UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO EUDES DA SILVA

A CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM COMO FERRAMENTA NA MODELAGEM DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

JUAZEIRO DO NORTE
2015

FRANCISCO EUDES DA SILVA

A CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM COMO FERRAMENTA NA MODELAGEM DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga.

JUAZEIRO DO NORTE

2015

FRANCISCO EUDES DA SILVA

A CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM COMO FERRAMENTA NA MODELAGEM DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24/ 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Maria Silvana A. Cost

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho ao meu filho e a minha esposa valiosos tesouro que Deus colocou para encher de alegria o meu lar.

Aos meus pais, Francisca Martins da Siva e Edmilson Nogueira da Silva, que mesmo sem condições financeiras investiram na minha educação e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais uma conquista em minha vida acadêmica e profissional;

A minha esposa Cláudia Raquel Alves, pelo incentivo, dedicação e apoio nas horas mais difíceis;

Ao meu filho Gabriel Alves da Silva, que durante esse período veio a vida para encher de alegria o nosso lar;

A minha família, principalmente meus pais, pelo incentivo e compreensão da minha ausência para estudos e longas viagens;

Aos professores da Universidade Federal do Ceará - Campos de Juazeiro do Norte, pelas valiosas aulas, conhecimento, sabedoria transmitidos além do incetivo a continuação no curso;

Ao professor Ms. Francisco Valdemiro Braga, pela excelente orientação e valiosas contribuições a esse trabalho;

A professora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa, pelo apoio e valiosas contribuições a esse trabalho;

Ao meu amigo e colega do mestrado Júlio César Matias de Freitas, pelo companheirismo e pela valiosa ajuda e sugestões a esse trabalho;

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio;

Aos companheiros e colegas da turma do mestrado, pelas reflexões críticas, discussões enriquecedoras e momentos de alegria que mim propiciaram;

Aos meus colegas de trabalho da Escola de Ensino Médio Virgílio Correia Lima, pelo apoio e incentivo;

Aos meus amigos e companheiros de viagem Francisco Rosiglêi, Júlio César, Cícero Soares e Carlos Augusto, pelos momentos de alegria, companheirismo e debates sempre presente ao longo dessa trajetória;

“Eu ouço e eu esqueço, eu vejo e eu lembro,
eu faço e eu entendo”.

Antigo provérbio chinês.

RESUMO

O presente trabalho versa sobre a importância da caracterização da função afim como ferramenta na modelagem de situações problemas, além de propor a utilização da metodologia de modelagem matemática como fonte motivadora para o estudo das funções afim no Ensino Médio. Para tanto, partiu-se de uma leitura teórica fundamentada em diversos autores e documentos de cunho oficiais como o DCN, PCN para o Ensino Médio. Em seguida propõe duas situações que podem ser usadas como atividades de modelagem matemática descrevendo cada etapa da mesma. No primeiro capítulo é feita uma reflexão sobre o Ensino Médio no Brasil e o ensino de matemática. O segundo capítulo apresenta a base teórica e histórica sobre o estudo de funções em particular o da função afim. É dado enfase ao Teorema fundamental da proporcionalidade e o Teorema de caracterização da mesma e as aplicações dessa função em estudos sobre progressões aritméticas, análise da reta tangente a uma curva e o polinômio de Taylor. No terceiro capítulo é abordado o conceito de modelagem matemática e o conceito de regressão linear. O objetivo central do trabalho é propor uma situação de modelagem onde o teorema de caracterização da função afim seja decisivo na escolha do modelo adotado. Nesse aspecto é proposto duas situações que abordam o desenvolvimento de bebês e Pilotagem segura de motos: frenagem. Em ambos os casos são sugeridos propostos didáticas de como trabalhar esses temas a luz da modelagem matemática. A proposta é adequada a alunos do primeiro e terceiro ano do Ensino Médio tendo como objetivo dar aplicabilidade aos conteúdos de matemática à luz da realidade.

Palavras-chave: Função Afim. Teorema de caracterização. Modelagem.

ABSTRACT

This paper deals with the importance of characterization of the affine function as a tool for modeling problems situations, and propose the use of mathematical modeling methodology as motivating source for the study of affine function in high school.To this end, it started with a theoretical reading based on several authors and official stamp documents as the DCN, PCN to high school. Then it offers two scenarios which can be used as mathematical modeling activities describing each step thereof. In the first chapter is made a reflection on the high school in Brazil and the teaching of mathematics. The second chapter presents the theoretical and historical basis for the study of functions in particular the affine function. Emphasis is given to the fundamental theorem of proportionality and the characterization of the same theorem and applications that function in studies of arithmetic progressions, Geom tangent analysis to a curve and the Taylor polynomial. The third chapter is discussed the concept of mathematical modeling and the concept of linear regression. The central objective is to propose a modeling situation where the function of the characterization theorem in order to be decisive in choosing the model adopted. In this regard it is proposed two situations that address the development of babies and safe piloting of motorcycles: braking. In both cases it is suggested didactic proposed how to work these issues the light of mathematical modeling. The proposal is suitable for students of the first and third year of high school aiming to give applicability to mathematical content the light of reality.

Keywords: Affine function. Characterization theorem. Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEC	Ministério da Educação e Cultura
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
Ideb	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário tendo em vista várias situações em que o mesmo é empregado: é útil em situações do cotidiano, em apoio a outras disciplinas, e de uma maneira mais geral ele contribui para desenvolver habilidades de pensamento bem como o avanço no próprio campo matemático. No entanto, o que podemos observar, enquanto estudiosos da educação, é que os alunos que ingressam no Ensino Médio pouco tem conhecimento nessa disciplina, o que é verificado pelos baixos rendimentos nas avaliações externas. O mais grave é que muitos educandos vêem a mesma com um sentimento de aversão e impotência no tocante a aprendizagem da mesma. A pergunta motivadora é: o que torna a aprendizagem em matemática tão baixa e deficiente? Por que os alunos não conseguem entender e realizar pequenas operações ou resolver problemas matemáticos aplicados à matemática, a outra disciplina ou no próprio cotidiano? Neste trabalho procuraremos refletir sobre essas e outras questões.

Elon Lages em seu livro "A Matemática no Ensino Médio"(2007, p. 161) defende que se quisermos analisar os problemas relativos ao ensino da matemática é fundamental começar pelo Ensino Fundamental. Ainda segundo o autor (2007, p.162) "Qualquer criança cuja capacidade mental lhe permita aprender a ler e escrever é também capaz de aprender a Matemática que se ensina da primeira à quarta série da escola.". No entanto o que vemos é que essas crianças chegam ao Ensino Médio sem as competências básicas relacionadas a efetuar com destreza as operações fundamentais com números inteiros, racionais além de solucionar problemas concretos.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/96), a principal finalidade do Ensino Médio é a consolidação e aprofundamento dos estudos desenvolvidos no Ensino Fundamental, a preparação básica para o trabalho e a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. Dessa forma percebe-se que o ensino das disciplinas está relacionado com algo mais vivo e dinâmico. Com base nisto não se concebe um Ensino de Matemática voltado somente para resoluções de questões mecânicas e descontextualizadas. Faz-se necessário o uso de situações problemas, problemas que reflitam alguma realidade social, que valorize o saber inicial e o contexto onde o aluno se encontra, bem como a interdisciplinaridade entre as disciplinas.

Nesse trabalho proponho a metodologia de ensino que usa a modelagem matemática para o ensino de matemática, uma vez que a mesma vem de encontro com o que é proposto pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio quando afirma (2008, p. 69):

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Ma-

> temática é uma ciência com características própias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído [...]

Dessa maneira além de atender o que é proposto pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, essa metodologia é capaz de tornar o ensino mais atrativo e significante para o educando fazendo com que se sinta sujeito e protagonista de sua aprendizagem.

Nessa perpesctiva as funções adquirem uma notável importância, pois, diversas são as situações, sejam de cunho cotidiano, relacionado a tecnologias, Engenharia, outras disciplinas ou relacionada com a própia matemática, onde elas são utilizadas. A questão é: como modelar uma determinada situação problema relacionando-a um determinado conteúdo matemático? Ainda nessa linha de pensamento, tendo em vista que generalização é um dos ponto fortes do conhecimento matemático, como garantir que a esse modelo se aplica uma determinada função? Nesse sentido vem discutir como a caracterização das funções, em particular a função Afim, vem contribuir para a modelagem de situações problema.

A estrutura desse trabalho está organizado baseado em três dimensões, organizadas em cinco capítulos, a saber: a primeira dimensão tem um caráter pedagógico e é abordado no primeiro e segundo capítulo, onde é feita uma exposição sobre a importância do tema em estudo, e uma reflexão sobre: o Ensino Médio no Brasil; a matemática no Ensino Médio. A segunda dimensão tem um caráter de matemática aplicada e é abordado no terceiro capítulo, onde é explorado o conceito de função sendo que o foco está na análise da função afim e o seu teorema de caracterização. Vale salientar que esse foi o conteúdo escolhido para apresentarmos uma sugestão de atividade usando a modelagem matemática. No capítulo quatro é abordado a modelagem matemática e explora a ideia de regressão linear. Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho em análise.

2 O ENSINO MÉDIO NO BRASIL

O Ensino Médio constitui a etapa final do Ensino Básico tendo sua duração de no mínimo 3 anos. Nessa etapa os jovens tem geralmente entre 15 a 17 anos de idade. Podemos ter também a Educação Profissional Técnica de nível médio articulada com o Ensino Médio e para os alunos que se situam numa faixa etária superior temos a Educação de Jovens e Adultos. Nesse trabalho procura-se desenvolver a metodologia no Ensino Médio na faixa etária considerada pela legislação vigente como própria, ou seja o Ensino Médio regular.

Ao chegar no Ensino Médio o jovem já traz consigo seus hábitos e vicissitude, atitudes crítico reflexivas e éticas porém ainda em processo de formação, dessa forma decidir se continuarão seus estudos na universidade ou treinarão para ingressar no mercado de trabalho dependerá entre outras do meio familiar e inclinações pessoais.

Segundo os PCN+ (2002, p. 8) “[...] estabelece ce o Ensino Médio como etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil - e não mais somente uma preparação para outra etapa escolar ou para o exercício profissional”. Dessa forma podemos perceber que o novo desáfio proposto agora é criar situações para superar as antigas limitações do antigo, porém ainda bastante difundido dentro da escola, Ensino Médio. Vale destacar que não se cogita a possibilidade do Ensino Médio deixar de garantir a possibilidade de continuação do estudo (universitário) ou prepare para o mundo do trabalho, o que se discute é que tudo isso “não comprometa a formação geral para a vida pessoal e cultural em qualquer tipo de atividade”. (BRASIL, 2002, p. 8).

Nesse sentido podemos destacar que a escola não pode tratar os educandos como se fossem homogêneos ou simplesmente submissos, tendo em vista que esses jovens fazem parte de um contexto cultural com acesso e domínio de recursos da internet, como redes sociais, chats, site diversos. Esses mesmos jovens com particularidades diversas, que muitas vezes são explorados e manipulados pelos setores das classes dominantes, precisam receber uma formação que contemple muito mais do que apenas conteúdo, ou seja, o ensino tem que ser significante para que o mesmo possa ser assimilado e modificado.

O Ensino Médio como etapa final da Educação Básica tem por finalidade, segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) em seu artigo 35 e analisado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 39)

> **I -** a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento nos estudos;
> **II -** a preparação básica para o trabalho,tomando este como princípio educativo, e para a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de enfrentar novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> **III -** o aprimoramento do estudante como um ser de direitos, pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> **IV -** a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos presentes na sociedade contemporânea, relacionando a teoria com a prática.

Nesse sentido esse trabalho desenvolverá a metodologia de modelagem matemática entendendo com isso que o conhecimento é construído pela necessidade que temos de dar respostas a situações e problemas que estão atrelados a contexto natural, social e cultural. Dessa forma contribuir para as finalidades da Educação Básica descrita acima. Os exercícios mecânicos devem existir em qualquer disciplina presente no Ensino Médio para que, dessa forma o aluno, conhecendo o conteúdo possa se deparar com modelagem de situações problemas, práticas experimentais, resolução de problemas, dentre outros.

2.1 A Matemática no Ensino Médio

Ao ingressar no Ensino Médio o educando acabara de concluir o nono ano do Ensino Fundamental e de acordo com Elon Lages "[...] o estudante foi exposto ao conhecimento matemático mínimo necessário a todos os cidadãos [...]". O que vemos com os resultados das avaliações externas é que esses alunos chegam ao Ensino Médio, muitas vezes sem o preparo mínimo, mas reconhecemos que ele foi exposto aos conteúdos. A partir daí a orientação dos estudos em matemática no Ensino Médio se dá via Orientações Curriculares para o Ensino Médio, PCNEM, PCN+ e as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, que são documentos que organiza e orienta o Ensino Médio no país.

Segundo o PCN+ no Ensino Médio "[...] a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza"(BRASIL, 2002, p. 111). Sendo assim, o ensino de matemática não poderá ficar preso a coisas obsoletas e inúteis, carregada de problemas desmotivadores e repetitivos que muitas vezes só servem para memorização, sem propósito e sem reflexão, de fórmulas e procedimentos técnicos. Por outro lado ela também não pode existir apenas como ferramenta de suporte para outras disciplinas perdendo com isso seu caráter de ciência. O que deve haver é um equilíbrio entre essas duas visões, enfatizando seu caráter científico com problemas instigantes dentro do seu próprio campo de estudo, características históricas, linguagem formal, definições e demonstrações e seu lado interdisciplinar com problemas contextualizados integrados e relacionados a outros campos do saber.

Para que o ensino atinga esse propósito, sabemos que as aulas deverão adquirir um outro significado. É necessário que o professor procure estudar novas metodologias de ensino que valorizem o contexto cultural dos educandos, seu papel histórico, o seu eu. Tudo isso atrelado ao fato de que a Matemática existe como ciência e esse fato não anula o seu modo de existir. O que se propõe é que essas metodologias devam favorecer o florescer e a beleza matemática, afinal a matemática está presente em quase tudo no Universo. A metodologia de modelagem matemática vem muito contribuir para essa significação (reconheço que a modelagem é uma atividade importante, mas deve caminhar ao lado de outras), no entanto é preciso está preparado, visto que ao se modelar um certo fenômeno ficamos atrelados a possíveis interpretações e variáveis do meio, que fogem do controle de alguns professores uma vez que presos ao livro didático, que traz as respostas no seu final, na situação modelada deferentemente essa resposta deverá passar por outro crivo. Nessa aspecto estudar a caracterização dos conteúdos matemáticos vem garantir que não incorramos nesse erro.

3 FUNÇÕES: BASE TEÓRICA

Neste capítulo serão abordados os conceitos teóricos relativo à funções e em particular a função afim, bem como será feito um relato histórico sobre sua origem. Serão abordados e demonstrados os Teoremas de caracterização das funções lineares e das funções afim, bem como discutido a importância desses teoremas para resolver problemas usando modelagem matemática.

3.1 Histórico sobre funções

O desenvolvimento do conceito de função surgiu de forma intuitiva a partir da necessidade do homem resolver problemas práticos onde encontrava-se a correspondência de valores distintos. Intuitivamente o conceito está diretamente relacionado com o processo de contagem sendo que o conceito nasceu a partir do momento em que cientistas passaram a estudar e descrever movimentos de forma quantitativa.

Intuitivamente, a ideia de função é muito antiga. A necessidade de realizar processos de contagem levou o homem primitivo a fazer associações ou correspondência entre objetos e animais. Segundo Eves,

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. (EVES, 2004, p. 25)

De fato, com a evolução gradativa da sociedade a necessidade da realização de contagem simples tornou-se algo inevitável, pois uma tribo precisava saber quantos eram seus membros, a um homem saber se o seu rebanho de animais estava diminuindo. Para se contar animais o homem podia: dobrar um dedo para cada animal ou fazer ranhuras em pedras ou osso. Desse modo percebe-se que existia uma ideia inicial de correspondência entre o desenho ou dobrar o dedo e os animais ou pessoas do grupo, ideia esta fundamental no conceito moderno de função.

Segundo Howard Eves é provável que os primeiros processos de contagem se baseava em registros simples e empregasse o processo de correspondência biunívoca. Percebe-se assim que mesmo sem ter sido construído uma definição de função o homem primitivo já utilizaria a sua ideia principal, ou seja a lei de correspondência.

De uma maneira geral a noção de função está compreendida, historicamente, em três momentos: Na Idade Antiga temos a noção de correspondência entre duas quantidades mas, não temos conceito formal. Na Idade Média visualiza-se as noções funcionais expressas por formas geométricas e mecânicas usadas na Física no estudo de movimentos, em que cada caso de dependência entre as variáveis era analisado por representação gráfica ou uma descrição verbal da situação, já no período moderno surge as expressões analíticas, sendo que somente no final do século XVII que o conceito de função está mais relacionado com o que conhecemos atualmente.

Apesar das manifestações de correspondência entre quantidades, presentes na antiguidade, não há registros, conhecidos atualmente, que indiquem que os povos antigos tenham criado uma noção geral de função ou quantidades variáveis. Na Mesopotâmia as noções de correspondência são apontadas em tábuas de números que mostram relações entre números.

Na Grécia antiga é observado o surgimento da matemática demostrativa e a noção de funcionalidade aparece ligado a fenômenos naturais, tendo destaque nesse período a escola pitagórica. A contribuição de Pitágoras no estudo de música mostrando as relações entre intervalos musicais e frações de números inteiros, mostra um desenvolvimento da ideia de correspondência que contribui para concepção de função. Aqui também vemos uma noção intuitiva da mesma. No período Alexandrino vemos surgir uma trigonometria associada a cordas e tabelas de valores com cálculos que corresponde ao que hoje chamamos de seno. Desse modo, todas essas demonstrações da ideia de correspondência de valores não demonstra que a ideia de função já era construída pelos povos antigos, visto que não há documentos históricos que comprovem esse fato.

Durante a Idade Média o conceito de função amadurecia e aparece pela primeira vez com Oresme[1] (1323 - 1382) que conseguiu encontrar uma equivalência lógica entre tabular valores e representar graficamente. "Ele propôs o uso de um gráfico para representar uma magnitude variável que dependesse de outra". (Disponível em:< `http://www.ime.unicamp.br/~calculo/history/oresme/oresme.html` >) essa representação era conhecida como latitude de formas. É possível que Descartes tenha sido influenciado por ele.

Galileu Galilei (1564 - 1642) utilizou grandezas físicas que se inter-relacionavam como uma maneira de modelar funções em seus estudos de movimentos de corpos. A partir desses estudos a noção de função foi impulsionada. Vale salientar que o interesse de Galileu era descrever algebricamente esses fenômenos sem se preocupar com as suas causas. Esse fato segundo (2000, p. 170) contribuiu a evolução do conceito de função. Uma de suas experiências deu origem a *lei do pendulo* [2]

A evolução do conceito de função encontra terreno fértil com Descartes[3] (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665) que através das bases teóricas da geometria analítica apresenta um método para representação de função (COURANT and ROBBINS, 2000, p. 171). Com Descartes temos um significativo desenvolvimento da noção de função, uma vez que,

[1]Nicole Oresme, matemático francês precursor na representação gráfica de uma função.

[2]O período de oscilação de um pêndulo independe da massa e é diretamente proporcional ao comprimento (FROTA, MORAES, 2001*apud* ALVARENGA *et al*, 2014, p.170)

[3]René Descartes nasceu em La Haye, Touraine, em 31 de março de 1596.

> Em *La Géométrie*, de Descartes, de modo completamente claro, é sustentada a ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas, correspondendo aos valores dados da outra. (OLIVIERA, 1997, P.18 *apud* ALVARENGA *et al*, 2014, p.171)

Coube aos matemáticos Isaac Newton (1642 - 1727) e Wilhelm Leibniz relacionar as funções com as equações algébricas e o desenvolvimento do calculo infinitesimal além de, pela primeira vez, usar um termo para as funções, que foi chamada de *fluentes* por Newton. Vale ressaltar que segundo (SOUZA and MARIANI, 2014, p. 1247) coube a Leibniz o uso da expressão *função*, no entanto não foi ele o responsável pela moderna notação.Vale salientar que ele foi o primeiro a falar sobre funções racionais, irracionais, algébricas ou transcendentes, também introduziu as palavras: constante, variável e parâmetro (2014, p.1247). .

A partir dai coube ao matemático Leonard Euler[4]. (1707 - 1783) o desenvolvimento essencial do conceito de função usando as ideias de Newton além de se o primeiro a tratar o calculo como uma teoria das funções. Para o mesmo, função só eram as contínuas e, no entanto já afirmava que a curva traçada a mão livre sem cantos também representava uma função. Nota-se ai um avanço, tendo em vista que as ideias de Descartes associava a função as curvas que eram representadas por expressões algébricas. Vale ressaltar que a notação $y = f(x)$ foi introduzida pelo mesmo.

O conceito de função também teve contribuição dos matemáticos Jean-Louis Lagrange (1736-1813) e D'Alembert (1717 - 1783). Em sua definição de funções Lagrange propõe que as mesma representam uma combinação de operações distintas sobre quantidades conhecidas com o intuito de se obter os valores de quantidades desconhecidas.

Nota-se que durante o século $XVIII$ não houve por parte dos matemáticos uma preocupação em formalizar o conceito de função, cabendo a Peter Gustav Lejeune Dirichlet a definição mais próxima da usada na atualidade, segundo (BOYER, 1974, P.405 *apud* MAGARINUS, 2013, P. 17),

> [...] se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo, que sempre é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é uma função da variável independente x.

Nota-se que a definição descrita é bastante próxima da aceita hoje, no entanto conceitos como conjunto Domínio e Contradomínio, ainda não são mencionados.

Outras contribuições foram dadas pelo matemático Giuseppe Peano (1858 - 1932) que propôs conceituar função como uma relação unívoca. Já no século XX um grupo de matemáticos franceses apresentaram em suas publicações a nova matemática

[4]Euler é, sem dúvida e de longe, o matemático que mais obras produziu em todos os tempos, cobrindo todas as áreas então conhecidas da Matemática e criando outras que não haviam sido sequer vislumbradas pelos seus antecessores. (GARBI, 2010, p. 242)

moderna que buscou formalizar o conceito de função incrementado a linguagem de conjuntos.

Portanto, percebe-se como o conceito de função foi evoluindo durante toda a história da humanidade, a medida que novos desafios e problemas eram impostos pela sociedade da época. Percebe-se também como a partir da contribuição de cada matemático o conceito foi ganhando forma e nos chega até hoje, assim percebe-se o conhecimento como algo construído socialmente.

3.2 Função

Diversas são as situações cotidianas, em outras áreas do conhecimento ou mesmo aplicadas dentro da matemática que o conceito de função está presente. Na secção anterior percebeu-se a evolução da ideia ao conceito de função. O conceito de função esta relacionado também ao de conjunto, aliás toda matemática atual é formada a partir da linguagem de conjuntos. Nesse trabalho não se discutirá a teoria dos conjuntos, mas falaremos o essencial para compreender o conceito moderno de função.

3.2.1 Conjuntos: uma ideia inicial.

Um conjunto (ou *coleção*) é constituído de objetos o qual chamamos de *elementos*. A relação entre um objeto e um conjunto é chamada de relação de pertinência. Desse modo, se um objeto a é um elemento do conjunto A dizemos que a pertence ao conjunto A e escrevemos $a \in A$ e caso contrário, dizemos que o elemento a não pertence ao conjunto A e escrevemos $a \notin A$. Dessa forma um conjunto A fica caracterizado quando se dá uma regra de modo que possamos determinar se um objeto qualquer pertence ou não a A.

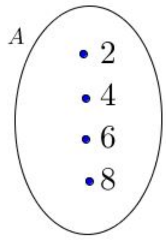
Podemos representar conjuntos usando as seguintes notações: a tabular, através de uma propriedade e por meio de diagramas. Embora não seja muito utilizada no meio acadêmico, no ensino básico a representação com diagramas facilita a visualização das operações de união e interseção. Vejamos abaixo um exemplo onde usamos essas representações.

Exemplo 1. *Seja A o conjunto constituído pelos números naturais pares menores do que 10.*

a) Forma tabular (Notação: $A = \{a, b, c...\}$)
   $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b) Dada através de sua propriedade (notação: $X = \{x; x \text{ goza da propriedade } P\}$)
   $A = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ é par e } x < 10\}$

c) Através de diagrama:



A vantagem em se usar a linguagem de conjuntos é que esse admite uma série de operações a qual podemos recorrer para ganharmos em facilidade, exatidão, e algo fundamental, é mais fácil o manuseio de conjuntos do que propriedade e condições, tendo em vista as operações que os mesmos possuem. Essas operações são:

(i) União (representada por $A \cup B$);
É o conjunto constituído pelos elementos de A mais os elementos de B, dizemos que se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$ e usamos a notação:
$A \cup B = \{\ x; x \in A \text{ ou } x \in B\}$

(ii) interseção (representada por $A \cap B$);
É o conjunto constituído pelos elementos que são ao mesmo tempo elementos de A e de B, e escrevemos:
$A \cap B = \{\ x; x \in A \text{ e } x \in B\}$

(iii) inclusão (representada por $A \subset B$).
Significa que A é subconjunto de B e nesse caso dizemos que todo elemento de A é também elemento de B.

Da relação de inclusão surge um conceito importante: A igualdade de conjuntos. Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e escrevemos $A = B$, quando todos os elementos de A são também elementos de B e vice versa. Usando propriedade antissimétrica da relação de inclusão temos: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Outra operação que podemos realizar com conjuntos e que é bastante útil na análise de funções é o produto cartesiano, que possui ideia central no conceito de par ordenado.

3.2.2 Coordenadas cartesianas

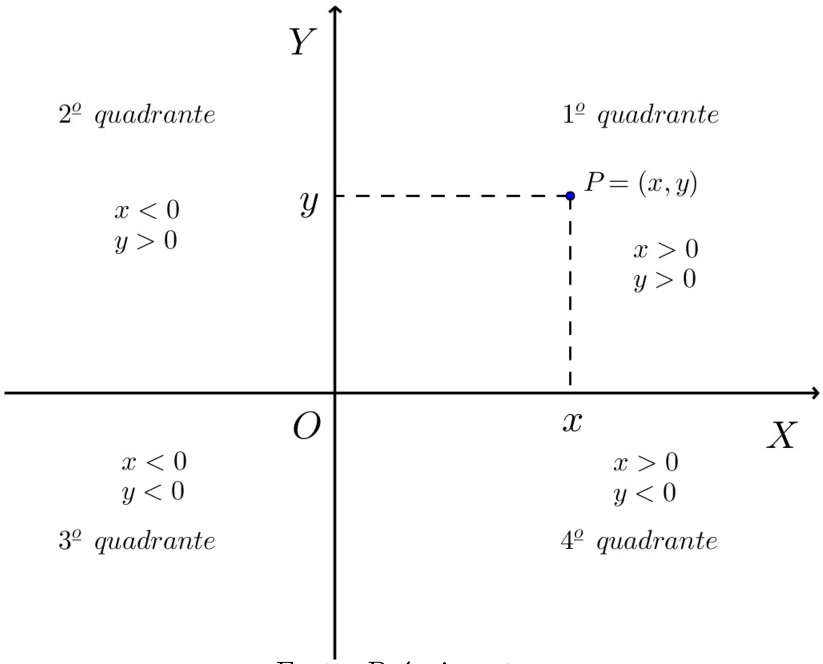
O sistema de coordenadas cartesianas, formalizado pelo matemático e filósofo René Descartes em sua obra *Géométrie* datada de 1637, traz como principal objetivo representar pontos ou posições no plano cartesiano, utilizando duas retas numeradas e perpendiculares entre si intersectando em um ponto chamado de origem. Assim cada ponto do plano fica associado a um conjunto de coordenadas, formando um par ordenado que pode ser assim definido.

Definição 3.2.2.1. *Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado de primeira coordenada de p ou abcissa e um objeto y chamado de segunda coordenada de p, ou ordenada.*

Estabelecemos ainda que dois pares ordenados $p = (a, b)$ e $t = (c, d)$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Ao introduzir o conceito de coordenadas cartesianas no plano Euclidiano passa-se a reapresentar cada ponto desse plano por uma par ordenado (x, y). Os seus elementos podem ser representados quando se toma nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY que se intersetam no ponto O, que é a origem do sistema cartesiano e possui coordenadas $(0, 0)$, conforme figura 1 abaixo.

Figura 1 – Sistema de coordenadas cartesianas



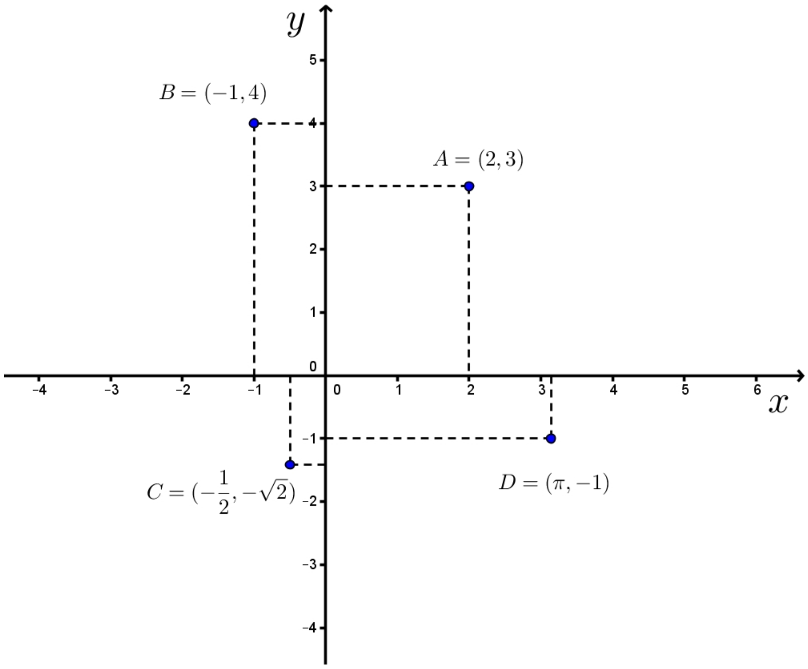
Fonte: Próprio autor.

O eixo OX é chamado de eixo das abscissas e o eixo OY é chamado eixo das ordenadas. Esses dois eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas de quadrantes conforme figura 1. Vale salientar que em cada quadrante o sinal das abscissas e ordenadas variam conforme mostra a mesma figura. Nesse caso a abcissa do ponto P é o número real x que é a projeção ortogonal de P sobre o eixo OX e a ordenada de P é o número real y que é a projeção ortogonal de P sobre o eixo OY. A todo par ordenado (x, y), x é chamado de abscissa do ponto P e y é chamado de ordenada do ponto P.

Exemplo 2. *Represente graficamente os pontos* $A = (2,3)$, $B = (-1,4)$, $C = \left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$, $D = (\pi, -1)$, *no plano cartesiano.*

A represetação está na figura abaixo.

Figura 2 – Localização de pontos no sistema de coordenadas cartesianas



3.2.3 Produto Cartesiano.

O produto cartesiano pode ser assim definido:

Definição 3.2.3.1. *Dado dois conjuntos* A *e* B, *chamamos de produto cartesiano e representamos por* $A \times B$ *o conjunto formado por todos os pares ordenados* (a, b) *cuja primeira coordenada pertence a* A *e segunda coordenada pertence a* B *e representamos por:*
$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$

Exemplo 3. *Sejam os conjuntos* $A = \{-1, 0, 1, \}$ *e* $B = \{3, 5, 7\}$, *determinar:*

a) $A \times B$

Para determinar o conjunto $A \times B$, basta tomar todos os pares ordenados (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Desse modo:

$$A \times B = \{(-1,3), (-1,5), (-1,7), (0,3), (0,5), (0,7), (1,3), (1,5), (1,7)\}$$

b) $B \times B$ ou B^2.

Para descrever o conjunto $B \times B$, é suficiente listar todos os pares ordenados (x, y)

onde $x, y \in A$. Assim,

$$B \times B = \{(3,3),(3,5),(3,7),(5,5),(5,3),(5,7),(7,7),(7,5),(7,3)\}$$

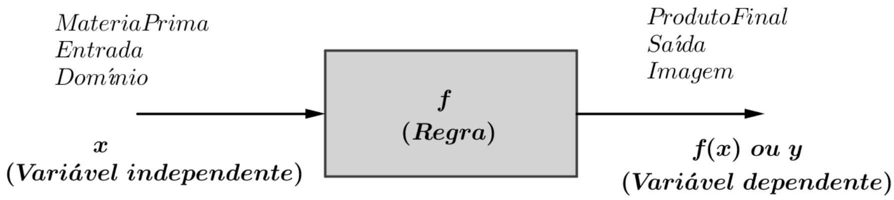
Dessa forma podemos entender o produto cartesiano de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$, como sendo uma representação algébrica do plano cartesiano.

Trata-se de um dos exemplos mais importante de produto cartesiano, visto que a partir desse caso particular deu-se origem a ideia geral. Pode-se também representar o produto cartesiano através de diagramas. Vale ressaltar que no ensino médio essa representação é bastante utilizada nos livros didáticos.

3.3 Funções

A ideia intuitiva de função está associada a uma correspondência, dependência ou transformação entre quantidades de valores (grandezas) ou resultado de um movimento (translação ou rotação). A vantagem de adotar essa ideia é que ficaríamos livres para pensar em outras ideias associadas a função. Podemos visualizar a noção de função como uma especie de "máquina"que transforma um valor de entrada, ou seja, a matéria prima x através de uma regra f em um $f(x)$, que podemos associar ao produto final. Ver na figura 3 um esquema representativo dessa ideia.

Figura 3 – Diagrama de uma função



Fonte: Próprio autor.

A definição de função poder ser dada da seguinte forma.

Definição 3.3.1. *Dados dois conjuntos quaisquer A e B, e uma regra (algorítimo, ou conjunto de instruções) que permite associar sem exceções e sem ambiguidade a cada $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$, $(x \to f(x))$, dizemos que uma função $f : A \to B$ é uma terna composta por esses três elementos $(A, B, x \to f(x))$.*

Usamos a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que $f(x)$ é o transformado, pela regra f, do elemento x. Os conjunto A e B são chamados respectivamente de Domínio e Contradomínio da função. É importante frisar que $f(x)$ é chamado de imagem do elemento x através da função f e embora não seja um dos principais elementos que definem função é mas bastante estudado pela sua importância em análise de gráficos entre outros, temos o conjunto imagem da função f, que é o conjunto de todos os $f(x)$ associados aos x

pertencente ao domínio.

Da definição 3.3.1 temos que se $x \in A$ e $y \in A$ de modo que $x = y$ então, $f(x) = f(y)$ no conjunto B. Desse modo, podemos concluir que duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$, ou seja, possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de associação.

Sobre o estudo de funções é importante destacar alguns tipo de função:

Definição 3.3.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e f uma função tal que $f : A \to \mathbb{R}$ é definida por $y = f(x)$. A função f será dita:*

(i) ***crescente*** *quando tomado $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ implicar em $f(x_1) < f(x_2)$;*
(ii) ***decrescente*** *quando tomado $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ implicar em $f(x_1) > f(x_2)$;*
(iii) ***monótona não-decrescente*** *se tomados $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ implicar em $f(x_1) \leq (x_2)$;*
(iv) ***monótona não-crescente*** *quando tomados $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ implicar em $f(x_1) \geq (x_2)$.*

Quando falamos em função, normalmente os alunos do Ensino Médio pensam em fórmulas algébricas, como se somente essas as definissem. No entanto, podemos associar funções com outros exemplos, onde o conjunto do domínio não precisa necessariamente ser definido com números ou possuir uma quantidade finita de elementos. Esse conjunto pode ser infinito ou representar outras situações. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4. *Seja A o conjunto formado por n substâncias químicas, com $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f : A \to \mathbb{R}$ a regra que associa a cada substância química x a sua densidade [5].*

Esse exemplo pode ser analisado pelos alunos do 1º ano, pois, o assunto referente a substância e densidade é visto na disciplina de Química da referida série. A relação em destaque representa uma função, pois, o conjunto do domínio e o do contradomínio estão bem definidos e não há ambiguidades ou exceções à regra, uma vez que toda substância possui uma densidade característica e a mesma é única, ou seja, uma mesma substância não pode possuir duas densidades diferentes sob mesma pressão.

Exemplo 5. *Sejam P o conjunto dos triângulos do plano Π e Q o conjunto das circunferências desse mesmo plano e $f : \Pi \to Q$ a regra que associa cada triângulo com a circunferência circunscrita ao mesmo.*

Essa relação representa uma função, pois, não há ambiguidade e nem exceções a regra, tendo em vista que todo triângulo possui uma circunferência circunscrita ao mesmo

[5] A densidade é definida como sedo a razão entre a massa da substância pelo seu volume.

e um mesmo triângulo não pode possuir duas circunferências circunscritas diferentes.

Vejamos agora um exemplo fora da realidade matemática, mas que ilustra o fato de nem sempre uma função possuir como regra uma sentença matemática.

Exemplo 6. *Seja E o conjunto de todos os estados da região nordeste, C o conjunto das cidades dessa mesma região e $f : E \to C$ a relação que associa a cada estado x a sua capital $f(x)$.*

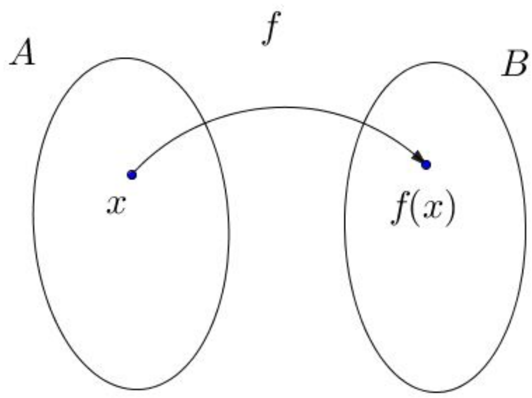
Essa relação também representa uma função, pois, todo estado está relacionado a uma única cidade (não há ambiguidade) que é sua capital e todo estado possui uma capital (não há exceções).

Exemplo 7. *Considere $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números naturais e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e a regra que associa a todo número inteiro x a sua raiz quadrada, ou seja $f(x) = \sqrt{x}$.*

Essa relação não representa uma função, visto que temos exceções (não existe valor real para raiz quadrada de número inteiros negativos).

Como estamos associando função com conjuntos podemos representar uma função por meio de diagramas e por meio de gráfico. Consideremos uma função $f : A \to B$ com $x \in A$ e $f(x) \in B$, representando essa função em forma de diagrama, conforme figura 4.

Figura 4 – Ilustração através de diagrama de uma função



Esse tipo de representação é bastante utilizado no Ensino Médio, visto sua simplicidade para se explicar funções. Através da representação em diagramas podemos identificar se uma determinada relação representa uma função ou não, bastando para isso verificar as seguintes condições:

i) É necessário que todo elemento $x \in A$ esteja associado a pelo menos um $f(x) \in B$, ou seja, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

ii) É necessário que cada elemento $x \in A$ esteja associado a um único $f(x) \in B$, ou seja, cada elemento $x \in A$ deve servir como ponto de partida para uma única flecha.

Desse modo fica fácil verificar se uma relação é ou não função bastando para isso verificar se do domínio partem setas duplas (ambiguidade) ou sobram elementos (existem exceções). Vejamos um exemplo:

Exemplo 8. *Seja o conjunto* $A = \{-3, -1, 1, 4\}$ *e* $B = \{2, 10, 17\}$ *e a correspondência entre* A *e* B *dada por* $y = x^2 + 1$*, com* $x \in A$ *e* $y \in B$*, faça o diagrama e diga se a relação é uma função de* A *em* B*.*

Solução:

Para $x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 + 1 = 10$ e o par ordenado será $(-3, 10)$.

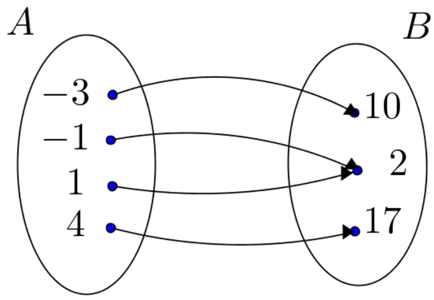
Para $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 1 = 2$ e o par ordenado será $(-1, 2)$.

Para $x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 + 1 = 2$ e o par ordenado será $(1, 2)$.

Para $x = 4 \Rightarrow y = (4)^2 + 1 = 17$ e o par ordenado será $(4, 17)$.

Fazendo a representação dessa relação em forma de diagrama, temos:

Figura 5 – Exemplo 8



Pode-se observar através do diagrama acima que a relação dada representa uma função, tendo em vista que não há setas dupas (ambiguidade) e nem exceções. Como a relação trata-se de uma função podemos então determinar o conjunto do domínio que vamos denotar por D_f, do contradomínio e o conjunto imagem cuja denotação será $Im(f)$. Assim, temos:

$D_f = A = \{-3, -1, 1, 4\}$

$B = \{2, 10, 17\}$

$Im(f) = \{2, 10, 17\}$

Exemplo 9. *Seja o conjunto* $C = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $D = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ *e a correspondência entre* C *e* D *dada por* $y = 2x + 1$*, com* $x \in C$ *e* $y \in D$*, faça o diagrama e diga se a relação é uma função de* C *em* D*.*

Solução:

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2.0 + 1 = 1$ o par ordenado será $(0, 1)$.

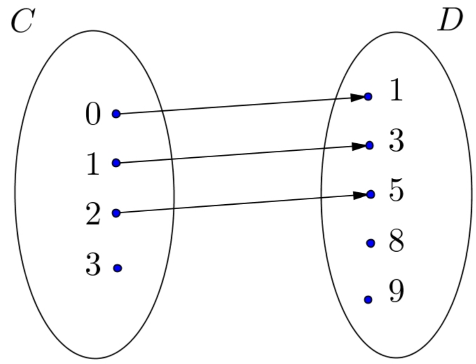
Para $x = 1 \Rightarrow y = 2.1 + 1 = 3$ o par ordenado será $(1, 3)$.

Para $x = 2 \Rightarrow y = 2.2 + 1 = 5$ o par ordenado será $(2, 5)$.

Para $x = 3 \Rightarrow y = 2.3 + 1 = 7$ o par ordenado será $(3, 7)$.

Fazendo a representação através de diagramas, temos:

Figura 6 – Exemplo 9



Portanto a relação não expressa uma função de C em D, pois, o elemento 3 está relacionado ao número 7 no entanto $7 \notin D$. Dessa forma o elemento 3 não está associado a nenhum elemento do conjunto D, o que mostra haver exceções.

3.3.1 Gráfico de uma Função

Outra forma importante de se representar uma função é através de seu gráfico. A vantagem de se representar usando gráfico é que fica mais fácil de perceber seus atributos e seu comportamento geral, como por exemplo: estudo sobre crescimento ou decrescimento, pontos de máximo ou mínimo, raízes, continuidade, dentre outros. Desse modo o gráfico de uma função apresenta informações importantíssimas sobre o comportamento geral da mesma para possíveis análises e previsões futuras.

Defini-se gráfico de uma função da seguinte forma.

Definição 3.3.1.1. *O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto G_f do produto cartesiano $A \times B$, constituído pelos pares ordenados (x, y) com $y = f(x)$ onde $x \in A$ e $y \in B$. Em linguagem de conjunto*

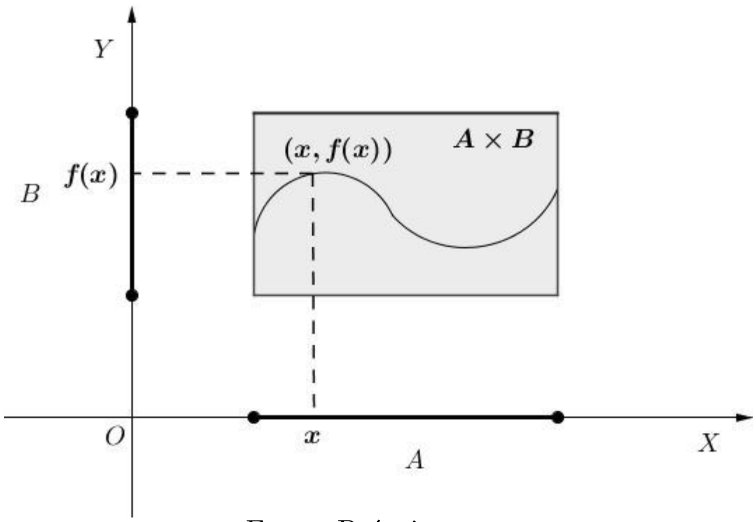
$$G_f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}$$

Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ represente o gráfico de uma função $f : A \to B$, é necessário e suficiente que G atenda as seguintes condições: Para cada $x \in A$ exista um único ponto representado pelo par ordenado $(x, y) \in G$ onde a primeira coordenada seja x; Se $P = (x, y)$ e $Q = (x, y^{'})$ são pares ordenados que pertencem a G com a primeira coordenada igual a x, então $y = y^{'}$, ou seja os pontos são iguais.

Da condição vemos que não pode haver ambiguidade para um $x \in A$, para que um conjunto G seja gráfico de uma função f. Podemos visualizar esse esquema na figura

7.

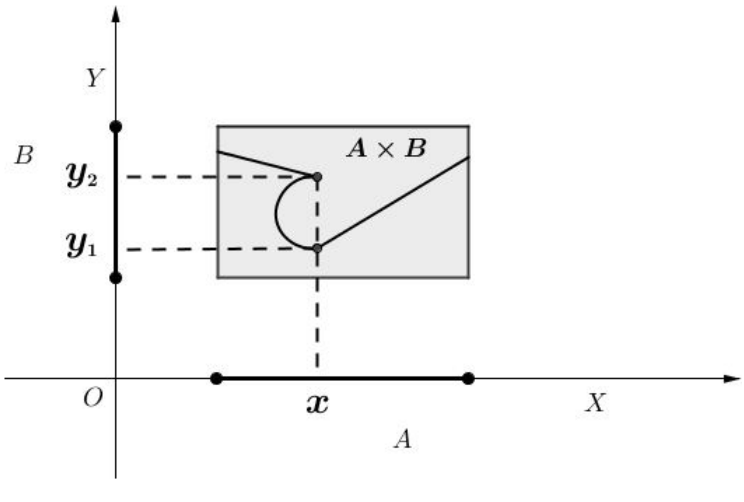
Figura 7 – Representação do gráfico de uma função



Fonte: Próprio autor

Na figura acima, o retângulo representa o produto cartesiano de $A \times B$, a curva representa uma função pois para todo $x \in A$ tem-se um único elemento $f(x) \in B$. Temos nesse caso que o domínio da função é o conjunto A e o contradomínio da função é o conjunto B. Observemos agora a figura a seguir:

Figura 8 – Representação de uma relação que não é função



Na figura 8 o elemento $x \in A$ está associado a dois elementos de B, y_1 e y_2 nesse caso está ocorrendo uma ambiguidade e portanto a relação não representa uma função $f : A \to B$.

3.4 Função Afim

Diversas são as situações problemas presentes no cotidiano, em outras áreas do conhecimento e na própria matemática que podemos modelar utilizando funções, e em especial por sua simplicidade, a função afim. O fato é: como saber se numa determinada situação problema o modelo matemático a ser usado é representado por uma função afim ou outra função? A maneira de sanarmos esse questionamento é, compreender a caracterização das funções, pois dessa forma saberemos em que situações elas se aplicam.

Definição 3.4.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita afim quando existem constantes a e b pertencentes ao conjuntos dos números reais ($\mathbb{R}$) tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Conforme as constantes de a e b assumem valores reais podemos ter alguns casos particulares de funções, vejamos:

(*i*) Função identidade é toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $a = 1$ e $b = 0$.
Nota-se que a função identidade associa cada elemento x pertencente ao domínio da função a ele próprio.

(*ii*) Funções constantes são funções afins do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ com $a = 0$.

(*iii*) Funções lineares são funções afins do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$.
Esse tipo de função está associado a problemas de proporcionalidade

(*iv*) Funções translações são funções afins do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + b$, ou seja temos $a = 1$ e $b \in \mathbb{R}$.

O valor de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Quando $x = 0$ temos $f(0) = a.0 + b \Rightarrow f(0) = b$, esse valor às vezes é chamado o *valor inicial da função.*

O zero de uma função afim é todo valor x de seu domínio tal que $f(x) = 0$. Calculando esse valor temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ ax + b &= 0 \\ x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Como veremos agora, vamos analisar o gráfico de uma função afim. Para isso vamos provar o teorema 3.4.1. Sabemos que $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}; y = ax + b, x \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 3.4.1. *O gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ é uma linha reta.*

Demonstração. Sejam P_1, P_2, P_3 pontos que estão no gráfico de f. Mostremos que esses pontos estão em uma reta se, e so se são colineares. Para isso considere os pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b), P_2 = (x_2, ax_2 + b), P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ de forma que, sem perca de generalidade, $x_1 < x_2 < x_3$. Denotemos $d(P_1, P_3)$ como a distância do ponto P_1 ao ponto P_3, $d(P_1, P_2)$ como a distância do ponto P_1 ao ponto P_2 e $d(P_2, P_3)$ como a distância do ponto P_2 ao ponto P_3, temos:

Para que esses três pontos sejam colineares, é necessário e suficiente que *o maior dos três números seja igual a soma dos outros dois*[6], ou seja:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \tag{1}$$

Calculando essas distâncias separadamente, temos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)} \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \qquad \text{pois,} \quad x_3 > x_1 \end{aligned}$$

Logo $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

Executando os mesmos passos para o calculo da distância $d(P_1, P_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b - (ax_1 + b)]^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \qquad \text{pois,} \quad x_2 > x_1 \end{aligned}$$

[6]É axiomático que se numa reta um ponto C encontra-se entre A e B, então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Para maior aprofundamento ver (BARBOSA (2012))

Agora calculando a distância $d(P_2, P_3)$, usando os mesmo procedimentos descritos para $d(P_1, P_3)$, obtemos

$$d(P_3, P_2) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \qquad \text{pois, } x_3 > x_2$$

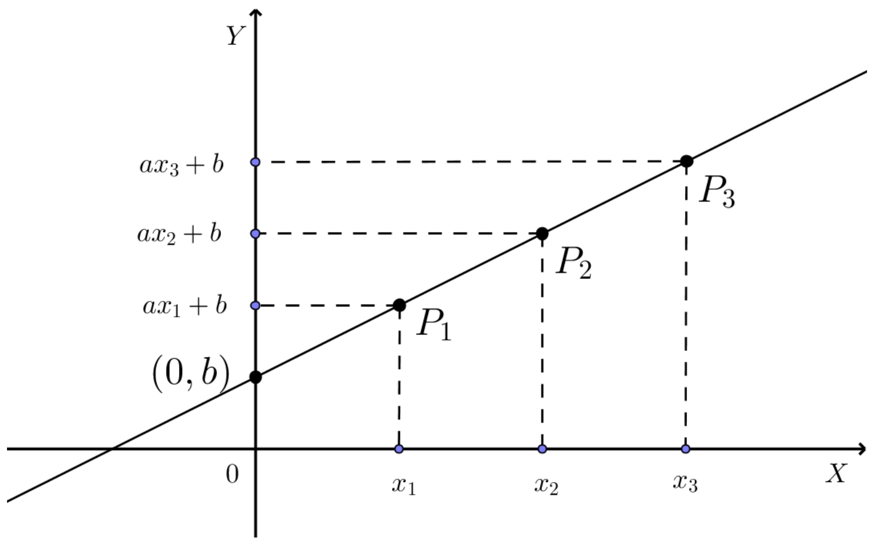
Calculando $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$, temos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \\ &= \sqrt{1 + a^2}[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)] \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \\ &= d(P_1, P_3) \end{aligned}$$

Segue então que, $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ é válido e portanto os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares mostrando assim que o gráfico da função afim é representado no plano cartesiano por uma reta. □

Dessa forma uma representação gráfica pode ser vista abaixo:

Gráfico 1 – Gráfico de uma função afim



Como foi demonstrado, o gráfico da função afim é uma reta sendo assim, podemos buscar uma interpretação geométrica para o coeficiente a e b. O coeficiente b representa o ponto onde a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo OY e o coeficiente a chama-se inclinação, em relação ao eixo OX ou coeficiente angular dessa reta.

No caso de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, podemos determinar os coeficientes a e b conhecendo apenas dois valores $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$. Essa ideia pode ser usada para demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 3.4.2. *Dados pontos arbitrários $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.*

Demonstração. Queremos calcular os valores dos coeficientes a e b. Dessa forma, ao substituirmos os valores das coordenadas do ponto na regra da função, temos:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases} \tag{2}$$

Assim basta resolvermos o sistema linear (2) nas incógnitas a e b. Para isso usaremos a *regra de Cramer*[7], onde:

$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$A^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$

Desse modo:

$detA = (x_1 - x_2) \neq 0$, pois $x_1 \neq x_2$, dai o sistema (2), possui uma única solução.

O $detA^{(1)} = y_1 - y_2$ e o $detA^{(2)} = x_1y_2 - x_2y_1$

A solução do sistema será:

$$a = \frac{det(A^{(1)})}{detA} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{e}$$
$$b = \frac{det(A^{(2)})}{detA} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$$

Como o sistema (2) admite uma única solução então, a e b bem definidos. □

Teorema 3.4.3. *Toda reta não-vertical r representa o gráfico de uma função afim.*

Demonstração. Tomemos dois pontos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ na reta r, por hipótese r é uma reta não vertical daí, $x_1 \neq x_2$ logo existe única função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Se r é uma reta não vertical, então para quaisquer $P_1, P_2 \in r$ tem-se que

[7]REGRA DE CRAMER: Seja $AX = B$ um sistema linear $n \times n$. Se $det(A) \neq 0$, então o sistema tem uma única solução dada por

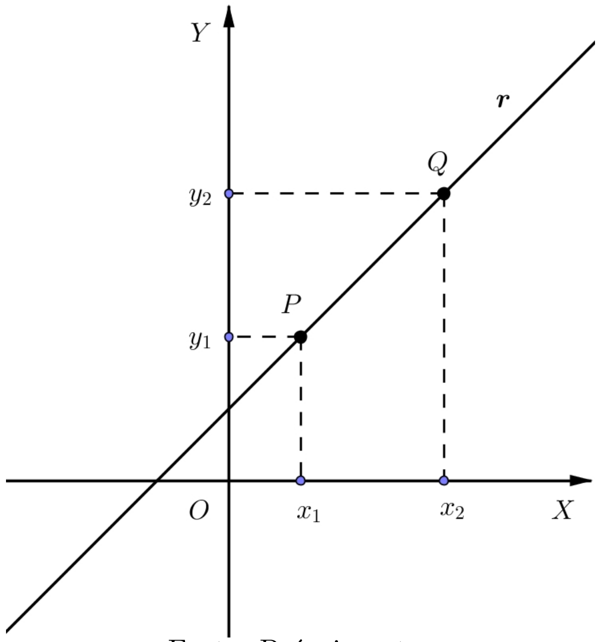
$$x_j = \frac{det(A^{(j)})}{det(A)}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

onde $A^{(j)}$ denota a matriz obtida de A substituindo a sua *j-ésima* coluna pela única coluna de B.

$x_1 \neq x_2$, logo existe uma única função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como o gráfico de f é uma reta que passa por $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ daí essa reta, que representa G_f, coincide com r. $\square$

Vejamos um esquema que podemos montar, observando o gráfico 2 abaixo.

Gráfico 2 – Representação gráfica da reta



Fonte: Próprio autor

Podemos concluir que se f é uma função afim G_f é uma linha reta não vertical e toda reta não vertical é gráfico de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ cuja equação é $y = ax + b$.

Assim podemos encontrar uma equação para a reta, quando conhecemos pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Para isso, precisamos dos valores dos coeficientes a e b. Esses valores representa a solução do sistema de equações (2), desse modo:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

Substituindo esses valores na equação da reta $y = ax + b$ temos,

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_2x - y_1x + y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_2x - y_1x + y_1x_2 - y_2x_1 + y_1x_1 - y_1x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_1x_2 - y_1x_1 + y_2x - y_2x_1 - y_1x + y_1x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_1(x_2 - x_1) + y_2(x - x_1) - y_1(x - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_1(x_2 - x_1) + (x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \\ &= y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Portanto uma equação da reta r que passa pelos pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ fica sendo:

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} \tag{4}$$

Pode-se encontrar a equação da reta que contém um ponto $P(x_0, y_0)$ e possui coeficiente angular a do seguinte modo:

Tomando um ponto genérico $Q(x, y)$ e substituindo esses valores na equação (4), temos:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{y_2 - y_1(x - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= y_0 + \frac{y_2 - y_0(x - x_0)}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

Como $a = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$, temos:

$$y = y_0 + a(x - x_0) \tag{5}$$

Essa equação representa a equação da reta com coeficiente angular a.

3.4.1 Função afim crescente e decrescente

Uma particularidade da função afim é que a mesma ou é crescente ou decrescente ou constante. Vejamos a análise dos casos:

Teorema 3.4.1.1. *A função afim é crescente se, e somente se $a > 0$.*

Demonstração. Considere os números $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de forma que $x_2 > x_1$ então, $x_2 - x_1 > 0$ logo[8], para que f seja crescente devemos ter:

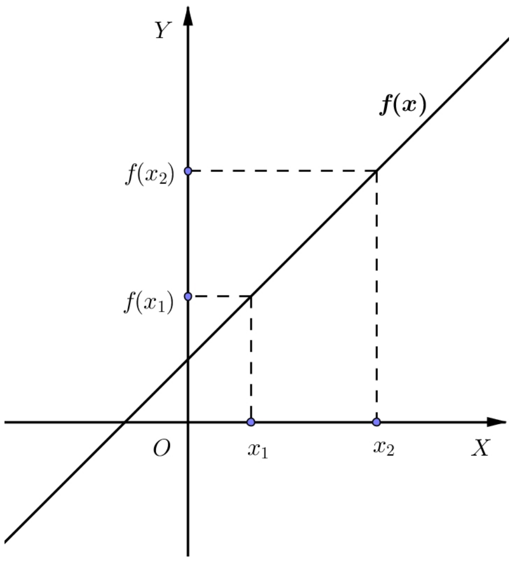
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &> 0 \\ ax_2 + b - (ax_1 + b) &> 0 \\ a(x_2 - x_1) &> 0 \end{aligned}$$

Como $x_2 - x_1 > 0 \Leftrightarrow a > 0$

□

Uma representação gráfica para uma função afim crescente pode ser vista no gráfico abaixo.

Gráfico 3 – Função afim crescente



Teorema 3.4.1.2. *A função afim é decrescente se, e somente se $a < 0$.*

A demonstração segue o mesmo roteiro da anterior.

Demonstração. Considere os números $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de forma que $x_2 > x_1$.

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) < 0$$

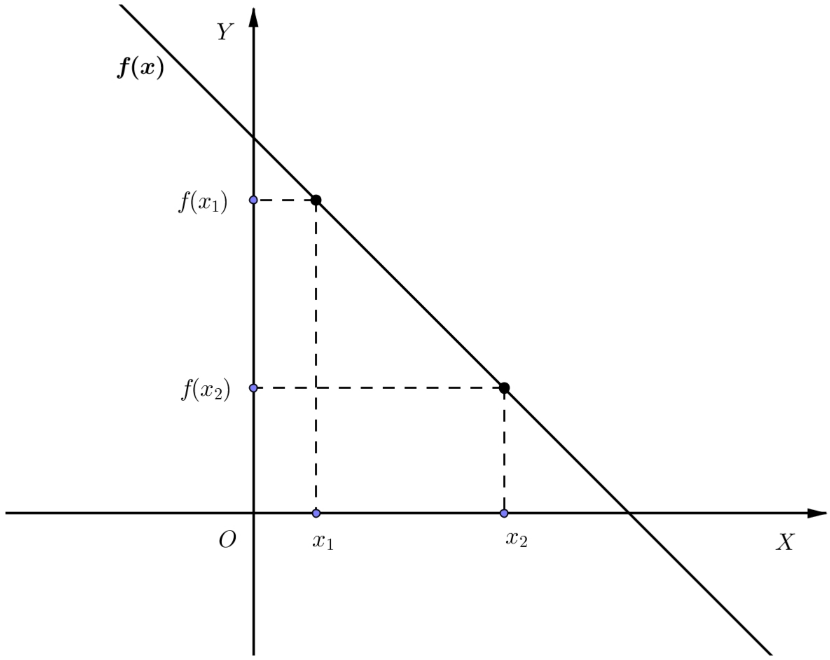
como $x_2 - x_1 > 0 \Leftrightarrow a < 0$

□

[8]Esse fato advêm das propriedades dos números reais, para maior aprofundamento do tema ver (LIMA (2012a))

A representação gráfica de uma função afim decrescente é vista no gráfico abaixo:

Gráfico 4 – Função afim decrescente



Antes de apresentarmos o teorema da caracterização da função afim, será necessário fazermos um estudo sobre a função linear.

3.4.2 Função Linear

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ é dita função linear. Esse tipo de função é uma das mais importantes dentre os diversos tipos de funções presentes na matemática e seu uso é potencializado no ensino básico. Podemos afirmar que sua empregabilidade está relacionado à modelos matemáticos referentes a proporcionalidade. No entanto, no Ensino Médio quando os conceitos de regra de três simples são tratados muitas vezes não são relacionados com o conceito de função linear pelos professores, desse modo fica fácil confundir-se seu conceito com o de função crescente. Diversos teoremas presentes na Física e Química exploram o conceito de função linear. Vale ressaltar que nessas disciplinas esses conceitos são tratados como proporcionalidade.

Vejamos alguns exemplos de como os livros didáticos de Física e Química exploram teoremas e em seguida escrever-se-á da forma matemática:

1º (*Princípio Fundamental da Dinâmica*) Se $\overrightarrow{F}$ é a resultante das forças que agem em uma partícula, então, em consequência de $\overrightarrow{F}$, a partícula adquire, na mesma direção e no mesmo sentido da força, uma aceleração $\overrightarrow{a}$, cujo módulo é diretamente proporcional à intensidade da força.

Expressão matemática: $\overrightarrow{F} = m.\overrightarrow{a}$

2º (*Lei de Hooke*) Em regime elástico, a deformação sofrida por uma mola é diretamente proporcional à intensidade da força que a provoca.
Expressão matemática: $F = k\Delta x$ onde F é a intensidade da força que provoca a deformação; k é a constante de proporcionalidade e Δx é a deformação sofrida.

3º (*Lei da Gravitação Universal*)O módulo da força de atração gravitacional é diretamente proporcional às massas dos objetos e inversamente proporcional ao quadrado da distancia entre seus centros.
Expressão matemática: $F = G.\dfrac{M_1.M_2}{d^2}$ onde: F força gravitacional; M_1 e M_2 são as massas dos objetos e d é a distancia entre os centros dos objetos.

Esses são alguns exemplos encontrados na Física, no entanto o número de aplicações referente proporcionalidade é muito grande estando presente praticamente em todas as disciplinas das ciências da natureza.

Definição 3.4.2.1. *Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$ tem-se que $f(cx) = cf(x)$, nesse caso dizermos que a proporcionalidade é direta ou $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$, com $c \neq 0$, sendo chamada de proporcionalidade inversa.*

Em diversas situações é fácil verificar se a função matemática aplicada ao modelo é linear, por exemplo: O valor pago para abastecermos de gasolina um determinado veículo é diretamente proporcional a quantidade de litros do mesmo colocados no tanque do veículo, nesse caso é fácil verificar que o coeficiente a representa o preço por litro de combustível. Em outras situações a tarefa pode não ser tão fácil assim. Desse modo, saber quando um determinado problema pode ser modelado como função linear, é fundamental para darmos legitimidade a sua solução.

Para determinarmos se uma função é linear usaremos o teorema de caracterização o qual enunciamos abaixo.

Teorema 3.4.2.1 (Teorema fundamental da proporcionalidade)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) *$f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.*

(*ii*) *Fazendo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dai, $f(cx) = cf(x)$ para todo $c, x \in \mathbb{R}$.*

(*iii*) *$f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, provaremos as seguintes implicações: $(i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Suponha que $f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Provaremos inicialmente que para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, teremos $f(rx) = rf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vejamos:

Se $r = \dfrac{m}{n}$, então $m = rn$. Assim, $f(nrx) = nf(rx)$, pois $n \in \mathbb{Z}$. Como $m = rn$, então $f(mx) = nf(rx)$. Por hipótese, $f(mx) = mf(x)$ então substituindo na equação anterior, temos:

$$mf(x) = nf(rx) \tag{6}$$

Dividindo ambos os membros da equação (6) por n, ficamos com:

$$\frac{mf(x)}{n} = \frac{nf(rx)}{n}$$

como sabemos que $r = \dfrac{m}{n}$ daí,

$$rf(x) = f(rx)$$

Concluímos assim que se a propriedade (i) vale para todo número inteiro, então ela valerá para todo número racional.

Seja $a = f(1)$ provaremos que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Faremos essa demonstração usando a técnica de *redução a um absurdo*[9].

Suponha, por absurdo, que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq ax$ (necessariamente irracional). Para melhor compreensão tomemos sem perda de generalidade que $f(x) < ax$, o caso em que $f(x) > ax$ é tratado da mesma forma. Analisaremos agora o sinal de a, donde segue: Como f é crescente, temos:

$$1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(0)$$

[9]"Para demonstrar uma sentença condicional Se H, então T por absurdo, admite-se que H e $\tilde{}T$ ocorram. Com essa suposição,deve-se deduzir uma sentença contraditória qualquer $\tilde{}Q \wedge Q$, chamada absurdo ou contradição."(FILHO, 2013, p.247)

Usando a hipótese (i) podemos calcular $f(0)$, vejamos:

$$f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$$

assim temos,

$$1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(0)$$

como $a = f(1)$ e $f(0) = 0$, segue:

$a > 0$, esse fato nos permite dividir a inequação $f(x) < ax$ por a, pois ele é positivo o que faz com que o sinal da inequação não mude, vejamos:

$$\frac{f(x)}{a} < \frac{ax}{a} \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < x$$

Sabemos que entre dois números reais quaisquer sempre existe um número racional r (ver demonstração no Apêndice), assim tomemos um $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \tag{7}$$

Multiplicando a equação (7) por a, temos:

$$\left(\frac{f(x)}{a}\right) a < ra < ax$$
$$f(x) < rf(1) < ax$$

Como $r \in \mathbb{Q}$ podemos usar a hipótese (i) ampliada para o conjunto dos racionais, dessa forma:

$$f(x) < f(r) < xa.$$

Mas isso é um absurdo, pois, f é crescente e tínhamos $r < x$ isso deveria fornecer $f(r) < f(x)$, mas encontramos $f(x) < f(r)$. Como havíamos suposto que $f(x) \neq ax$ e chegamos a um absurdo, portanto $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Dessa forma provamos que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Provemos agora que $(ii) \Rightarrow (iii)$;

Por hipótese sabemos que $f(x) = ax$ e $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$, assim temos que:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= ax + ay \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned} \tag{8}$$

Portanto $(ii) \Rightarrow (iii)$.

E para concluir a demonstração provemos que $(iii) \Rightarrow (i)$;

Por hipótese agora temos que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Deve-se provar que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Provaremos inicialmente que a proposição $P(n) : f(nx) = nf(x)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. A demonstração será feita por indução finita.

Caso base:

$$f(x) = 1f(x)$$

Tomando $x = y$ temos $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, ou seja, a proposição é verdadeira para $n = 2$. Suponhamos que $P(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ seja verdadeira, ou seja:

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + ... + x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(x) + f(x) + ... + f(x)}_{n \text{ vezes}} = nf(x)$$

Mas, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, daí:

$$f[(n+1)x] = f[nx + x] = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Logo $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e pelo Princípio da Indução Finita $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que a proposição vale para todo $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq 0$.

Para $p = 0$ temos $f(0x) = f(0) = 0$. Assim podemos escrever $f(0) = f[(-x) + x] = f(-x) + f(x)$ donde segue:

$f(-x) + f(x) = f(0) = 0$ Somando $-f(x)$ em ambos os membros da igualdade temos:

$$f(-x) + f(x) - f(x) = -f(x) + 0$$

$$f(-x) + 0 = -f(x) + 0$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Se $p < 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = -n$.

$$\begin{aligned} f(px) &= f(-nx) \\ &= f[n(-x)] \\ &= nf(-x) \\ &= n.(-f(x)) \\ &= -nf(x) \\ &= pf(x) \end{aligned}$$

Desse modo verifica-se a validade da proposição $P(n)$ para todo inteiro. Assim provou-se que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Portanto mostramos que $(i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ e com isso provamos o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

$\square$

Certamente o teorema 3.4.2.1 é válido também quando a função f é decrescente. Nesse caso teremos $a = f(1)$ negativo. Esse número a também pode ser chamado de constante de proporcionalidade. Quando trabalha-se com grandezas que só podem ser medidas com números positivos como áreas, medidas de comprimento, massa, volume entre outras, o teorema 3.4.2.1 pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 3.4.2.2. *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, onde* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ *uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) *Fazendo* $a = f(1)$*, tem-se* $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$*. Dai,* $f(cx) = cf(x)$ *para todo* $c, x \in \mathbb{R}^+$.

(iii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

A demonstração segue o mesmo raciocínio da demonstração realizada no teorema 3.4.2.1. Esses teoremas permitem criar uma condição prática para verificar se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear sendo necessário portanto que:

(i) f seja crescente ou decrescente;

(ii) $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$ e no caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ basta verificar essa mesma condição só que para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.4.3 Caracterização da Função Afim

O teorema de caracterização da função afim, permite garantir se numa determinada situação problema o modelo matemático a ser usado representa uma função afim. Esse fato nos auxilia a não cometer erros, ao achar que toda função crescente ou decrescente é também afim. No Ensino Médio é comum encontrarmos alunos que pensam dessa forma, pois não tiveram contato com a ideia de caracterização das funções, visto que, esse assunto não é abordado nos livros didáticos de matemática. Também nota-se que, na formação do professor de matemática o mesmo, em muitos cursos de nível superior, não teve contato com a ideia de caracterização das funções, sendo então as resoluções de problemas pautados na experiência dos mesmos, visto que durante sua carreira docente tiveram contato com bastante problemas dessa natureza.

No entanto, a uma pergunta motivadora é: Como saber, numa situação problema que envolva aplicação matemática, qual função se adéqua ao modelo em estudo? E como garantir que essa função escolhida de fato satisfaz as condições impostas pelo problema? Segundo Elon Lages (2006) para sabermos qual tipo de função teremos que empregar para resolver uma situação problema, é necessário comparar as características do problema com as propriedades e características da função que queremos aplicar na resolução do mesmo. Para tanto, é necessário que se conheça os teoremas de caracterização para os tipos de função. Esse conhecimento dar suporte para aplicar satisfatoriamente e com alto poder de precisão a função que resolve o problema modelado.

Dentre todas os tipos de funções uma que tem grande aplicabilidade na resolução de problemas diversos, sejam em situações do cotidiano, ou das ciências como física, química, biologia, seja de áreas mais comuns como área financeira, produção x custo de produção, dentre outros se destaca a função afim. Nesse tipo de função vê-se que acréscimos iguais na variável independente gera variações iguais na variável dependente. No entanto dada uma situação problema como garantir que a mesma poderá ser modelada usando um modelo baseado numa função afim (modelo linear) ou outro tipo de função. Desse modo conhecer o teorema de caracterização da função afim torna-se indispensável para gerarmos modelos matemáticos precisos.

Quando o modelo matemático adequado é decidido, por via do teorema da caracterização, a solução do problema passa a ser de fácil compreensão e este passa a não oferecer muitas dificuldades. De fato, as dúvidas que podem ocorrer acontecem antes da escolha do modelo apropriado para a resolução do problema. Segundo Elon Lages, "Os alunos muitas vezes não sabem qual o modelo a empregar; os professores, frequentemente, conhecem a resposta por experiência mas nem sempre são capazes de justificá-las, mesmo no caso linear."(LIMA, 2007, p.113)

Percebe-se que os livros didáticos de matemáticas voltados para o ensino médio, não falam sobre a existência da caracterização das funções, o que torna uma expressão muito comum no meio discente: "Professor qual função se usa para resolver esse problema?". De fato o estudo das funções se prende a definição e exercícios mecânicos sobre cálculo de raízes, estudo de gráficos, entre outros, e os problemas que são propostos aos alunos aplicam o modelo de função que estão estudando no momento, ou seja, segue a didática do livro. A dúvida surge quando os problemas aparecem fora do contexto onde o assunto foi discutido. Desse modo é importante que o professor fale dos teoremas de caracterização das funções para os seus alunos mesmo sem as demonstrações, no entanto é importante que ele as tenha conhecimento, com relação a demonstração em sala de aula vai de acordo com o seu crivo, uma vez que o aluno precisa entender o porquê da caracterização e não a demonstração do mesmo.

Teorema 3.4.3.1 (Teorema de caracterização da função afim)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $x, h \in \mathbb{R}$. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \psi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, faremos uso do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, já visto e demonstrado anteriormente. Vamos admitir, sem perda de generalidade que a função f seja crescente, o caso em que f é decrescente é análogo.

Se f é crescente mostraremos que a função $\psi(h) = f(x+h) - f(x)$ também é crescente.

Calculemos inicialmente $\psi(0)$:

$$\begin{aligned}
\psi(h) &= f(x+h) - f(x)\\
\psi(0) &= f(x+0) - f(x)\\
\psi(0) &= f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}$$

Provemos agora que se f é crescente, então ψ também é crescente. Tomemos $h_1 < h_2$ isso mostra que $h_2 - h_1 > 0$. Temos:

$$\begin{aligned}
\psi(h_1) &= f(x+h_1) - f(x) \\
\psi(h_2) &= f(x+h_2) - f(x) \\
\psi(h_2) - \psi(h_1) &= f(x+h_2) - f(x) - f(x+h_1) + f(x) \\
&= f(x+h_2) - f(x+h_1) > 0
\end{aligned}$$

Pois, $x + h_2 > x + h_1$, portanto ψ também é crescente.

Calculemos agora $\psi(h+t), \forall h, t \in \mathbb{R}$.
Ora sabemos que

$$\begin{aligned}
\psi(h) &= f(x+h) - f(x) \\
\psi(h+t) &= f(x+(h+t)) - f(x) \\
&= f((x+t)+h) - f(x) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $f(x+t)$ no segundo membro da equação (9), temos:

$$\begin{aligned}
\psi(h+t) &= f((x+t)+h) - f(x) \\
&= f((x+t)+h) - f(x) + f(x+t) - f(x+t) \\
&= f((x+t)+h) - f(x+t) + f(x+t) - f(x) \\
&= [f((x+t)+h) - f(x+t)] + [f(x+t) - f(x)] \\
&= \psi(h) + \psi(t) \qquad (10)
\end{aligned}$$

Então pelo Teorema fundamental da proporcionalidade a função ψ é linear. Dessa forma fazendo $a = \psi(1)$ tem-se $\psi(h) = ah, \forall h \in \mathbb{R}$. Assim pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\psi(h) &= ah \\
f(x+h) - f(x) &= ah \qquad (11)
\end{aligned}$$

Tomando $x = 0$, tem-se que na equação (11) :

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= ah \\
f(0+h) - f(0) &= ah \\
f(h) - f(0) &= ah
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$f(h) = ah + f(0) \tag{12}$$

Fazendo $b = f(0)$ temos, $f(h) = ah + b$.

Substituindo x por h tem-se que a equação representa a mesma que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função afim.

□

A reciproca do teorema acima diz que: Se $f(x) = ax + b$ então, $f(x + h) - f(x) = ah$ não depende de x.

Demonstração. Por hipótese, $f(x) = ax + b$, assim:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= a(x+h) + b - ax - b \\ &= ax + ah + b - ax - b \\ &= ah \end{aligned}$$

□

Dizer que $f(x + h) - f(x)$ não depende de x significa dizer que acréscimos iguais de x produz acréscimos iguais para $f(x)$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 10. *Descreva uma função que relaciona a soma dos ângulos internos de um polígono com o número de lados desse polígono.*

Inicialmente pode se construir uma tabela com o número de lados de um polígono (que denotaremos por n) e a soma dos ângulos internos desse polígono (que denotaremos por S), para análise do comportamento e buscar uma regra que permita modelar o problema, ver tabela 1.

Nesta situação não está expresso que a função a ser modelada é afim ou de outro tipo, desse modo o que garante que a resolução estará correta será o teorema de caracterização dessas funções, que afirma: dizer que $f(x + h) - f(x)$ não depende de x significa dizer que acréscimos iguais de x produz acréscimos iguais para $f(x)$.

Observa-se que uma variação de uma unidade no campo "Número de lados do polígono" resulta variações de 180° na coluna "Soma dos ângulos interno". Outra forma de visualizar esse fato é que podemos somar angulos internos do polígono dividindo o mesmo em triângulos, uma vez que sabemos que a soma interna dos ângulos do triângulo é 180° basta multiplicar a quantidade de triangulos por 180°. Para avançar de um polígono de n lados para um de $n + 1$ lados basta acrescentar 180°. Desse modo a função atende a caracterização das funções afim, portanto uma regra para $S(n)$ poderá ser calculada com base em $S(n) = an + b$, cabendo agora calcular os valores de a e b.

Tabela 1 – Soma dos ângulos de um polígono

Número de lados do polígono	Soma dos ângulos internos
3	180°
4	360°
5	540°
6	720°
7	900°
8	1080°

Fonte: Próprio autor.

$$\begin{aligned} S(3) &= 180^\circ \\ 3a + b &= 180^\circ \qquad (13) \\ S(4) &= 360^\circ \\ 4a + b &= 360^\circ \qquad (14) \end{aligned}$$

Fazendo (14) menos (13), temos:

$$\begin{aligned} 4a + b - 3a - b &= 360^\circ - 180^\circ \\ a &= 180^\circ \end{aligned}$$

Agora basta substituir o valor de a em qualquer uma das equações (13) ou (14). Substituindo o valor de a na equação (13), temos:

$$\begin{aligned} 3.180^\circ + b &= 180^\circ \\ 540^\circ + b &= 180^\circ \\ b &= -360^\circ \end{aligned}$$

Portanto, uma função afim para a situação dada será $S : \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $S(n) = 180n - 360^\circ$. Uma observação seria que essa regra poderia ser demonstrada pelo Princípio da indução finita, porém nesse série os alunos não são apresentados a esse conteúdo.

3.4.4 Aplicações da Função Afim

A função afim é uma das funções mais aplicadas, seja na matemática ou em outras áreas do conhecimento. A seguir tem-se algumas dessas aplicações. Vale ressaltar que algumas dessas aplicações ainda não foram estudadas na 1ª série do Ensino Médio, no entanto é importante que os professores conheçam para citá-las com mais propriedade.

Funções afim e progressões aritméticas.

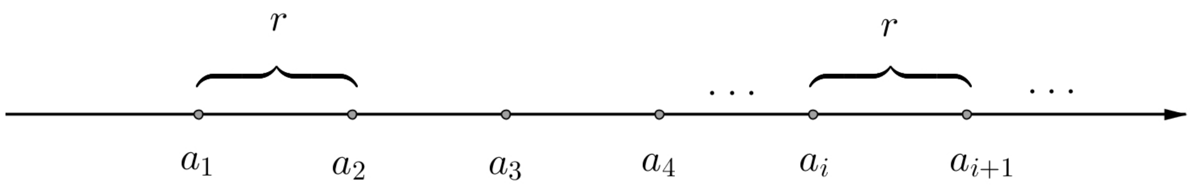
Progressões aritméticas são sequências onde o aumento de um termo para o seguinte são constantes. Esse aumento é chamado de razão da progressão. Dessa forma uma progressão aritmética descreve o comportamento de uma grandeza que em intervalos de tempos iguais sofre aumentos (ou diminuições) constante.

A sequência dos números $(2, 5, 8, 11, \cdots)$ formam uma progressão aritmética cuja razão é 3. Vejamos uma definição para progressão aritmética:

Definição 3.4.4.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante r. Essa constante r é chamada de razão da progressão aritmética.*

Vejamos na figura abaixo, onde cada ponto da sequência $a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots$ estão igualmente espaçados na reta numérica.

Figura 9 – Representação geométrica de uma PA na reta real



Portanto a diferença entre um termo e o seu anterior não depende da posição i em que o mesmo se encontra, ou seja:

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= r \\
a_3 - a_2 &= r \\
a_4 - a_3 &= r \\
&\vdots \\
a_{i+1} - a_i &= r \\
&\vdots \\
a_{n+1} - a_n &= r
\end{aligned}$$

Assim podemos encontrar uma função afim que associe a posição do termo n, $n \in \mathbb{N}$, com o seu respectivo valor $f(n) \in \mathbb{R}$, onde $f(n)$ define a fórmula do termo geral da PA. Assim, fazendo $a_n = f(n)$, podemos encontrar uma expressão para $f(n)$. Desse modo:

$$f(n) = a.n + b \tag{15}$$

$$f(n+1) = a.(n+1) + b \tag{16}$$

Subtraindo a equação (16) da equação (15), temos:

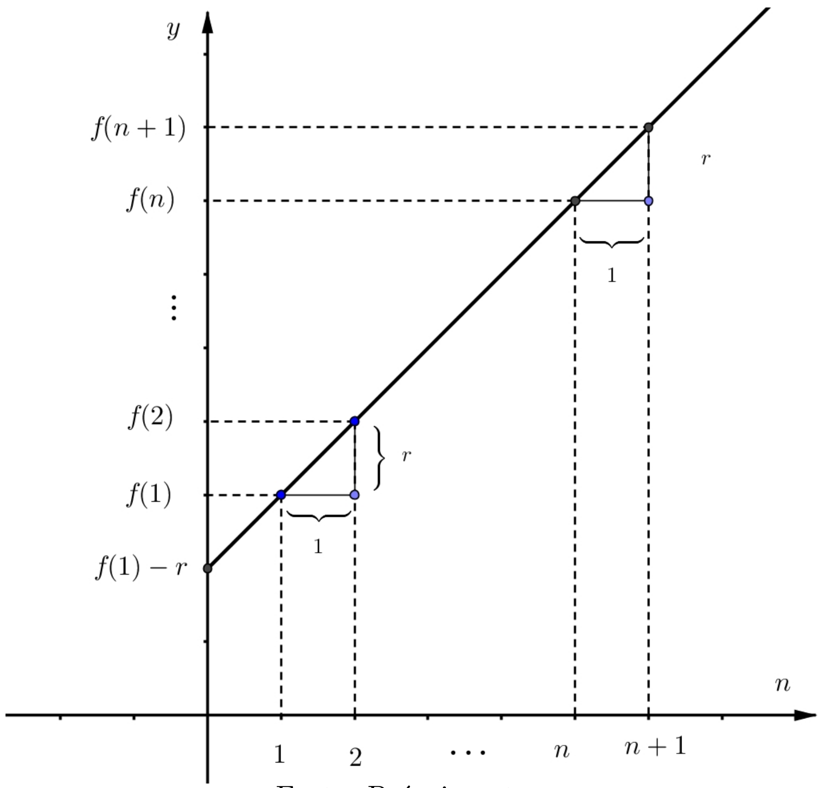
$$f(n+1) - f(n) = an + a + b - an - b \qquad \text{Mas } f(n+1) - f(n) = r, \text{ logo:}$$

$$r = a. \tag{17}$$

Portanto, substituindo o valor de $a = r$ na equação (15) ,temos: $f(n) = rn + b$. Vale salientar que, para encontramos o valor de b é preciso ter informações sobre o primeiro termo da sequencia. Assim,
$f(1) = a + b \Rightarrow b = f(1) - a$ mas como $a = r$ logo:
$b = f(1) - r$ onde $f(1)$ representa o primeiro termo da sequência.

Vejamos um esquema gráfico dessa função:

Gráfico 5 – Representação gráfica de uma PA



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma podemos fazer uma associação entre uma progressão aritmética $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$ e uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Fazendo $y_i = f(x_i)$ como $i = 1, 2, 3, \cdots$, percebe-se que esses ponto também estão igualmente espaçados e a razão é:

$$\begin{aligned}
f(x_{i+1}) - f(x_i) &= a.(x_{i+1}) + b - a.(x_i) - b \\
&= a.(x_{i+1}) - a.(x_i) \\
&= a.(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{como } x_{i+1} - x_i = r, \text{ logo} \\
f(x_{i+1}) - f(x_i) &= ar \qquad (18)
\end{aligned}$$

Isso mostra que no gráfico de uma função afim se tomarmos os pares

$$(1, f(x_1)), (2, f(x_2)), \cdots, (i, f(x_i)), \cdots$$

onde as abscisas são números naturais, então os valores $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_i), \cdots$ forma uma PA. Vale ressaltar que a reciproca desse teorema também é válida e para maiores aprofundamentos ver (LIMA *et al.*, 2006, p. 114).

Exemplo 11. *Considere a PA* $(-2, 1, 4, 7)$ *de razão* $r = 3$ *e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 3x - 2$. *Verifica-se que* $f(-2), f(1), f(4)ef(7)$ *também é uma PA.*

De fato:

$$\begin{aligned}
f(-2) &= 3.(-2) - 2 = -8 \\
f(1) &= 3.1 - 2 = 1 \\
f(4) &= 3.4 - 2 = 10 \\
f(7) &= 3.7 - 2 = 19
\end{aligned}$$

Observa-se que a sequência $(-8, 1, 10, 19)$, de fato é uma PA e possui razão $R = 9$ que poderia ser obtida pela equação (18), ou seja, $R = 3.3 = 9$.

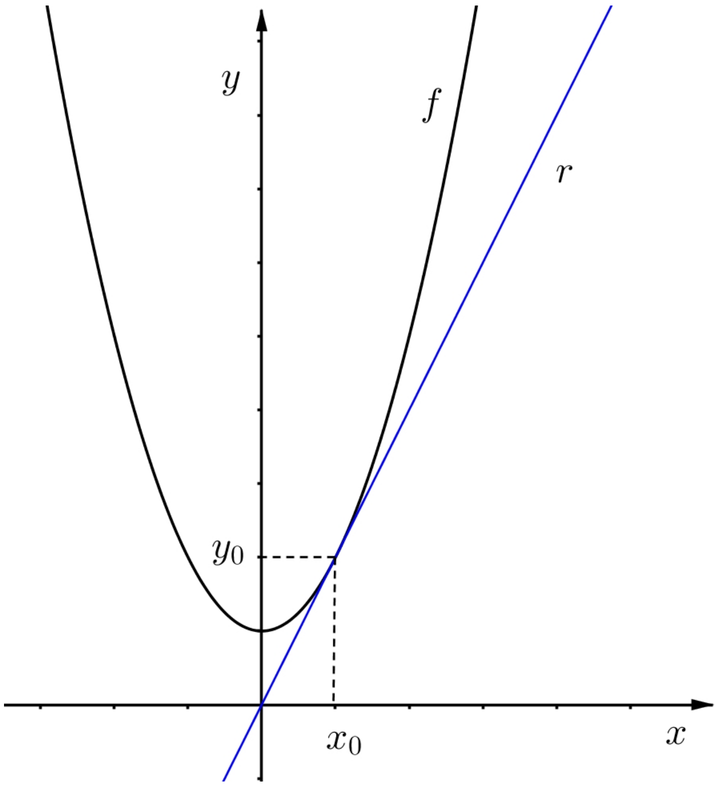
Dessa forma fazer a correspondência de função afim com progressões aritméticas torna o ensino dessas funções mais dinâmico e permite ao aluno visualizar esses “links”entre os conteúdos ensinados. Não defende-se nesse trabalho que a forma como o estudo das progressões são feitos seja alterado, mas sim incrementado com essas novas ideias. Além do mais quando for preciso modelar uma determinada situação problema o aluno consegue perceber as possíveis soluções.

Funções afim e análise da reta tangente a uma curva.

O estudo da derivada de uma função fornece informações importantes relacionadas a taxa de variação instantâneas e da reta tangente a uma curva qualquer do plano. A noção de derivada ainda não é vista em boa parte das escolas de Ensino Médio no Brasil, no entanto a noção mais simples poderia ser mostrada sem maiores dificuldades pelos alunos. Pode-se considerar o tópico relacionado com derivadas como um elo, ou seja, uma ponte entre a conclusão do Ensino Medio e o inicio da vida acadêmica pelos jovens.

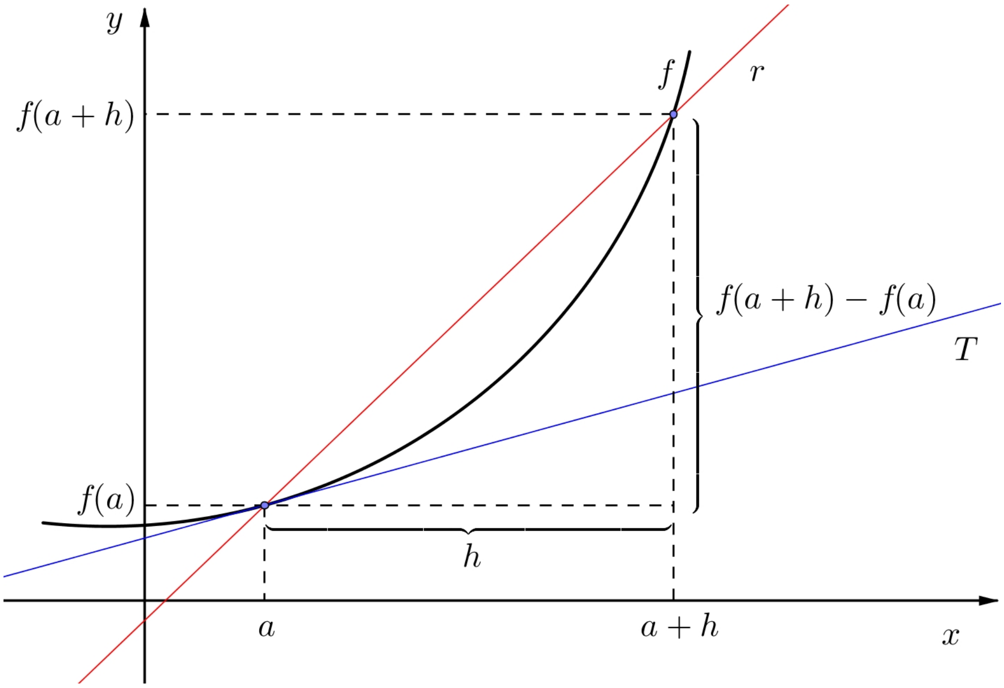
O principal problema que motivou o estudo das derivadas foi encontrar uma equação da reta tangente a uma curva em um ponto da mesma. Já sabemos do exposto anteriormente que a equação de uma reta está relacionada com uma função afim, de modo que a equação $y = y_0 + a(x - x_0)$ (5) representa sua equação característica. Desse modo, dado um ponto $P(x_0, y_0)$ pertencente a uma curva qualquer, para encontrarmos a equação da reta tangente precisamos encontrar o valor do coeficiente a, que nesse caso é chamado de coeficiente angular da reta. Uma ilustração desse fato é visto no gráfico abaixo.

Gráfico 6 – Representação de uma reta tangente a um ponto de uma curva



O coeficiente a pode ser calculado com a noção de derivada que pode ser assim entendida: Considere uma reta r que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$ de uma função f. Queremos encontrar o coeficiente angular da reta T que passa por $(a, f(a))$, ver figura 7. Vejamos essas informações no gráfico a seguir para melhor compreensão:

Gráfico 7 – Reta tangente a um ponto de uma curva



O coeficiente angular da reta r representado por m_r pode ser calculado facilmente por

$$m_r = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pode-se visualizar fisicamente o coeficiente m_r como a velocidade média de um corpo que se desloca da posição $f(a)$ para a posição $f(a+h)$ no intervalo de tempo h. Se h tende para zero percebe-se que o coeficiente angular da reta r tende a ser o mesmo do coeficiente angular da reta T no qual chamamos de derivada de f simbolizada por f' no ponto a, ou seja,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A derivada representa assim, a taxa de variação instantânea. Fisicamente seria a velocidade instantânea de um corpo no instante a.

Antes de definir derivada é preciso ter conhecimento sobre noções básicas de limites[10]. O professor pode mostrar a ideia usando software como: planilhas eletrônicas ou o Geogebra, que contribuem para que o aluno possa entender de forma dinâmica o conceito e o significado de limite.

Definição 3.4.4.2. *Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$, em p, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,*

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

[10]Para maior aprofundamento ler GUIDORIZZI (2001) ou a nível de ensino médio ver PAIVA (1995).

Tal número L, quando existe é único, será indicado por $\lim_{x\to p} f(x)$.

Pode-se definir derivada do seguinte modo.

Definição 3.4.4.3. *Seja f uma função e a um ponto do seu domínio. O limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

quando existe denomina-se derivada de f em a.

A derivada da função f no ponto de abscissa a indica-se por $f'(a)$, de modo que:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Seja uma função f e um ponto $(a, f(a))$ a reta que passa por $(a, f(a))$ e tem equação $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ é por definição a reta tangente ao G_f no ponto $(a, f(a))$.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 12. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^2 + 2x$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.*

Sabemos que a equação da reta procurada é da forma:
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ assim calculando $f(1)$ temos:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3.1^2 + 2.1 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Donde segue que a equação da reta fica sendo $y - 5 = f'(1)(x-1)$.

Só precisamos agora calcular o valor de $f'(1)$. Assim aplicando a definição de derivada temos:

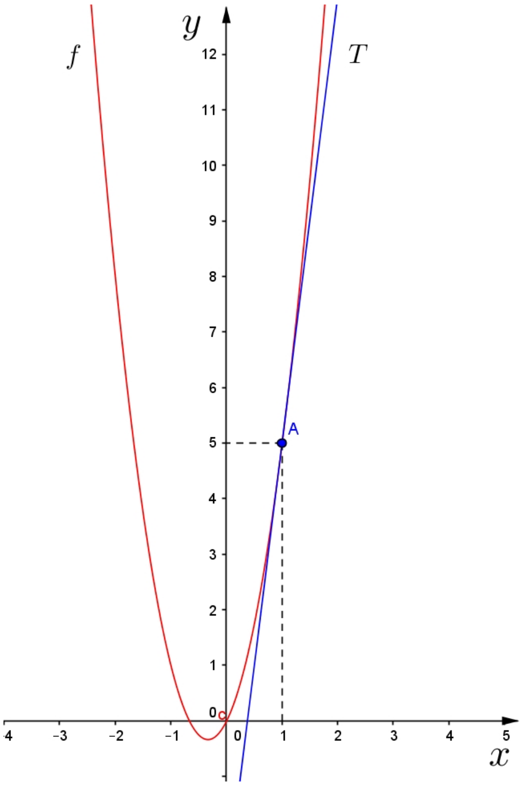
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2 + 2(1+h) - 5}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(1+2h+h^2) + 2 + 2h - 5}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 + 2h - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 8h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3h + 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Portanto a equação da reta tangente a função f no ponto $x = 1$, é descrita pela equação:

$$\begin{aligned} y - 5 &= f'(1)(x-1) \\ y - 5 &= 8(x-1) \\ y &= 8x - 3 \end{aligned}$$

Pode-se fazer uma simulação no Geogebra, para verificarmos o comportamento do gráfico. A figura abaixo mostra o gráfico da função f e da reta tangente T.

Gráfico 8 – Reta tangente a um ponto de uma curva



Aproximação do valor de uma função diferenciável por uma função afim: polinômio de Taylor de ordem 1.

O valor de uma função polinomial pode ser calculado de forma mais simples do que certas funções, como por exemplo as exponenciais, trigonométricas, logarítmica, entre outras, visto que os valores da função polinomial são mais fáceis de manipular, pois, podem ser calculados através de um número finito de adições e multiplicações. Desse modo, trocar uma função complicada por um polinômio torna os cálculos mais simples, e isso é possível quando a diferença entre o valor da função em um ponto e o da aproximação polinomial for suficientemente pequena.

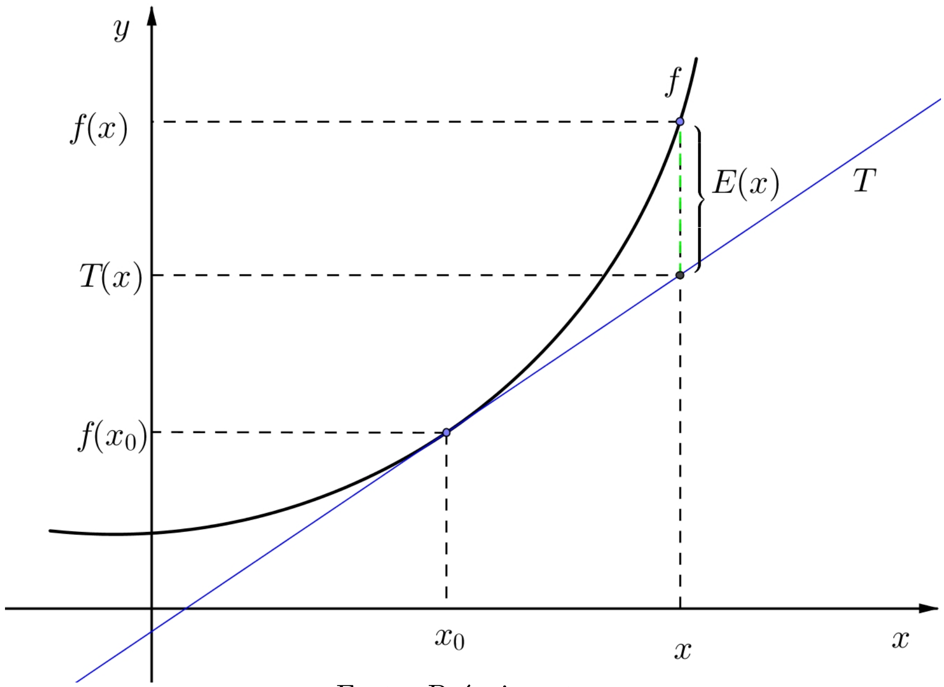
Uma dessas aproximações envolve a fórmula de Taylor, e a forma mais simples de se aproximar uma função de um polinômio é através da função afim. Desse modo, essa é uma aplicação muito eficiente desse tipo de função.

Seja f derivável em x_0. A expressão da reta tangente a f em x_0 é dada por:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x)(x - x_0) \quad \text{Fazendo } y = T(x)\text{, temos:} \\ T(x) - f(x_0) &= f'(x)(x - x_0) \\ T(x) &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

Vejamos o gráfico abaixo:

Gráfico 9 – Gráfico da reta tangente a uma função



Fonte: Próprio autor.

Pode-se perceber intuitivamente que a reta T é uma aproximação muito boa para a função f quando temos valores próximos de x_0. Vale ressaltar que $T(x_0) = f(x_0)$. Para cada x do domínio da função f considere $E(x)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$. Assim, tomando $x \neq x_0$ temos que:

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - T(x) \\ &= f(x) - [f(x_0) + f'(x)(x - x_0)] \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

como $x \neq x_0$, então podemos dividir ambos os membros da equação por $x - x_0$, daí:

$$\begin{aligned}\frac{E(x)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x)(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x)\end{aligned}$$

É fácil ver no gráfico acima que quando x tende a x_0 o erro $E(x)$ também tende a zero.

Calculando o $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{E(x)}{x-x_0}$, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{E(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x)\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]-\lim_{x\to x_0}f'(x)\\ &= f'(x)-f'(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Dizer que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{E(x)}{x-x_0}=0$, significa que $E(x)$ tende a zero mais rapidamente do que $x-x_0$. Portanto, quando for muito difícil calcular valores de $f(x)$ podemos simplesmente calcular $T(x)$ e se tratar de um curso mais rigoroso podemos calcular o erro $E(x)$ dessa aproximação. O mais importante, a função $T(x)=f(x_0)+f'(x)(x-x_0)$ é a única função afim que goza da propriedade de o erro $E(x)$ tender a zero mais rapidamente que $x-x_0$, que pode ser demonstrado da seguinte forma.

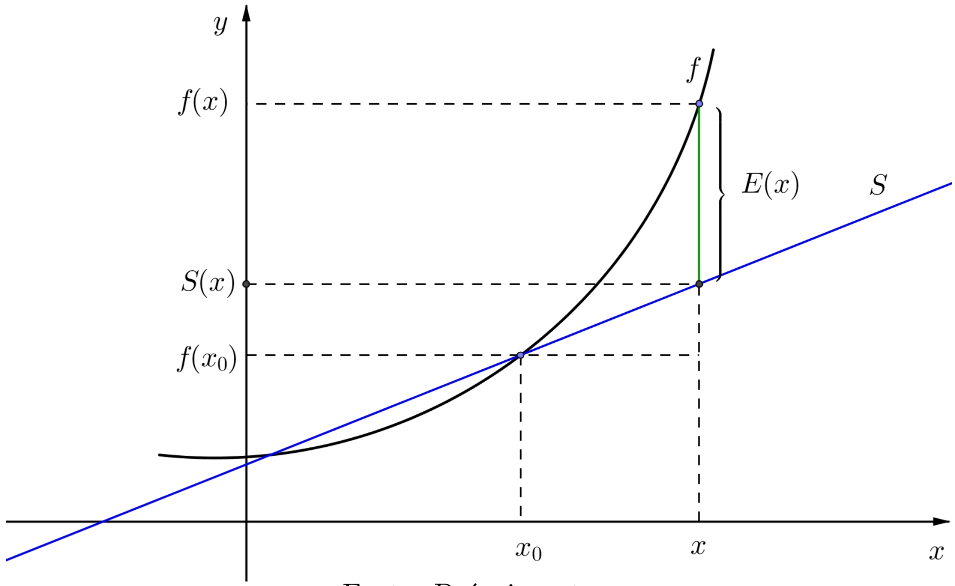
Demonstração. Seja $S(x)=f(x_0)+m(x-x_0)$ uma função afim que passa por $(x_0,f(x_0))$ com $m\neq f'(x_0)$. Ver gráfico 10.

Calculemos o $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-S(x)}{x-x_0}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-S(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]-\frac{m(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]-m\\ &= f'(x_0)-m\end{aligned}$$

Portanto $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-S(x)}{x-x_0}=0$ somente quando tivermos $m=f'(x_0)$, ou seja: somente a reta tem a propriedade de fazer $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{E(x)}{x-x_0}=0$. □

Gráfico 10 – Gráfico da reta secante a uma função



Fonte: Próprio autor.

O polinômio $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ denomina-se polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de x_0. Se deseja-se verificar o erro $E(x)$ da aproximação feita por $T(x)$ deve-se utilizar o teorema a seguir:

Teorema 3.4.4. *Seja f uma função derivável até ordem 2 em um intervalo I que contém x e x_0. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ entre x e x_0 de modo que:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$$

onde, $f'' = (f')'$

No teorema acima $\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 = E(x)$. Para ver a demonstração desse teorema consultar (GUIDORIZZI, 2001, p.467).

Vejamos uma aplicação:

Exemplo 13. *Encontre uma aproximação para* $\sqrt{16,005}$.

Solução:

Sabe-se que $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Tomando $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 16$ $\;(x_0$ é o valor na qual sabemos calcular $f(x_0))$. Assim, $f(x_0) = f(16) = \sqrt{16} = 4$.

Calculemos agora a derivada de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Calculando $f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$. Desse modo:
$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$T(x) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16)$ portanto para $x = 16,005$, temos:

$$\begin{aligned}
T(16,005) &= 4 + \frac{1}{8}(16,005 - 16)\\
&= 4 + \frac{1}{8}(0,005)\\
&= 4,000625
\end{aligned}$$

Portanto, um valor aproximado para $f(16,005)$ é $T(16,005) = 4,000625$. Para verificação do erro $E(x)$ que essa resposta apresenta basta aplicar o teorema (3.4.4).

Pode-se afirmar que Polinômio de Taylor de ordem 1 é uma excelente aplicação de funções afim associados. É fato que se os alunos do ensino médio tivesse contato com as noções básicas de derivadas e limites, muitos dos problemas de Física e Matemática seriam resolvidos de forma mais simples. Essa aplicação também é bastante útil em situações que envolvem modelagem de problemas, uma vez que, os problemas modelados podem apresentar funções mais complexas e calcular seu valor com aproximações satisfatórias é bastante eficaz.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA

A criação de modelos matemáticos para representar determinadas situações e problemas do cotidiano é bastante antigo. Alguns modelos criados pelo homem são: o modelo criado por Eratóstenes para calcular a circunferência da Terra (276 - 196 a.C), os que Galileu Galilei (1564 - 1642) desenvolveu para estudar a queda dos corpos, são alguns de vários exemplos presente no estudo de diversas ciências. Atualmente os modelos matemáticos ajudam a resolver problemas de diversas áreas do conhecimento, seja da Engenharia, Medicina, Informática, Comunicação, entre outras. Esses fatos retratam e evidenciam que a necessidade humana contribui para o desenvolvimento da Matemática.

Desse modo acredita-se que o gosto pela matemática pode alcançar um grau de desenvolvimento maior quando a mesma é motivada por problemas e interesses externos a ela. Vale ressaltar que existem problemas interessantes dentro da própria matemática que servem de estímulos para uma pequena minoria de alunos, normalmente aqueles que gostam de matemática. No entanto, em se tratando de ensino básico, desenvolver competências básicas no estudo da matemática é tarefa da escola, além do mais os alunos que concluírem essa modalidade de ensino podem ingressar em outras áreas do conhecimento em um curso superior.

No processo de ensino ainda prevalece uma postura rígida (sem dinamismo) de boa parte dos professores de matemática, ao assumir uma postura de que o conhecimento matemático é aceito somente no campo dessa disciplina. Perguntas do tipo "Pra que serve isso?", "Onde se aplica?", "O que motivou esse estudo?"não são aceitas e difundidas, nem no meio acadêmico e nem no ensino básico. Um questionamento que pode ser feito é: Como uma disciplina que é base para tantas outras é ensinada com tratamento isolado? É reconhecido a importância de se tratar a matemática com problemas voltados a própria matemática, no entanto a proposta desse trabalho não é abolir esse aspecto, mas sim sugerir uma nova ferramenta metodológica que possam juntas, dar um caráter mais dinâmico ao ensino.

Segundo Bassanezi "A matemática não deve ser considerada importante simplesmente por alguma decisão arbitrária ou porque mais tarde ela poderá ser aplicada. Sua importância deve residir no fato de poder ser tão agradável quanto interessante."(2014, p.16). Uma forma de tornar o ensino de matemática mais interessante é analisar situações problemas presentes em outras disciplinas ou mesmo no cotidiano do aluno e abordar nas aulas, fazendo analises e simulações, desenvolvendo assim o senso crítico e uma percepção social mais elaborada. Afinal de contas aprender está relacionado a adquirir conhecimento e não apenas informações.

A metodologia sugerida nesse trabalho é a **modelagem matemática** que consiste na arte de transformar situações-problema da realidade do meio em *modelos* *matemáticos*[11] que após resolvidos tem suas soluções analisadas na linguagem do mundo real. Nesse sentido a modelagem matemática é um processo dinâmico aliando teoria e prática buscando motivar o aluno a entender e agir sobre a realidade que o cerca. Cabe enfatizar que a modelagem é processo para elaboração de um modelo, portanto, está presente em qualquer área do conhecimento estando relacionado a desenvolvimento de projeto de pesquisa.

Uma das grandes vantagens de se aplicar a modelagem matemática como metodologia de ensino está no fato de combinar os aspectos lúdicos com o seu vasto potencial de aplicações. Ela contribui ao estimular o educando no direcionamento de suas aptidões para uma determinada formação acadêmica.

Segundo (BIEMBENGUT, 2014, p.21) na Matemática o processo de modelagem requer do modelador talento para pesquisa, conhecimento matemático além da capacidade de ver o fenômeno em estudo sob a ótica da matemática. Sob essa perspectiva percebe-se que a modelagem é algo que vai alem do "calcule "ou "Resolva", muito presente nos livros didáticos de Ensino Médio, ela requer uma postura de atuação diferente tanto por parte dos alunos como do professor.

A modelagem matemática é eficiente desde que saibamos que a mesma trabalha com aproximações da realidade e usá-la de forma indiscriminada tentando a todo custo adaptar qualquer situação da realidade a um certo modelo matemático incorre em um erro que pode ser mais destrutivo do que esclarecedor. De acordo com Bassanezi:

> O conteúdo e a linguagem matemática utilizados devem ser equilibrados e circunscritos tanto ao tipo de problema como ao objetivo que se propõe alcançar. Salientamos que, mesmo numa situação de pesquisa, a modelagem matemática tem várias restrições e seu uso é adequado se de fato contribuir para o desenvolvimento e compreensão do fenômeno analisado. (BASSANEZI, 2014, p. 25)

Via de regra o raciocínio para se entender o processo de modelagem matemática consiste em: dado um problema original presente em uma situação real é construído um modelo matemático que atenda os critérios descritos no problema, esse modelo será tratado de acordo com as regras, técnicas e teorias matemáticas e logo que se chegue a uma solução esse resultado é estudado na linguagem do problema.

A metodologia de modelagem matemática contribui com um ensino mais significativo, uma vez que procura transformar a sala de aula em um ambiente de pesquisa, que privilegie a construção e aplicação de conceitos, valorizando o respeito aos aspectos históricos e teóricos, de modo que o processo para se criar um modelo matemático obedece regras e critérios próprios da disciplina. Dessa forma esse trabalho propõe uma proposta de atividade, baseada na metodologia de modelagem matemática, com o objetivo de tornar mais significativo os conceitos matemáticos relacionados a função afim, intro-

[11]Um modelo é um conjunto de símbolos que representa algo. Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem algum fenômeno ou problema em questão

duzindo o conceito de caracterização da função como ferramenta para decidir o modelo a ser adotado.

Quando trabalha-se com modelagem matemática, buscamos criar modelos matemáticos que exprimam uma parte da realidade, para que possamos agir sobre ela de forma efetiva, entendendo o processo e realizando previsões sobre o mesmo. Assim o principal propósito de um modelo matemático é entender um determinado fenômeno e se possível fazer predições sobre o comportamento futuro.

Um modelo matemático não é uma representação perfeitamente precisa da realidade estudada. Um modelo bem realizado é capaz de simplificar a descrição do fenômeno de maneira que seja possível realizar cálculos matemáticos e desse modo tirar conclusões e realizar predições futuras apreciáveis. Dada uma situação problema do mundo real, para que o modelo que a represente seja o mais próximo da realidade estudada (BASSANEZI (2014)) sugeri cinco etapas a qual ele chama de As atividades intelectuais da modelagem, que são as seguintes: Experimentação, abstração, resolução, validação e a modificação.

✓ A **experimentação** consiste na obtenção dos dados envolvidos no problema, é a parte experimental. Nessa fase os dados são coletados para posterior analise. É importante o planejamento sobre quais dados obter, para facilitar o trabalho matemático.

✓ A **abstração** está relacionado com a formulação dos modelos matemáticos, com base nos dados observados. Nesta fase é feita uma *seleção das variáveis*, a formulação de problemas enfatizando a linguagem da área envolvida, a *construção das hipóteses*, que pode ser feita via observação dos fatos, experiência pessoal, comparação com casos e estudos já realizados, etc, e a *simplificação* que procura isolar o campo de estudo do fenômeno de modo que o problema possa ser tratado matematicamente e não perca as informações essenciais.

✓ A terceira fase consiste na **resolução** do modelo, e está atrelado ao grau de complexidade de sua formulação. Por vezes pode-se usar recursos computacionais, como planilhas eletrônicas, simuladores, etc para viabilizar a solução.

✓ A **validação** está relacionada ao processo de aceitação ou não do modelo sugerido. Nessa fase o modelo deve ser confrontado com dados empíricos comparando as soluções e possíveis previsões com os dados reais observados.

✓ A ultima fase consiste na **modificação** que está relacionada com a reformulação e melhoramento do modelo, tendo em vista que erros podem surgir durante o processo, tais como: hipóteses falsas, dados experimentais obtidos de forma incorreta, dados insuficientes, descarte de variáves importantes no processo ou erro no desenvolvimento matemático.

Conhecidas essas fases, a modelagem pode resultar na construção de um bom modelo, que segundo (BASSANEZI, 2014, p.30) “[...] permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com a capacidade de influenciar em suas mudanças.". De maneira geral a aplicabilidade de um modelo depende de como o mesmo foi desenvolvido e da realização das fases sugeridas acima de forma coerente.

Enquanto método cientifico, a modelagem matemática utilizada como projeto de pesquisa, pode contribuir segundo (BASSANEZI, 2014, p.32), para estimular novas ideias e descobertas, pode ser um método para se fazer interpolações,extrapolações e previsões, contribuir para otimização de recursos e principalmente ajudar a compreender certos fenômenos científicos ou sociais propiciando assim, um melhor entendimento da realidade.

Como estratégia de ensino-aprendizagem a modelagem contribui para a construção de uma ponte entre a abstração e a realidade dando mais significado aos conteúdos matemáticos. Desse modo a modelagem matemática contribuir para o ensino uma vez que pode despertar o interesse no aluno por conteúdos de matemática que os mesmos ainda desconhecem além de torná-los cidadãos mais críticos. Não defende-se nesse trabalho uma apologia ao uso da modelagem no ensino de matemática, visto que a mesma é uma ciência e como tal também deve procurar e cuidar de seus próprios interesses.

Alguns argumentos para a inclusão da modelagem matemática são: torna os alunos criativos, explorativos e habilidosos na resolução de problemas matemáticos; contribui para desenvolver senso crítico e formar juízos próprios; utilidade, pois usa-se matemática para resolver problemas em diversas áreas e situação reais; favorece o desenvolvimento da aprendizagem tendo em vista os processos aplicativos; e a modelagem cumpre os eixos norteadores do programa de Etnomatemática. Diante dos argumentos favoráveis também são indicados alguns argumentos que funcionam como obstáculos ao seu uso, entre eles podemos citar: não cumprimento do programa curricular, tendo em vista que a modelagem é um processo que depende de tempo, no entanto o ensino pode extrapolar os muros da escola; os estudantes acostumados com aulas expositivas e sem inciativa não se adaptariam fazendo com que as aulas acontecessem de forma mais lenta; falta de habilidade dos professores em trabalhar com modelagem, uma vez que, não é visto nos programas de graduação e devido a correria entre os locais de trabalho, provocado por baixos salários, ou mesmo medo de encontrarem-se em uma situação durante o processo que desconheça.

Segundo (BIEMBENGUT and HEIN, 2010, p.13) o processo de modelagem pode ser dividido em três principais procedimentos que são: Interação, Matematização e Modelo matemático.

✓ A **interação** está relacionado com o reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto a ser modelado.

✓ Por **matematização** entende-se a formulação do problema e a resolução do mesmo através do modelo encontrado.

✓ A ultima etapa refere-se a análise do **modelo matemático** bem como a interpretação da solução encontrada e por fim da validação do modelo.

Pode-se perceber que em sua essência os dois autores convergem no mesmo pensamento, apesar de situarem o processo de modelagem em procedimentos diferentes. No entanto vemos em BIEMBENGUT, um procedimento para o professor por em prática a modelagem matemática como metodologia de ensino. Nesse sentido o autor em questão sugere cinco passos que são: Diagnóstico, a escolha do tema, o desenvolvimento do conteúdo programático, orientação de modelagem e a avaliação do processo. Detalhando cada passo:

- ✓ **Diagnóstico**: consiste em o professor fazer levantamentos socioeconômico para conhecer a realidade e os interesses da turma; o grau de conhecimento que a turma apresenta em matemática; disponibilidade para trabalhos extraclasse; disponibilidade de recursos humanos e físicos como bibliotecas e laboratórios de informática na escola, ou outros que o professor achar conveniente.
- ✓ **Escolha do tema**: Eixo condutor da pesquisa, pode ser escolhido pelo aluno ou pelo professor. Quando escolhido pelo aluno pode proporcionar maior senso de participação, em contrapartida pode não ficar de acordo com o conteúdo estudado. De qualquer forma o professor deve conhecer o tema para que possa desenvolver o conteúdo programático em sala.
- ✓ **Desenvolvimento do conteúdo programático**: Nessa fase o professor deverá desenvolver o processo de modelagem bem como suas etapas, já descritas.
- ✓ **Orientação de modelagem**: Nessa etapa é fundamental que o professor faça o planejamento de sua carga horária para que possa orientar e acompanhar os alunos no processo de modelagem. Para isso o autor BIEMBENGUT and HEIN (2010) sugere as seguintes orientações: "escolha do tema, estudo e levantamento das questões, formulação, elaboração de um modelo matemático, resolução parcial das questões e exposição oral e escrita das questões.". Vale ressaltar que o tempo e o número de aulas utilizado em cada etapa fica a critério do professor.
- ✓ **Avaliação do processo**: O professor pode adotar um critério de avaliação que leve em conta aspectos subjetivo, ou seja a sua observação do processo (avaliando o empenho do aluno no tocante a participação, cumprimento das tarefas, espírito de equipe, nível de amadurecimento em debates) e aspectos objetivos, através de provas, exercícios, trabalhos entre outros.

Portanto, a implementação da modelagem como metodologia de ensino depende em grande parte de condições físicas e estruturais da escola, preparo e audácia do professor para querer mudar sua prática além ter disponibilidade para pesquisa e vontade de fazer com que a Matemática saia de dentro da escola e antiga outros locais da comunidade.

4.1 Formulação de modelos

A origem e o tipo de dados obtidos na situação em analise é quem descreve e orienta o tipo de modelo a ser usado. Quando analisa-se situações que podem ser interpretadas com modelos matemáticos, e os dados numéricos obtidos não recaem em alguma função conhecida e bem determinada, podemos através das curvas de regressão verificar se uma relação funcional $y = f(x)$, é adequada para fazer previsões para o comportamento de y quando x escapa do intervalo pesquisado.

Uma das curvas mais importantes e utilizadas em modelagem de dados matemáticos é a curva de regressão linear. Sua importância é muito significativa uma vez que diversas relações entre grandezas, presentes nas diversas áreas do conhecimento, tem esse formato quando efetuamos uma modelagem, no entanto sua principal importância reside no fato de que elas constituem excelentes aproximações de relações entre variáveis que de outra maneira, seriam difíceis de se expressar através de equações matemáticas.

Uma regressão também chamada ajuste de curvas, é um recurso utilizado para expressar uma tendência entre duas variáveis através de uma equação matemática, uma variável dependente y relacionada com uma variável x chamada de variável independente. Uma curva de regressão é útil para formulação e simplificação de dados e observação de relação entre elas, para melhor compreender o fenômeno analisado e fazer previsões de tendências.

De acordo com o problema analisado podemos fazer regressões lineares, exponencias, quadráticas entre outros. E em cada um desses modelos (lineares, quadráticos, exponenciais, hiperbólicos e geométricos) pode ser ajustado com um modelo linear,enfatizando dessa forma sua importância.

4.1.1 Ajuste Linear

Um ajuste linear, ou regressão linear, é um modelo que relaciona uma variável dependente y com uma independente x usando para isso uma função real afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela equação $f(x) = ax + b$. De posse dos dados coletados pode-se ajustar uma reta para representar esses valores. O fato é: como ajustar essa reta de modo bem definido e que se tenha as melhores previsões para a variável y a partir de x? O processo atualmente mais aceito no meio acadêmico é o *método dos mínimos quadrados*, ver definição 4.1.1.1, e se deve ao matemático francês Adrien Legendre.

Para encontrarmos os valores dos coeficientes a e b da reta considera-se a quantidade dos n valores no qual para cada um temos um par ordenado das variáveis x e y, conforme tabela abaixo:

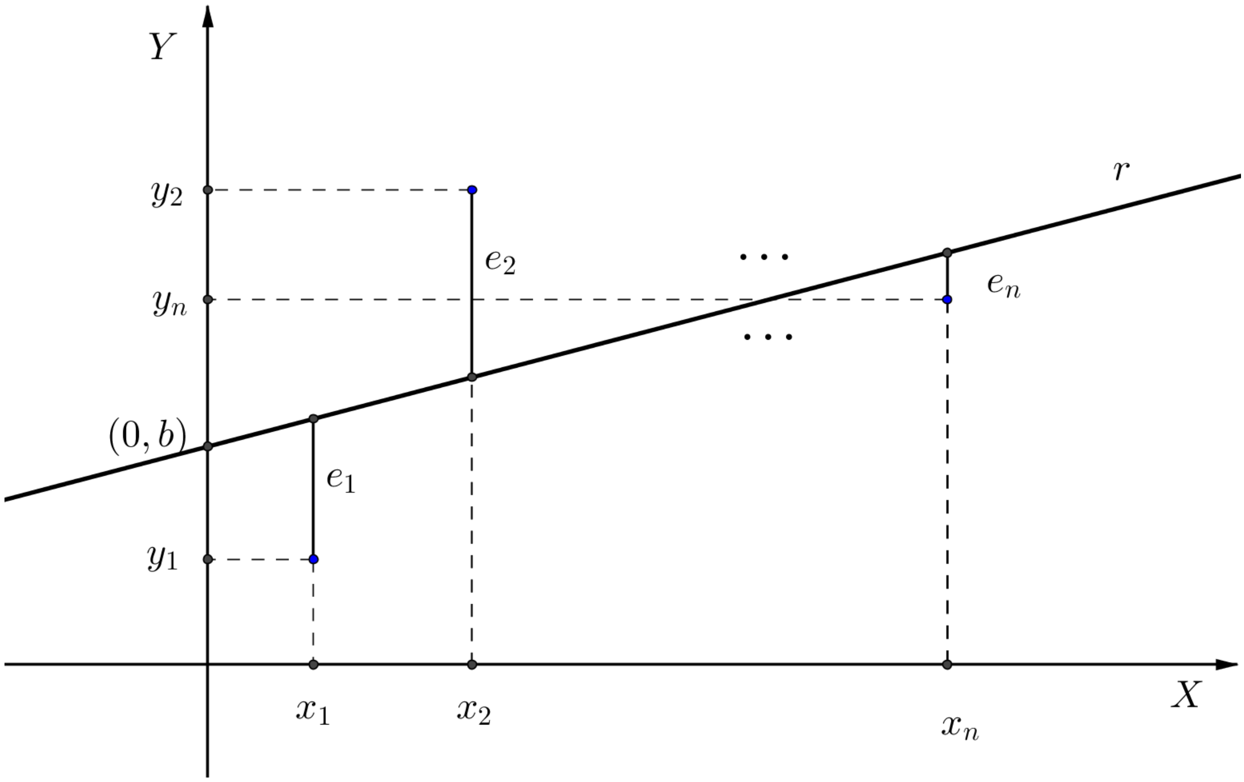
Tabela 2 – Distribuição de n valores analisados

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

Fonte: Elaborada pelo autor.

Construindo um diagrama de dispersão dos mesmos temos:

Gráfico 11 – Gráfico de disperção



No gráfico 11, r é a reta que minimiza a distância de cada ponto a mesma, desse modo essa reta funciona como um padrão para esses pontos. Essa reta ajusta os pontos observados para um modelo linear. Um dos métodos mais usados para ajuste de curva e estimação dos coeficientes de uma função polinomial e o método dos mínimos quadrados, cuja defição é a seguinte:

Definição 4.1.1.1. *Considere um conjunto de n valores observados $\{\overline{y_n}\}$ com $n \in \mathbb{N}$ e uma função $y_n = f(n, a_1, a_2, \cdots, a_j)$, onde $a_j(j = 1, 2, 3 \cdots)$ como sendo os parâmetros. O método dos mínimos quadrados consiste em determinar esses parâmetros de modo a minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores $\overline{y_n}$ e os valores ajustados $y_n = f(n, a_1, a_2, \cdots, a_j)$ ou seja:*

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(n, a_1, a_2, \cdots, a_j) - \overline{y_i}]^2$$

Desse modo ao usarmos um ajuste linear temos $f(x, a, b) = ax + b$ e como o gráfico de uma função afim é uma reta sabe-se que r é da forma $r : y = mx + b$ onde m e b representam respectivamente o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta.

Para um conjunto de n pares ordenados com $n \in \mathbb{N}$, os valores desses coeficientes podem ser calculados de acordo com as equações abaixo, cujas demonstrações por usar derivadas parciais, ficará no apêndice B:

$$m = \frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}} \tag{19}$$

Como o valor de $m = a$ segue que $a = \dfrac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}$. Já o valor de b será dado por:

$$\begin{aligned} b &= \overline{y} - m\overline{x} \\ &= \overline{y} - \left(\frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}\right).\overline{x} \end{aligned} \tag{20}$$

Portanto, encontra-se o valor dos coeficientes a e b da função afim. Quando fazemos um ajuste linear relacionando duas variáveis não temos certeza de que a reta encontrada é o melhor modelo de ajuste. Para medirmos qual o grau de precisão entre os pontos observados (x_i, y_i) em torno da reta ajustada $y = ax + b$ usamos o coeficiente de correlação de Pearson R que é dado por:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{21}$$

4.2 Proposta de atividade com sequência didática

Uma das funções que possui bastante aplicabilidade e que serve de modelo para diversas situações problema, como já foi mencionado, é a função afim. Desse modo o professor pode explorar diversas situações e contextos reais ou ligados a outra disciplina envolvendo esse tipo de função com seus alunos.

A proposta apresentada será analisada de acordo com as propostas de BASSANEZI (2014) e BIEMBENGUT and HEIN (2010).

O primeiro passo é o professor realizar um diagnóstico, afim de conhecer e elencar situações que façam parte da realidade do aluno, bem como seu grau de conhecimento no assunto. A escolha do tema pode ficar a critério do professor ou dos grupos de alunos, conforme já discutido. O que se propõem nesse trabalho são formas de como explorar alguns temas bastante presentes em qualquer contexto, como por exemplo: Transporte, Energia, Água. Vale salientar que o professor pode começar a aula explicando o que é a modelagem matemática e a sua importância na aplicação de conhecimentos matemáticos em situações reais.

Situação 1:

Passo 1: Escolha do tema

Tema: Desenvolvimento de bebês.

Esse tema apresenta boas possibilidades de explorar o conceito de função, além disso boa parte dos alunos ou possui irmão (ã) bebê ou tem na sua família. Com a caderneta de saúde da criança podemos explorar diversas situações problemas contextualizadas e fazer interdisciplinaridade com a disciplina de Biologia.

Passo 2: Desenvolvimento do conteúdo programático

Nessa fase acontece o processo de modelagem em si. E importante que o professor saiba o nível de conhecimento dos seus alunos para que esse processo não ganhe aspecto de algo muito difícil nem fácil demais. Para uma melhor orientação podemos dividir essa fase nas seguintes etapas:

1) Experimentação ou pesquisa de campo.
2) Abstração ou levantamento dos problemas.
3) Resolução dos problemas.
4) Análise e validação do modelo.

1) Experimentação ou pesquisa de campo

Alguns pontos que podem ser explorados, pois apresenta relevante importância para o estudo do tema e a aplicabilidade do conceito de função, são: massa versus idade, comprimento versus idade, altura versus idade, taxa de absorção de remédio, etc. Essas pesquisas podem ser feitas na internet, e no acompanhamento na caderneta de saúde da criança. Se o professor preferir, o tema pode ser dividido em grupos e apresentado na aula.

2) Abstração ou levantamento dos problemas

Nessa fase é importante que o professor possa contribuir para que o debate sobre o tema chegue ao levantamento de alguns problemas, e que esses problemas tenham relação com o conteúdo em análise. É importante frisar que a situação analisada pode ser modelado com outro tipo de função tal que não seja o modelo afim, nesse caso o teorema de caracterização é decisivo. Alguns problemas que podem ser sugerido pelos alunos ou pelo professor e por isso serem motivos de investigação e discussão são:

a) Como estabelecer uma função entre a massa do bebê em relação a sua idade nos primeiros meses de vida?
b) É possível elaborar uma função com base nos dados do ministério da saúde que possa relacionar altura versus a idade do bebê?

c) Como prever a possível massa do bebê em uma idade futura?

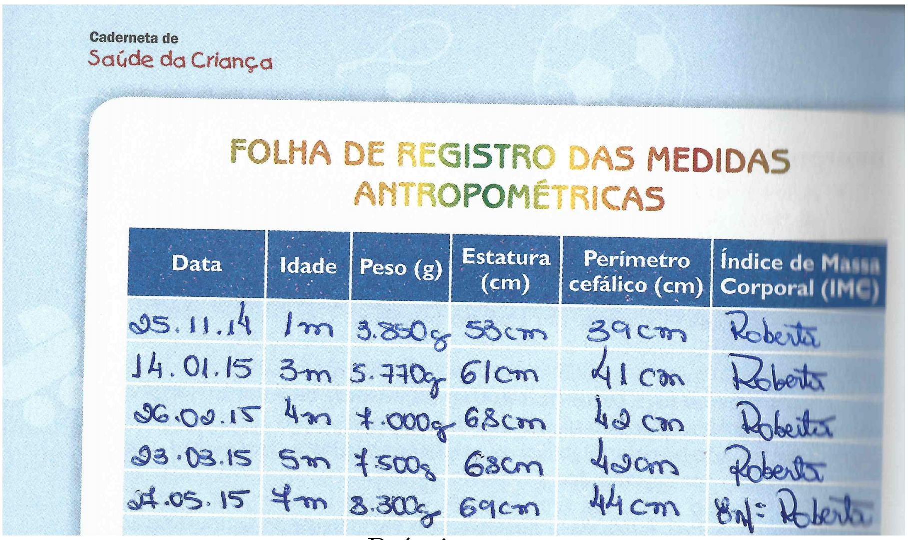
Nessa fase professor e alunos podem levantar outros problemas que merecem ser investigados. Nesse sentido percebe-se que o aluno passa a ser um investigador da realidade, dando assim utilidade ao que é visto na disciplina Matemática. Desse modo sua formação fica mais sólida, tendo em vista que passa a ser protagonista na busca do conhecimento.

3) Resolução dos problemas

Para a formulação do modelo é importante que se selecione as variáveis envolvidas em cada problema. De posse dos valores encontrados na pesquisa pode-se chegar a modelos precisos. É importante verificar se os alunos conseguem perceber a relação entre as variáveis envolvidas e a restrição no conjunto do domínio das funções em análise. Para efeito de análise vejamos a situação.

Um pai resolveu analisar o comportamento da massa de seu filho desde o nascimento até o 7° mês de vida. Para isso verificou os dados no cartão de saúde do seu bebê conforme mostra figura 10. Ao montar esses dados em um gráfico o pai pode perceber que poderia montar uma função linear para representar o crescimento do filho até o 7° mês, ver figura 11.

Figura 10 – Dados coletados: caderneta de saúde da criança

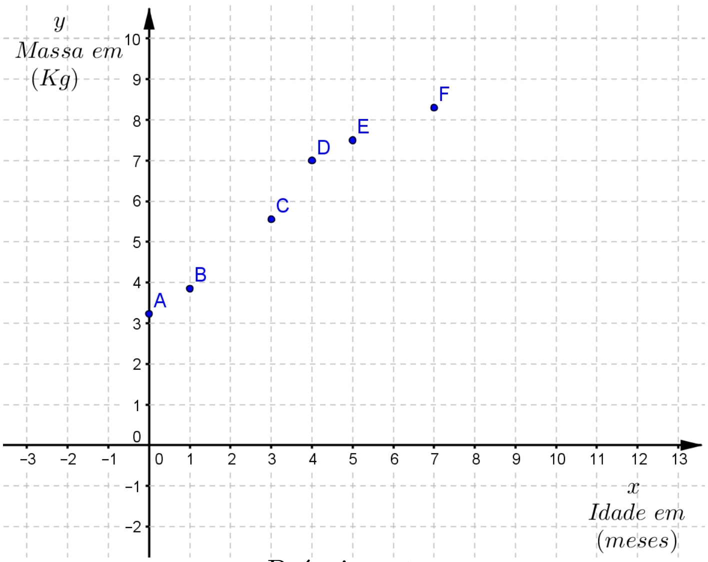

Caderneta de
Saúde da Criança

FOLHA DE REGISTRO DAS MEDIDAS ANTROPOMÉTRICAS

Data	Idade	Peso (g)	Estatura (cm)	Perímetro cefálico (cm)	Índice de Massa Corporal (IMC)
25.11.14	1m	3.850g	53cm	39cm	Roberta
14.01.15	3m	5.770g	61cm	41cm	Roberta
26.02.15	4m	7.000g	68cm	42cm	Roberta
23.03.15	5m	7.500g	68cm	42cm	Roberta
27.05.15	7m	8.300g	69cm	44cm	Enf: Roberta

Próprio autor

Figura 11 – Massa versus idade



Próprio autor

Nesse caso temos uma aplicação de ajuste linear, o professor pode explorar a tabela abaixo para encontrar o valor dos coeficientes a e b. Essa tabela pode ser reproduzida e automatizada usando software como excel ou mesmo o Geogebra.

Tabela 3 – Massa de um bebê em cada mês após o nascimento

(x)	(y)	x^2	y^2	xy
0	3,23	0	10,43	0
1	3,85	1	14,82	3,85
3	5,77	9	33,30	17,31
4	7,00	16	49,00	28,00
5	7,5	25	56,25	37,50
7	8,3	49	68,89	58,10
$\sum x_i = 20$	$\sum y_i = 35,65$	$\sum(x_i^2) = 100$	$\sum(y_i^2) = 232,69$	$\sum(x_i y_i) = 144,76$
média 3,34	5,94	16,67	38,78	24,13

Fonte: Elaborada pelo autor.

A função procurada é da forma $f(x) = ax+b$, com restrição no seu do domínio. Já sabemos que $a = \dfrac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}$, então substituindo os valores encontrados na tabela temos:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}} \\
&= \frac{3,34 \times 5,94 - 24,13}{3,34^2 - 16,67} \\
&= 0,774.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \overline{y} - m\overline{x} \\
&= 5,94 - 0,774 \times 3,34 \\
&= 3,355.
\end{aligned}
$$

Desse modo uma função para os pontos observados é $f : [0,7] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = 0,774x + 3,355$.

Calculemos agora o coeficiente de correlação de Pearson R:

$$
R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)}{n}}{\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}
$$

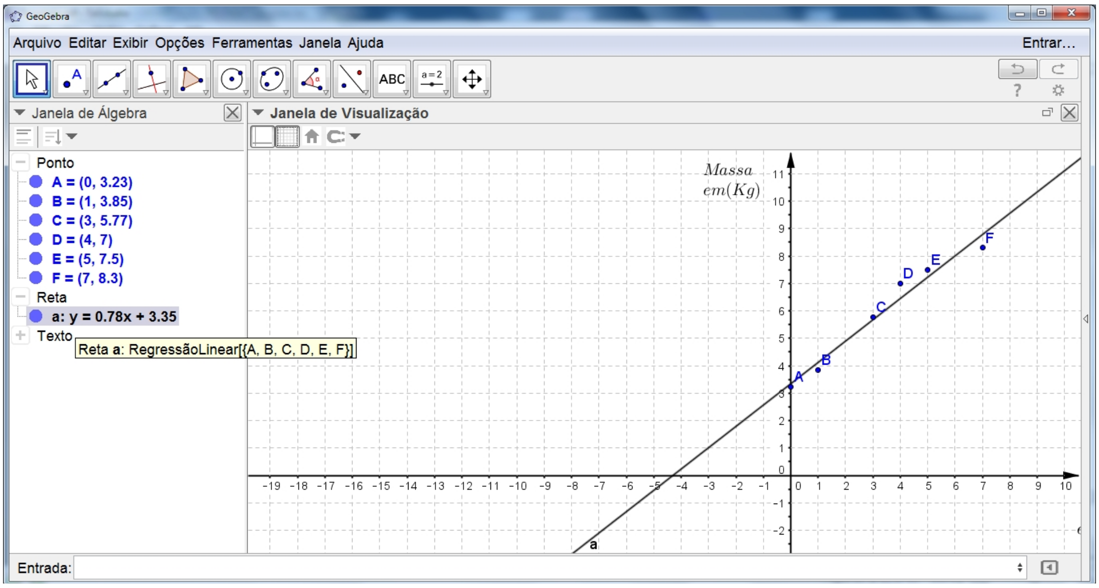
$$
\begin{aligned}
R &= \frac{144,76 - \frac{20 \times 35,65}{6}}{\left[\left(100 - \frac{20^2}{6}\right)\left(232,69 - \frac{35,65^2}{6}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{144,76 - 118,83}{(33,34 \times 20,87)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{25,93}{\sqrt{695,80}} \\
&= 0,98
\end{aligned}
$$

Esse valor para o coeficiente de correlação indica que existe uma correlação linear muito forte no intervalo analisado.

4) Análise e validação do modelo

Desse modo o coeficiente de correlação indica que a função afim adotada está muito próximo da realidade, de modo que percebe-se no gráfico 12 que o modelo encontrado é validado pelo software que já possui uma função relacionada a regressão linear. O valor mostrado no software coincide com o calculado. Assim a curva de regressão linear é um modelo muito bom para o período de tempo observado.

Gráfico 12 – Curva de regressão linear: Massa versus idade



Passo 3: Avaliação do processo

O processo pode ser avaliado levando em conta aspectos metodológicos tais como: Fichas de acompanhamento que registram o processo, realização da pesquisa, nível de envolvimento dos alunos no processo, modelo matemático encontrado, apresentação dos resultados e abordagem crítica do mesmo.

Nesse ponto percebe-se que o processo de avaliação é mais abrangente que uma simples prova, levando em contas aspectos qualitativos e quantitativos durante todo o processo. É importante frisar que nas apresentações dos modelos encontrados é avaliado também as estratégias utilizadas para se chegar a resolução do problemas bem como as possíveis dificuldades e erros encontrados.

Situação 2:

Passo 1: Escolha do tema

Tema: Pilotagem segura de motos: frenagem.

Esse tema pode ser explorado e gera discussões bastantes esclarecedoras, uma vez que o número de motocicletas é cada vez mais presente nas famílias. Por ser um meio de transporte de fácil acesso, acaba sendo bastante presente no meio dos alunos.

Passo 2: Experimentação ou pesquisa de campo

Pontos que podem ser motivos de exploração por apresentar bastante relevância: Velocidade versus tempo de frenagem, velocidade versus distância de reação, velocidade versus distância de frenagem, entre outros que o professor pode explorar. Essas pesquisas podem ser feitas através da internet, nos manuais das motos que trazem informações sobre pilotagem e segurança.

Passo 3: Abstração ou levantamento dos problemas

Alguns problemas que podem ser levantados e por isso serem motivos de investigação e discussão são:

1) Como elaborar uma função que possa prever a *distância de reação* [12] (em metros) e a velocidade da motocicleta (em Km/h)?
2) Usando a combinação do freio dianteiro mais o freio traseiro qual a distancia mínima de frenagem que um motociclista para sua moto a uma velocidade de 100 Km/h?
3) Que função associa a distância de frenagem total e a velocidade da moto?

O grupo poderá levantar outras questões que podem ser investigadas e discutidas.

Passo 4: Resolução dos problemas

É importante observar que para se chegar a modelos precisos precisamos analisar os valores encontrados na pesquisa e ter conhecimento em outras disciplinas. Vale enfatizar que este tema relaciona Física e Matemática.

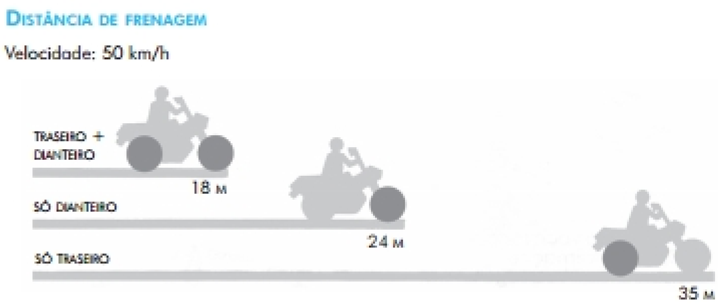
Para resolução dos problemas serão analisados a tabela e a figura abaixo que foram obtidas através da pesquisa executada no passo 2.

Tabela 4 – Velocidade versus distância de reação

Velocidade (Km/h)	Distância de reação (m)
30	8,33
40	11,11
50	13,89
60	16,67
90	25,01

Fonte: Próprio autor.

Figura 12 – Distância de frenagem



Próprio autor

No primeiro problema levantado no passo 3 é fácil ver pelo teorema de caracterização que o mesmo representa um modelo linear, pois acréscimos iguais de velocidade levam acréscimos iguais de distância de reação, assim podemos encontrar uma função

[12] A distância de reação corresponde a distância percorrida pelo piloto desde o momento em que ele detecta o perigo e aciona os freios.

afim que associa a velocidade com a distância de reação e dessa forma modelar a situação em questão. Sabemos que $f(x) = ax + b$ e que $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \dfrac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$ onde x representa a velocidade e $y = f(x)$ representa a distância de reação.

Dessa forma, tomando:

$x_2 = 40$ e $y_2 = 11,11$

$x_1 = 30$ e $y_1 = 8,33$ temos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{11,11 - 8,33}{40 - 30} \\ &= \frac{2,78}{10} \\ &= 0,278 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{8,33 \times 40 - 11,11 \times 30}{40 - 30} \\ &= \frac{333,2 - 333,3}{10} \\ &= \frac{-0,1}{10} \\ &= -0,01 \end{aligned}$$

Logo, a função procurada é $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; $f(x) = 0,278x - 0,01$.

Portanto, pode-se concluir que quanto maior a velocidade, maior será a distância de reação em metros. O professor pode propor que calcule a distância de reação em velocidades escolhidas pelos próprios alunos. Por exemplo, calculemos a distância de reação de um motociclista que está a uma velocidade de 120 Km/h.

Solução:

Encontrou-se que $f(x) = 0,278x - 0,01$, dessa forma calculando $f(120)$, temos:

$f(120) = 0,278 \times 120 - 0,01$

$f(120) = 33,35m$

No segundo problema proposto o aluno poderá chegar a uma primeira resposta, pela figura 13, que a distância de frenagem (D) dobrará, ou seja, será 36 m. Essa informação encontrada nos manuais das motocicletas não informa se velocidade (V) e distância de frenagem(D) são diretamente proporcionais. No entanto, no 1° ano do Ensino Médio os alunos também estudam em Física os movimentos uniformemente variados e precisam saber que *a distância é proporcional ao quadrado da velocidade*, isso significa que se tomarmos D_1 e D_2 as distâncias de frenagem correspondente, respectivamente, às velocidades V_1 e V_2, então:

$$\frac{D_1}{V_1^2} = \frac{D_2}{V_2^2} \tag{22}$$

Com essa relação pode-se calcular alguns valores e construir uma tabela, assim:

Para uma velocidade de 60 Km/h, temos:

$$\frac{18}{50^2} = \frac{D_2}{60^2} \Rightarrow D_2 = 25,92m$$

Para uma velocidade de 70 Km/h, temos:

$$\frac{18}{50^2} = \frac{D_3}{70^2} \Rightarrow D_3 = 35,28m$$

Para uma velocidade de 80 Km/h, temos:

$$\frac{18}{50^2} = \frac{D_4}{80^2} \Rightarrow D_4 = 46,08m$$

Para uma velocidade de 90 Km/h, temos:

$$\frac{18}{50^2} = \frac{D_5}{90^2} \Rightarrow D_5 = 58,32m$$

Para uma velocidade de 100 Km/h, temos:

$$\frac{18}{50^2} = \frac{D_6}{100^2} \Rightarrow D_6 = 72m$$

Assim para uma velocidade de 100 Km/h a distância de frenagem quadruplicará, mostrando com isso que a primeira resposta está errada.

A equação (22) pode ser expressa de forma mais ampla da seguinte forma:

$$D = kV^2 \tag{23}$$

Verifiquemos usando o Teorema de caracterização das funções lineares se a equação (23) representa uma função linear. Sabemos que a função é crescente visto que quanto maior a velocidade V a distância de frenagem D será maior.

Verifiquemos agora se $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} D &= f(V) = kV^2 \\ f(nV) &= k(nV)^2 \\ &= n^2kV^2 \\ &= n^2f(V) \neq nf(V) \end{aligned}$$

Portanto, não representa uma função linear, visto que não atende o teorema de caracterização da mesma.

Passo 5: Análise e validação do modelo

Podemos observar que o problema 2 não representa um modelo linear, esse fato pode ser validado com o teorema de caracterização das funções lineares, e para efeito de visualização poderá ser construído um gráfico do mesmo. Para isso pode-se construir uma tabela com os valores de V e D já calculados.

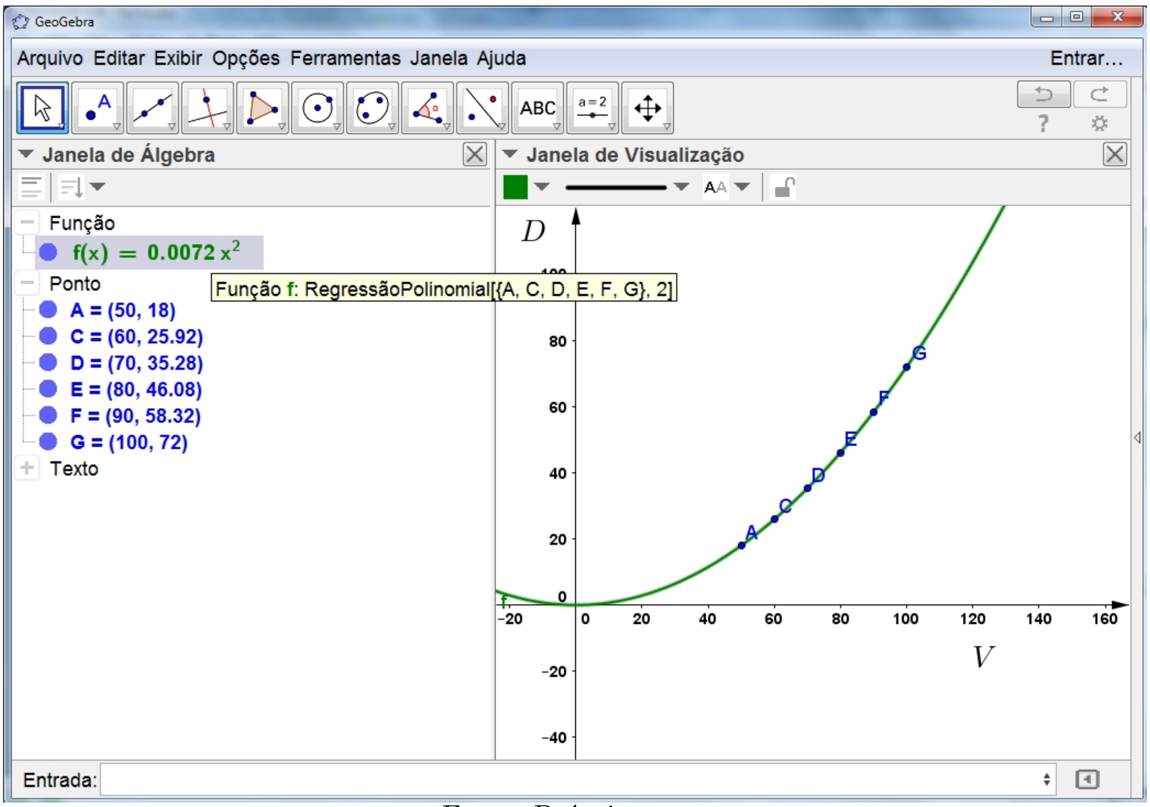
Tabela 5 – Velocidade versus distância de frenagem

Velocidade (V)	Distância (D)
50	18,00
60	25,92
70	35,28
80	46,08
90	58,32
100	72,00

Fonte: Próprio autor.

Montando um gráfico com esses valores usando o software Geogebra temos:

Gráfico 13 – Distância de frenagem versus Velocidade



Fonte: Próprio autor

Nesse gráfico a função obtida contempla todos os pontos e foi encontrada usando uma ferramenta do software chamada regressão polinomial de grau 2. Pode-se encontrar essa função calculando-se o valor da constante k, vejamos:

$$D = kV^2$$
$$k = \frac{D}{v^2}$$
$$k = \frac{18}{50^2} = 0,0072$$

Desse modo a distância de frenagem D representa uma função quadrática em relação a velocidade em que a motocicleta se encontra no momento em que se aplica a frenagem. Assim uma função que associa a distância de frenagem (D) com a velocidade (V), pode ser assim definida: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; $f(V) = 0,0072V^2$

5 CONCLUSÃO

Diante de tudo que foi exposto nessa dissertação, espera-se que as discussões, problemas e sugestões contribuam para uma reflexão sobre o ensino de matemática no Ensino Médio. Nesse ponto percebe-se que as avaliações externas dão conta que o nível de conhecimento matemático no Brasil ainda é muito baixo. Vale salientar que o jovem aluno vê a matemática como uma disciplina de caráter difícil, presa a fórmulas, exercícios repetitivos e mecânicos em excesso. Essa situação precisa ser repensada e analisada para que o ensino de matemática torne-se mais dinâmico sem perder o rigor. Esse trabalho foi inspirado nessa problemática tendo como principal objetivo propor uma nova alternativa para o professor, através da metodologia de modelagem matemática. Dessa forma, contribuir para que o ensino de matemática possa torna-se algo mais prazeroso e que possa ser útil para transforma a vida do educando.

Desse modo esse trabalho mostrou como a modelagem matemática pode ser uma metodologia de ensino apropriada a essa realidade difícil, tendo em vista que a mesma propicia ao aluno o poder de ser protagonista de uma determinada situação, além de ingressá-lo no campo da pesquisa. Essa metodologia muda o papel central do professor uma vez que ele passará a ser um mediador do conhecimento e não o detentor do mesmo. Muda também o papel do aluno, pois, o mesmo passará a ser corresponsável pelo conhecimento junto ao professor, além do mais desenvolverá habilidade de utilizar o conhecimento matemático para resolver situações problema que não seja somente as presentes no livro didático. Deixou-se bastante claro que essa metodologia não é a solução final do problema do ensino de matemática, mas algo que pode contribuir e caminhar junto com outras atividades.

O trabalho propõem uma ferramenta muito útil para se modelar situações problemas: o domínio do conceito de caracterização das funções e o modelo de regressão linear para situações em que buscamos uma função afim que generalize os pontos observados. De fato, um dos grandes problemas ao trabalhar com modelagem é que não sabemos qual função é mais adequada para expressar o modelo da situação problema analisada, nesse ponto a caracterização das funções contribuem para que o modelo seja realmente fiel ao observado na realidade. Outro fato é que os livros didáticos não falam da caracterização das funções o que contribui para aumentar a dificuldade dos alunos resolverem situações problemas onde o conteúdo não está sendo mostrado, desse modo este trabalho contribui para que o professor possa desenvolver essa habilidade com os alunos.

Diante dessa metodologia de ensino é proposto uma atividade para exemplificar o processo de modelagem, nela o tema foi escolhido pelo autor, mas poderia ter sido escolhido pelos aluno em parceria com o professor. As perguntas a serem investigadas também poderia mudar de acordo com o foco que o grupo desejasse pesquisar. O que percebe-se é que de acordo com a temática escolhida e com as devidas orientações do professor o aprendizado passar a ser mais amplo, uma vez que contribui para a formação crítica do aluno, tornando cidadãos mais conscientes.

Portanto, entende-se que o trabalho com modelagem é útil e positivo no ensino de funções, no nosso caso função afim, e com o uso do teorema de caracterização e a técnica da regressão linear, os problemas analisados passam a ter modelos mais fieis que os representem. Atividades com modelagem contribuem para fortalecer o elo entre professor e alunos e o trabalho em equipe.

Espera-se que esse trabalho possa contribuir e encorajar outros professores a utilizar em suas aulas atividades com modelagem matemática além de servir de tema em pesquisa para gerações futuras ou em outros campos da matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** *uma nova estratégia.* 4.ed.São Paulo: Contexto, 2014.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática no Ensino Fundamental**. Blumenau-SC:edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelso. **Modelagem matemática no ensino**. 5.ed.São Paulo: Contexto, 2010.

BRASIL, MEC. SEMTEC.**PCN+ Ensino Médio:** Oriêntações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curricularres Nacionais. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC*, 2002.

BRASIL, MEC. SEB.**Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB*, v. 2, 2008.

BRASIL, MEC. SEB.**Dirretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. *Brasília: MEC, SEB*, 2013.

BRASIL, MEC. **Guia de livros didáticos:**PNLD 2015 matemática: ensino médio Brasília: MEC, SEB, 2014. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015>. Acesso em: 06 mai. 2015.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática** . Traduzido por: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Morderna, 2000.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática** *Elo entre as tradições e a modernidade.* 2.ed.Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática** *Da teoria à Prática.* 17.ed.Campinas, SP: Papirus, 2009.

EVES, Howard. **Introdução a estória da matemática**. Traduzido por: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

FERREIRA, Cícero Soares. **A Tecnologia como ferramenta de superação das deficiências da base e otimização da aprendizagem em Matemática: uma experiência com números racionais.** 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional , PROFMAT) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. **Um convite à Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências** *Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.* 5.ed.São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos:** *uma Análise de Livros de matemática para o ensino médio.* VITAE, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real** *Funções de Uma Variável*, v. 1. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012a.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, v. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação de Matemática Pura e Aplicada, 2012b.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012c.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, Jairo de Araujo. **Livro didático de Matemática: Concepção, Seleção e Possibilidades frente a descritores de análise e tendências em Educação Matemática.** 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

MAGARINUS, Renata. **Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional , PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria -RS, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática** , v. 3. São Paulo: Moderna, 1995.

SADOVSKY, Patricia. **O ensino de Matemática hoje**- *Enfoques, sentidos e desafios.* sção Paulo: Ática, 2007.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar***Matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

SOUZA, Viviane Dal Molin; MARIANI, Viviane Cocco. **Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função.**, 2005. Disponível em:<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI021.pdf>. Acesso em: 12 maio 2015.

SOUZA, Viviane Dal Molin; MARIANI, Viviane Cocco. Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função. **REVEMAT,** Florianópolis SC, v. 9, n. 1, p. 159–178, 2014.

THOMAS, George B. **Cálculo**, v. 1. Traduzido por: Thelma Guimarães; Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. Biblioteca Universitária. **Guia de normalização de trabalhos acadêmicos da Universidade Federal do Ceará**. Fortaleza, 2013.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO 1

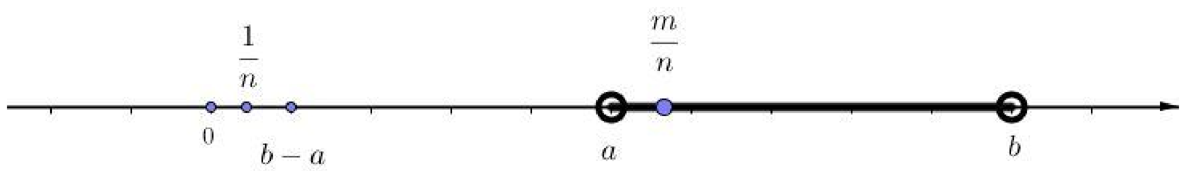
Teorema 1. *Todo intervalo não degenerado contém números racionais e números irracionais.*

Esse teorema mostra que os números racionais e irracionais estão por toda parte em $\mathbb{R}$. Se tomarmos a reta real como representação desse conjunto, vê-se que não importa o intervalo dado, sempre existirá números racionais e irracionais nele.

Demonstração. Considere um intervalo aberto (a, b) não degenerado. Se o intervalo for fechado não há necessidade de demonstração. Seja $d = b - a$, como o intervalo não é degenerado, pode-se concluir que $a \neq b$ e nesse caso $d > 0$. Considere o caso em que $a, b > 0$, nos demais casos em que os sinais de a e b variam o modo é análogo. Admite-se esses valores para melhor visualização na reta real.

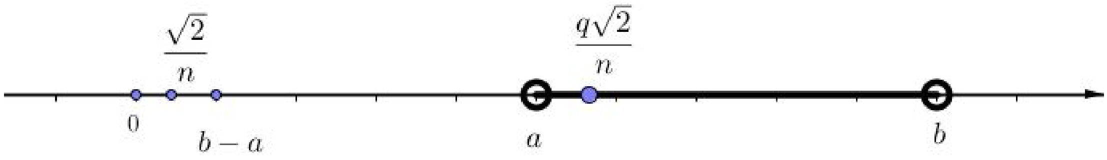
Seja $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $0 < \dfrac{1}{n} < b - a$ os números racioais $0, \dfrac{\pm 1}{n}, \dfrac{\pm 2}{n}, ...$ se espalham pela reta, como em saltos, de modo que apos m saltos o número racional $\dfrac{m}{n}$ caia no intervalo (a, b). Ver figura 10.

Figura 13 – Reta real



Se quisermos obter um número irracional basta tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\sqrt{2}}{n} < b - a$, de modo análogo os números irracionais da forma $\dfrac{\pm\sqrt{2}}{n}, \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{n}, ...$ cobrem toda a reta. Como cada salto tem comprimento $\dfrac{\sqrt{2}}{n} < b - a$, portanto após q saltos o número irracional $\dfrac{q\sqrt{2}}{n}$ cairá no intervalo (a, b), conforme figura abaixo.

Figura 14 – Reta real



provando assim o teorema em questão.

$\square$

APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO 2

Teorema 1. *Dado um conjunto com n pares ordenados (x, y), com $n \in \mathbb{N}$. Um ajuste linear é uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y = ax + b$, onde os valores dos coeficientes a e b são dados por:*

$$a = \frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}$$

.

$$b = \overline{y} - \left(\frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}} \right) .\overline{x}$$

Usando a definição 4.1.1.1 e o gráfico 11, podemos demonstrar esse teorema da seguinte forma:

Demonstração. Calculando os valores dos erros $e_1, e_2, \cdots, e_n$ temos:

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - (mx_1 + b) \\ e_2 &= y_2 - (mx_2 + b) \\ &\vdots \\ e_n &= y_n - (mx_n + b) \end{aligned}$$

A soma dos erros ao quadrado S é dada por $S = (e_1)^2 + (e_2)^2 + \cdots + (e_n)^2$ assim:

$$S = [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2$$

Desenvolvendo os quadrados temos,

$$\begin{aligned} S \quad = \quad & y_1^2 - 2y_1(mx_1 + b) + (mx_1 + b)^2 + \\ & y_2^2 - 2y_2(mx_2 + b) + (mx_2 + b)^2 + \\ & \vdots + \\ & y_n^2 - 2y_n(mx_n + b) + (mx_n + b)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S \quad = \quad & y_1^2 - 2y_1mx_1 - 2y_1b + m^2x_1^2 + 2mx_1b + b^2 + \\
& y_2^2 - 2y_2mx_2 - 2y_2b + m^2x_2^2 + 2mx_2b + b^2 + \\
& \vdots + \\
& y_n^2 - 2y_nmx_n - 2y_nb + m^2x_n^2 + 2mx_nb + b^2 +
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes temos,

$$\begin{aligned}
S \quad = \quad & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \\
& -2m(y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n) \\
& -2b(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\
& +m^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \\
& +2mb(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb^2
\end{aligned} \tag{24}$$

Considere a média dos n termos y_i^2 com $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq n$ como $\overline{y^2}$, daí:

$$\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{n} = \overline{y^2} \Rightarrow n\overline{y^2} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \tag{25}$$

Consideremos agora $\overline{x^2}$ a média dos n termos x_i^2 com $i \in \mathbb{N}$ donde $i \leq n$, assim:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} = \overline{x^2} \Rightarrow n\overline{x^2} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \tag{26}$$

Do mesmo modo considere $\overline{x_ny_n}$ a média dos n termos x_iy_i com $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq n$.

$$\frac{y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n}{n} = \overline{x_ny_n} \Rightarrow y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = n\overline{x_ny_n} \tag{27}$$

Substituindo as equações (25), (26) e (27) na equação (24).

$$S = n\overline{y^2} - 2mn\overline{x_ny_n} - 2bn\overline{y} + m^2n\overline{x^2} + 2mnb\overline{x} + nb^2 \tag{28}$$

Para que o erro seja mínimo as derivadas parciais devem ser zero, desse modo:

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0 \text{ e } \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Resolvendo cada uma dessas derivadas temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial m} &= 0 - 2n\overline{x_n y_n} - 0 + 2mn\overline{x^2} + 2bn\overline{x} + 0 \\ &= -2n\overline{x_n y_n} + 2mn\overline{x^2} + 2bn\overline{x} = 0\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 0 - 0 - 2n\overline{y} + 0 + 2mn\overline{x} + 2bn \\ &= -2n\overline{y} + 2mn\overline{x} + 2bn = 0\end{aligned} \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas equações (29) e (30) nas variáveis m e b:

$$\begin{cases} -2n\overline{x_n y_n} + 2mn\overline{x^2} + 2bn\overline{x} = 0 & (\div 2n) \\ -2n\overline{y} + 2mn\overline{x} + 2bn = 0 & (\div 2n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\overline{x_n y_n} + m\overline{x^2} + b\overline{x} = 0 & (+\overline{x_n y_n}) \\ -\overline{y} + m\overline{x} + b = 0 & (+\overline{y}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{x_n y_n} & (\div \overline{x}) \\ m\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\overline{x^2}}{\overline{x}} + \dfrac{b\overline{x}}{\overline{x}} = \dfrac{\overline{x_n y_n}}{\overline{x}} \\ m\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\overline{x^2}}{\overline{x}} + b = \dfrac{\overline{x_n y_n}}{\overline{x}} & \times(-1) \\ m\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{m\overline{x^2}}{\overline{x}} - b = -\dfrac{\overline{x_n y_n}}{\overline{x}} \\ m\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases} \tag{32}$$

$$m\overline{x} - \frac{m\overline{x^2}}{\overline{x}} = \overline{y} - \frac{\overline{x_n y_n}}{\overline{x}}$$
$$m\left(\overline{x} - \frac{\overline{x^2}}{\overline{x}}\right) = \overline{y} - \frac{\overline{x_n y_n}}{\overline{x}}$$
$$m = \frac{\overline{y} - \dfrac{\overline{x_n y_n}}{\overline{x}}}{\overline{x} - \dfrac{\overline{x^2}}{\overline{x}}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador dessa fração por $\overline{x}$,

$$m = \frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}} \tag{33}$$

Como o valor de $m = a$ segue que $a = \dfrac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}$. Para encontrar o valor de b substitui o valor de m em qualquer uma das equações que forma o sistema (32), assim:

$$\begin{aligned} b &= \overline{y} - m\overline{x} \\ &= \overline{y} - \left(\frac{\overline{y}.\overline{x} - \overline{x_n y_n}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}\right).\overline{x} \end{aligned} \tag{34}$$

Desse modo encontra-se o valor dos coeficientes a e b da função afim. $\square$