UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO EVERTON SOUSA DA SILVA

O AJUSTE DE RETAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E SECÇÕES DIDÁTICAS DE SOLUÇÃO LSQ PARA O ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE

2015

ANTONIO EVERTON SOUSA DA SILVA

O AJUSTE DE RETAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E SECÇÕES DIDÁTICAS DE SOLUÇÃO LSQ PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática a Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do tátulo de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Junio Moreira de Alencar

JUAZEIRO DO NORTE

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S578a Silva, Antonio Everton Sousa da.
O ajuste de retas pelo método dos mínimos quadrados e secções didáticas de solução LSQ para o ensino médio / Antonio Everton Sousa da Silva. – 2015.
65 f.: il.; enc.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.
Orientação: Prof. Me. Júnio Moreira de Alencar.

1. Cálculo. 2. Álgebra. 3. Excel (Programa de computador). I. Título.

CDD 310

ANTONIO EVERTON SOUSA DA SILVA

O AJUSTE DE RETAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E SECÇÕES DIDÁTICAS DE SOLUÇÃO LSQ PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26/ 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Júnio Moreira de Alencar

Prof. Ms. Júnio Moreira de Alencar (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Mario de Assis Oliveira

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira
Univ. Regional do Cariri (URCA) e
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Maria Silvana A. Cost

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

A Deus.

A meu grande amigo, Ezequias Guilherme.

.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelas benções e graças alcançadas na vida e durante esse mestrado.

Agradeço a toda à minha família, pela paciência e incentivo na vida.

Agradeço à minha namorada, Daniele Correia Sampaio, pelo apoio e motivação nos momentos difíceis.

Agradeço aos professores, principalmente ao meu professor orientador, Me. Junio Moreira, pela paciência e contribuição.

Agradeço aos meus colegas de trabalho, pelo apoio e incentivo.

Agradeço ao Prof. Gustavo Nogueira, pela contribuição na utilização do *Software* LaTeX.

Agradeço a Profa. Paula Heveline pela correção ortográfica.

Agradeço a todos que aqui não foram citados, mas que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão desse Mestrado.

Por fim, agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Representar através de uma reta os dados de um experimento de modo que possa fazer inferências, possibilita, ao experimentar, elaborar hipóteses importantes sobre um determinado fenômeno. Este trabalho tem por objetivo apresentar o método dos Mínimos Quadrados como caminho para encontrar a reta que mais se ajusta a um conjunto de dados. Para o desenvolvimento desta investigação, optou-se por fazer uma pesquisa inteiramente bibliográfica, permitindo realizar um levantamento teórico acerca de alguns conceitos e demonstrações de Cálculo Diferencial, Geometria Analítica na Reta e Álgebra Linear, como ainda, definir o método dos mínimos quadrados e aplicar a solução LSQ na resolução de um sistema impossível no sentido usual. Também se explorou neste estudo o uso Software Excel como ferramenta de apoio didático e sua aplicabilidade em sala de aula. Finaliza-se com sugestão de aula interdisciplinar sobre o tema, que por sua vez, está em uma linguagem acessível e clara ao professor. Essa aula foi desenvolvida em etapas didáticas, na qual a última, utiliza-se o Software Excel como ferramenta auxiliar. Na perspectiva de uma fixação mais profunda do conteúdo, enumeramos ao final da aula, vários exercícios de aplicação.

Palavras-chave: reta, ajuste, curva.

ABSTRACT

Try to represent a line through the data of an experiment, so that it can draw inferences, enables the experience develop important hypothesis about a phenomenon. This work aims to present the method of least squares as a way to find the line that best fits a set of points. For development of this research, it was decided to do a whole literature, allowing to make theoretical survey about some concepts and differential calculus demonstrations, analytical geometry on the straight and linear algebra, as yet, define the method of least squares and apply LSQ solution to resolve an impossible system in the usual sense. Also explored in this study using Excel software as a teaching support tool and its use in the classroom. We finish with a hint of an interdisciplinary lecture on the subject, which in turn, is in an accessible and clear language to the teacher. This class has been developed for teaching steps, in which the latter is performed using Excel software as an auxiliary tool. For a deeper attachment content, we enumerated the end of class several practical exercises.

Keywords: straight , curve fitting.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Durante o período de formação acadêmica, como também durante a rotina das atividades profissionais, percebe-se que há alguns métodos resolutivos de problemas matemáticos que deixam certa inquietação, por serem desconhecidos ou ainda pelo seu grau de dificuldade. Como é o caso de situações em que é necessário um modelo matemático para descrever um fenômeno específico.

Para tanto decidiu-se desenvolver uma pesquisa sobre o método dos "Mínimos Quadrados" e sua aplicação na determinação da equação da reta, apresentando inicialmente algumas definições e teoremas para embasamento teórico, como também explora aplicações utilizando o método e, ainda sugere uma aula piloto sobre o assunto para turmas do Ensino Médio.

A problemática que norteia a realização desta investigação é sustentada pela justificativa anterior. Motivados a desenvolver um estudo colaborativo na área da Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, levantamos o seguinte questionamento: **Como abordar a reta dos Mínimos Quadrados no Ensino Médio, através das seções didáticas sobre a solução LSQ[1]?**

[1] LSQ: Sigla inglesa que significa: Least Squares Quadratic. Tradução: Mínimos Quadrados Quadráticas.

Motivados a encontrar respostas para o problema pensado, traçou-se os seguintes objetivos:

Apresentar o método dos Mínimos Quadrados, e seções didáticas sobre a solução LSQ, no ajuste de retas para serem trabalhados no Ensino Médio.

Para atingir o principal motivo deste estudo de pesquisa, traçaram-se alguns objetivos específicos:

* Explorar o conceito de método "Mínimos Quadrados";

* Exemplificar por meio de aplicações um método matemático: Solução LSQ;

* Verificar a contribuição do uso de tecnologia como ferramenta de apoio.

Essa pesquisa se inicia com o estudo de definições e teoremas, que permitirão o embasamento teórico necessário afim de desenvolver a fórmula, que define os parâmetros da equação da reta dos mínimos quadrados.

Em seguida, será explorado o princípio matemático do método dos Mínimos Quadrados e sua principal aplicação, ou seja, o ajuste de curvas. Neste ponto será mostrado, que a curva escolhida dependerá do comportamento dos dados no diagrama de dispersão, e que essa curva possibilitará fazer inferências futuras sobre o experimento analisado.

Finalmente será apresentada uma proposta de aula para turmas de Ensino Médio, sugerindo ao professor que inicie com uma situação problema, e a partir daí, aborde todos os pontos importantes referentes ao assunto. Sugere-se ainda, o uso do Software Excel como ferramenta auxiliar, para uma abordagem mais dinâmica e atrativa em turmas do Ensino Médio.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Neste capítulo expõe-se inicialmente as principais definições e teoremas que darão suporte teórico para o trabalho. Depois define-se solução LSQ de um sistema linear, com duas incógnitas, no $\mathbb{R}^n$, encontrando essa solução via álgebra linear e via cálculo diferencial e finaliza-se com a resolução de alguns exemplos envolvendo essa solução LSQ.

2.1 Explorando conceitos de Geometria Analítica

Definição 2.1.1 (Distância entre dois pontos)**.** Dados dois pontos $A(x_1, x_2)$ e $B(y_1, y_2)$, calculemos a distância d(A, B) entre eles levando em consideração três casos:

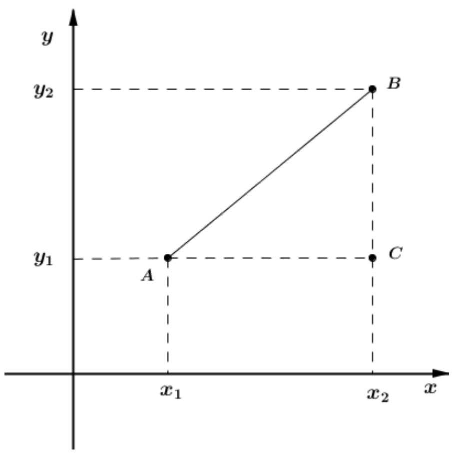


Figura 2.1: Distância entre dois pontos

Temos inicialmente:

$$\boldsymbol{d(A,C) = |x_2 - x_1|} \text{ e } \boldsymbol{d(B,C) = |y_2 - y_1|}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\boldsymbol{ABC}$, temos:

$$[d(A,B)]^2 = [d(A,C)]^2 + [d(B,C)]^2$$

$$[d(A,B)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Teorema 2.1.1. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, o gráfico de f é uma reta.*

Demonstração: Vamos provar que três pontos quaisquer do gráfico são colineares e, portanto determinam uma reta. Considere

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)$$

$$P_2 = (x_2, ax_2 + b)$$

$$P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

Para provarmos que estes três pontos são colineares é necessário e suficiente que a maior distância entre dois deles seja igual à soma dos outros dois. Suponha que $\boldsymbol{x_1 < x_2 < x_3}$. Assim, utilizando a fórmula da distância entre dois pontos temos:

distância de P_1 a P_2

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [a(x_2 - x_1)]^2}$$

$$d(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

distância de P_2 a P_3

$$\begin{aligned} d(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_2 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [a(x_3 - x_2)]^2} \\ d(P_2, P_3) &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}, \end{aligned}$$

distância de P_1 a P_3

$$\begin{aligned} d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2} \\ d(P_1, P_3) &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$(x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Segue então que

$$\boldsymbol{d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)}$$

Logo os três pontos estão alinhados e, portanto determinam uma reta. $\square$

Teorema 2.1.2. *Toda reta não vertical é o gráfico da equação da forma $y = ax + b$.*

Demonstração: Consideremos dois pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ nessa reta. Por hipotese a reta é não vertical, logo $x_1 \neq x_2$. Queremos determinar a e b de modo que se tenha $y = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para isto considere o sistema abaixo, com a e b sendo as incógnitas:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \Longrightarrow a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \Longrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

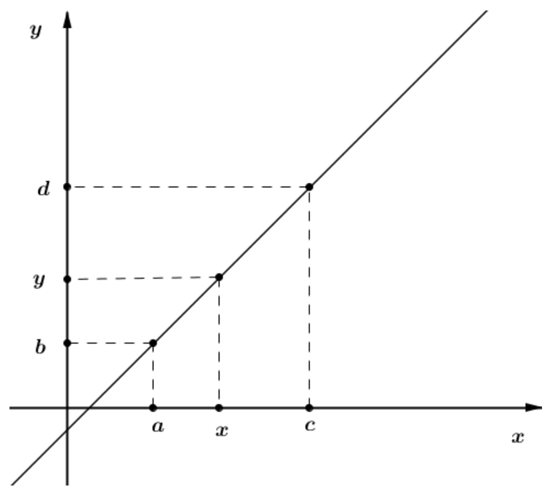
Substituindo a na primeira equação temos,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + b = y_1 \Longrightarrow b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

Assim provou-se que dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ arbitrariamente com $x_1 \neq x_2$ existe uma, e somente uma, equação $y = ax + b$, tal que $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. □

Observação: Em algumas literaturas, a equação $y = ax + b$ é também chamada de equação reduzida da reta.

Definição 2.1.2 (Equação paramétrica da reta)**.** A equação da reta seja ela reduzida ou geral, relaciona entre si as coordenadas (x, y) de um ponto genérico da reta. Entretanto, podemos estabelecer a mesma lei a ser obdecida pelos pontos da reta, colocando as coordenadas x e y de cada ponto da reta em função de outra variável t, chamada de parâmetro. Observemos a figura abaixo:



Temos que, por semelhança de triângulos, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{x-a}{c-a} = \frac{y-b}{d-b}$$

Igualando cada membro a t e isolando x e y, temos:

$$\frac{x-a}{c-a} = t \Longrightarrow x = a + (c-a)t$$
$$\frac{y-b}{d-b} = t \Longrightarrow y = b + (d-b)t$$

As equações $x = a + (c-a)t$ e $y = b + (d-b)t$ são chamadas equações paramétricas da reta.

As equações que dão as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer da reta em função de uma terceira variável t:

$$\boldsymbol{x = f_1(t)} \textbf{ e } \boldsymbol{y = f_1(t)}$$

são chamadas equações paramétricas das reta.

Exemplo 2.1. Considere os pontos $A = (3, 5)$ e $B = (1, 3)$. Determine a equação reduzida e a equação paramétrica da reta que passa por esses pontos.

Resolução.

I) Determinando a equação reduzida:
$a = \dfrac{5-3}{3-1} = 1$
Substituindo a e tomando o ponto $A = (3, 5)$, temos
$5 = 1.3 + b \Longrightarrow b = 2$
Assim a equação reduzida da reta que passa por A e B é $y = x + 2$.

II) Determinando a equação paramétrica:

$x = 2 + (1 - 3)t \Longrightarrow x = 2 - 2t$

$y = 5 + (3 - 5)t \Longrightarrow y = 5 - 2t$

2.2 Explorando conceitos de Álgebra Linear

Definição 2.2.1 (Equações Lineares)**.** Uma equação linear de n variáveis no conjunto dos números reais é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_n$$

em que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são variáveis, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são os coeficientes da equação e b a constante da equação. Alguns autores também chamam b de termo independente da equação.

Observação: Geralmente em equações com até três variáveis é comum utilizarmos as letras x, y e z para representarmos essas variáveis.

Exemplo 2.2.

i) $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5$

ii) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

iii) $0x - 0y - 0z = 0$

Abaixo temos exemplos de equações não lineares:

i) $2x + xy = 5$

ii) $5x^2 + 4x = 8$

iii) $2\sqrt{x} - 8 = 9$

Definição 2.2.2. Dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dizemos que a sequência ou ênupla de números reais $(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n)$ é solução da equação se

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b$$

for uma sentença verdadeira.

Exemplo 2.3. Dada a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 3$, verifique se as sequências abaixo são soluções da equação.

i) (1, 4, 3, – 2)

Resolução. A sequência abaixo é solução, pois $2.(1) + 3.(4) - (3) + 4.(-2) = 3$ é uma sentença verdadeira.

ii) $(2, -1, 3, 4)$

Resolução. A sequência acima não é solução, pois $2.(2) + 3.(-1) - (3) + 4.(4) = 3$ não é uma sentença verdadeira.

Definição 2.2.3 (Sistema Linear)**.** Denominamos de sistema linear com m equações e n incógnitas um conjunto de m $(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ o sistema que está representado abaixo:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Dada uma sequência ou ênupla ordenada de números reais $(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n)$, essa sequência será solução do sistema S, se for solução de todas as equações de S, isto é:

$$
S: \begin{cases}
a_{11}k_1 & + & a_{12}k_2 & + & a_{13}k_3 & + & \cdots & + & a_{1n}k_n & = & b_1 \\
a_{21}k_1 & + & a_{22}k_2 & + & a_{23}k_3 & + & \cdots & + & a_{2n}k_n & = & b_2 \\
a_{31}k_1 & + & a_{32}k_2 & + & a_{33}k_3 & + & \cdots & + & a_{3n}k_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}k_1 & + & a_{m2}k_2 & + & a_{m3}k_3 & + & \cdots & + & a_{mn}k_n & = & b_m
\end{cases}
$$

Exemplo 2.4. Verifique se os conjuntos abaixo são solução do sistema

$$
S: \begin{cases}
2x + 4y + z = 10 \\
x + y + z = -1 \\
3x - y + z = -3
\end{cases}
$$

i) $(1, 2, -4)$ é solução, pois

$2 \cdot (1) + 4 \cdot (3) - 4 = 10$ (sentença verdadeira)

$1 + 2 - 4 = -1$ (sentença verdadeira)

$3 \cdot (1) - 2 - 4 = -3$ (sentença verdadeira)

i) $(-5, 5, 0)$ não é solução, pois

$2 \cdot (-5) + 4 \cdot (5) + 0 = 10$ (sentença verdadeira)

$-5 + 5 + 0 = -1$ (sentença falsa)

$3 \cdot (-5) - 5 + 0 = -3$ (sentença falsa)

Assim, um sistema linear de m equações e n incógnitas é dito possível (compatível) e determinado quando possui uma única solução; Possível e indeterminado quando possui pelo menos duas soluções; Impossível (incompatível) quando não possui solução.

2.2.1 Sistemas Lineares e Matrizes

Podemos escrever o sistema S numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou $A \cdot X = B$ onde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ matriz dos coeficientes,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ matriz das incógnitas e

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ a matriz dos termos independentes.

Há também outra maneira que podemos associar o sistema a uma matriz, como vemos abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A esse tipo de matriz damos o nome de matriz ampliada do sistema, na qual cada linha desta matriz é uma representação da equação (sem as incógnitas), correspondente no sistema.

Exemplo 2.5. Dado o sistema abaixo escreva-o na forma matricial.

$$\begin{cases} x + 4y + z = 10 \\ x + y + z = 4 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

Resolução. Multiplicação de Matrizes

Matriz formada pelos coeficientes: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz formada pelas incógnitas: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Matriz formada pelos termos independentes: $\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Logo, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriz ampliada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3 VETOR

Para nosso estudo de vetor consideraremos $\mathbb{R}^n$ como um espaço vetorial real.

Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto formado pelas $n - uplas$ ordenadas de números reais, isto é, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n); x_i \in \mathbb{R}$ para todo i inteiro, $1 \leq i \leq n\}$, definimos vetor como cada elemento de $\mathbb{R}^n$, na qual representaremos por $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e o número x_i

representa a i-ésima coordenada do vetor.

Sendo os elementos de $\mathbb{R}^n$ vetores, a soma de dois vetores $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $\overrightarrow{w} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ é dada por

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

e a multiplicação do vetor $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pelo um número real α, chamado escalar, é definida por

$$\alpha\overrightarrow{v} = \alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

Exemplo 2.6. Sendo $\overrightarrow{v} = (1, 2, 4)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 4, 2)$ vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = 2$ um número real, calcule:

a) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

b) $\alpha\overrightarrow{w}$

Resolução.

a) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (1 + 2, 2 + 4, 4 + 2) = (3, 6, 6)$

b) $\alpha\overrightarrow{w} = 2(2, 4, 2) = (4, 8, 4)$

2.3.1 Vetores no $\mathbb{R}^2$

Considerando inicialmente, que $\mathbb{R}^2$ representa o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano e tomando dois pontos P e Q no plano, definimos como segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$, o conjunto de todos os pontos que estão no segmento $\overline{PQ}$ de extremos P e Q. Embora, esse conjunto de pontos seja o mesmo nos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QP}$, para segmentos orientados eles são distintos, pois o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ possui ponto inicial em P e ponto final em Q, o que não é mesmo que $\overrightarrow{QP}$.

Definição 2.3.1. Sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pontos do plano cartesiano e $\overrightarrow{v} = (x, y)$ um vetor de $\mathbb{R}^2$. Diz-se que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor $\overrightarrow{v}$ se

$$\begin{cases} x = b_1 - a_1 \\ y = b_2 - a_2 \end{cases}$$

2.3.2 Vetores no $\mathbb{R}^3$

O mesmo acontece para o $\mathbb{R}^3$. Considerando $\mathbb{R}^3$ como o conjunto de todos os pontos do espaço, isto é, conjunto de pontos do sistema de eixos mutuamente perpendiculares, Ox, Oy, e Oz, com a mesma origem em O, definimos como segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$, o conjunto de todos os pontos que estão no segmento $\overline{PQ}$ de extremos P e Q, com ponto inicial em P ponto final em Q.

Definição 2.3.2. Sejam $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ pontos do espaço e $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ um vetor de $\mathbb{R}^3$. Diz-se que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor $\overrightarrow{v}$ se

$$\begin{cases} x = b_1 - a_1 \\ y = b_2 - a_2 \\ z = b_3 - a_3 \end{cases}$$

Definição 2.3.3 (Combinação Linear)**.** Sejam $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial real, $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n$ vetores pertencentes a $\mathbb{R}^n$. Diz-se que o vetor $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots,$ $\overrightarrow{v}_n$ se existirem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pertencentes a $\mathbb{R}$, tal que

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n$$

.

Definição 2.3.4 (Dependência e Independência linear)**.** Sejam $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial real e $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n$ vetores pertencentes a $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o conjunto $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n$ são LD, se a equação

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 \cdots + a_i\overrightarrow{v}_i + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n = 0$$

admitir solução não-trivial, ou seja, algum $a_i \neq 0$. Caso contrário, isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ o conjunto $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n\}$ será chamado linearmente independente (LI).

Teorema 2.3.1. *O conjunto de vetores é LI se, e somente se nenhum deles for uma combinação linear dos outros.*

Demonstração: A demonstração será feita em duas partes.

1ª Parte

Seja $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n\}$ o conjunto de vetores. Suponhamos que algum $\overrightarrow{v}_i$, com $1 \leq i \leq n$, desse conjunto $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n\}$ seja combinação linear dos demais, logo existem escalares $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$ tais que

$$\overrightarrow{v}_i = a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\overrightarrow{v}_{i-1} + a_{i+1}\overrightarrow{v}_{i+1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n$$

rearranjando esta equação temos

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\overrightarrow{v}_{i-1} + (-1)\overrightarrow{v}_i + a_{i+1}\overrightarrow{v}_{i+1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n = 0$$

Absurdo, pois $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n$ são LI, logo $a_1 = a_2 = \cdots = a_i = \cdots = a_n = 0$.

2ª Parte

Suponhamos que $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_n$ são LD, temos então

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_i\overrightarrow{v}_i + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n = 0, \text{ com } 1 \leq i \leq n \text{ e } a_i \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -a_i\overrightarrow{v}_i = a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\overrightarrow{v}_{i-1} + a_{i+1}\overrightarrow{v}_{i+1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{v}_i = -\frac{1}{a_i}(a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\overrightarrow{v}_{i-1} + a_{i+1}\overrightarrow{v}_{i+1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n)$$

Absurdo, pois nenhum $\overrightarrow{v}_i$ pode ser escrito como combinação linear dos demais. □

Definição 2.3.5 (Produto escalar)**.** Dados os vetores $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $\overrightarrow{u} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ o produto escalar ou produto interno será dado por:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$$

Seja $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ um vetor em $\mathbb{R}^n$, temos que:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0.$$

De fato,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = (x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$$

Definição 2.3.6 (Norma de um vetor)**.** Sendo $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ a norma ou comprimento de $\overrightarrow{v}$, representado por $\| \overrightarrow{v} \|$ pode ser calculada por:

$$\| \overrightarrow{v} \| = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Definição 2.3.7 (Perpendicularidade entre dois vetores)**.** Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e outro vetor $\overrightarrow{u}$ se esses dois vetores forem ortogonais ou perpendiculares o produto escalar entre esses dois vetores será zero, ou seja,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

.

Teorema 2.3.2 (de Pitágoras através de vetores). *Dados A, B e C três pontos do $\mathbb{R}^n$, e considerando os vetores $\overrightarrow{a} = B-C$, $\overrightarrow{b} = C-A$ e $\overrightarrow{c} = B-A$. Suponhamos que os vetores $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ sejam ortogonais, assim $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$ Temos que $\overrightarrow{a} = B-C = B-A-(C-A) = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$. Assim*

$$\| \overrightarrow{a} \|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}$$

Logo

$$\| \overrightarrow{a} \|^2 = \| \overrightarrow{b} \|^2 + \| \overrightarrow{c} \|^2$$

A proposição que será demonstrada a seguir é consequência do Teorema de Pitágoras.

Proposição 2.3.3. *Seja A, B dois pontos do $\mathbb{R}^n$ e seja Ω o conjunto, contendo A, de todos os pontos C de $\mathbb{R}^n$ tais que $C-A$ seja ortogonal a $B-A$. Nesta condições, para todo C em Ω ,*

$$\| B-A \| \leq \| B-C \|$$

ou seja, para todo C em Ω, a distância de B a A é menor ou igual à distância de B a C.

Demonstração: Observemos que pelo teorema de Pitágoras temos,

$$\| B-C \|^2 = \| B-A \|^2 + \| C-A \|^2 .$$

Como $\| C-A \|^2 \geq 0$, resulta $\| B-C \|^2 \geq \| B-A \|^2$ e, portanto,

$$\| B-A \| \leq \| B-C \|$$

□

Teorema 2.3.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dados $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ vetores quaisquer, é* *válido que*

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}| \leq \| \overrightarrow{v} \| \cdot \| \overrightarrow{u} \|$$

Demonstração: Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é o vetor nulo, então a demonstração se reduz a verificar a igualdade, zero igual a zero.

Suponha $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos que

$$(t\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (t\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \geq 0$$

Ou seja, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}t^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}t + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0 \tag{2.1}$$

Tomando $p(t) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}t^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}t + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v},\ t \in \mathbb{R}$. Por 2.1, p é uma função polinomial não negativa e como o coeficiente do termo quadrático é não negativo, segue que o discriminante Δ de $p(t)$ é um número real não positivo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 - 4(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u})(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}) \\ &= 4(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 - 4 \| \overrightarrow{u} \|^2 \| \overrightarrow{v} \|^2 \leq 0\end{aligned}$$

Segue $|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}|^2 \leq \| \overrightarrow{v} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{u} \|^2$. Portanto $|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}| \leq \| \overrightarrow{v} \| \cdot \| \overrightarrow{u} \|$. □

2.4 Explorando conceitos de Cálculo Diferencial

Definição 2.4.1 (Derivadas parciais)**.** Seja f uma função de duas variáveis, x e y. A derivada parcial de f em relação a x é aquela função, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se o limite existir.

Da mesma forma, sendo f uma função de duas variáveis, a derivada parcial de

f em relação a y é aquela função, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se esse limite existir.

A definição acima se limita as funções de duas variáveis. Entretanto, resaltamos que pode ser aplicada a funções de n variáveis, mediante uma definição mais formal.

No cálculo da derivada de uma função de duas variáveis com valores reais, na tentativa de evitar grandes cálculos, reduz-se a derivada ao caso unidimensional, considera a função de duas variáveis como uma função de uma variável de cada vez, mantendo fixas as demais, ou seja, serão consideradas constantes.

Exemplo 2.7. Calcule as derivadas parciais de

$$f(x, y) = (8xy - y^4)^2 + 6y^2x$$

Resolução. Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ considerando x como variável e y como uma constante, assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(8xy - y^4)8y + 6y^2 \\ &= 16y(8xy - y^4) + 6y^2 \end{aligned}$$

Calculando agora, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ considerando y como variável e x como uma constante, assim temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(8xy - y^4)(8x - 4y^3) + 12yx$$

Definição 2.4.2. Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja (x_0, y_0) $A \in D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é ponto de mínimo de f em A se, para todo (x, y) em A,

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

Analogamente, seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja (x_0, y_0) $A \in D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é ponto de máximo de f em A se, para todo (x, y) em A,

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

Definição 2.4.3. Seja $f(x, y)$ de classe C^2. A função H dada por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

Denomina-se hessiano de f. Observe que

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2$$

Teorema 2.4.1. *Seja $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f. Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f. Então*

I) Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f.

II) Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f.

A demonstração não será apresentada. Entretanto, pode ser encontrada em Guidorizzi(2015, p. 336) [5].

Capítulo 3

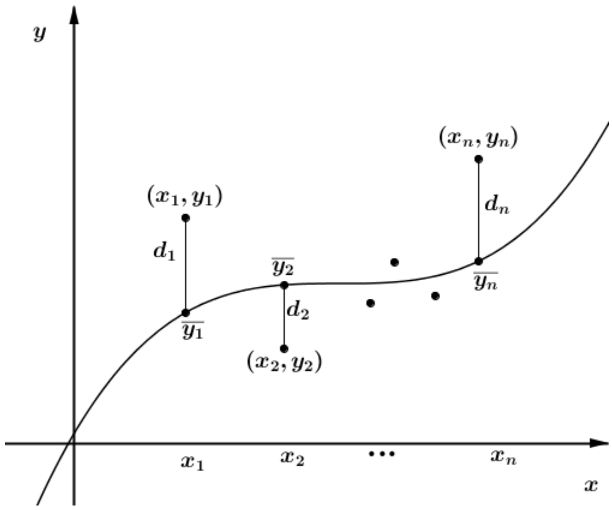
O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Tentar modelar através de uma curva um fenômeno natural ou mesmo experimental, de modo que possa descrevê-lo através de uma relação entre duas variáveis, ainda é um grande desafio enfrentado pela ciência, principalmente quando não há uma distribuição regular de seus dados em análises. Mas, Silva G.(2010, p. 4) [9] estabelece que "O ajuste de dados experimentais, isto é, a busca de uma função que melhor descreva um conjunto de dados, é ferramenta imprescindível no processo de modelagem de um fenômeno, especialmente quando se admite que ele seja descrito, mesmo que parcialmente, por determinado modelo matemático".

Se do fenômeno em estudo puder deduzir uma curva que melhor se ajuste aos dados colhidos, é provável que essa curva não abranja todos os dados, ocorrendo isto haverá uma diferença entre os dados colhidos e os dados da curva. O Método dos Mínimos Quadrados consiste em minimizar essas diferenças de modo a aproximar o máximo possível essa curva dos pontos, ou seja, esta técnica tem por objetivo determinar a curva que mais se ajusta a um conjunto de pontos. Abaixo será dada uma abordagem geométrica e intuitiva do método.

3.1 Principio do método dos Mínimos Quadrados

Na figura abaixo estão representados uma curva C e um conjunto de pontos $\{(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ fora dela. Ao longo dessa curva, para cada valor de x_i, haverá um $\overline{y}_i$. Haverá ainda uma diferença entre o y_i e o valor correspondente na curva, ou seja, $\overline{y}_i$. Tal diferença será chamada de d_i. Assim para cada x_i, temos $d_i = \overline{y}_i - y_i$. Essas diferenças podem ser chamadas de *desvios*, *Erros* ou *resíduos*. Além disso, podem ser positivas, se o ponto estiver abaixo da curva, negativa se estiver acima da curva ou zero se o ponto estiver sobre a curva. Assim, para evitar distorções nos cálculos, usa-se o quadrado dessas diferenças, talvez por isso o nome "Mínimos Quadrados". Observemos o gráfico a seguir.



Uma medida que nos dará uma aproximação precisa dos pontos a curva é proporcionada pelo valor $\boldsymbol{D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \cdots + d_n^2}$. Quanto menor for esse valor, mais próximo os ponto estarão da curva. Assim podemos definir:

Definição 3.1.1. De todas as curvas que se ajustem a um conjunto de pontos, a que tem a propriedade de apresentar o menor valor

$$\boldsymbol{D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \cdots + d_n^2}$$

é denominada a melhor curva de ajustamento.

Essa definição nos diz que, se a soma dos quadrados das diferenças entre os pontos da curva e os pontos do experimento em questão for a menor possível então essa curva é a que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos.

3.2 Solução LSQ de um sistema Linear com duas incógnitas e n equações

Definição 3.2.1 (Solução LSQ). Seja S o sistema linear abaixo com duas incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x & + & a_{n2}y & = & b_n \end{cases}$$

Dizemos que (x_0, y_0) é uma solução LSQ de S se $(x, y) = (x_0, y_0)$ tornar mínima a distância de

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ a } \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} a_{11}x & + & a_{12}y \\ a_{21}x & + & a_{22}y \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x & + & a_{n2}y \end{bmatrix}$$

Teorema 3.2.1. *Seja S o sistema linear abaixo com duas incógnitas*

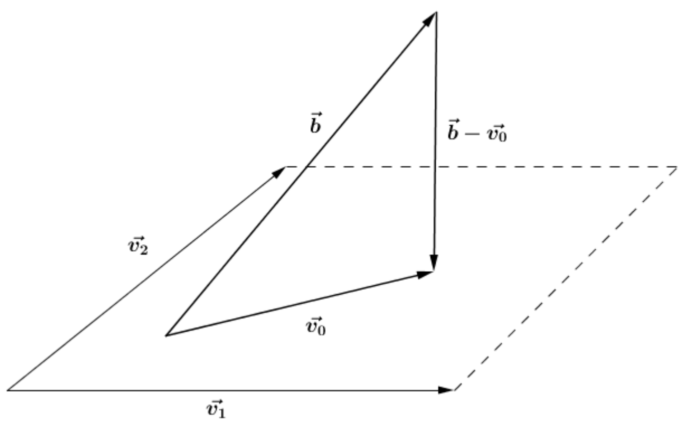
$$\boldsymbol{S} : \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x} & + & \boldsymbol{a_{12}y} & = & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x} & + & \boldsymbol{a_{22}y} & = & \boldsymbol{b_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x} & + & \boldsymbol{a_{n2}y} & = & \boldsymbol{b_n} \end{cases} \quad \textit{onde } \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} \end{bmatrix}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n2}} \end{bmatrix} \textit{ e } \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{bmatrix}$$

Sua solução (ou soluções) LSQ é a solução (ou são soluções) do sistema au-

xiliar abaixo:

$$AS : \begin{cases} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} x + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} y = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} x + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} y = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

Demonstração via álgebra. Consideremos dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ linearmente independentes, pois se fossem linearmente dependentes teríamos um sistema de n equações e com uma variável, que é irrelevante para o trabalho. Queremos determinar um vetor $\overrightarrow{v_0}$ tal que a distância entre $\overrightarrow{v_0}$ e $\overrightarrow{b}$, seja mínima, ou seja, $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{v_0}$ perpendicular ao plano:



Tomando $\overrightarrow{v_0}$ pertencente ao plano, logo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{bmatrix} a_{11}x_0 & + & a_{12}y_0 \\ a_{21}x_0 & + & a_{22}y_0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_0 & + & a_{n2}y_0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v_0} = x_0\overrightarrow{v_1} + y_0\overrightarrow{v_2}$$

para algum x_0 e y_0 real.

Vamos escrever o sistema S na forma vetorial:

$$S : x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{b}$$

Para que $(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{v_0})$ seja perpendicular ao plano formado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, devemos ter

$$(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{v_0}) \perp \overrightarrow{v_1} \text{ e } (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{v_0}) \perp \overrightarrow{v_2}$$

logo

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v_0}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{v_0}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = \mathbf{0}$$

assim temos

$$\begin{cases} (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{v_0}) \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \\ (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{v_0}) \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{b} - x_0\overrightarrow{v_1} - y_0\overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \\ (\overrightarrow{b} - x_0\overrightarrow{v_1} - y_0\overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} - x_0\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} - y_0\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} - x_0\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} - y_0\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} - x_0\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} - y_0\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} - x_0\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} - y_0\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_0}\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} + \boldsymbol{y_0}\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \\ \boldsymbol{x_0}\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} + \boldsymbol{y_0}\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos x_0 e y_0 como solução do sistema auxiliar e que é solução LSQ do sistema S. □

Teorema 3.2.1. *Seja S o sistema linear abaixo com duas incógnitas*

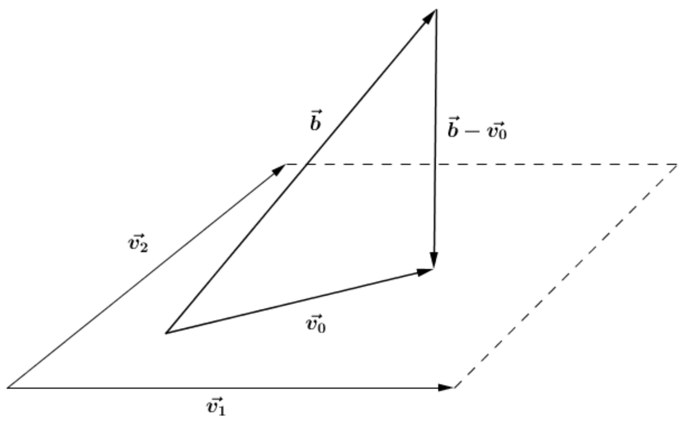
$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x} & + & \boldsymbol{a_{12}y} & = & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x} & + & \boldsymbol{a_{22}y} & = & \boldsymbol{b_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x} & + & \boldsymbol{a_{n2}y} & = & \boldsymbol{b_n} \end{cases} \quad \text{onde } \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} \end{bmatrix}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n2}} \end{bmatrix} \text{ e } \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{bmatrix}$$

Sua solução (ou soluções) LSQ é a solução (ou são soluções) do sistema auxiliar abaixo:

$$AS: \begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}\boldsymbol{x} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\boldsymbol{y} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\boldsymbol{x} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\boldsymbol{y} = \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} \end{cases}$$

Demonstração via Cálculo.

Suponhamos $\overrightarrow{v_0}$ pertencente ao plano, assim pode ser escrito como combinação



linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, logo temos:

$$\overrightarrow{v_0} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} = (xa_{11} + ya_{12}, xa_{21} + ya_{22}, \cdots, xa_{1n} + ya_{2n})$$

Tomando $D(x, y)$ como o quadrado da distância de $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{v_0}$, temos

$$\boldsymbol{\| \overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{b} \|^2 = D(x,y) = (xa_{11} + ya_{12} - b_1)^2 + \cdots + (xa_{1n} + ya_{2n} - b_n)^2}$$

$$\boldsymbol{D(x,y) = \sum_{i=i}^{n} (xa_{1i} + ya_{2i} - b_i)^2}$$

Pelo teorema 2.4.1, demonstra-se que a função $D(x, y)$ possui mínimo local, logo apresenta $\dfrac{\partial D}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial D}{\partial y} = 0$.

Derivando $\boldsymbol{D}$ em função de x e igualando a 0, temos:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} 2(xa_{1i} + ya_{2i} - b_i) \cdot a_{1i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2(xa_{1i} + ya_{2i} - b_i) \cdot a_{1i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (xa_{1i} + ya_{2i} - b_i) \cdot a_{1i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (xa_{1i}a_{1i} + ya_{2i}a_{1i} - b_ia_{1i}) = 0$$

$$\Rightarrow x\sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{1i} + y\sum_{i=1}^{n} a_{2i}a_{1i} - \sum_{i=1}^{n} b_i a_{1i} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{v_1} = 0 \Rightarrow x\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{v_1} = 0$$

Derivando $\boldsymbol{D}$ em função de y, temos:

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} 2(xa_{1i} + ya_{2i} - b_i)\cdot a_{2i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2(xa_{1i} + ya_{2i} - b_i)\cdot a_{2i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(xa_{1i} + ya_{2i} - b_i)\cdot a_{2i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(xa_{1i}a_{2i} + ya_{2i}a_{2i} - b_i a_{2i}) = 0$$

$$\Rightarrow x\sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i} + y\sum_{i=1}^{n} a_{2i}a_{2i} - \sum_{i=1}^{n} b_i a_{2i} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} + y\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{v_2} = 0 \Rightarrow x\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} + y\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{v_2} = 0$$

Assim ficamos com o sistema auxiliar:

$$\boldsymbol{SA:}\begin{cases} \boldsymbol{x\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{v_1} = 0} \\ \boldsymbol{x\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} + y\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{v_2} = 0} \end{cases}$$

$\square$

Observação: O sistema auxiliar AS será sempre compatível no sentido usual, ou seja, sempre terá solução. Pois pela desigualdade de Cauchy-Shawaz [2.3.4] o determinante da matriz será sempre diferente de zero, ou seja,

$$\begin{vmatrix} (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}) & (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) \\ (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) & (\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}) \end{vmatrix} \neq 0$$

3.3 A reta dos Mínimos Quadrados

Nosso objeto de estudo neste trabalho está em determinar uma função afim e, portanto à reta que melhor se ajuste a um conjunto de dados.

Sabe-se que $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais. Então determinar f é determinar os parâmetros a e b, e para isto usaremos o conceito de solução LSQ como vimos na secção 3.2. Essa solução será os parâmetros da função linear caracterizada pela reta dos mínimos quadrados.

Queremos determinar uma função afim que melhor descreva um conjunto de pontos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ do plano cartesiano dispostos em uma tabela. Consideremos a tabela abaixo:

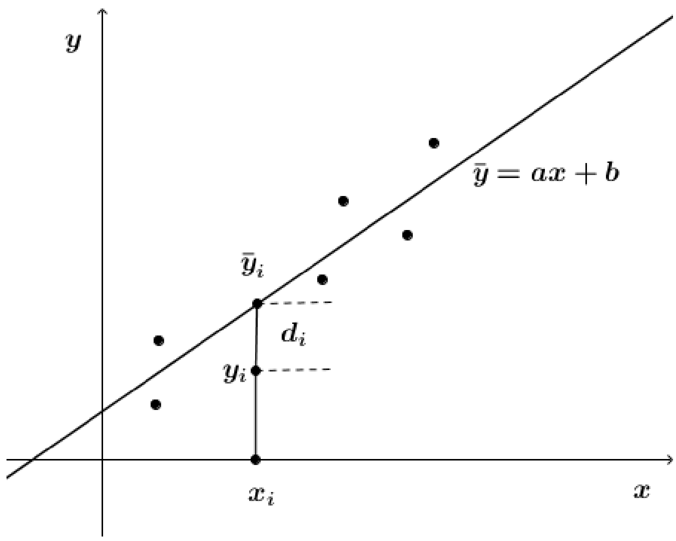
x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

Observemos que uma reta qualquer passará por pelo menos dois pontos acima, entretanto, não é necessário que a reta em estudo passe por algum ponto. Pois queremos uma reta que melhor se ajuste a todos os pontos dados. Obviamente essa reta não tocará todos os pontos.

Seja $\boldsymbol{\overline{y_i} = ax + b}$ a reta que estamos procurando. Nesta situação, $\boldsymbol{\overline{y_i}}$ correpondente ao valor de $\boldsymbol{x_i}$ é apenas uma estimativa muito próxima de $\boldsymbol{y_i}$. Assim para a reta passar por todos os pontos, devemos ter o sistema linear abaixo:

$$\boldsymbol{S:}\begin{cases} \boldsymbol{ax_1} & \boldsymbol{+} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{ax_2} & \boldsymbol{+} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{y_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{ax_n} & \boldsymbol{+} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{y_n} \end{cases}$$

Definição 3.3.1 (reta dos Mínimos Quadrados)**.** A reta dos mínimos quadrados é a reta que minimiza a soma dos quadrados das diferenças d_i.



Temos que $\overline{y_i}$ é apenas uma estimativa para y_i. Assim quando usamos $\overline{y_i}$ para estimar y_i, temos uma pequena diferença d_i, em que

$$\boldsymbol{d_i = \overline{y_i} - y_i = (ax_i + b - y_i) \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n}$$

Assim, temos que a soma dos quadrados das diferenças é

$$\boldsymbol{D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2}$$

Assim a e b da reta dos mínimos quadrados $\overline{y_i} = ax + b$ é a solução LSQ

do sistema S (A demonstração que a e b são soluções LSQ se encontra na secção 3.2), resulta que tal reta é determinada de modo que a soma dos quadrados das diferenças seja mínima.

Exemplo 3.1. Vamos encontrar a reta que mais se ajusta ao conjunto de pontos dados abaixo:

x	1	2	3	4	5
y	2	8	6	10	9

Resolução. Seja $y = ax + b$ a reta que se ajusta ao conjunto de pontos, com a e b a determinar. Temos,

$$S : \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 8 \\ 3a + b = 6 \\ 4a + b = 10 \\ 5a + b = 9 \end{cases} \text{, com } \quad \overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Temos que o sistema acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$S : \{x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{b_1}$$

Repetindo a mesma equação abaixo ficamos

$$S : \begin{cases} \overrightarrow{v_1}x + \overrightarrow{v_2}y = \overrightarrow{b} & (3.1) \\ \overrightarrow{v_1}x + \overrightarrow{v_2}y = \overrightarrow{b} & (3.2) \end{cases}$$

Agora multiplicando a equação (3.1) por $\overrightarrow{v_1}$ e a equação (3.2) por $\overrightarrow{v_2}$ ficamos com o sistema auxiliar abaixo

$$S : \begin{cases} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}x + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}y = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}x + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}y = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

Calculemos cada produto interno separadamente:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} = (1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5) = 55$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1.1 + 2.1 + 3.1 + 4.1 + 5.1) = 15$$

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_1} = (2.1 + 8.2 + 6.3 + 10.4 + 9.5) = 79$$

$$\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1.1 + 1.1 + 1.1 + 1.1 + 1.1) = 5$$

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v_2} = (2.1 + 8.1 + 6.1 + 10.1 + 9.1) = 35$$

Assim S pode ser escrito da seguinte maneira:

$$S : \begin{cases} 55x + 15y = 121 \\ 15x + 5y = 35 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos,

$$x = 1,6 \quad \text{e} \quad y = 2,2$$

Assim a curva que mais se ajusta ao conjunto de pontos dados é

$$y = 1,6x + 2,2$$

Capítulo 4

TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O uso de softwares que contribuam para o ensino de matemática é cada vez maior no processo de ensino aprendizagem. Entretanto, devemos ressaltar que o uso desses programas matemáticos não deve em hipótese alguma, substituir o desenvolvimento de uma matemática significativa em seus resultados, ou seja, os softwares não devem ser usados simplesmente para exprimir um resultado de imediato, após um comando acionado na máquina, pois o aluno não estaria desenvolvendo um raciocínio lógico, como afirma Borba e Penteado (2001)[1], "se o raciocínio passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar e deixará de desenvolver sua inteligência".

Trabalhar conteúdos com o uso de softwares adequados é mais do que necessário, tendo em vista que ele possibilita a visualização de situações que jamais seriam atingidas com uso do quadro branco e pincel (ou giz e quadro negro). Destacamos, por exemplo, o estudo de Geometria Espacial. Se o professor não for um exímio desenhista, é muito provável que essa deficiência prejudicará o processo de visualização dos sólidos geométricos, e consequentemente a assimilação de suas fórmulas relacionadas a esses sólidos. Além disso, segundo Rodrigues (2013, p. 9)[7] a utilização de software apropriado para o conteúdo trabalhado, auxilia na formação do aluno, estimula sua criatividade, amplia sua visão de determinado conteúdo, buscando a construção do conhecimento, ajudando assim no desenvolvimento intelectual.

Outro ponto que vemos como crucial para o uso de software no processo de ensino é o das funções, sejam elas polinomiais, trigonométricas, exponencial e logarítmica. Muitos desses programas facilitam a visualização dos gráficos dessas funções, o que favorece o estudo detalhado de seus principais pontos. Além disso, possibilita a justificativa de diversas afirmações sem demonstração algébrica, como por exemplo, uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que o coeficiente a é maior que zero apresenta ponto de mínimo.

A visualização de algumas situações em análise combinatória é praticamente inviável de serem efetuadas, justamente pela quantidade de possibilidade que essa situação possa ter. Um software que proporcione todas essas possibilidades é de fato uma ferramenta muito útil, pois o professor poderá utilizar a veracidade de algumas fórmulas, dispensando ai à demonstração algébrica que em sua grande maioria, não são essências aos alunos do Ensino Médio.

Acima, foram abordados apenas três conteúdos em que o uso da informática poderia contribuir. Entretanto, existem várias outros que podem ser estudados através de recursos computacionais, auxiliando o professor na exposição e ao aluno na compreensão do conteúdo.

O uso da informática no ensino de matemática requer acima de tudo a quebra de alguns paradigmas dos professores. Infelizmente, muitos ainda apresentam uma grande resistência no que se refere ao uso de tecnologias no ensino. Pois, para que isso ocorra é necessária uma preparação na qual as maiorias dos professores não tiveram durante a formação acadêmica. Neste contexto, se faz necessário uma flexibilidade dos docentes, buscando aí superar suas limitações através de estudo que implicará no sucesso de sua prática. Além disso, proporcionará ao educador a oportunidade de mudança em sua metodologia que muitas vezes está fadada ao tradicionalismo.

Neste sentido, Tajra (2008, p. 105)[12] relata que “O professor deve estar aberto para mudanças, principalmente em relação à sua nova postura, o de facilitador e coordenador do processo de ensino-aprendizagem; ele precisa aprender a aprender, a lidar com as rápidas mudanças, ser dinâmico e flexível".

Enfatizamos que o ensino de matemática através de software, poderá despertar no aluno um maior interesse pelo conteúdo. Pois, muito desses programas buscam desenvolver a curiosidade dos alunos, muitas vezes, impossível de ser explorada sem qualquer tipo de recurso didático, e vemos na informática uma possibilidade para explorar essa curiosidade.

Queremos destacar também, que a ausência de softwares no estudo da matemática, não será necessariamente um fator que contribua para que os alunos não consigam assimilar os conteúdos. Na verdade, estamos ressaltando a importância de quanto esses programas podem contribuir para uma melhor compreensão dos assuntos estudados.

4.1 Sugestão de aula: método dos Mínimos Quadrados e o *Software Excel*

Neste tópico apresentaremos sugestão de uma aula interdisciplinar, que pode ser aplicada ao 3º Ano do Ensino Médio. Mostraremos todas as etapas necessárias para seu desenvolvimento tanto na forma de cálculo como na utilização do *Software Excel*, que será utilizado como ferramenta auxiliar.

Plano de aula

Objetivos

- ➢ Trabalhar conteúdos não tradicionais;
- ➢ Apresentar o método dos Mínimos Quadrados e sua aplicação;
- ➢ Utilizar a tecnologia como ferramenta auxiliar no ensino de matemática.

Conteúdos introdutórios

- ➢ Equação da reta;
- ➢ Matrizes;
- ➢ Geometria analítica;
- ➢ Operações com vetores;
- ➢ Cálculo diferencial.

Tempo didático

- ➢ 2 h/aulas (1 hora e 40 minutos)

Recursos didáticos

- ➢ Quadro branco e pincel;

➢ Laboratório de informática com o programa Excel nos computares.

Avaliação

Dar-se-á pela participação/interação dos discentes durante a aula e pela resolução de uma atividade, discutida em grupo e abordando os principais pontos de aplicação do conteúdo.

4.2 Etapas de desenvolvimento da aula

4.2.1 1ª Etapa:

Mostrar os objetivos do estudo em questão, resaltando a importância da matemática que trabalha com aproximações que podem ser usadas para fazer previsões.

4.2.2 2ª Etapa:

Apresentar uma situação problema, como o exemplo abaixo:

O proprietário de uma Agencia de Viagens compilou os seguintes dados relacionando o lucro anual da empresa com seu gasto anual em propaganda (ambos medidos em milhares de dólares

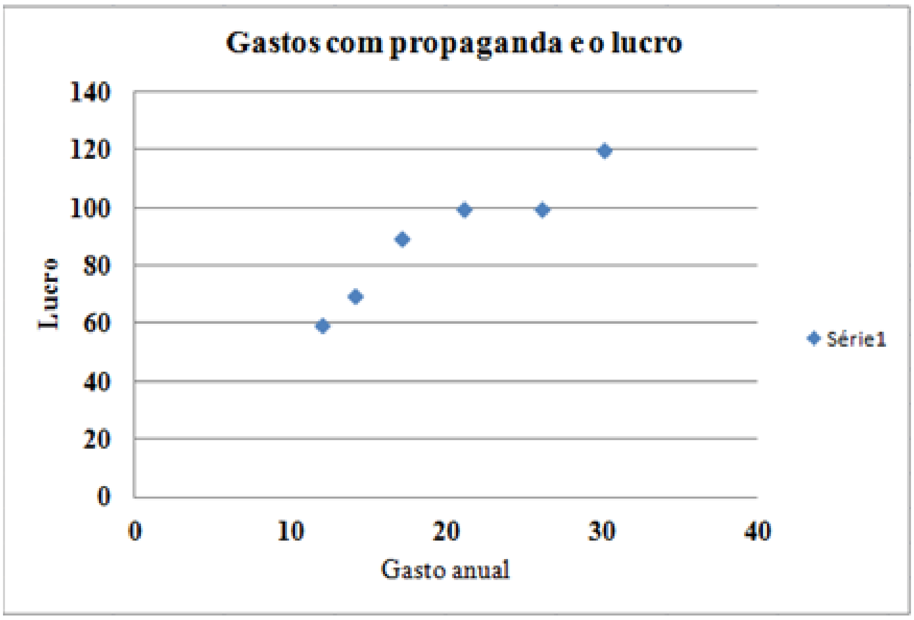
Gasto Anual em propaganda (x)	12	14	17	21	26	30
Lucro Anual (y)	60	70	90	100	100	120

Tabela 4.1: Fonte: TAN S. T.

4.2.3 3ª Etapa:

Expor esses dados em um gráfico de dispersão utilizando o software Excel.

Sugerimos ao professor levantar alguns questionamentos, tais como:



I) Existe alguma relação matemática entre o gasto com propagando e o lucro obtido?

II) É possível prever qual o lucro se o gasto anual com propaganda for de R$ 20 000,00?

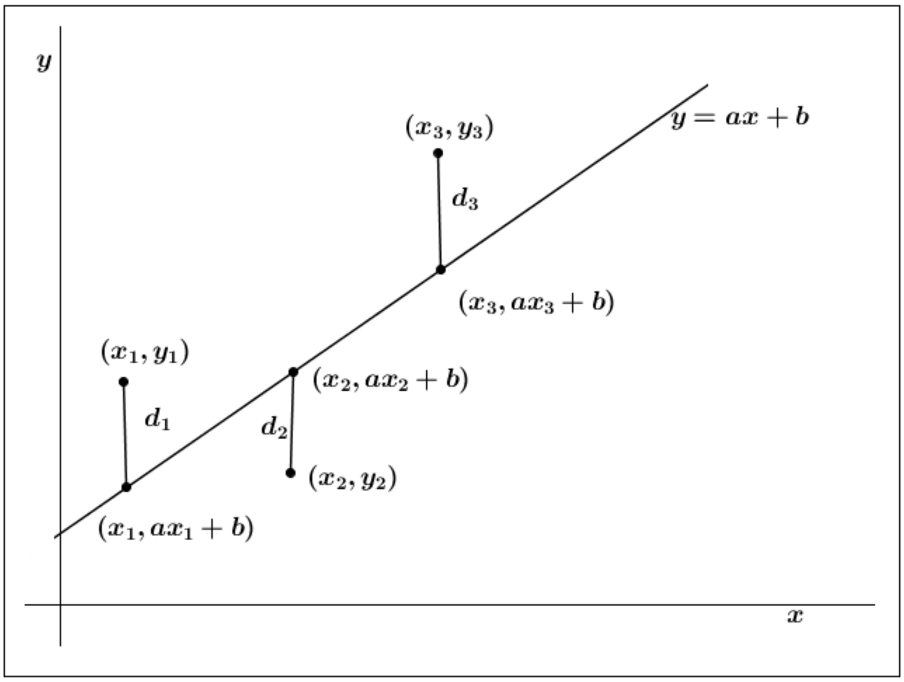
III) Qual a importância de poder determinar valores futuros em que duas grandezas são analisadas?

4.2.4 4ª Etapa:

Apresentar o método dos Mínimos quadrados como ferramenta que possibilita determinar a relação entre as duas grandezas em estudo e que essa relação representa uma reta chamada de reta dos mínimos quadrados.

Neste momento aconselhamos uma exposição geométrica para compreensão do método. Toma-se uma reta $y = ax + b$ e 3 pontos (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) fora dela como na figura abaixo. (Observação: Tomou-se somente 3 pontos para efeitos didáticos)

Neste momento o professor deverá esclarecer que a intenção é determinar a reta que melhor se ajusta ao conjunto de pontos, argumentando que essa reta será aquele que apresentar menor valor para $\boldsymbol{D}$, onde $\boldsymbol{D}$ corresponde à soma dos quadrados das



diferenças, ou seja,

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

Deverá ressaltar ainda que, essas diferenças estão ao quadrado, pelo fato de serem positiva ou negativa, pois se assim não fossem, o resultado poderia ser zero gerando uma contradição.

Assim pode-se conceituar Método dos Mínimos Quadrados como sendo o processo que permite encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos minimizando o valor de D o máximo possível.

4.2.5 5ª Etapa:

Processo para encontrar a reta dos mínimos quadrados. Iremos aqui expor as duas maneiras, já demonstradas na secção 2.5, de como encontrar os parâmetros da reta dos Mínimos Quadrados.

I – Por cálculo diferencial

Vamos iniciar com um exemplo na intenção de generalizarmos da fórmula. Encontre a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos $(1, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 8)$:

Temos que:

$$x = 1 \Rightarrow y_1 = a + b$$

$$x = 2 \Rightarrow y_2 = 2a + b$$

$$x = 3 \Rightarrow y_3 = 3a + b$$

Assim temos os seguintes pontos na reta $(1, a + b)$; $(2, 2a + b)$; $(3a + b)$. Logo, o quadrado das distancias verticais entre os pontos $(1, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 8)$ e as retas são, respectivamente,

$$d_1^2 = (a + b - 4)^2$$

$$d_2^2 = (2a + b - 5)^2$$

$$d_3^2 = (3a + b - 8)^2$$

Assim ficamos com

$$\boldsymbol{D} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (a + b - 4)^2 + (2a + b - 5)^2 + (3a + b - 8)^2$$

Aqui aconselhamos o professor a usar o seguinte argumento, como a função D apresenta termos ao quadrado, ela será minimizada quando as derivadas parciais forem zero, ou seja,

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0$$

Neste momento o professor apresentará rapidamente como calcular as derivadas parciais, resolvendo com os alunos:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 2(a + b - 4) + 2(2a + b - 5)2 + 2(3a + b - 8)3$$

$$= 2a + 2b - 8 + 8a + 4b - 20 + 18a + 6b - 48$$

$$= 28a + 12b - 76 = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 2(a + b - 4) + 2(2a + b - 5) + 2(3a + b - 8)$$

$$= 2a + 2b - 8 + 4a + 2b - 10 + 6a + 2b - 16$$

$$= 12a + 6b - 34 = 0$$

Ficando com um sistema de equações de 2 variáveis:

$$SA : \begin{cases} 28a + 12b = 76 \\ 12a + 6b = 34 \end{cases}$$

Para resolver o sistema o professor poderá optar por diversas maneiras, como por exemplo, Multiplicar a segunda equação por (– 2) e depois soma-lá com a primeira, ficando com:

$$4a = b \Rightarrow a = 2$$

Substituindo o valor de "a"na segunda equação, temos:

$$12 \cdot 2 + 6b = 34 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$

Logo, a reta que mais se aproxima desses pontos é $y = 2x + \frac{5}{3}$.

II – Aplicação direta da fórmula

Utilizaremos o mesmo exemplo: Encontre a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos $(1, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 8)$.

Sabemos que esses pontos não são colineares, mas vamos supor que fossem assim para que tal reta passasse por todos esses pontos, devemos ter

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + b = 5 \\ 3a + b = 8 \end{cases}$$

O professor transformaria o sistema na seguinte equação:

$$a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{w_1} \tag{4.1}$$

Explicando que $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ são os coeficientes de "a", $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são os coeficientes de "b" e $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ são os termos independentes. Argumentaria que para resolver a equação acima, basta obter um sistema de duas equações e duas variáveis. E que esse sistema é obtido através do método prático:

➢ Multiplica escalarmente a equação (4.1) por $\overrightarrow{v_1}$ obtendo a primeira equação do sistema e, depois multiplicaria a mesma equação (4.1) por $\overrightarrow{v_2}$ obtendo a segunda equação do sistema:

$$\begin{cases} a\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_1} \\ a\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + b\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

Agora, mostraria que o produto interno entre dois vetores corresponde "ao somatório do produto de suas coordenadas correspondentes". Como abaixo:

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 1 + 4 + 9 = 14$

$\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 1 + 2 + 3 = 6$

$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_1} = (4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3) = 4 + 10 + 24 = 38$

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = 6$

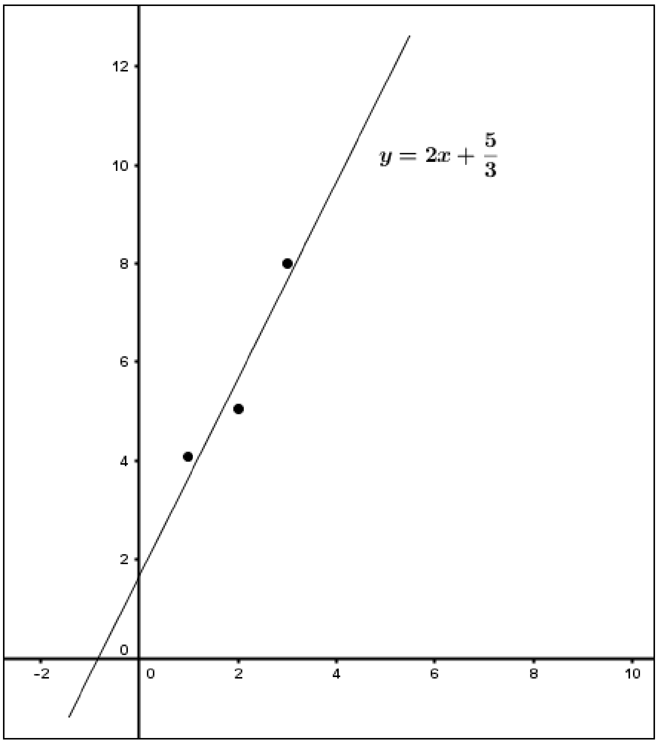
$\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdot 1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_2} = (4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1) = 4 + 5 + 8 = 17$

Agora montando o sistema, temos

$$SA : \begin{cases} 14a + 6b = 38 \\ 6a + 3b = 17 \end{cases}$$

Observemos que se chegou ao mesmo sistema de equações, só que simplificado por dois. Aplicando o mesmo processo resolutivo, chegamos a mesma reta $y = 2x + \dfrac{5}{3}$, com o gráfico:



4.2.6 6ª Etapa: Utilizando o software Excel

Esta etapa foi pensada como uma forma de verificação dos resultados. Aqui iremos indicar como programar a planilha para obter os valores dos coeficientes do sistema, bem como, a solução do sistema. E por fim, sugerimos que mostre como formar a reta dos mínimos quadrados com os valores pré-estabelecidos.

Atividade:

Programar uma planilha eletrônica, para verificação dos resultados do produto interno dos vetores e resolução do sistema auxiliar. Aconselhamos fazer o mesmo exemplo anterior.

Procedimento:

Inserir na primeira coluna os valores correspondentes a $\overrightarrow{v_1}$, ou seja, $(1, 2, 3)$. Na segunda, colocam-se os correspondentes a $\overrightarrow{w}$, ou seja, $(4, 5, 8)$ e na terceira os correspondentes a $\overrightarrow{v_2}$, ou seja, $(1, 1, 1)$. Observe a figura abaixo:

	A	B	C
1	$\mathbf{v_1}$	$\mathbf{w}$	$\mathbf{v_2}$
2	1	4	1
3	2	5	1
4	3	8	1

Em seguida digitamos nas colunas seguintes os produtos vetoriais que aparecem no sistema auxiliar, como na figura abaixo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$\mathbf{v_1}$	$\mathbf{w}$	$\mathbf{v_2}$	$\mathbf{v_1 . v_1}$	$\mathbf{v_2 . v_2}$	$\mathbf{v_1 . v_2 = v_2 . v_1}$	$\mathbf{w . v_1}$	$\mathbf{w . v_2}$
2	1	4	1					
3	2	5	1					
4	3	8	1					
5								

Nesse momento o professor deve ressaltar que $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$, sendo desnecessário construir uma coluna para cada produto.

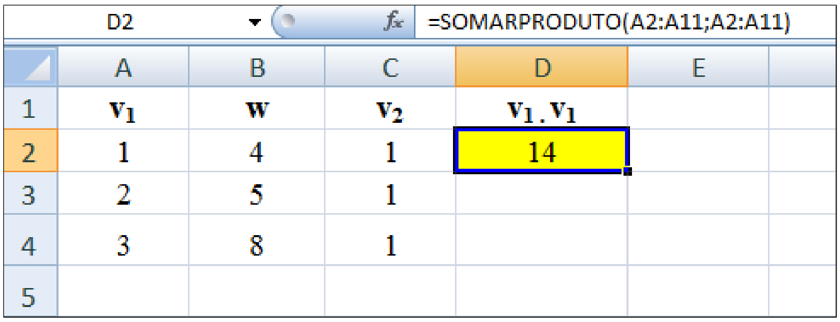
Agora, iremos programar a planilha para calcular os produtos vetoriais. Observe que estamos trabalhando com apenas três pares ordenados, entretanto aconselhamos a programar a planilha para mais valores, pois evitará ter que alterar os dados constantemente. Vamos programar para dez pares ordenados.

Como estamos interessados em calcular a soma do produto das coordenadas dos vetores, a fórmula é intuitiva, veja como ficará:

Para $\vec{v_1} \cdot \vec{v_1}$, na célula D2, temos:

$$=\text{SOMARPRODUTO(A2:A11;A2:A11)}$$

Nessa fórmula **A2:A11** significa onde inicia e onde termina os dados do primeiro vetor. Assim como, **A2:A11** do segundo vetor, que no caso é o mesmo. Observe


D2 | fx =SOMARPRODUTO(A2:A11;A2:A11)

	A	B	C	D	E
1	v1	w	v2	v1 . v1	
2	1	4	1	14	
3	2	5	1		
4	3	8	1		
5					

que o resultado aparece na célula e a fórmula na caixa fx. Os demais produtos procedem da mesma forma:

Para $\overrightarrow{v_2 \cdot \vec{v_2}}$, na célula E2, temos:

$$=\text{SOMARPRODUTO(B2:B11;B2:B11)}$$

Para $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$, na célula F2, temos:

$$=\text{SOMARPRODUTO(A2:A11;C2:C11)}$$

Para $\vec{w} \cdot \vec{v_1}$, na célula F2, temos:

$$=\text{SOMARPRODUTO(A2:A11;B2:B11)}$$

Para $\vec{w} \cdot \vec{v_2}$, na célula F2, temos:

$$=\text{SOMARPRODUTO(B2:B11;C2:C11)}$$

Após aplicar em todos os produtos chega-se ao resultado como na figura abaixo:

Agora iremos programar a planilha para resolver o sistema auxiliar.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**v1**	**w**	**v2**	**v1 . v1**	**v2 . v2**	**v1 . v2 = v2 . v1**	**w . v1**	**w . v2**
2	1	4	1	14	3	6	38	17
3	2	5	1					
4	3	8	1					
5								
6								
7								
8								
9								

Antes disso é interessante que o professor resolva manualmente o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}\\ a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+b\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_2}\end{cases}$$

Vamos resolve-ló da seguinte maneira: Isolar o "b" da primeira equação:

$$a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}\Rightarrow b\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}-a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}-a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}}\quad\text{com}\quad\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}\neq 0 \tag{4.2}$$

Substituindo "b" na segunda equação, temos

$$a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+\frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}-a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_2}$$

$$a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}-a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}\Rightarrow$$

$$a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+\frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}-a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_2}$$

$$a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}-a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}$$

$$a=\frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}}$$

Substitui "a" em 4.2, para encontrar "b", temos:

$$b = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_1} - a\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}}$$

Vamos agora programar a planilha para resolver o sistema:

$$\begin{cases} a\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_1} \\ a\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + b\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

Na mesma planilha anterior, digitaremos em cada célula os termos correspondentes de cada equação, como na figura abaixo:

12	Resolução do Sistema						
13	$v_1 . v_1$	a	+	$v_2 . v_1$	b	=	$w . v_1$
14		a	+		b	=	
15							
16	$v_1 . v_2$	a	+	$v_2 . v_2$	b	=	$w . v_2$
17		a	+		b	=	
18							

Nas células em azul irão os valores dos produtos vetoriais calculados anteriormente, entretanto para que esses valores apareçam, basta digitar "=" e a célula onde esse valor se encontra e clicar em Enter que o valor aparecerá, e nas demais os valores repetidos, como a figura abaixo:

12	Resolução do Sistema						
13	$v_1 . v_1$	a	+	$v_2 . v_1$	b	=	$w . v_1$
14	14	a	+	6	b	=	38
15							
16	$v_1 . v_2$	a	+	$v_2 . v_2$	b	=	$w . v_2$
17	6	a	+	3	b	=	17

Em seguida, programa-se para encontrar o valor de "a" e de "b", conforme foi resolvido manualmente. Aqui iremos substituir os valores dos produtos pelas células onde eles se encontram, como na figura abaixo:

Temos que

$$a = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}}$$

	A	B	C	D	E	F	G
10							
12				Resolução do Sistema			
13	$v_1 . v_1$	a	+	$v_2 . v_1$	b	=	$w . v_1$
14	14	a	+	6	b	=	38
15							
16	$v_1 . v_2$	a	+	$v_2 . v_2$	b	=	$w . v_2$
17	6	a	+	3	b	=	17
18							
19		a =					
20							

Assim, na planilha, a célula laranja fica da seguinte forma:

=(G17*D14 – G14*D17)/(A17*D14 – A14*D17)

Clicando em Enter obtém o resultado,

13	$v_1 . v_1$	a	+	$v_2 . v_1$	y	=	$w . v_1$
14	14	a	+	6	y	=	38
15							
16	$v_1 . v_2$	a	+	$v_2 . v_2$	y	=	$w . v_2$
17	6	a	+	3	y	=	17
18							
19		a =					
20		2					

Agora encontraremos o valor de "b". Da mesma forma, temos que "b" é,

$$b = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v_1} - a\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}}$$

Então na célula azul, digita-se

= (G14 – B20*A14)/D14

	A	B	C	D	E	F	G
10							
11							
12				Resolução do Sistema			
13	$v_1 . v_1$	a	+	$v_2 . v_1$	b	=	$w . v_1$
14	14	a	+	6	b	=	38
15							
16	$v_1 . v_2$	a	+	$v_2 . v_2$	b	=	$w . v_2$
17	6	a	+	3	b	=	17
18							
19		a =			b =		
20		2					

Clicando em Enter , chegamos ao seguinte resultado,

	A	B	C	D	E	F	G
12				Resolução do Sistema			
13	$v_1 . v_1$	a	+	$v_2 . v_1$	b	=	$w . v_1$
14	14	a	+	6	b	=	38
15							
16	$v_1 . v_2$	a	+	$v_2 . v_2$	b	=	$w . v_2$
17	6	a	+	3	b	=	17
18							
19		a =			b =		
20		2			1,666667		

Assim obtemos os parâmetros "$\boldsymbol{a}$" e "$\boldsymbol{b}$" e a equação da reta fica,

$$\boldsymbol{y = 2x + 1,67}$$

Ainda na planilha podemos programá-la para obter qualquer valor de y tomando um determinado x. Em cada célula digitaremos os termos da função:

	A	B	C	D	E	F
21						
22	y	=	a	x	+	b
23		=	2		+	1,666666667

A célula em azul vai a seguinte fórmula,

=C23*D23+F23,

que corresponde a

$$2 * x + 1,67$$

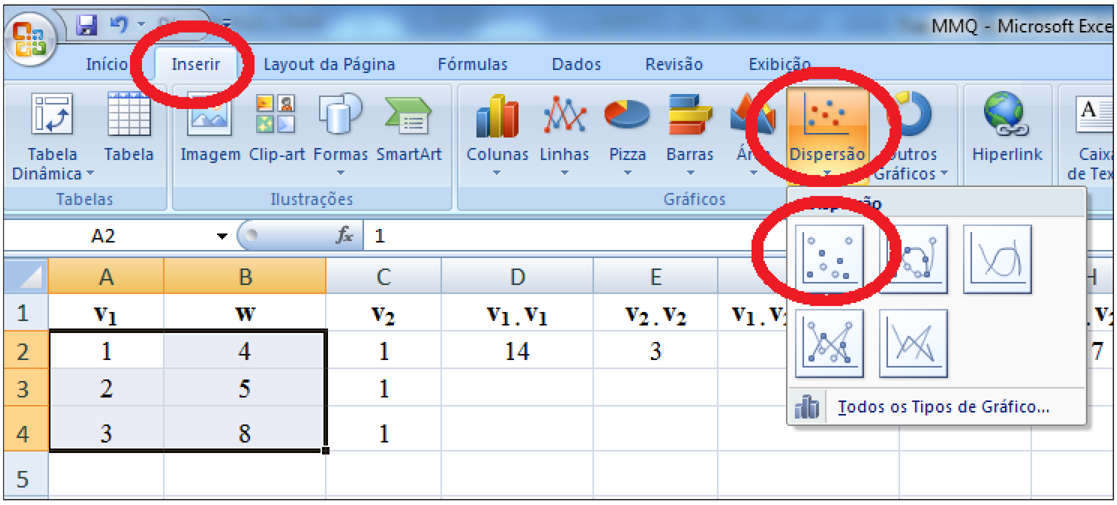
E na célula laranja vai o valor que desejarmos. Por exemplo, para x igual 12, teremos:

	A	B	C	D	E	F
22	y	=	a	x	+	b
23	25,6667	=	2	12	+	1,666666667

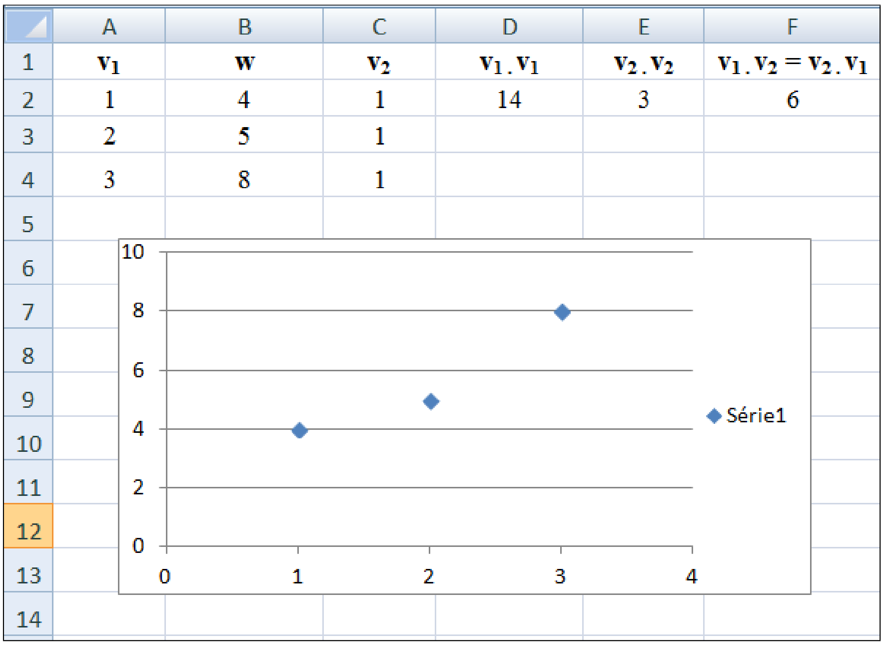
Agora, mostraremos como obter à reta que mais se ajusta aos pontos do início. Como $\overrightarrow{v_1}$ corresponde aos valores de x e $\overrightarrow{w}$ corresponde aos valores de y, basta selecionar os valores correspondentes a essas duas colunas:

	A	B
1	v_1	w
2	1	4
3	2	5
4	3	8

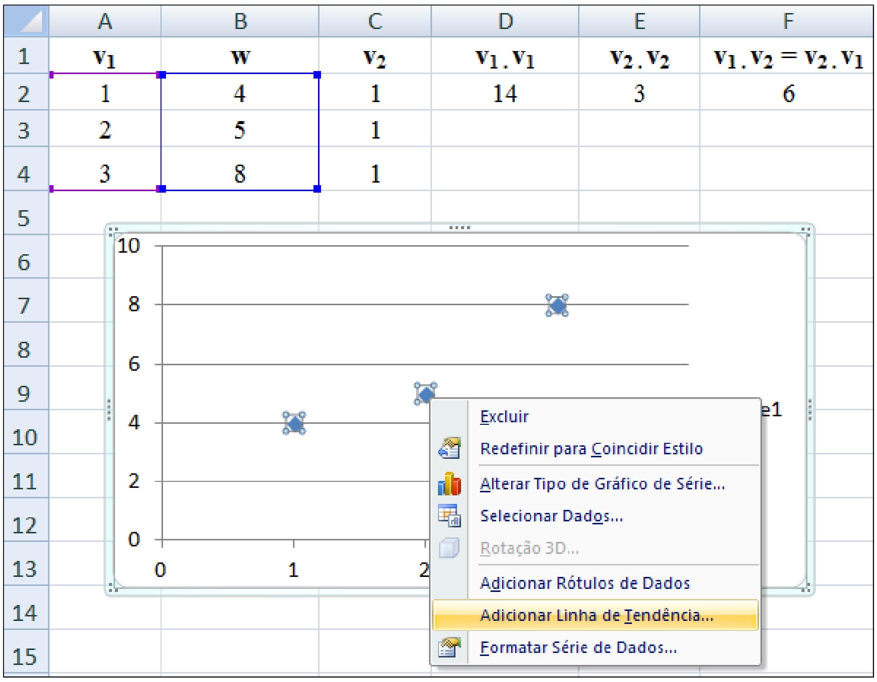
Depois, clica no ícone inserir e depois gráfico de dispersão,



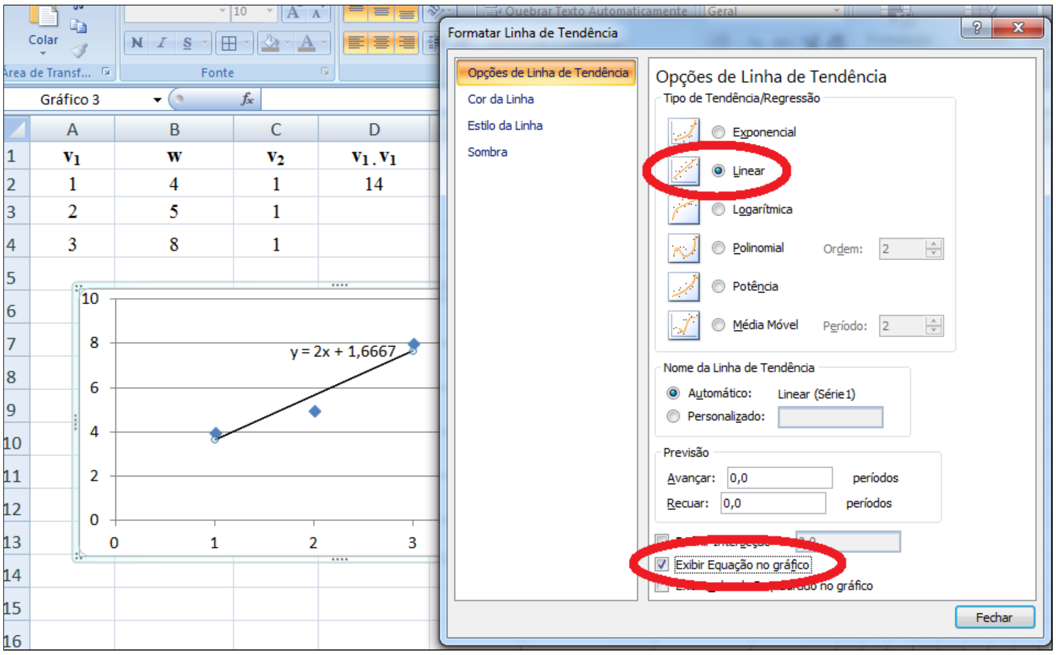
E então o gráfico de dispersão aparecerá,



Agora, faremos a reta que mais se ajusta. Basta clicar em um dos pontos com o botão direito e depois com o esquerdo, então uma janela abrirá e clica em adicionar linha de tendência.



Então, uma nova janela abrirá com os vários tipos de linhas e escolhe a linear. Ainda nessa janela, solicita-se equação do gráfico.



Depois de feito isso, tanto a reta como sua equação aparecerão. Finalizando todo o processo, sugerimos que retome ao problema do inicio para resolução seguindo todos essas etapas aqui sugeridas.

Abaixo serão apresentados vários exercícios que podem ser aplicados seguindo todos esses passos.

4.3 Lista de exercícios

01. (Elaborado pelo autor) Os dados no quadro abaixo, são provenientes do Censo demográfico realizado pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) desde 1950 a 2000, mostram a evolução da população brasileira residente no país em milhões de pessoas. (com x = 0 corresponde a 1990)

Ano - x	0	1	2	3	4	5
Popolução - y	51,9	70	93,1	119	146,8	169,8

a) Determine a equação da reta dos mínimos quadrados para os dados na tabela.

b) Com a equação da reta do item anterior determine qual é a população em 2010?

02. (Tan, S. T. [11]) Enquanto os ataques on-line persistem, os gastos com software de segurança de informação continuam a crescer. O quadro s seguir fornece as projeções para as vendas mundiais (em bilhões de dólares) de software de segurança até 2007 (x = 0 corresponde a 2002).

Ano - x	0	1	2	3	4	5
Popolução - y	6,8	8,3	9,8	11,3	12,8	14,9

a) Determine a equação da reta dos mínimos quadrados para esses dados.

b) Use o resultado obtido na parte (a) para prever os gastos com software de segurança de informação em 2008, assumindo que as tendências se mantenham iguais.

03. (Tan, S. T. [11]) O quadro a seguir fornece o total de vendas de medicamentos (em bilhões de dólares) nos Estados Unidos em 1999(x = 0) e 2003:

Ano - x	0	1	2	3	4
Vendas - y	126	144	171	191	216

a) Determine a equação da reta dos mínimos quadrados para esses dados.

b) Use o resultado obtido na parte (a) para prever o total das vendas de medicamentos em 2005, assumindo que a tendência se mantenha.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES

Acredita-se que a aplicação de aulas interdisciplinares com temas não tradicionais, é uma boa estratégia para mostrar a importância da matemática e de se trabalhar com aproximações.

Neste trabalho foi apresentado o Método dos Mínimos Quadrados sob a ótica do cálculo diferencial e da álgebra linear, ressaltando nesse processo, a solução de sistemas lineares impossíveis, no que se refere ao sentindo usual, chegando-se a uma fórmula que possibilita determina os parâmetros de uma função afim que mais se aproxima de um conjunto de pontos.

Desenvolveu-se ainda, uma proposta de aula, que divididas em etapas bem estruturadas, possibilita ao professor mostrar a essência do método sem recorrer a cálculos que exigem uma maior abstração. Além disso, utilizou-se do software Excel como ferramenta tecnológica auxiliar na verificação dos cálculos e como motivação para o desenvolvimento da aula.

Ao finalizar este estudo sugere-se uma continuidade do mesmo, na perspectiva de observar uma maior aplicabilidade em curvas mais complexas e com dados empíricos realizados pelos alunos. Sugere-se ainda, a realização de trabalhos que avaliem a motivação dos alunos ao aprender tópicos de matemática com o uso do Excel.

Referências Bibliográficas

[1] BORBA, M.C. & PENTEADO, M.G. "Informática e Educação Matemática". Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[2] CUNHA, João Carlos Vieira da. O Método dos Mínimos Quadrados: Uma proposta para o Ensino Médio para o ajuste por retas. Disponível em: http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCC_JOAO.pdf. Acesso em: 14.08. 2015.

[3] ESPINDOLA, Miriam Oliveira. Método de Mínimos Quadrados no Ensino Médio. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1231/2012_01015_MIRIAM_OLIVEIRA_ESPINDOLA.pdf?sequence=1. Acesso em: 15.08.2015.

[4] GOLDENSTIEN, Larry J. LAY, David C. SCHNEIDER, David I. Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade. 10. ed. Porto Alegre. Bookman, 2006.

[5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 5 ed. vol. 2. Rio de Janeiro. LTC, 2015.

[6] MARINELLI, Maura Ferreira. O Método dos Mínimos Quadrados. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97165/Maura_Ferreira_Marinilli.PDF?sequence=1. Acesso em: 10.08 2015.

[7] RODRIGUES, Maraíza Merylen Pereira. Utilização do software MAXIMA no estudo de funções polinomiais do 1º grau e 2º grau. - 2013. http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/535/

2011_00436_MARAIZA_MERYLEN_PEREIRA_RODRIGUES.pdf?sequence=1. Acesso em: 29.08.2015.

[8] RICHARDSON, R. J. (org). Pesquisa Ação: princípios e métodos. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2003.

[9] SILVA, Felipe Ferreira da. O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por parábolas. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1320/2012_01111_FELIPE_FERREIRA_DA_SILVA.pdf?sequence=1. Acesso em: Acesso em: 28.08.2015.

[10] SPIEGEL, MURRAY R. Estatística Aplicada. 3 ed. São Paulo. Makron Books. 1993.

[11] TAN, S. T. Matemática aplicada à administração e economia. 2 ed. São Paulo. Cengage Learning, 20011.

[12] TAJRA, Sanmya Feitosa. Infórmática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade. 8 ed. São Paulo. Érica, 2008.