



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Aplicações da Geometria Analítica na Resolução de Problemas †

por

Assiclero Cavalcante Teotonio de Lacerda

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto / 2015
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Aplicações da Geometria Analítica na Resolução de Problemas

por

Assiclero Cavalcante Teotonio de Lacerda

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - UFS

Agosto / 2015

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por ter me permitido realizar esse trabalho, provendo-me todas as condições para conclusão deste mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo, pela orientação segura e pelas contribuições dadas ao texto.

Ao Prof. Eduardo Wagner, por ter me inspirado, com suas abordagens sobre Geometria Analítica, a desenvolver o tema.

À minha esposa Maria do Amparo, pelo apoio constante desde o momento do exame de acesso até a conclusão deste trabalho.

Aos amigos e colegas de turma pelo compartilhamento de conhecimentos.

Aos membros da Sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa de estimular a melhoria do ensino de Matemática através deste mestrado.

A todos os professores do PROMAT a nível nacional e a nível local, pelo suporte dado ao programa.

Ao meu filho Igor por está sempre presente.

À CAPES, pelo suporte financeiro e credibilidade dispensada ao PROFMAT.

Dedicatória

*À minha mãe Maria Ivete. Ao meu
pai Francisco de Assis (em memória).*

Resumo

O presente trabalho é uma proposta de abordagem da Geometria Analítica, para ser usada como ferramenta na resolução de problemas em geral. A Geometria Analítica tem seu maior valor, exatamente onde ela é inesperada, nas aplicações em outros ramos das ciências exatas. O objetivo é mostrar como a Geometria Analítica pode ser aplicada, e como podemos fazer para enfatizar para o aluno que ela não é uma parte da Matemática que se encerra em si mesma. Faremos uma abordagem vetorial, quando for conveniente, fazendo com que as demonstrações de fórmulas e resoluções dos problemas se tornem mais simples. Acreditamos que fazendo uma articulação entre a Geometria Analítica e suas aplicações, de uma forma bem natural, estaremos melhorando o nível de aprendizagem dos alunos.

Palavras-Chave: Vetores, Geometria Analítica e Aplicações.

Abstract

The present work it is a proposal of approach of Analytic Geometry to be used as a tool on resolution of problems in general. The Analytic Geometry has its greater value exactly where it is unexpected, in applications in other branches of exact science. The purpose it is to show how the Analytic Geometry can be applied, and how we do to emphasize to students that the Analytic Geometry is not a part of Mathematics which ends itself. We will make vector approach, when it is convenient making the statements in formulas and resolutions of problems, become more simple. We believe that making an articulation between Analytic Geometry and its application, in a very natural way, we are improving, the level of students learning.

Keywords: Vectors, Analytic Geometry, Applications.

Sumário

1	Vetores e Geometria Analítica	1
1.1	Distância Entre Dois Pontos no Plano	1
1.2	Distância Entre Dois Pontos no Espaço	2
1.3	Equipolência de Segmentos Orientados	3
1.4	Vetores no Espaço	5
1.5	Operações com Vetores no Espaço	7
1.6	Propriedades das Operações com Vetores	8
1.6.1	Propriedades da Adição de Vetores	8
1.6.2	Propriedades da Multiplicação de Vetores por Escalares	9
1.7	Produto Interno em Termos de Coordenadas	10
1.7.1	Norma de um Vetor	11
1.7.2	Vetores Perpendiculares	12
1.7.3	Propriedades do Produto Interno	13
1.8	Coordenadas do Ponto Divisor de um Segmento de Reta	16
1.9	Alinhamento de Três Pontos no Plano	17
1.10	Baricentro de um Triângulo	18
1.11	Equação da Reta no Plano e no Espaço	19
1.11.1	Equação Cartesiana da Reta	20

1.11.2	Distância de um Ponto a uma Reta no Plano	22
1.12	Área do Paralelogramo	24
1.13	Área do Triângulo	28
1.14	Equação da Circunferência	29
1.15	Equação do Plano	30
1.16	Volume de um Paralelepípedo	31
1.17	Sistemas de Equações Lineares	34
1.18	Comparando Métodos	36
1.19	Sistema Cartesiano Oblíquo	38
2	Aplicações da Geometria Analítica	40
2.1	Aplicações na Geometria Plana	41
2.2	Aplicações na Geometria Espacial	56
2.3	Aplicações na Álgebra	61
2.4	Aplicações na Cinemática	64
2.5	Outras Aplicações	67
2.6	Questões da OBMEP	77
	Referências Bibliográficas	83

Lista de Figuras

1.1	Distâncias Entre pontos no Plano	2
1.2	Distância Entre A e B no Espaço	3
1.3	Segmentos Equipolentes	3
1.4	Vetor que Parte da Origem	5
1.5	Vetor Definido por Dois Pontos	6
1.6	Ângulo Entre Vetores	11
1.7	Lei dos Cossenos	14
1.8	Pontos Alinhados	17
1.9	Segmentos Perpendiculares	21
1.10	Distância Entre Retas no Plano	23
1.11	Retas Paralelas	24
1.12	Paralelogramo ABCD	25
1.13	Retângulo ABCD	27
1.14	Triângulos Congruentes ABC e DCB	28
1.15	Circunferência de Centro A e Raio R	30
1.16	Plano Determinado por um Ponto e um Vetor Perpendicular	30
1.17	Paralelepípedo	32
1.18	Retas com um Ponto em Comum	36

1.19	Quadrado ABCD	37
1.20	Sistema Cartesiano Oblíquo	39
1.21	Reta no Sistema Oblíquo	39
2.1	Trapézio Isósceles	41
2.2	Triângulo	43
2.3	Quadrado no Plano OXY	44
2.4	Quadrado com AP Perpendicular a CQ	45
2.5	Circunferência Inscrita no Triângulo	46
2.6	Circunferência Inscrita no Retângulo	47
2.7	Retângulo no Plano OXY	48
2.8	Trapézio no Plano OXY	49
2.9	Triângulo	51
2.10	Triângulo ABC no Plano OXY	52
2.11	Triângulo Inscrito no Trapézio	54
2.12	Retângulo ABCD no Plano OXY	55
2.13	Pirâmide no Espaço	57
2.14	Tetraedro Inscrito no Cubo	57
2.15	Plano Perpendicular à Diagonal do Cubo	58
2.16	Tetraedro com Três Faces Ortogonais	60
2.17	Ângulo Entre as Diagonais do Cubo	61
2.18	Circunferência	62
2.19	Distância Mínima	63
2.20	Vetor Perpendicular a um Vetor Diretor	64
2.21	Representação Gráfica de Movimentos	65

2.22	Representação Gráfica de uma Rota de Colisão	67
2.23	Dimensões do Campo de Futebol	68
2.24	Diagrama do Lucro	70
2.25	Divisão de um Segmento em Três Partes	71
2.26	Triângulo com um dos Vértices na Origem	72
2.27	Triângulo Semelhante em Destaque	72
2.28	Diagrama de Espaço Amostral e Eventos	74
2.29	Mapa do Tesouro	75
2.30	Localização do Tesouro no Plano Cartesiano	76
2.31	Pontos Sobre um Circulo	77
2.32	Trapézio da Questão 17, OBMEP 2015	78
2.33	Trapézio Inscrito no Circulo	79
2.34	Polígono da Questão 18 da OBMEP 2005	79
2.35	Perímetro do Polígono ABCG	80
2.36	Preço por Distância Percorrida	81

Introdução

A Geometria Analítica costuma aparecer na série final do ensino médio, depois de o aluno ter tido bastante contato com a tradicional Geometria Plana. Essa mudança de geometria quase sempre é um balde de água fria na vida das personagens envolvidas, o aluno e o professor.

Geralmente, com o decorrer das aulas, dependendo de como a Geometria Analítica é lecionada, o aluno acaba vendo um apanhado de fórmulas a serem decoradas, fórmula do ponto médio, baricentro, distância entre dois pontos, as várias equações da reta (geral, reduzida, segmentária, etc), as condições de paralelismo, perpendicularismo, distância entre ponto e reta (cuja fórmula raramente o professor deduz), as duas equações da circunferência (geral e reduzida) e as condições de tangenciamento. E, finalmente, e muito raramente são apresentadas as equações das cônicas, elipse, hipérbole e parábola, quando o aluno já pode estar desmotivado e o professor frustrado por não ter conseguido cativar o aluno.

Onde está a falha e como achamos que essa condição pode ser modificada para melhor? Na nossa opinião, a Geometria Analítica como está na maioria dos livros didáticos, apresenta suas fórmulas e, em seguida, os exercícios como mera aplicações diretas para sua memorização. Por exemplo, calcule a distância entre os pontos $(1,2)$ e $(7,10)$; calcule a distância do ponto $(1,3)$ à reta $12x + 7y + 1 = 0$; escreva

a equação geral da reta que passa pelos pontos $(2,2)$ e $(5,3)$, etc. A Geometria Analítica fica parecendo uma parte da Matemática que se encerra em si mesma. Na nossa opinião, é aí onde se encontra a maior falha no ensino de Geometria Analítica. Certo que devemos valorizar as fórmulas, afinal a Geometria Analítica é basicamente isso, um estudo de Geometria Plana e Espacial por meio de equações. Mas, se a Geometria Analítica é isso, é primordial que nós professores, revisitemos a Geometria Plana, a Geometria Espacial, a Cinemática Escalar, etc, para resolver problemas de enunciados aparentemente específicos desses conteúdos, porém utilizando recursos aprendidos em Geometria Analítica. O uso de coordenadas no plano e no espaço, oferece não apenas um método para resolver problemas geométricos com recursos de álgebra como, reciprocamente, fornece uma interpretação geométrica valiosa para questões de natureza algébrica. A abordagem da Geometria Analítica que faremos neste trabalho, limita-se a utilizá-la na resolução de situações problema, onde possa gerar soluções mais simples, do que as habitualmente usadas para resolver esses problemas.

A metodologia proposta nesta dissertação é amparada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, particularmente em consonância com o transcrito abaixo:

"É o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diversas formas de pensamento matemático"(PCN, pag. 40).

Com a metodologia proposta aproximamos mais ainda a Geometria Analítica das Geometrias Plana e Espacial e de outros conteúdos da Matemática. Isso torna possível fazer uma conexão com outros ramos da ciência, facilitando assim, às contextualizações e a interdisciplinaridade e mostrando as várias utilidades da

Geometria Analítica, tornando-a mais prazerosa para ser estudada.

Este trabalho está estruturado em dois capítulos.

O Capítulo 1 introduz o conceito de equipolência de segmentos orientados que será a base para a introdução do conceito de vetor. Aborda a definição de vetor no espaço, fazendo o estudo das operações envolvendo vetores, a adição, a multiplicação de um vetor por um escalar, as propriedades das operações com vetores e definição de vetor no plano. Introduz o conceito de produto interno e suas propriedades e aborda os conceitos e fórmulas da Geometria Analítica Plana e Espacial.

O Capítulo 2 trata das aplicações da Geometria Analítica na resolução de problemas, que no seu contexto geral não cita coordenadas.

Os registros geométricos presentes em todo o trabalho foram obtidos com o auxílio do software Geogebra.³

³GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um aplicativo de Matemática Dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino. O software reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Probabilidade, Estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula.

Capítulo 1

Vetores e Geometria Analítica

Neste capítulo, vamos estabelecer os principais conceitos e resultados sobre vetores e Geometria Analítica. Vamos definir as operações de adição de vetores, multiplicação de um vetor por um número real e o produto interno de vetores em relação aos sistemas de coordenadas ortogonais fixos OXY e $OXYZ$, abordaremos as aplicações dos vetores em alguns conteúdos da Geometria Analítica Plana e Espacial e demonstraremos as principais expressões e teoremas da Geometria Analítica. No final do capítulo mostraremos algumas das principais vantagens do uso de vetores na Geometria Analítica, comparando com o método analítico tradicional.

1.1 Distância Entre Dois Pontos no Plano

Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ pontos no plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY dado. A distância de P a Q , que designamos por $d_{(P,Q)}$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo $\triangle PQR$, da Figura 1.1, de catetos PR e QR . Sendo a distância entre dois pontos de

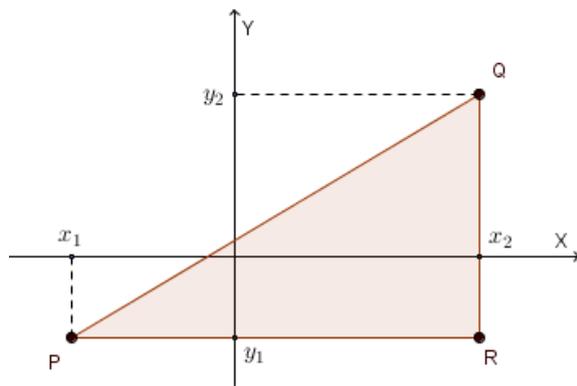


Figura 1.1: Distâncias Entre pontos no Plano

um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente, $|PR| = |x_2 - x_1|$ e $|QR| = |y_2 - y_1|$. Do teorema de Pitágoras, obtemos

$$d_{(P,Q)} = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Se M é um ponto do segmento PQ tal que $d_{(M,Q)} = d_{(M,P)}$, diremos que M é o ponto médio de PQ , onde $M = \frac{P + Q}{2}$, que demonstraremos na Seção 1.8.

1.2 Distância Entre Dois Pontos no Espaço

Dados os pontos $A = (x, y, z)$ e $B = (x', y', z')$ pertencentes ao espaço \mathbb{R}^3 . Chama-se distância entre A e B e denotamos por $d_{(A,B)}$, o número real corresponde ao comprimento do segmento AB que é calculado da forma

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

1.3. EQUIPOLÊNCIA DE SEGMENTOS ORIENTADOS

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y, z)$ à origem $O = (0, 0, 0)$ é dada por $d_{(O,P)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Por outro lado podemos provar facilmente a distância entre A e B , usando o teorema de Pitágoras no triângulo APB da Figura 1.2.

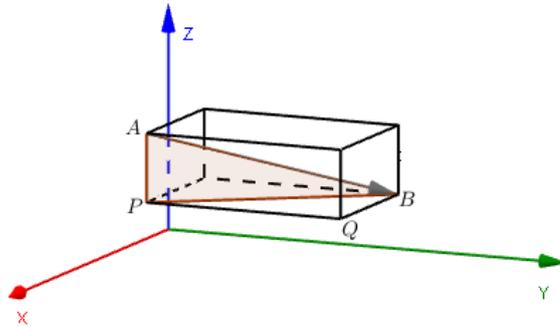


Figura 1.2: Distância Entre A e B no Espaço

1.3 Equipolência de Segmentos Orientados

Tanto no plano como no espaço, diremos que os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes e denotamos por $AB \equiv CD$, quando eles: tem o mesmo comprimento; são paralelos ou colineares e tem o mesmo sentido. Se AB e CD são segmentos paralelos e de mesmo comprimento, então AB e CD têm o mesmo sentido

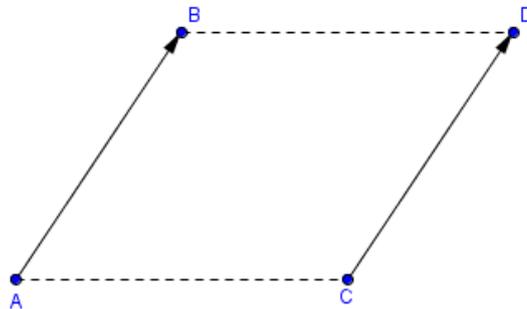


Figura 1.3: Segmentos Equipolentes

1.3. EQUIPOLÊNCIA DE SEGMENTOS ORIENTADOS

quando $ABCD$ é um paralelogramo. Para que os segmentos de reta orientados AB e CD sejam equipolentes é necessário e suficiente que os segmentos AD e BC tenham o mesmo ponto médio.

Vamos caracterizar a equipolência em termos de coordenadas. Para isso, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$ pontos do plano expressos em coordenadas com relação ao sistema dado.

Proposição 1.1. $AB \equiv CD \iff x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ e $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

Para verificar essa proposição, devemos lembrar que AD e BC tem o mesmo ponto médio, então

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\iff \left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2} \right) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right) \\ &\iff (x_1 + x_4, y_1 + y_4) = (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &\iff x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \longrightarrow y_1 + y_4 = y_2 + y_3 \\ &\iff x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \longrightarrow y_2 - y_1 = y_4 - y_3. \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.1. *Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, -2)$ e $C = (-2, 0)$, determine as coordenadas do ponto $D = (x, y)$ de modo que $AB \equiv CD$.*

Pela proposição 1.1, se $AB \equiv CD$ então $3 - 2 = x - (-2)$ e $-2 - 2 = y - 0$ que nos dar $x = -1$ e $y = -4$, ou seja $D = (-1, -4)$.

1.4 Vetores no Espaço

Quando os segmentos orientados AA' e PP' no espaço E são equipolentes, escrevemos $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$ e dizemos que eles representam o mesmo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$. Dado o sistema de coordenadas $OXYZ$, com $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$, tem-se $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ se, e somente se, $a' - a = m' - m$, $b' - b = n' - n$ e $c' - c = p' - p$. Pondo $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$, escreve-se $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e diz-se que estas são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ no sistema $OXYZ$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ é um vetor e P é um ponto arbitrário no espaço, existe um único ponto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Quando $P = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, tem-se $P' = (x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$. Em particular, sendo $O = (0, 0, 0)$ e $P = (x, y, z)$ pontos do espaço, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

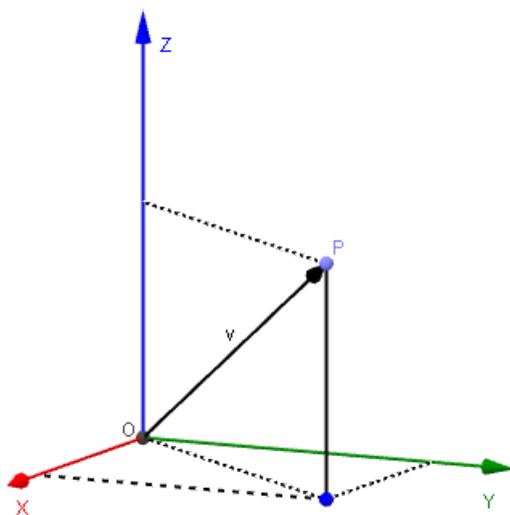


Figura 1.4: Vetor que Parte da Origem

A igualdade de vetores é estabelecida com base na igualdade de pares ordenados da seguinte forma: Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. Uma coisa agradável com respeito a vetores é que se podem

1.4. VETORES NO ESPAÇO

efetuar operações entre eles. As propriedades dessas operações tornam-se particularmente simples se convencionarmos em admitir o vetor nulo \overrightarrow{AA} , determinado por um segmento degenerado, no qual o início e a extremidade final se reduzem a um mesmo ponto. Mais precisamente, admitiremos que dois pontos quaisquer do espaço são equipolentes; assim o vetor nulo \overrightarrow{AA} pode ter, como os demais vetores, uma origem localizada em qualquer ponto do espaço. Usaremos o mesmo símbolo 0 para representar tanto o vetor nulo como o número zero. Em qualquer sistema, as coordenadas do vetor nulo são $(0, 0, 0)$.

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço e O a origem do sistema de coordenadas, fica estabelecida a determinação das coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} da seguinte forma: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, ou seja $A + \overrightarrow{AB} = B \implies \overrightarrow{AB} = B - A$, ver Figura 1.5. Daí temos que o vetor $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

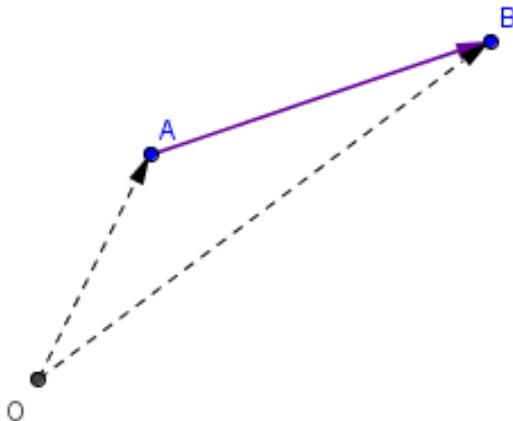


Figura 1.5: Vetor Definido por Dois Pontos

1.5 Operações com Vetores no Espaço

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores no espaço expressos em coordenadas. Vamos encontrar uma expressão para a soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} em função de suas coordenadas. Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Seja $C = (x_3, y_3, z_3)$ o ponto tal que $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$. Os segmentos orientados OA e BC são equipolentes, logo os vetores correspondentes \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{BC} são iguais, isto é $(x_1, y_1, z_1) = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2)$. Logo, $C = (x_3, y_3, z_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Assim, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = C = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Para as operações com vetores no plano, o processo é análogo ao efetuado para definir estas operações para vetores no espaço e as propriedades são basicamente as mesmas, por isso muitos detalhes serão omitidos. Vamos definir duas operações no conjunto de vetores do espaço, uma operação de adição e uma operação de multiplicação de vetores por números reais.

Definição 1.1. Chama-se soma de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ que se indica por $\vec{u} + \vec{v}$, o vetor: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Definição 1.2. Dado um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ e um número real μ , chama-se produto do vetor \vec{v} pelo escalar μ , o vetor $\vec{u} = \mu\vec{v} = \mu(x, y, z) = (\mu x, \mu y, \mu z)$.

O vetor $\vec{u} = \mu\vec{v}$ terá o mesmo sentido de \vec{v} se $\mu > 0$ e sentido contrário ao \vec{v} , se $\mu < 0$.

Exemplo 1.2. Sejam $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (4, 3, 2)$ pontos do espaço. Obtenha o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solução: Temos, $\overrightarrow{AB} = (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2)$. Logo, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (-2, 2, 0)$. Além disso,

se $D = (x_4, y_4, z_4)$ é a extremidade do representante AD do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A , então $x_4 - 3 = -2$, $y_4 - 2 = 2$ e $z_4 - 0 = 0$. Portanto, $D = (1, 4, 0)$.

1.6 Propriedades das Operações com Vetores

A adição de vetores e a multiplicação de vetores por escalares satisfazem propriedades semelhantes às propriedades aritméticas das operações numéricas, isto permite converter problemas geométricos em problemas algébricos e vice - versa.

1.6.1 Propriedades da Adição de Vetores

Se \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são vetores do espaço, valem as seguintes propriedades:

- a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (**Comutativa**);
- b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (**Associativa**);
- c) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (**elemento neutro**);
- d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (**Existência de inverso aditivo**).

A adição de vetores é uma operação bem definida, isto é, a definição da soma do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ com $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ não depende da escolha do ponto A .

Para cada vetor \vec{u} , existe um único vetor, que designamos por $-\vec{u}$, denominado simétrico aditivo de \vec{u} , tal que a soma de ambos é o vetor nulo. O inverso aditivo de $\vec{v} = (x, y, z)$ é o vetor $-\vec{v} = (-x, -y, -z)$. Para provar algebricamente a parte

b), consideramos $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$. Então,

$$\begin{aligned}\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (x_1, y_1, z_1) + [(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)] \\ &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3)] \\ &= [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3] \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3) \\ &= [(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] + (x_3, y_3, z_3) \\ &= (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}.\end{aligned}$$

As provas algébricas das partes a) e c) são análogas.

1.6.2 Propriedades da Multiplicação de Vetores por Escalares

Se \vec{u} e \vec{v} são vetores e λ e μ números reais, temos

a) $\lambda(\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ (**Associatividade**);

b) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ (**Distributiva em relação a adição de vetores**);

c) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ (**Distributiva com relação a adição de escalares**);

d) $1\vec{v} = \vec{v}$ (**Elemento neutro**).

A associatividade e as propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e as propriedades análogas que já conhecemos nos números reais. Demonstrando algebricamente o item c). Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores do espaço

e $\lambda \in \mathbb{R}$. temos que

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] \\ &= \lambda(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2, \lambda z_1 + \lambda z_2) \\ &= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \\ &= \lambda(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) \\ &= \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v},\end{aligned}$$

o que mostra a propriedade. Analogamente, são feitas as provas algébricas das partes a), b) e d).

1.7 Produto Interno em Termos de Coordenadas

Chama-se produto interno entre os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ o número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. O produto interno de dois vetores é um número real e não um vetor. Algumas vezes é chamado de produto escalar. Esta fórmula vale obviamente quando um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é igual a zero. Assim, em qualquer caso, obtemos uma expressão do produto interno $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ em função das coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} . Para a abordagem geométrica precisamos de dois conceitos preliminares, a noção de norma de um vetor e a noção de ângulo entre dois vetores. Definimos o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} como sendo o menor ângulo entre os segmentos AB e AC representantes de \vec{u} e \vec{v} , respectivamente Figura 1.6. Denotamos por θ a medida do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Exemplo 1.3. *Determine o número real x para que o produto interno dos vetores*

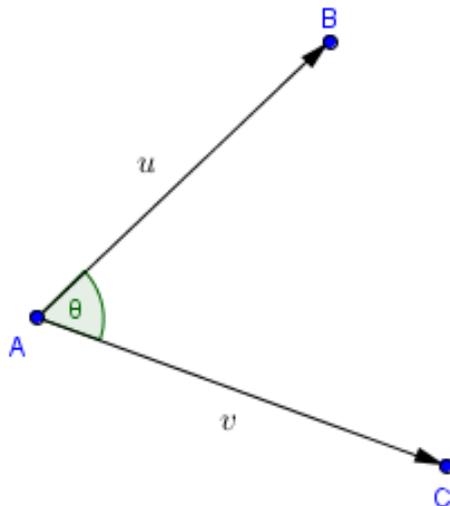


Figura 1.6: Ângulo Entre Vetores

$\vec{u} = (4, -3, 0)$ e $\vec{v} = (x, 1, 1)$ seja igual a 5.

$$\text{Temos: } 5 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4x - 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \iff 8 = 4x \iff x = 2.$$

1.7.1 Norma de um Vetor

A norma ou comprimento de um vetor \vec{v} é o número $\|\vec{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento orientado representante de \vec{v} . Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos do espaço, então a norma do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é a distância entre A e B . Como $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, segue, denotando por d a distância entre A e B , que $\|\vec{v}\| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então $d(O, P) = \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se $\vec{u} = (x, y, z)$, então o comprimento do vetor $\lambda\vec{u}$ é $|\lambda|$ vezes a norma do vetor \vec{u} , ou seja, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$.

De fato, seja $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ e, portanto

$$\begin{aligned} \|\lambda\vec{u}\| &= \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|. \end{aligned}$$

1.7.2 Vetores Perpendiculares

Proposição 1.2. *Dois vetores são perpendiculares (determinam um ângulo reto) se, e somente se, o seu produto interno é zero.*

Consideremos no plano cartesiano ortogonal os pontos $O = (0, 0, 0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, o vetor $\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ e o vetor $\vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, com $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, aplicando o teorema de Pitágoras devemos ter $(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Rightarrow \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2$, ou seja $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ simplificando a igualdade acima, obtemos $0 = -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2$, que nos dá $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, que prova a proposição.

É interessante notar a relação de ortogonalidade entre os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (-b, a)$. Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ então eles são perpendiculares. Além disso, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e portanto, eles possuem o mesmo comprimento, \vec{v} é o resultado da rotação de \vec{u} , de um ângulo reto (no sentido positivo, isto é, mesmo sentido de OX para OY). Analogamente, o vetor $\vec{v}' = (a, -b)$, é o resultado da rotação de \vec{u} , de um ângulo reto, no sentido ante horário.

1.7.3 Propriedades do Produto Interno

Se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores no espaço e k é um número real, então as seguintes propriedades valem:

a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle;$

b) $\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle;$

c) $k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (k\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (k\vec{v}) \rangle;$

d) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0.$

Para demonstrar o item a), sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. Para o item b), sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$. Assim temos

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \langle (x_1, y_1, z_1), [(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)] \rangle \\ &= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \rangle \\ &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + z_1z_2 + z_1z_3 \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle.\end{aligned}$$

1.7. PRODUTO INTERNO EM TERMOS DE COORDENADAS

Para a parte c), sendo k uma constante real, temos

$$\begin{aligned}k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= k[\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle] \\&= k(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\&= k(x_1x_2) + k(y_1y_2) + k(z_1z_2) \\&= (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 + (kz_1)z_2 \\&= \langle (kx_1, ky_1, kz_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\&= \langle (k\vec{u}), \vec{v} \rangle.\end{aligned}$$

De maneira análogo mostra-se que $k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (k\vec{v}) \rangle$. Para demonstrar a parte d), considerando $\vec{u} = (x, y, z)$, temos $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.

Proposição 1.3. *O produto interno entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , é o número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$, onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ e se, $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

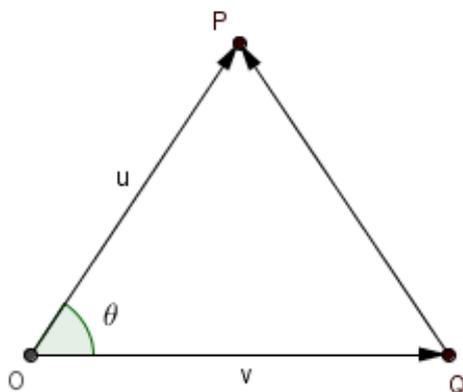


Figura 1.7: Lei dos Cossenos

Para verificar esta proposição, tomemos $\vec{OP} = \vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{OQ} = \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ no triângulo OPQ da Figura 1.7 e aplicamos a lei dos cossenos, o que

resulta na seguinte expressão:

$$\|\overrightarrow{QP}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \quad (1)$$

Por outro lado $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} \implies \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$, então $\|\overrightarrow{QP}\|^2 = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\|^2$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{QP}\|^2 &= \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \\ &= \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Substituindo (1.1) em (1), resulta

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 1.4. *Para todos os vetores \vec{u} e \vec{v} , vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz,*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Para provar essa desigualdade, tomando o módulo em ambos os membros da identidade da Proposição 1.3, temos $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$. Sabendo que $|\cos\theta| \leq 1$, vem $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Proposição 1.5. *Para todos os vetores \vec{u} e \vec{v} , do espaço vale a desigualdade triangular, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é zero ou são múltiplos positivos um do outro.*

Demonstração. Como as quantidades desta desigualdade são todas números reais não negativos, ela equivale à desigualdade

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e das propriedades do produto interno, temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2. \end{aligned}$$

1.8 Coordenadas do Ponto Divisor de um Segmento de Reta

A fórmula da distância entre dois pontos permite obter imediatamente as coordenadas do ponto que divide um segmento AA' numa razão dada. Sendo $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$. Veremos que os pontos do segmento de reta AA' são $X_t = (x_t, y_t, z_t)$, onde $0 \leq t \leq 1$ e

$$x_t = a + t(a' - a)$$

$$y_t = b + t(b' - b)$$

$$z_t = c + t(c' - c).$$

Destas igualdades, resulta por um cálculo simples que

$$\frac{d(A, X_t)}{d(A, A')} = \frac{\sqrt{(x_t - a)^2 + (y_t - b)^2 + (z_t - c)^2}}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}} = t.$$

Portanto, X_t é, para todo $t \in [0, 1]$, o ponto do segmento de reta AA' tal que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$. Em particular, tomando $t = \frac{1}{2}$ obtemos as coordenadas do ponto médio de AA'

$$M = X_{1/2} = \left(\frac{a + a'}{2}, \frac{b + b'}{2}, \frac{c + c'}{2} \right).$$

1.9 Alinhamento de Três Pontos no Plano

Dizemos que três pontos distintos estão alinhados ou são colineares, quando existe uma reta que passa pelos três. Para que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C =$

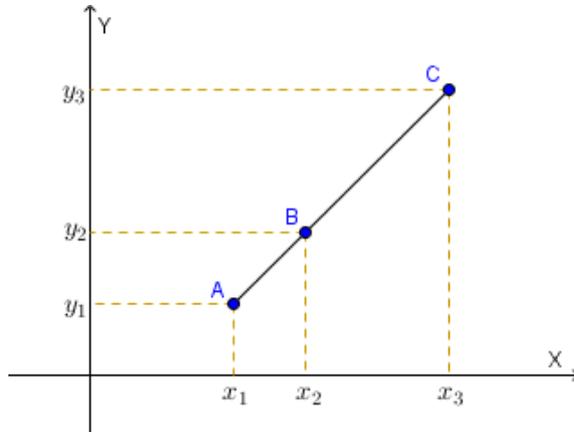


Figura 1.8: Pontos Alinhados

(x_3, y_3) estejam alinhados é preciso que os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} sejam colineares, isto é: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Desenvolvendo a expressão acima em coordenadas, tem-se $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \alpha(x_3 - x_1, y_3 - y_1) \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \alpha$, usando a

notação de determinante, podemos escrever

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observe que a primeira linha do determinante corresponde às coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} e a segunda linha às coordenadas do vetor \overrightarrow{AC} .

1.10 Baricentro de um Triângulo

Baricentro de um triângulo é o ponto onde as retas suportes das três medianas se intersectam. Lembrando que uma mediana é o segmento de reta que liga um vértice do triângulo, ao ponto médio do lado oposto. Considerando no plano os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ distintos e não colineares. Seja $G = (x_G, y_G)$ o baricentro de um triângulo ABC . Observamos que, sendo $M = (x_M, y_M)$ ponto médio de AC , tem-se: $x_M = \frac{x_1 + x_3}{2}$ e $y_M = \frac{y_1 + y_3}{2}$. O ponto G é tal que $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}$, daí: $G - B = 2(M - G) \Rightarrow 3G = 2M + B \Rightarrow G = \frac{2M + B}{3} \Rightarrow (x_G, y_G) = \frac{2(x_M, y_M) + (x_2, y_2)}{3}$. Daí, teremos

$$x_G = \frac{2x_M + x_2}{3} = \frac{2\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) + x_2}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y_G = \frac{2y_M + y_2}{3} = \frac{2\left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right) + y_2}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

e as coordenadas do baricentro são

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

1.11 Equação da Reta no Plano e no Espaço

Se r é uma reta no plano, que passa pelo ponto $A = (a, b)$ e tem direção de $\vec{v} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$, sendo $P = (x, y) \in r$ temos $P \in r \iff \overrightarrow{AP}$ é múltiplo de \vec{v} . Então, $P \in r \iff AP = t \cdot \vec{v}$ para algum $t \in \mathbb{R}$, daí $P = A + t \cdot \vec{v}$, com $t \in \mathbb{R}$. Logo $(x, y) = (a, b) + t(\alpha, \beta)$. Portanto

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas são portanto, as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (a, b)$ e tem a direção do do vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$.

Exemplo 1.4. *Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (4, 4)$.*

Seja $P = (x, y)$ um ponto do plano, sobre a reta que passa em A e B . Temos que: $\overrightarrow{AB} = \vec{v} = (4 - 1, 4 - 2) = (3, 2)$ e $\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$, com $t \in \mathbb{R}$, pois \vec{v} e \overrightarrow{AP} são colineares. então $P - A = t \cdot \vec{v} \implies P = A + t \cdot \vec{v} \implies (x, y) = (1, 2) + t(3, 2)$, ou seja

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas são portanto, equações paramétricas da reta que contém os pontos $A = (1, 2)$

1.11. EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO E NO ESPAÇO

e $B = (4, 4)$. Colocando t em função de x e y , temos: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} \implies 2x - 2 = 3y - 6 \implies 2x - 3y + 4 = 0$.

No espaço, uma reta r passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e tem direção de $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$, sendo $P = (x, y, z) \in r$ temos $P \in r \iff \overrightarrow{AP}$ é múltiplo de \vec{v} . Então, $P \in r \iff \overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$ para algum $t \in \mathbb{R}$, daí $P = A + t \cdot \vec{v}$, com $t \in \mathbb{R}$. Logo $(x, y, z) = (a, b, c) + t(\alpha, \beta, \gamma)$. Portanto

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas são portanto, as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e tem a direção do do vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

1.11.1 Equação Cartesiana da Reta

Para caracterizar a equação cartesiana de uma reta, vamos usar a condição de perpendicularidade de dois vetores, isto é, o produto interno entre eles é igual a zero. Um vetor $\vec{u} \neq 0$ é perpendicular a uma reta r se os vetores \vec{u} e \overrightarrow{AB} são perpendiculares, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (a, b) \neq 0$. Para qualquer ponto $P = (x, y)$ da reta r , teremos que $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle = 0$. Então, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ daí, $ax + by = ax_0 + by_0$. Fazendo $c = ax_0 + by_0$ temos

$$ax + by = c.$$

1.11. EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO E NO ESPAÇO

Essa é a equação cartesiana da reta r . Uma informação geométrica importante a respeito da reta definida pela equação $ax + by = c$ é que ela é perpendicular ao segmento de reta OA da Figura 1.9, onde $A = (a, b)$. Para ver isto, consideremos

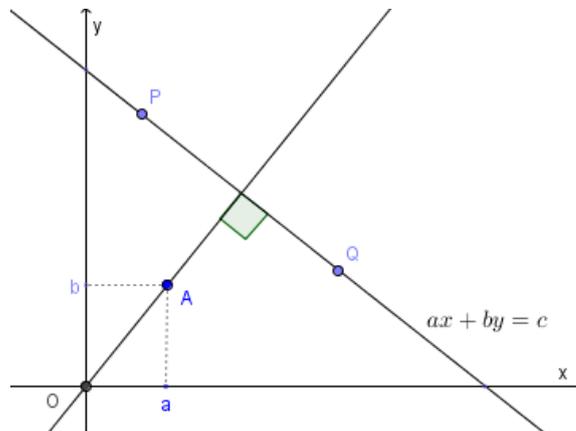


Figura 1.9: Segmentos Perpendiculares

dois pontos distintos, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ sobre esta reta. Então tem-se $ax_1 + by_1 = c$ e $ax_2 + by_2 = c$, logo $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. Esta igualdade significa que o segmento OA é perpendicular a PQ , portanto à reta $ax + by = c$. Mantendo a e b fixos e fazendo variar c , as diversas retas $ax + by = c$ assim obtidas são paralelas entre si, todas perpendiculares ao segmento OA , com $A = (a, b)$. Quando $c = 0$, a reta $ax + by = 0$ passa pela origem. Evidentemente, uma outra reta $a'x + b'y = c'$, com $A' = (a', b')$ será perpendicular à primeira se, e somente se, $OA \perp OA'$, isto é, $aa' + bb' = 0$. Portanto, $aa' + bb' = 0$ é condição necessária e suficiente para que as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ sejam perpendiculares. Por exemplo, as retas $ax + by = c$ e $bx - ay = c'$ são perpendiculares, sejam quais forem a, b, c, c' . Analisar a posição relativa de duas retas com base nos coeficientes das

equações que as definem equivale ao estudo das soluções do sistema linear

$$ax + by = c$$

$$a'x + b'y = c'.$$

podemos notar que dado o ponto $P = (x, y)$ no plano, tem-se $y = ax + b$ se, e somente se, P pertence à reta r que tem inclinação (ou coeficiente angular) a e corta o eixo OY no ponto $(0, b)$, de ordenada b . Vemos assim que esse tipo de equação só pode ser usado para representar retas que não são paralelas ao eixo OY , isto é, retas não-verticais. Lembrando ainda que a inclinação de uma reta não-vertical r é o número

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são ponto de r com abscissas distintas. Este número a é o mesmo, não importa que pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) se tomem sobre a reta r (com $x_1 \neq x_2$) pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo α que o eixo OX forma com a reta r .

Ao representar a reta não-vertical r pela equação $y = ax + b$ estamos dizendo que r é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que $y = ax + b$. Isto significa que r é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$.

1.11.2 Distância de um Ponto a uma Reta no Plano

Determinemos primeiramente a distancia entre as retas paralelas $ax + by = c$ e $ax + by = c'$, da Figura 1.10. Ambas são perpendiculares à reta $bx - ay = 0$, que passa pela origem e as corta nos pontos P e Q respectivamente. As coordenadas

1.11. EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO E NO ESPAÇO

desses pontos são obtidas resolvendo os sistemas

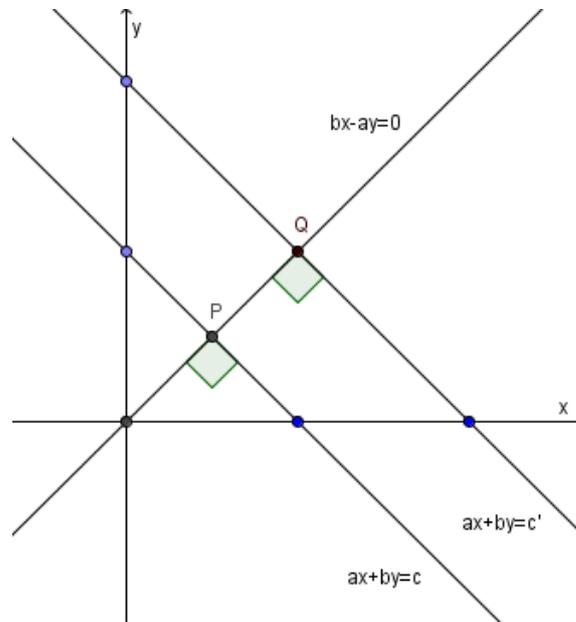


Figura 1.10: Distância Entre Retas no Plano

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} ax + by = c' \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

Facilmente obtemos $P = \left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2} \right)$ e $Q = \left(\frac{ac'}{a^2 + b^2}, \frac{bc'}{a^2 + b^2} \right)$. A distância entre as duas retas é a distância entre os pontos P e Q . Outro cálculo fácil nos fornece

$$d_{(P,Q)} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1.12. ÁREA DO PARALELOGRAMO

Para calcular a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta r , dada por $ax + by = c$, observamos que a reta paralela a r passando por P tem equação $ax + by = c'$, onde $c' = ax_0 + by_0$ e que a distância de P a r é igual à distância entre essas duas retas paralelas, Figura 1.11. Pelo que acabamos de ver, tem-se então a expressão

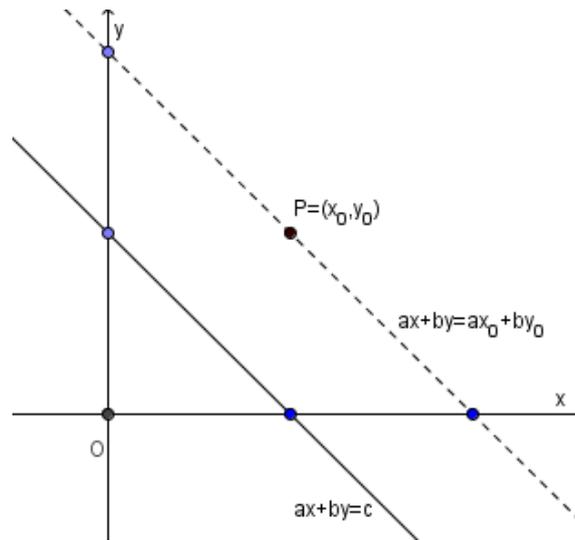


Figura 1.11: Retas Paralelas

$$d_{(P,r)} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

para a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $ax + by = c$.

1.12 Área do Paralelogramo

Uma expressão para a área do paralelogramo poderá ser obtida considerando o espaço tridimensional, da seguinte forma: sejam P , A e B três pontos não-colineares no espaço. Ponhamos $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$. Considerando $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PC}$ obtemos um paralelogramo $PACB$, no qual $A = P + \vec{u}$, $B = P + \vec{v}$ e $C = P + (\vec{u} + \vec{v})$. Chamaremos

1.12. ÁREA DO PARALELOGRAMO

de matriz de Gram dos vetores \vec{u} e \vec{v} , a matriz definida por

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{pmatrix}.$$

Para determinar a área do paralelogramo $PACB$, deveremos mostrar que o $\det.g(\vec{u}, \vec{v})$ (determinante desta matriz) é o quadrado dessa área e lembrar que o produto interno de dois vetores não depende do sistema de coordenadas escolhido. Consideremos então o sistema $PXYZ$, com origem no ponto P , tal que os pontos A e B pertençam ao plano horizontal $z = 0$. Vamos determinar portanto, uma expressão para a área do paralelogramo baseada em [3], no plano. Seja o paralelogramo P da Figura 1.12, a área S , de P se obtém multiplicando a medida da base AD pela medida da altura EB . Se θ é o ângulo entre \vec{AB} e \vec{AD} , então $\|\vec{EB}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \text{sen}\theta$, portanto,

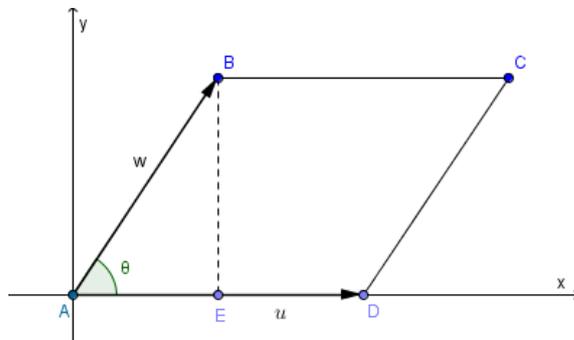


Figura 1.12: Paralelogramo ABCD

$S = \|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \text{sen}\theta$. Sendo $\text{sen}^2\theta = 1 - \text{cos}^2\theta$, temos

$$\begin{aligned} S^2 &= (\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \text{sen}\theta)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \text{sen}^2\theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot (1 - \text{cos}^2\theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \cdot \text{cos}^2\theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S^2 = \begin{vmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & \|\vec{w}\|^2 \end{vmatrix}$$

Se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{w} = (\alpha', \beta')$, em relação ao sistema de eixos ortogonais OXY , temos $\|\vec{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\|\vec{w}\|^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2$ e $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta'$. Logo,

$$\begin{aligned} S^2 &= (\alpha^2 + \beta^2) \cdot [(\alpha')^2 + (\beta')^2] - (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 \\ &= \alpha^2(\beta')^2 + \alpha^2\beta^2 + \beta^2(\alpha')^2 + \beta^2(\beta')^2 - \alpha^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \beta^2(\beta')^2 \\ &= \alpha^2(\beta')^2 - 2(\alpha\beta')(\alpha'\beta) + \beta^2(\alpha')^2 = (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2, \end{aligned}$$

ou seja, $S = |\alpha\beta' - \beta\alpha'|$ e sendo

1.12. ÁREA DO PARALELOGRAMO

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

teremos $S = |\Delta|$. Portanto, a área do paralelogramo P cujos lados são representados pelos vetores $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{w} = (\alpha', \beta')$ é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de \vec{u} e \vec{w} respectivamente.

Exemplo 1.5. Os pontos $A = (2, 3)$, $B = (3, 1)$ e $C = (9, y)$ são vértices consecutivos de um retângulo. Determine o quarto vértice.

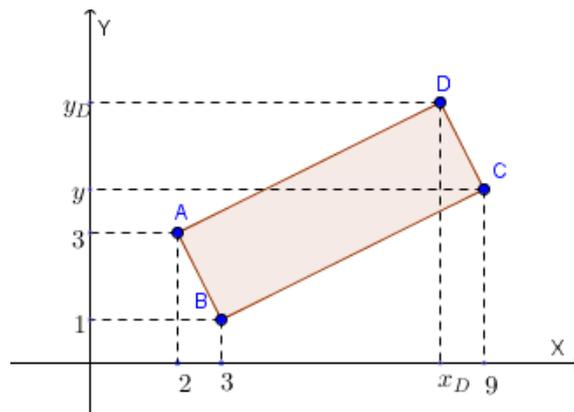


Figura 1.13: Retângulo ABCD

Deveremos ter $\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-1, 2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (6, y - 1)$. Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (-1) \cdot 6 + 2(y - 1) = 0$, então $y = 4$, logo $\vec{v} = (6, 3)$. Assim $\vec{u} + \vec{v} = (5, 5)$ e $D = B + \vec{u} + \vec{v} = (8, 6)$.

1.13 Área do Triângulo

Usando o cálculo da área S do paralelogramo, vamos calcular a área S_1 do triângulo de vértices A , B e C . Observe que o paralelogramo $ABCD$ de lados

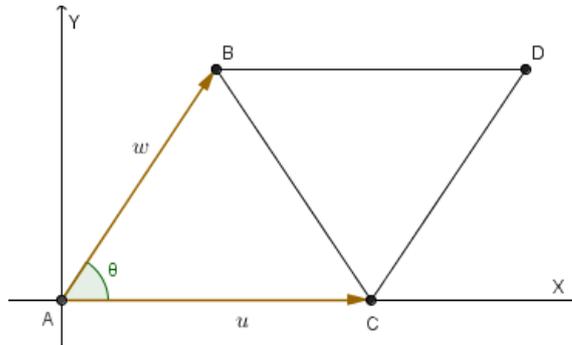


Figura 1.14: Triângulos Congruentes ABC e DCB

adjacentes AB e AC é composto dos triângulos congruentes ABC e DCB , ver Figura 1.14, então $S_1 = \frac{1}{2}S$. Se $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{w} = (\alpha', \beta')$, então sendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}.$$

Daí segue que $S_1 = \frac{1}{2}|\Delta|$.

Exemplo 1.6. Calcular a área do quadrilátero $ABCD$, sabendo que $A = (-4, -2)$, $B = (-2, 4)$, $C = (7, 5)$ e $D = (1, -1)$.

A área do quadrilátero $ABCD$ será a soma das áreas dos triângulos ABD e BDC . Calculo da área S_1 do triângulo ABD . Sejam $\overrightarrow{AB} = (2, 6)$ e $\overrightarrow{AD} = (5, 1)$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 6 = 2 - 30 = -28$$

e $S_1 = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = \frac{1}{2} \cdot |-28| = 14$. Calculo da área S_2 do triângulo BDC . Sejam $\overrightarrow{BD} = (3, -5)$ e $\overrightarrow{BC} = (9, 1)$ então

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 9 \cdot (-5) = 3 + 45 = 48$$

e $S_2 = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = \frac{1}{2} \cdot |48| = 24$. Portanto, $S = S_1 + S_2 = 14 + 24 = 38$.

1.14 Equação da Circunferência

A circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio $R > 0$ é o conjunto ϕ formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AP}\| = R$. Assim $P = (x, y)$ pertence a ϕ se, e somente se $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Esta é, portanto, a equação da circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio R .

Exemplo 1.7. *Determine a equação da circunferência de centro no ponto $A = (4, 5)$ e de raio $R = 2$.*

Solução. Temos que $a = 4$, $b = 5$ e $R = 2$ então, a equação dessa circunferência será $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 2^2 \implies (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$.

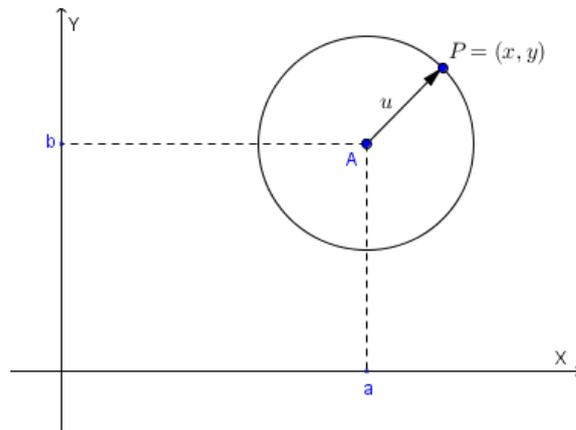


Figura 1.15: Circunferência de Centro A e Raio R

1.15 Equação do Plano

Seja Π um plano perpendicular ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ e que contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Considerando um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in \Pi$, temos que $\overrightarrow{P_0P} = \vec{u} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, ou seja $a(x - x_0) + b(y -$

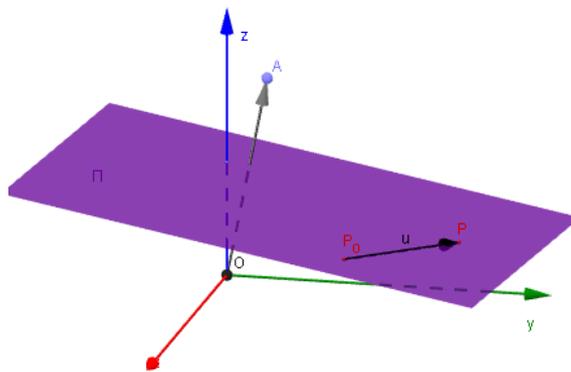


Figura 1.16: Plano Determinado por um Ponto e um Vetor Perpendicular

$y_0) + c(z - z_0) = 0$. Simplificando, obtemos a relação $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$, o segundo membro desta equação é igual a uma constante real d , ou seja

$$ax + by + cz = d$$

que é a equação do plano perpendicular ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

1.16 Volume de um Paralelepípedo

Mostraremos agora que uma expressão análoga à encontrada para a área do paralelogramo, vale para o volume do paralelepípedo, baseado na demonstração de [5]. Com os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} do espaço, formaremos respectivamente, as matrizes $g(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e m com,

$$g(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

e $g(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é chamada, por definição, de matriz Gram dos vetores dados. Evidentemente, ela não depende do sistema de eixos adotado. Já a matriz m , cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ em relação a um sistema $OXYZ$, varia conforme os eixos que se tomem. Mas se escrevermos explicitamente os elementos da matriz de Gram, teremos, portanto $m(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = mm^t$. Segue-se daí que $\det.g(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det.mm^t = (\det.m)^2$. Por conseguinte, o determinante da matriz m depende apenas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ mas não do sistema de eixos

escolhido. Esta observação nos permitirá obter a expressão que buscamos para o volume de um paralelepípedo. Sejam P , A , B e C quatro pontos não-coplanares, Figura 1.17. Consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Os pontos P , A , B e C determinam um paralelepípedo cujos outros quatro vértices são os pontos $D = P + (\vec{u} + \vec{v})$, $P + (\vec{u} + \vec{w})$, $P + (\vec{v} + \vec{w})$ e $P + (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$. Chamaremos de S (só-

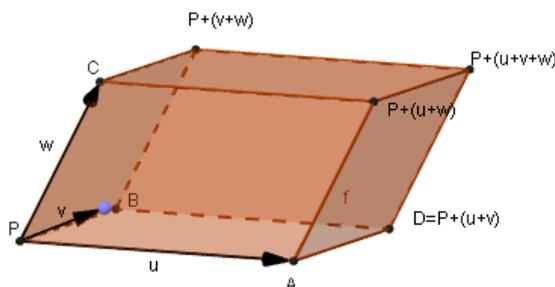


Figura 1.17: Paralelepípedo

lido) esse paralelepípedo. Sabendo que $vol.S$ é o produto da área do paralelogramo $PABD$ pela altura de S relativa a esta base. Tomaremos no espaço um sistema de eixos $PXYZ$, com origem em P , de tal modo que a base do paralelepípedo esteja contida no plano horizontal OXY . Neste sistema, teremos $\vec{u} = \overrightarrow{PA} = (a_1, b_1, 0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = (a_2, b_2, 0)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC} = (a_3, b_3, c)$. Portanto $|c|$ é a altura do paralelepípedo S . A matriz m , que tem esses vetores como linhas, assume o seguinte aspecto:

$$m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\det.m = c \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Ora, conforme vimos antes, a área do paralelogramo $PABD$, base de S , é igual ao valor absoluto do determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Segue-se que $|\det.m| = |c| \cdot (\text{área do paralelogramo}) = \text{vol} \cdot S$. Como $\det.m$ depende apenas dos vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} mas não do sistema de eixos escolhido, podemos então afirmar que, com relação a qualquer sistema de eixos ortogonais tomados no espaço, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{PA} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC} = (a_3, b_3, c_3)$, então o volume do paralelepípedo construído a partir dos pontos não-coplanares P , A , B e C é igual ao valor absoluto do determinante da matriz

$$m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, é bem conhecido que o volume do tetraedro $PABC$ é igual a $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo S , logo $\text{vol}(PABC) = \frac{1}{6}|\det.m|$ e verifica-se também que sendo $|\det.m| = 0$, os pontos P , A , B e C serão co-planares.

Exemplo 1.8. Verifique se os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (4, 1, 2)$, $C = (3, 3, 3)$ e $D = (0, 4, 2)$ são coplanares.

Solução. Sejam os vetores $\overrightarrow{AB} = (3, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 2)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 1)$. Sendo m a matriz que tem como elementos nas linhas, as coordenadas dos vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} , temos

$$m = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|\det.m| = 0$, então o volume do paralelepípedo $ABCD$ é nulo, onde concluímos que os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (4, 1, 2)$, $C = (3, 3, 3)$ e $D = (0, 4, 2)$ são co-planares.

1.17 Sistemas de Equações Lineares

Salvo menção explícita em contrário, fica convencionado que, ao escrevermos uma equação $ax + by = c$, estaremos admitindo que $a^2 + b^2 \neq 0$, isto é, que os coeficientes a e b não se anulam simultaneamente. Uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

é um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas x, y satisfazem ambas equações. O sistema (1.1) se diz indeterminado, impossível ou determinado quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente. Cada equação em

(1.1) tem como soluções as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente. Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema (1.1) deve-se examinar a matriz dos coeficientes

$$m = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Suas linhas são os vetores (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) pertencentes a \mathbb{R}^3 , e suas colunas são os vetores (a_1, a_2) , (b_1, b_2) e (c_1, c_2) em \mathbb{R}^2 . A matriz m chama-se a matriz aumentada do sistema (1.1). Duas retas que possuem mais de um ponto em comum devem coincidir. Logo o sistema (1.1) é indeterminado se, e somente se, duas equações definem a mesma reta. Isto ocorre se, e somente se, existe um número real $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 = kc_1$. Uma forma mais prática de exprimir as igualdades $a_2 = ka_1$ e $b_2 = kb_1$, sem referências ao número k , é dizer que se tem $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$. Analogamente, os outros pares de igualdades equivalem a $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$ e $b_1c_2 - c_1b_2 = 0$, isto é, os vetores linha $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz m são colineares (múltiplos um do outro).

$$a_1b_2 - b_1a_2 = a_1c_2 - c_1a_2 = b_1c_2 - c_1b_2 = 0.$$

O sistema (1.1) é impossível quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são paralelas. Para que isto aconteça é necessário e suficiente que exista $k \neq 0$ com $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 \neq kc_1$. Equivalentemente, o sistema (1.1) é impossível

se, e somente se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ mas pelo menos um dos números $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ é diferente de zero. Finalmente, o sistema (1.1) é determinado quando não é indeterminado nem impossível. Isto ocorre quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são concorrentes como na Figura 1.18, ou seja, quando o determinante $a_1b_2 - a_2b_1$ é diferente de zero. Dito de outro modo: quando os vetores linha $l_1 = (a_1, b_1)$ e $l_2 = (a_2, b_2)$ da matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

não são múltiplos um do outro.

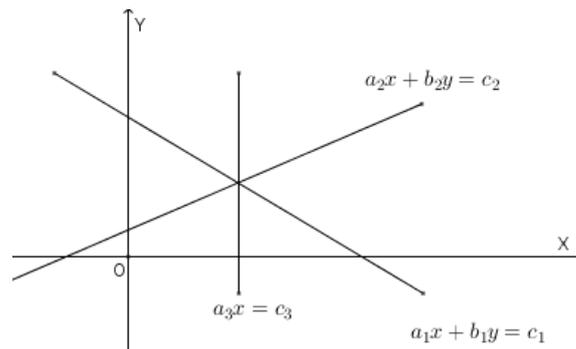


Figura 1.18: Retas com um Ponto em Comum

1.18 Comparando Métodos

Resolveremos agora um problema de geometria analítica para fazer uma comparação entre o método da utilização de vetores e o analítico tradicional (sem vetores), para mostrar que em grande parte do estudo de Geometria Analítica, o uso de

vetores é extremamente importante.

Exemplo 1.9. Na figura, $ABCD$ é um quadrado. determine as coordenadas do ponto A .

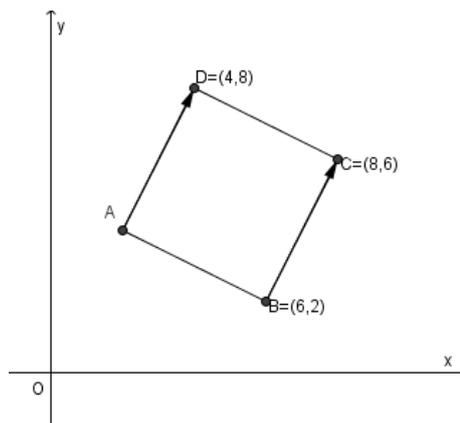


Figura 1.19: Quadrado ABCD

Mostraremos a solução tradicional para esse problema, encontrada em [1] e na maioria dos livros didáticos. É claro que, em um quadrado, os lados opostos são paralelos. Logo, a reta suporte do lado AB é paralela a reta suporte do lado CD . Vamos determinar o coeficiente angular m da reta CD : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 8}{8 - 4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. A reta suporte do lado AB deve ter coeficiente angular $m = -\frac{1}{2}$ e passar pelo ponto $B = (6, 2)$, logo $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 6) \implies y - 2 = -\frac{x}{2} + 3 \implies y - 2 + \frac{x}{2} - 3 = 0 \implies x + 2y - 10 = 0$. Do mesmo modo, a reta suporte do lado AD é paralela a reta suporte do lado BC . Vamos determinar agora o coeficiente angular m' da reta BC . $m' = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{2 - 6}{6 - 8} = \frac{-4}{-2} = 2$. Assim a reta suporte do lado AD deve ter coeficiente angular $m' = 2$ e passar pelo ponto $D = (4, 8)$, logo $y - 8 = 2(x - 4) \implies y - 8 = 2x - 8 \implies 2x - y = 0$. Como as retas AB e AD são concorrentes no ponto A , obtemos as coordenadas de A resolvendo o sistema

formado pelas equações das retas AB e AD .

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

onde, usando um método conveniente para a resolução do sistema, encontramos, $x = 2$ e $y = 4$. Portanto o ponto A tem coordenadas $(2, 4)$.

Agora, resolvendo o mesmo problema utilizando vetores. Com o método vetorial, veremos que os vetores \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BC} são equipolentes, logo $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \implies D - A = C - B \implies A = B + D - C$, então $A = (6, 2) + (4, 8) - (8, 6) \implies A = (6 + 4 - 8, 2 + 8 - 6) \implies A = (2, 4)$.

Comparando os dois métodos, verificamos que utilizando o método vetorial chegaremos a uma solução muito mais simples para o problema citado, deixando claro que existe uma economia nos procedimentos algébricos. Isto ocorre com a grande maioria dos problemas de Geometria Analítica. Por isso, estamos dando ênfase ao método vetorial de resolução de problemas de geometria Analítica, que será usado sempre que necessário.

1.19 Sistema Cartesiano Oblíquo

O sistema cartesiano será denominado oblíquo se o ângulo entre os eixos OX e OY não for de 90° . Não é habitual, no ensino de Geometria Analítica, o uso de coordenadas oblíquas, pois algumas desvantagens são observadas nesse sistema. A expressão que determina a distancia entre dois pontos fica mais complicada, pois no sistema cartesiano ortogonal, só se faz necessário o uso do teorema de Pitágoras e no sistema oblíquo, necessita-se da lei dos cossenos, pois vai depender do ângulo

1.19. SISTEMA CARTESIANO OBLÍQUO

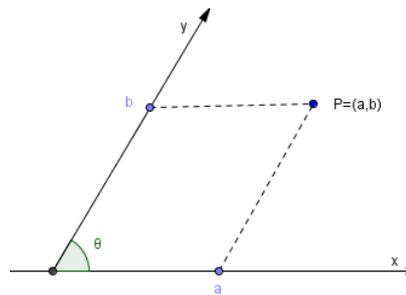


Figura 1.20: Sistema Cartesiano Oblíquo

entre os eixos, porém existe algumas relações que são absolutamente iguais, tanto no sistema oblíquo quanto no ortogonal, como por exemplo a equação da reta. Ou seja, pela semelhança dos triângulos $P_0P_1Q_1$ e P_0PQ da Figura 1.21 temos que

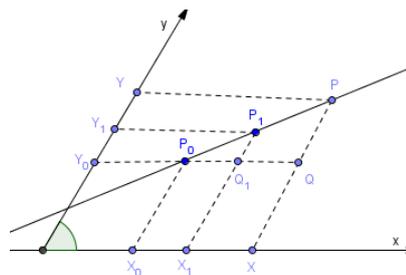


Figura 1.21: Reta no Sistema Oblíquo

$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow (y - y_0)(x_1 - x_0) = (x - x_0)(y_1 - y_0)$ desenvolvendo esta expressão obtemos

$$ax + by + c = 0$$

que é a mesma relação, para a equação da reta, encontrada no sistema ortogonal.

Portanto, em problemas relacionados a paralelismo, colinearidade, razão entre distâncias e etc, o sistema oblíquo funciona exatamente como no sistema ortogonal. Quando temos problemas que envolvem distâncias, ângulos, perpendicularismo aí o sistema oblíquo não é viável.

Capítulo 2

Aplicações da Geometria Analítica

Neste capítulo, abordaremos a Geometria Analítica como ferramenta para resolver problemas em geral, que é o objetivo principal do nosso trabalho. Problemas de Geometria Plana, Geometria Espacial e de outros ramos da Matemática e até da Física, que tem um alto grau de complexidade na resolução, ficam muito mais simples de resolver, quando atribuímos coordenadas e usamos a Geometria Analítica.

Lembramos que, utilizar coordenadas em problemas de Geometria, nem sempre é a melhor solução. Nos problemas que mostraremos, o uso de coordenadas conduzirá a soluções simples e elegantes. Entretanto devemos enfatizar que o uso de coordenadas é um recurso que nós professores e também os alunos, poderemos considerar para a resolução de problemas, mas que podem conduzir a grandes complicações algébricas, em alguns casos.

2.1 Aplicações na Geometria Plana

Nesta seção, apresentamos algumas aplicações em Geometria Plana. Resolveremos problemas com enunciados de Geometria Plana, que tem soluções que não são triviais, mas quando usamos Geometria Analítica obtemos soluções rápidas e fáceis.

O problema a seguir tem uma solução muito trabalhosa na Geometria Plana, mas introduzindo coordenadas e usando os conceitos de produto interno e norma de um vetor, que abordamos no capítulo 1, chegaremos a uma solução muito simples.

Exemplo 2.1. *Um trapézio isósceles $ABCD$ tem bases AB e CD que medem respectivamente 9 e 3, com $AD = BC = 5$. Qual a medida do ângulo formado pelas diagonais do trapézio?*

"Encaixemos" o trapézio $ABCD$ no primeiro quadrante do plano cartesiano, com o vértice A coincidindo com a origem e o lado AB sobre o eixo OX . É fácil verificar, usando o Teorema de Pitágoras, que a altura do trapézio é igual a 4. Daí, se

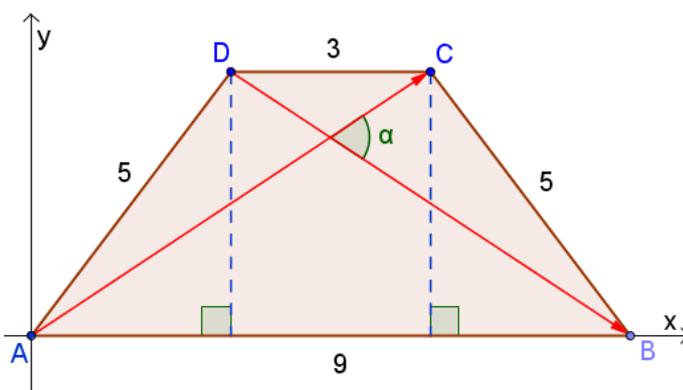


Figura 2.1: Trapézio Isósceles

$A = (0, 0)$, $B = (9, 0)$, $C = (6, 4)$ e $D = (3, 4)$, então $\overrightarrow{AC} = (6 - 0, 4 - 0) = (6, 4)$ e $\overrightarrow{DB} = (9 - 3, 0 - 4) = (6, -4)$. No trapézio isósceles, as diagonais tem o mesmo comprimento, donde $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$. Sabemos que

$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle = 6 \cdot 6 + 4 \cdot (-4) = 36 - 16 = 20$. Então,

$$\cos \alpha = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{DB}\|} = \frac{20}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}} = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}.$$

$\alpha \cong 67,38^\circ$. □

Pesquisamos diversos livros didáticos do Ensino Médio e Ensino Fundamental, e nenhum deles demonstra a existência do ortocentro. É consenso entre professores que atuam no Ensino Básico de que, deveria ser mostrado ao aluno a demonstração desta propriedade dos triângulos. Mas, na maioria das vezes, um dos problemas para não abordarem esse assunto em sala de aula é que a demonstração desta propriedade é muito dificultosa usando Geometria Plana, e portanto, como não há questionamentos, sobre a demonstração, acham melhor não apresentá-la. A seguir, apresentamos uma maneira mais acessível para os professores trabalharem essa demonstração, através da Geometria Analítica. Usaremos apenas os conceitos de ângulo entre vetores e produto interno.

Exemplo 2.2. *Mostre que as três alturas de um triângulo qualquer cortam-se em um ponto.*

Coloquemos o triângulo ABC em um sistema de coordenadas onde o lado AB está sobre o eixo OX e uma das alturas coincidindo com o eixo OY , Figura 2.2. Daí, $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$, $H = (0, h)$ e $H' = (0, h')$. Temos também os vetores $\overrightarrow{AC} = (-a, c)$, $\overrightarrow{BH} = (-b, h)$, $\overrightarrow{BC} = (-b, c)$ e $\overrightarrow{AH'} = (-a, h')$. Os vetores \overrightarrow{BH} e $\overrightarrow{AH'}$ são perpendiculares aos lados AC e BC respectivamente. Então $\langle \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0 \implies ab + ch = 0 \implies h = -\frac{ab}{c}$ e também da mesma forma $\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AH'} \rangle = 0 \implies ab + ch' = 0 \implies h' = -\frac{ab}{c}$. Donde provamos que os pontos H e H' são coincidentes. Portanto, as três alturas de um triângulo qualquer se

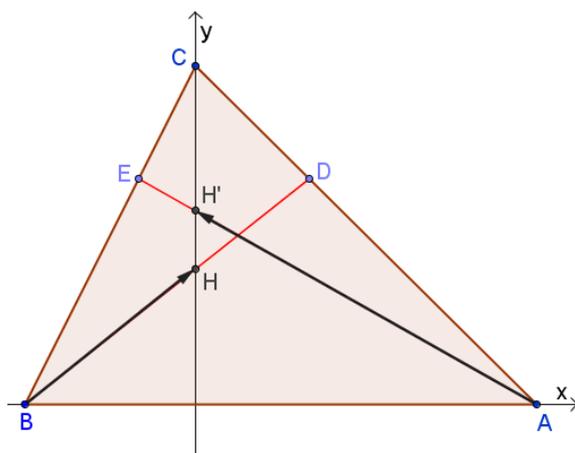


Figura 2.2: Triângulo

encontram em um mesmo ponto. \square

No problema a seguir, vamos usar o conceito de distância entre dois pontos no plano e baricentro para resolver, de maneira muito simples, um problema de solução complicado quando é resolvido por Geometria Plana.

Exemplo 2.3. Um quadrado $ABCD$ tem lado igual a 9 e os pontos P e Q dividem o lado CD em três segmentos congruentes. Calcule a distância do vértice A ao baricentro G do triângulo BPQ .

Colocamos o quadrado $ABCD$ no primeiro quadrante do plano cartesiano, com o vértice D coincidindo com a origem, como na Figura 2.3. Sendo $A = (0, 9)$, $B = (9, 9)$, $P = (3, 0)$ e $Q = (6, 0)$, como em [7] é conhecido que as coordenadas do baricentro G são $x_G = \frac{x_B + x_P + x_Q}{3} = \frac{9 + 3 + 6}{3} = 6$, $y_G = \frac{y_B + y_P + y_Q}{3} = \frac{9 + 0 + 0}{3} = 3$, portanto, $G = (6, 3)$. A distância procurada é

$$d_{(A,G)} = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

A solução desse problema por meio de Geometria Plana, não é difícil mas requer

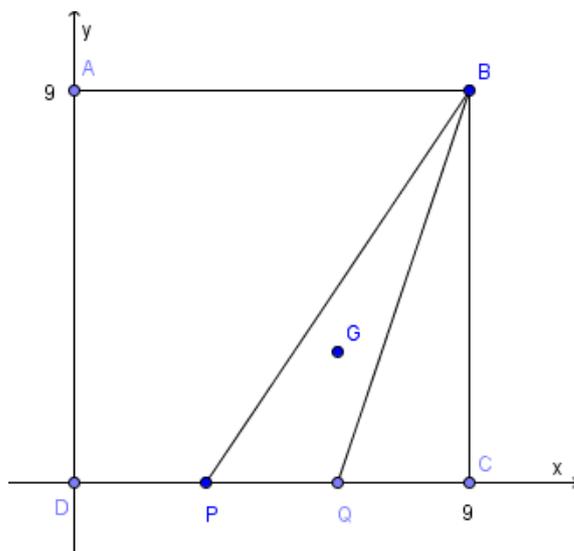


Figura 2.3: Quadrado no Plano OXY

muita criatividade e um conhecimento mais rebuscado para reconhecer algumas semelhanças de triângulos. Apresentamos agora uma solução alternativa, que não usa Geometria Analítica. Considerar a figura sem o ponto G . Seja M o ponto médio de PQ que também é ponto médio de DC . traçar BM e AC que se cortam em E . Os triângulos ABE e CME são semelhantes e, como $AB = 2MC$, temos $BE = 2EM$. Logo, E é o baricentro do triângulo BPQ e os pontos G e E coincidem. Assim,

$$AG = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

□

Exemplo 2.4. *Em um quadrado $ABCD$ de lado 1, tome um ponto $P \in BC$. Considere a reta que contém o ponto C e que seja perpendicular a AP e denote por Q o ponto de interseção dessa reta com a reta suporte do lado AB . Mostre que o ângulo \hat{BQP} é constante.*

2.1. APLICAÇÕES NA GEOMETRIA PLANA

Coloquemos o quadrado $ABCD$ no segundo quadrante do plano cartesiano de modo que o ponto B esteja na origem veja Figura 2.4. Assim, temos $A = (-1, 0)$, $P = (0, a)$, $C = (0, 1)$ e $Q = (b, 0)$. Devemos mostrar que θ não depende da posição

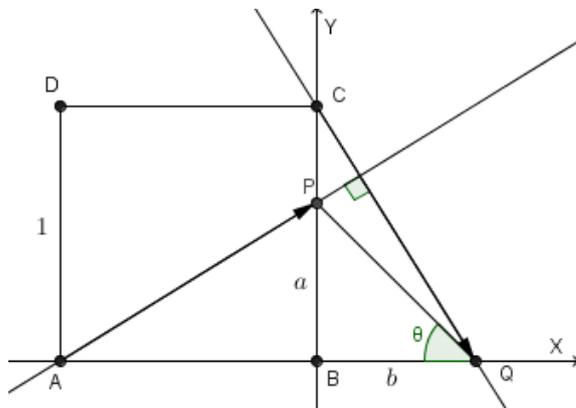


Figura 2.4: Quadrado com AP Perpendicular a CQ

de P . Sendo $\overrightarrow{AP} = (1, a)$ e $\overrightarrow{CQ} = (b, -1)$, devemos ter

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CQ} \Rightarrow \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ} \rangle = 0 \implies 1 \cdot b + a \cdot (-1) = 0 \implies a = b.$$

Como o triângulo BQP é retângulo em B e $a = b$, então $\theta = 45^\circ$. Portanto θ não depende da posição de P . \square

É comum aparecer nos livros de Geometria Plana o problema de se determinar o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo, vamos usar o conceito de distância de um ponto a uma reta para tornar mais simples a solução desse problema.

Exemplo 2.5. *Determinar o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo de catetos a e b .*

Como na Figura 2.5, temos um triângulo retângulo, é natural pensarmos em estabelecer um sistema de coordenadas onde cada eixo contém um cateto. Se r é

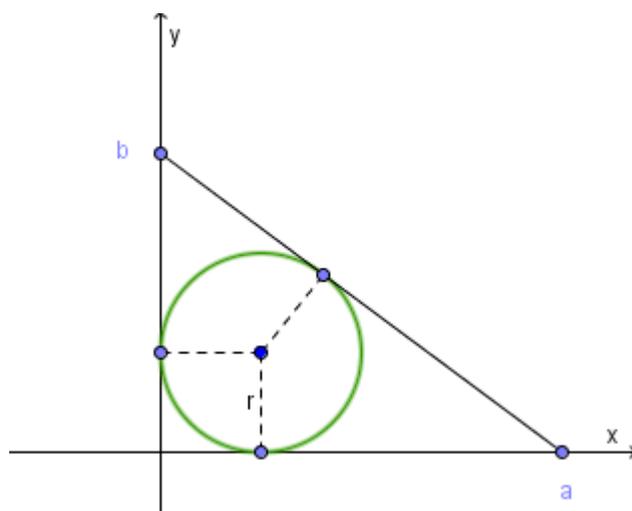


Figura 2.5: Circunferência Inscrita no Triângulo

o raio da circunferência tangente aos três lados do triângulo então a distancia do ponto (r, r) à reta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($\iff bx + ay = ab$) deve ser igual a r . Portanto,

$$\frac{|br + ar - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r.$$

ou seja, $|r(a+b) - ab| = r\sqrt{a^2 + b^2}$, o que fornece as soluções $r = \frac{ab}{(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})}$ e $r = \frac{ab}{(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})}$. Note que $a+b - \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Logo, se $r = \frac{ab}{(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})}$ teríamos que o ponto (r, r) estaria acima da reta que representa a hipotenusa, ou seja, a circunferência inscrita deve ter raio $r = \frac{ab}{(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})}$. \square

Mais um problema de difícil solução na Geometria Plana que será resolvido facilmente usando o conceito de distância de um ponto a uma reta no plano.

Exemplo 2.6. Um retângulo $ABCD$ tem lados $AB = 60$ e $BC = 80$. Calcule a distância da diagonal AC ao centro da circunferência que tangencia os lados AD , AB e BC .

Este problema foi proposto em [7] no artigo intitulado "A Geometria Analítica

do ensino médio". Vamos apresentar uma solução analítica. Colocamos o retângulo

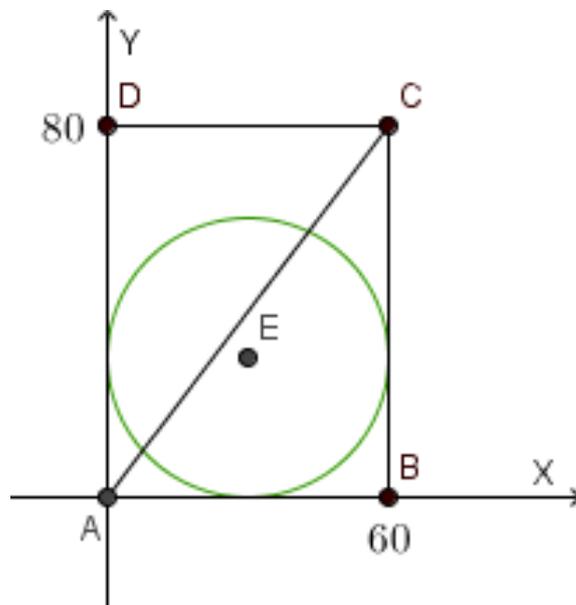


Figura 2.6: Circunferência Inscrita no Retângulo

$ABCD$ no primeiro quadrante do plano cartesiano ortogonal, como mostra a Figura 2.6, de modo que o ponto A seja a origem, o lado AB esteja sobre o eixo OX e o lado AD sobre o eixo OY . Desta forma, a equação da diagonal AC será $y = \frac{4x}{3} \iff \frac{4x}{3} - y = 0$. Como a circunferência é tangente aos lados AD e BC , temos que o seu centro é $E = (30, 30)$ e o raio é $R = 30$. Daí, a distância da reta AC ao ponto E será

$$d_{(r,E)} = \frac{\left| \frac{4}{3} \cdot 30 - 1 \cdot 30 - 0 \right|}{\sqrt{\frac{16}{9} + 1}} = \frac{40 - 30}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{10}{\frac{5}{3}} = 10 \frac{3}{5} = 6.$$

□

Exemplo 2.7. Um retângulo $ABCD$ tem 5 de base e 3 de altura, o ponto E é médio do segmento AB e o ponto F é interseção dos segmentos DE e AC . Qual a distância do ponto F ao segmento AD ?

2.1. APLICAÇÕES NA GEOMETRIA PLANA

Este foi um problema de um concurso público para professor de Matemática do ensino básico em 2010, que segundo os dados divulgados pela organização do concurso (Advise), teve um índice de acerto muito pequeno. Apresentamos uma solução analítica para esse problema.

Encaixando o retângulo no primeiro quadrante do plano cartesiano ortogonal com o lado AB sobre o eixo OX e o lado AD sobre OY , teremos $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (5, 3)$, $D = (0, 3)$ e $E = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$. A reta AC tem equação $y = \frac{3x}{5}$ e a reta DE

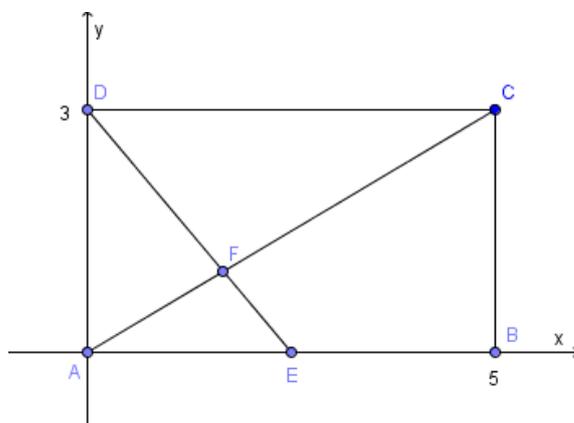


Figura 2.7: Retângulo no Plano OXY

tem equação $6x + 5y - 15 = 0$. O ponto F pode ser encontrado resolvendo o sistema formado pelas equações dessas duas retas,

$$\begin{cases} y = \frac{3x}{5} \\ 6x + 5y - 15 = 0, \end{cases}$$

ou seja, $F = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$. Como AD esta sobre o eixo OY , então a distância de F ao segmento AD é igual a $\frac{5}{3}$. \square

O próximo problema, que não é trivial usando Geometria Plana, pode ser resolvido de maneira bem simples quando usarmos um sistema de coordenadas oblíquas

no plano.

Exemplo 2.8. *Em um trapézio, M é o ponto médio da base maior, N é o ponto médio da base menor e P é o ponto de encontro das diagonais. Mostrar que M , N e P são colineares.*

Colocamos o trapézio em um sistema de coordenadas oblíquas OXY com os pontos M e N sobre o eixo OY , de modo que, a base maior esteja sobre o eixo OX e que o ponto M esteja na origem, como mostra a Figura 2.8. Escolhemos esse sistema para deixar a solução menos trabalhosa. Temos a liberdade de colocar os

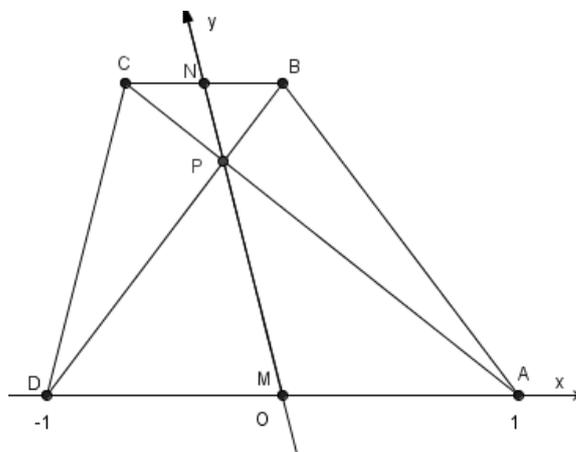


Figura 2.8: Trapézio no Plano OXY

eixos onde quisermos e de escolher a unidade de medida mais conveniente, tomando como unidade de medida a metade da base maior, temos $A = (1, 0)$, $B = (b, h)$, $C = (-b, h)$ e $D = (-1, 0)$. A reta BD tem equação

$$\frac{y - 0}{x + 1} = \frac{h - 0}{b + 1}$$

e corta o eixo OY no ponto $(0, y)$, portanto substituindo $x = 0 \implies y = \frac{h}{b + 1}$. A

reta AC tem equação

$$\frac{y - 0}{x - 1} = \frac{h - 0}{-b - 1}$$

e corta o eixo OY no ponto $(0, y)$. Portanto, substituindo $x = 0 \implies y = \frac{h}{b+1}$. Ou seja, o ponto $P = \left(0, \frac{h}{b+1}\right)$ está sobre o eixo OY , então M , N e P são colineares.

□

A seguir temos um problema de [7] com uma solução não muito simples em Geometria Plana e que requer muita criatividade para ser desenvolvida, mas se usarmos coordenadas no plano juntamente com o conceito de área do triângulo onde são determinadas as coordenadas dos vértices, chegaremos a uma solução mais simples.

Exemplo 2.9. *Os catetos de um triângulo ABC , retângulo em A , medem $AB = 10$ e $AC = 15$. Se AD é bissetriz do ângulo A , calcule as áreas dos triângulos ABD e ACD .*

Colocando o triângulo encaixado no primeiro quadrante do plano cartesiano, situação descrita na Figura 2.9, de modo que o vértice A coincida com a origem, $A = (0, 0)$, $B = (0, 10)$ e $C = (15, 0)$. A reta AD tem equação $y = x$, pois passa pela origem e tem coeficiente angular $m = 1$ (bissetriz do primeiro quadrante). A reta BC tem equação geral $2x + 3y = 30$, pois determina nos eixos OX e OY segmentos de medidas, 10 e 15 respectivamente. O ponto D , pé da bissetriz AD , que é a intersecção dessas duas retas, pode ser obtido resolvendo-se o sistema formado pelas suas respectivas equações,

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + 3y = 30 \end{cases}$$

ou seja, $D = (6, 6)$. Daí, sendo S_{ACD} a área do triângulo ACD , temos $\overrightarrow{AC} = (0, 15)$,

2.1. APLICAÇÕES NA GEOMETRIA PLANA

$\vec{AD} = (6, 6)$ e S_{ACD} será igual a metade do valor absoluto do determinante da matriz que tem como linhas as coordenadas dos vetores \vec{AC} e \vec{AD} , sendo Δ o valor do determinante, então

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 6 \cdot 15 - 0 \cdot 6 = 90 - 0 = 90$$

ou seja, $S_{ACD} = 45$. E sendo S_{ABD} a área do triângulo ABD temos $\vec{AB} = (0, 10)$,

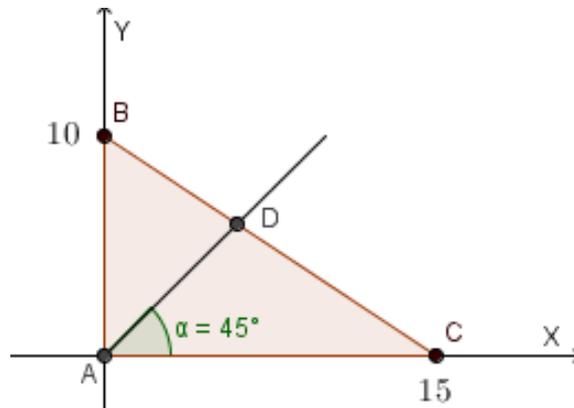


Figura 2.9: Triângulo

$\vec{AD} = (6, 6)$ e S_{ABD} será igual a metade do valor absoluto do determinante da matriz que tem como linhas as coordenadas dos vetores \vec{AB} e \vec{AD} , sendo Δ o valor do determinante, então

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 6 \cdot 10 - 0 \cdot 6 = 60 - 0 = 60$$

ou seja, $S_{ABD} = 30$. □

Exemplo 2.10. *As medianas AM e BN de um triângulo ABC são perpendiculares entre si e medem, respectivamente, 9 e 12. Qual o comprimento da terceira mediana desse triângulo?*

O ponto de encontro das medianas é o baricentro G do triângulo ABC . Usando o fato de que as medianas AM e BN se cortam perpendicularmente em G , colocamos esse triângulo no plano cartesiano com origem em G . Usando a conhecida proporção em que G divide as medianas em duas partes tais que, a parte que contém o vértice é o dobro da outra, sendo $AM = 9$, isto significa que $AG = 6$ e $GM = 3$. Sendo $BN = 12$, significa que $BG = 8$ e $GN = 4$, ou seja $A = (0, 6)$, $M = (0, -3)$, $B = (-8, 0)$ e $N = (4, 0)$. As equações das respectivas retas AN e BM são $3x + 2y = 12$ e $3x + 8y = -24$. Resolvendo o sistema que envolve essas duas equações,

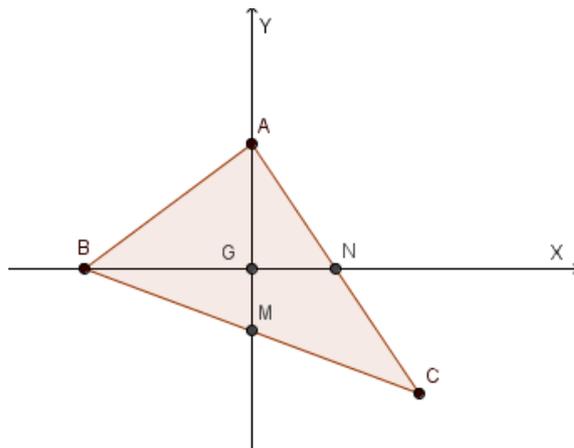


Figura 2.10: Triângulo ABC no Plano OXY

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 8y = -24 \end{cases}$$

encontramos o ponto $C = (8, -6)$. O comprimento da terceira mediana é igual a $\frac{3}{2}$

da distância entre C e G , que é dada por

$$\frac{3}{2}\sqrt{(x_C - x_G)^2 + (y_C - y_G)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{(8 - 0)^2 + (-6 - 0)^2} = 15.$$

□

No próximo problema, se usarmos Geometria Plana para resolvê-lo, nos depararemos com uma solução difícil pois é preciso observar algumas semelhanças não muito óbvias, no entanto, atribuindo coordenadas e usando o conceito de área do triângulo formalizado seção 1.13 do Capítulo 1, chegaremos a uma solução simples.

Exemplo 2.11. *Calcular a área do triângulo ADE , retângulo em E , inscrito num trapézio retângulo $ABCD$, com $AB = 10$, $AD = 30$ e $CD = 20$.*

Fixamos o trapézio $ABCD$ no primeiro quadrante do plano cartesiano, de modo que os lados AD e AB fiquem contidos, respectivamente, nos eixos OX e OY , como mostra a Figura 2.11. A reta BC passa pelos pontos $B = (0, 10)$ e $C = (30, 20)$. Portanto, sua equação reduzida é $y = \frac{1}{3}x + 10$. A circunferência de diâmetro AD , com centro $M = (15, 0)$, passa pelo ponto E e tem equação $(x - 15)^2 + y^2 = 15^2$. O ponto E é dado pela solução do sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 10 \\ (x - 15)^2 + y^2 = 225, \end{cases}$$

ou seja, $E = (6, 12)$ ou $E = (15, 15)$. Dessa forma, $\overrightarrow{AD} = (30, 0)$ e $\overrightarrow{AE} = (6, 12)$ ou $\overrightarrow{AE} = (15, 15)$. Portanto, a área do triângulo ADE , é a metade do módulo do determinante onde as linhas são as coordenadas dos vetores \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AE} , ou seja,

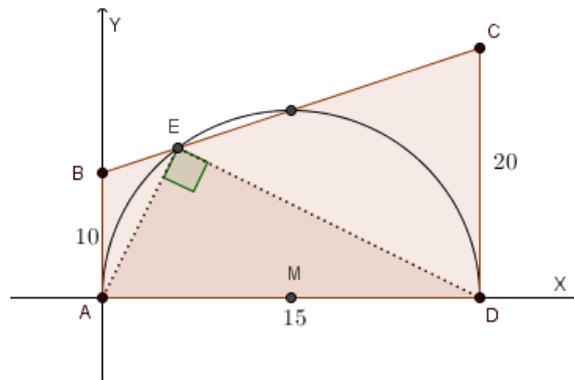


Figura 2.11: Triângulo Inscrito no Trapézio

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 180$$

ou ainda, usando o vetor $\overrightarrow{AE} = (15, 15)$, já que o ponto E pode assumir duas posições, pois, este está sobre o lado BC do trapézio e o ângulo AED é reto, temos

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 15 & 15 \end{vmatrix} = 225.$$

□

Vamos mostrar agora mais um problema difícil sobre área de figuras planas, que pode ser resolvido facilmente utilizando a Geometria Analítica.

Exemplo 2.12. *Em um retângulo $ABCD$ da, determinar a área do quadrilátero $ADNP$. Sabendo que $AB = 3$, $BC = 2$, M é o ponto médio de BC , $DN = 1$ e $NC = 2$.*

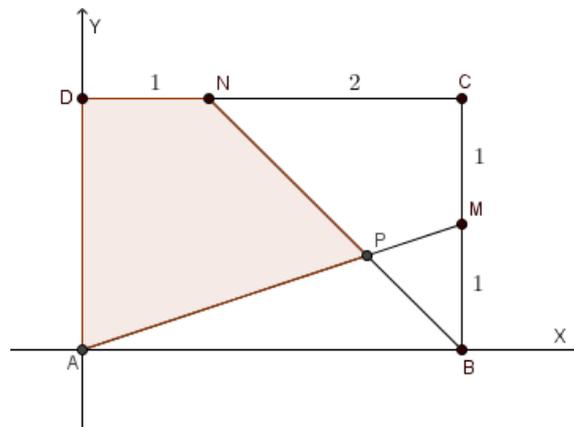


Figura 2.12: Retângulo ABCD no Plano OXY

Escolhemos um sistema de coordenadas com o ponto A situado na origem, o eixo OX sobre o lado AB e o eixo OY sobre o lado AD , Figura 2.12. Desta forma, os pontos que nos interessam são dados através das seguintes coordenadas: $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $M = (3, 1)$ e $N = (1, 2)$. O ponto P é comum as retas AM e BN , a equação da reta AM é $y = \frac{1}{3}x$ e a equação da reta BN é $y = -x + 3$. Resolvendo o sistema dessas duas equações

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ y = -x + 3, \end{cases}$$

obtemos o ponto $P = (9/4, 3/4)$. O triângulo APD tem base igual a 2 e altura igual a abcissa de P , portanto, $\frac{9}{4}$. O triângulo DPN tem base igual a 1 e altura $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Portanto, a área do quadrilátero $ADNP$ será $A = A_{APD} + A_{DPN} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{23}{8}$. \square

2.2 Aplicações na Geometria Espacial

A seguir, apresentamos algumas aplicações em Geometria Espacial. Problemas de distâncias e ângulos que não são resolvidos facilmente usando os métodos abordados nos livros didáticos, usaremos os conceitos de Geometria Analítica para conseguir soluções mais simples.

Os conceitos de vetores equipolente, produto interno no espaço e norma de um vetor, são fundamentais no desenvolvimento da solução do problema a seguir.

Exemplo 2.13. *Em uma pirâmide quadrangular regular, a aresta da base é $a = 4$ e a altura é $h = 6$.*

- a) *Qual a distância entre os pontos médios de duas arestas opostas (reversas)?*
 b) *Qual o ângulo entre duas arestas opostas (reversas)?*

Encaixando a base da pirâmide no plano OXY , como na Figura 2.13, de modo que o vértice D esteja na origem, temos $A = (4, 0, 0)$, $B = (4, 4, 0)$, $C = (0, 4, 0)$ e $E = (2, 2, 6)$. Verificamos que as arestas AB e EC são reversas, pois não existe um plano que contem as duas. Sendo M o ponto médio de AB e N o ponto médio de EC $AM = MB \implies M - A = B - M \implies 2M = A + B \implies M = \frac{A + B}{2}$. Analogamente, encontramos $N = \frac{E + C}{2}$. Logo $M = (4, 2, 0)$, $N = (1, 3, 3)$ e o vetor $\overrightarrow{MN} = (-3, 1, 3)$, donde $d_{(M,N)} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 1 + 9} = \sqrt{19}$. Como os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DC} são equipolentes, então o ângulo entre as arestas reversas AB e EC é o mesmo entre CD e CE . Como $\overrightarrow{CD} = (0, -4, 0)$, $\overrightarrow{CE} = (2, -2, 6)$, $\|\overrightarrow{CD}\| = 4$ e $\|\overrightarrow{CE}\| = \sqrt{44}$, segue que

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE} \rangle}{\|\overrightarrow{CD}\| \cdot \|\overrightarrow{CE}\|} = \frac{0 + 8 + 0}{4\sqrt{44}} = \frac{8}{8\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

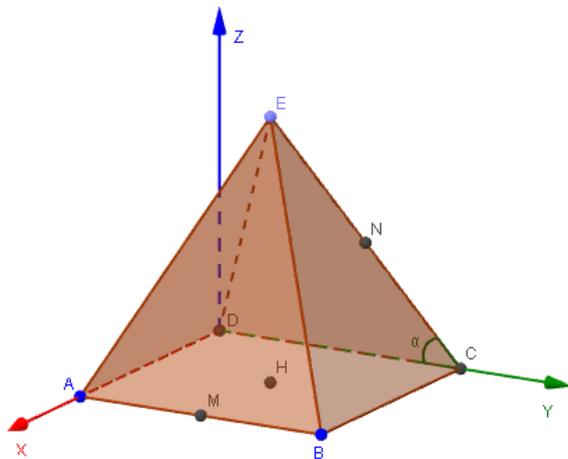


Figura 2.13: Pirâmide no Espaço

□

É importante observar que no próximo problema, o uso correto de coordenadas no espaço associado ao conceito de produto interno entre vetores, poderemos encontrar uma solução muito simples para este problema que, se usássemos apenas os conceitos de Geometria Espacial, encontraríamos uma solução mais difícil.

Exemplo 2.14. *Provar que duas arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.*

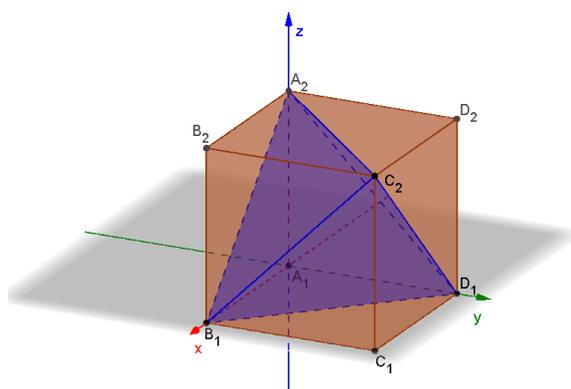


Figura 2.14: Tetraedro Inscrito no Cudo

2.2. APLICAÇÕES NA GEOMETRIA ESPACIAL

Este problema foi proposto em [5]. Vamos apresentar uma solução analítica. Fixando um sistema de coordenadas ortogonais, como mostra a Figura 2.14, e considerando o cubo cujos vértices são $A_1 = (0, 0, 0)$, $B_1 = (1, 0, 0)$, $C_1 = (1, 1, 0)$, $D_1 = (0, 1, 0)$, $A_2 = (0, 0, 1)$, $B_2 = (1, 0, 1)$, $C_2 = (1, 1, 1)$ e $D_2 = (0, 1, 1)$. Então $B_1D_1C_2A_2$ são vértices de um tetraedro regular. Duas arestas opostas desse tetraedro, como B_1D_1 e A_2C_2 , por exemplo, são ortogonais porque são diagonais diferentes em faces paralelas do cubo. Ou seja, $B_1D_1 = (-1, 1, 0)$ e $A_2C_2 = (1, 1, 0)$. Logo $\langle \overrightarrow{B_1D_1}, \overrightarrow{A_2C_2} \rangle = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1 + 1 + 0 = 0$. \square

Exemplo 2.15. AB , AC e AD são arestas de um cubo. Sendo AE uma diagonal, mostre que AE é perpendicular ao plano (BCD) .

Fixando um sistema de coordenadas como na Figura 2.15 e escolhendo uma unidade, podemos adotar $AB = 1$. Daí, $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 1)$,

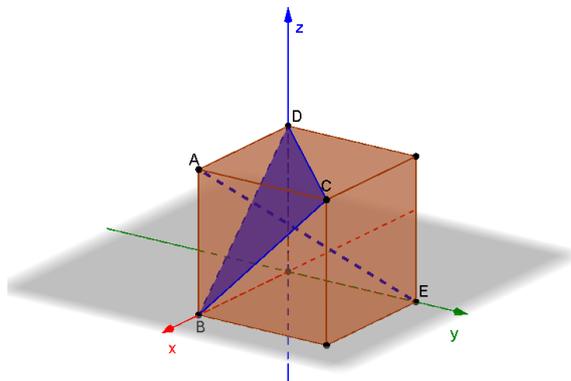


Figura 2.15: Plano Perpendicular à Diagonal do Cubo

$D = (0, 0, 1)$ e $E = (0, 1, 0)$, sendo os vetores $\overrightarrow{AE} = (-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{BD} = (-1, 0, 1)$, com isso $\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC} \rangle = (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 + 1 - 1 = 0$ e $\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD} \rangle = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0$. Então $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$, e como \overrightarrow{AE} é perpendicular a dois vetores do plano (BCD) , então $\overrightarrow{AE} \perp (BCD)$.

2.2. APLICAÇÕES NA GEOMETRIA ESPACIAL

Neste problema, poderíamos então fazer a seguinte pergunta: Se AE intersepta o plano BCD em P , mostre que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Se colocarmos os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$ e $E = (1, 1, 1)$ facilitaremos a demonstração deste outro fato, usando também a aresta do cubo como unidade de comprimento. O baricentro do triângulo BCD é o ponto P , extremidade do vetor

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Em termos de coordenadas, temos $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, donde $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Assim, P pertence tanto ao plano (BCD) como ao segmento AE , logo é a interseção de (BCD) com AE . \square

Mostraremos agora um problema proposto em [5] que tem uma solução trabalhosa quando usamos apenas os conceitos de Geometria Plana e Espacial, que será resolvido facilmente usando coordenadas de vetores e produto interno.

Exemplo 2.16. *Sejam OA , OB e OC segmentos de reta perpendiculares dois a dois. Mostre que $(A_{\Delta OAB})^2 + (A_{\Delta OBC})^2 + (A_{\Delta OCA})^2 = (A_{\Delta ABC})^2$, onde $A_{\Delta OAB}$ representa a área do triângulo OAB .*

Tomamos um sistema de coordenadas do qual O é a origem e os pontos A , B e C estão sobre os eixos, como mostra a Figura 2.16, de modo que $O = (0, 0, 0)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$. Então $A_{\Delta OAB} = \frac{ab}{2}$, $A_{\Delta OAC} = \frac{ac}{2}$ e $A_{\Delta OBC} = \frac{bc}{2}$, portanto a soma dos quadrados dessas três áreas é igual a $\frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. Por outro lado, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$, portanto $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = a^2 + b^2$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a^2$ e $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = a^2 + c^2$. Então

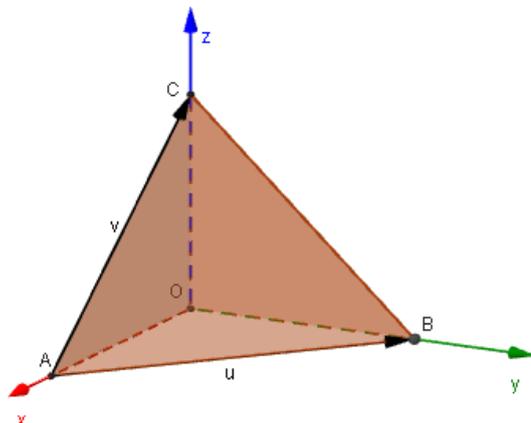


Figura 2.16: Tetraedro com Três Faces Ortogonais

$$(A_{\Delta ABC})^2 = \frac{1}{4} \cdot \det \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{pmatrix}$$

$(A_{(ABC)})^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$, ou seja, $(A_{\Delta OAB})^2 + (A_{\Delta OBC})^2 + (A_{\Delta OCA})^2 = (A_{\Delta ABC})^2$. Devemos observar que o quadrado da área de um triângulo é $\frac{1}{4}$ do quadrado da área do paralelogramo no qual dois lados consecutivos são lados desse triângulo. \square

Exemplo 2.17. *Calcular um ângulo formado entre duas diagonais de um cubo.*

Colocamos um cubo encaixado em um sistema de coordenadas onde a base está no plano OXY e o ponto A sendo a origem, como mostra a Figura 2.17. Daí, temos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (0, 1, 0)$, $E = (0, 0, 1)$, $F = (1, 0, 1)$, $G = (1, 1, 1)$ e $H = (0, 1, 1)$. Consideramos vetores $\vec{FD} = (-1, 1, -1)$ e $\vec{EC} = (1, 1, -1)$, e θ como sendo o menor ângulo entre esses dois vetores. Como

$\langle \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EC} \rangle = (-1) \cdot (1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -1 + 1 + 1 = 1$ e $\|\overrightarrow{FD}\| = \|\overrightarrow{EC}\| = \sqrt{3}$,
então $\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EC} \rangle}{\|\overrightarrow{FD}\| \cdot \|\overrightarrow{EC}\|} = \frac{1}{3}$, ou seja, $\theta \cong 70^\circ$. \square

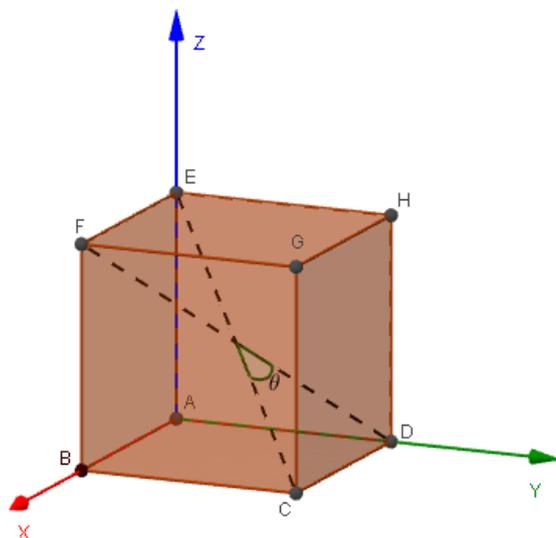


Figura 2.17: Ângulo Entre as Diagonais do Cubo

2.3 Aplicações na Álgebra

Nesta seção apresentamos algumas aplicações na Álgebra. É importante observar que, em Geometria Analítica, a Álgebra e a Geometria se integram. Assim, problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos, e relações algébricas são interpretadas geometricamente. Por exemplo, a equação $3x + 2y - 5 = 0$ representa uma reta, um ponto do plano pode ser representado pelo par $(4, -3)$, o ponto $(4, 3)$ pertence à reta representado por $y = -2x + 11$ e a reta que corta os eixos coordenados em $(5, 0)$ e $(0, 3)$ tem equação $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

Exemplo 2.18. *Considere os pares de números reais x e y que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 8x + 6y - 16$. Qual o maior valor de x ?*

2.3. APLICAÇÕES NA ÁLGEBRA

A equação dada representa uma circunferência. Completando quadrados, devemos ter $x^2 - 8x + y^2 - 6y = -16 \implies x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = -16 + 16 + 9 \implies (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$, que é uma circunferência de centro $C = (4, 3)$ e raio $R = 3$, e pela Figura 2.18, observamos facilmente que o maior valor de x é 7. \square

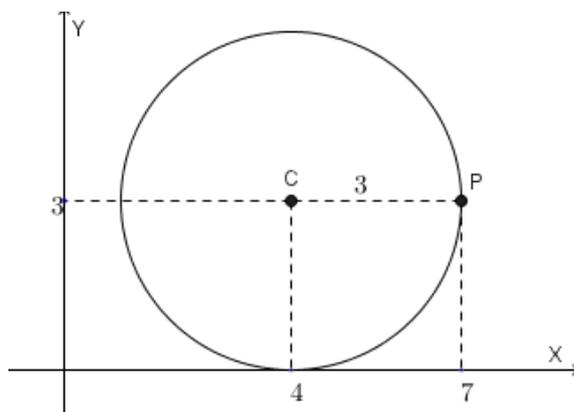


Figura 2.18: Circunferência

Exemplo 2.19. *Considere todos os números reais x e y tais que $x + 3y = 30$. Para quais valores de x e y a expressão $E = x^2 + y^2$ assume menor valor?*

Esse é também um problema de Álgebra. Sua solução, uma vez que o enunciado esteja bem entendido, não é difícil. Entretanto, a solução analítica é interessante. Estabelecendo um sistema de coordenadas, todos os pontos $P = (x, y)$, tais que $x + 3y = 30$, pertencem a uma reta r e o valor de E é o quadrado da distância de P à origem do sistema de coordenadas, Figura 2.19. Precisamos encontrar o ponto de r cuja distância ao ponto $(0, 0)$ é mínima. A reta s , perpendicular a r e passando pela origem, tem equação $3x - y = 0$ e a interseção dessas retas é o ponto procurado. Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas r e s

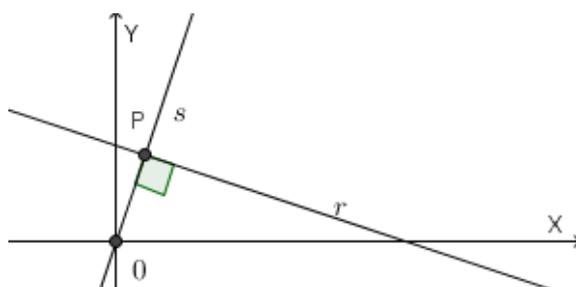


Figura 2.19: Distância Mínima

$$\begin{cases} x + 3y = 30 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

encontramos $x = 3$ e $y = 9$, que é a solução do problema. Então, o valor mínimo de E é $3^2 + 9^2 = 90$. \square

Usaremos os conceitos de vetores perpendiculares, produto interno e equações paramétricas da reta, ambos no plano, para resolver facilmente o próximo problema.

Exemplo 2.20. *Quais as soluções inteiras da equação $-2x + 5y = 8$?*

É claro que a equação dada representa uma reta r e o vetor $\vec{n} = (-2, 5)$ é perpendicular a essa reta, Figura 2.20. Sendo \vec{v} o vetor diretor da reta, então $\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = 0$, o que nos dá $\vec{v} = (5, 2)$. É fácil de verificar que o ponto $A = (1, 2)$ pertence a reta r , então suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e dentro do par ordenado $(1+5t, 2+2t)$, com $t \in \mathbb{Z}$ estão guardadas todas as soluções inteiras da equação. Basta, ao ponto $(1, 2)$ acrescentar sucessivas vezes o vetor $(5, 2)$ para encontrar uma nova solução inteira da equação. Por exemplo, $(1, 2)$, $(6, 4)$,

$(11, 6)$, $(16, 8)$, ... são algumas das soluções inteiras da equação. \square

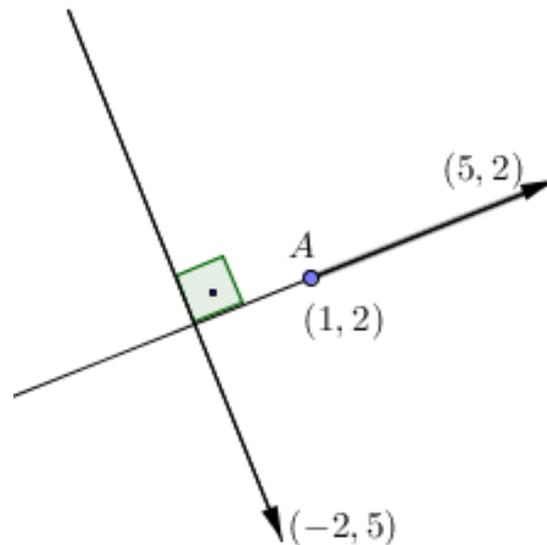


Figura 2.20: Vetor Perpendicular a um Vetor Diretor

2.4 Aplicações na Cinemática

A utilização da Geometria Analítica para a solução de problemas relacionados com o Cálculo Diferencial e sua aplicação à Mecânica contribuíram de maneira decisiva para o progresso da Física. As representações cartesianas de fenômenos, como a variação da temperatura de um doente, a flutuação dos fenômenos meteorológicos, nos permitem avaliar e tirar conclusões, por um simples exame das curvas representadas num sistema de eixos coordenados.

Grande parte dos problemas de Cinemática Escalar e vetorial podem ser resolvido de maneira criativa utilizando o método analítico. No próximo problema, vamos utilizar coordenadas no plano e equação da reta e resolvê-lo de maneira simples.

Exemplo 2.21. *Um caminhão parte às 6 horas da manhã, da cidade de João Pessoa*

2.4. APLICAÇÕES NA CINEMÁTICA

para a cidade de Patos, viajando a uma velocidade média de 50km/h e ao meio dia chega à Patos. Um automóvel parte de Patos às 8 horas da manhã desse dia e, viajando com velocidade constante pela mesma estrada, chega à João Pessoa também ao meio dia. Em que momento o caminhão e o automóvel cruzaram-se na estrada?

Vamos resolver um problema de Cinemática Escalar usando o método analítico. Sendo V_c a velocidade do caminhão e, como $V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} \implies \Delta S = V_c \cdot \Delta t = 50 \cdot 6 = 300\text{km}$, que é a distância entre as cidades de João Pessoa e Patos. Vamos construir o seguinte sistema de coordenadas: para um objeto qualquer que se mova ao longo da estrada, seja x o tempo (em horas) decorrido após às 6 horas e y (em quilômetros) a sua distância à cidade de João Pessoa, situação descrita na Figura 2.21. Pelos dados

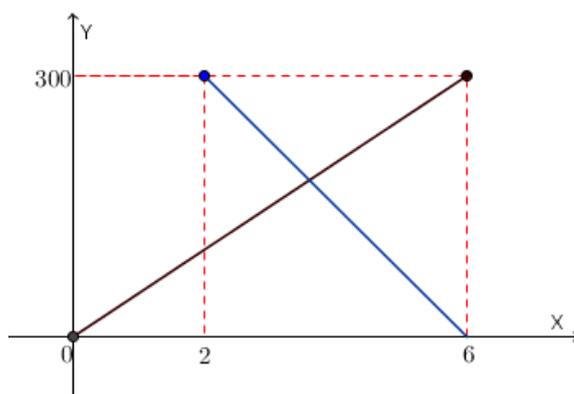


Figura 2.21: Representação Gráfica de Movimentos

do problema, o gráfico que mostra o movimento do caminhão é um segmento de reta cujos extremos são os pontos $(0, 0)$ e $(6, 300)$ e o gráfico que mostra o movimento do automóvel é outro segmento de reta cujos extremos são os pontos $(2, 300)$ e $(6, 0)$. As equações dessas retas são $y = 50x$ e $y = -75x + 450$. Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} y = 50x \\ y = -75x + 450 \end{cases}$$

2.4. APLICAÇÕES NA CINEMÁTICA

encontramos $x = 3,6$ e $y = 180$. Portanto, o encontro se deu 3,6 horas após às 6 horas da manhã, ou seja às 9 horas e 36 minutos, a uma distância de 180 km da cidade de João Pessoa. \square

Exemplo 2.22. *Dois trens de carga, na mesma linha férrea, seguem uma rota de colisão. Um deles vai a 46 km/h e o outro a 58 km/h. No instante em que eles se encontram a 260 km um do outro, um pássaro que voa a 60 km/h, parte de um ponto entre os dois, até encontrar um deles e então volta para o outro e continua nesse vai e vem, até morrer esmagado no momento em que os trens se chocam. Quantos quilômetros voou o pobre pássaro?*

Adequando o problema a um sistema de coordenadas conveniente, seja x o tempo (em horas) e y (em quilômetros) a distância entre os dois trens. O movimento do trem que vai a 58 km/h é representado pela reta que passa no ponto $(1, 58)$ na Figura 2.22 e o movimento do trem que vai a 46 km/h é representado pela reta que passa no ponto $(1, 214)$. As equações dessas retas são respectivamente $y = 58x$ e $y = -46x + 260$. Resolvendo o sistema das equações

$$\begin{cases} y = 58x \\ y = -46x + 260 \end{cases}$$

encontramos $x = 2,5$, que é a abcissa do ponto de interseção das duas retas, ou seja, o momento da colisão. Então, o pássaro voou por duas horas e meia, como ele voava a 60 km/h, então percorreu 150 quilômetros. \square

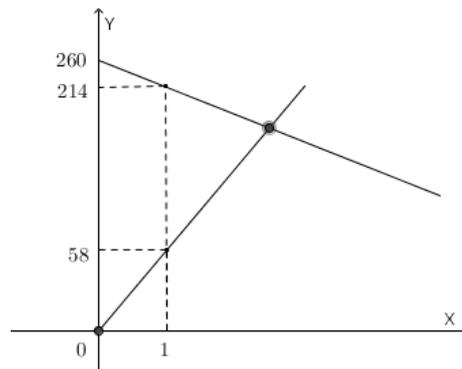


Figura 2.22: Representação Gráfica de uma Rota de Colisão

2.5 Outras Aplicações

Diversos outros problemas poderão ser resolvidos de maneira mais simples utilizando o método analítico, tais como, problemas que envolvem programação linear, máximos e mínimos de funções cujas variáveis estão sujeitas a certas desigualdades, probabilidade geométrica, economia, etc. Abordagens envolvendo inequações aparecem em alguns livros de Geometria Analítica do ensino médio, geralmente dentro de uma seção intitulada, representação gráfica de uma inequação, como em [1]. No entanto, pesquisando em vários livros, constatamos que essas abordagens são apenas para resolver exercícios manipulativos, não trazem uma conotação de aplicação da Geometria Analítica. Sugerimos que os livros didáticos priorizem aplicações como essa, dentro das abordagens sobre inequações estudadas em Geometria Analítica.

Exemplo 2.23. *Em uma partida de futebol entre Brasil e Argentina, aos 40 minutos do segundo tempo de jogo, durante um contra-ataque para a Argentina, o jogador argentino Messi recebe a bola exatamente na lateral do campo sobre a linha que divide o gramado e no mesmo momento o zagueiro brasileiro Thiago Silva está no centro do campo. Messi corre com a bola dominada, em linha reta, em direção ao centro do gol e Thiago Silva também corre em linha reta para tentar interceptar Messi e*

2.5. OUTRAS APLICAÇÕES

derrubá-lo. Sabendo que a velocidade de Thiago Silva é igual a 0,85 da velocidade de Messi, o encontro dos dois acontecerá dentro ou fora da área? (Considere que as dimensões do campo são de 96 metros de comprimento por 72 metros de largura).

Podemos colocar o campo em um sistema de coordenadas onde o ponto em que Messi se encontra inicialmente, ou seja, a linha lateral no meio do campo, seja a origem. Desta forma, teremos que $M = (0, 0)$ é a posição de Messi inicialmente, $T = (36, 0)$ é a posição de Thiago Silva, $C = (36, 48)$ é a posição do centro do gol, defendida pelo Brasil. A reta MC , de equação $y = \frac{4x}{3}$, representa a trajetória de Messi em direção ao gol e o ponto $P = \left(x, \frac{4x}{3}\right)$, está sobre a trajetória que Thiago Silva deve tomar para interceptar Messi. Sabemos que, quando Messi corre 100

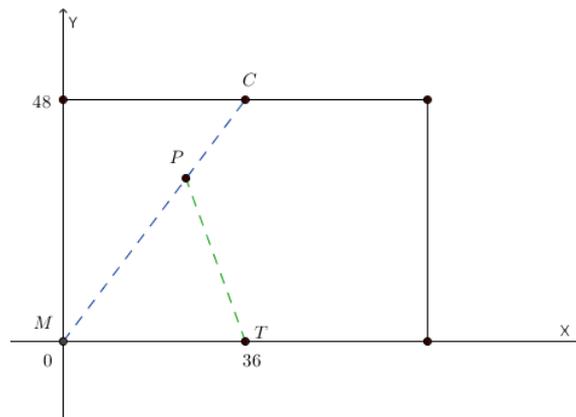


Figura 2.23: Dimensões do Campo de Futebol

metros, Thiago Silva corre 85, podemos estabelecer que $d_{(T,P)} = \frac{85}{100} \cdot d_{(M,P)}$. Daí teremos

$$\sqrt{(x-36)^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2} = \frac{85}{100} \sqrt{x^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2},$$

e simplificando esta igualdade, encontramos $x = 24,35$ e $y = 32,47$. Observamos que, para as dimensões oficiais de um campo de futebol, a grande área tem profundidade de 16,5 metros, então, para o encontro ocorrer fora da área, a medida y teria

que ser menor do que 31,5 metros. Como $y = 32,47$ metros, isto nos mostra que Thiago Silva só conseguiu derrubar Messi dentro da área. \square

Exemplo 2.24. *Um comerciante vende dois tipos de artigos, A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de 20 reais por unidade e na venda do artigo B, um lucro de 30 reais por unidade. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromisso já assumido ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?*

Este problema foi extraído de [2] do capítulo de Sistemas Lineares, vamos propor uma solução analítica. Seja x o número de artigos do tipo A e y o número de artigo do tipo B que devem ser encomendados. Se para cada artigo A que vende tem lucro de 20 reais e para cada artigo B tem lucro de 30 reais, o lucro total é dado por $L = 20x + 30y$. Como cabem no máximo 100 artigos, então $x + y \leq 100$. Além disso, serão vendidos pelo menos 15 artigos A e pelo menos 25 artigos B, ou seja, $x \geq 15$ e $y \geq 25$. O distribuidor entregará no máximo 60 artigos A e no máximo 50 artigos B, e daí $x \leq 60$ e $y \leq 50$. As restrições dão origem, no plano cartesiano, ao polígono convexo limitado pelas retas de equações $x + y = 100$, $x = 15$, $y = 25$, $x = 60$ e $y = 50$ e os pares ordenados que satisfazem essas condições pertencem ao polígono, Figura 2.24. As coordenadas dos vértices do polígono resultante, que encontramos facilmente resolvendo o sistema dos pares de equações que correspondem aos lados que determinam o vértice, são $(15, 25)$, $(15, 50)$, $(50, 50)$, $(60, 40)$, $(60, 25)$. Como o lucro é da forma $L = 20x + 30y$, calculando os valores da função lucro nos vértices

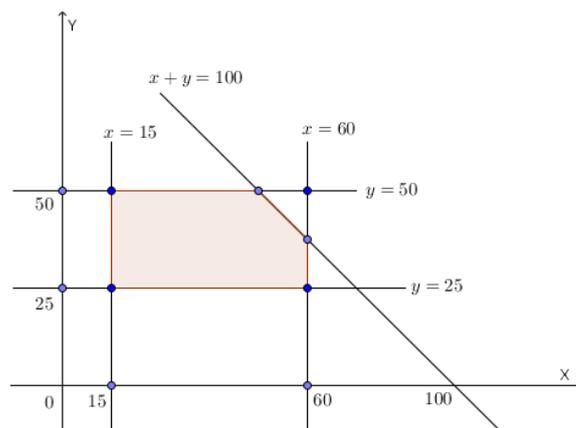


Figura 2.24: Diagrama do Lucro

do polígono, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} (15, 25) \longrightarrow L = 1050 \\ (15, 50) \longrightarrow L = 1800 \\ (50, 50) \longrightarrow L = 2500 \\ (60, 40) \longrightarrow L = 2400 \\ (60, 25) \longrightarrow L = 1950. \end{array} \right.$$

Daí, a solução que corresponde ao valor máximo de lucro L é $(50, 50)$ e o lucro máximo é 2500. A justificativa para o lucro máximo e para calcular o valor da função nos vértices está evidente nas restrições do problema, o ponto $(50, 50)$ é obtido da interseção das retas $y = 50$ e $x + y = 100$, onde $15 \leq x \leq 60$, $25 \leq y \leq 50$ e $x + y \leq 100$. O comerciante, para obter o lucro máximo nas condições do problema, deverá encomendar 50 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B . Com isso, vendendo todos, terá um lucro de 2500 reais. \square

Temos agora um problema de probabilidade geométrica, onde iremos mostrar uma solução bem interessante usamos o método analítico.

Exemplo 2.25. *Dividindo aleatoriamente uma vara de bambu em três partes, qual*

a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Solução adaptada de [8]. Considerar um segmento de reta AB representando o comprimento do bambu e adotar esse comprimento igual a 1. Vamos dividi-lo em três partes: uma, AC , de comprimento x , outra CD de comprimento y e a terceira DB de comprimento $1 - x - y$, ver Figura 2.25. Cada forma de dividir o segmento unitário fica então associada ao par ordenado (x, y) onde

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1. \end{cases}$$

Isso corresponde, no plano cartesiano, à região triangular mostrada na Figura 2.26.



Figura 2.25: Divisão de um Segmento em Três Partes

Portanto, cada forma de dividir o segmento em três partes está agora representada por um ponto interior ao triângulo. Mas, não são todas as divisões que formam triângulos. Um triângulo existe se, e somente se, o comprimento de cada lado for menor que a soma dos outros dois. Isto equivale a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que seu semiperímetro, que no nosso caso é igual a $\frac{1}{2}$. Daí teremos, $x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}, 1 - x - y < \frac{1}{2}$. A última condição é equivalente a $x + y > \frac{1}{2}$ e, reunindo as três, temos que a região favorável é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial, como mostra a Figura 2.27. O triângulo formado pelos pontos médios tem área igual a $\frac{1}{8}$, o triângulo grande tem área igual a $\frac{1}{2}$. Chamamos de P a probabilidade de que os três segmentos formem

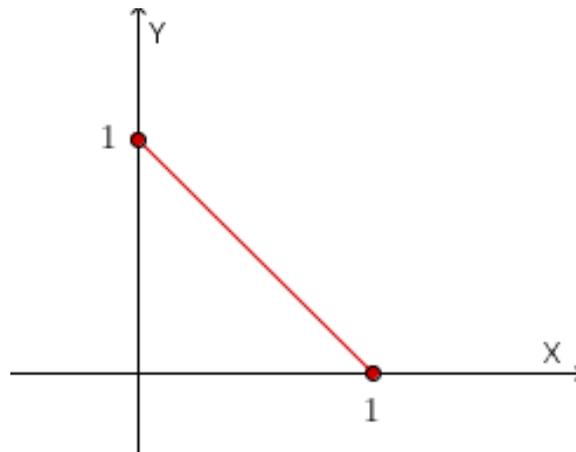


Figura 2.26: Triângulo com um dos Vértices na Origem

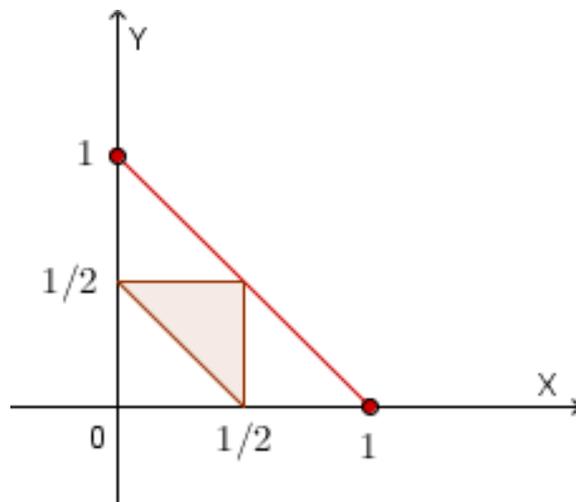


Figura 2.27: Triângulo Semelhante em Destaque

um triângulo, teremos

$$P = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

□

Alguns problemas, de diversos ramos da Matemática, não nos dar nenhuma pista no sentido de podermos usar coordenadas, como no problema de probabilidade

que resolveremos agora, adaptação de [6]. Problemas desse tipo mostra como é imensa a utilidade da Geometria Analítica e como é gratificante e prazeroso usar essa ferramenta no momento adequado.

Exemplo 2.26. *Duas amigas, Xênia e Yasmin, combinaram de encontrar-se entre o meio dia e uma hora da tarde, de modo que, quem chegasse primeiro ao local do encontro esperaria pela outra no máximo 15 minutos e depois iria embora. Supondo que os horários de chegada sejam aleatórios dentro do intervalo combinado, qual a probabilidade desse encontro acontecer?*

Marcando-se os horários possíveis de chegada de Xênia e Yasmin nos eixos cartesianos, cada caso possível é determinado por um ponto (x,y) dentro de um quadrado de lado 60 min (1 hora). Por exemplo, se Xênia chegar ao meio dia e 15 min e Yasmin chegar ao meio dia e 45 min, esses horários correspondem ao ponto $(15,45)$. No diagrama apresentado na Figura 2.28, nota-se que o encontro ocorre se o ponto E estiver na região mais escura do quadrado. Então, a probabilidade de ocorrer o encontro será dada pela razão entre a área da região mais escura e a área do quadrado, ou seja, $P = \frac{7}{16}$. As condições impostas pelo problema são

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 60 \\ 0 \leq y \leq 60 \\ |x - y| \leq 15. \end{cases}$$

A desigualdade $|x - y| \leq 15$ é equivalente a $x - 15 \leq y \leq x + 15$, o que mostra que a região favorável é a faixa em torno da diagonal do quadrado como mostra a Figura 2.28. A probabilidade P que encontramos é obtida dividindo a área da faixa (A) pela a área do quadrado (Q) . $\frac{(A)}{(Q)} = \frac{60^2 - 2.45.45/2}{60^2} = \frac{7}{16}$. \square

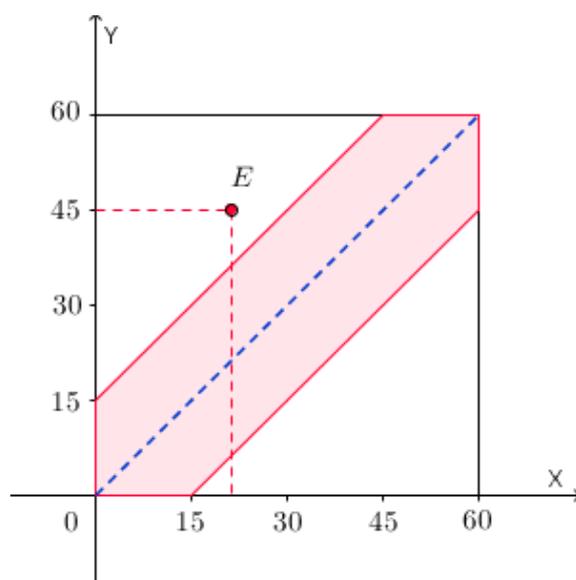


Figura 2.28: Diagrama de Espaço Amostral e Eventos

Exemplo 2.27. *Há poucos anos foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções: qualquer um que desembarcar nesta ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos que chamarei de A e B e também uma palmeira que chamarei de C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado seguindo as minhas instruções. Caminhe de C para A contando seus passos. Chegando em A, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M. Volte ao ponto C, caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N. O ponto X está na reta que liga M a N, e a mesma distância desses dois pontos.*

Com essas preciosas informações, os exploradores chegaram à referida ilha mas tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos A e B lá estavam, mas a palmeira C tinha desaparecido completamente. O tesouro estava perdido. Entretanto, fazia

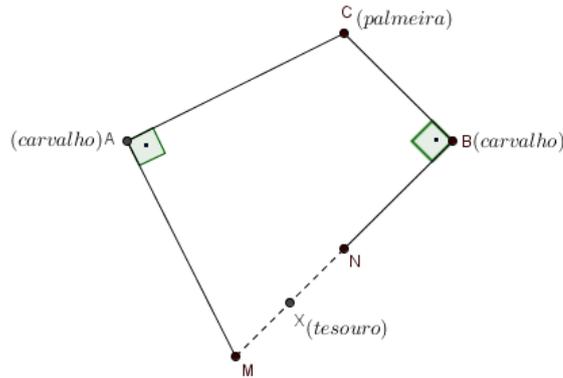


Figura 2.29: Mapa do Tesouro

parte da comitiva, o matemático Pedro Batista Lacerda que, após breves cálculos, conseguiu descobrir o tesouro e, naturalmente, reivindicou para si a sua posse. Como ele fez isso? Vamos mostrar um exemplo de um problema em que o uso de coordenadas foi extremamente útil. É um exercício de [5].

Pedro Batista Lacerda estabeleceu na ilha, que felizmente era plana, um sistema de coordenadas com origem em A e com o ponto B no eixo OX , ver Figura 2.30. Ele mediu a distância de A até B e encontrou 60 metros. Assim ficou estabelecido que $A = (0,0)$, $B = (60,0)$ e para a palmeira desaparecida ele pôs $C = (x,y)$. Temos então que $\overrightarrow{AC} = (x,y)$ e $\overrightarrow{AM} = (y,-x)$ pois o produto interno entre esses dois vetores é igual a zero. Note que $\overrightarrow{BC} = (x-60,y)$ portanto $\overrightarrow{BN} = (-y,x-60)$ já que \overrightarrow{BC} é ortogonal a \overrightarrow{BN} . Como A é a origem então $M = (y,-x)$. Logo, $N = B + \overrightarrow{BN} = (60-y, x-60)$. Sendo X o ponto médio de MN , suas coordenadas são dadas por

$$X = \left(\frac{y + 60 - y}{2}, \frac{-x + x - 60}{2} \right) = (30, -30).$$

Portanto, para encontrar o tesouro, bastava andar 30 metros na direção de A para B e depois virar à direita e andar mais 30 metros. Competência de Pedro Batista

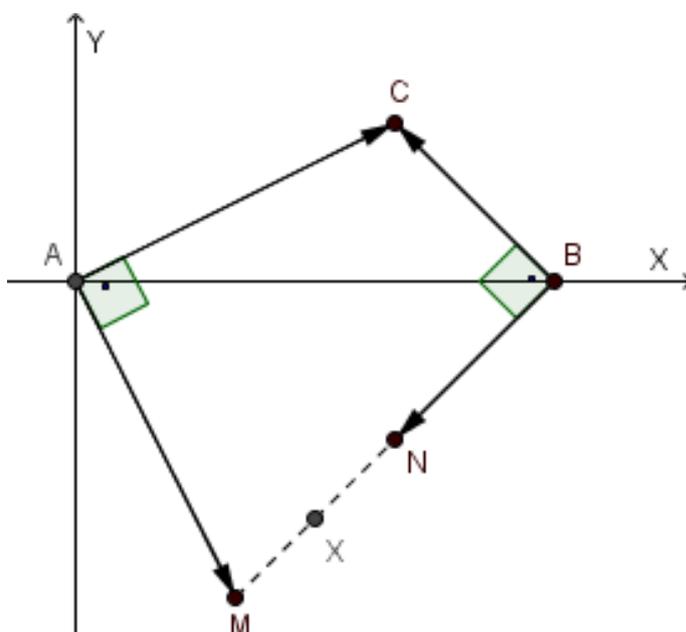


Figura 2.30: Localização do Tesouro no Plano Cartesiano

Lacerda e azar de Barba Negra. A localização do tesouro ficou independente da palmeira. \square

Vamos usar coordenadas e a fórmula da distância entre dois pontos no plano para mostrar uma aplicação em trigonometria.

Exemplo 2.28. Sendo α e β arcos trigonométricos, mostrar que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

Consideramos uma circunferência de raio igual a 1, centrada na origem do plano cartesiano ortogonal e quatro pontos pertencentes à circunferência, Figura 2.31. Suas coordenadas são $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$. É fácil perceber que $x_2 = \cos\beta$, $y_2 = \operatorname{sen}\beta$, $x_3 = \cos(\alpha - \beta)$, $y_3 = \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, $x_4 = \cos\alpha$ e $y_4 = \operatorname{sen}\alpha$. Notamos que a distância entre os pontos P_2 e P_4 é igual a distância entre P_3 e P_1 . De fato, essa igualdade pode ser obtida da congruência dos triângulos P_2OP_4 e P_1OP_3 (Lado- Ângulo - Lado), como mostrado em [4]. Pela fórmula da

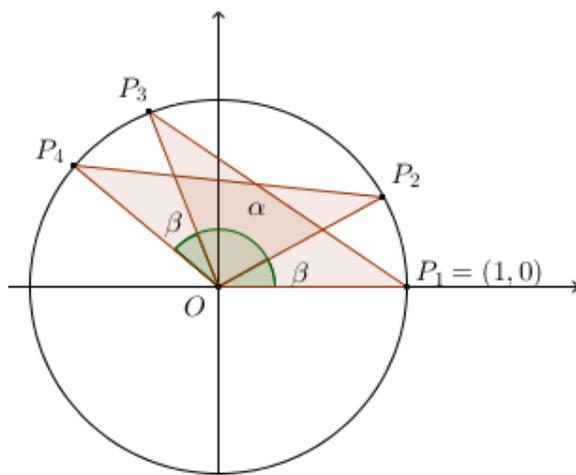


Figura 2.31: Pontos Sobre um Círculo

distância entre dois pontos, temos $d_{P_3P_1} = d_{P_2P_4}$, e assim $\sqrt{(x_3 - 1)^2 + (y_3 - 0)^2} = \sqrt{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}$, isto é,

$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_2^2 - 2x_2x_4 + x_4^2 + y_2^2 - 2y_2y_4 + y_4^2.$$

Substituindo os valores das coordenadas, temos $\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha$. Como $\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2\beta + \sin^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, temos

$$-2\cos(\alpha - \beta) + 2 = -2\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha + 2.$$

Isto resulta na igualdade que queríamos demonstrar. □

2.6 Questões da OBMEP

Algumas questões de Geometria e de Álgebra da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), apresentam soluções complexas e de alto grau

2.6. QUESTÕES DA OBMEP

de dificuldade. Vamos apresentar soluções analíticas mais simples e com menor grau de dificuldade para algumas dessas questões.

apresentaremos agora uma solução analítica para o problema 17, da primeira fase da OBMEP 2015 nível 3, muito mais simples e menos rebuscada do que a solução apresentada no gabarito oficial. Usaremos o conceito de distância entre dois pontos no plano.

Exemplo 2.29. *Na figura, $ABCD$ é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16 cm, a base menor 10 cm e a altura 9 cm. Qual a medida, em centímetros, do raio da circunferência?*

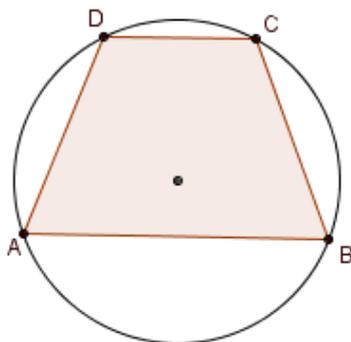


Figura 2.32: Trapézio da Questão 17, OBMEP 2015

Colocamos a circunferência no plano cartesiano de modo que o seu centro seja a origem do sistema, Figura 2.33. Daí $C = (5, y)$, $B = (8, -9 + y)$ pois a base maior mede 16, a base menor 10 e a altura 9. Como $d_{(O,C)} = d_{(O,B)} = r \implies \sqrt{5^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + (-9 + y)^2} \implies 25 + y^2 = 145 - 18y + y^2 \implies y = \frac{20}{3}$. Então o ponto C tem coordenadas $C = \left(5, \frac{20}{3}\right)$. Como $r = d_{(O,C)}$, temos que $r = \sqrt{5^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{9}} = \frac{25}{3}$ cm.

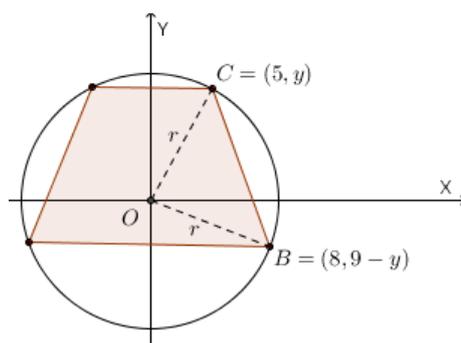


Figura 2.33: Trapézio Inscrito no Círculo

É claro que a ordenada do ponto B , pelo sistema de eixos que montamos, é negativa. Mas, no cálculo usado na fórmula da distância de OB , o que está implícito é $|9 - y|$. \square

A seguir temos o problema número 18 da OBMEP 2005, primeira fase, nível 3. A solução sintética está no gabarito oficial divulgado pela organização da olimpíada, vamos apresentar aqui uma solução analítica que julgamos mais simples.

Exemplo 2.30. *A figura mostra um polígono $ABCDEF$ no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E . Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é o perímetro do polígono $ABCG$?*

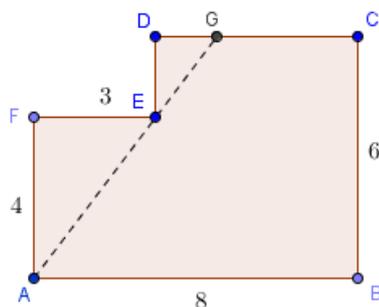


Figura 2.34: Polígono da Questão 18 da OBMEP 2005

2.6. QUESTÕES DA OBMEP

Coloquemos o polígono em um sistema de coordenadas no plano, onde o ponto A seja a origem e o lado AB esteja sobre o eixo OX , Figura 2.35. Com isso, teremos $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (8, 6)$ e $E = (3, 4)$. A reta que passa nos pontos A e G tem equação $y = \frac{4}{3}x$ e a reta que passa nos pontos C e G tem equação $y = 6$. Resolvendo o sistema das duas equações

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = 6 \end{cases}$$

encontramos $x = \frac{9}{2}$, que é a abscissa do ponto G . Daí,

$$d_{(G,C)} = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

e

$$d_{(A,G)} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}.$$

Logo, o perímetro do polígono $ABCG$ será $AB + BC + CG + GA = 8 + 6 + 3,5 + 7,5 = 25$ cm. □

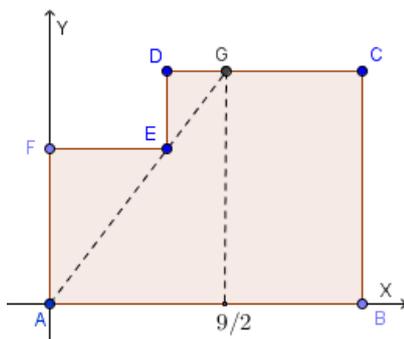


Figura 2.35: Perímetro do Polígono $ABCG$

Vamos resolver o problema número 3 da OBMEP 2005, segunda fase, nível 3

2.6. QUESTÕES DA OBMEP

usando o método analítico que é muito mais simples do que a resolução mostrada no gabarito oficial da Olimpíada.

Exemplo 2.31. *Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de 3,00 mais 0,50 por quilômetro rodado. Já a Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de 1,00 mais 0,75 por quilômetro rodado. Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nessa cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os táxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os táxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.*

a) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?

b) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre trabalho e casa?

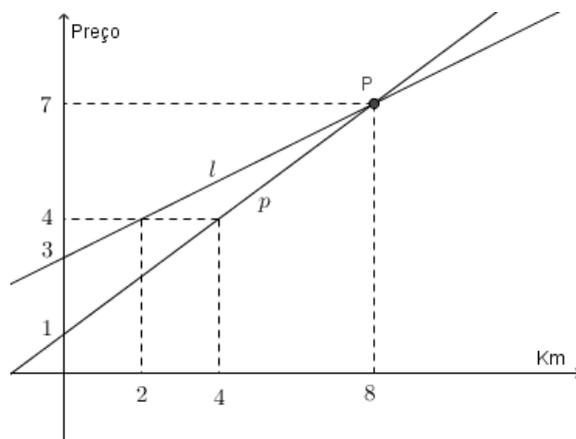


Figura 2.36: Preço por Distância Percorrida

Fixamos um sistema de coordenadas no plano, onde o eixo OX representa a distância percorrida em quilômetros e o eixo OY representa o preço a ser pago correspondente a essa distância, como na Figura 2.36. A reta l representa os pontos

(x, y) referente à tabela da empresa Dona Leopoldina e a reta p , os pontos (x, y) referente à tabela da empresa Dom Pedro II. Como Sofia usa os dois táxi, pois paga o mesmo valor, ela percorre uma distância de 8 km, portanto paga 7,00 pois a interseção das retas é o ponto $P = (8, 7)$. Para ser mais vantajoso usar o táxi da Dom Pedro II, Bento deve percorrer menos de 8 km e para ser mais vantajoso usar o táxi da Dona Leopoldina, Helena deve percorrer mais de 8 km. Ou seja, quem percorre a menor distância, de táxi, do trabalho para casa é Bento. \square

Referências Bibliográficas

- [1] BONJORNO, J. R.; GIOVANE, J. R. Matemática: Uma nova abordagem - Volume 3. São Paulo: FTD, 2001.
- [2] DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações - Volume 2. São Paulo: Ática, 2003.
- [3] DELGADO, J.; FRENSEL K.; GRISSAFF, L. Geometria Analítica - Coleção PROFMAT. SBM, 2013.
- [4] KARAN, R. A. S. Minha terra tem palmeiras, onde canta o sabiá. RPM 71, 2010.
- [5] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A matemática do Ensino Médio - Volume 3. Rio de Janeiro, 2005.
- [6] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A matemática do Ensino Médio - Volume 2. Rio de Janeiro, 2004.
- [7] NERY, C. A Geometria Analítica do ensino médio. RPM 67, 2008.
- [8] WAGNER, E. Probabilidade geométrica e o problema do macarrão. RPM 35, 1997.