



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Polígonos de Reuleaux †

por

André Soares Rodrigues

sob orientação do

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional PRFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2015
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

Polígonos de Reuleaux

por

André Soares Rodrigues

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada por:

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Fevereiro/2015

Agradecimentos

A Deus que sempre esteve presente na minha vida me iluminando nos momentos mais difíceis e me guiando em minhas conquistas e vitórias.

A minha esposa Tania A. Rodrigues e nossa filha Beatriz A. Soares Rodrigues, pelo seu amor e compreensão nos momentos de minha ausência.

Aos meus pais, José Carlos A. Rodrigues e Ester Soares Rodrigues, e irmãos Kassandra S. Rodrigues e José Carlos A. Rodrigues Junior, por seus conselhos, carinho e apoio.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por seu apoio financeiro.

Ao coordenador Bruno Henrique Carvalho Ribeiro que me propôs o tema desse trabalho, acompanhou o desenvolvimento do curso e orientou em todo curso na busca da excelência.

Aos meus amigos do Profmat 2112, Alessandro Mignac, Washington Gonçalves, Cibele Verde e Magnun César que estiveram juntos comigo no decorrer do curso em nossos momentos de estudo em grupo.

Ao meu orientador Pedro Antonio Gómez Venegas por suas correções e acompanhamento no desenvolvimento deste trabalho.

As minhas tias Cláudia Soares Torreiro e Irah Carneiro de Almeida Valentim por suas contribuições e apoio em minha educação escolar.

A minha amiga e professora Luciene Barbosa Marques, no qual devo a inscrição do Profmat.

Dedicatória

*Dedico este trabalho a minha filha
Beatriz A. Soares Rodrigues que me
fez voltar a estudar.*

Resumo

Neste trabalho, estudaremos uma classe especial de curvas planas, as curvas convexas de largura constante. Mostraremos ademais os exemplos básicos destas curvas, começando com o Triângulo de Reuleaux que de fato é o que tem a menor área quando a largura constante é definida ao contrário do círculo que tem a maior área e também é de largura constante. Generalizamos a construção do Triângulo de Reuleaux aos polígonos regulares com um número ímpar de lados que são chamados polígonos de Reuleaux. Por último propomos atividades para o estudo de polígonos no ensino fundamental e médio como sugestão para uma educação escolar, tendo como referência os Polígonos de Reuleaux em particular o Triângulo de Reuleaux.

Palavras-chave: Polígono; Largura; Geometria.

Abstract

In this paper, we study a special class of planar curves, convex curves of constant width. Moreover show basic examples of these curves, starting with the Reuleaux triangle that indeed is what has the smallest area when the constant width is defined unlike the circle has the largest area and is also constant width. We generalize the construction of the Reuleaux triangle to regular polygons with odd numbers of sides that are called Reuleaux polygons. Finally we propose activities for the polygons of study in primary and secondary education as a suggestion for a school education, by reference to the polygons of Reuleaux in particular the Reuleaux triangle.

Keywords: Polygons; Width; Geometry.

Sumário

1	Fundamentação Teórica	1
1.1	Curvas Parametrizadas Planas	1
1.1.1	Curva Parametrizada Regular	2
1.1.2	Curva Plana Fechada	2
1.1.3	Curvas Planas Simples Fechada	3
1.1.4	Curvas Planas Convexas	3
1.1.5	Curvatura e Fórmula de Frenet	4
1.1.6	Retas suportes e largura de uma curva plana	6
1.2	Pontos antípodas	7
1.3	Curvas planas de larguras constante	7
1.4	Teorema de Barbier	11
1.5	Teorema de Euler	14
2	Polígonos de Reuleaux	17
2.1	Definição	17
2.1.1	Propriedade fundamental	18
2.1.2	Polígono com um número ímpar de lados	18
2.1.3	Polígonos Regular	19
2.2	Construção de um Polígono de Reuleaux	19
2.3	Triângulo de Reuleaux	20
2.4	Propriedade do Triângulo de Reuleaux	21
2.4.1	Comprimento do Triângulo de Reuleaux	22
2.4.2	Área do Triângulo de Reuleaux	23
2.4.3	Centro do Triângulo de Reuleaux	25
2.4.4	Área da superfície inscrita pelo Triângulo de Reuleaux	26
2.4.5	A estrada perfeita para o Triângulo de Reuleaux	26
2.5	Uma generalização do Triângulo de Reuleaux	27
3	Aplicações	30
3.1	Engenharia Mecânica	30
3.2	Engenharia Civil	31

3.3	Arquitetura	32
3.4	Objetos Diversos	32
3.4.1	Palhetas de Violão e Guitarra	33
3.4.2	Lápis e Canetas	33
3.4.3	Moeda inglesa	34
3.4.4	Tampas de Boeiros	34
4	Polígonos de Reuleaux em sala de aula	35
4.1	Atividade 1 - Construção do Polígono de Reuleaux	35
4.1.1	Objetivo Geral	35
4.1.2	Objetivo Específico	36
4.2	Atividade 2 - Comparação de perímetros	36
4.2.1	Objetivo Geral	36
4.2.2	Objetivo Específico	37
4.3	Atividades 3 - Comparação de Áreas	37
4.3.1	Objetivo	37
4.3.2	Objetivo Específico	37
4.4	Atividade 4 - Experiência	38
4.4.1	Objetivo Geral	39
4.4.2	Objetivo Específico	39
	Referências Bibliográficas	40

Introdução

Em tempos antigos para o deslocamento de grandes blocos de pedra, bem como no antigo Egito na construção das pirâmides, se tinha a ideia de que a única forma de deslocamento destes monólitos se dava por meio de cilindros, sólidos de diâmetro constante (círculo), por se manter sempre a mesma distância entre o solo e o bloco, mantendo assim uma certa estabilidade (Figura 1).

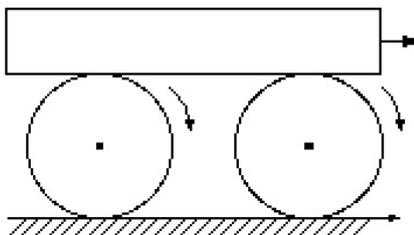


Figura 1: Transporte de monólito por cilindros.

A problemática desta dissertação é, existe algum outro sólido não circular que mantenha constante a distância entre o solo e o bloco, mantendo assim o mesmo efeito do cilindro? Tornando estável o deslocamento destes monólitos bem como o cilindro.

O objetivo deste projeto é o estudo dos Polígonos de Reuleaux que é a curva formada a partir de um polígono regular com um número ímpar de lados, a principal motivação desta dissertação é a possibilidade de trabalhar com o referido tema nas salas de aulas das escolas públicas e privadas nos níveis de educação fundamental e média, atingindo assim o principal objetivo do Profmat.

No primeiro capítulo do trabalho abordaremos uma Fundamentação Teórica sobre curvas planas, com algumas demonstrações bem como o teorema de Barbier e o teorema de Euler no intuito de formalizar a pesquisa matemática sobre os Polígonos de Reuleaux, onde neste trabalho usaremos conceitos básicos de Cálculo.

Neste Segundo capítulo estudaremos os Polígonos de Reuleaux em particular o Triângulo de Reuleaux, sobre uma óptica mais teórica com definição e propriedades,

construiremos um Polígono de Reuleaux a partir de um polígono regular com n lados ímpares.

O terceiro capítulo desta dissertação falaremos das aplicações dos Polígonos de Reuleaux na engenharia civil e mecânica, mostrando exemplos dessas aplicações, na arquitetura e em objetos diversos de nosso cotidiano.

No quarto e último capítulo traremos alguns exercícios de aplicação para o estudo no ensino fundamental e médio, com o objetivo geral e específico de cada atividade, sobre Polígonos de Reuleaux e as curvas de largura constante, como sugestão para os leitores no intuito de motivar o interesse dos alunos no estudo dos polígonos.

A construção desta dissertação está baseada nos artigos de José Luiz Pastore Mello sobre Polígonos de Reuleaux e a Generalização de Pi, e de Kelly Roberta Mazzutti Lübeck sobre Curvas de Largura Constante e suas Generalizações.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, estudaremos as curvas convexas no plano. Além das propriedades geométricas de tais curvas, introduzimos o conceito de largura de uma curva simples fechada e convexa, e fazemos uma introdução as curvas de largura constante. Demonstraremos ainda neste capítulo o Teorema de Barbier e o Teorema de Euler.

1.1 Curvas Parametrizadas Planas

Uma curva diferenciável parametrizada plana é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida de um intervalo I da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 . Onde escrevemos por,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)); t \in I$$

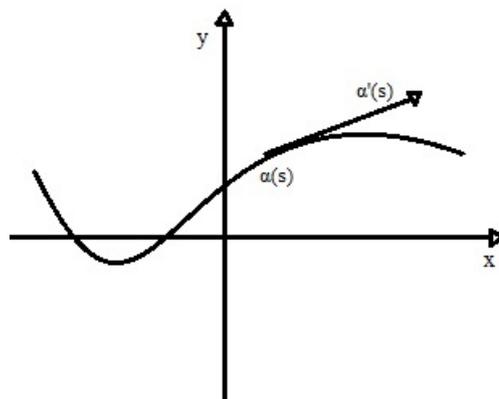


Figura 2: Curva parametrizada plana.

A questão da diferenciabilidade significa que as coordenadas de α , isto é, $x(t)$ e $y(t)$ são deriváveis e o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \in \mathbb{R}^2$ é chamado vetor tangente da curva $\alpha(t)$.

1.1.1 Curva Parametrizada Regular

Definição: Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$.

Dizemos que, uma função é diferenciável em um intervalo fechado $[a, b]$ se é a restrição de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto contendo $[a, b]$.

1.1.2 Curva Plana Fechada

Definição: Uma curva plana fechada é uma curva parametrizada regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que α e todas as suas derivadas coincidam em a e b , isto é,

$$\alpha(a) = \alpha(b) , \alpha'(a) = \alpha'(b) , \alpha''(a) = \alpha''(b) \dots$$

Diz-se que α é uma curva simples se α não possui auto interseções, isto é, se $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$ então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ (Figura 3).



Figura 3: Curva fechada simples à esquerda e curva fechada não simples a direita.

Para o objetivo do nosso trabalho vamos considerar curva regular por partes, isto é, curvas contínuas constituídas de um número finito de arcos regulares e portanto, tais curvas possuem um número finito de quinas, onde a tangente é descontínua (Figura 4).

Um resultado da geometria diferencial nos permite assumir que, curvas regulares podem reparametrizar pelo comprimento de arco, isto é, $|\alpha'(s)| = 1 \forall s \in [a, b]$.

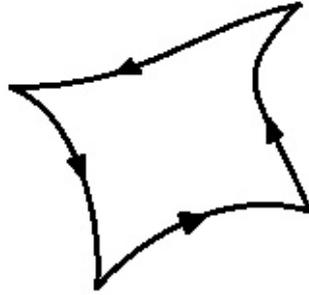


Figura 4: Curva fechada simples regular por partes.

1.1.3 Curvas Planas Simples Fechada

Curva fechada simples e regular por partes, parametrizada por comprimento de arco, é uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $|\alpha'(s)| = 1 \ \forall s \in [a, b]$, exceto um número finito de pontos.

Em geral, para a definição acima consideraremos o intervalo $[0, l]$, onde l é o comprimento de α .

1.1.4 Curvas Planas Convexas

Uma curva regular não necessariamente fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa se, $\forall t \in [a, b]$ o traço de α , isto é, $\alpha([a, b])$ está totalmente contido em um lado do semi-plano fechado determinado pela reta tangente em t (Figura 5).

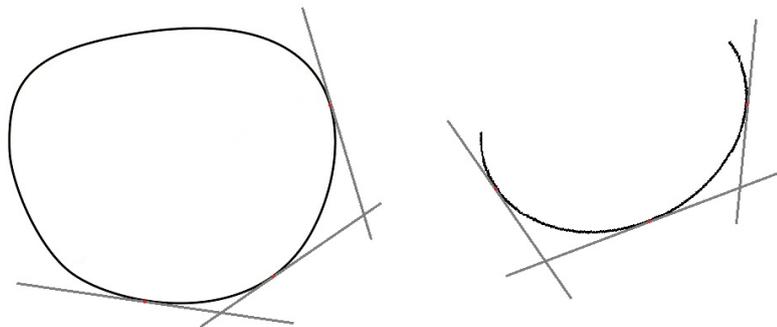


Figura 5: Curvas plana convexas.

Caso o traço $\alpha([a, b])$ não está totalmente contido em um lado do semi-plano a curva é não convexa (Figura 6).



Figura 6: Curvas plana não convexa.

1.1.5 Curvatura e Fórmula de Frenet

Vamos considerar nesta seção curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. Observe que por hipótese, $\alpha'(s) \neq 0$. Dessa forma está bem definido um campo t de vetores tangentes e unitários ao longo de α dado por

$$t(s) = \alpha'(s).$$

$t(s)$ é chamado *vetor tangente* à curva α em $\alpha(s)$. Se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. então $t(s) = (x'(s), y'(s))$. Observe que podemos definir o campo n ao longo de α , tal que, para cada $s \in I$, $\{t(s), n(s)\}$ seja uma base negativa de \mathbb{R}^2 . Assim sendo,

$$n(s) = (y'(s), -x'(s)),$$

e temos que n é um campo normal e unitário ao longo de α e de classe C^∞ . A aplicação que a cada s associa $n(s)$ é chamada de *vetor normal* à curva α . Para cada $s \in I$, $n(s)$ é chamado de vetor normal à curva α em $\alpha(s)$.

Definição 1.1.5 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial $\{t(s), n(s)\}$ é chamado *referencial de Frenet* de α .

Visto que $\|t\| = 1$, temos que $t'(s)$ é perpendicular a $t(s)$. Como t e n geram o espaço \mathbb{R}^2 , temos que, para cada $s \in I$, $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$. Isso significa que existe uma função k , tal que

$$t'(s) = k(s)n(s) \tag{1.1}$$

Definição A função k , definida (1.1), é chamada curvatura de α em $s \in I$.

Em coordenadas, se $\alpha(t) = (x(s), y(s))$ então,

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s)), \\ \mathbf{n}(s) = (y'(s), -x'(s)). \end{cases} \quad (1.2)$$

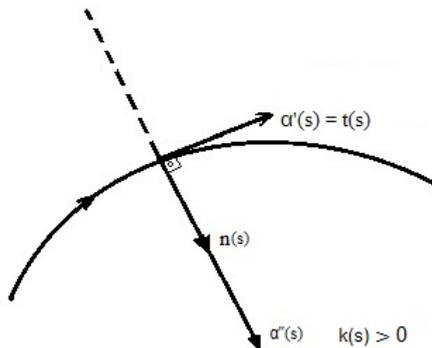


Figura 7

As formulas de FRENET são:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s). \end{cases} \quad (1.3)$$

A curvatura pode assumir valores positivos e negativos isto é depende da orientação da curva α .

Usando esse ideias podemos dar uma definição mais precisa de uma curva plana convexa, com efeito, a curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexo se para todo $s_0 \in [a, b]$ a função,

$$h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle, \text{ não muda de sinal.}$$

Um fato interessante que relaciona a convexidade com a curvatura de α é que se $k(s_0) > 0$ então, como $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), n(s_0) \rangle = 0$ e $h''(s_0) = \langle \alpha''(s_0), n(s_0) \rangle = k(s_0) > 0$, então pelo teste da segunda derivada o gráfico de h numa vizinhança de s_0 (Figura 8) é,

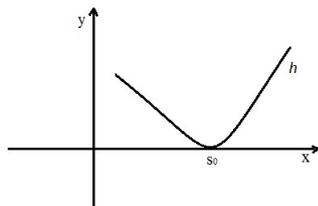


Figura 8: Gráfico de h .

isto é, h não muda de sinal.

1.1.6 Retas suportes e largura de uma curva plana

Consideremos, α uma curva plana fechada. Uma reta r é chamada de reta suporte para a curva α , se obedece a duas propriedades: r toca a curva plana fechada α e o traço α está contido em um dos semiplanos fechados definidos por r . É fácil perceber que em cada direção há exatamente duas retas suportes de α , pois a curva α é fechada, e a distância entre essas duas retas suportes é chamada de largura, $larg_{\vec{v}}(\alpha) = L$, da curva α nessa direção (Figura 9).

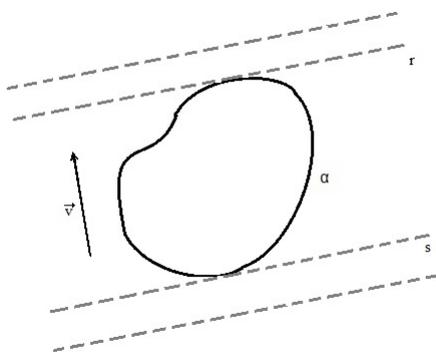


Figura 9: Reta $r \setminus \setminus s$.

1.2 Pontos antípodas

Pontos antípodas são pontos de uma curva plana fechada convexa, de uma curva α que se obtêm pela interseção de α com as retas suportes.

Observe nas figuras 10, os pontos A e C são opostos diametralmente situados no eixo das abscissas, e os pontos B e D pertencentes ao eixo das ordenadas, e também são opostos diametralmente, logo os pontos A e C bem como os B e D são antípodas.

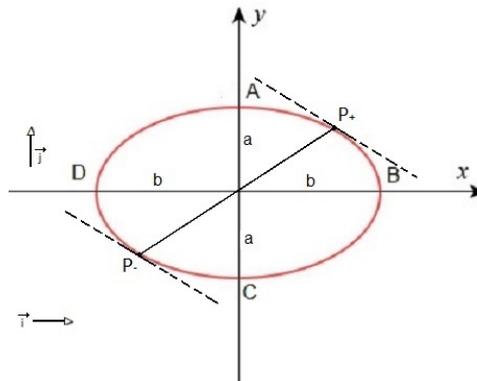


Figura 10: P_+ e P_- pontos antípodas.

A distancia entre os pontos A e C ($L = 2a$) corresponde a largura $larg_{\vec{j}}(\alpha) = 2a$ (curva plana simples fechada) no eixo Oy e a distancia entre os pontos B e D ($L = 2b$) corresponde a largura $larg_{\vec{i}}(\alpha) = 2b$ no eixo Ox (Figura 10). Os eixos da reta focal e da reta não focal de uma elipse são pontos antípodas (Figura 10).

Em geral,

$$larg_{\vec{v}}(\alpha) = 2\|P_+\|$$

onde:

$$\vec{v} = \frac{P_+}{\|P_+\|}$$

1.3 Curvas planas de larguras constante

Seja C uma curva plana fechada, então C é dita uma curva de largura constante se a largura em todos as direções for a mesma, isto é, para todo \vec{v} unitário em \mathbb{R}^2 a largura $larg_{\vec{v}}(C) = L$ é constante.

1.3. CURVAS PLANAS DE LARGURAS CONSTANTE

O círculo é evidentemente uma curva de largura constante e sem dúvida a curva de largura constante mais conhecida. Isso significa que a distância entre qualquer duas retas suportes paralelas tangenciando o círculo é sempre a mesma e igual a duas vezes o raio do círculo (Figura 11), $larg_{\vec{v}}(\alpha) = 2r = L$.

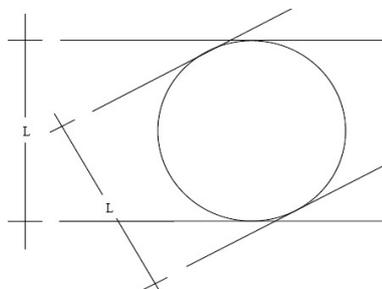


Figura 11 Círculo (curva plana de largura constante L).

A elipse não é uma curva plana de largura constante ($larg_{\vec{j}}(\alpha) = 2a$; $larg_{\vec{i}}(\alpha) = 2b$).

Aparentemente o círculo é a única curva de largura constante e essa é uma impressão falsa que nos temos. Ainda neste trabalho estudaremos outras curva com as mesmas propriedades, bem como o Triângulo de Reuleaux.

Lema 1.3. Seja α uma curva de largura constante, l_1, l_2 retas suportes de α , paralelas, e x_1, x_2 pontos que pertencem a $\alpha \cap l_i$, $i = 1, 2$. Então a reta $\overrightarrow{x_1x_2}$ é ortogonal a l_1 e l_2 .

Demonstração: Seja L a largura da curva α . Suponha, por absurdo, que $\overrightarrow{x_1x_2}$ não é ortogonal a l_1 (Figura 12).

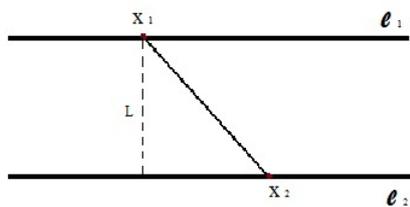


Figura 12

Como a distância de l_1 a l_2 é L , devemos ter $|x_2 - x_1| > L$. Considere agora a largura de α na direção $\mathbf{v} = \overrightarrow{x_1x_2}$,

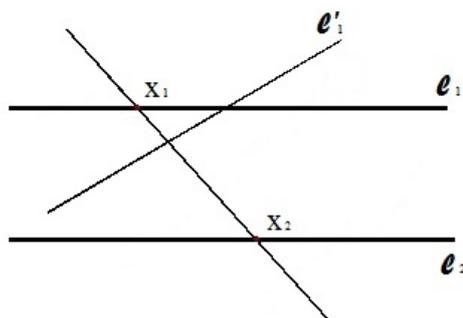


Figura 13.A

Como as retas l'_1 e l'_2 são retas suportes de α então a figura 13.A não se aplica pois x_1 e x_2 estão em lados opostos em relação a l'_1 , o que contradiz a definição de reta suporte.

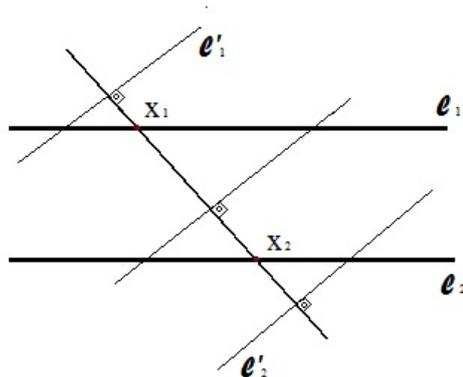


Figura 13.B

Logo a situação correta é da figura 13.B, assim $\text{larg}_{\overrightarrow{x_1 x_2}} \alpha = L' > L$ o que contradiz a hipótese do Lema. ■

Corolário 1.3. Seja l uma reta suporte de uma curva α de largura constante, então $\alpha \cap l$ consiste de um único ponto. Em particular, α é convexo.

Demonstração: Seja x'_1 o ponto antípoda de x_1 então pelo Lema anterior as retas l e $\overrightarrow{x'_1 x_1}$, são perpendiculares e como a interseção de duas retas perpendiculares é um único ponto logo não pode existir um $x_2 \neq x_1$ absurdo.

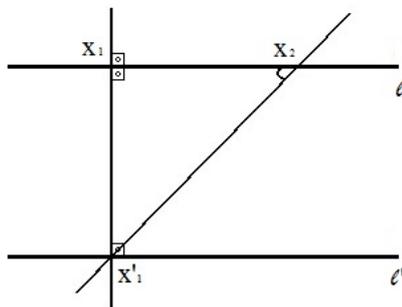


Figura 14

Se α não é convexa existe uma reta suporte l que vai conter pelo menos dois pontos distintos de α o que contradiz a unicidade do ponto de contacto. ■

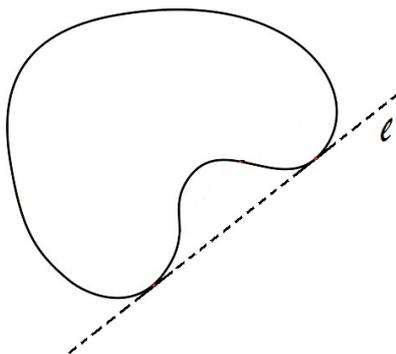


Figura 15

Observação: Para cada ponto P_+ sobre o traço de uma curva α fechada de largura constante L , existe um único ponto P_- sobre o traço de α , tal que $\|P_+ - P_-\| = L$. Que corresponde aos pontos antípodas de α .

Em particular se consideramos uma curva diferenciável de largura constante obtemos um resultado que envolve a curvatura da curva com a largura.

Proposição 1.3. Seja α uma curva diferenciável de largura constante L , então a curvatura em todos os pontos de α é $k(s) \geq \frac{1}{L}$, para todo $s \in [0, l]$.

Demonstração: Seja P_+ um ponto de α e l a reta tangente de α em P_+ . Tomemos l' a outra reta suporte de α paralela a l , e P_- o ponto de $\alpha \cap l'$. Considere agora o

círculo de centro P_- e raio L . Afirmamos que todo ponto de α está no interior do círculo.

Evidente, suponha por absurdo que se houver $P \in \alpha$, fora do círculo, então $|P_- - P| > L$ e, como já foi visto isso implica que a largura na direção ortogonal a $\overrightarrow{P_-P}$ é maior do que L , o que é um absurdo. Portanto α está contido no interior desse círculo. Sendo P_- o centro do círculo e $P_+ = \alpha(s)$, isso implica que a curvatura $k(s) \geq \frac{1}{L}$, como P_+ é arbitrário então $k(s) \geq \frac{1}{L}$ para todo $s \in [0, l]$ assim completando a demonstração. ■

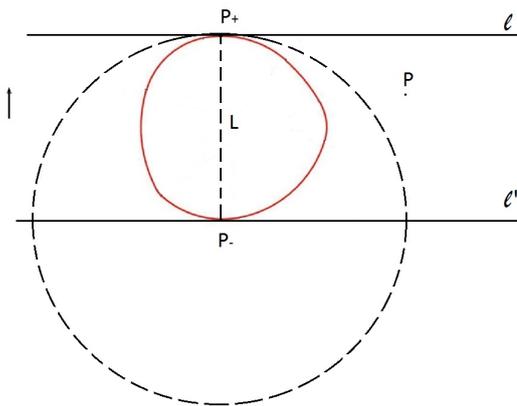


Figura 16.

1.4 Teorema de Barbier

Joseph Émile Barbier matemático e astrônomo do século XIX, em um de seus trabalhos sobre as curvas de largura constante demonstrou que o comprimento da curva depende apenas do diâmetro L .

Antes do próximo tópico que iremos abordar, se faz necessária introduzir uma ideia geral sobre curvas planas.

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável fechada, de largura constante com P_+ e P_- pontos antípodas de α , em particular existem $s, s' \in [0, l]$ distintos tal que $P_+ = \alpha(s')$. Assim podemos definir o mapa,

$$\begin{aligned} \varphi : [0, l] &\rightarrow [0, l] \\ s &\rightarrow \varphi(s) = s' \end{aligned}$$

então pela figura acima temos as seguintes formulas

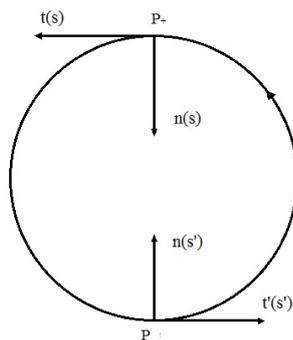


Figura 17.

$$\begin{aligned} t(\varphi(s)) &= -t(s) \\ n(\varphi(s)) &= -n(s) \end{aligned}$$

e como $\|P_+ - P_-\| = L$ obtemos,

$$P_- = P_+ + Ln(P_+)$$

isto é,

$$\alpha(\varphi(s)) = \alpha(s) + Ln(s).$$

Derivando esta expressão e usando a equação $n' = -kt$

$$\begin{aligned} \alpha'(\varphi(s))\alpha'(s) &= \alpha'(s) + L - K\alpha'(s) \\ -\alpha'(s)\varphi'(s) &= \alpha'(s) - Lk(s)\alpha'(s) \\ -\varphi'(s) &= 1 - Lk(s) \\ \varphi'(s) &= Lk(s) - 1 \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.3., $\varphi'(s) \geq 0$. Temos que φ é injetiva, portanto φ' não é identicamente nula.

Teorema de Barbier: Uma curva plana fechada, simples, regular, convexa de largura constante L , possui o comprimento πL .

Demonstração. Seja $s \rightarrow x(\varphi(s))$ é uma reparametrização de x , portanto:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^l \left| \frac{d}{ds} x(\varphi(s)) \right| ds \\ &= \int_0^l \varphi'(s) ds \end{aligned}$$

$$\int_0^l (Lk(s) - 1) ds$$

$$2\pi L - l.$$

Portante, temos $l = \pi L$, e assim completa a demonstração. ■

Usando a mesma notação do **Teorema de Barbier** temos o seguinte resultado:

Observação: Sejam P_+ e P_- pontos antípodas de uma curva plana fechada simples, regular e convexa de largura constante, então a soma das inversas da curvatura nesses pontos resulta na largura L , isto é,

$$\frac{1}{k(s)} + \frac{1}{k(s')} = L$$

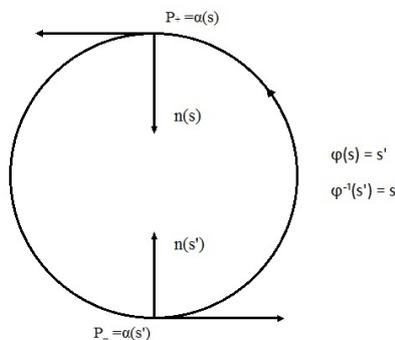


Figura 18

Com efeito a curvatura no ponto P_- é:

$$k(s) = \frac{1 + \varphi'(s)}{L}.$$

Para o ponto P_+ temos:

$$P_+ = P_- + Ln(P_-)$$

$$\alpha(s) = \alpha(s') + Ln(s')$$

$$\alpha(\varphi^{-1}(s')) = \alpha(s') + Ln(s')$$

logo,

$$\alpha'(\varphi^{-1}(s'))[\varphi^{-1}(s')] = \alpha'(s') + L\{-k(s')\alpha'(s')\}$$

$$-\alpha'(s')\left[\frac{1}{\varphi'(s)}\right] = \alpha'(s') + L - k(s')\alpha'(s')$$

$$-\frac{1}{\varphi'(s)} = 1 - Lk(s')$$

$$Lk(s') = \frac{\varphi'(s) + 1}{\varphi'(s)}$$

Portanto a curvatura no ponto P_+ é:

$$k(s') = \frac{\varphi'(s)+1}{L\varphi'(s)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(s)} + \frac{1}{k(s')} &= L \\ \frac{L}{1+\varphi'(s)} + \frac{L\varphi'(s)}{1+\varphi'(s)} &= L \end{aligned}$$

$$\frac{L(1+\varphi'(s))}{1+\varphi'(s)} = L \blacksquare$$

Observação: Nas mesmas hipóteses da observação acima, se a cada par de pontos antípodas dividem a curva em arcos de comprimentos iguais então, a curva é um círculo. De fato

$$\varphi(s) = s + \frac{l}{2}$$

então $k(s) = \frac{1}{L}$ para todo $s \in I$

Logo pelo Teorema fundamental das curvas planas, a curva α corresponde a um círculo de raio L .

1.5 Teorema de Euler

Leonhard Paul Euler matemático e físico suíço do século XVIII, em um de seus inúmeros estudos, exemplifica uma curvas planas de largura constante, chamada de curvas triangulares. Uma curva triangular é uma curva que contém três cúspides, tendo uma única reta tangente em cada cúspide (Figura 19).

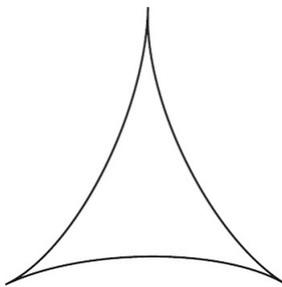


Figura 19: Curva triangular.

Definição: Uma curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma involuta para uma curva $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se $\alpha'(s)$ é ortogonal a $\beta'(s)$ para todo $s \in [0, l]$, e o vetor $\alpha(s) - \beta(s)$ é paralelo a $\beta'(s)$. Para todo $s \in [0, l]$ (Figura 20).

Teorema de Euler: Uma involuta fechada de uma curva triangular $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tem largura constante.

Demonstração. Suponha $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco. Seja $\beta'(s) = t(s)$ o vetor unitário tangente a $\beta(s)$. Então determinaremos a involuta pela equação $\alpha(s) = \beta(s) + x(s)t(s)$, onde determinamos por $x(s)$ uma função escalar conveniente. Derivando a expressão acima temos:

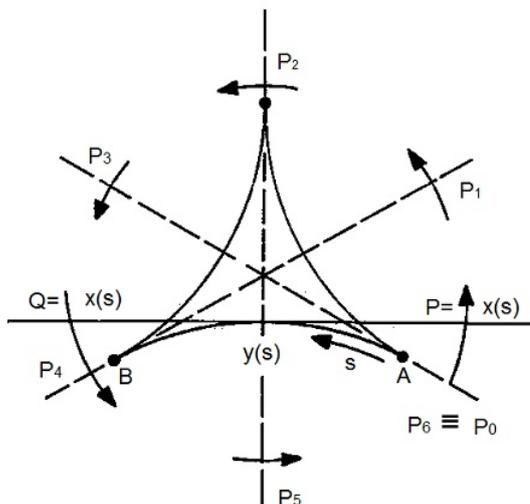


Figura 20: Involuta convexa

$$\alpha'(s) = \beta'(s) + x(s)t'(s) + x'(s)t(s). \quad (1)$$

Por hipótese, temos que $\alpha'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ logo $\langle \alpha'(s), t(s) \rangle = 0$. Tomando o produto interno (escalar) da equação (1) por $t(s)$, temos:

$$\langle \beta'(s), t(s) \rangle + \langle x'(s)t(s), t(s) \rangle = 0,$$

daí,

$$x'(s) = -1,$$

Portanto segue por integração que $x(s) = \alpha_0 - s$, onde α_0 é constante, e portanto a equação da involuta é:

$$\alpha(s) = \beta(s) + (a_0 - s)t(s).$$

Notemos, que o parâmetro a_0 , não assume valor único ele possui diferentes valores em diferentes trechos da involuta, mas seu parâmetro varia com continuidade, por se tratar de uma involuta de curva fechada. Logo, ao percorrer a involuta de P_0 a P_1 (Figura 20.), temos que o ponto $\beta(s)$ percorre a curva base de A até B; mas ao ultrapassarmos P_1 , na involuta, o parâmetro α_0 deve ser alterado para garantir a continuidade dela. E o mesmo ocorrerá nos pontos P_2, \dots, P_5 e $P_6 \equiv P_0$. Percebemos, assim, que ao longo de uma reta tangente à curva base, digamos PQ , a involuta é descrita por duas parametrizações,

$$\alpha(s) = \beta(s) + (a_0 - s)t(s)$$

e,

$$\alpha_1 = \beta(s) + (a_1 - s)t(s),$$

representa respectivamente, a dois de seus ramos. Tais parametrizações correspondem a pares de pontos $P = \alpha(s)$ e $Q = \alpha_1(s)$ onde a reta tangente é cortada em dois pontos pela involuta. Como $\alpha(s) - \alpha_1(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$ e $\alpha_1'(s)$ e $\alpha(s) - \alpha_1(s)$ temos:

$$\begin{aligned} &= \beta(s) + (a_0 - s)t(s) - \beta(s) + (a_1 - s)t(s) \\ &= (\alpha_0 - \alpha_1)t(s) \\ &\Rightarrow |\alpha(s) - \alpha_1(s)| = |\alpha_0 - \alpha_1||t(s)| \\ &\Rightarrow |\alpha(s) - \alpha_1(s)| = |\alpha_0 - \alpha_1|. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a largura da involuta é constante. Observe, também que $\langle \alpha(s) - \alpha_1(s), \alpha'(s) \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \langle (\alpha_0 - \alpha_1)t(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle \alpha_0 t(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha_1 t(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \alpha_0 \langle t(s), \alpha'(s) \rangle + \alpha_1 \langle \alpha_1 t(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Daí segue a ortogonalidade mencionada anteriormente. Como queríamos provar.

Capítulo 2

Polígonos de Reuleaux

Neste capítulo estudaremos, algumas curvas de largura constantes, os Polígonos de Reuleaux. Definiremos e exemplificaremos tais curvas explorando as consequências de sua definição. Ainda neste capítulo iremos construir Polígonos de Reuleaux e mostraremos que tal curva poderia substituir, como sólido reto nas secções paralelas, o cilindro no deslocamento de monólitos.

Os estudos do engenheiro e físico alemão do século XIX, Franz Reuleaux, na área da física cinemática lhe concedeu o título de pai da cinemática por muitos historiadores e pelas suas contribuições nesse campo de estudo da física mecânica. Franz Reuleaux projetou mecanismos envolvendo a curva plana construída a partir de um triângulo equilátero (Figura 28), recebendo assim o nome de Triângulo de Reuleaux.

2.1 Definição

Polígonos de Reuleaux são curvas planas simples fechada e convexas de largura constante, construídas a partir de um número finito de arcos circulares com o mesmo comprimento de raio, centrados sempre no vértice oposto aos lados de um polígono convexo.

Apesar do nome Polígonos de Reuleaux, veremos neste capítulo que não são polígonos, mas sim, curvas planas simples fechadas e convexas formadas a partir de polígonos regular com um número ímpar de lados.

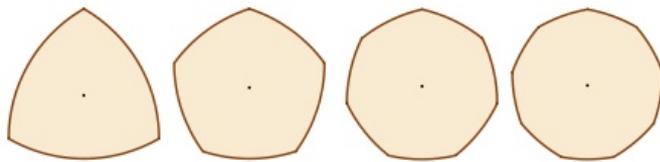


Figura 21: Polígonos de Reuleaux.

Dentre o conjunto infinito de curvas planares de largura constante, o Polígono de Reuleaux é uma curva particular dentro deste universo que segue regras particulares descritas a seguir.

2.1.1 Propriedade fundamental

Polígono de Reuleaux curva plana convexa e fechada de **largura constante**, construído a partir de polígono regular (Figura 22).

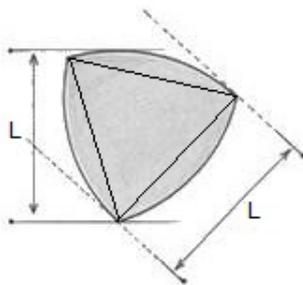


Figura 22: Curva de largura constante.

2.1.2 Polígono com um número ímpar de lados

Só existem Polígonos de Reuleaux gerados a partir de polígonos com um número ímpar de lados.

Os Polígonos de Reuleaux são curvas planas simples fechadas e convexas construídas a partir de um número finito de arcos circulares de mesmo raio, sempre centrados nos vértices opostos ao lado do polígono que lhe dá origem.

Justificativa: Só existe vértice oposto a lados de polígono cujo o número de lados é ímpar, portanto os polígonos convexos com um número par de lados não possuem lado oposto a um vértice, sendo assim impossível a construção de um Hexágono de Reuleaux, um Oquitágono de Reuleaux tão pouco um Quadrado de Reuleaux.

2.1.3 Polígonos Regular

Polígonos de Reuleaux são formados a partir de polígono regular, uma vez que a construção se dá por arcos de circunferência com mesma medida de raio, centrados nos vértice oposto.

Justificativa: Só teremos arcos de circunferência com a mesma medida de raio em polígonos regulares, uma vez que as suas diagonais possuem medidas iguais, e a construção desses arcos, é feita a partir do vértice oposto ao lado do polígono. No caso do Triângulo de Reuleaux o vértice oposto ao lado possui distância igual ao lado do triângulo, logo equilátero.

2.2 Construção de um Polígono de Reuleaux

Como o Polígono de Reuleaux é uma curva plana convexa fechada de largura constante construída a partir de arcos circulares de mesmo raio, necessitaremos para a sua construção de régua e compasso.

Para construção do Polígono de Reuleaux se faz necessário um polígono regular para usarmos como a base da curva. Usando como base um pentágono regular (Figura 23), exemplificaremos a construção dessa curva plana de largura constante, o Pentágono de Reuleaux.

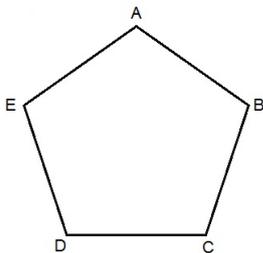


Figura 23: Polígono regular (Pentágono).

A construção do Polígono de Reuleaux é feita da seguinte maneira: centra o compasso em um vértice qualquer de um polígono regular com um número ímpar de lados, a sua abertura se deve à algum dos vértices do lado oposto no qual o compasso foi centrado, em seguida se traça um arco de circunferência entre os vértices desse lado (Figura 24: Vértice centrado em A , abertura \overline{AD} e arco circular \widehat{DC}).

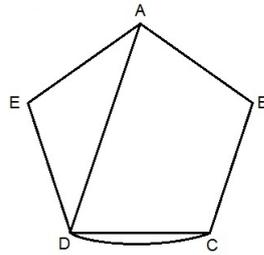


Figura 24: Pentágono de Reuleaux em construção.

Da mesma forma, analogamente, se constrói os demais arcos circulares na construção de um Polígono de Reuleaux (Figura 25).

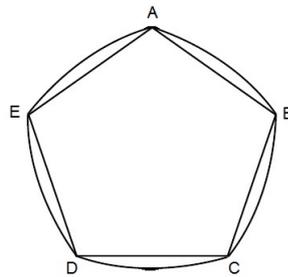


Figura 25: Pentágono de Reuleaux.

2.3 Triângulo de Reuleaux

O Triângulo de Reuleaux é a curva plana de largura constante mais simples, depois do círculo, essa curva poderia substituir o tradicional círculo no transporte de grandes blocos de pedras na antiguidade, na forma de sólido reto com secções paralelas e bases iguais as do Triângulo de Reuleaux. Como o diâmetro é constante, o descolamento de monólitos se torna estável fazendo desta forma geométrica uma possível alternativa ao cilindro, uma vez que a distância entre o bloco e o solo é sempre a mesma, e a medida igual a largura da curva (Figura 26).

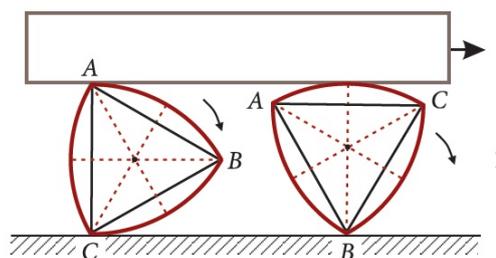


Figura 26

A construção desta forma geométrica se dá a partir de um triângulo equilátero ABC de lado L , traçando-se três arcos circulares de raio L a partir dos vértices, dessa forma a curva construída é chamada de Triângulo de Reuleaux (Figura 27).

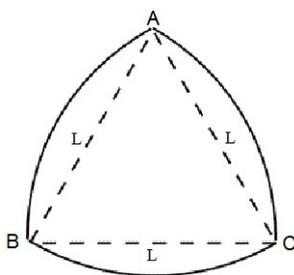


Figura 27: (Construído a partir de um triângulo equilátero).

Existem curvas de largura constante construídas a partir de triângulos irregulares, contudo o Triângulo de Reuleaux tem que ser regular e portanto o polígono base para tal construção é um triângulo equilátero.

2.4 Propriedade do Triângulo de Reuleaux

Todo Triângulo de Reuleaux é construído a partir de um triângulo equilátero e pode ser inscrito em um quadrado de mesmo lado, portanto a largura desta curva é o comprimento do lado deste quadrado.

Justificativa Seja r e s retas suporte do triângulo de Reuleaux, suponha r tangente a um dos arcos circulares traçados a partir dos vértices desta curva, a outra reta suporte s passa por esse vértice e a distância entre elas é o comprimento do raio da circunferência L . Quando ambas as retas intersectam as extremidades do arco circular nos seus vértices, então, são tangentes, nessa direção, aos vértices e a largura é o comprimento L do triângulo equilátero que deu origem a curva.

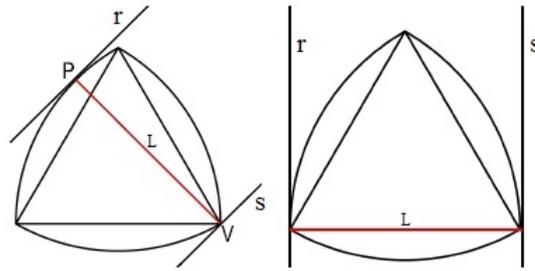


Figura 28 (Largura do Triângulo de Reuleaux)

Considere duas retas perpendiculares as retas suportes r e s e tangentes ao triângulo de Reuleaux, elas formam um quadrado de lado L , onde tal curva pode ser rotacionado mantendo sempre contato com os quatro lados do quadrado (Essa propriedade é comum a todas as curvas de largura constante).

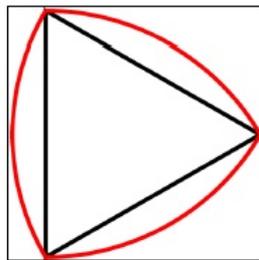


Figura 29: Triângulo de Reuleaux inscrito num quadrado

2.4.1 Comprimento do Triângulo de Reuleaux

Seja L a medida do lado de um triângulo equilátero e l o comprimento da curva de largura constante construída a partir deste triângulo equilátero, observe que:

Para a construção desta forma geométrica tomamos como base um triângulo equilátero, portanto o perímetro do triângulo de Reuleaux se dá a partir da adição de três arcos circulares, com o raio igual a medida do lado L do triângulo, e ângulo medindo $\frac{\pi}{3}$. Logo:

$$l = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3} \frac{1}{2\pi}\right) (2\pi L)$$

$$l = \frac{1}{2} (2\pi L)$$

$$l = \pi L$$

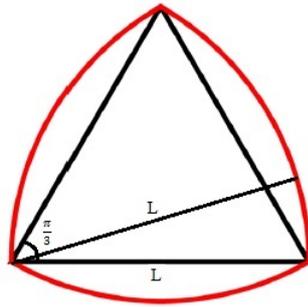


Figura 30

2.4.2 Área do Triângulo de Reuleaux

Observação: A região delimitada (R) pelo Triângulo de Reuleaux pode ser determinada pela seguinte forma,

$$R = \bigcap_{k=1}^3 \{z \in \mathbb{R} : |z - \xi_k| \leq L\}$$

onde ξ_1, ξ_2, ξ_3 são os vértices do Triângulo Equilátero [10].

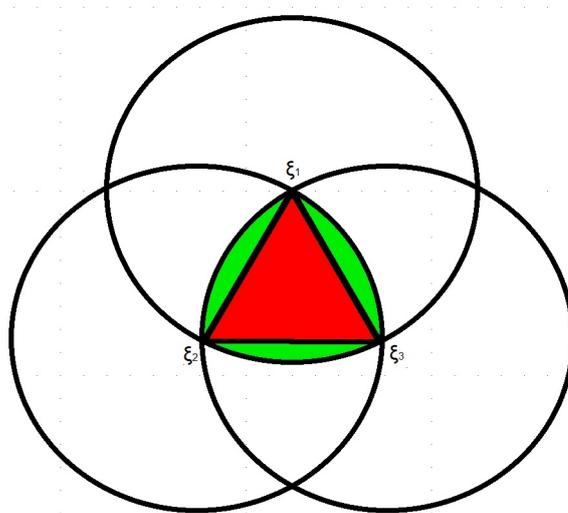


Figura 31

Seja L a medida do lado de um triângulo equilátero, a área R_r do Triângulo de Reuleaux construída a partir do polígono descrito, se deve pela soma de três segmentos circulares adicionado a área do triângulo equilátero ver figura 32.

2.4. PROPRIEDADE DO TRIÂNGULO DE REULEAUX

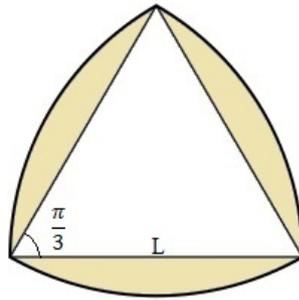


Figura 32: Em destaque os três segmentos circulares.

Nota: R_t área do triângulo equilátero e R_c área do segmento circular.
Portanto:

$$R_r = 3.R_c + R_t$$

I. Área do triângulo equilátero.

$$R_t = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

II. Área do segmento circular.

Área do setor circular R_s subtraído da área do triângulo.

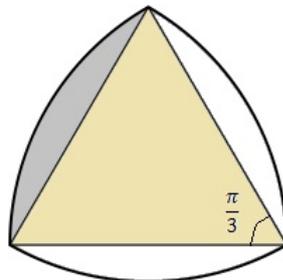


Figura 33: Em destaque o segmento circular e a área do triângulo.

$$R_c = R_s - R_t$$

Daí,

$$R_c = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi \cdot L^2}{2\pi} - \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$R_c = \frac{\pi L^2}{6} - \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

2.4. PROPRIEDADE DO TRIÂNGULO DE REULEAUX

$$R_c = \frac{L^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}$$

Como a área do Triângulo de Reuleaux é dada por $R_r = 3R_c + R_t$ temos:

$$R_r = 3\frac{L^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12} + \frac{L^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$R_r = \frac{L^2}{4}\cdot(2\pi - 3\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

$$R_r = \frac{L^2}{4}(2\pi - 2\sqrt{3})$$

$$R_r = \frac{L^2(\pi-\sqrt{3})}{2}$$

A área do Triângulo de Reuleaux é $\frac{1}{2}\cdot(\pi - \sqrt{3})L^2 \cong 0,7047.L^2$, a área do círculo de mesmo diâmetro ou seja mesma largura é $\frac{1}{4}\cdot\pi.L^2 \cong 0,7853L^2$ e portanto maior, que a área do Triângulo de Reuleaux (Figura 34).

O Teorema de Blaschke-Lebesgue [2] afirma que o Triângulo de Reuleaux tem a menor área interna entre todas as curvas de determinada largura constante. Pela desigualdade isoperimétrica, a curva de largura constante com a maior área é o círculo.

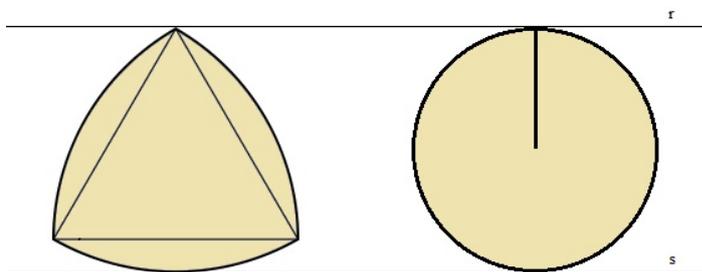


Figura 34: Triângulo de Reuleaux e circulares com o mesmo diâmetro

2.4.3 Centro do Triângulo de Reuleaux

O centro do Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado, quando gira no interior desse quadrado, descreve uma trajetória não circular formada por quatro arcos de elipse [13].

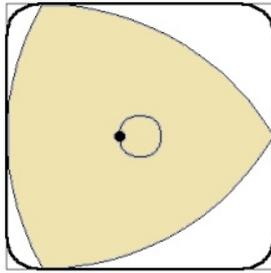


Figura 35: Trajetória descrita pelo Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado.

2.4.4 Área da superfície inscrita pelo Triângulo de Reuleaux

A área coberta pelo Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado de lado um, quando gira em torno de seu eixo móvel é de $R = 0,9877\dots$ [5], sendo assim, a área do Triângulo de Reuleaux quando gira em torno de seu eixo móvel é aproximadamente 98,77% da superfície do quadrado, proporcionando assim, algumas utilidades na física mecânica, bem como a broca em forma do Triângulo de Reuleaux para uma furadeira com o eixo móvel (ver capítulo 3).

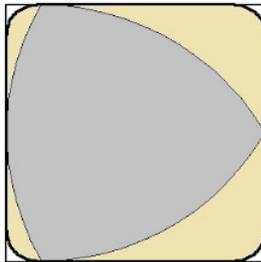


Figura 36: Superfície coberta pelo triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado.

2.4.5 A estrada perfeita para o Triângulo de Reuleaux

Para uma roda exótica como o Triângulo de Reuleaux, a estrada perfeita é a pista, cujas características são similares as da roda circular deslocando sem oscilações em uma estrada horizontal. Sendo assim, a cada momento de deslocamento a roda possui apenas um ponto de contato com a estrada, e ainda, o centro geométrico da roda deve descrever sempre um movimento horizontal e se manter acima do ponto de contato da roda com a estrada (ver referência 4).

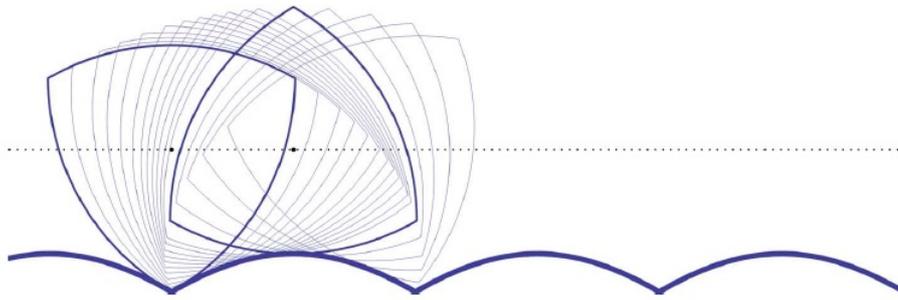


Figura 37: Estrada perfeita para uma roda com o formato de um Triângulo de Reuleaux.

2.5 Uma generalização do Triângulo de Reuleaux

Como vimos anteriormente, existem curvas planas fechadas de larguras constante, construídas a partir de polígonos regulares com arcos circulares de comprimentos e raios iguais. O que propomos neste item é a construção de uma curva plana de largura constante, a partir de um triângulo qualquer (Figura 38).

Para a construção desta curva usaremos um triângulo ABC onde seus lados (a , b e c) serão prolongados nas duas direções e cada um dos vértices A , B e C como centro de um arcos circulares com raios maiores (R) e raios menores (r), bem como na figura 38.

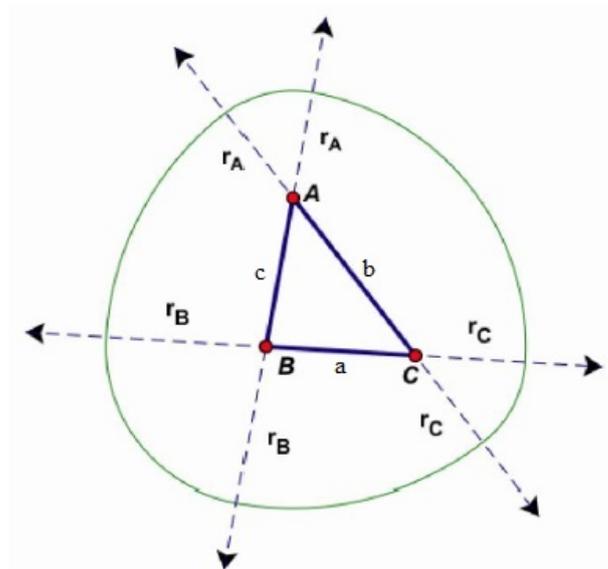


Figura 38: Curva plana irregular de largura constante.

2.5. UMA GENERALIZAÇÃO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX

Vamos supor que o ângulo \hat{A} possua o menor valor entre os três ângulos, contudo não necessariamente único, adicionaremos um valor arbitrário (x) aos seguimentos \overline{BA} e \overline{CA} em A .

Construa um arco de raio x (positivo) no vértice A (r_a), em seguida, com o centro no vértice B vamos desenhar um arco, $R_b = r_a + c$ entre os prolongamentos de \overline{BA} e \overline{BC} (Figura 39).

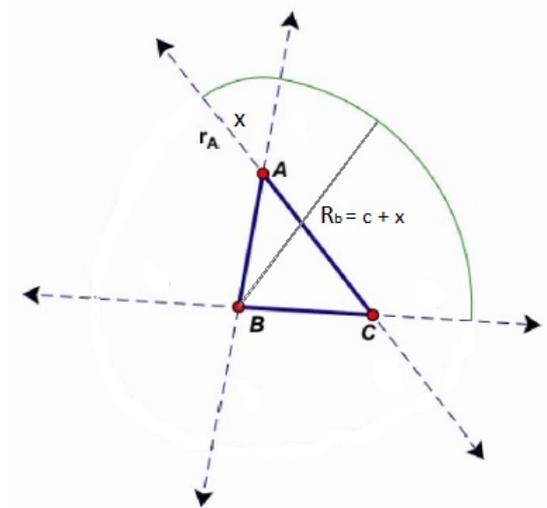


Figura 39: Curva plana irregular de largura constante em construção.

Este arco encontra o anterior suavemente no mesmo ponto. Em seguida, continuaremos com o mesmo procedimento em torno do triângulo, puxando alternadamente pequenos arcos circulares e grandes arcos circulares.

O comprimento dos raios são:

Para o vértice A ;

$$\begin{aligned} r_a &= x \\ R_a &= b + c + x - a \end{aligned}$$

Para o vértice B ;

$$\begin{aligned} r_b &= b + x - a \\ R_b &= c + x \end{aligned}$$

Para o vértice C ;

2.5. UMA GENERALIZAÇÃO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX

$$r_c = c + x - a$$
$$R_c = b + x.$$

Logo, a largura (L) da curva formada é a relação em cada um dos vértices do triângulo e portanto o comprimento do raio maior e o raio menor em cada vértice.

Largura da curva formada

Para o vértice A temos:

$$L_a = r_a + R_a$$
$$L_a = x + b + c + x - a$$
$$L_a = 2x + b + c - a$$

Para o vértice B temos:

$$L_b = r_b + R_b$$
$$L_b = b + x - a + c + x$$
$$L_b = 2x + b + c - a$$

Para o vértice C temos:

$$L_c = r_c + R_c$$
$$L_c = c + x - a + b + x$$
$$L_c = 2x + b + c - a$$

Portanto, como as larguras L_a , L_b e L_c são iguais, prova que a curva construída a partir deste triângulo ABC irregular, possui largura constante. ■

Capítulo 3

Aplicações

Estudaremos neste capítulo as diversas aplicações dos Polígonos de Reuleaux nas mais diferentes áreas, sua utilidade na engenharia mecânica para a construção de ferramentas para motores com o formato dessa curva; na engenharia civil broca com o desenho do Triângulo de Reuleaux é utilizado para criação de furos com o desenho aproximado de um quadrado; na arquitetura mostraremos como esta curva é esculpida em algumas janelas de igrejas católicas. Veremos ainda, como o design de alguns Polígonos de Reuleaux é apreciada em diversos objetos, como moedas inglesas e palhetas de violão.

3.1 Engenharia Mecânica

Os Polígonos de Reuleaux na engenharia mecânica têm sido utilizado para confecção de peças com esse formato, tais peças vêm movimentando mecanismos de máquinas e motores, bem como o motor Wankel criado em 1924, no qual foi utilizado por veículos da Mazda, por ser um motor de combustão interna utiliza o rotor na forma de Triângulo de Reuleaux substituindo assim os usuais pistões de motores a Diesel (Figura 40).

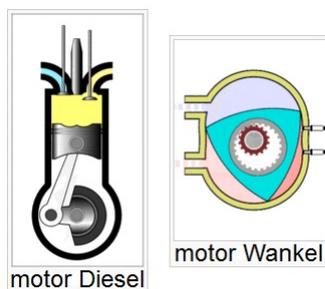


Figura 40

3.2 Engenharia Civil

Na engenharia civil o formato do Polígono de Reuleaux é encontrado em brocas para ser utilizada por furadeiras com eixos móveis, tais brocas tem o formato de um Triângulo de Reuleaux no intuito de criar furos aproximadamente quadrados (Figura 41).

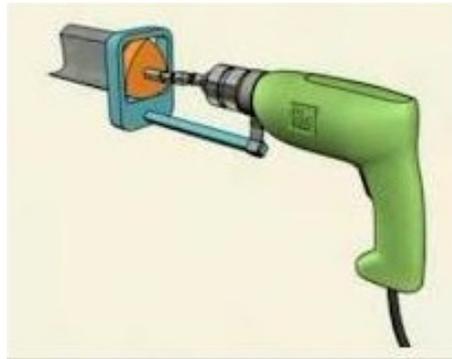


Figura 41: Broca com a forma de Triângulo de Reuleaux para fazer furos aproximadamente quadrados

Para a construção dos referidos furos "quadrados", com a broca no formato de um Triângulo de Reuleaux, a furadeira deve ter um eixo móvel, pois caso o eixo seja fixo a broca com tais características construiria um furo circular.

Como o centro do Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado descreve uma trajetória formada por quatro arcos de elipse, a furadeira para executar tal tarefa, deve ter seu eixo se movimentando no mesmo formato, quatro arcos de elipse.



Figura 42: Furo aproximadamente quadrados feita por uma broca com a forma de um Triângulo de Reuleaux.

3.3 Arquitetura

Na arquitetura o formato dos Polígonos de Reuleaux foi usado na construção de algumas janelas de igrejas católicas do desde de o século X, com o formato do Triângulo de Reuleaux (Figura 43).



Figura 43: Janela da Catedral de Sint-Salvator na Bélgica.

3.4 Objetos Diversos

O formato dos Polígonos de Reuleaux pode ser encontrado em diversos objetos bem como, lápis, canetas, palhetas de violão e guitarra, moedas inglesas entre outros, por ser uma curva de largura constante o seu manuseio se torna mais agradável e ergonômico.

3.4.1 Palhetas de Violão e Guitarra

A curva formada pelo Triângulo de Reuleaux é o formato utilizado aproximado para a construção de palhetas para se tocar violões e guitarras, uma possível justificativa para a palheta possuir tal estrutura, se deve pelo fato de que as curvas de larguras constantes, torna o uso de objetos mais ergonômicas e confortável para ser manuseada.



Figura 44: Palheta para tocar Violão ou Guitarra.

3.4.2 Lápis e Canetas

Alguns lápis e canetas possuem, em suas secções transversais, o formato do Triângulo de Reuleaux assim como a palheta de violão e guitarra, um dos motivos seja o conforto ao utilizar tais objetos, outro motivo que se supõe é o fato de Triângulos de Reuleaux ter a menor área interna dentre todas as curvas de larguras constantes, tornando assim o custo de produção em larga escala mais econômico (Figura 45).



Figura 45: Lápis com a forma de um Triângulo de Reuleaux em sua secção transversal.

3.4.3 Moeda inglesa

O formato do Polígono de Reuleaux é bem conhecido pelos britânicos na forma de Heptágono de Reuleaux uma vez que as moedas inglesas de 20 e 50 pence possui tal design, essas moedas podem ser usadas em máquinas de refrigerantes uma vez que possuem largura constante, e torna mais seguro o seu uso, por ser uma moeda que não possui os moldes tradicionais das moedas circulares (Figura 46).



Figura 46: Moeda Britânica na forma de Heptágono de Reuleaux.

3.4.4 Tampas de Boeiros

O formato de polígonos de Reuleaux se encontra em algumas cidades nas tampas de boeiros com o desenho do Triângulo de Reuleaux, tal estrutura gera uma estética opcional as tradicionais tampas em formato de círculos.



Figura 47

Capítulo 4

Polígonos de Reuleaux em sala de aula

Neste quarto e último capítulo estamos propondo atividades sobre os Polígonos de Reuleaux, para ser aplicados no ensino fundamental e médio, com o objetivo de buscar estimular a curiosidade dos alunos, uma vez que o processo de ensino e aprendizagem da matemática é uma construção que passa por essa busca, fazendo com que a aula se torne mais atrativa. Como sugestão de problemática no estudo dos polígonos no ensino fundamental e média, os Polígonos de Reuleaux podem tornar a aula interessante e desafiadora para os alunos, e se tornar um atrativa singular a esse estudo.

4.1 Atividade 1 - Construção do Polígono de Reuleaux

Construa um Triângulo de Reuleaux a partir de um triângulo equilátero, utilizando apenas régua e compasso.

Solução:

A construção é similar à encontrada na seção 2.2 deste trabalho na qual se trata de um Pentágono de Reuleaux.

4.1.1 Objetivo Geral

Introduzir em sala de aula, o conceito das curvas planas simples fechada e convexa de largura constantes construídas a partir de polígonos convexos.

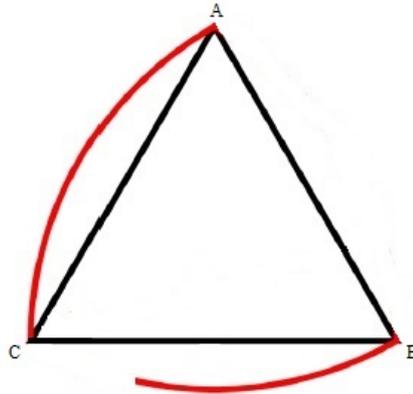


Figura 48: Construção de um Triângulo de Reuleaux.

4.1.2 Objetivo Específico

- Construir um Polígono de Reuleaux;
- Interpretar um Polígono de Reuleaux regular como uma figura de largura constante;
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

4.2 Atividade 2 - Comparação de perímetros

Calcule e compare os perímetro de um triângulo de Reuleaux (l), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e o perímetro de um círculo (C) de diâmetro 1. (Atividade proposta por Mello [5])

A solução se encontra na seção 2.4.1 deste trabalho.

Resposta:

$$l = \pi \text{ e } C = \pi, \text{ portanto } l = C = \pi$$

4.2.1 Objetivo Geral

Relacionar os Polígonos de Reuleaux ao círculo com o mesmo diâmetro, na sala de aula, associando o resultado ao teorema de Barbier.

4.2.2 Objetivo Específico

- Calcular o perímetro de um Triângulo de Reuleaux;
- Comparar o comprimento de Triângulo de Reuleaux ao perímetro do círculo de mesma largura;
- Associar o comprimentos dos Polígonos de Reuleaux, de largura L , a equação $l = \pi L$.

4.3 Atividades 3 - Comparação de Áreas

Calcule e compare as áreas de um triângulo de Reuleaux (R_r), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e a área de um círculo (R_c) de diâmetro 1. (Atividade proposta por Mello [5])

A solução se encontra na seção 2.4.2 deste trabalho.

Resposta:

$$R_r = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} < R_c = \pi$$

4.3.1 Objetivo

Apresentar o triângulo de Reuleaux em sala de aula como a curva plana fechada de largura constante com a menor área, com o intuito de aguçar a curiosidade do aluno .

4.3.2 Objetivo Específico

- Calcular área do Triângulo de Reuleaux;
- Comparar a áreas do Triângulo de Reuleaux a do círculo de mesma larguras;
- Identificar a área do triângulo de Reuleaux como a menor área entre as figuras planas de largura constante com o mesmo diâmetro.

4.4 Atividade 4 - Experiência

No Egito antigo para a construção das pirâmides foi necessário o transporte de grandes blocos de pedra (monólitos), para tal transporte se utilizou cilindros sólido de largura constante (círculo).

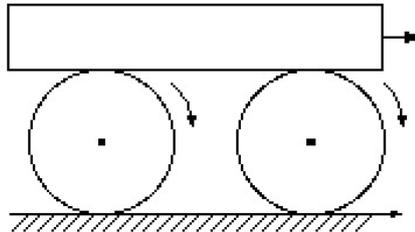


Figura 49

Existe algum outro sólido não circular que o substitua? Construa um modelo.

Solução:

Construa moldes do triângulo de Reuleaux e do círculo em um papelão, todas as curvas com a mesma largura, em seguida recorte os moldes e os coloquem entre duas régua.

Resposta:

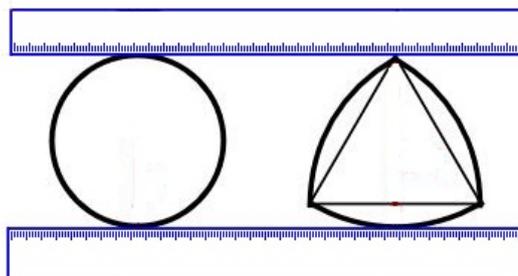


Figura 50

As régua se movimentam facilmente sobre as curvas, mantendo constante a distância entre as mesmas, comprovando portanto que um sólido formado a partir do Triângulo de Reuleaux, é um possível substituto ao cilindro.

4.4.1 Objetivo Geral

Identificar de uma forma lúdica em sala de aula que o sólido construído a partir de um polígono de Reuleaux, pode facilmente substituir o círculo em transporte de monólitos.

4.4.2 Objetivo Específico

- Interpretar e criticar o resultado dentro da uma situação concreta.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução humana.

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H., Santos, W., *Geometria Diferencial das Curvas Planas*, Publicações 24° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [2] Anciaux, H., Georgiou, N., *The Blaschke - Lebesgue problem for constant Width Bodies of revolutio*. Institute of Techonology, Tralee, Ireland, 2009.
- [3] Araújo, P. V., *Geometria Diferencial*, Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [4] Carvalho, M., Oliveira, A., *Estradas Para Rodas Exóticas*, Boletim da SPM 65, Outubro 2011.
- [5] Gleibner e Zeitler *The Reuleaux Triangle and Its Center of Mass*, Results in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel - Switzerland, 2000.
- [6] Kavohl, B., Weber, C., *Meissner's Mysterious Bodies*, Universit Mathematisches Institut, Köln, Germany, 2011.
- [7] Lübeck, K. R. M., *Curvas de Largura Constante e suas Generalizações*, artigo, 13° Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - XIII ERMAC.
- [8] Mello, J. L. P. *Polígonos de Reuleaux e a Generalização do Pi*, Revista do Professor de Matemática, nº 81, 2° Quadrimestre de 2013, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.
- [9] Moon, F. C., Ford, J., *The Reuleaux Collection of Kinematic at Cornell University*, artigo, Cornell University, Ithaca - New York.
- [10] Ridley, J. N., *A generalization of Reuleaux triangle*, Wits University.
- [11] Tarumoto, C. I., *Polígonos de Reuleaux e Aplicações*, Universidade Federal da Grande Dourados, Profmat, Mato Grosso do Sul, 2014.
- [12] Voloch, J. F. *Curvas de larguras constante*, Matemática Universitária, nº 5, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.

- [13] Wagon, S. *Mathematica in Action*, W. H. Freeman, New York, 2000.