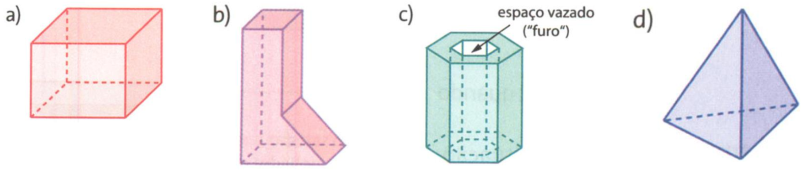
**a)**

**b)**

**c)**

# ANEXO I – PROVA DIAGNÓSTICA Pag. 2

**6 –** Determine quais dos sólidos abaixo são convexos.  Quais desses sólidos são de Platão?




**7 –** Um poliedro convexo é constituído por doze arestas e oito vértices. Quantas faces possui esse poliedro?

**8 –** Um poliedro convexo é constituído por doze vértices. E de cada vértice partem cinco arestas. Quantas faces possui o poliedro?

**9 –** Um poliedro convexo é constituído por onze faces e 21 arestas. Qual é a soma dos ângulos das faces desse poliedro?

**10 – a)** Quantos e quais são os poliedros de Platão?

**b)** Qual é o poliedro cujos os vértices são os centros das faces de um hexaedro regular? Esse poliedro é de Platão?

# ANEXO J – AVALIAÇÃO DE POLIEDROS Pag. 1

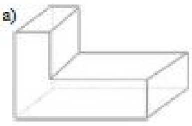
E.E.F.M Virgílio Correia Lima
*Governo do Estado do Ceará*
*Professor: Julio Cesar M Freitas    Turma: 3° A    Data: ___/___/ 2015*
*Aluno: ............................................................................................ Nº: ............*

Matemática
Avaliação:

1 – Um eneaedro convexo é constituído por quatro faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Quantas arestas possui esse poliedro?

2 – Determine o nome dos seguintes poliedros e classifique se são poliedros convexos ou não convexos:

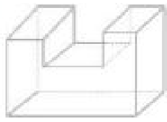
a)



______________

______________

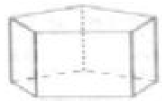
b)



______________

______________

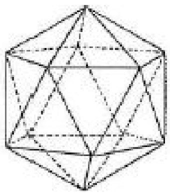
c)



______________

______________

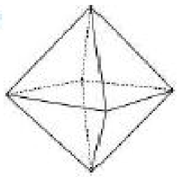
d)



______________

______________

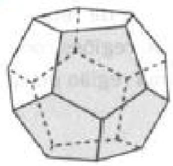
e)



______________

______________

f)



______________

______________

3 – Preencha o quadro abaixo, considerando as imagens da questão 2, caso conheça alguma técnica eficiente para fazer essa contagem utilize-a.

| Item | Nº de vértices | Nº de faces | Nº de arestas |
|---|---|---|---|
| A | | | |
| B | | | |
| C | | | |
| D | | | |
| E | | | |
| F | | | |

# ANEXO L – AVALIAÇÃO DE POLIEDROS Pag. 2

4 – Encontre o número de diagonais dos poliedros da questão 2 dos itens D, E e F?

| D) | E) | F) |
|---|---|---|
| | | |

5 – Um poliedro convexo é constituído por seis ângulos triédricos e quatro ângulos tetraédricos (quatro arestas). Quantos atestas possui o poliedro?

6 – Verifique se o teorema de Euler se aplica aos poliedros da questão 2.

| A) | C) | D) |
|---|---|---|
| | | |

7 – Qual a soma dos ângulos das faces dos poliedros da questão 2 intens D e F

| D) | F) |
|---|---|
| | |

# ANEXO M – AVALIAÇÃO DE POLIEDROS Pag. 3

8 – Um poliedro convexo possui duas faces octogonais e oito faces quadradas. Qual é o número de faces, vértices e arestas desse poliedro?

9 – Considere dois poliedros convexos, A e B, em que A tem 8 vértices a mais que B e ambos têm o mesmo número de arestas. Sabendo que o poliedro A e formado apenas por faces pentagonais e que B é formado apenas por faces triangulares, determine o número de faces, vértices e arestas de cada um desses poliedros.

10 – Prove que não existe poliedro de Platão com faces pentagonais e ângulos pentaédricos (5 arestas por vértice).