



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas

Jonas José Cruz dos Santos

julho/2015
João Pessoa - PB



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas †

por

Jonas José Cruz dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

julho/2015
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas

por

Jonas José Cruz dos Santos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva - UFRPE

julho/2015

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus por ter me dado saúde e sabedoria para realizar este Mestrado.

Aos meus pais, M^a da Conceição Cruz dos Santos e Antônio Emídio dos Santos, por sempre me ensinar o caminho certo a seguir.

À minha esposa Sara Cruz, por existir e ter me dado uma família tão linda e maravilhosa, por sempre estar ao meu lado, independente de qualquer situação, por me incentivar durante toda minha jornada e pela paciência com a minha ausência nos momentos de estudos. Obrigado pelo amor que você me dar.

Ao meu orientador Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza pelo empenho dedicado a elaboração deste trabalho.

Ao corpo docente e à coordenação do PROFMAT, em especial à turma de 2013.

À banca examinadora, Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza, Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro e Prof. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva, pelas sugestões, apoios, orientações e avaliação do trabalho.

Aos meus amigos da turma que me proporcionaram momentos descontraídos e também importantes encontros de estudos.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

À CAPES pelo incentivo financeiro com a bolsa de pesquisa.

Dedicatória

A toda minha família por acreditar no meu sucesso. Aos meus lindos e amados filhos (minha princesa Ananda Sophia e meu amigão Miguel Cruz) que sempre serão fontes de inspiração para eu seguir em frente.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar as funções hiperbólicas, analisando suas semelhanças e diferenças com as funções trigonométricas circulares. Para tanto, iniciamos apresentando uma breve revisão sobre a trigonometria circular e a hipérbole, descrevendo seus principais elementos e propriedades. Posteriormente, realizamos um estudo sobre as funções hiperbólicas, apresentando as definições do seno, cosseno e das demais funções hiperbólicas e suas principais propriedades. Concluímos com algumas aplicações destas funções no cotidiano.

Palavras-chave: Funções trigonométricas, Funções hiperbólicas, Catenária, Velocidade da onda do mar.

Abstract

This work intends to show the hyperbolic functions, analyzing their similarities and contrasts with the circular trigonometric functions. To this, we start showing a short review about the circular trigonometry and hyperbole, describing their main elements and properties. Then, we made a study about hyperbolic functions, with the definitions of sine, cosine and the other hyperbolic functions and their main properties. We finished this work with some applications of these functions on everyday.

Keywords: Trigonometric Functions, Hyperbolic Functions, Catenary, Sea Wave Speed.

Sumário

1	Trigonometria na Circunferência	1
1.1	Arco de circunferência	1
1.2	Ângulo	2
1.3	Medidas de Arcos e Ângulos	3
1.4	Circunferência Trigonométrica	5
1.5	Funções Trigonômétricas Circulares	6
1.5.1	Função Seno e Função Cosseno	6
1.5.2	Função Tangente	9
1.6	Função Cotangente	10
1.7	Função Secante	12
1.8	Função Cossecante	13
1.9	Propriedades das Razões Trigonômétricas	14
2	Funções Hiperbólicas	17
2.1	A Hipérbole	17
2.1.1	Elementos	18
2.1.2	Equação Reduzida	19
2.1.3	A Hipérbole $xy = k$	21
2.1.4	Hipérbole Rotacionada	23
2.2	Ângulo Hiperbólico	24
2.3	Funções Hiperbólicas	30
2.3.1	Funções Hiperbólicas e Exponenciais	31
2.4	Algumas Propriedades das Funções Hiperbólicas	33
2.4.1	Seno e Cosseno Hiperbólico	33
2.4.2	Função Inversa do Seno Hiperbólico	37
2.4.3	Função Inversa do Cosseno Hiperbólico	38
2.4.4	Tangente hiperbólica.	40
2.4.5	Função Inversa da Tangente Hiperbólica	42
2.4.6	Cotangente Hiperbólica	43
2.4.7	Função Inversa da Cotangente Hiperbólica	44
2.4.8	Secante Hiperbólica	45
2.4.9	Cossecante Hiperbólica	47
2.4.10	Derivada das funções hiperbólicas	49
2.5	Comparando fórmulas trigonométricas	51

3	Aplicações	54
3.1	Catenária	54
3.1.1	Um pouco da história da catenária	55
3.1.2	Aplicações no cotidiano	57
3.2	Velocidade da onda do mar	60
	Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

1.1	Arcos na circunferência.	1
1.2	Ângulo.	2
1.3	Ângulo Central \widehat{AOB}	3
1.4	Ângulo α , Setor Circular A_s e Arco α	4
1.5	Ciclo Trigonométrico.	6
1.6	Ângulo circular.	7
1.7	$\text{sen}(\alpha)$	7
1.8	$\text{cos}(\alpha)$	8
1.9	Gráfico da função seno.	8
1.10	Gráfico da função cosseno.	9
1.11	Tangente no Ciclo Trigonométrico.	10
1.12	Função Tangente.	10
1.13	Cotangente.	11
1.14	Função Cotangente.	11
1.15	Secante.	12
1.16	Função Secante.	13
1.17	Cossecante.	14
1.18	Função Cossecante.	14
2.1	Esboço da Hipérbole.	18
2.2	Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	19
2.3	Hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	21
2.4	Retângulo de coordenadas.	22
2.5	Simetria em relação a origem.	23
2.6	Hipérbole rotacionada.	24
2.7	Setor Hiperbólico.	25
2.8	Ângulo Hiperbólico.	26
2.9	Setor Hiperbólico.	26
2.10	Preservação de Ângulo Hiperbólico.	27
2.11	Dois pontos na Hipérbole.	27
2.12	Setor na Hipérbole rotacionada.	28
2.13	Área $PVSA$	28
2.14	Pontos na hipérbole em relação aos eixos X e Y	29
2.15	Definindo as Funções Hiperbólicas	30
2.16	Coordenadas de A no sistema XOY e no xOy	32

2.17	Gráfico do Seno Hiperbólico.	33
2.18	Gráfico do Cosseno Hiperbólico.	34
2.19	Gráfico da Função inversa do seno hiperbólico.	38
2.20	Gráfico da Função inversa do cosseno hiperbólico.	39
2.21	Gráfico da Função Tangente Hiperbólica.	40
2.22	Gráfico da Função Cotangente Hiperbólica.	43
2.23	Gráfico da Função Inversa da Cotangente Hiperbólica.	44
2.24	Gráfico da Função Secante Hiperbólica.	45
2.25	Gráfico da Função Inversa da Secante Hiperbólica.	46
2.26	Gráfico da Função Cossecante Hiperbólica.	47
2.27	Gráfico da Função Inversa da Cossecante Hiperbólica.	48
3.1	Corrente formando uma catenária	54
3.2	Gottfried Wilhelm Leibniz	55
3.3	Galileu Galilei	55
3.4	Jakob e Johann Bernoulli	56
3.5	Christiaan Huygens	56
3.6	Esboço da catenária do problema 1	57
3.7	Esboço de uma catenária	59
3.8	Seção de uma catenária	60
3.9	Variação da velocidade das ondas marítimas	61

Lista de Tabelas

1.1	Funções.	15
1.2	Relações Fundamentais.	15
1.3	Operações com Ângulos.	15
1.4	Arco Duplo.	16
1.5	Arco Metade.	16
1.6	Derivadas.	16
2.1	Relações Fundamentais.	51
2.2	Funções.	52
2.3	Operações com ângulos.	52
2.4	Arcos duplos.	52
2.5	Arco Metade.	53
2.6	Derivadas.	53

Introdução

Este trabalho trata de uma pesquisa bibliográfica sobre as funções hiperbólicas e suas aplicações no Ensino Médio.

Normalmente as funções hiperbólicas são estudadas em cursos de cálculo diferencial e integral e geralmente apresentadas sem nenhuma relação com a hipérbole e sem nenhuma aplicabilidade. São definidas com o uso das funções exponenciais, apresentadas algumas identidades, suas derivadas e integrais, os esboços dos gráficos e as definições das funções hiperbólicas inversas. Com isso, o principal objetivo deste trabalho é estudar as funções hiperbólicas relacionando-as à hipérbole e apresentar propriedades que são análogas às conhecidas propriedades trigonométricas.

Para fins didáticos, este trabalho foi dividido em três capítulos. A seguir detalhamos cada um deles.

No Capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre a circunferência trigonométrica e funções trigonométricas circulares. Relembramos as principais partes da circunferência unitária. Conceituamos e apresentamos as demonstrações das funções trigonométricas e finalizamos com as principais propriedades das funções trigonométricas.

No Capítulo 2, estudamos a hipérbole e suas propriedades. É exposta uma definição de hipérbole no plano e apresentados seus principais elementos, como: focos, vértices, eixo focal, eixo não focal e assíntotas. São apresentadas equações hiperbólicas e esboçados seus respectivos gráficos. São exibidas também, as equações de transformação das coordenadas dos pontos em um sistema inicial a um novo sistema, que foi formado através de uma rotação de eixos no plano cartesiano.

O Capítulo 3 é destinado a mostrar algumas aplicações das funções hiperbólicas que podem ser analisadas no ensino médio. É apresentado um pequeno resumo da história do estudo da catenária, como foi descoberta equação desta curva e a aplicação do *coseno hiperbólico* para traçar o gráfico. Outra aplicação, é o cálculo da velocidade das ondas do mar. Este cálculo pode ser resolvido com o auxílio da função *tangente hiperbólica*.

Capítulo 1

Trigonometria na Circunferência

Neste capítulo faremos uma revisão da circunferência trigonométrica e das funções trigonométricas circulares. Esta revisão foi baseada nas obras de Dolce(2005, p.166-182) [2], Facchini(1997, p. 291-328) [4], Iezzi(1993, p.39-71) [6] e Lima(2003, p.213-232) [8].

1.1 Arco de circunferência

Considere a circunferência unitária, ou seja, a circunferência de centro localizado na origem do plano cartesiano e raio de medida 1.

Definição 1.1. *Sejam A e B dois pontos distintos que dividem em duas partes a circunferência unitária. Cada uma dessas partes chama-se **arco de circunferência**. Os pontos A e B são as **extremidades** dos arcos que determinam.*

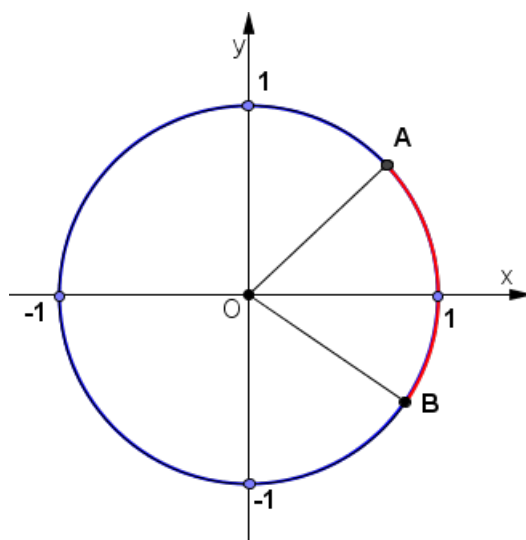


Figura 1.1: Arcos na circunferência.

1.2. ÂNGULO

Observação 1.2. Quando as extremidades **A** e **B** coincidem, temos um **arco de uma volta** ou um **arco nulo**.

Observação 1.3. Quando as extremidades **A** e **B** do arco são também as extremidades de um diâmetro, o arco \widehat{AB} é chamado **arco de meia-volta**.

1.2 Ângulo

Considere duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} de mesma origem O , não coincidentes e não opostas.

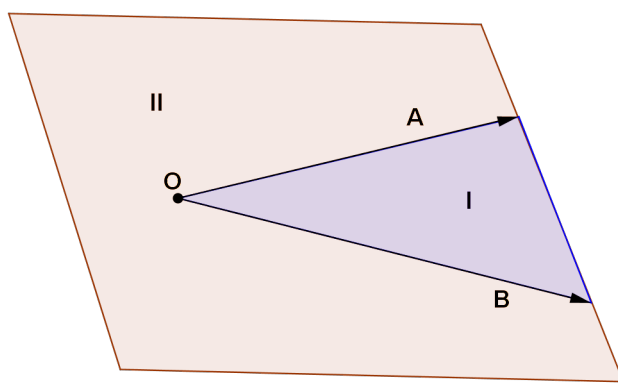


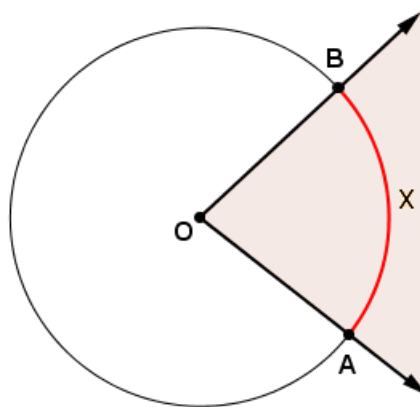
Figura 1.2: Ângulo.

Definição 1.4. As duas regiões, **I** e **II**, determinadas no plano, conforme Figura 1.2, são chamadas de **ângulos**. O ponto **O** é o **vértice** dos ângulos e as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os **lados** dos ângulos.

Observação 1.5. Caso as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} coincidam, dizemos, por extensão, que elas determinam um **ângulo nulo** (que é a própria semirreta) ou um **ângulo de uma volta** (que é o próprio plano). No caso em que as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são opostas, dizemos, também por extensão, que determinam um **ângulo raso** (que é o próprio semiplano).

Definição 1.6. Considere uma circunferência de centro **O** e raio **R** e, nela, dois pontos, **A** e **B**. O ângulo de lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , conforme Figura 1.3, é chamado de **ângulo central** (seu vértice é o centro da circunferência).

Observação 1.7. A cada arco \widehat{AB} corresponde um ângulo central \widehat{AOB} e vice-versa. Se adotarmos uma mesma unidade para estabelecer medidas de arcos e ângulos, a medida do arco será igual a medida do ângulo central correspondente.

Figura 1.3: Ângulo Central \widehat{AOB} .

1.3 Medidas de Arcos e Ângulos

Para medir uma grandeza, faz-se necessário a utilização de outra grandeza de mesmo padrão para a qual convencionamos medida unitária e, depois disso, procura-se a razão entre essas duas grandezas de mesmo padrão.

A partir de agora consideraremos a circunferência de raio R e centro O .

Definição 1.8. A medida de um arco da circunferência \widehat{AB} é o número real α , não negativo, determinado pela razão entre o arco \widehat{AB} a ser medido e um arco unitário u da mesma circunferência

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{u}.$$

Definição 1.9. Dividindo a circunferência em 360 arcos congruentes, cada um desses arcos será chamado **arco de um grau** (1°). O ângulo central correspondente será de 1° também.

Definição 1.10. O arco mede **um radiano** (1 rad) se o seu comprimento s for igual ao comprimento R do raio. O ângulo central correspondente será, também, de um radiano (1 rad).

Então para saber a medida de um arco (ou do ângulo central correspondente) em radianos, basta calcular quantas vezes o raio de medida R "cabe" nesse arco de comprimento s .

Portanto,

$$\alpha = \frac{s}{R}.$$

Daí,

$$s = \alpha \cdot R.$$

Definição 1.11. Chamamos de **comprimento de uma circunferência**, indicado por C , o número real positivo $2\pi R$. Algebricamente

$$C = 2\pi R. \tag{1.1}$$

1.3. MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

Observação 1.12. Quando o arco s é o arco de uma volta, então s é o comprimento C da circunferência. E por definição, tem-se

$$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{2\pi R}{R}.$$

Então,

$$\alpha = 2\pi \text{ rad.}$$

Logo, a circunferência é um arco de 2π rad e o ângulo central de uma volta mede 2π rad.

A seguir será apresentada uma proposição que relaciona a medida do ângulo central α e a medida da área do setor circular determinado por este ângulo.

Proposição 1.13. Considere a circunferência de raio R . Denotando α o ângulo central em radianos e A_s a área do setor circular determinado por este ângulo central, na circunferência unitária, conforme a figura abaixo.

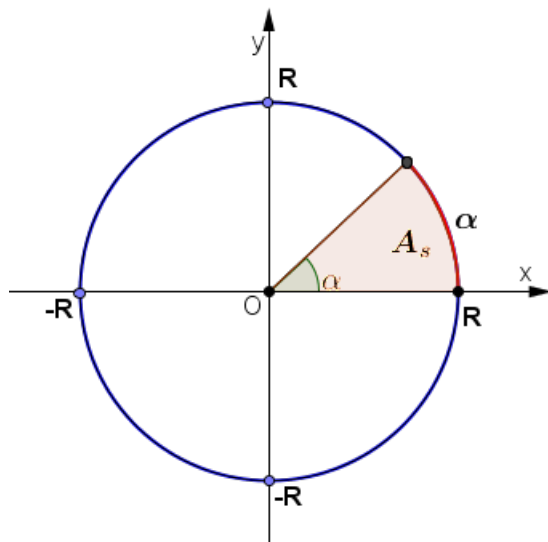


Figura 1.4: Ângulo α , Setor Circular A_s e Arco α .

Então, a medida do ângulo central α é

$$\alpha = \frac{2 \cdot A_s}{R^2}.$$

Demonstração: Sendo o ângulo central de um círculo de raio R igual a 2π rad e sua área determinada por πR^2 . Temos a seguinte proporção entre ângulo central e área

$$2\pi \text{ rad} \rightarrow \pi R^2$$

$$\alpha \text{ rad} \rightarrow A_s.$$

Realizando as devidas operações obtemos

$$\alpha = \frac{2 \cdot A_s}{R^2}.$$

■

Observação 1.14. Na circunferência unitária temos

$$\alpha = 2 \cdot A_s.$$

Conclui-se então que a medida do ângulo central é α radianos quando a área do seu setor circular é $\frac{\alpha}{2}$ unidades de área.

Observação 1.15. Se o ângulo central α , da circunferência unitária, estiver expresso em graus, temos

$$\alpha = \frac{360 \cdot A_s}{\pi R^2},$$

Como $R = 1$,

$$\alpha = \frac{360 \cdot A_s}{\pi}.$$

Observação 1.16. Pode-se relacionar a medida **radiano** com a medida **grau**. De fato, uma volta completa na circunferência possui 360° ou, em radianos, 2π rad, então pode-se concluir que

$$180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad \text{ou seja,} \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Um ângulo pode ter o valor real que desejar. No entanto, a semirreta que dá o ângulo (com outra semirreta fixa, de referência) completa uma volta após 360° , duas voltas após 720° , etc., ou uma volta no sentido contrário, e nesse caso diz-se que descreveu um ângulo de -360° . Então um ângulo ϕ pode ser escrito na forma:

$$\phi = \alpha + k \cdot 360^\circ,$$

em que k é um número inteiro e α é o resto da divisão de ϕ por 360 e também o ângulo desejado.

No entanto, é necessário definir univocamente a aplicação que dá o ângulo definido por duas retas que se interceptam. Portanto, e para esse efeito, medem-se os ângulos num domínio que vai de 0° a 360° (ou, o que é equivalente, de 0 a 2π radianos).

1.4 Circunferência Trigonométrica

Antes de definir a circunferência trigonométrica, segue a definição de circunferência orientada.

Definição 1.17. Uma circunferência de centro O e raio R é dita **orientada** quando possui o sentido anti-horário do percurso como positivo.

Definição 1.18. **Circunferência trigonométrica** (ou ciclo trigonométrico) é uma circunferência orientada de raio unitário para a qual se adota como sentido positivo o anti-horário e se escolhe um ponto $A = (1, 0)$ como origem dos arcos.

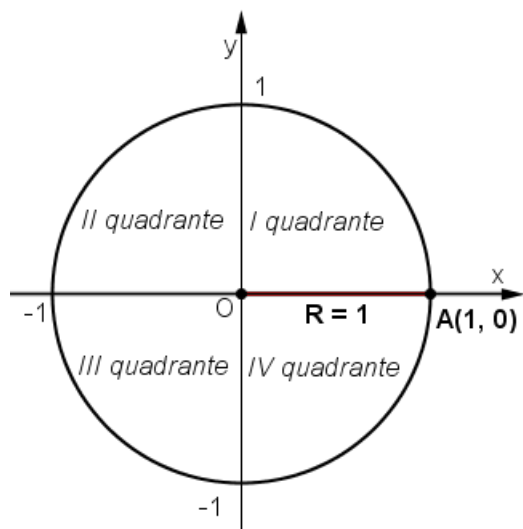


Figura 1.5: Ciclo Trigonométrico.

Observação 1.19. De acordo com a figura acima o ciclo trigonométrico está dividido em quatro quadrantes, numerados de 1 a 4, a partir do segmento \overline{OA} , no sentido positivo.

1.5 Funções Trigonométricas Circulares

Nesta seção estudaremos as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência unitária. Estas funções tem uma propriedade muito interessante que é a periodicidade, o que permite muitas aplicações na matemática e em outras ciências, como por exemplo na Física.

Relembremos a definição de uma função periódica.

Definição 1.20. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **periódica** quando existe um número não nulo $T \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 1.21. Se uma função é periódica, então $f(x + kT) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ chama-se o período da função f .

1.5.1 Função Seno e Função Cosseno

Considere o setor circular \widehat{AOP} para definir as funções seno e cosseno, respectivamente, marca-se a projeção do ponto P no eixo Oy e no eixo Ox , conforme Figura 1.6.

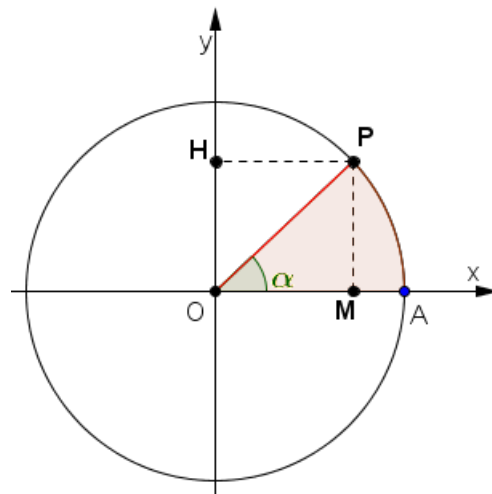


Figura 1.6: Ângulo circular.

Portanto,

$$\text{sen}(\alpha) = OH \quad \text{e} \quad \text{cos}(\alpha) = OM.$$

O **seno** de um determinado ângulo central é a medida do segmento contido no eixo Oy , onde uma de suas extremidades é o ponto $(0,0)$ e a outra é a projeção do ponto da circunferência que determina o ângulo central, sobre o próprio eixo Oy , Figura 1.7.

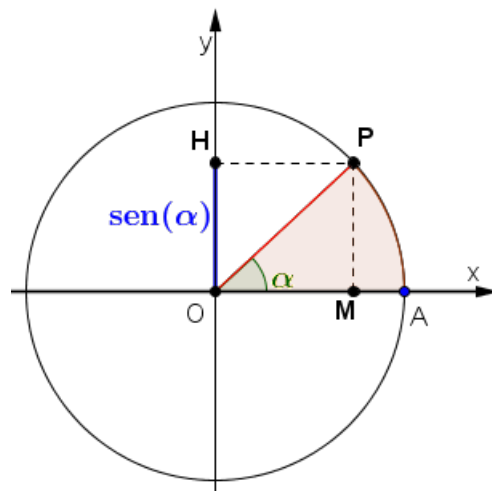


Figura 1.7: $\text{sen}(\alpha)$

No caso do **coseno** de certo ângulo central, ele é a medida do segmento contido no eixo Ox , onde uma extremidade também é o ponto $(0,0)$ e a outra é a projeção do mesmo ponto da circunferência, sobre o próprio eixo Ox , Figura 1.8.

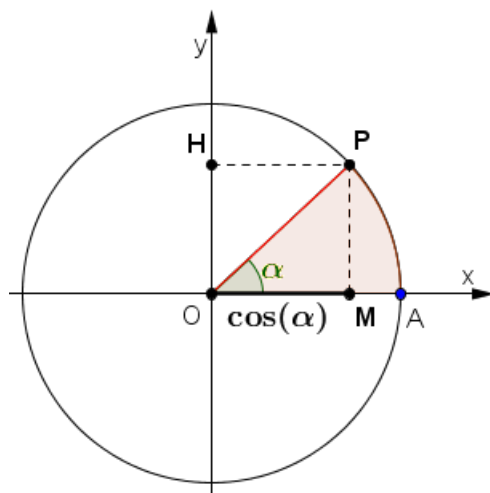


Figura 1.8: $\cos(\alpha)$

Já a Figura 1.9 ilustra o **gráfico da função seno**. Através deste gráfico fica fácil ver que a função seno é **periódica** de período 2π , o **domínio é todo o conjunto dos números reais** e a **imagem** é o intervalo $[-1, 1]$. Este gráfico da função seno pode ser chamado de **senoide**.

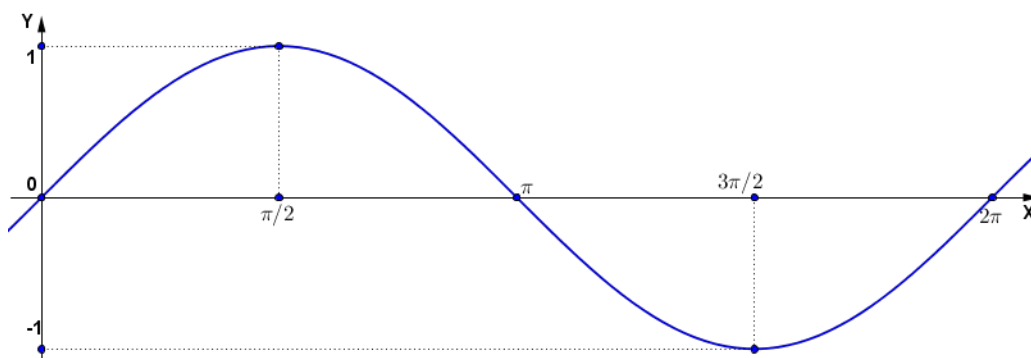


Figura 1.9: Gráfico da função seno.

A Figura 1.10 representa o **gráfico da função cosseno**. Também após uma análise, observa-se que a função cosseno possui o mesmo período (2π), domínio (\mathbb{R}) e imagem ($[-1, 1]$) da função seno. O gráfico da função cosseno também pode receber um nome específico, **cossenoide**.

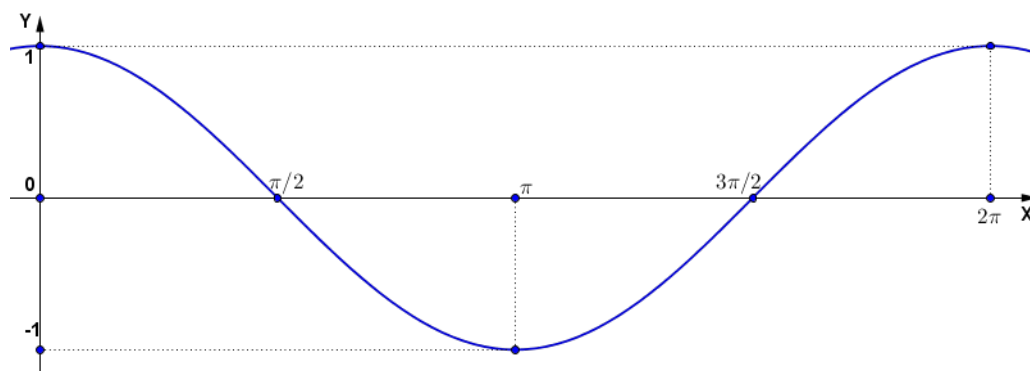


Figura 1.10: Gráfico da função cosseno.

1.5.2 Função Tangente

Definidas as funções seno e cosseno, pode-se definir outras funções trigonométricas.

Definição 1.22. *Define-se a função **tangente**, por*

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)},$$

sempre que $\text{cos}(\alpha) \neq 0$.

A função tangente é definida como quociente entre as funções seno e cosseno, assim seu domínio fica restrito aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero. Como $\text{cos}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro, isso implica que o domínio da função tangente é

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Utilizando semelhança de triângulos entre os triângulos OAT e OMP , podemos definir, geometricamente, a **tangente de** α como sendo a medida algébrica do segmento \overline{AT} , pois $\overline{AT} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$. Com $A = (1, 0)$ e T a interseção da reta \overrightarrow{OP} com a reta perpendicular ao eixo Ox no ponto A (eixo das tangentes). Onde O é a origem do sistema cartesiano e P é a outra extremidade do arco determinado pelo ângulo central α , e M a projeção do ponto P sobre o eixo Ox , conforme a Figura 1.11.

Então temos,

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} = \overline{AT}.$$

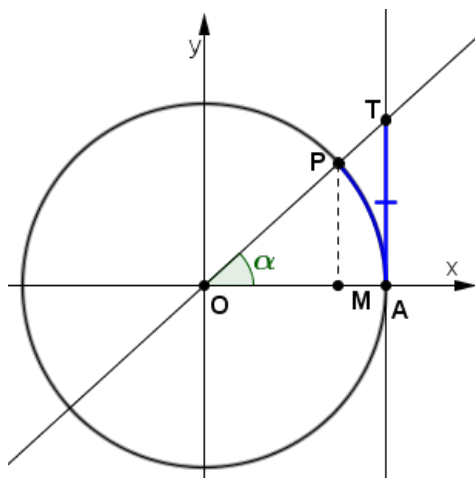


Figura 1.11: Tangente no Ciclo Trigonométrico.

Usando cálculo diferencial pode-se mostrar que o gráfico da função tangente possui a seguinte forma:

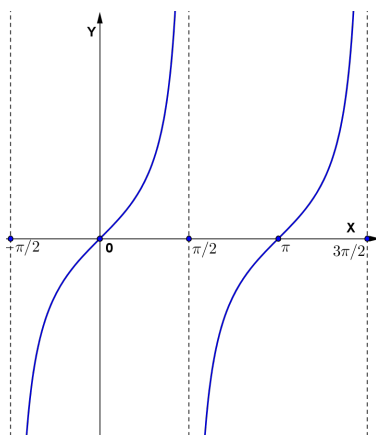


Figura 1.12: Função Tangente.

Observação 1.23. Note que enquanto o domínio é o conjunto $D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$, a imagem é todo o conjunto \mathbb{R} .

1.6 Função Cotangente

Agora definimos a função cotangente.

Definição 1.24. A função trigonométrica **cotangente** é definida por

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)},$$

sempre que $\sin(\alpha) \neq 0$.

1.6. FUNÇÃO COTANGENTE

De forma análoga à função tangente, o domínio da cotangente estará definido para $\text{sen}(\alpha) \neq 0$. Como $\text{sen}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha = k\pi$, com k inteiro, então o domínio da função cotangente é

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Podemos utilizar a semelhança de triângulos entre os triângulos OHT e OMP para mostrar que $\overline{HT} = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$. Com O sendo a origem do sistema cartesiano e P é a outra extremidade do arco determinado pelo ângulo central α , $H = (0, 1)$, T a interseção da reta \overleftrightarrow{OP} com a reta perpendicular ao eixo Oy no ponto H (eixo das cotangentes) e M a projeção do ponto P sobre o eixo Ox . Veja Figura 1.13. Então defini-se, geometricamente, *cotangente de α* como sendo a medida algébrica do segmento \overline{HT} .

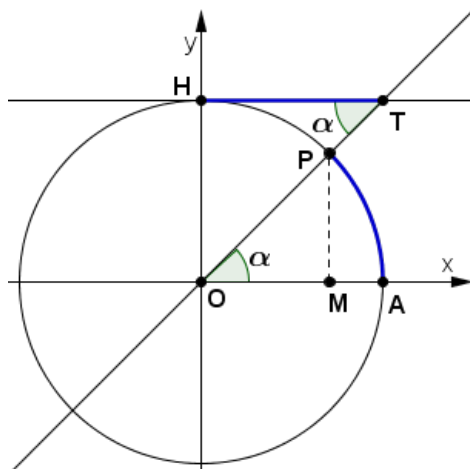


Figura 1.13: Cotangente.

O gráfico da função cotangente está representado abaixo.

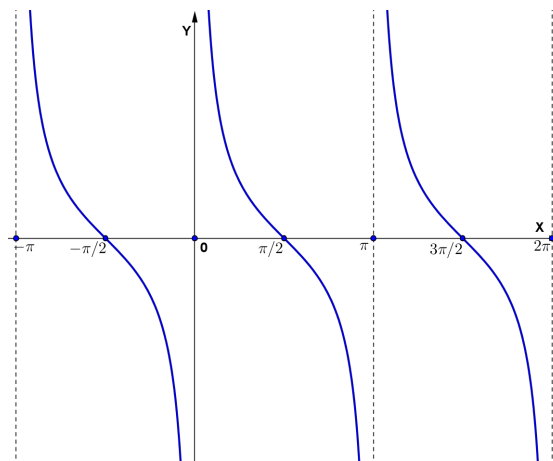


Figura 1.14: Função Cotangente.

Observação 1.25. A imagem da função cotangente é conjunto dos números reais.

1.7 Função Secante

Define-se agora a função secante.

Definição 1.26. A função *secante* é definida por

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)},$$

com $\cos(\alpha) \neq 0$.

Conforme definição, a função secante só estará definida quando $\cos(\alpha) \neq 0$. Então o domínio da função secante é

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aplicando nos triângulos OSP e OMP a semelhança de triângulos, podemos perceber que o segmento $\overline{OS} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$. Com $O = (0, 0)$, P é a outra extremidade do ângulo central α , M a projeção do ponto P sobre o eixo Ox e S a interseção da reta tangente à circunferência no ponto P e o eixo Ox , conforme Figura 1.15.

Então:

$$\sec(\alpha) = \overline{OS} = \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

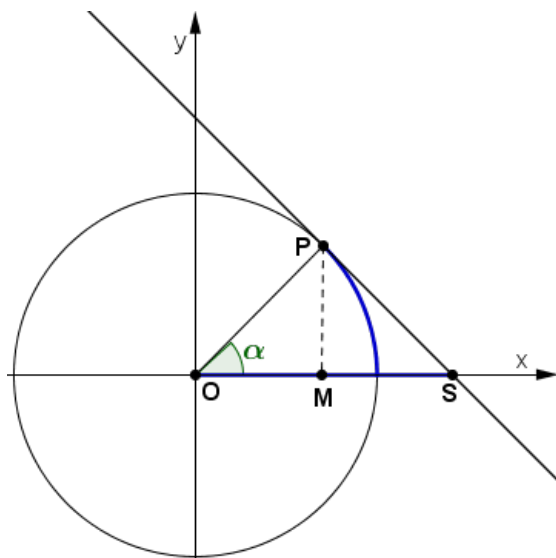


Figura 1.15: Secante.

O gráfico da função secante está representado na Figura 1.16.

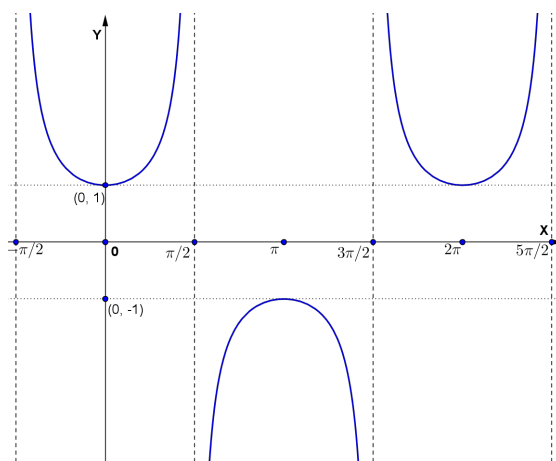


Figura 1.16: Função Secante.

Observação 1.27. A função secante possui como conjunto imagem

$$Im(\sec(\alpha)) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

1.8 Função Cossecante

Definiremos agora a função cossecante.

Definição 1.28. A função *cossecante* é definida da seguinte forma

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)},$$

com $\text{sen}(\alpha) \neq 0$.

Vide definição, a função cossecante somente estará definida quando $\text{sen}(\alpha) \neq 0$. Logo o domínio da função cossecante de α é o conjunto

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na circunferência trigonométrica, utilizando a semelhança de triângulos entre OMP e ORP tem-se que $\overline{OR} = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$. Com $O = (0, 0)$ e R a interseção da reta tangente à circunferência no ponto P com o eixo Oy . Onde P é outra extremidade do ângulo central α e M é a projeção do ponto P sobre o eixo Ox , conforme Figura 1.17.

De forma semelhante à função secante, pode-se esboçar o gráfico da função cossecante, Figura 1.18.

Observação 1.29. Note que a imagem é o conjunto

$$Im(\csc(\alpha)) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

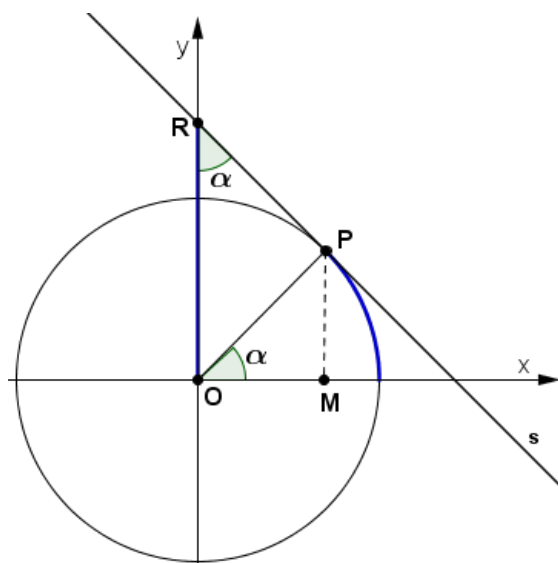


Figura 1.17: Cossecante.

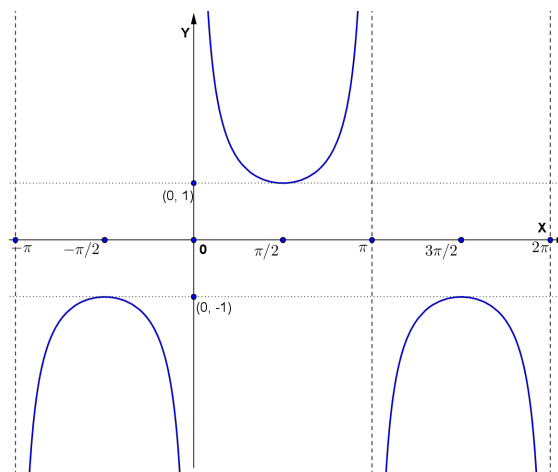


Figura 1.18: Função Cossecante.

1.9 Propriedades das Razões Trigonômétricas

A partir do Ensino Fundamental II são estudadas as razões trigonométricas e algumas de suas propriedades fundamentais, que por sua vez auxiliam significativamente na resolução de problemas trigonométricos. Portanto, nesta seção iremos fazer um breve resumo de algumas propriedades das razões trigonométricas. Uma prova detalhada pode ser encontrada em [9] e [12].

A primeira tabela refere-se a definição das funções trigonométricas derivadas das funções seno e cosseno.

Tabela 1.1: Funções.

$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$
$\cot(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$
$\text{csc}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$
$\text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$

Esta segunda tabela apresenta as principais relações fundamentais trigonométricas.

Tabela 1.2: Relações Fundamentais.

$\text{cos}^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$
$1 + \tan^2(x) = \text{sec}^2(x)$
$\cot^2(x) + 1 = \text{csc}^2(x)$

Esta próxima tabela ilustra o seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de dois ângulos.

Tabela 1.3: Operações com Ângulos.

$\text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen}(\beta) \text{cos}(\gamma) + \text{sen}(\gamma) \text{cos}(\beta)$
$\text{cos}(\beta + \gamma) = \text{cos}(\beta) \text{cos}(\gamma) - \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma)$
$\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan(\beta) + \tan(\gamma)}{1 - \tan(\beta) \tan(\gamma)}$
$\text{sen}(\beta - \gamma) = \text{sen}(\beta) \text{cos}(\gamma) - \text{sen}(\gamma) \text{cos}(\beta)$
$\text{cos}(\beta - \gamma) = \text{cos}(\beta) \text{cos}(\gamma) + \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma)$
$\tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\beta) \tan(\gamma)}$

A quarta tabela nos mostra o seno, cosseno e tangente de arcos duplos.

Tabela 1.4: Arco Duplo.

$\text{sen}(2\gamma) = 2\text{sen}(\gamma) \cos(\gamma)$
$\cos(2\gamma) = \cos^2(\gamma) - \text{sen}^2(\gamma)$
$\tan(2\gamma) = \frac{2\tan(\gamma)}{1-\tan^2(\gamma)}$

Esta tabela apresenta o seno, cosseno e tangente do arco metade.

Tabela 1.5: Arco Metade.

$\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$
$\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$
$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$

Para esta última tabela apresentamos as derivadas das funções trigonométricas.

Tabela 1.6: Derivadas.

$\frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = \cos(x)$
$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\text{sen}(x)$
$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$
$\frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\text{csc}^2(x)$
$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x) \tan(x)$
$\frac{d}{dx}(\text{csc}(x)) = -\text{csc}(x) \cot(x)$

Capítulo 2

Funções Hiperbólicas

Neste capítulo revisaremos a hipérbole, focando nas funções hiperbólicas, citando as suas principais propriedades, suas inversas, as derivadas, além disso, no final faremos algumas comparações entre as funções circulares e hiperbólicas. Este capítulo foi baseado nas obras de Alhadad(2013) [1], Winterle(2000, p.193-204) [17].

2.1 A Hipérbole

Seja θ um plano qualquer, então podemos definir a *hipérbole* da seguinte forma.

Definição 2.1. Chamamos de **Hipérbole** o conjunto de todos os pontos de θ cuja a diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos de θ é constante.

Analiticamente podemos definir a hipérbole da seguinte forma: Considerando dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a θ , $2c$ a distância entre esses pontos e um número real positivo a de modo que $2a < 2c$, onde $2a$ é a constante da Definição 2.1, temos

$$h = \{P \in \theta / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\},$$

em que $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ denotam a distância entre os pontos P e F_1 , P e F_2 , respectivamente.

Para possibilitar um traçado melhor da hipérbole, tecermos considerações a respeito de seus elementos, faremos a construção da Figura 2.1 a seguir explanada.

Considere no plano θ dois pontos quaisquer F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$. Denotando C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, tracemos uma circunferência de centro C e raio c .

Dado um valor arbitrário $a < c$, sobre F_1F_2 marque a partir de C os pontos A_1 e A_2 tais que $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$. Por estes pontos tracemos duas cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2 . As extremidade destas cordas são os vértices de um retângulo $MNPQ$. Tracemos as retas r e s que contêm as diagonais do referido retângulo e, por fim, a hipérbole conforme a Figura 2.1 (curvas γ e δ).

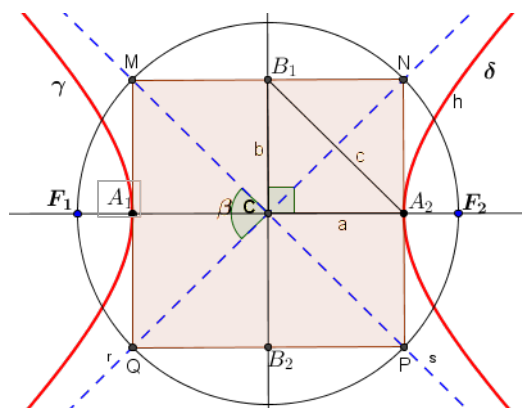


Figura 2.1: Esboço da Hipérbole.

Com base nesta figura temos os elementos da hipérbole.

2.1.1 Elementos

- **Focos:** são os pontos F_1 e F_2 ;
- **Distância focal:** é a distância $2c$ entre os focos;
- **Centro:** é o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- **Vértices:** são os pontos A_1 e A_2 ;
- **Eixo real:** é o segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$;
- **Eixo imaginário:** é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$, com $\overline{B_1B_2} \perp \overline{A_1A_2}$ em C ;
- **Assíntotas:** são as retas r e s ;
- **Ramos da hipérbole:** γ e δ .

Observação 2.2. Note que os pontos A_1 e A_2 são pontos da hipérbole porque satisfazem a definição 2.1. Na verdade, para A_1 , tem-se

$$d(A_1, F_1) = c - a \quad e \quad d(A_1, F_2) = a + c$$

e

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = |-2a| = 2a.$$

Observação 2.3. O retângulo $MNPQ$ tem dimensões $2a$ e $2b$, onde a tem a medida do semi-eixo real e b a medida do semi-eixo imaginário. Do triângulo CA_2B_1 , obtemos a relação

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (2.1)$$

2.1. A HIPÉRBOLE

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos vértices. A tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Esta particularidade constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico de uma hipérbole.

Com o que foi visto na construção da hipérbole, esta fica determinada quando se conhece o centro C e os valores a e b (ou a e c ou b e c). De fato, a partir destes elementos constrói-se o retângulo $MNPQ$ e, conseqüentemente, as assíntotas r e s , e daí, os dois ramos da hipérbole.

O ângulo β assinalado na Figura 2.1 é chamado abertura da hipérbole.

Chama-se *excentricidade* da hipérbole o número

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

Observação 2.4. Quanto maior a excentricidade, maior será a abertura, ou seja, mais "abertos" estarão os ramos da hipérbole. Quando $a = b$, o retângulo $MNPQ$ se transforma num quadrado e as assíntotas serão perpendiculares. A hipérbole neste caso é denominada hipérbole equilátera.

2.1.2 Equação Reduzida

Após termos definido a hipérbole e citado os seus elementos, apresentaremos agora sua equação reduzida quando os focos são paralelos aos eixos coordenados.

Consideremos a hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo Ox . Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole (Figura 2.2) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

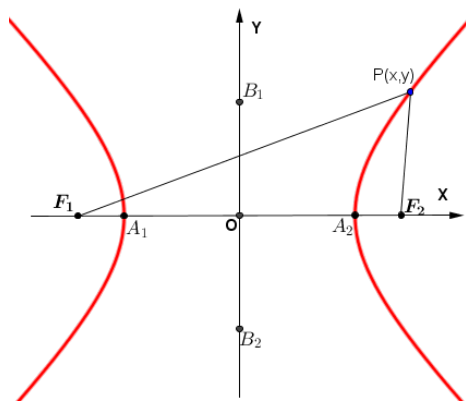


Figura 2.2: Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pela Definição 2.1, temos

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

ou, em coordenadas

$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a.$$

Daí,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Somando $\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$ aos dois lados da igualdade, tem-se

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + 2a.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade,

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Isolando o termo com radical obtêm-se,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 - 4a^2 = 4cx - 4a^2.$$

Logo,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando novamente ao quadrado,

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4.$$

Então,

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4.$$

Cancelando os termos iguais,

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4.$$

Assim,

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Colocando o fator comum em evidência tem como resultado,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Observe que em (2.1) pode-se escrever $b^2 = c^2 - a^2$, assim,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Com isso conclui-se que a equação reduzida da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.2}$$

No caso de focos sobre o eixo Oy , observando a Figura 2.3 e com procedimento análogo, obtemos a equação reduzida

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

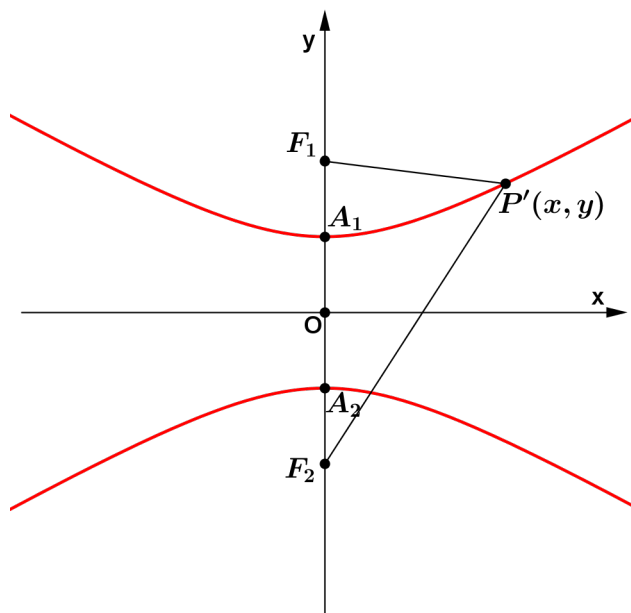


Figura 2.3: Hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

No caso em que a hipérbole tenha o centro num ponto diferente da origem do sistema cartesiano, isto é, em um ponto $C = (x_0, y_0)$, tem-se como equação reduzida

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

quando o eixo real for paralelo ao eixo Ox .

E no caso em que o eixo real for paralelo ao eixo Oy , tem-se a equação

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

2.1.3 A Hipérbole $xy = k$

Estudaremos agora a hipérbole de equação $xy = k$, com $k > 0$. Observe que x e y não podem ser nulos e que quanto maior for o valor de x (ou y), menor será o valor de y (ou x). Significa dizer que, geometricamente a hipérbole se aproxima indefinidamente dos eixos Ox e Oy sem tocá-los. Dessa forma, os eixos coordenados servem como assíntotas para a hipérbole.

- Para x e y positivos tem-se um dos ramos da hipérbole no primeiro quadrante;
- Para x e y negativos o outro ramo ficará posicionado no terceiro quadrante.

Podemos agora apresentar algumas proposições. Esta primeira proposição refere-se ao retângulo que possui como vértices, a origem do sistemas de coordenadas, um ponto pertencente ao eixo Ox , um ponto na hipérbole e o último, um ponto no eixo Oy . Este retângulo é chamado de **retângulo de coordenadas** do ponto A , com A sendo o ponto da hipérbole.

Proposição 2.5. *A área do retângulo $OPAM$, conforme Figura 2.4, é igual a k , independentemente da escolha do ponto A .*

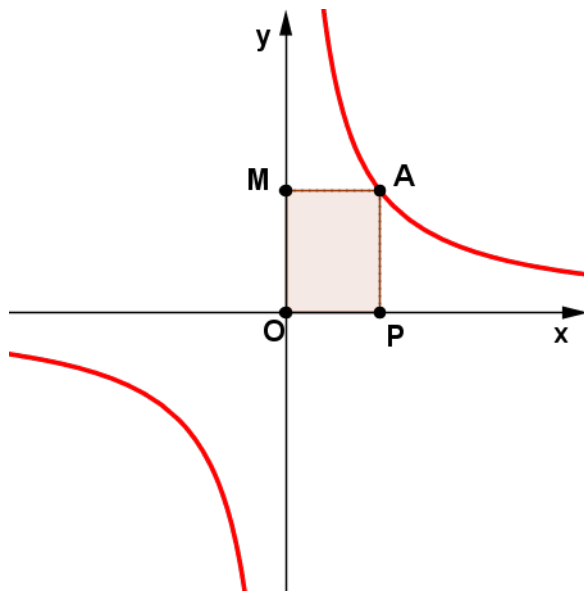


Figura 2.4: Retângulo de coordenadas.

Demonstração: Note que as coordenadas do ponto A são, $x = \overline{OP}$ e $y = \overline{OM}$. Daí a área do retângulo $OPAM$ é

$$A_{OPAM} = \overline{OP} \cdot \overline{OM} = xy = k,$$

para qualquer ponto da hipérbole. ■

A proposição a seguir refere-se a simetria dos ramos da hipérbole e ao centro de simetria existente.

Proposição 2.6. *A hipérbole possui um **centro de simetria** pois os seus dois ramos são simétricos em relação a origem do sistema de coordenadas O .*

Demonstração: Com efeito, seja o retângulo de coordenadas $OPAM$ do ponto $A = (OP, OM)$ situado no primeiro quadrante (Figura 2.5). Tome P' simétrico de P , em relação ao eixo Oy , M' simétrico a M em relação ao eixo Ox . Sendo A' o ponto do plano de coordenadas $(\overline{OP'}, \overline{OM'})$, então A' pertence à hipérbole pois os retângulos $OPAM$ e $OP'A'M'$ possuem a mesma área, onde

$$xy = \overline{OP} \cdot \overline{OM} = \overline{OP'} \cdot \overline{OM'} = k,$$

com $OP = OP'$ e $OM = OM'$.

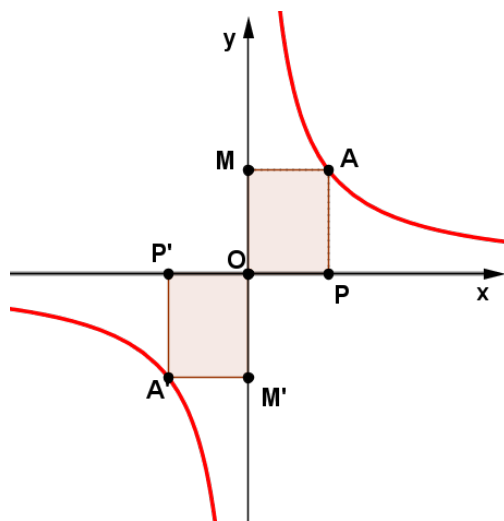


Figura 2.5: Simetria em relação a origem.

O ponto A' é simétrico ao ponto A em relação do sistema de coordenadas, pois as coordenadas $|OM|$ e $|OM'|$ são iguais. ■

2.1.4 Hipérbole Rotacionada

Considere, os pares usuais de eixos coordenados, Ox e Oy e dois novos eixos OX e OY , obtidos através de uma rotação de um ângulo β no sentido anti-horário, conforme a Figura 2.6.

A relação entre as coordenadas no plano xOy e as coordenadas no plano XOY é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.7. *Se um ponto A possui coordenadas (x, y) e após uma rotação de um ângulo β em torno da origem passa a possuir coordenadas (X, Y) , então as equações de transformação do sistema original ao novo são:*

$$x = X \cos(\beta) - Y \sin(\beta) \quad e \quad y = X \sin(\beta) + Y \cos(\beta). \quad (2.4)$$

Demonstração: Da Figura 2.6, temos que $x = \overline{OP}$, $X = \overline{OL}$, $y = \overline{OM} = \overline{AP}$ e $Y = \overline{OT} = \overline{AL}$, assim

$$x = \overline{OP} = \overline{OV} - \overline{PV}$$

e

$$y = \overline{AP} = \overline{PQ} + \overline{QA}.$$

Daí

$$x = X \cos(\beta) - Y \sin(\beta) \quad (2.5)$$

e

$$y = X \sin(\beta) + Y \cos(\beta). \quad (2.6)$$

■

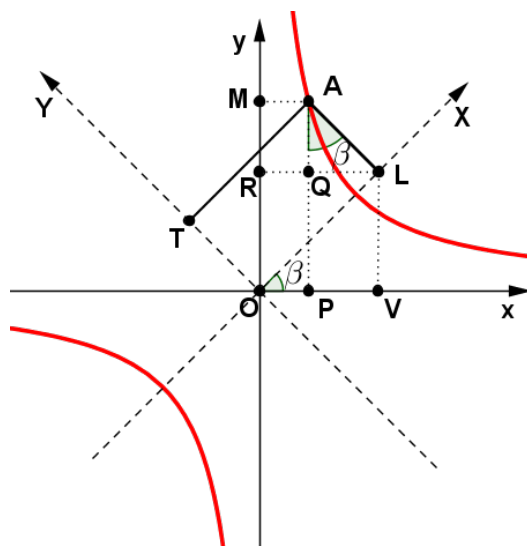


Figura 2.6: Hipérbole rotacionada.

Seja a hipérbole de equação $xy = k$ no sistema de coordenadas xOy . Ao multiplicarmos por um $m > 0$ a coordenada x de um ponto (x, y) do plano, obtemos (mx, y) . Com essa multiplicação, observe que a hipérbole se transformará na hipérbole de equação $xy = mk$, pois a coordenada y de cada ponto permanece inalterada e a coordenada x ficará multiplicada por m . Multiplicando agora por $\frac{1}{m}$ a coordenada y do ponto (mx, y) , obtemos o ponto $(mx, \frac{y}{m})$. Note que se (x, y) pertence a hipérbole $xy = k$, então o ponto $(mx, \frac{y}{m})$ pertence a mesma hipérbole e é distinto de (x, y) quando $m \neq 1$.

Definição 2.8. Uma *rotação* sobre a hipérbole $xy = k$, com coeficiente $m > 0$, é uma operação que **transforma** (x, y) em $(mx, \frac{y}{m})$, onde ambos os pontos pertencem à hipérbole.

2.2 Ângulo Hiperbólico

Antes de definirmos ângulo hiperbólico, vamos determinar a equação da hipérbole $xy = k$ com $k = \frac{1}{2}$, nos novos eixos coordenados OX e OY após uma rotação de um ângulo $\beta = \frac{\pi}{4}$ radianos.

Com as Equações (2.5) e (2.6) e a hipérbole $xy = \frac{1}{2}$, obtemos

$$(X \cos(\beta) - Y \sin(\beta)) \cdot (X \sin(\beta) + Y \cos(\beta)) = \frac{1}{2}.$$

Daí para $\beta = \frac{\pi}{4}$ radianos, então

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right) = \frac{1}{2}.$$

2.2. ÂNGULO HIPERBÓLICO

Colocando o fator $\frac{\sqrt{2}}{2}$ em evidência,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y)(X + Y) = \frac{1}{2} (X^2 - Y^2) = \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação correspondente à hipérbole $xy = \frac{1}{2}$ nos novos eixos OX e OY após a rotação de $\frac{\pi}{4}$ é,

$$X^2 - Y^2 = 1. \quad (2.7)$$

Observação 2.9. Chamaremos a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ de **hipérbole unitária** pois a distância do centro aos vértices é igual a 1.

Definição 2.10. Sejam A e S dois pontos do mesmo ramo da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$. A região delimitada pelos segmentos \overline{OA} e \overline{OS} e pela parte da hipérbole compreendida entre os pontos A e S é chamada **setor hiperbólico**, ver Figura 2.7.

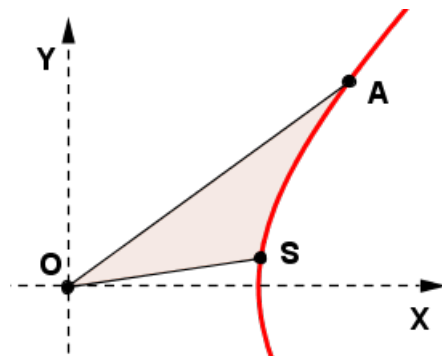


Figura 2.7: Setor Hiperbólico.

Considere agora a hipérbole de equação $X^2 - Y^2 = 1$ de centro O , no plano cartesiano XOY .

Definição 2.11. Dados A e S dois pontos em um mesmo ramo da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, definimos o **ângulo hiperbólico** γ , entre os segmentos \overline{OS} e \overline{OA} , como sendo duas vezes a área do setor hiperbólico determinado por O , A e S , conforme Figura 2.8.

Vimos no capítulo 1 que o ângulo circular terá valor mínimo de 0° e valor máximo 360° (após devidas reduções, se necessárias). No caso do ângulo hiperbólico, seu valor varia do $-\infty$ para o $+\infty$. É importante lembrar que γ não representa, de forma alguma, um ângulo como acontece com as funções circulares, enquanto um é dado em graus (ou radianos) o outro é dado em unidade de área.

2.2. ÂNGULO HIPERBÓLICO

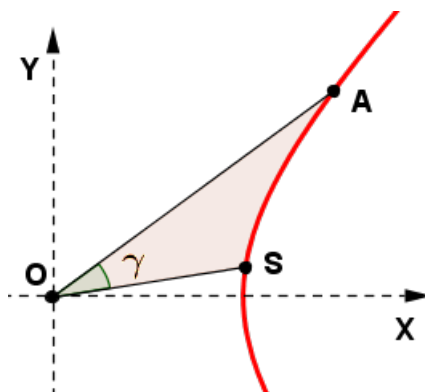


Figura 2.8: Ângulo Hiperbólico.

Observação 2.12. Note que o ângulo trigonométrico circular e o ângulo hiperbólico são definidos de maneiras análogas, apesar de possuírem conceitos diferentes. Pois conforme Observação 1.14, a medida do ângulo central do círculo trigonométrico é igual ao dobro da área do setor circular por ele limitado. Ou seja, se um determinado ângulo tem medida γ radianos então a área do setor circular por ele representado mede $\frac{\gamma}{2}$ unidades de área.

De forma análoga, os ângulos hiperbólicos são representados com relação à área do setor hiperbólico. Dado um ponto A na hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, determina-se um setor OSA e um ângulo $AÔS$. Então o ângulo terá medida γ quando a área do setor hiperbólico por ele determinado for de $\frac{\gamma}{2}$ unidades de área.

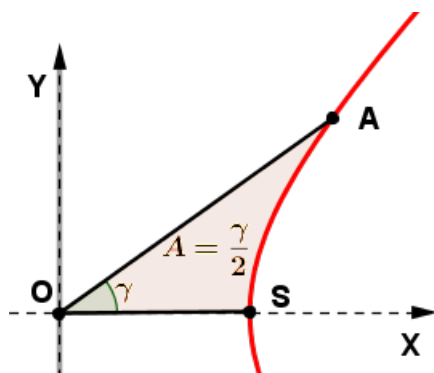


Figura 2.9: Setor Hiperbólico.

Observe que a área do setor hiperbólico é maior ou igual, em um único caso, a área do setor circular, definido por um mesmo ângulo.

De acordo com a proposição a seguir, na hipérbole de equação $x^2 - Y^2 = 1$ podemos "transportar" um ângulo hiperbólico qualquer para o sistema de coordenadas XOY onde a medida do novo ângulo hiperbólico seja igual a medida do ângulo anterior.

Proposição 2.13. Seja a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, dado um ângulo hiperbólico γ , determinado pelos pontos O , A e S , existem pontos A' e S' pertencentes à hipérbole,

2.2. ÂNGULO HIPERBÓLICO

tais que S' pertence ao eixo OX e o ângulo hiperbólico determinado por O , A' e S' é igual ao ângulo γ .

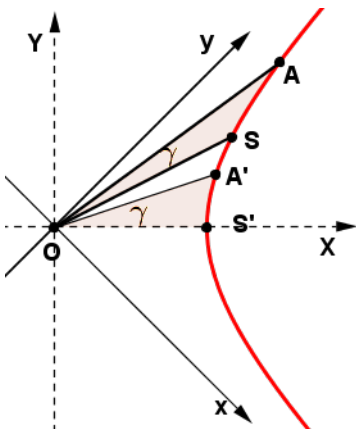


Figura 2.10: Preservação de Ângulo Hiperbólico.

Demonstração: Ver referência [9], Propriedade 3.3. ■

A proposição abaixo apresenta a relação da área do setor hiperbólico com o logaritmo neperiano.

Proposição 2.14. *Se V e P as projeções, respectivamente, dos pontos S e A da hipérbole $xy = \frac{1}{2}$ no eixo Ox (conforme Figura 2.12) e OSA o setor hiperbólico de área A_{OSA} , então*

$$A_{OSA} = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{OV}{OP} \right) \right|.$$

Demonstração: Conforme Figura 2.11, observe que os retângulos $OPAM$ e $OVSF$ possuem área $\frac{1}{2}$.

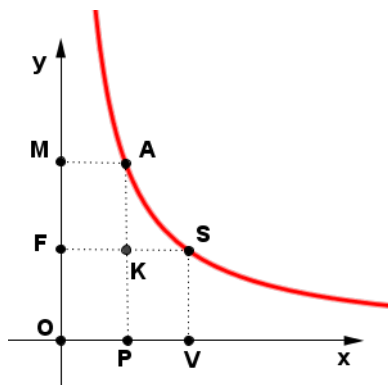


Figura 2.11: Dois pontos na Hipérbole.

2.2. ÂNGULO HIPERBÓLICO

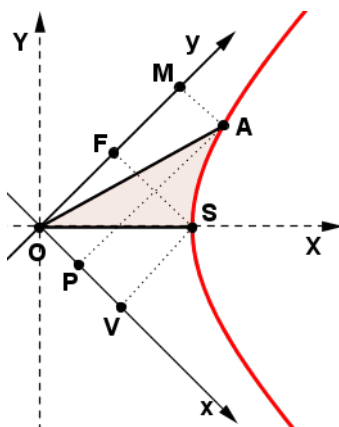


Figura 2.12: Setor na Hipérbole rotacionada.

Daí, os retângulos $PVSK$ e $FKAM$ também possuem áreas iguais. Para calcular a área do setor hiperbólico é necessário rotacionar a hipérbole em 45° , no sentido anti-horário e tomar como referência a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, nos eixos XOY , veja Figura 2.12.

Note na Figura 2.12, que:

$$A_{OPA} = \frac{1}{2}A_{OPAM} = \frac{1}{2}A_{OVSF} = A_{OVSA}.$$

E ainda,

$$A_{OVSA} = A_{OPA} + A_{PVSA} = A_{OSA} + A_{OVSA}.$$

Logo,

$$A_{OSA} = A_{PVSA}.$$

Assim o que precisamos calcular é a área de $PVSA$. Então, voltando ao sistema xOy e à hipérbole $xy = \frac{1}{2}$, a área de $PVSA$ é a área sob o gráfico $y = \frac{1}{2x}$, compreendida entre $x = OP$ e $x = OV$, conforme Figura 2.13.

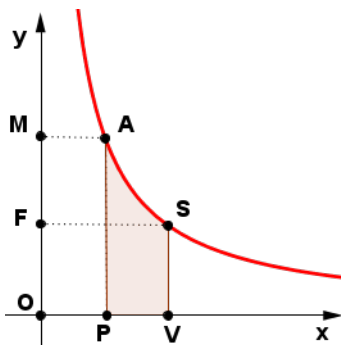


Figura 2.13: Área $PVSA$.

$$A_{OSA} = A_{PVSA} = \left| \int_{OP}^{OV} \frac{1}{2x} dx \right| = \frac{1}{2} |\ln OV - \ln OP| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{OV}{OP} \right) \right|. \quad (2.8)$$

2.2. ÂNGULO HIPERBÓLICO

Como queríamos demonstrar. ■

Um raciocínio análogo nos leva a

$$A_{OSA} = A_{PVSA} = A_{MFSA} = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{OM}{OF} \right) \right|, \quad (2.9)$$

que pode ser calculada integrando a função $x = \frac{1}{2y}$.

Observação 2.15. Na Figura 2.13, quando o ponto A estiver à esquerda do ponto S então

$$A_{PVSA} = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{OV}{OP} \right) \right|.$$

E quando o ponto A estiver à direita do ponto S tem-se

$$A_{PVSA} = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{OP}{OV} \right) \right|.$$

Note também que quando o ponto A se distancia de S pela direita, o segmento OP cresce indefinidamente. E como o comprimento OV está fixado, temos que A_{PVSA} também cresce indefinidamente. Quando A se distancia de S pela esquerda, o segmento OP tende a zero e $\ln(OP)$ decresce indefinidamente. Com isso, A_{PVSA} também cresce indefinidamente. Ou seja, $A_{OSA} = A_{PVSA} \geq 0$.

De acordo com a Figura 2.14, coloquemos a seguinte convenção:

- se o ponto A estiver acima do eixo OX , o ângulo que ele define terá medida positiva.
- se o ponto A estiver abaixo do eixo OX , o ângulo que ele define terá medida negativa.

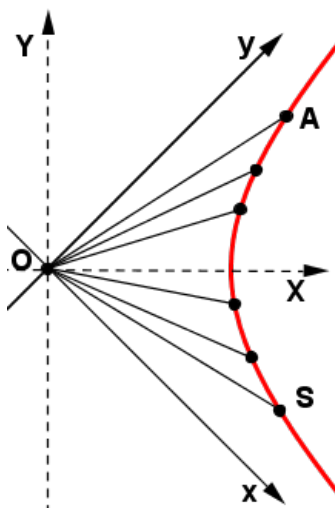


Figura 2.14: Pontos na hipérbole em relação aos eixos X e Y .

Assim, o ângulo hiperbólico assumindo valores $\pm \frac{1}{2} A_{OSA}$, terá (como mencionado anteriormente) valores definidos entre $-\infty$ e $+\infty$.

2.3 Funções Hiperbólicas

O objetivo desta seção é definir, na hipérbole unitária, as funções hiperbólicas, para isso, consideremos a seguinte figura:

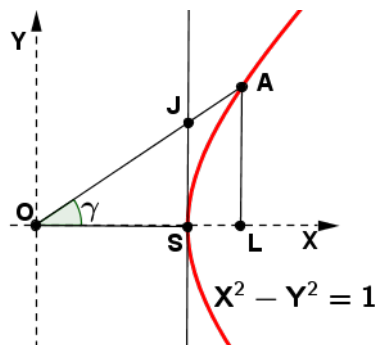


Figura 2.15: Definindo as Funções Hiperbólicas

Seja A um ponto da cônica de maneira que $A_{OSA} = \frac{\gamma}{2}$, dado γ o ângulo hiperbólico e \overleftrightarrow{SJ} a reta perpendicular ao eixo OX e tangente a curva no ponto S .

Definição 2.16. Definimos as funções **seno e cosseno hiperbólicos**, respectivamente, por

$$\sinh(\gamma) = \frac{LA}{OS} \quad e \quad \cosh(\gamma) = \frac{OL}{OS}.$$

Como $\overline{OS} = 1$, então

$$\sinh(\gamma) = LA \quad e \quad \cosh(\gamma) = OL. \quad (2.10)$$

Com as funções seno e cosseno hiperbólicos definidas, podemos definir as demais funções hiperbólicas.

Definição 2.17. Definimos as funções **tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicos**, respectivamente por:

$$\tanh(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)}, \quad \coth(\gamma) = \frac{\cosh(\gamma)}{\sinh(\gamma)}, \quad \operatorname{sech}(\gamma) = \frac{1}{\cosh(\gamma)} \quad e \quad \operatorname{csch}(\gamma) = \frac{1}{\sinh(\gamma)}.$$

No capítulo inicial foram apresentadas algumas propriedades da trigonometria circular, de forma análoga, apresentaremos algumas das propriedades das funções hiperbólicas.

Propriedade 2.18. $\cosh(\gamma)^2 - \sinh(\gamma)^2 = 1$.

Demonstração: Conforme Figura 2.15, temos que no ponto A , $X = OL$ e $Y = LA$. Então substituindo na hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, temos:

$$(OL)^2 - (LA)^2 = 1.$$

Logo,

$$\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1. \quad (2.11)$$

■

Propriedade 2.19. $\tanh(\gamma) = SJ$, no qual J é o ponto de interseção entre a reta tangente à hipérbole no ponto S e a reta determina pelos pontos O e A .

Demonstração: Utilizando semelhança de triângulos entre os triângulos OSJ e OLA , da Figura 2.15, temos que:

$$\frac{LA}{OL} = \frac{SJ}{OS}.$$

Como $OS = 1$,

$$\tanh(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)} = \frac{LA}{OL} = SJ.$$

■

Propriedade 2.20. $1 - \tanh^2(\gamma) = \operatorname{sech}^2(\gamma)$.

Demonstração: De fato dividindo (2.11) por $\cosh^2(\gamma)$ temos:

$$\frac{\cosh^2(\gamma)}{\cosh^2(\gamma)} - \frac{\sinh^2(\gamma)}{\cosh^2(\gamma)} = \frac{1}{\cosh^2(\gamma)},$$

ou seja,

$$1 - \tanh^2(\gamma) = \operatorname{sech}^2(\gamma). \quad (2.12)$$

■

Propriedade 2.21. $\coth^2(\gamma) - 1 = \operatorname{csch}^2(\gamma)$.

Demonstração: De fato dividindo (2.11) por $\sinh^2(\gamma)$ temos:

$$\frac{\cosh^2(\gamma)}{\sinh^2(\gamma)} - \frac{\sinh^2(\gamma)}{\sinh^2(\gamma)} = \frac{1}{\sinh^2(\gamma)},$$

ou seja,

$$\coth^2(\gamma) - 1 = \operatorname{csch}^2(\gamma). \quad (2.13)$$

■

2.3.1 Funções Hiperbólicas e Exponenciais

De acordo com a Figura 2.16, sendo A um ponto da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, tal que $A_{OSA} = \frac{\theta}{2}$, isto é, A determina um ângulo hiperbólico de medida θ . Note que $A = (OL, LA) = (\cosh(\theta), \sinh(\theta))$ no sistema de coordenadas XOY (veja (2.10)) e $A = (OP, OM)$ no sistema xOy .

De acordo com (2.5) e (2.6), e como o ângulo de rotação é $\beta = 45^\circ$, temos:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

e

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)).$$

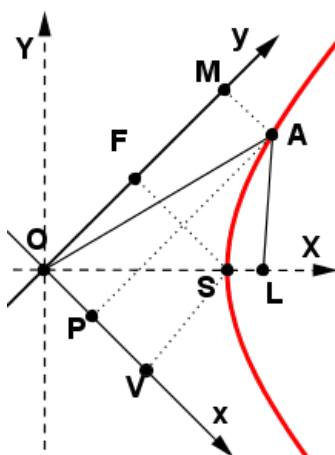


Figura 2.16: Coordenadas de A no sistema XOY e no xOy .

As coordenadas do ponto S são, $X = 1$ e $Y = 0$ no sistema XOY e $x = OV$ e $y = OF$ no sistema xOy . Então,

$$OV = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad OF = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Com isso, substituindo OV e OF em (2.8) e em (2.9), temos

$$A_{PVSA} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))} \right] = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

e

$$A_{MFSA} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)).$$

Como $A_{OSA} = A_{PVSA}$, então

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta)).$$

Ou seja,

$$\theta = -\ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta)).$$

Ou ainda,

$$e^{-\theta} = \cosh(\theta) - \sinh(\theta). \quad (2.14)$$

Analogamente, como $A_{OSA} = A_{MFSA}$, então

$$e^{\theta} = \cosh(\theta) + \sinh(\theta). \quad (2.15)$$

Logo, somando (2.14) e (2.15), obtém-se

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad (2.16)$$

e subtraindo as mesmas equações,

$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}. \quad (2.17)$$

Observação 2.22. Note que

$$(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))(\cosh(\theta) - \sinh(\theta)) = e^\theta \cdot e^{-\theta} = 1. \quad (2.18)$$

Com as funções seno e cosseno hiperbólicos definidas na forma de funções exponenciais, podemos definir as demais funções hiperbólicas.

Definição 2.23. Definimos as funções *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante hiperbólicas*, respectivamente por:

$$\tanh(\theta) = \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1}, \quad \coth(\theta) = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}, \quad \operatorname{sech}(\theta) = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}} \quad e \quad \operatorname{csch}(\theta) = \frac{2}{e^\theta - e^{-\theta}}.$$

2.4 Algumas Propriedades das Funções Hiperbólicas

Baseada no trabalho de Pino G. (2013, p.1-31) [12], esta seção apresenta algumas propriedades das funções hiperbólicas.

2.4.1 Seno e Cosseno Hiperbólico

A função seno hiperbólico ($\sinh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$) é uma função real que possui domínio e imagem sendo todo o conjunto dos números reais. Enquanto que o cosseno hiperbólico ($\cosh(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$) possui como domínio o conjunto de todos os números reais e a imagem o conjunto definido pelo intervalo $[1, +\infty)$.

O gráfico abaixo representa a função seno hiperbólico.

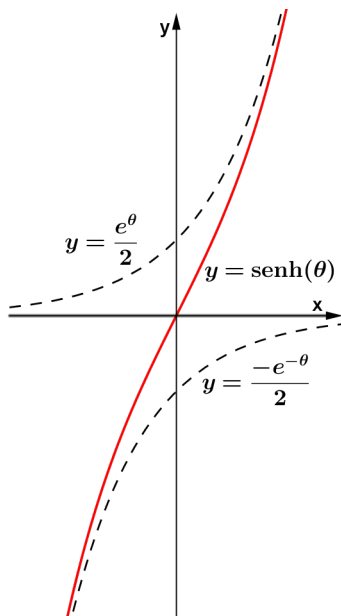


Figura 2.17: Gráfico do Seno Hiperbólico.

Note que o seno hiperbólico é uma função ímpar, pois $\sinh(\theta) = -\sinh(-\theta)$. A próxima figura, representa o gráfico da função cosseno hiperbólico.

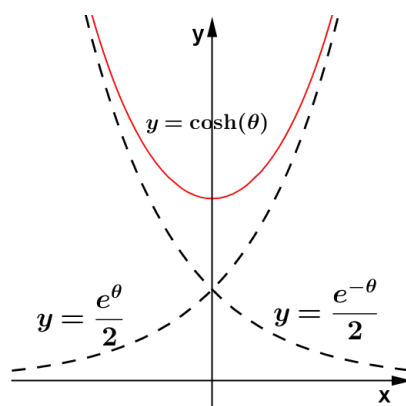


Figura 2.18: Gráfico do Cosseno Hiperbólico.

O cosseno hiperbólico é uma função par, pois $\cosh(\theta) = \cosh(-\theta)$.

Observação 2.24. *As funções hiperbólicas seno e cosseno, não são funções periódicas.*

A seguir serão provadas algumas relações com arcos, das funções seno e cosseno hiperbólico.

Proposição 2.25. *O seno e o cosseno hiperbólicos da soma dos arcos α e β são dados por:*

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cdot \cosh(\alpha) \quad (2.19)$$

e

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\beta). \quad (2.20)$$

Demonstração: Seja $\theta = (\alpha + \beta)$ temos,

$$\sinh(\theta) = \sinh(\alpha + \beta)$$

e

$$\cosh(\theta) = \cosh(\alpha + \beta).$$

Pelas Equações 2.16 e 2.17, temos:

$$\sinh(\alpha + \beta) = \frac{e^{(\alpha+\beta)} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \frac{e^\alpha \cdot e^\beta - e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta}}{2}$$

e

$$\cosh(\alpha + \beta) = \frac{e^{(\alpha+\beta)} + e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \frac{e^\alpha \cdot e^\beta + e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta}}{2}.$$

Agora, através das Equações 2.14 e 2.15, e após realizar as devidas substituições, os produtos, cancelar os simétricos aditivos e simplificar, tem-se:

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cdot \cosh(\alpha)$$

e

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) + \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\beta).$$

Como queríamos demonstrar. ■

Corolário 2.26. *O seno e o cosseno hiperbólicos da diferença dos arcos α e β são dados por:*

$$\sinh(\alpha - \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) - \sinh(\beta) \cdot \cosh(\alpha) \quad (2.21)$$

e

$$\cosh(\alpha - \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) - \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\beta). \quad (2.22)$$

Demonstração: Sendo $\theta = (\alpha - \beta) = (\alpha + (-\beta))$, então a demonstração segue de modo análogo à anterior, basta substituir o β por $-\beta$. ■

Corolário 2.27. *Para o ângulo duplo vale as seguintes relações:*

$$\sinh(2\alpha) = 2\sinh(\alpha) \cosh(\alpha) \quad (2.23)$$

e

$$\cosh(2\alpha) = 2\sinh^2(\alpha) + 1. \quad (2.24)$$

ou

$$\cosh(2\alpha) = 2\cosh^2(\alpha) - 1. \quad (2.25)$$

Demonstração: De fato, como $\sinh(2\alpha) = \sinh(\alpha + \alpha)$ e $\cosh(2\alpha) = \cosh(\alpha + \alpha)$, então pela Demonstração (2.4.1) temos,

$$\sinh(2\alpha) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\alpha) = 2\sinh(\alpha) \cosh(\alpha).$$

e

$$\cosh(2\alpha) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) = \cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha).$$

Usando (2.11) temos as duas opções de substituição,

$$\cosh(2\alpha) = 1 + \sinh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = 2\sinh^2(\alpha) + 1,$$

ou

$$\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + \cosh^2(\alpha) - 1 = 2\cosh^2(\alpha) - 1.$$

■

Proposição 2.28. *O seno e o cosseno hiperbólicos de arco metade são dados por:*

$$\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(\beta) - 1}{2}}. \quad (2.26)$$

e

$$\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(\beta) + 1}{2}}. \quad (2.27)$$

Demonstração: Denotando $2\alpha = \beta$ e através da Equação 2.24 temos,

$$\cosh(2\alpha) = 2\sinh^2(\alpha) + 1.$$

Logo,

$$\cosh(\beta) = 2\sinh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1.$$

Isolando o termo $\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right)$,

$$\sinh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(\beta) - 1}{2}}.$$

Agora pela Equação (2.25) temos,

$$\cosh(\beta) = 2\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1.$$

Isolando o termo $\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right)$,

$$\cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(\beta) + 1}{2}}.$$

■

Proposição 2.29. *As fórmulas para transformar somas e diferenças da trigonometria hiperbólica em produtos são:*

$$\frac{1}{2}\sinh(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sinh(\alpha - \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\beta), \quad (2.28)$$

ou

$$\frac{1}{2}\sinh(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\sinh(\alpha - \beta) = \sinh(\beta) \cdot \cosh(\alpha). \quad (2.29)$$

Demonstração: Somando os membros das Equações (2.19) e (2.21) temos,

$$\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta) = 2\sinh(\alpha) \cosh(\beta).$$

Dividindo por 2 esta equação, obtemos:

$$\frac{1}{2}\sinh(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sinh(\alpha - \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\beta).$$

Agora, subtraindo as Equações (2.19) e (2.21) temos,

$$\sinh(\alpha + \beta) - \sinh(\alpha - \beta) = 2\sinh(\beta) \cosh(\alpha).$$

Dividindo por 2 esta equação, obtemos:

$$\frac{1}{2}\sinh(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\sinh(\alpha - \beta) = \sinh(\beta) \cdot \cosh(\alpha).$$

■

Proposição 2.30. *As fórmulas do produto entre cosseno hiperbólico e entre seno hiperbólico.*

$$\frac{1}{2} \cosh(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cosh(\alpha - \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta) \quad (2.30)$$

e

$$\frac{1}{2} \cosh(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \cosh(\alpha - \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\beta). \quad (2.31)$$

Demonstração: Adicionando as Equações (2.20) e (2.22) temos,

$$\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta) = 2 \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta).$$

Dividindo esta soma por 2,

$$\frac{1}{2} \cosh(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cosh(\alpha - \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta).$$

Subtraindo as Equações (2.20) e (2.22) temos,

$$\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta) = \sinh(\alpha) \cdot \sinh(\beta).$$

Dividindo esta diferença por 2,

$$\frac{1}{2} \cosh(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cosh(\alpha - \beta) = \cosh(\alpha) \cdot \cosh(\beta).$$

■

2.4.2 Função Inversa do Seno Hiperbólico

Para uma determinada função $f : X \rightarrow Y$ possuir uma inversa $g : Y \rightarrow X$ é necessário e suficiente que ela possua uma correspondência biunívoca entre X e Y , isto é, seja bijetora. Com isso, o objetivo dessa subseção é encontrar a inversa da função seno hiperbólico e da função cosseno hiperbólico.

Ao analisarmos o gráfico da função seno hiperbólico veremos que ela é uma função bijetora, com isso existe inversa. A função inversa de seno hiperbólico de α , chama-se **argumento seno hiperbólico de α** , representado por $\arg \sinh(\alpha)$ ou $\sinh^{-1}(\alpha)$.

O domínio desta função inversa é o intervalo $(-\infty, +\infty)$ e a imagem também é o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Lembramos que

$$y = \arg \sinh(\alpha) = \sinh^{-1}(\alpha),$$

se, e somente se,

$$\alpha = \sinh(y).$$

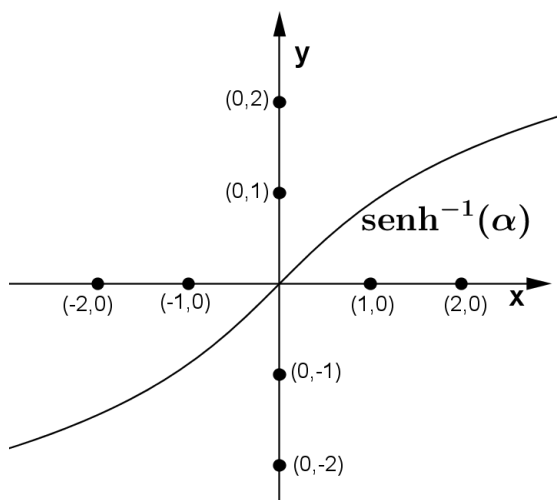


Figura 2.19: Gráfico da Função inversa do seno hiperbólico.

A função inversa do seno hiperbólico também pode ser expressa através da função logarítmica.

Como $\alpha = \sinh(y)$, então $\alpha^2 = \sinh^2(y)$. Mas por (2.11) temos,

$$\cosh(y) = \sqrt{\alpha^2 + 1}.$$

Daí, usando (2.15)

$$e^y = \cosh(y) + \sinh(y) = \sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha.$$

Assim,

$$\ln e^y = \ln \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha \right).$$

Portanto,

$$y = \arg \sinh(\alpha) = \ln \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha \right).$$

Logo,

$$\arg \sinh(\alpha) = \ln \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha \right).$$

2.4.3 Função Inversa do Cosseno Hiperbólico

Observando o gráfico da função cosseno hiperbólico nota-se que ela não é uma função bijetora, logo não possui inversa. Então, para definir a inversa do cosseno hiperbólico faz-se necessário a restrição do domínio.

Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, dada por $f(\alpha) = \cosh(\alpha)$, a sua função inversa chama-se **argumento cosseno hiperbólico de α** , representado por $\arg \cosh(\alpha) = \cosh^{-1}(\alpha)$.

O domínio desta função inversa é o intervalo $[1, +\infty)$ e o conjunto imagem é o intervalo $[0, +\infty)$. Assim

$$y = \arg \cosh(\alpha) = \cosh^{-1}(\alpha),$$

se, e somente se,

$$\alpha = \cosh(y).$$

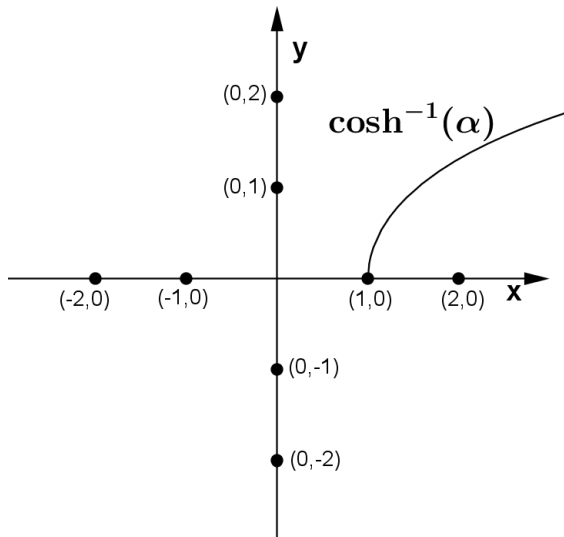


Figura 2.20: Gráfico da Função inversa do cosseno hiperbólico.

A função inversa do cosseno hiperbólico também pode ser expressa com auxílio da função logarítmica. Precisamente, temos

$$\arg \cosh(\alpha) = \ln \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right). \quad (2.32)$$

De fato, como $\alpha = \cosh(y)$, então $\alpha^2 = \cosh^2(y)$. Mas

$$\cosh^2(y) - 1 = \sinh^2(y).$$

Isolando o $\sinh(y)$,

$$\sinh(y) = \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Então por (2.15) temos,

$$e^y = \cosh(y) + \sinh(y) = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Assim,

$$\ln e^y = \ln \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right).$$

Portanto,

$$y = \ln \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right).$$

Logo,

$$\arg \cosh(\alpha) = \ln \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right).$$

2.4.4 Tangente hiperbólica.

Representada por $\tanh(\alpha)$, com α real, a tangente hiperbólica é uma função estritamente crescente e é definida por

$$\tanh(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}},$$

ou

$$\tanh(\alpha) = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}.$$

A tangente hiperbólica possui domínio como sendo o intervalo $(-\infty; +\infty)$ e imagem o intervalo $[-1, 1]$. Seu gráfico está ilustrado na Figura 2.21.

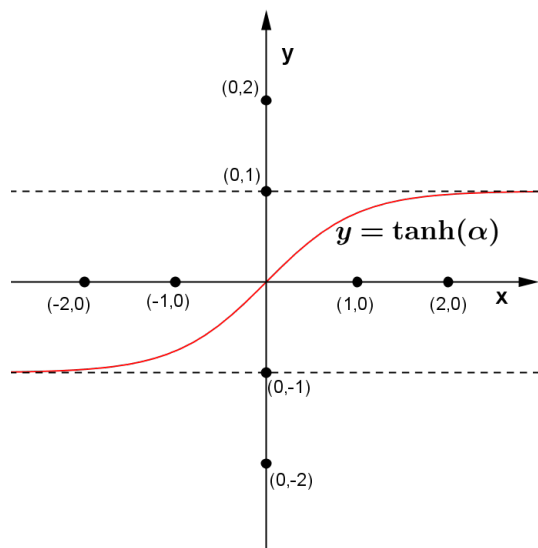


Figura 2.21: Gráfico da Função Tangente Hiperbólica.

Observe que a função tangente hiperbólica é uma função ímpar, ou seja, $f(\alpha) = \tanh(\alpha) = -\tanh(-\alpha) = -f(-\alpha)$.

Apresentaremos agora algumas proposições da função tangente hiperbólica.

Proposição 2.31. Para todo α e β , temos

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha) \cdot \tanh(\beta)}. \quad (2.33)$$

Demonstração: De fato, como $\tanh(\delta) = \frac{\sinh(\delta)}{\cosh(\delta)}$, então para $\delta = \alpha + \beta$,

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\cosh(\alpha + \beta)}.$$

Daí, combinando (2.19) e (2.20),

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\sinh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\beta) \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta) + \sinh(\alpha) \sinh(\beta)}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cosh(\alpha) \cosh(\beta)$ temos,

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sinh(\alpha) \cosh(\beta)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)} + \frac{\sinh(\beta) \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)}}{\frac{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)} + \frac{\sinh(\alpha) \sinh(\beta)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)}}.$$

Logo,

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha) \cdot \tanh(\beta)}.$$

■

Proposição 2.32. *Para todo α e β , temos*

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\tanh(\alpha) - \tanh(\beta)}{1 - \tanh(\alpha) \cdot \tanh(\beta)}. \quad (2.34)$$

Demonstração: Como $\tanh(\delta) = \frac{\sinh(\delta)}{\cosh(\delta)}$, basta denotar $\delta = \alpha - \beta$, fazer as substituições, isto é,

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\sinh(\alpha - \beta)}{\cosh(\alpha - \beta)}.$$

Através de (2.21) e (2.22), temos

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\sinh(\alpha) \cosh(\beta) - \sinh(\beta) \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta) - \sinh(\alpha) \sinh(\beta)}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cosh(\alpha) \cosh(\beta)$ temos,

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sinh(\alpha) \cosh(\beta)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)} - \frac{\sinh(\beta) \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)}}{\frac{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)} - \frac{\sinh(\alpha) \sinh(\beta)}{\cosh(\alpha) \cosh(\beta)}}.$$

Logo,

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\tanh(\alpha) - \tanh(\beta)}{1 - \tanh(\alpha) \cdot \tanh(\beta)}.$$

■

Proposição 2.33. *Para todo α , temos*

$$\tanh(2\alpha) = \frac{2 \tanh(\alpha)}{1 + \tanh^2(\alpha)}. \quad (2.35)$$

Demonstração: De fato, para $\alpha = \beta$, usando (2.33) temos,

$$\tanh(\alpha + \beta) = \tanh(2\alpha) = \frac{2 \tanh(\alpha)}{1 + \tanh^2(\alpha)}.$$

■

Proposição 2.34. Para todo α , temos

$$\tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(\alpha) - 1}{\cosh(\alpha) + 1}}. \quad (2.36)$$

Demonstração: Partindo da relação $\tanh(\delta) = \frac{\sinh(\delta)}{\cosh(\delta)}$ e fazendo $\delta = \frac{\alpha}{2}$ temos,

$$\tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Assim, por (2.26) e (2.27),

$$\tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{\frac{\cosh(\alpha)-1}{2}}}{\sqrt{\frac{\cosh(\alpha)+1}{2}}}.$$

Logo,

$$\tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(\alpha) - 1}{\cosh(\alpha) + 1}}.$$

■

2.4.5 Função Inversa da Tangente Hiperbólica

Como podemos notar, pelo gráfico da função tangente hiperbólica, ela é bijetora, logo possui inversa. A função inversa da tangente hiperbólica ($\tanh(\alpha)$), chama-se **argumento tangente hiperbólica**. Representado por $\arg \tanh(\alpha)$ ou $\tanh^{-1}(\alpha)$, com α real e pertencente ao eixo Ox . O domínio dessa função é o intervalo $(-1, 1)$ e a imagem é o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Portanto,

$$y = \arg \tanh(\alpha) = \tanh^{-1}(\alpha),$$

se, e somente se,

$$\alpha = \tanh(y).$$

A função inversa da tangente hiperbólica também pode ser expressa por meio da função logarítmica. Precisamente,

$$\arg \tanh(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \right). \quad (2.37)$$

De fato, como $y = \arg \tanh(\alpha)$, então $\alpha = \tanh(y)$. Portanto,

$$\alpha = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^y - \frac{1}{e^y}}{e^y + \frac{1}{e^y}}.$$

Daí,

$$\alpha = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{2y} + 1$,

$$\alpha e^{2y} + \alpha = e^{2y} - 1.$$

fatorando temos,

$$e^{2y}(\alpha - 1) = -1 - \alpha.$$

Dividindo os membros por $\alpha - 1$,

$$e^{2y} = -\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha + 1}{1 - \alpha}.$$

Logo,

$$\ln e^{2y} = \ln \left(\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \right).$$

Daí,

$$2y = \ln \left(\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \right).$$

Isolando a incógnita y ,

$$y = \arg \tanh(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \right).$$

2.4.6 Cotangente Hiperbólica

Representada por $\coth(\alpha)$, com α real e $\alpha \neq 0$, a função cotangente hiperbólica é definida por

$$\coth(\alpha) = \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}.$$

Ela é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, possui como domínio e como imagem os conjuntos $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, respectivamente.

A seguir está representado o esboço do gráfico da função cotangente hiperbólica.

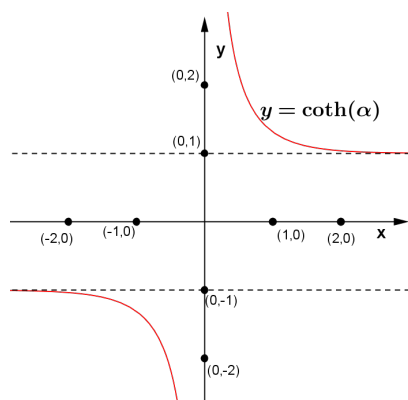


Figura 2.22: Gráfico da Função Cotangente Hiperbólica.

2.4.7 Função Inversa da Cotangente Hiperbólica

Como a cotangente hiperbólica é uma função bijetora (observe a Figura (2.22)) então ela possui uma inversa. A função inversa da cotangente hiperbólica é chamada de **argumento cotangente hiperbólica**, representada por $\arg \coth(\alpha)$ ou ainda $\coth^{-1}(\alpha)$.

A função inversa da cotangente hiperbólica possui como domínio o conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e como imagem o conjunto dos reais não nulo. Portanto,

$$y = \arg \coth(\alpha) = \coth^{-1}(\alpha),$$

se, e somente se,

$$\alpha = \coth(y).$$

O gráfico da função inversa da cotangente hiperbólica é obtido através da simetria do gráfico da função cotangente hiperbólica com respeito a bissetriz $y = x$.

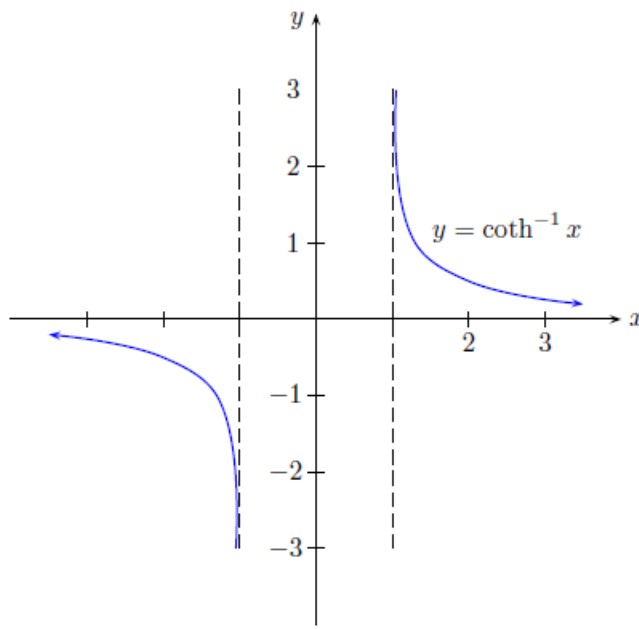


Figura 2.23: Gráfico da Função Inversa da Cotangente Hiperbólica.

Fonte: *Pino G. (2012, p.28)*

A função inversa da cotangente hiperbólica, pode ser expressa por meio da função logarítmica. Isto é,

$$\arg \coth(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right). \quad (2.38)$$

De fato, como

$$\alpha = \coth(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{e^y + \frac{1}{e^y}}{e^y - \frac{1}{e^y}},$$

então

$$\alpha = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}.$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{2y} - 1$, temos

$$\alpha e^{2y} - \alpha = e^{2y} + 1.$$

Fatorando,

$$e^{2y}(\alpha - 1) = \alpha + 1.$$

Dividindo os membros por $\alpha - 1$,

$$e^{2y} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Calculando o logaritmo neperiano em ambos os lados da equação,

$$\ln e^{2y} = \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Logo,

$$2y = \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Portanto,

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right).$$

Então,

$$\arg \coth(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right).$$

2.4.8 Secante Hiperbólica

A secante hiperbólica, definida por

$$\operatorname{sech}(\alpha) = \frac{1}{\cosh(\alpha)} = \frac{2}{e^\alpha + e^{-\alpha}},$$

não é monótona nos reais. Essa função possui como domínio todo o conjunto dos reais e imagem o intervalo $(0, 1]$. A seguir está representado o gráfico da função secante hiperbólica de x .

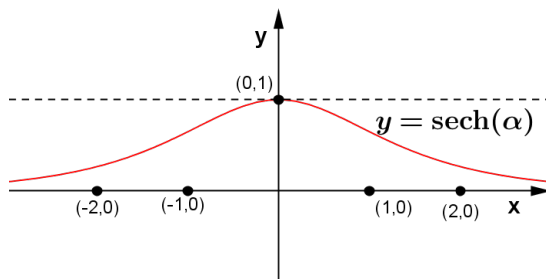


Figura 2.24: Gráfico da Função Secante Hiperbólica.

2.4. ALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

De acordo com o gráfico anterior, nota-se que a função secante hiperbólica não é bijetora. Sendo assim, é preciso restringir o seu domínio para que seja possível encontrar a sua função inversa.

Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$, dada por $f(\alpha) = \operatorname{sech} \alpha$ a sua função inversa é representada por

$$y = \arg \operatorname{sech}(\alpha) = \operatorname{sech}^{-1}(\alpha).$$

Portanto $\alpha = \operatorname{sech}(y)$. O domínio dessa função é o intervalo $(0, 1]$ e a imagem é o intervalo $[0, +\infty)$.

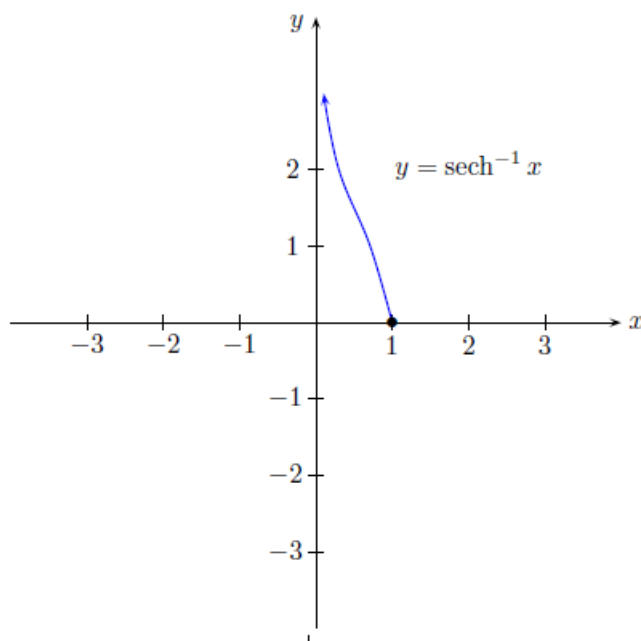


Figura 2.25: Gráfico da Função Inversa da Secante Hiperbólica.

Fonte: *Pino G. (2012, p. 29)*

A função inversa da secante hiperbólica também pode ser representada pela função logarítmica. Isto é,

$$\arg \operatorname{sech}(\alpha) = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right). \quad (2.39)$$

De fato como

$$\alpha = \operatorname{sech}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}},$$

então

$$\alpha = \frac{2e^y}{e^{2y} + 1}.$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{2y} + 1$,

$$\alpha^{2y} + \alpha = 2e^y.$$

Que resulta em,

$$\alpha e^{2y} - 2e^y + \alpha = 0.$$

Logo,

$$e^y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

Daí, aplicando o logaritmo neperiano nos dois lados da igualdade,

$$\ln e^y = \ln \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

Então,

$$y = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right).$$

Ou seja,

$$\arg \operatorname{sech}(\alpha) = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right).$$

2.4.9 Cossecante Hiperbólica

A função cossecante hiperbólica, definida por

$$\operatorname{csch}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\alpha)} = \frac{2}{e^\alpha - e^{-\alpha}},$$

é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

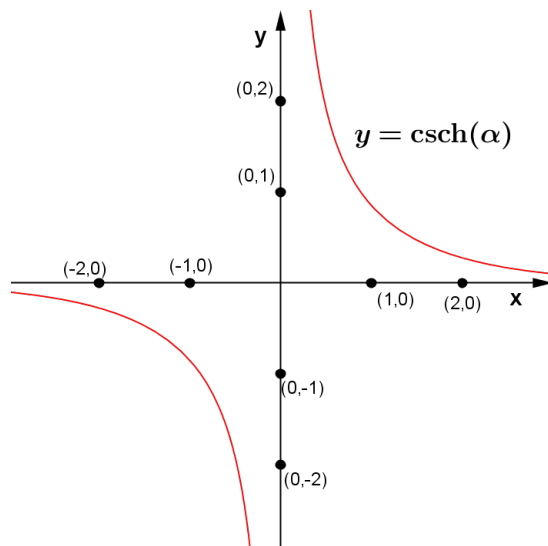


Figura 2.26: Gráfico da Função Cossecante Hiperbólica.

Conforme figura acima é possível perceber que a função cossecante hiperbólico. a função inversa da cossecante hiperbólica é chamada **argumento cossecante hiperbólica**, representada por $y = \arg \operatorname{csch}(\alpha)$ ou $y = \operatorname{csch}^{-1}(\alpha)$. Assim sendo, $\alpha = \operatorname{csch}(y)$.

2.4. ALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

A função $y = \arg \operatorname{csch}(\alpha)$ possui como domínio o conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e imagem os reais não nulo.

O gráfico da função $y = \arg \operatorname{csch}(\alpha)$ é obtida a partir do gráfico da função $y = \operatorname{csch}(\alpha)$ por simetria pela bissetriz $y = x$.

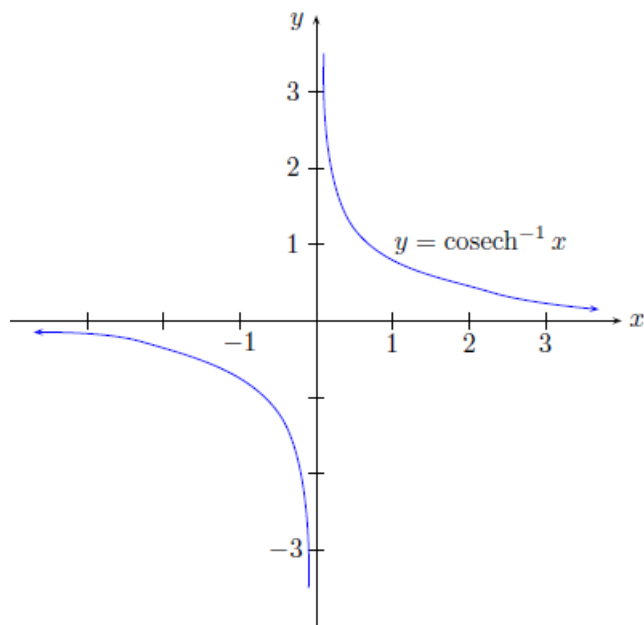


Figura 2.27: Gráfico da Função Inversa da Cossecante Hiperbólica.

Fonte: *Pino G. (2012, p. 31)*

Essa função inversa da cossecante hiperbólica também pode ser expressa na forma de função logarítmica. Isto é,

$$\arg \operatorname{csch}(\alpha) = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}}{|\alpha|} \right). \quad (2.40)$$

De fato como

$$\alpha = \operatorname{csch}(y),$$

então,

$$\alpha = \frac{2}{e^y - e^{-y}} = \frac{2e^y}{e^{2y} - 1}.$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{2y} - 1$,

$$\alpha e^{2y} - \alpha = 2e^y.$$

Resultando assim em,

$$\alpha e^{2y} - 2e^y - \alpha = 0.$$

Logo,

$$e^y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha}.$$

Daí, aplicando o logaritmo neperiano nos dois lados da igualdade,

$$\ln e^y = \ln \frac{1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha}.$$

Então,

$$y = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}}{|\alpha|} \right).$$

Ou seja,

$$\arg \operatorname{csch}(\alpha) = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}}{I\alpha} \right).$$

2.4.10 Derivada das funções hiperbólicas

Nesta subseção mostraremos as derivadas e algumas integrais das principais funções hiperbólicas.

Proposição 2.35. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}(x)) = \operatorname{cosh} x. \quad (2.41)$$

Demonstração: De fato, como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Então,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right).$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}(x)) = \operatorname{cosh} x.$$

■

Proposição 2.36. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosh}(x)) = \operatorname{senh}(x). \quad (2.42)$$

Demonstração: De fato, como

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

então

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosh} x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right).$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosh} x) = \operatorname{senh}(x).$$

■

Proposição 2.37. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2 x. \quad (2.43)$$

Demonstração: Como

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},$$

então

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}.$$

Conforme Equação 2.11, temos

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2(x).$$

■

Proposição 2.38. Para todo $x \in \mathbb{R}^*$, temos

$$\frac{d}{dx}(\coth(x)) = \operatorname{cosech}^2(x). \quad (2.44)$$

Demonstração: Como

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)},$$

então

$$\frac{d}{dx}(\coth(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tanh x} \right).$$

Derivando,

$$\frac{d}{dx}(\coth(x)) = -\frac{\operatorname{sech}^2(x)}{\tanh^2(x)} = \operatorname{csch}^2(x).$$

■

Proposição 2.39. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \tanh(x). \quad (2.45)$$

Demonstração: De fato, como

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)},$$

então

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cosh(x)} \right).$$

Derivando,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \tanh(x).$$

■

Proposição 2.40. Para todo $x \in \mathbb{R}^*$, temos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x) \cdot \operatorname{coth}(x). \quad (2.46)$$

Demonstração: Como

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{sinh}(x)},$$

então

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\operatorname{sinh}(x)} \right).$$

Determinando a derivada do segundo membro,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\frac{\operatorname{cosh}(x)}{\operatorname{sinh}^2(x)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x) \cdot \operatorname{coth}(x).$$

■

2.5 Comparando fórmulas trigonométricas

Baseada nas obras de Iezzi (1993) e de Pino G. (2012), nesta seção faremos uma comparação das fórmulas da trigonometria circular, com as fórmulas da trigonometria hiperbólica.

A primeira tabela faz uma ligeira comparação entre as relações fundamentais.

Tabela 2.1: Relações Fundamentais.

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$	$\operatorname{cosh}^2(x) - \operatorname{sinh}^2(x) = 1$
$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$
$\cot^2(x) + 1 = \operatorname{csc}^2(x)$	$\operatorname{coth}^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x)$

Nessa segunda tabela foi feito a comparação entre as funções tangente, cotangente, secante e cossecante.

2.5. COMPARANDO FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Tabela 2.2: Funções.

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$	$\tanh(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\text{cosh}(x)}$
$\cot(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$	$\coth x = \frac{\text{cosh}(x)}{\text{senh}(x)}$
$\csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$	$\text{csch}(x) = \frac{1}{\text{senh}(x)}$
$\sec(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$	$\text{sech}(x) = \frac{1}{\text{cosh}(x)}$

Agora uma comparação das operações com arcos das funções trigonométricas.

Tabela 2.3: Operações com ângulos.

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen}(\beta) \text{cos}(\gamma) - \text{sen}(\gamma) \text{cos}(\beta)$	$\text{senh}(\beta + \gamma) = \text{senh}(\beta) \text{cosh}(\gamma) + \text{senh}(\gamma) \text{cosh}(\beta)$
$\text{cos}(\beta + \gamma) = \text{cos}(\beta) \text{cos}(\gamma) - \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma)$	$\text{cosh}(\beta + \gamma) = \text{cosh}(\beta) \text{cosh}(\gamma) + \text{senh}(\beta) \text{senh}(\gamma)$
$\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan(\beta) + \tan(\gamma)}{1 - \tan(\beta) \tan(\gamma)}$	$\tanh(\beta + \gamma) = \frac{\tanh(\beta) + \tanh(\gamma)}{1 + \tanh(\beta) \tanh(\gamma)}$
$\text{sen}(\beta - \gamma) = \text{sen}(\beta) \text{cos}(\gamma) + \text{sen}(\gamma) \text{cos}(\beta)$	$\text{senh}(\beta - \gamma) = \text{senh}(\beta) \text{cosh}(\gamma) - \text{senh}(\gamma) \text{cosh}(\beta)$
$\text{cos}(\beta - \gamma) = \text{cos}(\beta) \text{cos}(\gamma) + \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma)$	$\text{cosh}(\beta - \gamma) = \text{cosh}(\beta) \text{cosh}(\gamma) - \text{senh}(\beta) \text{senh}(\gamma)$
$\tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\beta) \tan(\gamma)}$	$\tanh(\beta - \gamma) = \frac{\tanh(\beta) - \tanh(\gamma)}{1 - \tanh(\beta) \tanh(\gamma)}$

Essa próxima tabela compara as equações de arcos duplos.

Tabela 2.4: Arcos duplos.

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\text{sen}(2\gamma) = 2\text{sen}(\gamma) \text{cos}(\gamma)$	$\text{senh}(2\gamma) = 2\text{senh}(\gamma) \text{cosh}(\gamma)$
$\text{cos}(2\gamma) = \text{cos}^2(\gamma) - \text{sen}^2(\gamma)$	$\text{cosh}(2\gamma) = \text{cosh}^2(\gamma) + \text{senh}^2(\gamma)$
$\tan(2\gamma) = \frac{2 \tan(\gamma)}{1 - \tan^2(\gamma)}$	$\tanh(2\gamma) = \frac{2 \tanh(\gamma)}{1 + \tanh^2(\gamma)}$

Agora na 5ª tabela faz-se a comparação entre as equações do arco metade.

2.5. COMPARANDO FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Tabela 2.5: Arco Metade.

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$	$\operatorname{senh}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(\theta)-1}{2}}$
$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$	$\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(\theta)+1}{2}}$
$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$	$\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(\theta)-1}{\cosh(\theta)+1}}$

Essa última, compara as derivadas:

Tabela 2.6: Derivadas.

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}(x)) = \cosh(x)$
$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\operatorname{sen}(x)$	$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \operatorname{senh}(x)$
$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$	$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x)$
$\frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\operatorname{csc}^2(x)$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{coth}(x)) = -\operatorname{csch}^2(x)$
$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x)$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{csc}(x)) = -\operatorname{csc}(x)\cot(x)$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x)\operatorname{coth}(x)$

Capítulo 3

Aplicações

Nesse capítulo, serão abordadas algumas aplicações das funções hiperbólicas. Baseando-se nas obras de Alhadas (2013), Faria (2011), Ruffino (1998), Salgueiro (2013), Silveira (2009) e Talavera (2008), na primeira parte, será mostrada um pouco da história da Catenária bem como uma aplicação do cosseno hiperbólico para a construção do gráfico desta curva através de um exemplo prático. Em seguida, verifica-se utilidade da tangente hiperbólica para o cálculo da velocidade de uma onda do mar.

3.1 Catenária

É originada da palavra latina **catena** que significa corrente ou cadeia. Mas especificamente catenária é a curva plana assumida por um fio homogêneo, de espessura desprezível, quando suspenso por seus dois extremos e sob a ação da gravidade. A Figura 3.1 ilustra tal situação.



Figura 3.1: Corrente formando uma catenária

Fonte:

http://www.iengenharia.org.br/site/noticias/exibe/id_sessao/4/id_noticia/5422/Acredite:-esta-bike-anda.-E-nao-vibra.

3.1.1 Um pouco da história da catenária

Em maio de 1690, o matemático suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705) apresentou oficialmente para a comunidade matemática o problema do fio suspenso propondo um concurso para descobrir a forma da curva. Desafio mostrado em "acta eruditorum", o jornal fundado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).



Figura 3.2: Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: <http://history-computer.com/People/LeibnitzBio.html>

O cientista Galileu Galilei (1564 - 1642) foi um dos pioneiros a esboçar algum resultado relacionado ao problema em questão, esboço este apresentado no seu livro *As Duas Novas Ciências* (1638), no qual julgava que a curva seria uma parábola.



Figura 3.3: Galileu Galilei

Fonte: <http://www.academiadeciencia.org.br/site/2012/08/17/galileu-galilei/>

O problema proposto só foi solucionado cinquenta anos depois por Johann Bernoulli (1667 - 1748), o próprio irmão de Jakob. A rivalidade entre os irmãos Bernoulli aumentou com as tentativas de solucionar o problema do fio suspenso. Johann escreveu uma carta a um amigo, onde em determinada parte dessa carta estava escrito:

Os esforços de meu irmão foram inúteis. Quanto a mim, fui mais feliz, pois encontrara a habilidade (e digo isso sem me gabar, por que deveria esconder a verdade?) para resolvê-lo inteiramente[...]. Na manhã seguinte, cheio de alegria, fui

3.1. CATENÁRIA

encontrar meu irmão, que ainda lutava miseravelmente com esse nó górdio, sem chegar à parte alguma, sempre achando, como Galileu, que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! Eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola porque ela é inteiramente falsa.



Figura 3.4: Jakob e Johann Bernoulli

Fonte: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/bernoulli.htm>

Não foi somente Johann que conseguiu solucionar o problema. Os cientistas Leibniz e Christiaan Huygens (1629 - 1695) também o resolveram. Durante sua adolescência, Huygens conseguiu provar, através de argumentos físicos, que a corrente suspensa não seria uma parábola, mas não conseguiu definir que tipo de curva seria e nem sua equação analítica.



Figura 3.5: Christiaan Huygens

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

Com o passar dos cinquenta anos, Huygens voltou ao desafio solucionando-o através de meios geométricos. Já Johann e Leibniz usaram o procedimento analítico. Esse problema do fio suspenso ficou marcado, no fim do estilo arquimediano, como início público do cálculo.

Leibniz sugeriu o uso da catenária no cálculo como uma forma de tabela logarítmica. Com a análise infinitesimal, foi possível lidar com todo tipo de função. Leibniz e Isaac Newton (1642 - 1727) foram influentes na origem do cálculo, e com a solução do problema da corrente suspensa, tornou-se menos geométrico e mais analítico.

3.1. CATENÁRIA

Ao contrário do que Leibniz pensava a catenária não poderia ser representada por uma função logarítmica. Através de estudos ela pode ser expressa na forma

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + k = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + k,$$

com a sendo uma constante cujo valor está relacionado com os parâmetros físicos e a tensão com a qual ela é segura e k uma constante que depende da escolha feita na colocação do eixo x .

3.1.2 Aplicações no cotidiano

Em situações mais concretas, a catenária vem sendo utilizada há milhares de anos, na engenharia e na arquitetura. Existem relatos que por volta de 400 a.c., os chineses já haviam construído pontes pênsis, no formato da catenária, feitas com traçados de fibras de bambu.

Vejam os a seguir duas situações práticas do problema da catenária.

PROBLEMA 01. Um cabo cilíndrico que liga duas torres de mesma altura e distam 100 metros possui a forma de uma catenária cuja equação é $y = 75(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}})$. Calcule o comprimento do cabo entre essas duas torres.

Solução: Segue inicialmente um esboço da situação.

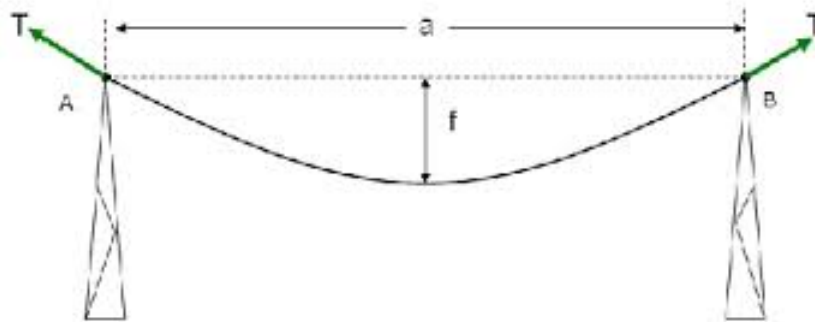


Figura 3.6: Esboço da catenária do problema 1

Fonte: http://fcaglp.unlp.edu.ar/referenciacion/index.php/Técnicas_tradicionales

Desde que $a = 100$ m, adotaremos um sistema de coordenadas de forma que uma torre está na abscissa -50 e a outra na abscissa 50 . Pela equação da catenária a altura é $a = 150$.

A fórmula do comprimento do arco de uma curva é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.1)$$

Então denotando $y = f(x)$, e em seguida substituindo:

$$f(x) = 75(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}).$$

3.1. CATENÁRIA

Derivando a função $f(x)$,

$$f'(x) = 75 \left(\frac{1}{150} \cdot e^{\frac{x}{150}} - \frac{1}{150} \cdot e^{-\frac{x}{150}} \right) = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{150}} - e^{-\frac{x}{150}}).$$

Elevando ao quadrado,

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{75}} - 2 + e^{-\frac{x}{75}}).$$

Agora, adicionando 1 a ambos os membros, temos:

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{75}} - 2 + e^{-\frac{x}{75}}) = \frac{2 + e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}}}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{2 + e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}}}{4}} = \sqrt{\frac{(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}})^2}{4}} = \frac{e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}}{2}.$$

Como há simetria no esboço do problema, a integral definida que iria de -50 a 50 pode ser escrita também da seguinte forma.

$$L = 2 \cdot \int_0^{50} (\sqrt{1 + [f'(x)]^2}) dx = 2 \cdot \int_0^{50} \frac{e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}}{2} dx = \int_0^{50} (e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}) dx.$$

Separando em duas integrais:

$$L = \int_0^{50} e^{\frac{x}{150}} dx + \int_0^{50} e^{-\frac{x}{150}} dx. \quad (3.2)$$

Denotemos

$$I_1 = \int_0^{50} e^{\frac{x}{150}} dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_0^{50} e^{-\frac{x}{150}} dx.$$

Em I_1 seja $u = \frac{x}{150}$, então $du = \frac{1}{150} dx$, ou seja, $dx = 150 du$. Com isso, quando $x = 50$ temos em $u = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$ e quando $x = 0$ obtém-se $u = 0$. Assim,

$$I_1 = \int_0^{50} e^{\frac{x}{150}} dx = 150 \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} e^u du = 150 \cdot (e^{\frac{1}{3}} - e^0) = 150e^{\frac{1}{3}} - 150.$$

Agora em I_2 seja $v = -\frac{x}{150}$, então $dv = -\frac{x}{150} dx$, logo $dx = -150 dv$. Assim, quando $x = 50$ tem-se $v = -\frac{50}{150} = -\frac{1}{3}$ e quando $x = 0$ temos $v = 0$. Com isso,

$$I_2 = \int_0^{50} e^{-\frac{x}{150}} dx = -150 \cdot \int_0^{-\frac{1}{3}} e^v dv = 150 \cdot \int_{-\frac{1}{3}}^0 e^v dv = 150 - 150e^{-\frac{1}{3}}.$$

Então por (3.1), temos:

$$L = 150(e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{3}}).$$

PROBLEMA 02. Um cabo pesando $5,18 \text{ N/m}$ é suspenso entre duas torres que estão no mesmo nível e afastada entre si por 100 m . Se a flecha é de 10 m , qual é a máxima tração no cabo e qual deverá ser o seu comprimento mínimo? (problema proposto em [10])

Solução: Observando a figura abaixo podemos nomear alguns elementos.

3.1. CATENÁRIA

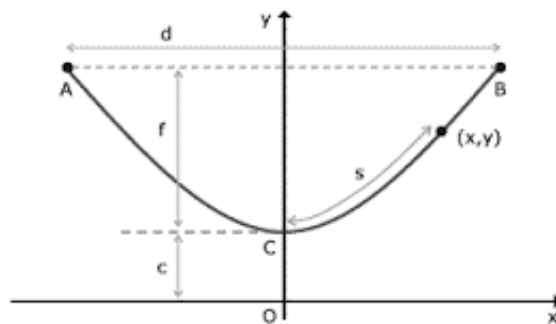


Figura 3.7: Esboço de uma catenária

Fonte: http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup01.shtml

- T = tração a uma distância x medida a partir do ponto médio.
- s = comprimento ao longo do cabo desde o ponto médio até o ponto de tração T .
- w = carga em N/m ao longo do cabo; por exemplo, ação gravitacional por metro.
- d = vão livre em metros.
- f = flecha em metros.
- L = comprimento total em metros.
- H = esforço no ponto médio em newtons.
- T_{max} = esforço máximo nos apoios em Newtons.

Em relação a Figura 3.8, note que o eixo x está a uma distância c (parâmetro) abaixo do centro da catenária. Isso simplifica a derivação.

Na catenária, existem as seguintes equações

$$y = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right).$$

Fazendo as devidas substituições para o ponto genérico (x, y) conforme a Figura 3.7, tem-se:

$$c + f = c \cdot \cosh\left(\frac{d}{2c}\right). \quad (3.3)$$

Em seguida, supondo que

$$T = wy,$$

obtem-se:

$$T_{max} = w(c + f). \quad (3.4)$$

3.2. VELOCIDADE DA ONDA DO MAR

O comprimento do arco s entre C e um ponto genérico (x, y) é dado por

$$s^2 = y^2 - c^2. \quad (3.5)$$

Logo,

$$y^2 = c^2 + s^2.$$

Observe que T torna-se T_{max} quando $x = \frac{d}{2}$ e $y = c + f$, então

$$(c + f)^2 = c^2 + \frac{L^2}{4}. \quad (3.6)$$

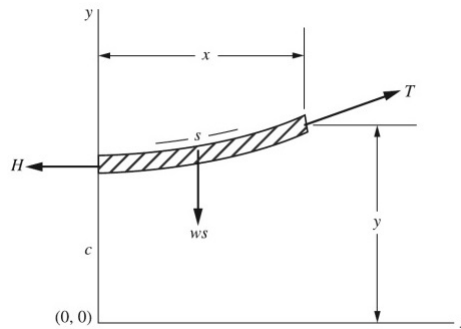


Figura 3.8: Seção de uma catenária
Fonte: Referência [10] (p. 120).

Pelo enunciado do problema, sabe-se o vão livre e a flecha, e através de (3.3):

$$c + 10 = c \cdot \cosh\left(\frac{100}{c}\right).$$

Através de tentativa e erro tem-se $c = 126$. Substituindo os respectivos valores em (3.4):

$$T_{max} = 5,18(126 + 10) = 704,48 \approx 704N.$$

Após substituir os valores na Equação (3.6), temos:

$$18496 - 15876 = \frac{L^2}{4}.$$

Logo,

$$L = \sqrt{2620 \cdot 4} \approx 102m.$$

3.2 Velocidade da onda do mar

As ondas oceânicas são geradas pelo vento e se propagam sobre a superfície marítima. Essa propagação se dá através da interação da força do vento com a força

3.2. VELOCIDADE DA ONDA DO MAR

gravidade. Essas ondas que se propagam na superfície, devido à influência do campo gravitacional, recebem o nome de ondas de gravidades (gravity waves).

A função tangente hiperbólica faz parte da fórmula para obter a velocidade das ondas do mar. Segundo Elmore e Heald (1985, p. 187), a velocidade de propagação das ondas na superfície de líquidos é dada através da fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}.$$

Assim,

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi d}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi d}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi d}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi d}{\lambda}}}}. \quad (3.7)$$

Com d sendo a espessura da lâmina de líquido, λ o comprimento da onda e g a intensidade do campo gravitacional.

A figura a seguir representa como é modificada a velocidade da propagação das ondas marítimas de acordo com a mudança de comprimento da onda.

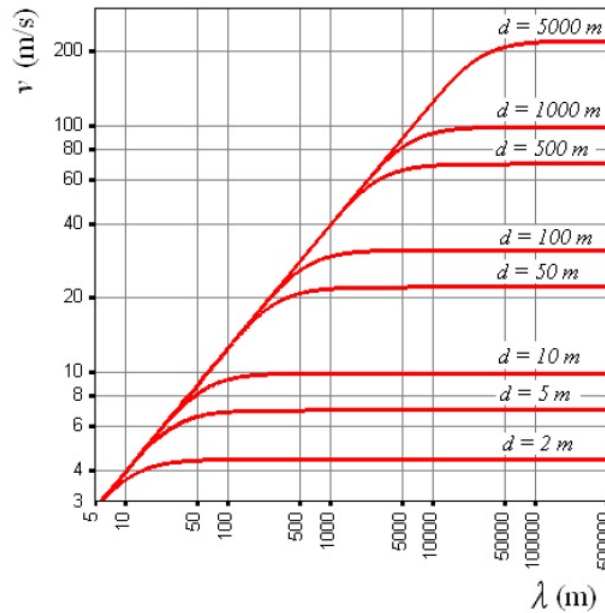


Figura 3.9: Variação da velocidade das ondas marítimas

Fonte: G. Pino, 2012.

De acordo com este gráfico, percebe-se que independentemente da *espessura da lâmina d'água*, a *velocidade de propagação* (v) cresce de acordo com o aumento do *comprimento de onda* λ , tendendo a um certo valor limite, próximo do qual v praticamente não se altera. Observe também que, quando $\lambda = 10d$ a velocidade da propagação chega a estar muito próximo do seu valor limite.

Quando $\lambda \leq 2d$, a tangente hiperbólica terá seu valor aproximado ao limite superior igual a 1, pois

$$\tanh\frac{2\pi d}{\lambda} \geq 0,996 \approx 1.$$

3.2. VELOCIDADE DA ONDA DO MAR

Com isso a velocidade da propagação calculada através de (3.7) pode ser expressa na forma

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (3.8)$$

De maneira paralela, quando $\lambda \gg d$ vale a aproximação

$$\tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \approx \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Assim usando (3.8) resulta

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)} = \sqrt{gd}, \quad (3.9)$$

que é uma boa aproximação para valores máximos apresentados na Figura 3.7.

A velocidade de propagação das ondas marítimas ditas "normais" em alto-mar, possui uma espessura da lâmina d'água em quilômetros e comprimento da onda em centenas de metros, pode ser determinada através de (3.8). Por exemplo, se $\lambda = 200m$, teremos

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \cong \sqrt{\frac{9,8 \cdot 200}{2 \cdot 3,14}} \cong 17,67m/s.$$

Em caso de ondas gigantes, tsunami por exemplo, onde o comprimento é de até centenas de quilômetros, mesmo em alto mar, onde a espessura da lâmina d'água é por volta de 5 km, isto significa que $\lambda \gg d$, logo sua velocidade de propagação será calculada através de (3.9). Por exemplo, se $d = 6000m$, então

$$v = \sqrt{gd} = \sqrt{9,8 \cdot 6000} \cong 242,49m/s = 872,95km/h.$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALHADAS, Márcio de C. *Funções Hiperbólicas no Ensino Médio*. 2013. 73f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, UENF, Rio de Janeiro.
- [2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO J. Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar*, 9: Geometria Plana, 8.ed. Atual, São Paulo 2005. 456p.
- [3] FARIA, Sirlene Resende de. *A Catenária*, Monografia em Matemática, UFMG, Belo Horizonte, 2011. 34p.
- [4] FACCHINI, Walter. *Matemática Volume Único*, 2.ed. Saraiva, São Paulo, 2001. 623p.
- [5] FERREIRA, Aurélio., *Miniaurélio Século XXI Escolar*. 4 ed. rev. ampliada, Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 2001. 790p.
- [6] IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar*, 3: Trigonometria, 8.ed. Atual, São Paulo, 2004. 312p.
- [7] IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar*, 7: Geometria Analítica, 5.ed. Atual, São Paulo, 2005. 282p.
- [8] LIMA, E. Lages. et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio de Janeiro, 2003. 237p.
- [9] RODRIGUES, K. Félix. *Funções Hiperbólicas Definidas por Ângulos Hiperbólicos*, 2014. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, UFSE.
- [10] NELSON, E. et al. *Engenharia Mecânica Estática*, Coleção Schaum, Bookman, 2013. 296p.
- [11] PAULO, S. G. de Oliveira. *Da Catenária a Trigonometria Hiperbólica*, Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura plena em Matemática) - Universidade do Estado do Pará, 2014.
- [12] PINO, C. Enrique. *Trigonometría Hiperbólica*. 2012. Disponível em: <http://cmap.upb.edu.co/rid=11516111805351484584217>. Acessado em 24 de fevereiro de 2015 às 02h.

- [13] ROSSO Jr, A. Carlos; FURTADO, Patrícia. *Matemática uma Ciência para a Vida*, Volume 2, Habra, São Paulo, 2011. 712p.
- [14] SILVEIRA, F. Lang da; VARRIALE, M. Cristina. *Propagação das ondas marítimas e dos tsunamis*. 2009. Artigo de Física, UFRGS 2009.
- [15] TALAVERA, Leda., *Parábola e catenária: história e aplicações*. 2008. 97f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [16] VASCONCELOS, J. G. S. Fidanza. *Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações*. 2013. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus.
- [17] WINTERLE, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica*, Pearson Makron Books, São paulo, 2000. 232p.