Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

As Frações Contínuas e os Números Metálicos

por

José Júnior Veloso de Araújo

2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

As Frações Contínuas e os Números Metálicos †

por

José Júnior Veloso de Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2015
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

As Frações Contínuas e os Números Metálicos

por

José Júnior Veloso de Araújo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. João Bosco Batista Lacerda - UFPB

Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos - UNIPÊ

Agosto/2015

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por se fazer presente em todos os momentos da minha vida, especialmente nos mais difíceis e atribulados.

À minha família, especialmente à minha esposa, pelo apoio recebido em tudo que precisei.

Aos meus amigos, especialmente meus alunos, que sempre souberam me apoiar, mostrando-me que é necessário fazer alguns sacrifícios e renúncias para consagrar mais uma vitória.

Aos professores, especialmente a Napoleón Caro Tuesta, meu orientador, que desempenharam papel fundamental na realização deste objetivo, estimulando-me para que eu buscasse cada vez mais dedicar-me ao curso.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste sonho.

E, finalmente, ao PROFMAT e à CAPES, por proporcionar essa oportunidade de qualificação a todos os professores do Brasil.

Muito obrigado.

Dedicatória

Àquele que sempre guiou minha vida, em particular, minha trajetória acadêmica. Que me deu sabedoria para o entendimento dos conhecimentos que adquiri. Que sempre agiu por mim e em mim nos momentos decisivos. Em quem me refugiei nos momentos de provação pelos quais passei e que não me deixou abalar. Que desviou de mim os olhos dos meu adversários. Que estendeu suas mãos sobre mim nos momentos que ofereciam perigo. Que foi misericordioso comigo e me acolheu até mesmo quando não fui fiel a ele. Que foi capaz de oferecer a vida do seu próprio filho em expiação dos meus pecados. A DEUS

Resumo

A família dos números metálicos foi introduzida pela matemática argentina Vera de Spinadel, em 1994. Os Números Metálicos são pouco conhecidos, com exceção do Número de Ouro. Porém, outros números metálicos também possuem propriedades e aplicações importantes. As Frações Contínuas possibilitam uma outra maneira de representar esses números, que são irracionais.

Palavras-chave: Fração Contínua. Número Metálico. Número de Ouro.

Abstract

The family of metallic means was introduced by the Argentine mathematics Vera Spinadel, in 1994. The metallic means are unknown, except for the Golden Mean. However, other metallic means also have properties and important applications. The Continued Fractions enable another way to represent these numbers, which are irrational.

Keywords: Continued Fraction. Metallic Mean. Golden Mean.

Sumário

Lista de Figuras

Notações

Notações Gerais

- ϕ é o Número de Ouro.
- $\sigma_{p,q}$ é o número metálico associado à equação $x^2 - px - q = 0$.

Introdução

Apesar de suas propriedades serem objeto de pesquisa na atualidade, os Números Metálicos são pouco conhecidos, com exceção de seu membro famoso, o Número de Ouro. Além dele, temos o Número de Prata, o Número de Bronze, além de outros que trataremos neste trabalho.

A família dos números metálicos, introduzida pela matemática argentina Vera de Spinadel, em 1994, é formada pelas raízes positivas das equações da forma $x^2 - px + q = 0$, onde p e q são números positivos.

Por outro lado, as frações contínuas, tema ainda muito pesquisado nos dias de hoje, possibilitam uma outra maneira de representar números reais, em particular, os números irracionais. Por exemplo, o Número de Ouro, que é um número irracional, assim como a grande maioria dos números metálicos também o são, cujo valor é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, na sua forma decimal, possui uma representação com infinitas casas não periódicas, cujo valor aproximado é $1,618$. No entanto, a sua expansão em fração contínua é, simplesmente, $[\bar{1}]$. Por esse motivo, optamos por utilizar as frações contínuas nesse estudo, onde podemos relacionar as duas teorias.

No 1º capítulo, faremos um resumo da teoria das Frações Contínuas apresentada no Capítulo 15 do livro Elementary Number Theory [2] e no livro Continued Fractions [7].

No 2º capítulo, apresentaremos os Números Metálicos, utilizando as ideias de Vera Spinadel [8], explorando e aprofundando suas propriedades.

No 3º capítulo, traremos um pouco da história do Número de Ouro, desde o Egito Antigo até a época do Renascimento.

Esperamos que esse trabalho tenha relevância educacional, auxiliando professores e estudantes que desejem conhecer e/ou se aprofundar no estudo dos Números Metálicos, com suporte de uma metodologia de pesquisa científica.

Confiamos deixar um pequeno e significante contributo ao ensino da matemática e nossa própria formação, sobretudo quando confrontados nosso entendimento intelecto ao início e final desta realização.

Capítulo 1

Frações Contínuas

1.1 Introdução

Um tema muito comum no ensino básico, a equação quadrática sempre despertou a curiosidade de muitos matemáticos por vários séculos.

Vamos começar este capítulo a partir da resolução de uma equação quadrática,

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.1}$$

mas vamos resolvê-la de uma forma diferente da convencional.

É fácil ver que zero não é raiz dessa equação, ou seja, $x \neq 0$.

Assim, podemos dividir ambos os membros da equação por x, obtendo

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Agora, vamos substituir o valor de x na própria equação, obtendo

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

Estendendo este processo inúmeras vezes, chegamos à seguinte relação:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}} \tag{1.2}$$

A priori, essa não parece ser a solução de 1.1. Mas, analisando a sucessão de frações obtidas ao final de cada repetição, percebemos que surgem melhores aproximações. Vejamos:

$$1+\frac{1}{1}=2;$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=1,5;$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=1,666...$$

Prosseguindo nessa análise, obtemos a sequência

$$(2;1,5;1,666...;1,6;1,625;1,615;1,619;...) \tag{1.3}$$

A solução positiva da equação 1.1 é o conhecido número de ouro $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1,618$.

Diante do exposto, podem surgir alguns questionamentos:

- A sequência 1.3 converge para a solução da equação 1.1?
- Que tipo de fração é esse que aparece em 1.2?

Estes e outros questionamentos serão esclarecidos neste capítulo.

1.2 Conceitos básicos

Definição 1.1 *Toda expressão da forma*

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+...}}} \tag{1.4}$$

é chamada de fração contínua, onde $a_1,a_2,a_3,...,b_1,b_2,b_3,...$ *são números complexos.*

Nessa dissertação, no entanto, vamos restringir nossa discussão nas frações contínuas simples, que têm a forma

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+...}}} \tag{1.5}$$

onde a_0 é um inteiro qualquer e $a_1, a_2, a_3, ...$ são inteiros positivos.

Com o intuito de simplificar a escrita, a expressão 1.5 também pode ser representada como

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$$

Dessa forma, a solução positiva da equação 1.1 pode ser representada por $[1; 1, 1, 1, ...]$, ou, simplesmente, $[\bar{1}]$.

Os termos $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ são chamados de quocientes parciais da fração contínua.

Se a fração contínua possui uma quantidade finita de quociente parciais, ela é chamada de fração contínua finita. Se a quantidade de quocientes parciais é infinita, ela é chamada de fração contínua infinita.

A fração contínua que aparece no 2º membro da relação 1.2 é um exemplo de fração contínua infinita. Além disso, ela possui a propriedade de ser periódica com período igual a 1.

1.3 Números racionais

Um número racional é uma fração da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$.

Efetuando a divisão de p por q, encontramos a representação decimal de $\frac{p}{q}$.

Outra forma de representar um número racional é através de uma fração contínua.

Para ilustrar, vamos tomar o número $\frac{67}{29}$.

Dividindo 67 por 29 encontramos 2 como quociente e 9 como resto. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{67}{29} &= 2 + \frac{9}{29} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}} \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga com $\frac{29}{9}$, encontramos,

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{9}}$$

Esse processo é repetido até o surgimento de um resto nulo.

Logo, a representação de $\frac{67}{29}$ na forma de fração contínua é

$$\begin{aligned}\frac{67}{29} &= 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}\\ &= [2;3,4,2]\end{aligned}$$

O próximo teorema garante que qualquer número racional pode ser escrito na forma de fração contínua.

Teorema 1.1 *Qualquer número racional pode ser expresso como uma fração contínua simples finita. Reciprocamente, qualquer fração contínua simples finita representa um número racional.*

Demonstração: Seja $\frac{p}{q}$ um número racional qualquer.

Pelo algoritmo da divisão, obtemos:

$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{r_0}{q}, \text{ onde } 0\leq r_0<q.$$

Se $r_0=0$, então $\frac{p}{q}$ é um número inteiro. Assim, o processo termina e a expansão de $\frac{p}{q}$ em fração contínua é $[a_0]$.

Porém, se $r_0\neq 0$, fazemos:

$$\frac{p}{q}=a_0+\cfrac{1}{\cfrac{q}{r_0}}$$

e repetimos o algoritmo da divisão, dividindo q por r_0, obtendo

$$\frac{q}{r_0}=a_1+\frac{r_1}{r_0}, \text{ onde } 0\leq r_1<r_0.$$

Se $r_1=0$, o processo termina e a expansão de $\frac{p}{q}$ em fração contínua é $[a_0;a_1]$.

Porém, se $r_1\neq 0$, fazemos:

$$\frac{p}{q}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cfrac{r_0}{r_1}}}$$

e repetimos o algoritmo da divisão, dividindo $\frac{r_0}{r_1}$.

Note que o processo termina quando $r_n = 0$ para algum n, o que sempre ocorre, pois $(q, r_0, r_1, r_2, ..., r_n)$ é uma sequência decrescente de inteiros positivos. Caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $q > r_0 > r_1 > ...$ que não possui menor elemento, o que não é possível pela Propriedade da Boa Ordenação.

Assim, por divisões sucessivas obtemos uma sequência de equações:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{p}{q} = a_0 + \dfrac{r_0}{q}, & 0 < r_0 < q \\[2ex]
\dfrac{q}{r_0} = a_1 + \dfrac{r_1}{r_0}, & 0 < r_1 < r_0 \\[2ex]
\dfrac{r_0}{r_1} = a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}, & 0 < r_2 < r_1 \\
... \quad ... \quad ... & ... \quad ... \\
\dfrac{r_(n-2)}{r_(n-1)} = a_n + \dfrac{0}{r_(n-1)}, & r_n = 0
\end{array}$$

que termina depois de um certo número finito de divisões, com a equação em que o resto r é igual a 0.

Portanto, a expansão de $\frac{p}{q}$ em fração contínua é finita e sua representação é $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$.

A demonstração da recíproca é imediata, pois se a expansão é finita, sempre podemos, fazendo o caminho inverso, obter uma fração racional.

■

Uma forma prática de encontrar a expansão de um número racional em fração contínua é utilizando o Algoritmo de Euclides de forma semelhante à determinação do mdc.

Para ilustrar, vamos retomar o número $\frac{67}{29}$, cuja expansão já sabemos que é $[2; 3, 4, 2]$.

	2	3	4	2
67	29	9	2	1
9	2	1	0	

Os quocientes obtidos são os quocientes parciais da fração contínua que representa $\frac{67}{29}$.

Agora, vamos simplificar a fração contínua $[0; 2, 3, 4, 2]$. Note que $a_0 = 0$.

$$\begin{aligned} 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}} &= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{9}}} \\ &= \cfrac{1}{2+\cfrac{9}{29}} \\ &= \frac{29}{67} \end{aligned}$$

Assim, $\dfrac{29}{67} = [0; 2, 3, 4, 2]$.

Uma comparação da expansão $\frac{67}{29} = [2; 3, 4, 2]$ com $\frac{29}{67} = [0; 2, 3, 4, 2]$ sugere o seguinte teorema:

Teorema 1.2 *Seja $\frac{p}{q}$ um número racional positivo tal que $p > q$.*

$\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, ..., a_n]$ *se, e somente se,* $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, ..., a_n]$.

Demonstração: Seja $\dfrac{p}{q}$ um número racional positivo cuja expansão em fração contínua é $[a_0; a_1, ..., a_n]$. Daí, fazendo algumas manipulações algébricas, temos:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= [a_0; a_1, ..., a_n] \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots \cfrac{1}{a_n}} \end{aligned}$$

Logo,invertendo ambos os membros,temos:

$$\begin{aligned}
\frac{q}{p} &= \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}} \\
&= 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}} \\
&= [0; a_0, a_1, ..., a_n]
\end{aligned}$$

De forma análoga, demonstra-se a recíproca.

■

Agora, vamos analisar como obter a expansão de um número racional negativo $-\frac{p}{q}$. Mas, antes, vamos definir o que é a parte inteira de um número real x.

Definição 1.2 *A parte inteira de um número real x é o maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ que não é maior que x. Definimos a parte fracionária $\{x\}$ de x por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.(exemplos: $\lfloor 3 \rfloor = 3$,$\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor -4,7 \rfloor = -5$.)*

Note que para $\frac{p}{q} > 0$, $a_0 = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$. O mesmo acontece quando $\frac{p}{q} < 0$. Ou melhor, para qualquer número real x, $a_0 = \lfloor x \rfloor$.

Para encontrar a expansão de um número racional negativo $-\frac{p}{q}$ podemos também utilizar o Algoritmo de Euclides. Nesse caso, como $a_0 = \lfloor -\frac{p}{q} \rfloor$, $a_0 < 0$. Porém, os demais quocientes parciais são todos positivos.

Para ilustrar, vamos encontrar a expansão de $-\frac{37}{44}$ e $-\frac{44}{37}$.

Exemplo: Expandindo $-\frac{37}{44}$ em fração contínua.

	-1	6	3	2
-37	44	7	2	1
7	2	1	0	

Logo, $-\frac{37}{44} = [-1; 6, 3, 2]$.

◇

Exemplo: Expandindo $-\frac{44}{37}$ em fração contínua.

	-2	1	4	3	2
-44	37	30	7	2	1
30	7	2	1	0	

Logo, $-\frac{44}{37} = [-2; 1, 4, 3, 2]$.
◇

Note que, para o caso em que$|p| < |q|$, o primeiro quociente parcial é -1, para quaisquer p, q inteiros e $\frac{p}{q} < 0$. Já para o caso em que $|p| > |q|$, o quociente parcial é sempre negativo. Em ambos os casos, apenas o primeiro quociente parcial é negativo.

1.4 Números irracionais

Um número irracional é um número que não pode ser representado como a razão de dois inteiros, ou seja, na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$.

Os números

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad 1 \pm \sqrt{2}, \quad \frac{3 \pm \sqrt{7}}{5}$$

são todos irracionais. Em particular, qualquer número da forma

$$\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q},$$

onde P, D, Q são inteiros e D é um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito é chamado de *Irracional Quadrático.*

Por outro lado, podemos expressar números irracionais como frações contínuas.

Para construir a expansão de um número irracional em fração contínua simples utilizaremos substituições sucessivas, da forma que descreveremos a seguir.

Sejam x um número irracional qualquer e $a_0 = \lfloor x \rfloor$.

Podemos escrever x como

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \text{ onde } 0 < \frac{1}{x_1} < 1$$

Então, $x_1 = \dfrac{1}{x - a_0} > 1$ é um número irracional.

Da mesma forma, podemos escrever

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad \text{onde } a_1 = \lfloor x_1 \rfloor \geq 1, \qquad 0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

e obtemos $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$, que é, também, um número irracional.

Repetindo-se esse processo, obtemos, sucessivamente, as equações:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 > 1$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 > 1, \qquad a_1 \geq 1$$

$$... \qquad ... \qquad ...$$

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad x_{n+1} > 1, \qquad a_n \geq 1$$

$$... \qquad ... \qquad ...$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ são inteiros e $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ são irracionais.

Notemos que este processo não termina, pois isto só ocorreria se $x_n = a_n$ para algum n, o que é impossível, pois x_n é irracional para todo n.

Fazendo substituições apropriadas, obtemos a fração contínua simples infinita:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} \end{aligned}$$

que também denotamos por $[a_0; a_1, a_2, ...]$.

Para ilustrar, vamos expressar $\sqrt{13}$ como uma fração contínua simples.

Note que $\lfloor \sqrt{13} \rfloor = \lfloor 3,605551... \rfloor = 3$.

Logo, $a_0 = 3$.

Mas,

$$\begin{aligned}
\sqrt{13} &= 3 + (\sqrt{13} - 3) \\
&= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{13} - 3}} \\
&= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} + 3}{4}}
\end{aligned}$$

Logo, $a_1 = 1$, pois $\left\lfloor \dfrac{\sqrt{13}+3}{4} \right\rfloor = 1$.

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13}+3}{4} &= 1 + \left(\frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1 \right) \\
&= 1 + \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{\sqrt{13} - 1}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{4(\sqrt{13} + 1)}{12}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13} + 1}{3}}
\end{aligned}$$

Logo, $a_2 = 1$, pois $\left\lfloor \dfrac{\sqrt{13}+1}{3} \right\rfloor = 1$.

Continuando o processo, encontramos

$$a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 6, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 1, a_9 = 1, a_{10} = 6, a_{11} = 1, ...$$

Logo,

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 \ddots}}}}} = [3; 1, 1, 1, 1, 6, ...]$$

Por fim, vamos expressar π como uma fração contínua simples.

Note que $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3,1415926535897932... \rfloor = 3$.

Logo, $a_0 = 3$.

Mas,

$$\begin{aligned} \pi &= 3 + 0,1415926535897932... \\ &= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,1415926535897932...}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{7,06251331041...} \end{aligned}$$

Logo, $a_1 = 7$.

Mas,

$$\begin{aligned} 7,06251331041... &= 7 + 0,06251331041... \\ &= 7 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,06251331041...}} \\ &= 7 + \cfrac{1}{15,9965932606...} \end{aligned}$$

Logo, $a_2 = 15$.

Repetindo o processo, encontramos,

$$a_3 = 1, a_4 = 292, a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 2...$$

Logo, $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2...]$.

Nem todo número irracional tem expansão em fração contínua simples. Note, nos exemplos abaixo, a presença de alguns números irracionais com expansão em fração contínua não simples.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 \ddots}}}}}$$

$$e - 1 = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{6}{6 + \ddots}}}}} \qquad (Euler)$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}} \qquad (Brouncker)$$

1.5 Convergentes

Seja $\frac{p}{q}$ uma fração racional, cuja expansão em fração contínua simples finita é dada por

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]. \tag{1.6}$$

Consideremos agora as frações contínuas

$$c_0 = a_0$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$c_1 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

$$\ddots$$

obtidas de 1.6, considerando-se, sucessivamente, o primeiro termo da expansão, o primeiro e segundo termos da expansão e, assim, sucessivamente, até o (n+1)-ésimo termo.

Definição 1.3 *Chamamos convergente de ordem i da fração contínua 1.6, o número*

$$c_i = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_i}}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Note que n-ésimo termo convergente de (1.6), c_n, é a própria fração contínua. Vamos, agora, desenvolver uma forma prática para calcular esses convergentes. Mas antes, vamos definir os números p_i e q_i.

Definição 1.4 *Os números p_i e q_i, tais que $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ são chamados, respectivamente, numerador e denominador do i-ésimo convergente.*

Definidos os números p_i e q_i e dada a fração contínua 1.6, podemos escrever

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{p_0}{q_0} \\ &= a_0 \\ &= \frac{a_0}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{p_1}{q_1} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ &= \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{p_2}{q_2} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\ &= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} \\ &= a_0 + \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} \\ &= \frac{a_0(a_2 a_1 + 1) + a_2}{a_2 a_1 + 1} \\ &= \frac{a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2}{a_2 a_1 + 1} \\ &= \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} \\ &= \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, encontramos,

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{p_3}{q_3} \\ &= \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} \end{aligned}$$

Tais resultados sugerem uma expressão simples para encontrar o numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente c_i. O teorema a seguir valida essa expressão.

Teorema 1.3 *O numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente c_i da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ satisfazem às equações*

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}, \qquad i = 2, 3, ..., n, \tag{1.7}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases}.$$

Demonstração: Para esta demonstração vamos usar indução.

Os cálculos que fizemos para c_0 e c_1 mostram que as condições iniciais estão satisfeitas.

O cálculo feito para c_2 mostra que as equações 1.7 são verdadeiras para $i = 2$.

Suponhamos, então, que as equações 1.7 são verdadeiras para k, com $3 \leq k < n$. Isso significa que

$$c_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \tag{1.8}$$

Sabemos que

$$c_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

e que

$$c_{k+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}}$$

Note que podemos obter c_{k+1} a partir de c_k simplesmente pela substituição de a_k por $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$. Mas isto quer dizer que se pudermos mostrar que os números p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1} e q_{k-2} dependem somente dos números a_0, a_1,..., a_{k-1}, poderemos usar 1.8 para obter c_{k+1}, pois estamos supondo, como hipótese de indução, a validade de 1.8, para todo k, com $3 \leq k < n$. De fato, como

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{a_{k-1}p_{k-2} + p_{k-3}}{a_{k-1}q_{k-2} + q_{k-3}},$$

segue que os números p_{k-1} e q_{k-1} dependem somente do número a_{k-1} e dos números p_{k-2},p_{k-3},q_{k-2} e q_{k-3}, os quais, por sua vez, dependem de seus precedentes. Dessa forma, p_{k-1},p_{k-1},q_{k-1} e q_{k-2} dependem apenas dos números a_0, a_1,..., a_{k-1}, sendo independentes de a_k. Logo, eles não são alterados com a substituição de a_k por $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$. Podemos, portanto, utilizar a expressão 1.8 para obter c_{k+1}, bastando, para isso, substituir a_k por $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \\ &= \frac{(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_{k+1}a_k + 1)p_{k-1} + a_{i+1}p_{i-2}}{(a_{k+1}a_k + 1)q_{k-1} + a_{i+1}q_{i-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}a_kp_{k-1} + p_{k-1} + a_{k+1}p_{k-2}}{a_{k+1}a_kq_{k-1} + q_{k-1} + a_{k+1}q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \end{aligned}$$

■

Os convergentes da fração contínua simples infinita

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$$

são calculados da mesma forma que no caso das frações contínuas simples finitas.

1.6 Frações periódicas

Certas frações contínuas, como

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2...] = [1; \bar{2}]$$

são periódicas a partir de um certo termo e outras como

$$\sqrt{2}+1=[2;2,2,2,...]=[\overline{2}]$$

são periódicas desde o início.

Estas últimas são chamadas de frações contínuas puramente periódicas.

Na seção 1.4, já mencionamos sobre os irracionais quadráticos. Vamos, agora, definir esses conceitos.

Definição 1.5 *Uma fração contínua simples é denominada fração contínua periódica se a sequência dos valores a_i apresenta repetição (período), que denotamos por*

$$[a_0;a_1,a_2,...,a_{k-1},\overline{a_k,a_{k+1},...,a_{k+n-1}}],$$

onde $a_{k+n}=a_k$ e os valores a_k, a_{k+1},...,a_{k+n-1} formam o período que se repete.

Em particular, a fração contínua

$$[\overline{a_0;a_1,a_2,...,a_{n-1}}]$$

é chamada fração contínua puramente periódica.

Definição 1.6 *Chamamos irracional quadrático um número irracional x que é raiz da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$, onde a,b,c são inteiros e $b^2-4ac>0$ não é um quadrado perfeito.*

Há dois resultados fundamentais sobre frações contínuas periódicas e números irracionais quadráticos, os teoremas de Euler e Lagrange.

Teorema 1.4 (Euler) *Se x é uma fração contínua periódica, então x é um irracional quadrático.*

Demonstração: De fato, seja $x=[a_0;a_1,a_2,...,a_{k-1},\overline{a_k,a_{k+1},...,a_{k+n-1}}]$ uma fração contínua periódica.

Vamos tomar $x=[a_0;a_1,...,a_{k-1},x_k]$, onde $x_k=[a_k;a_{k+1},...]$. Assim

$$x_k=[a_k;a_{k+1},...,a_{k+n-1},x_k]$$

e, então,

$$x_k=\frac{x_kp'+p''}{x_kq'+q''},$$

ou seja,

$$q'{x^2}_k+(q''-p')x_k-p''=0, \tag{1.9}$$

onde $\frac{p''}{q''}$ e $\frac{p'}{q'}$ são os dois últimos convergentes de $[a_k,a_{k+1},...,a_{k+n-1}]$. Mas,

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Logo,

$$x_k = \frac{p_{k-2} - q_{k-2}x}{q_{k-1}x - p_{k-1}}.$$

Substituindo-se o valor de x_k dado acima em 1.9 e simplificando, obtemos

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= q'{q^2}_{k-2} - (q'' - q')q_{k-2}q_{k-1} - p''{q^2}_{k-1},\\
b &= 2(p''p_{k-1}q_{k-1} - q'p_{k-2}q_{k-2}) + (q'' - p')(p_{k-2}q_{k-1} - q_{k-2}p_{k-1}),\\
c &= q'{p^2}_{k-2} - (q'' - p')p_{k-2}p_{k-1} - p''p_{k-1}
\end{aligned}$$

e, assim, a, b, c são números inteiros. Como x é irracional, então $b^2 - 4ac > 0$.

Portanto, x é um irracional quadrático.

■

Teorema 1.5 (Lagrange) *A fração contínua que representa um irracional quadrático x é periódica.*

Demonstração: Sabemos que um número irracional quadrático satisfaz a uma equação quadrática com coeficientes inteiros, que pode ser escrita como

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.10}$$

Se $x = [a_0; a_1, a_2, ...a_k, ..]$, tomando-se $x_k = [a_k; a_{k+1}, ...]$, então $x = [a_0; a_1, ..., a_{k-1}, x_k]$.

Além disso,

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}.$$

Substituindo-se o valor acima em 1.10, obtemos

$$A_k {x^2}_k + B_k x_k + C_k = 0, \tag{1.11}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_k &= a{p^2}_{k-1} + bp_{k-1}q_{k-1} + c{q^2}_{k-1}\\
B_k &= 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2},\\
C_k &= a{p^2}_{k-2} + bp_{k-2}q_{k-2} + c{q^2}_{k-2}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Se $A_k = 0$, isto é, $a{p^2}_{k-1} + bp_{k-1}q_{k-1} + c{q^2}_{k-1} = 0$, obtemos

$$p_{k-1} = \frac{-bq_{k-1} \pm \sqrt{(b^2-4ac){q^2}_{k-1}}}{2a} =$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} q_{k-1}.$$

Logo, $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Então, a equação 1.10 tem um número racional $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ como raiz, o que é impossível, pois x é irracional. Portanto, $A_k \neq 0$ e a equação quadrática

$$A_k y^2 + B_k y + C_k = 0,$$

tem x_k como uma de suas raízes.

De 1.12, obtemos

$$\begin{aligned}
B^2 - 4A_kC_k &= [2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}]^2 - \\
&\quad 4(a{p^2}_{k-1} + bp_{k-1}q_{k-1} + c{q^2}_{k-1})(a{p^2}_{k-2} + bp_{k-2}q_{k-2} + c{q^2}_{k-2}) \\
&= (b^2-4ac)(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})^2 \\
&= = b^2 - 4ac
\end{aligned}$$

Logo,

$$B^2 - 4A_kC_k = b^2 - 4ac. \tag{1.13}$$

É possível provar que $xq_{k-1} - p_{k-1} > -\dfrac{1}{q_k}$. Logo, existe um número δ_{k-1}, com $|\delta_{k-1}| < 1$, tal que

$$p_{k-1} = xq_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}$$

Portanto, da equação acima e de 1.10, obtemos

$$\begin{aligned}
A_k &= a\left(xq_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2 + bq_{k-1}\left(xq_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right) + c{q^2}_{k-1} \\
&= (ax^2+bx+c){q^2}_{k-1} + 2ax\delta_{k-1} + a\frac{{\delta^2}_{k-1}}{{q^2}_{k-1}} + b\delta_{k-1} \\
&= 2ax\delta_{k-1} + a\frac{{\delta^2}_{k-1}}{{q^2}_{k-1}} + b\delta_{k-1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$|A_k| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Mas, como $C_k = A_{k-1}$,

$$|C_k| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

De 1.13, obtemos

$$B^2{}_k \leq a|A_k C_k| + |b^2 - 4ac| < 4(2|ax| + |b| + |c|)^2 + |b^2 - 4ac|.$$

Observe que os valores absolutos de A_k, B_k e C_k são menores do que números que não dependem de k. Como A_k, B_k e C_k são números inteiros, existe apenas um número finito de triplas (A_k, B_k, C_k) diferentes entre si. Logo, podemos encontrar uma tripla (A, B, C) que ocorre pelo menos 3 vezes, digamos $(A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1})$, $(A_{k_2}, B_{k_2}, C_{k_2})$ e $(A_{k_3}, B_{k_3}, C_{k_3})$. Portanto, de (1.11), x_{k_1}, x_{k_2} e x_{k_3} são raízes de

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

É claro que pelo menos duas delas são iguais, por exemplo, x_{k_1} e x_{k_2}. Então,

$$a_{k_2} = a_{k_1},\ a_{k_2+1} = a_{k_1+1},\ a_{k_2+2} = a_{k_1+2},\ ...$$

Portanto, a fração contínua é periódica.

■

Capítulo 2

Números Metálicos

2.1 Introdução

O número metálico mais conhecido é o número de ouro,$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Os elementos desta família gozam de propriedades matemáticas comuns, notáveis e de interesse indubitável. Estão presentes na natureza e serviram de base para construções que vão desde a civilização romana à atualidade.

2.2 Conceitos básicos

Definição 2.1 *A família dos números metálicos é formada pelas raízes positivas das equações da forma $x^2 - px - q = 0$, onde $p, q \in \mathbb{N}$.*

Essa definição foi dada em 1994, pela argentina Dra. Vera W. Spinadel, Professora Titular Emérita da Universidade de Buenos Aires.

O teorema abaixo garante a existência de uma única raiz positiva para cada combinação p, q, com $p, q \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1 *Quaisquer que sejam os valores de $p, q \in \mathbb{N}$, a equação $x^2 - px - q = 0$ tem apenas uma única raiz positiva.*

Demonstração: Sejam as funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = px + q$.

Note que a equação $x^2 - px - q = 0$ pode ser reescrita como $x^2 = px + q$. Então as soluções da equação $x^2 - px - q = 0$ são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos f e g.

O gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para cima, vértice na origem do sistema cartesiano e eixo de simetria igual ao eixo das ordenadas.

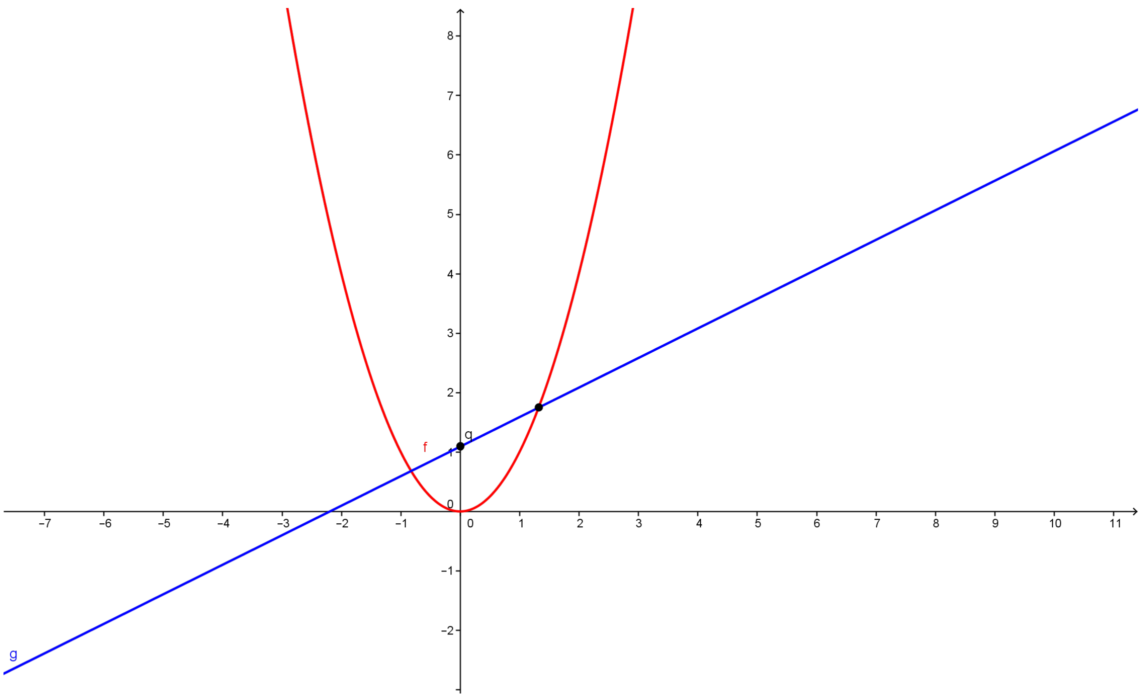

Figura 2.1: Teorema 2.1

O gráfico de g é uma reta com declive positivo igual a p, pois $p \in \mathbb{N}$, que intersecta o eixo das ordenadas em $q \in \mathbb{N}$.

Necessariamente, existe apenas um ponto de intersecção da reta com a parábola, cuja abcissa é positiva.

As soluções da equação $x^2 - px - q = 0$ são

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Como $p, q \in \mathbb{N}$, então

$$p^2 + 4q > 0 \text{ e } p^2 + 4q > p^2$$

De $p^2 + 4q > 0$, segue que a equação sempre tem solução.

De $p^2 + 4q > p^2$, segue que

$$\sqrt{p^2 + 4q} > \sqrt{p^2}, \text{ ou seja, } \sqrt{p^2 + 4q} > p.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ é uma raiz positiva.}$$

e

$$x = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ é uma raiz negativa.}$$

Portanto, podemos afirmar que qualquer que seja o valor de $p, q \in \mathbb{N}$, a equação $x^2 - px - q = 0$ tem apenas uma raiz positiva.

■

Em outras palavras, podemos dizer que o Teorema 2.1 garante que a equação $x^2 - px - q = 0$ dá origem a um único número metálico $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, que representaremos por $\sigma_{p,q}$.

Alguns desses números metálicos têm nome de metais. Além do famoso Número de Ouro, há o Número de Prata, de Bronze, de Cobre, de Níquel e de Platina.

Na tabela abaixo encontram-se detalhes sobre cada um dos números citados.

p	q	SÍMBOLO	NOME	VALOR
1	1	ϕ	NÚMERO DE OURO	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2	1	$\sigma_{2,1}$	NÚMERO DE PRATA	$1+\sqrt{2}$
3	1	$\sigma_{3,1}$	NÚMERO DE BRONZE	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
1	2	$\sigma_{1,2}$	NÚMERO DE COBRE	2
1	3	$\sigma_{1,3}$	NÚMERO DE NÍQUEL	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
2	2	$\sigma_{2,2}$	NÚMERO DE PLATINA	$a+\sqrt{3}$

Note que existem números metálicos inteiros. Na próxima seção, vamos analisar quando eles aparecem.

2.3 Metálicos inteiros

Para que um número metálico $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ seja um número inteiro, $p^2 + 4q$ deve ser um quadrado perfeito e $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ um múltiplo de 2.

O teorema a seguir garante que a segunda condição é uma consequência imediata da primeira, ou seja, se a primeira condição for satisfeita, a segunda também será.

Teorema 2.2 *Sejam p, q dois números naturais. Se $p^2 + 4q$ é um número quadrado perfeito, então $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ é múltiplo de 2.*

Demonstração: Suponhamos que $p^2 + 4q$ seja um número quadrado perfeito. Então, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $r^2 = p^2 + 4q$. Daí,

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2 + 4q \\ r^2 - p^2 &= 4q \\ (r-p)(r+p) &= 4q \\ r + p &= \frac{4q}{r-p} \\ r + p &= 2 \cdot \frac{2q}{r-p} \end{aligned}$$

ou seja, $r + p$ é múltiplo de 2. Mas $r + p = p + \sqrt{p^2 + 4q}$.

Portanto, $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ é múltiplo de 2.

■

Vamos agora verificar para quais valores de p e q a expressão $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito. Para isto, vamos fixar o valor de p em 1 e variar o valor de q.

p	q	$p^2 + 4q$	OBSERVAÇÃO
1	1	5	
1	2	9	é quadrado perfeito
1	3	13	
1	4	17	
1	5	21	
1	6	25	é quadrado perfeito
1	7	29	
1	8	33	
1	9	37	
1	10	41	
1	11	45	
1	12	49	é quadrado perfeito
1	13	53	
1	14	57	
1	15	61	
1	16	65	
1	17	69	
1	18	73	
1	19	77	
1	20	81	é quadrado perfeito

Note que a sequência de valores de q para os quais $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito é

$$2, 6, 12, 20, ...$$

e que o termo geral, q_n, com $n \in \mathbb{N}$, é

$$q_n = n(n+1)$$

Procedendo de forma análoga, encontramos:

- para $p = 2$, $q_n = n(n+2)$
- para $p = 3$, $q_n = n(n+3)$

Tais resultados sugerem que o termo geral da sequência de valores de q para os quais $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito é $q_n = n(n+p)$, ou seja, que os números metálicos $\sigma_{p,n(n+p)}$ são inteiros, quaisquer que sejam os valores de $n, p \in \mathbb{N}$. O teorema a seguir garante isso.

Teorema 2.3 *Todo número metálico da forma $\sigma_{p,n(n+p)}$ é inteiro, quaisquer que sejam $n, p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 2.2, basta mostrar que $p^2 + 4q = p^2 + 4n(n+p)$ é um quadrado perfeito.

De fato,

$$\begin{aligned}
p^2 + 4n(n+p) &= p^2 + 4n^2 + 4np \\
&= 4n^2 + 4np + p^2 \\
&= 4(n^2 + np + \frac{p^2}{4}) \\
&= 2^2 \cdot (n + \frac{p}{2})^2 \\
&= \left(2 \cdot \left(n + \frac{p}{2}\right)\right)^2 \\
&= (2n+p)^2
\end{aligned}$$

■

Até agora, vimos que há números metálicos irracionais e inteiros. Uma indagação surge nesse momento: existem números metálicos que sejam racionais não inteiros? O teorema a seguir garante que não.

Teorema 2.4 *Todo número metálico é um irracional quadrático ou um inteiro maior que* 1.

Demonstração: Seja $p, q \in \mathbb{N}$. Por conseguinte, $p^2 + 4q \in \mathbb{N}$ e apenas uma das condições abaixo pode acontecer:

(i) $p^2 + 4q$ não é um quadrado perfeito.
(ii) $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito.

Para o caso (i), $p^2 + 4q$ não é um quadrado perfeito. Assim, $\sqrt{p^2 + 4q}$ é um número irracional, consequentemente, $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ também é um número irracional, bem como $\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ também é um número irracional.

Como $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é raiz de uma equação quadrática de coeficientes inteiros e é um número irracional, segue que $\sigma_{p,q}$ é um irracional quadrático.

Para o caso (ii), $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito e, segundo o Teorema 3.2, $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ é um múltiplo de 2, ou seja, $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é um inteiro. Além disso, é maior que 1, pois os menores valores de p e q que satisfazem o caso (ii) são $p = 1$ e $q = 2$, de onde $\sigma_{1,2} = 2$.

Portanto, todo número metálico é um irracional quadrático ou um inteiro maior que 1.

■

A partir da próxima seção, vamos limitar o nosso estudo aos números metálicos do tipo $\sigma_{p,1}$. Entre eles está incluído o famoso Número de Ouro, além do Número de Prata e do Número de Bronze.

2.4 Metálicos do tipo ($\sigma_{p,1}$)

Vamos agora fixar o valor de q em 1 e variar o valor de p.

p	q	$\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$
1	1	1,618...
2	1	2,414...
3	1	3,302...
4	1	4,236...
5	1	5,192...
6	1	6,162...
7	1	7,140...
8	1	8,123...
9	1	9,109...
10	1	10,099...
11	1	11,090...
12	1	12,082...
13	1	13,076...
14	1	14,071...
15	1	15,066...
16	1	16,062...
17	1	17,058...
18	1	18,055...
19	1	19,052...
20	1	20,049...

Percebe-se facilmente que à medida que p cresce, o valor de $\sigma_{p,1} = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$ aproxima-se cada vez mais do valor atribuído a p. Tal observação sugere o seguinte teorema.

Teorema 2.5 *Seja o número metálico $\sigma_{p,1} = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$. Se p cresce indefinidamente, $\sigma_{p,1}$ tende a ser igual a p.*

Demonstração: Quero mostrar que à medida que p cresce, o valor de $\sigma_{p,1}$ tende a ser igual ao valor atribuído a p, com $p \in \mathbb{N}$.

Mas isto é equivalente a mostrar que a diferença entre $\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$ e p tende a zero quando p cresce indefinidamente.

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}-p\right) &= \lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}-2p}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\left(\sqrt{p^2+4}-p\right) \end{aligned}$$

Aqui temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para continuar, vamos multiplicar e depois dividir pelo conjugado. Daí,

$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}-p\right) &= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\frac{(\sqrt{p^2+4}-p)(\sqrt{p^2+4}+4)}{\sqrt{p^2+4}+p}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\frac{p^2+4-p^2}{\sqrt{p^2+4}+4}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\frac{4}{\sqrt{p^2+4}+p}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, à medida que p cresce, o valor de $\sigma_{p,1}$ tende a ser igual ao valor atribuído a p.

■

Observando a tabela, podemos concluir que a parte inteira de $\sigma_{p,1}$ é p e o Teorema 2.5 garante que $\sigma_{p,1} = p$ quando p se torna grande.

Agora, vamos analisar a representação de $\sigma_{p,1}$ na forma de fração contínua.

Já vimos no capítulo 1 que a expansão em fração contínua do Número de Ouro, $\sigma_{1,1}$, é $[\overline{1}]$. O próximo teorema garante que a expansão em fração contínua dos números metálicos da forma $\sigma_{p,1}$ são frações contínuas puramente peródicas cujo período é p.

Teorema 2.6 *Qualquer número metálico da forma $\sigma_{p,1}$ possui expansão em fração contínua puramente periódica com período igual a p.*

Demonstração: Seja $\sigma_{p,1}$ um número metálico. Então, $\sigma_{p,1}$ é a raiz positiva da equação $x^2 - px - 1 = 0$. Daí,

$$
\begin{aligned}
x^2 - px - 1 &= 0\\
x^2 &= px + 1\\
x &= p + \frac{1}{x}\\
&= p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{x}}\\
&= p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{x}}}
\end{aligned}
$$

Se o processo for repetido continuamente, encontramos $x = [\bar{p}]$.

Portanto, $\sigma_{p,1} = [\bar{p}]$.

■

Nas próximas seções vamos apresentar os três mais importantes números metálicos da forma $\sigma_{p,1}$, entre eles, o mais famoso número metálico, o Número de Ouro, além do Número de Prata e do Número de Bronze.

2.5 O Número de Ouro

O Número de Ouro, ϕ, é o número metálico $\sigma_{1,1}$, ou seja, é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Seu valor é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, aproximadamente, $1,618$. Sua expansão em fração contínua é

$$\phi = [\bar{1}]$$

Este número tem aplicações surpreendentes em vários ramos da matemática. Envolto em muito mistério, o Número de Ouro chama a atenção de muitos matemáticos desde a antiguidade.

O Número de Ouro também está presente na Sequência de Fibonacci.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

É fácil verificar que a sequência formada pelas razões entre um termo e o termo imediatamente anterior converge para o Número de Ouro.

Os números de Fibonacci podem ser usados para caracterizar diversas propriedades da natureza.

O Número de Ouro também influenciou a arte através do retângulo áureo, que é considerado perfeito, pois é o retângulo mais agradável à visão. Nesse retângulo, a razão entre o lado maior e o lado menor é o Número de Ouro.

Pode-se encontrar retângulos de ouro associados a numerosas obras de arquitetura tal como o *Pathernon*, em Atenas, nas obras do arquiteto *Lê Corbusier*.

2.6 O Número de Prata

O Número de Prata, σ_{Ag}, é o número metálico $\sigma_{2,1}$, ou seja, é a raiz positiva da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$. Seu valor é $1 + \sqrt{2}$, aproximadamente, $2,414$. Sua expansão em fração contínua é

$$\sigma_{Ag} = [\bar{2}]$$

Apesar de não ser muito conhecido, como o Número de Ouro, também possui muitas aplicações na Matemática. Em particular, *Donald* e *Carol Watts*, um casal de arquitetos norteamericanos, estudaram as ruínas das casas de Óstia, comprovando que estavam organizadas por um sistema proporcional baseado no Número de Prata.

É um número extremamente curioso, um campo vasto a ser explorado, bem como os demais números metálicos.

2.7 O Número de Bronze

O Número de Bronze é o número metálico $\sigma_{3,1}$, ou seja, é a raiz positiva da equação $x^2 - 3x - 1 = 0$. Seu valor é $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, aproximadamente, $3,302$. Sua expansão em fração contínua é

$$\sigma_{3,1} = [\bar{3}]$$

Não encontramos na literatura nenhum estudo sobre esse número, bem como nenhuma aplicação.

Portanto, temos um campo vasto para futuras pesquisas sobre o Número de Bronze, bem como sobre os demais números metálicos.

Capítulo 3

O Número de Ouro na História

A história desse enigmático número perde-se na antiguidade. Buscando a história da razão áurea observa-se algumas discordâncias entre os estudiosos do assunto, principalmente se os povos egípcios, babilônios ou outras civilizações antigas tinham algum conhecimento sobre essa razão. Entre essas discussões questiona-se se a razão áurea foi ou não usada na construção da Grande Pirâmide de Quéops (ou Khufu) e em construções gregas, como exemplo o Partenon - *o lugar da virgem* - em grego [5].

3.1 Egito Antigo

Como cânone arquitetônico, a Proporção Áurea foi encontrada na tumba de Khesi-Ra, que viveu por volta de 2700 a.C. É inacreditável que este sábio já conhecesse a proporção áurea e o Teorema de Pitágoras. O mais interessante é que, sendo ele o *chefe dos arquitetos*, o *chefe dos doutores*, o *escritor do Faraó*, tendo inúmeros títulos honoríficos, era, também, sacerdote de GOR, o deus egípcio da harmonia.

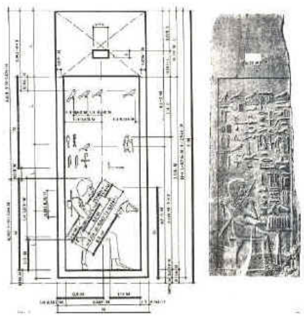

Figura 3.1: O cânone de Khesi-Ra

Alguns textos [3] sugerem que o Número de Ouro tenha sido usado, propositalmente, na construção das pirâmides de Gizé, no Egito. Se de fato isso aconteceu, o Número de Ouro é conhecido há mais de 4000 anos, visto que essas pirâmides datam de aproximadamente 2500 a.C.

As pirâmides de Gizé, no Egito Antigo, foram erguidas tendo por base a razão áurea: A razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da pirâmide maior é igual ao termo de ouro. Cada bloco da pirâmide é, aproximadamente, 1,618 vezes maior que o bloco do nível acima. As câmaras no interior dessas pirâmides foram projetadas de tal forma que seu comprimento fosse 1,618 vezes a sua largura.

Os egípcios consideravam o Número de Ouro muito sagrado, sendo de uma importância extrema na religião, e o chamavam não de Número de Ouro, mas de Número Sagrado. Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que caso isto não acontecesse, a alma do falecido não conseguiria chegar ao seu destino. Além disso, os egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também na decoração dos seus templos.

O Papiro de Ahmes ou Papiro de Rhind mostra os planos para a construção da Grande Pirâmide de Gizé, com proporções de acordo com o *número sagrado*. Medidas feitas recentemente nesta pirâmide mostram que seus lados são, aproximadamente, lados de triângulos de ouro.

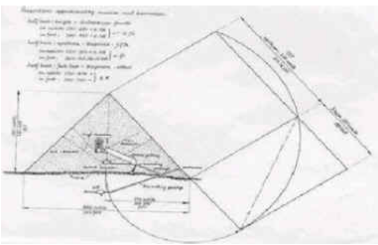

Figura 3.2: Papiro de Ahmes ou Papiro de Rhind

O cálculo da altura original da pirâmide de Quéops, durante muitos anos, foi motivo de polêmica entre diversos arqueólogos. Atualmente, o quociente entre a altura de uma face pela metade do lado da base não chega a 1,6. Acredita-se que, originalmente, este quociente tenha sido $\phi = 1,618033989...$, pois a altura da pirâmide diminuiu com o passar dos séculos. Nesta, a câmara mortuária do faraó possui o formato de retângulo áureo, ou seja, o quociente entre os lados do retângulo é ϕ.

Os egípcios atribuíam valores místicos a este número. Esta razão ou seção áurea também aparece em muitas estátuas da antiguidade. O que é mais impressionante é que a maioria delas sobrevive à ação do tempo e continuam até hoje expressando a arte e a sintonia.

Muitos hieróglifos têm proporções baseadas no Número de Ouro. Os egípcios utilizavam o Número de Ouro com o intuito de que todos conseguissem escrever de acordo com as mesmas proporções.

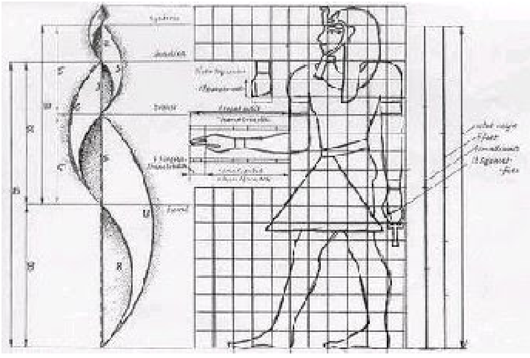

Figura 3.3: Hieróglifo (letra h)

3.2 Babilônia

Em se tratando dos Babilônios, Lívio [5] afirma que estudos de tabuletas cuneiformes que datam do segundo milênio a.C. e que foram descobertas em 1936 em Susa, no Irã, deixam pouca dúvida de que os babilônios da primeira dinastia sabiam, pelo menos, de uma fórmula aproximada da área de um pentágono. O interesse babilônico por essa figura pode ter se originado do simples fato de que ela era obtida quando as pontas de todos os cincos dedos eram pressionadas sobre uma placa de argila.

Figura 3.4: Tabuleta cuneiforme babilônica

Diversos são os trabalhos que relatam alguma relação de objetos babilônicos com a razão áurea, mas devemos tomar um pouco de cuidado, pois não existe qualquer documentação que comprove que os artistas babilônicos utilizaram a razão áurea inconscientemente.

3.3 Pitagóricos

A escola grega de Pitágoras estudou e observou muitas relações e modelos numéricos que apareciam na natureza, beleza, estética, harmonia musical e outros, mas, provavelmente, a mais importante é a razão áurea, razão divina ou proporção divina.

Um fato familiar à escola de Pitágoras era de que há cinco, e somente cinco, sólidos convexos regulares (conhecidos como sólidos platônicos) que podem, cada um, ser circunscritos por uma esfera: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Os antigos gregos associavam o cubo, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro aos elementos componentes da natureza, respectivamente, terra, fogo, ar e água [4].

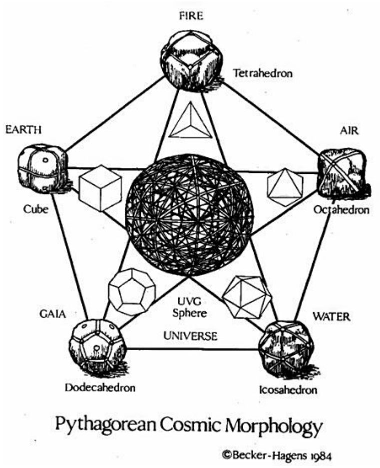

Figura 3.5: Sólidos Platônicos

O último sólido convexo regular descoberto pelos pitagóricos, o dodecaedro, é constituído por 12 pentágonos regulares que se relacionam fortemente com a razão áurea. Talvez por isto, os pitagóricos o consideravam digno de respeito especial. Platão, que viveu no século IV a.C., considerou-o como *um símbolo do universo* [1].

Traçando-se as diagonais de uma das faces pentagonais do dodecaedro obtém-se a estrela de cinco pontas, também conhecida como pentagrama, que era utilizada como símbolo e emblema da Sociedade Pitagórica. O pentagrama é uma das construções geométricas que mais fascinou os pitagóricos. Nele há muitas razões áureas.

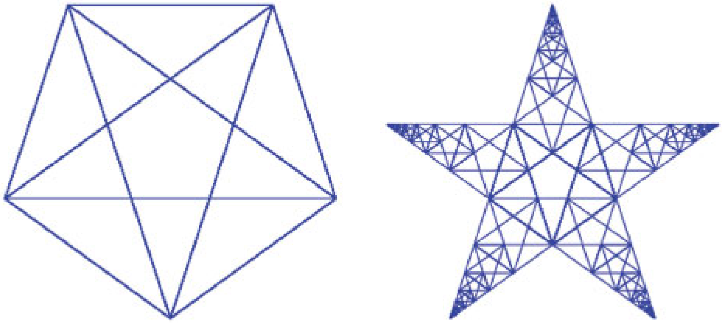

Figura 3.6: Pentagrama

No pentagrama, as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono.

No início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão áurea o nome de ϕ (Phi), a primeira letra grega do nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 a.C. e 430 a.C. Barr decidiu homenagear o escultor, pois alguns historiadores da arte sustentavam que Fídias fazia uso frequente e meticuloso da Razão Áurea nas suas esculturas [5].

3.4 Renascimento

Durante milênios, a arquitetura clássica grega prevaleceu. O retângulo de ouro era padrão, mas depois de muito tempo veio a construção gótica com formas arredondadas, que não utilizavam retângulo de ouro grego. Após Pappus, o estudo da Razão Áurea ficou, por alguns anos, praticamente estagnado e sem nenhum resultado importante. Já nos séculos IX e X, matemáticos árabes e indianos produziram resultados aritméticos adicionais, mas sem grandes proporções, relativos ao Número de Ouro.

Na Idade Média, juntamente com a queda do domínio árabe na Espanha, veio o Renascimento. E este movimento trouxe de volta toda a sabedoria das escolas gregas, da Biblioteca e da Casa da Sabedoria. Com Leonardo de Pisa (o famoso Fibonacci), novos capítulos interessantes surgem na história do Número de Ouro [5].

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um processo significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações [5].

Figura 3.7: Leonardo Fibonacci (1175-1240)

Por volta de 1500, com o Renascentismo, a cultura clássica voltou à moda. Michelângelo e, principalmente, Leonardo da Vinci, grandes amantes da cultura pagã, colocaram esta proporção natural em suas obras.

Outro matemático que contribuiu para o estudo e divulgação do Número de Ouro foi Pacioli que publicou, em 1509, uma edição que teve pouco sucesso, com o título de *Divina Proportione*. Este trabalho dizia respeito a polígonos regulares e sólidos e à razão de ouro.

Da Vinci foi ainda mais longe; como cientista, pegava cadáveres para medir a proporção do seu corpo e descobriu que nenhuma outra coisa obedece tanto à Divina proporção quando o corpo humano... obra prima Divina.

A excelência dos desenhos de Leonardo Da Vinci revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da razão áurea como garantia de uma perfeição, beleza e harmonia únicas. É lembrado como matemático apesar da sua mente irrequieta não se concentrar na aritmética, álgebra ou geometria o tempo suficiente para fazer uma contribuição significativa. Representa bem o homem tipo da renascença que fazia de tudo um pouco sem se fixar em nada.

Figura 3.8: Leonardo da Vinci (1452-1519)

Leonardo era um gênio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, nomeadamente o Número de Ouro, nas suas obras de arte. Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscritos na circunferência. Da Vinci a chamava: Divina Proporção e a usou em muitos de seus trabalhos.

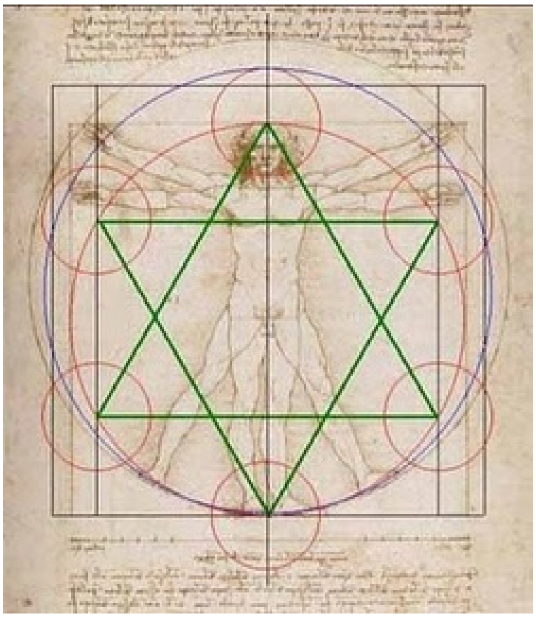

Figura 3.9: O Homem Vitruviano

Apêndice

As Frações Contínuas no Ensino Básico

O processo de ensino-aprendizagem está em constante reestruturação e aperfeiçoamento. A busca por um ensino mais eficiente, que proporcione maior aprendizagem não é uma tarefa fácil. Muitos professores-pesquisadores têm buscado melhorias no ensino da matemática.

A distinção entre números racionais e irracionais ainda é complicada para muitos estudantes do ensino básico. As diversas formas de representação, além do excesso de algoritmos, têm dificultado a compreensão de tais conceitos, que são simples.

No decorrer da história, as diversas representações dos números fracionários formaram o que atualmente chamamos de números racionais.

As frações contínuas oferecem uma nova forma de representação para os números reais, além do que, a distinção entre números racionais e irracionais, quando expandidos em fração contínua, é imediata.

Não encontrei em minhas pesquisas uma forma operatória para frações contínuas. Tal possibilidade, poderia simplificar as operações com os números reais, abrindo mais possibilidades que poderiam facilitar o entendimento do conceito de número racional e irracional por estudantes do ensino básico.

As frações contínuas também chamam a atenção por suas diversas aplicações, que podem despertar a curiosidade dos estudantes e estimular o interesse pela aprendizagem.

Outra abordagem das frações contínuas seria na resolução de algumas equações do segundo grau. É interessante mostrar que a resolução clássica não é a única capaz de resolver esses tipos de equações.

O currículo de matemática está em constante evolução, e as Frações Contínuas poderão, num futuro próximo, estar presentes no Ensino Básico. Porém, nada impede que o professor aborde o tema de forma complementar.

Sendo assim, ainda há um campo vasto para pesquisas nesta área.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B. *História da Matemática.* 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[2] BURTON, David M. *Elementary number theory.* 6th ed. New York: Me Graw-Hill, 2007.

[3] EVES, Howard. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Geometria.* São Paulo: Atual, 1992.

[4] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* São Paulo: Atual Editora Ltda., 1997.

[5] LIVIO, Mario. *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente.* 2ª ed., Rio de Janeiro: Record, 2007.

[6] NÚMERO DE OURO: *A marca de Deus em suas criações?* Disponível em: <http://www.acervosaber.com.br/2015/06/numero-ouro/>. Acesso em: 20 jun. 2015.

[7] OLDS, C. D. *Continued Fractions.* New York: New Mathematical Library, 1963.

[8] SPINADEL, Vera W. *The Family of Metallic Means.* Universidad de Buenos Aires. Disponível em: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/spinadel/>. Acesso em: 17 out. 2014.