



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**MARIA ROBEVÂNIA LEITÃO**

**TESSELAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2015**

MARIA ROBEVÂNIA LEITÃO

TESSELAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática do ensino básico.

Orientadora: Clarice Dias de Albuquerque.

JUAZEIRO DO NORTE

2015



MARIA ROBEVÂNIA LEITÃO

TESSELAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

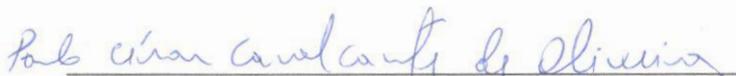
Aprovada em: 26/09/2015.

BANCA EXAMINADORA



Profª. Dra. Clarice Dias de Albuquerque (Orientador)

Universidade Federal do Cariri (UFCA)



Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Universidade Regional do Cariri (URCA)



Profª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho a Deus, minha mãe Idelzuite, meu pai José Airton, meus irmãos Roberto e Tatiane, meus filhos André e Horácio e a meu esposo Djalma, que sempre me apoiaram, direta ou indiretamente, e em momento algum me deixaram desanimar diante dos obstáculos encontrados.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me permitido ingressar e concluir esse curso.

Agradeço aos meus pais pelo incentivo e apoio em todos os desafios por mim enfrentados.

Agradeço a meu esposo pelo apoio, o companheirismo e as palavras de incentivo sem as quais não teria conseguido concluir esse curso.

Agradeço à Professora Dr. Clarice Dias de Albuquerque pela orientação, dedicação e paciência na realização desse trabalho.

Agradeço a todos os professores do curso pela relevante contribuição para minha formação profissional.

Agradeço aos colegas de curso que muito contribuíram nas trocas de experiências e conhecimentos durante toda a jornada.

Agradeço aos colegas de trabalho que durante o curso foram pacientes e compreensivos quando precisei dedicar-me ao mestrado.

Agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro durante o curso.

Agradeço a todos os amigos e familiares que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desse curso.

“Compreender é inventar ou reconstruir, através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir.”

(Jean Piaget)

## RESUMO

Tesselar o plano euclidiano significa cobri-lo com figuras que se encaixem perfeitamente não havendo sobreposições, nem espaços vazios entre elas, de modo que a superfície particionada seja igual ao tamanho total. Esse trabalho apresenta sugestões de abordagem de conteúdos de geometria euclidiana plana através dessas tesselações como uma estratégia de ensino que objetiva mostrar como é possível tornar o ensino da geometria euclidiana mais atraente, motivado pelo interesse em resolver problemas de tesselações. Inicialmente faremos um breve estudo sobre conceitos básicos de geometria euclidiana plana, definição, elementos e tipos de tesselações. Em seguida são sugeridas uma sequência de três atividades que abordam, de maneira interdisciplinar e contextualizada conteúdos abstratos de geometria euclidiana plana para o ensino fundamental e médio. A atividade 1 trata da abordagem de polígonos regulares por meio de tesselações do plano euclidiano utilizando um só tipo de polígono. A atividade 2 aborda o estudo das possibilidades de tesselação do plano euclidiano utilizando dois ou mais polígonos regulares. A atividade 3 aborda as isometrias através das obras de Escher, com análise de algumas obras desse artista e construção de tesselações no estilo Escher. Discute-se algumas aplicações das tesselações dentro da própria matemática, na natureza e nas artes. A exploração de conceitos geométricos abstratos utilizando materiais concretos num enfoque contextualizado e interdisciplinar possibilita ao aluno desenvolver habilidades competências necessárias para sua construção enquanto cidadão consciente e ativo no meio em que vive. Espera-se que este trabalho contribua significativamente para a melhoria de qualidade do ensino de Matemática.

**Palavras-chave:** Contextualização. Aplicação. Aprendizagem.

## ABSTRACT

A Tessellation the Euclidean plane is a cover of it for figures that fit perfectly with no overlaps or gaps between them, so that the partitioned area is equal to the total size. This paper presents suggestions of flat Euclidean geometry content approach through these tessellations as a more attractive strategy that aims to show how you can make teaching more attractive Euclidean Geometry, motivated by interest in solving problems tessellations. Initially we will make a brief study of basics of flat Euclidean geometry, definition, elements and types of tessellations. Next it is suggested a sequence of three activities that address, in an interdisciplinary way and contextualized flat Euclidean geometry abstract content for elementary and secondary education. The first activity is one of the regular polygons approach through tessellations of the Euclidean plane using only one type of polygon. The activity 2 deals with the study of the possibilities of tessellations of the Euclidean plane using two or more regular polygons. Activity 3 addresses the isometries through the works of Escher, with analysis of some works of this artist and construction of tessellations in Escher style. It is discussed some applications of tessellations in mathematics itself, in nature, in the information theory and the arts. The exploration of abstract geometric concepts using concrete materials in a contextualized, interdisciplinary approach allows students to develop skills necessary skills to its construction as a citizen conscious and active in the environment they live in. It is hoped that this work will significantly contribute to improving quality of mathematics teaching.

**Keywords:** Contextualization. Application. Learning.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Polígono de $n$ lados . . . . .	15
Figura 2 – Polígonos convexo (a esquerda) e não convexo (a direita). . . . .	16
Figura 3 – Ângulo interno de um polígono . . . . .	16
Figura 4 – Reflexão em relação a reta $r$ . . . . .	17
Figura 5 – Rotação de amplitude $\alpha$ por um ponto $G$ . . . . .	17
Figura 6 – Translação por um vetor $\vec{u}$ . . . . .	18
Figura 7 – Reflexão deslizante no plano . . . . .	18
Figura 8 – Nós e aresta de uma tesselação parcial. . . . .	19
Figura 9 – Exemplos de tesselações lado a lado. . . . .	19
Figura 10 – Algumas tesselações semirregulares. . . . .	20
Figura 11 – Exemplo de tesselação demirregular. . . . .	20
Figura 12 – Ângulos internos no polígono regular. . . . .	21
Figura 13 – Tesselações regulares no Plano Euclidiano. . . . .	22
Figura 14 – Tesselações duais no Plano Euclidiano. . . . .	23
Figura 15 – Figuras vértice das tesselações regulares. . . . .	23
Figura 16 – Analisando os vértices da tesselação com triângulos. . . . .	24
Figura 17 – Tesselação semirregular $(3, 12, 12)$ . . . . .	25
Figura 18 – Analisando os vértices da tesselação com pentágono. . . . .	25
Figura 19 – Representação de uma tesselação de padrão $(k, l, m)$ , com $k$ ímpar . . . . .	26
Figura 20 – Analisando os vértices da tesselação sem triângulos . . . . .	27
Figura 21 – Tesselações semirregulares de padrão $(k, l, m)$ com três polígonos em torno de um vértice quando $k, l, m$ , são todos pares. . . . .	29
Figura 22 – Analisando os vértices da tesselação $(k, l, m, n)$ com triângulos. . . . .	29
Figura 23 – Tesselações semirregulares de padrão $(3, l, m, l)$ . . . . .	30
Figura 24 – Analisando os vértices da tesselação $(3, l, m, n, l)$ . . . . .	31
Figura 25 – Tesselação de padrão $(3, 3, m, n, 3)$ quando $m = n$ . . . . .	32
Figura 26 – Tesselação de padrão $(3, 3, m, n, 3)$ quando $m = n$ . . . . .	32
Figura 27 – Tesselação de padrão $(3, l, 3, 3, l)$ . . . . .	33
Figura 28 – Tesselações na natureza. . . . .	34
Figura 29 – Decorações com mosaicos. . . . .	37
Figura 30 – Algumas obras de Escher disponíveis em <a href="http://www.mcescher.com/">http://www.mcescher.com/</a> . . . . .	38

Figura 31 – Conjunto com dois protoladrilhos. . . . .	39
Figura 32 – Dart e kite construídos a partir de um pentágono regular. . . . .	39
Figura 33 – Pavimentação com dois protoladrilhos (dart e kite). . . . .	39
Figura 34 – Rombos aperiódicos das tesselações de Penrose. . . . .	40
Figura 35 – Construção dos rombos aperiódicos a partir do pentágono regular. . . . .	40
Figura 36 – Pavimentação com dois protoladrilhos (rombos aperiódicos). . . . .	40
Figura 37 – Conjunto com seis protoladrilhos. . . . .	41
Figura 38 – Pavimentação com seis protoladrilhos. . . . .	41
Figura 39 – Empacotamento de círculos no plano. . . . .	42
Figura 40 – Círculo de raio $r$ inscrito no quadrado de lado $l$ . . . . .	42
Figura 41 – Círculo de raio $r$ inscrito no hexágono regular de lado $l$ . . . . .	43
Figura 42 – (a) Empacotamento de esferas associado ao reticulado cúbico de face centrada e (b) uma pilha de esferas retiradas do empacotamento (a) . . . . .	45
Figura 43 – Tesselação por reflexão. . . . .	50
Figura 44 – Tesselação por rotação. . . . .	50
Figura 45 – Tesselação por translação. . . . .	51
Figura 46 – Cortes para construir o molde para tesselação por rotação. . . . .	51
Figura 47 – Montagem da tesselação por rotação . . . . .	52
Figura 48 – Cortes para tesselação por translação . . . . .	52
Figura 49 – Montagem da tesselação por translação. . . . .	53
Figura 50 – Cortes para tesselação por reflexão. . . . .	53
Figura 51 – Montagem da tesselação por reflexão . . . . .	54
Figura 52 – Moldes para construção do kit de polígonos regulares . . . . .	58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tesselações regulares . . . . .	22
Tabela 2 – Tesselações semirregular com três polígonos ao redor de um vértice, sendo pelo menos um deles um triângulo equilátero. . . . .	27
Tabela 3 – Padrão (4,m,l) . . . . .	28
Tabela 4 – Padrão (6,m,l) . . . . .	28
Tabela 5 – Padrão (k,l,m,l) . . . . .	30

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>TESSELAÇÕES NO PLANO EUCLIDIANO . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Conceitos básicos . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Tesselações no plano euclidiano . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Tesselações euclidianas . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Descobrimo padrões para tesselações semirregulares . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>TESSELAÇÕES EUCLIDIANAS . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>Tesselações na natureza . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>A presença das tesselações na arte . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.3</b>	<b>Aplicação na matemática . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>UMA FERRAMENTA NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>4.1</b>	<b>Atividade 01 – tesselação do plano por um tipo de polígono regular . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>4.2</b>	<b>Atividade 02 – tesselação do plano por dois ou mais tipos de polígonos regulares . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>4.3</b>	<b>Atividade 03 – estudo dos padrões geométricos por meio de algumas obras de Escher . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>ANEXO A – MOLDES PARA CONSTRUÇÃO DO KIT DE POLÍGONOS REGULARES . . . . .</b>	<b>58</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As tesselações estão presentes na história da humanidade desde quando o homem começou a cobrir os pisos e paredes de suas casas com pedras. As mais antigas peças de ladrilho conhecidas datam de 5000 anos a.c e foram encontradas no Egito. Os Romanos e outros povos mediterrâneos retratavam pessoas e animais em suas decorações com mosaicos. Os árabes, por motivos religiosos, não utilizavam a figura humana ou animal em seus mosaicos introduzindo aí os formatos geométricos em seus luxuosos arabescos [1]. Na maioria dessas aplicações o que mais interessava era a estética, as análises matemáticas dessas estruturas é algo bem recente, sendo iniciado por volta de 1600 pelo astrônomo Joannes Kepler, o primeiro a estudar pavimentações do plano.

Com o passar do tempo o emprego das tesselações vem deixando de ter apenas caráter estético e tem se tornado mais abrangente no campo da ciência com aplicação, por exemplo, em problemas de empacotamento esférico, nos tecidos celulares de plantas e animais, nas estruturas cristalinas, na criação de códigos corretores de erros e criptografias, impressão em 3D de próteses humanas e nas engenharias e arquitetura em decorações de ambientes seja em pisos, paredes ou objetos decorativos.

[...] a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. [2, 3]

Dessa forma a abordagem de conteúdos de geometria euclidiana plana através das tesselações surge como uma estratégia de ensino que objetiva mostrar como é possível tornar o ensino da geometria euclidiana mais atraente, motivado pelo interesse em resolver problemas de tesselações; introduzir conceitos básicos de matemática utilizando a teoria de tesselações; divulgar o assunto nos ensinos fundamental e médio; propor metodologias para resolução de problemas através de atividades envolvendo tesselações e estimular a aprendizagem por meio de aplicações interdisciplinares.

O trabalho está organizado em três capítulos, sendo que no capítulo 2, inicialmente, faremos um breve estudo sobre conceitos básicos como polígonos, vértices, lados, ângulos internos, polígonos convexos e regulares, transformações geométricas mais especificamente as isometrias. Em seguida abordamos o conceito de tesselação, seus elementos, tipos de tesselações, particularidades das tesselações regulares e semirregulares.

No capítulo 3, discutimos algumas aplicações das tesselações dentro da diversidade da flora e fauna, na própria matemática com o problema de empacotamento de esferas, e na presença forte e marcante nas obras de artes, sobretudo nas obras de Escher e Penrose.

Finalmente, no capítulo 4 abordamos o que os currículos oficiais orientam sobre interdisciplinaridade e contextualização no ensino da matemática, bem como sugestões de atividades didáticas para o ensino de geometria euclidiana plana. Apresentamos três modelos de atividades a serem desenvolvidas com alunos de ensino fundamental e médio: construções de tesselações por um só tipo de polígono regular, construções de tesselações semirregulares e demirregulares e na seção 3 estudo e construção de tesselações no plano euclidiano por isometrias de modo semelhante às utilizadas nas obras de Escher como motivação para uma aprendizagem significativa de geometria plana para o ensino fundamental e médio.

## 2 TESSELAÇÕES NO PLANO EUCLIDIANO

Tesselar o plano euclidiano significa cobri-lo com figuras que se encaixem perfeitamente não havendo sobreposições, nem espaços vazios entre elas, de modo que a superfície particionada seja igual ao tamanho total. Nesse capítulo recordamos alguns conceitos básicos como polígonos, vértices, lados, ângulos internos, polígonos convexos e regulares, transformações geométricas focando nas isometrias. Em seguida na seção 1.2 abordamos o conceito de tesselação, seus elementos, tipos de tesselações, particularidades e demonstrações acerca das tesselações regulares e semirregulares.

### 2.1 Conceitos básicos

Antes de falarmos sobre tesselações colocamos aqui algumas definições básicas que serão utilizadas no decorrer desse trabalho.

**Definição 1** *Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$  uma sequência de  $n$  pontos distintos num plano com  $n \geq 3$ . Suponha que os  $n$  segmentos  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$  tenham as seguintes propriedades:*

1. *nenhum par de segmentos se intercepta a não ser nas suas extremidades.*
2. *nenhum par de segmentos com extremidade comum é colinear.*

*Então a reunião dos  $n$  segmentos é chamada polígono. Os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$  são os vértices do polígono e os segmentos  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$  são seus lados, [4]*

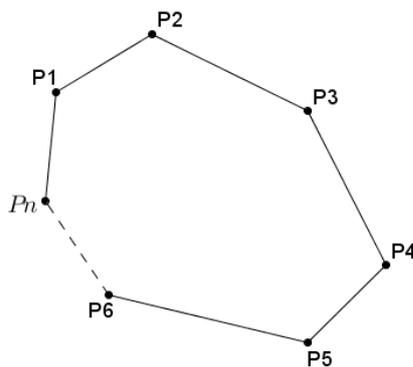


Figura 1 – Polígono de  $n$  lados

Um polígono com  $n$  lados é chamado um  $n$ -ágono. Cada lado de um polígono está contido em uma reta, que por sua vez separa o plano em dois semiplanos. Diz-se que um polígono é *convexo* se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a uma reta que contém um lado do polígono.

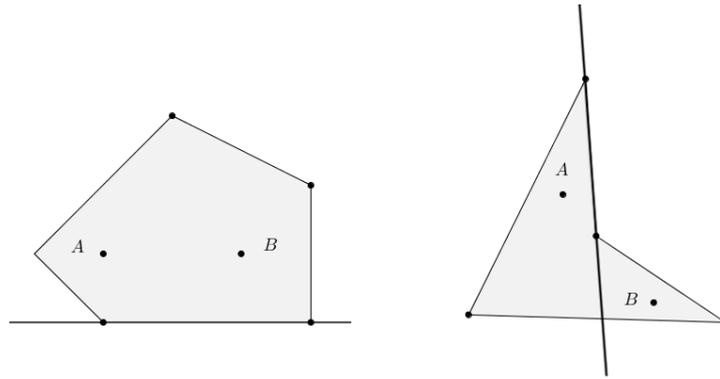


Figura 2 – Polígonos convexo (a esquerda) e não convexo (a direita).

Um polígono é *regular* se é convexo, todos os seus lados e todos os seus ângulos são iguais. Por exemplo, um triângulo equilátero é um 3-*ágono* regular e um quadrado é um 4-*ágono* regular.

Sejam  $P_{i-1}$ ,  $P_i$  e  $P_{i+1}$  vértices consecutivos de um polígono, chama-se *ângulo interno* desse polígono o ângulo convexo formado pelos segmentos  $\overline{P_{i-1}P_i}$  e  $\overline{P_iP_{i+1}}$  marcado na figura 3.

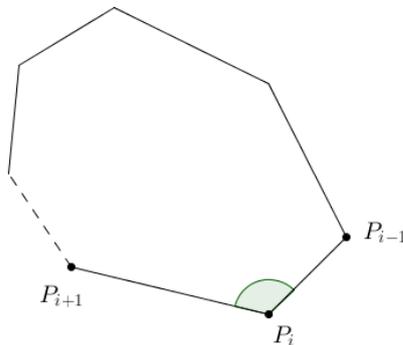


Figura 3 – Ângulo interno de um polígono

*Transformações geométricas* no plano são relações bijetivas  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que para cada ponto  $P$  do plano existe um ponto  $P'$  que é imagem única de  $P$  pela transformação geométrica  $T$ .

As transformações geométricas quando geram figuras congruentes, conservando características como medidas de ângulos, área e dimensões são chamadas de *isometrias*; e quando a imagem gerada é semelhante à inicial, sendo uma redução ou uma ampliação da mesma, chama-se *homotetia*. Ressaltaremos aqui somente as isometrias.

**Definição 2** Uma isometria euclidiana, ou isometria no  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que

preserva distância euclidiana, ou seja,

$$d(f(P_1), f(P_2)) = d(P_1, P_2), \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2.$$

São isometrias euclidianas as reflexões, as rotações e as translações.

### Reflexão

Seja  $r$  o eixo de simetria que faz corresponder a cada ponto  $P$  da figura original um ponto  $P'$ , sendo que a reta que passa pelos pontos  $P$  e  $P'$  é perpendicular à  $r$  e a distância  $d(P, r)$  é igual a  $d(P', r)$ .

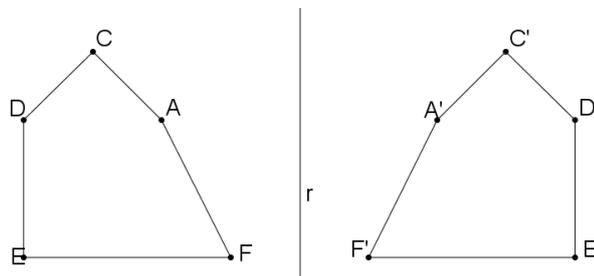


Figura 4 – Reflexão em relação a reta  $r$

### Rotação

Uma figura move-se uma amplitude  $\alpha$ , em torno de um ponto central  $G$ , chamado *centro de rotação*. Quando a rotação ocorre no sentido dos ponteiros do relógio diz-se que ela é negativa; e quando ocorre no sentido contrário é positiva.

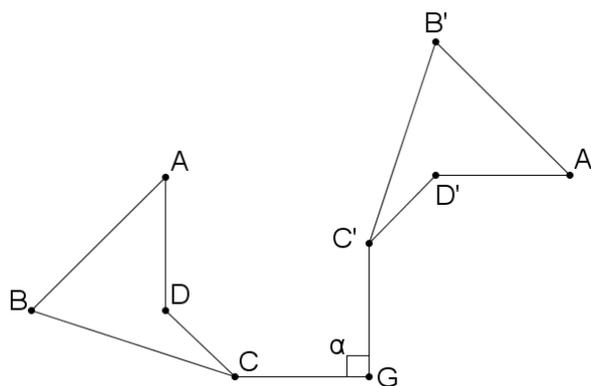


Figura 5 – Rotação de amplitude  $\alpha$  por um ponto  $G$

### Translação

É uma transformação geométrica que desloca a imagem original seguindo o sentido e direção de um vetor.

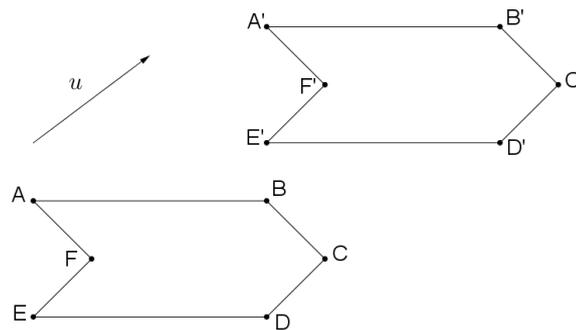


Figura 6 – Translação por um vetor  $\vec{u}$

Uma isometria especial usada na construção das tesselações é a obtida de um reflexão seguida de uma translação paralela ao eixo de reflexão, essa isometria é chamada *reflexão deslizante*:

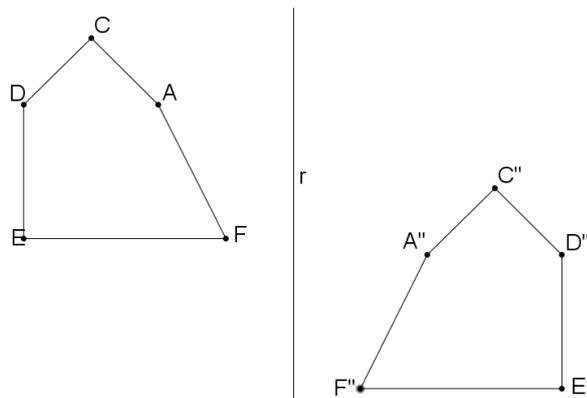


Figura 7 – Reflexão deslizante no plano

## 2.2 Tesselações no plano euclidiano

Podemos definir *tesselação* como sendo a cobertura de toda a superfície de um plano por figuras de modo que não existam espaços e nem sobreposições entre elas. Podemos considerar a tesselação de todo o plano ou de apenas uma região limitada, a primeira não é possível na prática, mas podemos obtê-la idealmente [2].

Denota-se por *nós* todos os vértices dos polígonos utilizados na tesselação e por *arestas* os segmentos de retas que tem como extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de um polígono. Vale ressaltar que em alguns polígonos da tesselação pode ocorrer um número maior de nós que vértices em sua fronteira, como é o caso do polígono IV (ver figura 8) que tem 3 vértices e 4 nós em sua fronteira.

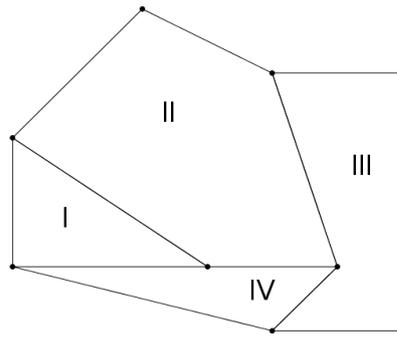


Figura 8 – Nós e aresta de uma tesselação parcial.

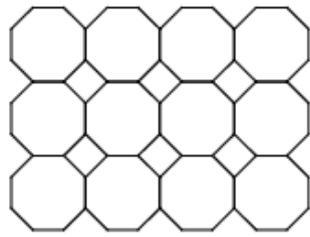
As tesselações podem ser classificadas de acordo com a forma como estão organizadas. Vejamos a seguir:

1. *Lado-a-lado* quando todos os polígonos vizinhos tiverem lados comuns e todo nó é vértice de um polígono.

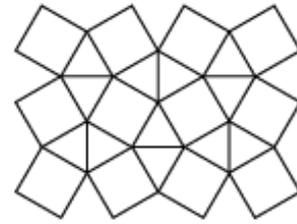


Figura 9 – Exemplos de tesselações lado a lado.

2. *Monoédrica* quando são utilizados polígonos congruentes entre si para fazer a tesselação do plano (mono = um, édrica = polígono) como podemos perceber na figura 9.
3. *Regular* quando os polígonos que a constitui são regulares, estão dispostos lado-a-lado e ao mesmo tempo é monoédrica.
4. *Semirregular* se a tesselação é constituída de dois ou mais tipos de polígonos regulares, mas apresenta sempre o mesmo tipo de nó. Existem oito tipos possíveis de semirregulares (veja figura 10) [5].



(4,8,8)



(4,3,4,3,3)

Figura 10 – Algumas tesselações semirregulares.

5. *Demirregular* é constituída por dois ou mais polígonos regulares, mas apresentando diferentes tipos de nós.

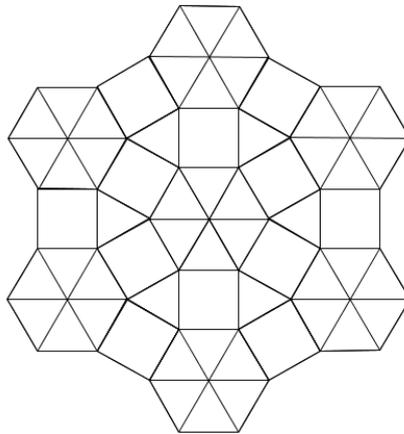


Figura 11 – Exemplo de tesselação demirregular.

6. *Periódicas* são tesselações que ao sofrer translações sobre si mesmo continuam invariantes, ou seja, se deslocarmos uma cópia dessa tesselação num determinado sentido e direção, em algum ponto essa cópia irá coincidir com a original mantendo o alinhamento dos ladrilhos.
7. *Aperiódicas* ou *não periódica* são tesselações onde não há um padrão que se repete, ou seja, após uma translação em qualquer sentido ou direção em momento algum irá coincidir com a tesselação original.

Às peças que permitem a composição de uma tesselação aperiódica chamamos de *protoladrilhos*.

Existem alguns outros termos relacionados a esse tema. A saber:

**Reticulados** - é qualquer subconjunto discreto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  com a propriedade de que  $x$  e  $y$  pertencem a  $\Lambda$ , então  $x + y$  e  $-x$  também pertencem a  $\Lambda$ .

**Pavimentações** - Pavimentar é preencher completamente uma superfície plana com figuras geométricas, de modo que não haja sobreposição nem espaço entre elas.

**Ladrilhos** - revestimento de pisos e paredes;

**Tiling** - do inglês significa ladrilho;

**Mosaicos** - decoração feita com peças pequenas de materiais diversos.

As definições acima podem ser encontradas em [6], [1] e [2].

### 2.3 Tesselações euclidianas

Uma *tesselação regular* do plano Euclidiano é uma cobertura total do plano por polígonos regulares, todos com o mesmo número de lados, sem superposição de tais polígonos, de modo que a fronteira entre essas figuras seja sempre arestas completas ou nós. Denotamos uma tesselação regular por  $\{p,q\}$ , onde  $q$  polígonos regulares com  $p$  lados encontram-se em cada vértice. A tesselação dual representaremos por  $\{q,p\}$ , onde  $p$  polígonos regulares com  $q$  lados encontram-se em cada vértice. Em particular, se  $p = q$  a tesselação é dita *auto-dual*.

**Proposição 1** *Existem apenas três tesselações regulares no Plano Euclidiano a saber, aquelas formadas somente por triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares.*

**Demonstração** *Considere a tesselação regular  $\{p,q\}$ . Note que, como temos  $q$  polígonos regulares ao redor de cada vértice, a medida do ângulo interno desse polígono é  $\frac{2\pi}{q}$ . Se dividirmos esse polígono de  $p$  lados em  $p$  triângulos, todos com vértices no centro do polígono e o lado oposto a esse vértice sendo um lado do polígono temos que o ângulo do centro mede  $\frac{2\pi}{p}$ .*

*Cada triângulo desses será isósceles com ângulos medindo  $\frac{2\pi}{2q}$ ,  $\frac{2\pi}{2q}$  e  $\frac{2\pi}{p}$ .*

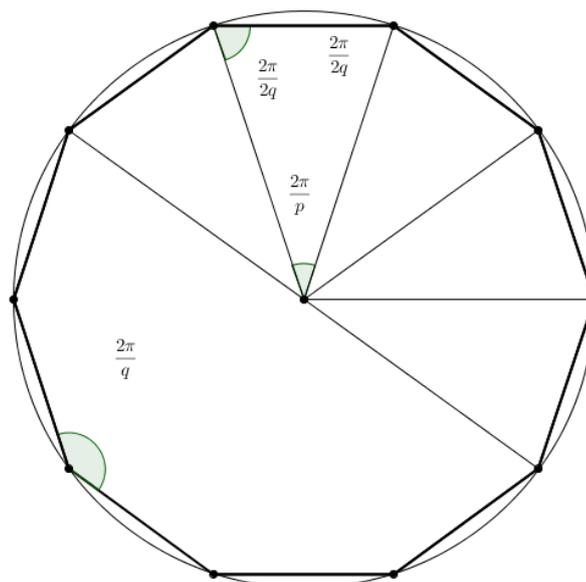


Figura 12 – Ângulos internos no polígono regular.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $\pi$  temos

$$\frac{2\pi}{q} + \frac{2\pi}{p} = \pi$$

Multiplicando tudo por  $pq$

$$2p\pi + 2q\pi = pq\pi$$

$$2p + 2q = pq$$

$$pq - 2p - 2q = 0$$

Assim,

$$(p-2)(q-2) = 4 \quad (2.1)$$

Como  $p$  e  $q$  são números inteiros e positivos, a equação acima tem apenas três soluções reais, como mostra a tabela 1.

Tabela 1 – Tesselações regulares

$p$	$q$	$\{p,q\}$
3	6	$\{3,6\}$
4	4	$\{4,4\}$
6	3	$\{6,3\}$

Concluimos então que existem apenas três tesselações regulares no Plano Euclidiano, as formadas por triângulos equiláteros  $\{3,6\}$ , por quadrados  $\{4,4\}$  ou por hexágonos regulares  $\{6,3\}$ . Como pode ser observado na figura 13.

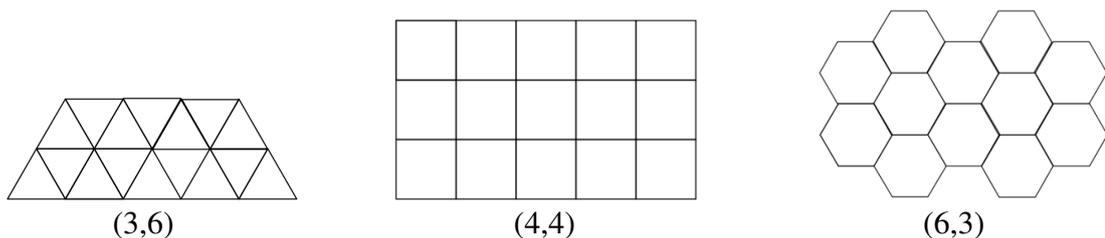


Figura 13 – Tesselações regulares no Plano Euclidiano.

Se considerarmos a geometria não-Euclidiana, geometria hiperbólica, ou seja a geometria obtida pela eliminação do 5º postulado de Euclides<sup>1</sup> obtemos infinitas tesselações do

<sup>1</sup> Postulado 5- E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

plano hiperbólico, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que  $\pi$ , logo a equação (2.1) se torna

$$(p-2)(q-2) > 4 \quad (2.2)$$

As tesselações duais são formadas por polígonos cujos vértices são os centros das figuras iniciais. A tesselação dual da  $\{3,6\}$  é a  $\{6,3\}$ , e a dual da  $\{6,3\}$  é a  $\{3,6\}$ , como uma é a dual da outra são chamadas de *duais recíprocas*. A tesselação  $\{4,4\}$  é auto-dual. Na figura 14 podemos visualizar as tesselações duais (linhas pontilhadas) das tesselações regulares  $\{3,6\}$ ,  $\{4,4\}$  e  $\{6,3\}$ , respectivamente.

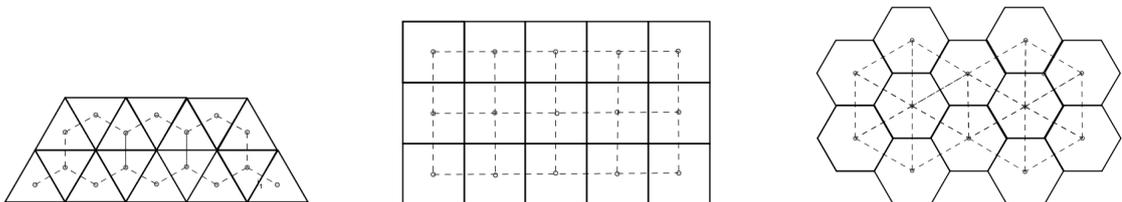


Figura 14 – Tesselações duais no Plano Euclidiano.

Nas arestas que se cruzam em um mesmo nó de uma tesselação marcamos os pontos médios, e com esses pontos construímos um novo polígono. Os polígonos formados por esses pontos médios são chamados *figuras vértice* [2]. Estas figuras formam dois tipos de tesselações, a regular  $(4,4,4,4)$  e a semirregular  $(3,6,3,6)$ , veja figura 15.

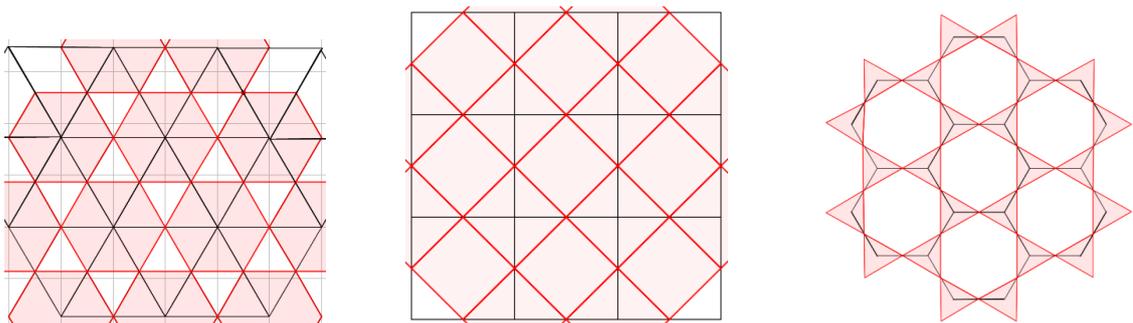


Figura 15 – Figuras vértice das tesselações regulares.

Temos então que uma tesselação é regular se, e somente se, as figuras vértice da tesselação são polígonos regulares, [2]. Isso se justifica porque a tesselação original é regular, ou seja, formada por polígonos regulares iguais, então as distâncias entre os pontos médios das arestas desses polígonos também terão medidas iguais. Portanto, essas novas distâncias formarão novos polígonos regulares.

## 2.4 Descobrimos padrões para tesselações semirregulares

Nessa seção mostramos que só existem os oito tipos de tesselações semirregulares. A demonstração ocorre da análise quantitativa de polígonos que estão dispostos ao redor de um vértice da tesselação, partindo do princípio de que todos os vértices tem o mesmo padrão. Os procedimentos utilizados nessa seção foram baseados em [7].

Para sabermos qual a quantidade mínima e máxima de polígonos regulares ao redor de um vértice nas tesselações basta analisar quais dentre os polígonos que pavimentam o plano apresentam maior e menor medida de ângulo interno. Sabemos que o polígono regular de menor ângulo interno é o triângulo equilátero, com três ângulos de  $60^\circ$ , e o polígono regular com maior medida de ângulo interno é o hexágono com seis ângulos de  $120^\circ$ . Logo, podemos ter, no máximo, seis polígonos em torno de um vértice e no mínimo três.

Para determinarmos quais são as tesselações semirregulares analisaremos quatro casos com respeito a quantidade de polígonos em torno de um vértice da tesselação.

1. **Três polígonos em torno de um vértice  $(k, l, m)$**  Dividiremos nosso estudo em dois casos:
  - a) Tesselações em que ao menos um dos valores  $k, l$  ou  $m$  é ímpar; Como os vértices de tipos  $(k, l, m)$ ,  $(l, k, m)$  e  $(l, m, k)$  são do mesmo tipo, sem perda de generalidade atribuiremos valores a  $k$ . Consideremos  $k = 3 \rightarrow (3, l, m)$

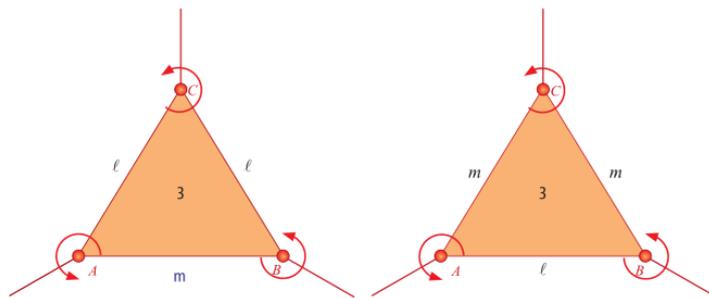


Figura 16 – Analisando os vértices da tesselação com triângulos.

Segundo a orientação dada pelas setas, e comparando os dois casos, observamos que os tipos dos vértices  $A$  e  $B$  são equivalentes. Para manter a condição do mesmo tipo de vértice em  $C$  devemos ter em  $l = m$ .

A tesselação será do tipo  $(3, l, l)$  e os ângulos internos de seus polígonos podem ser representados por

$$\frac{\pi}{3}, \frac{(l-2)\pi}{l} \text{ e } \frac{(l-2)\pi}{l}$$

Como já vimos anteriormente a soma dos ângulos ao redor de um vértice é  $2\pi$ , então

$$\frac{\pi}{3} + \frac{(l-2)\pi}{l} + \frac{(l-2)\pi}{l} = 2\pi$$

Daí

$$l = 12$$

Nesse caso temos apenas a tesselação (3,12,12)

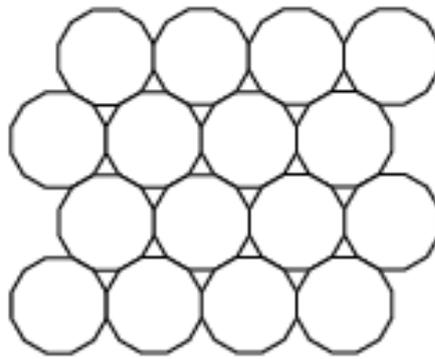


Figura 17 – Tesselação semirregular (3, 12, 12).

Agora consideremos  $k = 5 \rightarrow (5, l, m)$

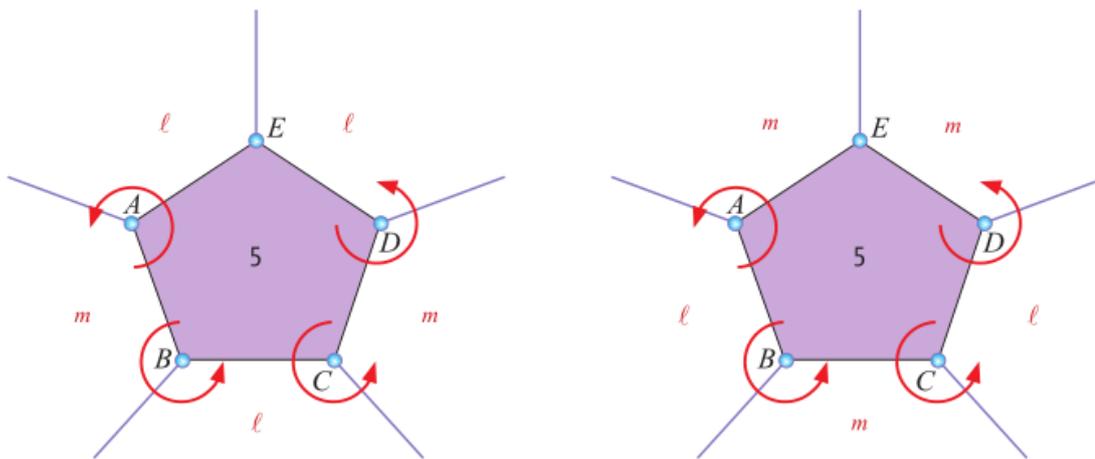


Figura 18 – Analisando os vértices da tesselação com pentágono.

Para manter a condição mesmo tipo de vértice em  $E$  devemos ter em  $l = m$

A tesselação será do tipo (3,l,l) e os ângulos internos de seus polígonos podem ser representados por

$$\frac{3\pi}{5}, \frac{(l-2)\pi}{l} \text{ e } \frac{(l-2)\pi}{l}$$

Assim

$$l = 6, \bar{6}$$

Como  $l$  representa a quantidade de lados de um polígono o valor encontrado não satisfaz e concluímos que não é possível a tesselação do tipo  $(5, l, m)$ .

De maneira geral, usando um raciocínio geométrico, igual aos usados anteriormente, podemos deduzir que se uma tesselação tem um padrão  $(k, l, m)$  e  $k$  é um número ímpar,  $k \geq 3$ , então  $m = l$ , ou seja, o ladrilhamento tem um padrão da forma  $(k, l, l)$  ou  $(k, m, m)$ .

Consideremos um  $k$ -ágono regular, em um ladrilhamento de padrão  $(k, l, m)$ , sendo  $k$  um número ímpar e  $k \geq 3$ . Enumeremos os  $k$  vértices consecutivos do  $k$ -ágono regular como sendo  $A_1 A_2 \dots A_k$ . Vamos agora supor que temos um  $l$ -ágono colado ao lado  $A_1 A_2$ . Teremos, então, um  $m$ -ágono colado ao lado  $A_2 A_3$ , um  $l$ -ágono colado ao lado  $A_3 A_4$ , e assim por diante.

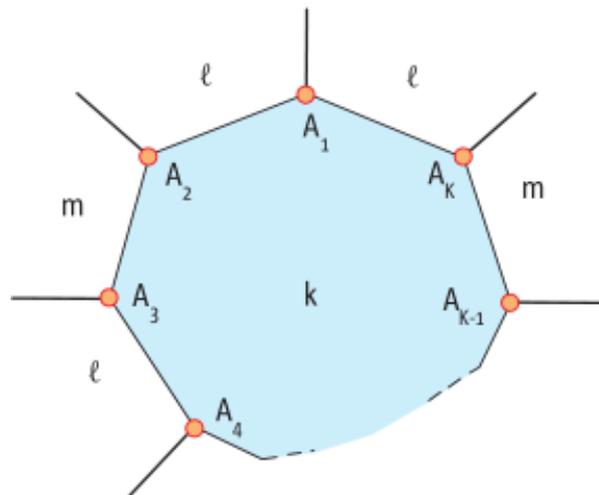


Figura 19 – Representação de uma tesselação de padrão  $(k, l, m)$ , com  $k$  ímpar

$$\left( \frac{(k-2)}{k} + \frac{(l-2)}{l} + \frac{(l-2)}{l} \right) \pi = 2\pi$$

$$k = \frac{2l}{(l-4)}$$

Como  $k$  e  $l$  são inteiros, devemos ter  $l-4 > 0 \rightarrow l-4 \geq 1$

$$k = \frac{2(l-4) + 8}{(l-4)}$$

$$k = 2 + \frac{8}{(l-4)}$$

Como  $l - 4 \geq 1$  temos

$$\frac{8}{l - 4} \leq 8$$

Então

$$k = 2 + \frac{8}{l - 4} \leq 2 + 8$$

Assim

$$k = \frac{2l}{l - 4} \leq 10$$

Como  $k$  é ímpar e  $3 \leq k \leq 10$ , então  $k = 3$  ou  $k = 5$  ou  $k = 7$  ou  $k = 9$

Tabela 2 – Tesselações semirregular com três polígonos ao redor de um vértice, sendo pelo menos um deles um triângulo equilátero.

$k$	$l$	$(k, l, l)$
3	12	(3, 12, 12)
5	6,66...	Não é possível
7	5,6	Não é possível
9	5,1	Não é possível

Podemos concluir que existe uma única tesselação, de padrão  $(k, l, m)$ , quando  $k = 3$ , o padrão  $(3, 12, 12)$ .

b) Ladrilhamentos em que os valores  $k, l$  e  $m$  são todos pares.

Suponha  $k = 4 \rightarrow (4, l, m)$

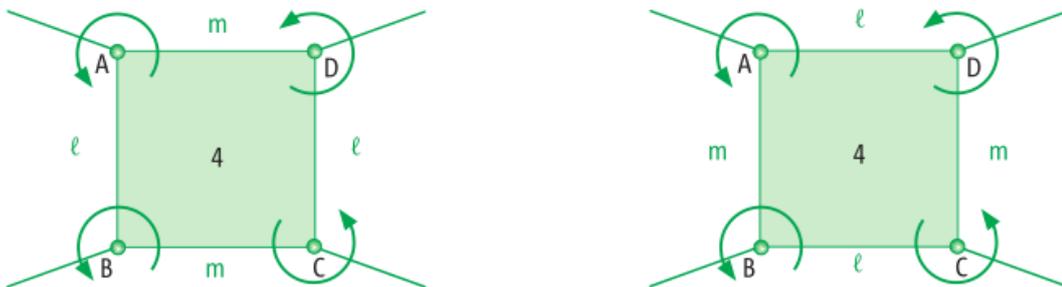


Figura 20 – Analisando os vértices da tesselação sem triângulos

Segundo a orientação dada pelas setas, e comparando os dois casos, observamos que os tipos dos vértices  $A, B, C$  e  $D$  são equivalentes.

A tesselação será do tipo  $(4, l, m)$  e os ângulos internos de seus polígonos medem

$$\frac{\pi}{2}, \frac{(l - 2)\pi}{l} \text{ e } \frac{(m - 2)\pi}{m}$$

Assim,

$$l = \frac{4m}{m-4}$$

Tabela 3 – Padrão (4,m,l)

<b>m</b>	<b>l</b>	<b>Padrão (4, m, l)</b>
6	12	(4, 6, 12)
8	8	(4, 8, 8)
10	$\frac{40}{6}$	Não é possível
12	6	(4, 12, 6)

Como os padrões (4, 6, 12) e (4, 12, 6) são equivalentes podemos concluir que quando  $k, l, m$ , são todos pares existem duas tesselações, de padrão (4,  $l, m$ ) e (4, 6, 12) e (4, 8, 8)

Suponha  $k = 6 \rightarrow (6, l, m)$

A tesselação será do tipo (6,  $l, m$ ) e os ângulos internos de seus polígonos podem ser representados por

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{(l-2)\pi}{l} \text{ e } \frac{(m-2)\pi}{m}$$

Assim

$$l = \frac{3m}{(m-3)} \text{ ou } m = \frac{3l}{(l-3)}$$

Como  $l$  e  $m$  são números inteiros  $m > 3$  ou  $l > 3$

Tabela 4 – Padrão (6,m,l)

<b>m</b>	<b>l</b>	<b>Padrão (6, l, m)</b>
4	12	(6, 12, 4)
6	6	(6, 6, 6)
8	4,8	Não é possível
10	4,3	Não é possível
12	4	(6, 4, 12)

Podemos concluir que quando  $k, l, m$ , são todos pares existem duas tesselações semirregulares de padrão (6,  $l, m$ )

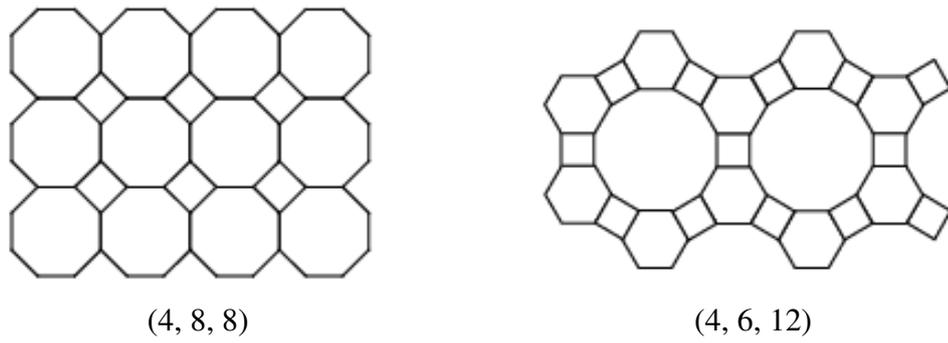


Figura 21 – Tesselações semirregulares de padrão  $(k, l, m)$  com três polígonos em torno de um vértice quando  $k, l, m$ , são todos pares.

**2. Quatro polígonos em torno de um vértice representado pelo padrão  $(k, l, m, n)$**

Nossa investigação começará da possibilidade (ou impossibilidade) de eles existirem sem nenhum triângulo sequer.

a) Ladrilhamentos que fazem uso de triângulos.

Se considerarmos  $k = 3$

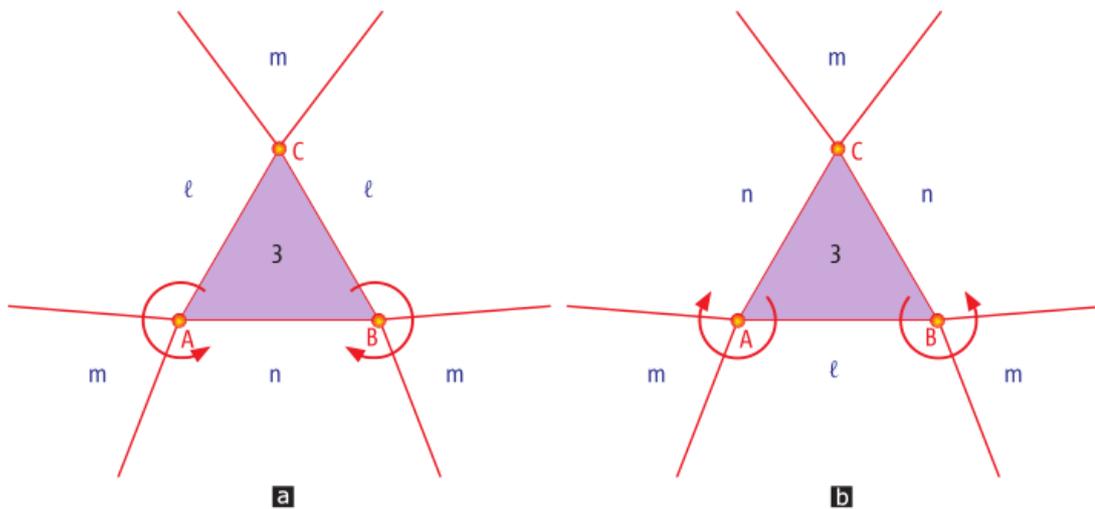


Figura 22 – Analisando os vértices da tesselação  $(k, l, m, n)$  com triângulos.

Analisando os casos (a) e (b) vemos que os vértices A e B são equivalentes, para manter o mesmo padrão no vértice C devemos ter  $l = n$ .

A tesselação será do tipo  $(3, l, m, l)$  e os ângulos internos de seus polígonos podem ser representados por

$$\frac{\pi}{3}, \frac{(l-2)\pi}{l}, \frac{(m-2)\pi}{m} \text{ e } \frac{(l-2)\pi}{l}$$

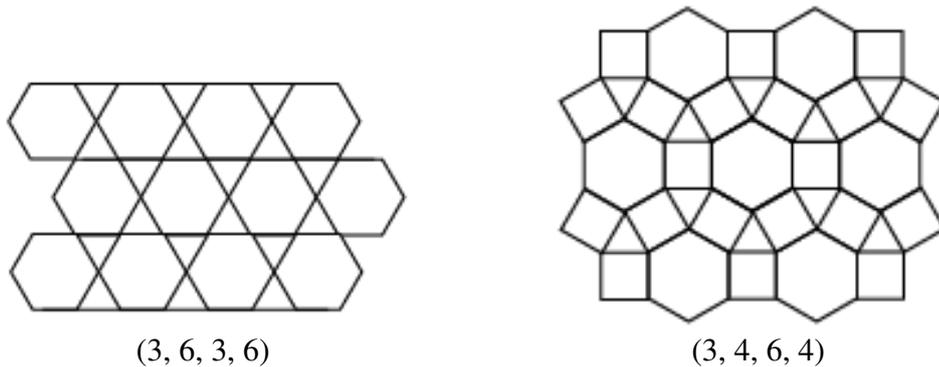
Logo

$$l = \frac{6m}{(2m-3)}$$

Tabela 5 – Padrão (k,l,m,l)

m	l	(k, l, m, l)
3	6	(3, 6, 3, 6)
4	4,8	Não é possível
5	4,3	Não é possível
6	4	(3, 4, 6, 4)
7	3,8	Não é possível

É suficiente analisarmos até  $m = 7$ , pois  $l \geq 4$ . Podemos concluir que nas tesselações com quatro polígonos ao redor de um vértice com  $k, l, m, n$  lados, sendo  $l = n$ , existem duas tesselações semirregulares de padrão  $(3, l, m, l)$

Figura 23 – Tesselações semirregulares de padrão  $(3, l, m, l)$ .

b) Ladrilhamentos que não fazem uso de triângulos.

Como não pode haver triângulos nessa tesselação o menor número de lados possíveis é quatro, então considere  $k = 4 \rightarrow (4, l, m, n)$ .

Sabendo que a soma dos ângulos adjacentes em cada vértice é  $2\pi$  temos uma possibilidade notória

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Como não pode haver triângulo nessa tesselação esse é o único caso viável.

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{5} > 2\pi$$

Podemos concluir que nas tesselações com quatro polígonos ao redor de um vértice com  $k, l, m, n$  lados, sendo  $k = 4$ , existe uma única tesselação de padrão  $(4, 4, 4, 4)$  que é do tipo regular.

### 3. Cinco polígonos em torno de um vértice representado pelo padrão $(k, l, m, n, p)$

Nossa investigação começará pela possibilidade (ou impossibilidade) de eles existirem sem nenhum triângulo sequer.

a) Ladrilhamentos que fazem uso de triângulos;

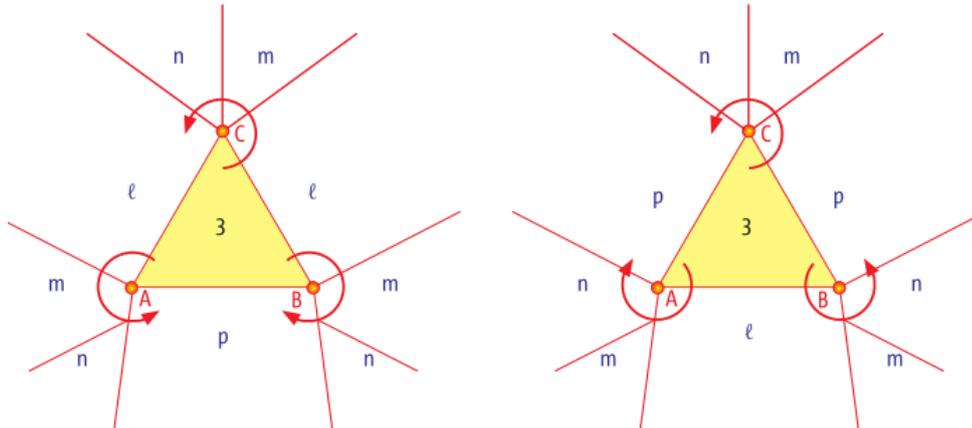


Figura 24 – Analisando os vértices da tesselação  $(3, l, m, n, l)$

Analisando os dois casos da Figura 24 vemos que os vértices  $A$  e  $B$  são equivalentes, para manter o mesmo padrão no vértice  $C$  devemos ter  $l = p$ .

O padrão dessa tesselação é  $(3, l, m, n, l)$ . Dessa forma se houver somente um triângulo os outros polígonos devem no mínimo quatro lados e a soma dos ângulos ao redor de um vértice é dada por

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{5} > 2\pi$$

Logo essa tesselação deve ter três triângulos gerando assim as possibilidades  $(3, 3, m, n, 3)$  ou  $(3, l, 3, 3, l)$

- Se no padrão  $(3, 3, m, n, 3)$  temos  $m \neq n$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  as medidas do ângulo interno dos polígono de  $m$  lados e  $n$  lados, respectivamente, temos que a somas dos ângulos ao redor de um vértice da tesselação é

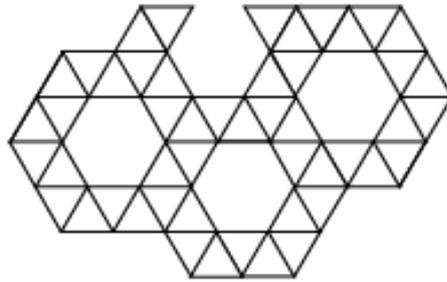
$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \alpha + \beta = 2\pi$$

Logo,

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Temos uma solução viável para  $\alpha \neq \beta \frac{\pi}{3}$  e  $\frac{2\pi}{3}$ , então

$$m = 3 \text{ e } n = 6$$



(3,3,3,6,3)

Figura 25 – Tesselação de padrão  $(3, 3, m, n, 3)$  quando  $m = n$ .

Se no padrão  $(3, 3, m, n, 3)$  temos  $m = n$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  as medidas do ângulo interno dos polígono de  $m$  lados e  $n$  lados, respectivamente, temos que a somas dos ângulos ao redor de um vértice da tesselação é

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \alpha + \beta = 2\pi$$

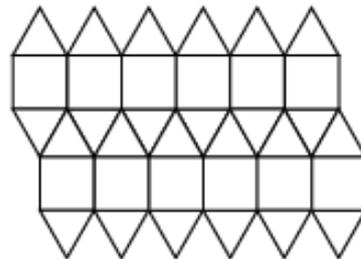
Logo,

$$\alpha + \beta = \pi$$

$$m = n \rightarrow \alpha = \beta$$

Temos uma solução  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ , então

$$m = n = 4$$



(3, 3, 4, 4, 3)

Figura 26 – Tesselação de padrão  $(3, 3, m, n, 3)$  quando  $m = n$ .

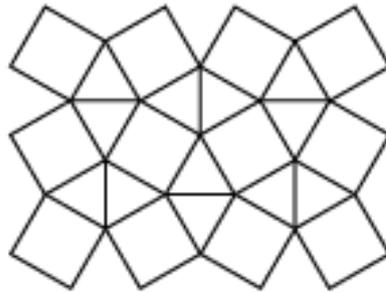
- Se no padrão  $(3, l, 3, 3, l)$  temos  $\alpha$  a medida do ângulo interno dos polígono de  $l$  lados, temos que a somas dos ângulos ao redor de um vértice da tesselação é

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \alpha + \alpha = 2\pi$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

A tesselação de padrão  $(3, l, 3, 3, l)$  tem solução única



$(3, 4, 3, 3, 4)$

Figura 27 – Tesselação de padrão  $(3, l, 3, 3, l)$

b) ladrilhamentos que não fazem uso de triângulos.

Não tendo triângulos nessa tesselação o polígono de menor ângulo é o quadrado, a soma dos ângulos desses quadrados ao redor de um vértice é

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} > 2\pi$$

Logo não há possibilidade de ter cinco polígonos ao redor de um vértice sem que haja triângulos.

#### 4. Seis polígonos em torno de um vértice representado pelo padrão $(k, l, m, n, o, p)$

Esse é o caso do máximo de polígonos ao redor de um vértice da tesselação já mencionado no início  $(6, 6, 6, 6, 6, 6)$ .

### 3 TESSELAÇÕES EUCLIDIANAS

Tesselação é um conceito matemático com ampla aplicação em diversos setores. Nesse capítulo ressaltaremos algumas dessas aplicações dentro da diversidade de flora e fauna, na presença forte e marcante nas obras de arte e na própria matemática com o problema de empacotamento de esferas.

#### 3.1 Tesselações na natureza

A matemática é uma ciência que busca a compreensão das leis que regem a natureza, e a simetria é uma das características analisadas que mais chama atenção do homem, pela harmonia e beleza. A simetria ou assimetria das tesselações são comuns em plantas como na casca do abacaxi e das pinhas, e em animais recobertos por uma pele toda segmentada com peças que se encaixam harmonicamente umas nas outras como podemos perceber nas escamas do peixe, no casco do jabuti e do tatu, na pele do jacaré e da girafa e nas colmeias de algumas abelhas.



Figura 28 – Tesselações na natureza.

Enfatizaremos aqui o caso do formato dos alvéolos nas colmeias das abelhas que possibilita uma maior capacidade de armazenamento por quantidade de cera utilizada. Veremos o porque do formato dos alvéolos serem hexagonais.

Começaremos pelas possibilidades de tesselar uma superfície por polígonos congruentes. Em capítulos anteriores já mencionamos que as três únicas formas regulares possíveis de serem utilizadas na tesselação de uma superfície euclidiana são triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular. Considere então os três prisma triangular regular, quadrangular regular e hexagonal regular, com bases de mesmo perímetro  $p$  e mesma altura  $h$ .

Analisaremos então a razão entre a capacidade de armazenamento e a área total de

cada um dos três prismas possíveis de formar uma colmeia. Como os prismas tem a mesma altura  $h$  e mesmo perímetro na base  $p$ , a áreas laterais de todos serão equivalentes e dada por

$$A_L = ph.$$

Para calcularmos as áreas das bases iniciaremos pela base cuja forma é um triângulo equilátero de perímetro  $p$ , então, cada lado  $l = \frac{p}{3}$ . A área  $A_{B1}$  desse triângulo é dada por

$$A_{B1} = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$A_{B1} = \frac{p^2 \sqrt{3}}{36}.$$

Encontraremos agora a área  $A_{B2}$  da base em forma de quadrado de perímetro  $p$  e cada lado  $l = \frac{p}{4}$

$$A_{B2} = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$A_{B2} = \frac{p^2}{16}.$$

Por último encontraremos a área  $A_{B3}$  da base em forma de hexágono regular que tem perímetro  $p$  e cada lado  $l = \frac{p}{6}$ .

$$A_{B3} = 6 \frac{\left(\frac{p}{6}\right)^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$A_{B3} = \frac{p^2 \sqrt{3}}{24}.$$

Calculemos agora a capacidade de armazenamento de cada prisma citado. Para isso considere desprezível a espessura das paredes dos alvéolos.

A capacidade  $V$  de qualquer prisma reto é dada pelo produto da área da base pela sua altura, ou seja,

$$V = A_B h.$$

Utilizando a relação acima, temos que a capacidade  $V_1$  do prisma triangular regular é dada por

$$V_1 = \frac{p^2 h \sqrt{3}}{36},$$

do prisma quadrangular regular temos que a capacidade  $V_2$  é dada por

$$V_2 = \frac{p^2 h}{16}$$

e a capacidade  $V_3$  do prisma hexagonal regular é dada por

$$V_3 = \frac{p^2 h \sqrt{3}}{24}.$$

Como os alvéolos tem uma das extremidades abertas, a área total  $A_T$  de cada prisma, sem tampa, é dada pela soma da área da base  $A_B$  com a área lateral  $A_L$ , ou seja,

$$A_T = A_B + A_L.$$

A área total  $A_{T1}$  do prisma triangular regular será então

$$A_{T1} = p^2 h \left( \frac{\sqrt{3}}{36h} + \frac{1}{p} \right),$$

enquanto a área total  $A_{T2}$  do prisma quadrangular regular é dada por

$$A_{T2} = p^2 h \left( \frac{1}{16h} + \frac{1}{p} \right),$$

e a área total  $A_{T3}$  do prisma hexagonal regular é dada por

$$A_{T3} = p^2 h \left( \frac{\sqrt{3}}{24h} + \frac{1}{p} \right).$$

Fazendo agora a razão  $R$  entre a capacidade  $V$  e a área total  $A_T$  de cada prisma para assim analisar qual das três apresenta maior capacidade por unidade de área (cera utilizada)

$$R = \frac{V}{A_T},$$

temos que a razão  $R_1$  para o prisma triangular regular é dada por

$$R_1 = \frac{ph\sqrt{3}}{\sqrt{3}p + 36h}.$$

A razão  $R_2$  para o prisma quadrangular regular é dada por

$$R_2 = \frac{ph}{p + 16h},$$

multiplicando tudo por  $\sqrt{3}$  temos

$$R_2 = \frac{ph\sqrt{3}}{\sqrt{3}p + 16\sqrt{3}h}$$

e a razão  $R_3$  para o prisma hexagonal regular é dada por

$$R_3 = \frac{ph\sqrt{3}}{\sqrt{3}p + 24h}.$$

Comparando as três razões encontradas temos que

$$R_3 > R_2 > R_1$$

Portanto o prisma hexagonal regular apresenta maior capacidade de armazenamento por unidade de área, sendo assim a possibilidade mais econômica na construção dos alvéolos.

### 3.2 A presença das tesselações na arte

Associando Tesselações à arte o termo mais comum é o *mosaico* que para Imenes, consiste no recobrimento de superfícies com ladrilhos, pedras, tacos de madeira ou outros revestimentos. Essa arte é uma técnica antiga presente nas civilizações assíria, babilônia, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões presentes em pisos, tetos e painéis de parede atestando a relação entre padrões e arte da decoração. [8] Utilizada ainda hoje com finalidade decorativa essa técnica é encontrada em pisos, paredes, quadros, tapetes, tampos de mesa, entre outros. Algumas dessas decorações podem ser observados na figura 29.



Figura 29 – Decorações com mosaicos.

Veremos nessa seção três artistas que se destacam na arte de criar mosaicos, *Maurits Cornelis Escher* que explorou em algumas de suas obras Tesselações com figuras curiosas curiosamente matemáticas e *Roger Penrose* que conseguiu encontrar Tesselações não periódicas.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês que ganhou o mundo com suas litogravuras que impressionam pela sofisticação e geometria empregados. Em seus desenhos, conseguia representar com maestria o plano bidimensional no papel utilizando efeitos como ilusão de ótica, modificava os traços nos desenhos, mas sem alterar o polígono original.

A obra de Escher é um exemplo concreto de como as imagens podem facilitar a compreensão de assuntos aparentemente complexos. Através das suas pavimentações, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões, tornando-as mais simples aos nossos olhos [9].

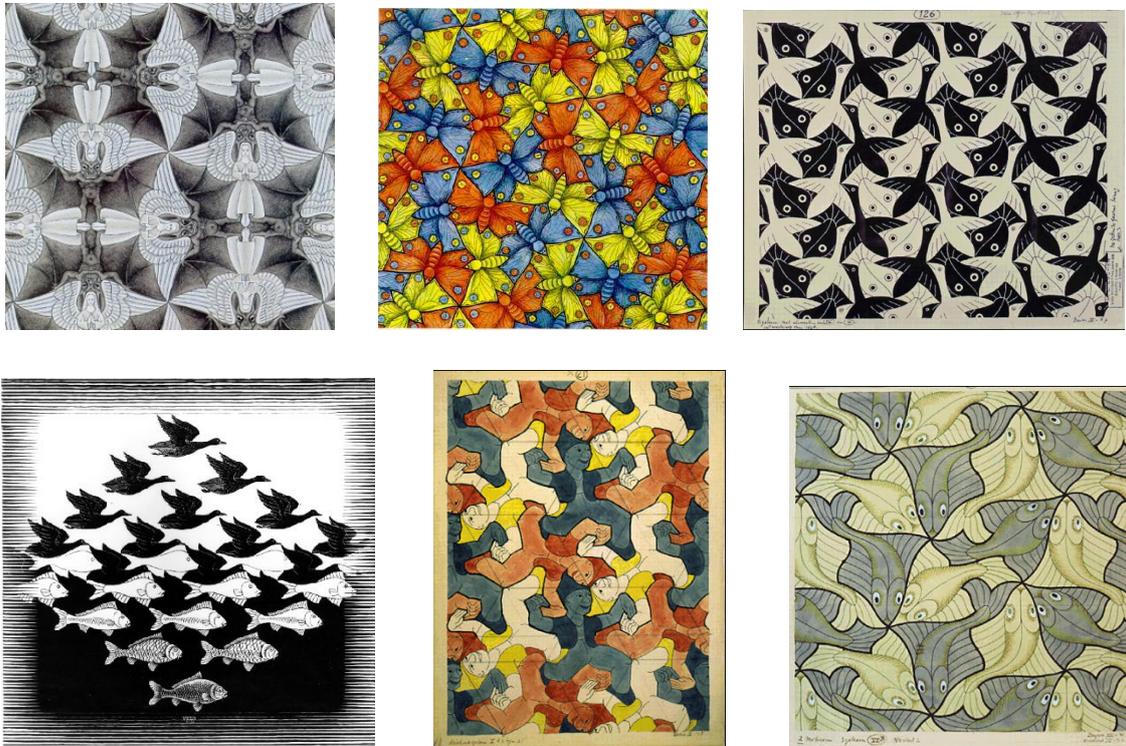


Figura 30 – Algumas obras de Escher disponíveis em <http://www.mcescher.com/>.

Roger Penrose é físico e matemático inglês reconhecido mundialmente pelos trabalhos desenvolvidos nessas duas áreas, em particular pelas suas contribuições para a relatividade, a cosmologia e nas pavimentações aperiódicas.

Admirador das obras de Escher, Penrose dedicou-se ao estudo das pavimentações, investigando a existência, ou não, de ladrilhos que pavimentassem o plano, sem gerar repetição de padrão. Após anos de investigações Penrose chegou a três conjuntos de protoladrilhos com seis, dois e dois ladrilhos respectivamente.

### **Conjunto de dois protoladrilhos de Penrose**

Penrose chegou a dois conjuntos de protoladrilhos o primeiro com dois quadriláteros, um côncavo e outro convexo, que mais tarde John Conway lhes atribuiu o nome de *dart* (seta) e *kite* (papagaio), respectivamente. Essas duas figuras podem ser obtidas a partir de um losango cujos ângulos internos medem  $36^\circ$  e  $72^\circ$ .

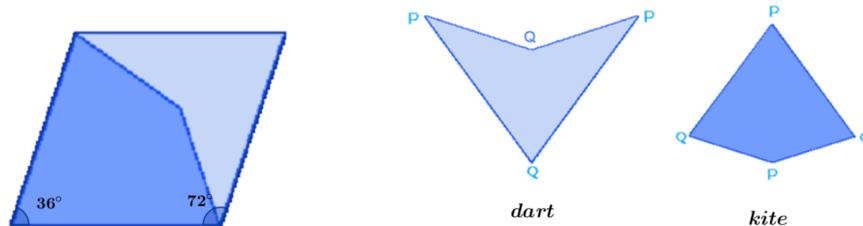


Figura 31 – Conjunto com dois protoladrilhos.

Esses quadriláteros podem ser construídos a partir do pentágono regular. [10]

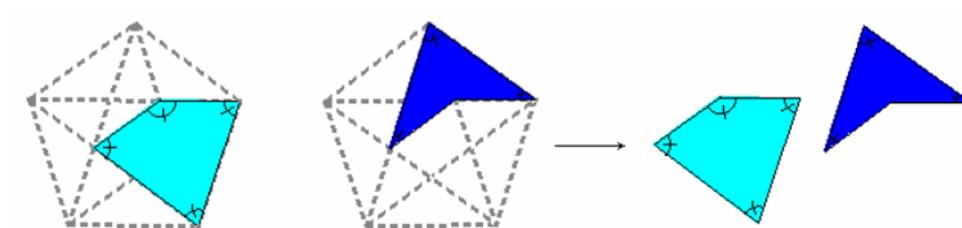


Figura 32 – Dart e kite construídos a partir de um pentágono regular.

Existem inúmeras possibilidades de se obter pavimentações periódicas utilizando os ladrilhos dart e kite, para que a pavimentação seja aperiódica é necessário unir vértices com a mesma letra. Na figura 33 podemos visualizar uma das pavimentação mais importantes e conhecida de Penrose.

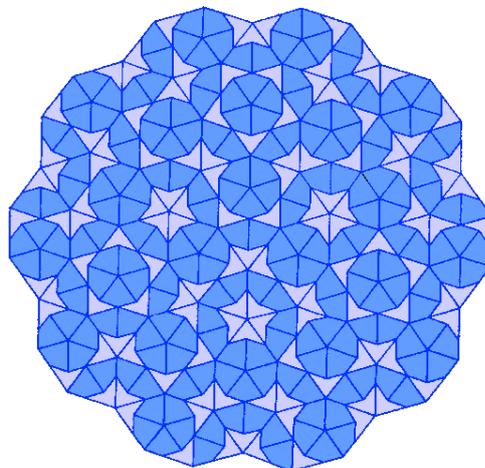


Figura 33 – Pavimentação com dois protoladrilhos (dart e kite).

O segundo conjunto é formado por dois losangos designados por rombos aperiódicos,

ou seja, figuras com lados de mesma medida, porém com ângulos internos diferentes, um tem ângulos medindo  $72^\circ$  e  $108^\circ$  e o outro  $36^\circ$  e  $144^\circ$ . (veja figura 34).

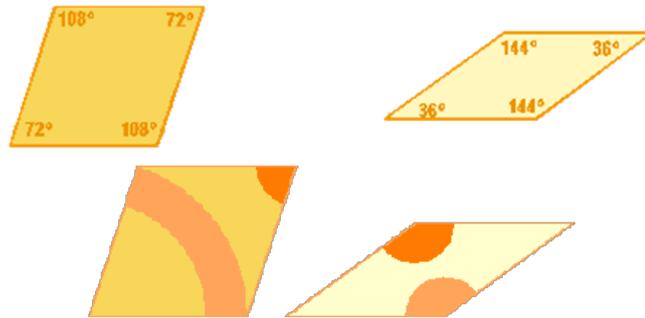


Figura 34 – Rombos aperiódicos das tesselações de Penrose.

Assim como o primeiro conjunto de protoladrilhos os rombos aperiódicos também podem ser construídos a partir do pentágono regular, veja na figura 35.

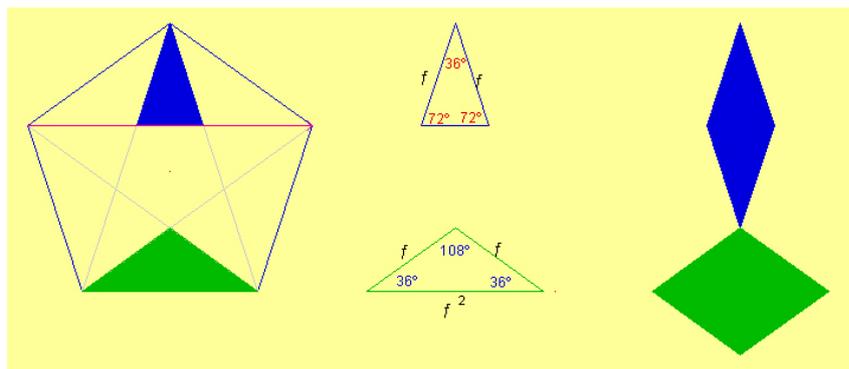


Figura 35 – Construção dos rombos aperiódicos a partir do pentágono regular.

Visualizamos na figura 34 uma pavimentação construída pelos rombos aperiódicos de Penrose.

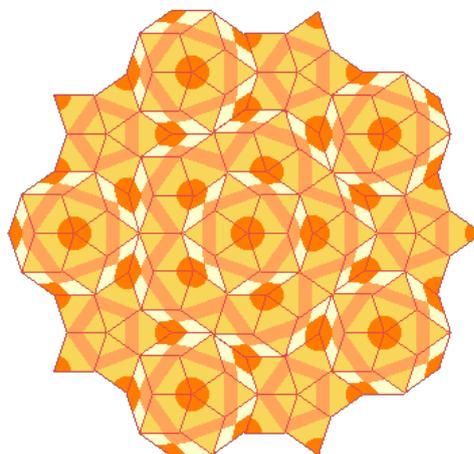


Figura 36 – Pavimentação com dois protoladrilhos (rombos aperiódicos).

### Conjunto de seis protoladrilhos de Penrose

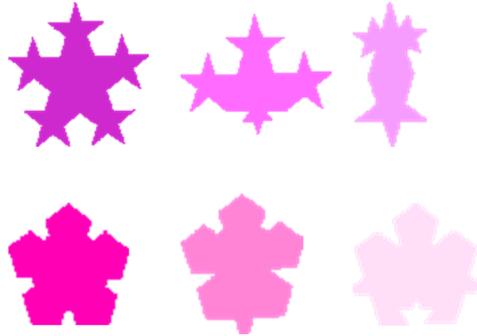


Figura 37 – Conjunto com seis protoladrilhos.

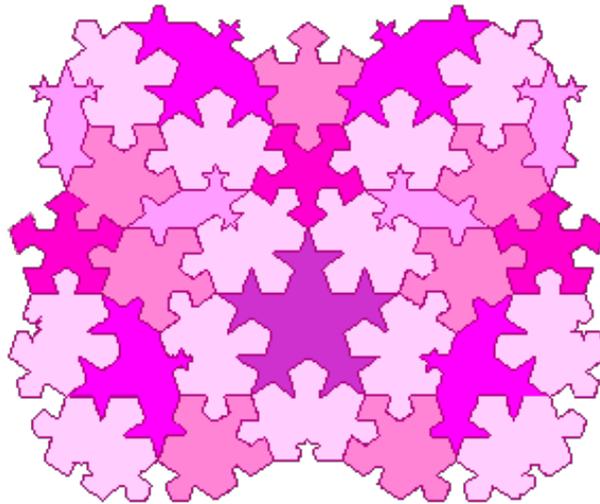


Figura 38 – Pavimentação com seis protoladrilhos.

### 3.3 Aplicação na matemática

Uma aplicação de tesselações dentro da própria matemática é um problema clássico de empacotamento esférico, que consiste em encontrar uma disposição de esferas idênticas no espaço de modo que o espaço vazio entre elas seja o mínimo possível e a interseção entre duas esferas quaisquer seja no máximo um ponto.

Representando esse empacotamento no  $\mathbb{R}^2$  pelos centros das esferas e seus raios temos duas disposições possíveis, na primeira os círculos de raio  $r$  estão inscritos em quadrados de lado  $l$  e, na segunda, círculos de raio  $r$  inscritos em hexágonos regulares de lado  $l$ , veja figura 39.

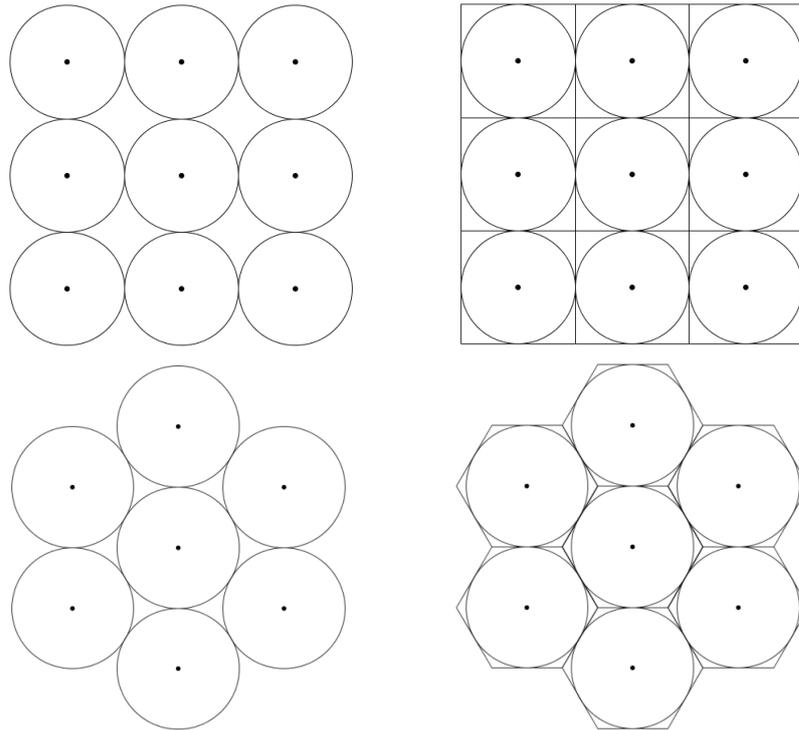


Figura 39 – Empacotamento de círculos no plano.

Para analisarmos qual dessas opções representa o empacotamento ideal utilizamos o cálculo da densidade do empacotamento que indica que percentual do espaço é ocupado pelo círculo. Essa densidade é dada pela divisão da área do círculo pela área da figura circunscrita.

No caso do círculo de raio  $r$  inscrito em um quadrado de lado  $l$ , temos  $l = 2r$ .

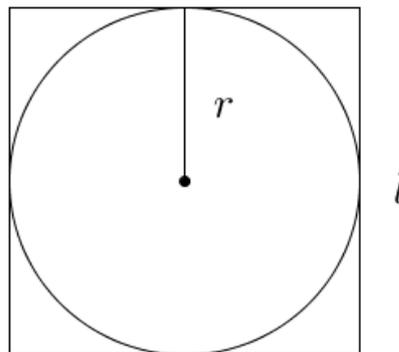


Figura 40 – Círculo de raio  $r$  inscrito no quadrado de lado  $l$

A área do círculo  $A_C$  é dada por

$$A_C = \pi r^2$$

A área do quadrado  $A_Q$  é dada por

$$A_Q = l^2$$

Como  $l = 2r$ , obtemos

$$A_Q = 4r^2$$

A densidade desse empacotamento será então

$$d = \frac{A_C}{A_Q}$$

Substituindo os valores de  $A_C = \pi r^2$  e  $A_Q = 4r^2$  na relação acima temos

$$d = \frac{\pi}{4}$$

$$d \approx 0,785$$

O que nos permite dizer que o círculo ocupa cerca de 78% da área do quadrado, deixando ainda 22% de área livre.

No caso do círculo de raio  $r$  inscrito em um hexágono de lado  $l$ , para obtermos a relação entre o raio  $r$  do círculo e o lado  $l$  do hexágono, utilizamos o teorema de Pitágoras no triângulo em destaque na figura 41

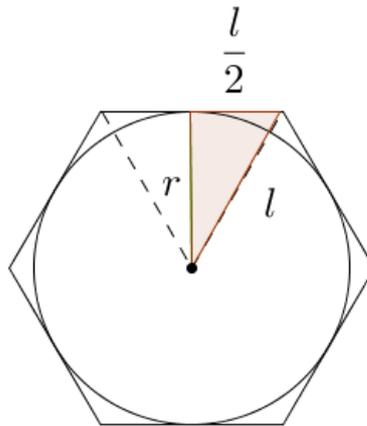


Figura 41 – Círculo de raio  $r$  inscrito no hexágono regular de lado  $l$

$$l^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = \frac{4}{3}r^2$$

A área do hexágono  $A_H$  é dada por

$$A_H = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$$

Como

$$l^2 = \frac{4}{3}r^2$$

Temos

$$A_H = 2\sqrt{3}r^2$$

A densidade desse empacotamento será então

$$d = \frac{A_C}{A_H}$$

Substituindo os valores de  $A_C = \pi r^2$  e  $A_H = 2\sqrt{3}r^2$  na relação acima temos

$$d = \frac{\pi}{(2\sqrt{3})}$$

$$d \approx 0,9069$$

O que nos permite dizer que o círculo ocupa cerca de 90% da área do hexágono, deixando apenas 10% da área do quadrado livre. Essa densidade é maior que a primeira, logo, concluímos que o segundo empacotamento é mais denso que o primeiro.

No caso de empacotamento de esferas no  $\mathbb{R}^3$  considere uma grande região vazia, tal como um galpão retangular, e analise quantas esferas podem ser empacotadas nessa região. Se ao invés de esferas tentarmos empacotar blocos cúbicos de construção infantil, a resposta seria fácil. Poderíamos preencher completamente o espaço e então o número de blocos empacotados seria aproximadamente igual ao volume do galpão dividido pelo volume de um dos blocos. Mas esferas não se encaixam juntas tanto quanto cubos, e existe sempre algum espaço desperdiçado entre elas. Não importa como as esferas sejam arranjadas, em torno de  $\frac{1}{4}$  do espaço não será usado [11].

Um arranjo comum é mostrado na figura 42, no qual os centros das esferas formam o reticulado cúbico de face centrada (de centro na face). Nesse empacotamento as esferas ocupam  $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,7405\dots$  do espaço total. Portanto, dizemos que o empacotamento reticulado cúbico de face-centrada tem densidade 0,7405....

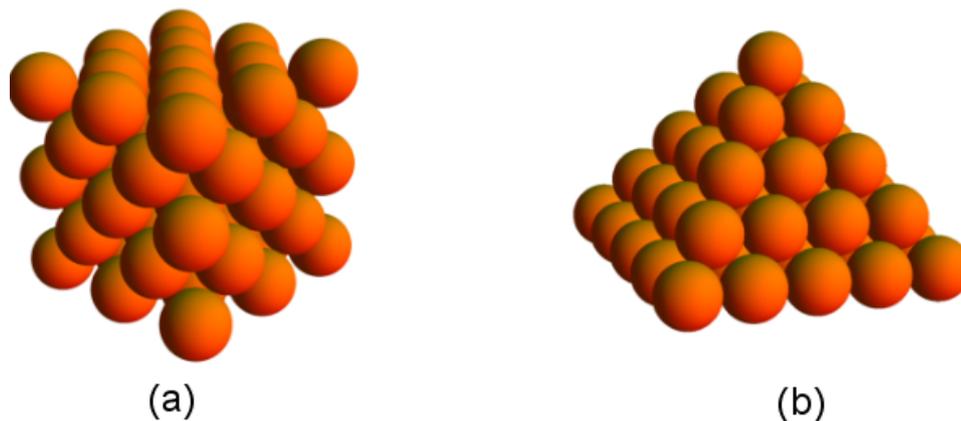


Figura 42 – (a) Empacotamento de esferas associado ao reticulado cúbico de face centrada e (b) uma pilha de esferas retiradas do empacotamento (a)

Gauss, em 1831, mostrou que o reticulado cúbico face-centrada é o empacotamento reticulado mais denso em três dimensões. Mais tarde em 1998, Thomas Callister provou a conjectura de Kepler<sup>1</sup>, afirmando que a maneira mais eficiente de empacotar esferas no espaço euclidiano é no formato do reticulado cúbico face-centrada (figura 42(a)). Ou seja, a densidade máxima de um empacotamento de esferas em 3 dimensões é 0,7405...

Este problema de densidade do empacotamento esférico fazia parte da lista de problemas abertos de Hilbert, em 1900, e tem conexão com outros problemas de outros ramos da matemática, como por exemplo, a geometria hiperbólica.

Existem aplicações diretas de empacotamento reticulado em teoria dos números, por exemplo, soluções de equações diofantinas, e em geometria dos números. Outra importante aplicação está ligada às comunicações digitais, com questões típicas de design de comunicação para rádio móvel. Em duas dimensões, círculos em um empacotamento bidimensional podem representar fibras óticas, e em três dimensões existem muitas aplicações em química, física e biologia.

<sup>1</sup> A conjectura de Kepler<sup>2</sup> afirma que a maior densidade que pode ser alcançada por qualquer arranjo de esferas, regular ou irregular é no reticulado cubo de face-centrada.

#### 4 Uma ferramenta no ensino de geometria plana

Nesse capítulo abordaremos o que os currículos oficiais orientam sobre interdisciplinaridade e contextualização no ensino da matemática, bem como sugestões didáticas com usos de tesselações como motivação para uma aprendizagem significativa de geometria plana para o ensino fundamental e médio. O avanço tecnológico e a crescente quantidade de informações que surgem a todo instante vem promovendo mudanças relativas na educação. O fazer pedagógico requer, hoje, mais que um acúmulo de informações, memorizações e resolução dos exercícios de fixação, faz-se necessário uma ressignificação dos conteúdos através da contextualização e mostrar que os conhecimentos não são dissociados por meio da interdisciplinaridade. Para os PCNs esses critérios de contextualização e interdisciplinaridade consistem no

... potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. [12]

Com esse novo olhar para educação é que o ensino de Geometria precisa se adequar de modo que desperte o interesse do aluno para que através dessa ciência ele possa compreender e interagir no meio em que está inserido. De acordo com as orientações dos PCNs o ensino de geometria no ensino fundamental deve propiciar uma reflexão inicial através de experimentações e deduções informais acerca de suas propriedades, enquanto que no ensino médio deve haver um aprofundamento dessas ideias de modo que o educando reconheça e utilize em situações diversas os postulados e teoremas ali trabalhados. [13] Moldes para construção do kit de polígonos regulares Nesse sentido, o papel do professor surge como uma peça importante no processo de ensino-aprendizagem, buscando novas estratégias de ensino que estimulem o pensamento matemático dos alunos de maneira atrativa e dinâmica. Relacionando teoria e prática, trabalhando com materiais concretos, recorrendo a fatos históricos para que os educandos sintam-se atraídos e estimulados a se apropriarem dos conhecimentos matemáticos.

Partindo desse princípio é que propomos uma sequência de atividades que buscam trabalhar conceitos abstratos da Geometria Plana através de materiais concretos. Assim a proposta está organizada em três atividades didáticas: tesselação do plano por um tipo de polígono regular, tesselação do plano por dois ou mais tipos de polígonos regulares e Estudo dos padrões geométricos por meio de algumas obras de Escher.

As três atividades podem ser aplicadas para o ensino fundamental e médio, o que vai diferenciar é o tipo de abordagem dada pelo professor. No ensino fundamental as atividades ficam mais no campo do experimento e das deduções informais acerca das propriedades envolvidas, já no ensino médio após os experimentos devem vir as deduções e as demonstrações formais.

#### **4.1 Atividade 01 – tesselação do plano por um tipo de polígono regular**

Nessa atividade serão abordados conteúdos como polígonos regulares, suas respectivas medidas dos ângulos internos e um estudo sobre as relações algébricas que possibilitam verificar quais polígonos tessalam ou não um plano. Os materiais necessários para a realização dessa atividade são: notebook, TV ou data show, moldes para polígonos regulares (triângulo, quadrado, pentágono hexágono, heptágono, octógono, decágono, dodecágono), folha de papel duplex, cartão ou outros similares (cores variadas), folhas de papel ofício, lápis, borracha, tesoura e cola.

Dividiremos esta atividade em duas etapas, a primeira se dá pela confecção do kit de polígonos regulares e a segunda consiste num experimento de planificação utilizando apenas um tipo de polígono.

##### **1ª etapa: confecção do kit de polígonos regulares**

A turma será dividida em grupos de no máximo quatro alunos, em seguida é distribuído um molde dos polígonos (ver anexo A) para que cada grupo confeccione seu kit de polígonos regulares a ser utilizado na 2ª etapa.

##### **2ª etapa: experimento de planificação utilizando apenas um tipo de polígono**

Inicialmente será feito um trabalho de motivação remetendo-se aos primeiros mosaicos construídos pelo homem, bem como os encontrados na natureza através de uma exposição em slides. Logo após, uma explanação sobre polígonos convexos regulares e a medida de seus respectivos ângulos internos, quando será então construída uma tabela com o nome dos polígonos, número de lados e a medida de seus ângulos internos.

Os alunos, neste ponto, serão orientados a cobrir toda a folha de papel ofício com colagem dos polígonos de modo que não haja espaços vazios e nem sobreposição entre eles, e que a interseção entre dois polígonos seja sempre uma aresta ou um vértice. Quando os grupos concluírem esse processo receberão uma ficha com perguntas inerentes ao experimento realizado.

Ao final dessa atividade espera-se que os alunos:

- Compreendam os conceitos como polígonos regulares convexos e a medida de seus respectivos ângulos internos;
- Reconheçam a relação entre o número de lados de um polígono regular com a medida de seu ângulo interno;
- Compreendam o processo de tesselação do plano euclidiano por um único tipo de polígono regular;
- Estabeleça uma relação algébrica que verifique as possibilidades de polígonos regulares tesselarem ou não o plano.

### **Ficha – Atividade 01**

1. É possível cobrir toda a folha de papel com qualquer dos polígonos disponíveis?
2. Com quais polígonos do kit foi possível cobrir a folha de papel?
3. Qual o valor dos ângulos internos desses polígonos?
4. Observe se há relação entre o número de lados dos polígonos regulares com a medida de seus ângulos internos e a descreva.
5. Quantos polígonos estão organizados em torno de um vértice?
6. Identifique a soma dos ângulos em torno de cada vértice.
7. Existe alguma relação entre a quantidade de polígonos e a soma dos ângulos em torno de cada vértice?
8. Com base em sua resposta anterior justifique porque alguns polígonos não cobrem o plano de forma regular.
9. Será que existe uma forma algébrica de verificar se um determinado polígono reveste o plano, de acordo com as regras estabelecidas? Justifique.

### **4.2 Atividade 02 – tesselação do plano por dois ou mais tipos de polígonos regulares**

Nessa atividade abordaremos conteúdos como polígonos regulares, suas respectivas medidas dos ângulos internos e as relações algébricas que possibilitam verificar tipos de tesselação por associações de polígonos regulares. Os materiais utilizados serão os mesmos da atividade 01.

Semelhante à segunda etapa da atividade 01 os alunos serão orientados a cobrir toda a folha de papel ofício com colagem utilizando dois ou mais polígonos de modo que não haja espaços vazios e nem sobreposição entre eles, e que a interseção entre dois polígonos seja sempre uma aresta ou um vértice. Quando os grupos concluírem esse processo responderão perguntas

inerentes ao experimento realizado.

Com a realização dessa atividade espera-se que os alunos:

- Utilizem as observações da atividade anterior para identificar quais polígonos associados tessalam o plano.
- Percebam que algumas dessas tesselações possuem o mesmo tipo de nó enquanto que em outras aparecem tipos de nós diferentes.
- Reconheçam os tipos de tesselações por dois ou mais polígonos como semirregulares, demirregulares e irregulares.
- Estabeleçam relações algébricas que verifiquem as possibilidades de tesselação semirregulares.

### **Ficha – Atividade 02**

1. É possível cobrir a folha utilizando três polígonos ao redor de um único nó? Se possível qual foi a combinação encontrada?
2. É possível cobrir a folha utilizando quatro polígonos ao redor de um único nó? Se possível qual foi a combinação encontrada?
3. É possível cobrir a folha utilizando cinco polígonos ao redor de um único nó? Se possível qual foi a combinação encontrada?
4. É possível cobrir a folha utilizando seis polígonos ao redor de um único nó? Se possível qual foi a combinação encontrada?
5. É possível cobrir a folha utilizando mais que seis polígonos ao redor de um único nó? Justifique.
6. Em algum momento foi encontrado uma quantidade diferente de polígonos ao redor dos nós em uma mesma pavimentação?

### **4.3 Atividade 03 - estudo dos padrões geométricos por meio de algumas obras de Escher**

Nessa atividade serão abordados conteúdos como polígonos regulares, congruência de figuras por rotação, translação e reflexão. Os materiais necessários para a realização dessa atividade são: notebook, TV ou data show, papel cartão/duplex, moldes de triângulo regular, quadrado e hexágono regular, lápis, tesoura e cola.

A atividade inicia com a exibição de um documentário sobre as obras de Escher e sua relação com a matemática, intitulado “Escher e a geometria”, logo em seguida são exploradas as

relação com a matemática, intitulado “Escher e a geometria”, logo em seguida são exploradas as

Na tesselação da figura 43 percebemos a presença da simetria de reflexão. Note que tendo como eixo de simetria a reta em vermelho, os peixes amarelos acima da reta são refletidos logo abaixo.

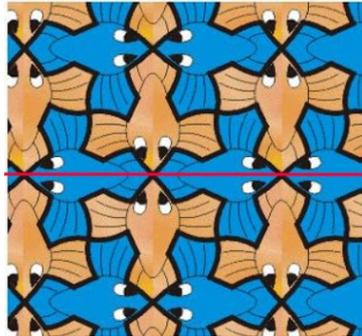


Figura 43 – Tesselação por reflexão.

A simetria de rotação na figura 44 é obtida girando cada peixe ao redor do ponto C, centro de rotação, percorrendo um determinado ângulo.

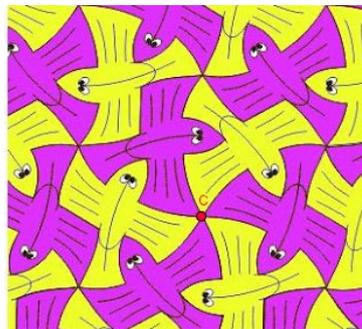


Figura 44 – Tesselação por rotação.

Na simetria de translação na figura 45 o módulo desliza segundo o sentido e direção dos vetores, mantendo sua forma e tamanho inalterado.

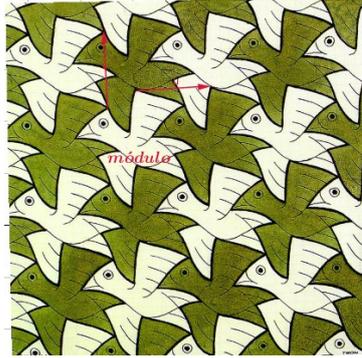


Figura 45 – Tesselação por translação.

Finalizada a exposição de Escher, os alunos serão divididos em grupos com quatro pessoas onde receberão os moldes das figuras regulares (triângulo, quadrado e hexágono) para construir suas próprias tesselações utilizando as transformações geométricas estudadas.

### Tesselação por rotação

Utilizando um quadrado será feito um corte em um dos lados a critério do grupo e utilizando movimentos translação colar no lado oposto, como na figura 46. Faça quantos cortes achar necessário até que chegue ao molde desejado.

Obs.: Para construir um molde a partir do quadrado ou hexágono regular o corte é sempre feito em um dos lados e colado por rotação no lado vizinho até que todos tenham sido cortados e/ou colados.

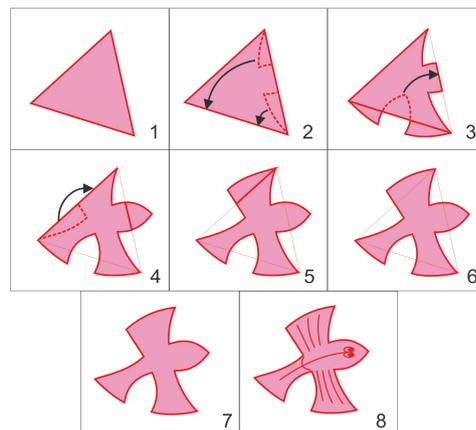


Figura 46 – Cortes para construir o molde para tesselação por rotação.

Reproduza o molde em cores diferentes, se desejar, e cole encaixando as figuras para que não se sobreponham e nem sobrem espaços entre elas, cobrindo toda a folha.

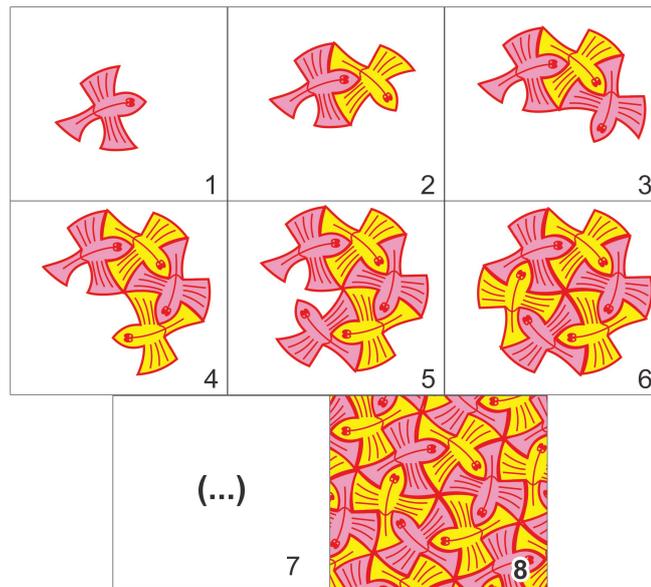


Figura 47 – Montagem da tesselação por rotação

### Tesselação por translação

Utilizando um quadrado será feito um corte em um dos lados a critério do grupo e utilizando movimentos translação colar no lado oposto, como na figura 48. Faça quantos cortes achar necessário até que chegue ao molde desejado.

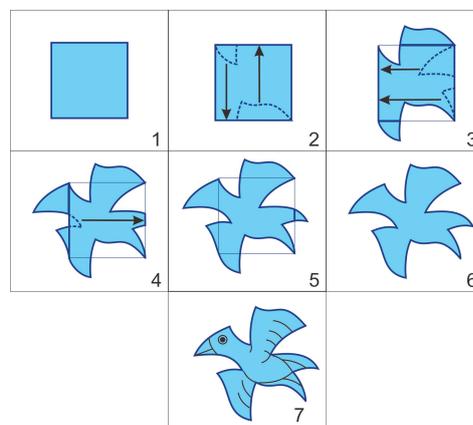


Figura 48 – Cortes para tesselação por translação

Reproduza o molde em cores diferentes, se desejar, e cole encaixando as figuras para que não se sobreponham e nem sobrem espaços entre elas, cobrindo toda a folha.

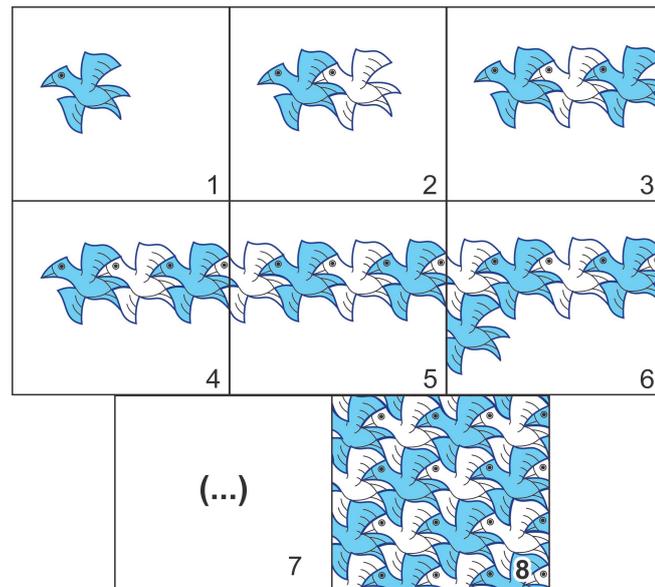


Figura 49 – Montagem da tesselação por translação.

### Tesselação por reflexão

Utilizando um quadrado trace um eixo de simetria por uma das diagonais. Será feito um corte em um de seus lados, a critério do grupo e utilizando um movimento de rotação colar no lado vizinho, do mesmo lado do eixo. Repetir o mesmo procedimento no outro lado do eixo, como na figura 50. Faça quantos cortes achar necessário até que chegue ao molde desejado.

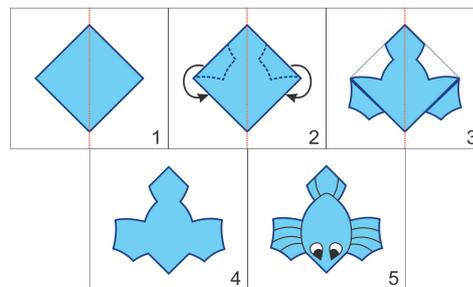


Figura 50 – Cortes para tesselação por reflexão.

Reproduza o molde em cores diferentes, se desejar, e cole encaixando as figuras para que não se sobreponham e nem sobrem espaços entre elas, cobrindo toda a folha.

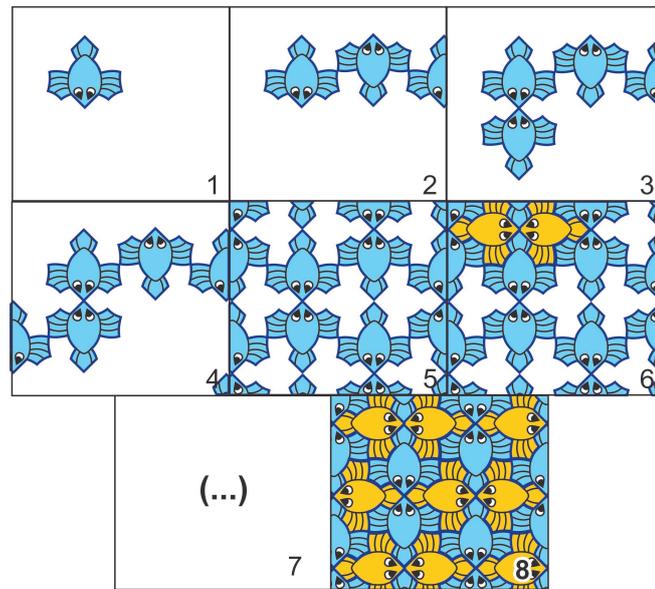


Figura 51 – Montagem da tesselação por reflexão

Concluindo todas as tesselações os grupos expõem e socializam suas obras de arte mostrando as transformações utilizadas em cada uma.

Ao término dessa atividade espera-se que os alunos

- Percebam que embora modificado o polígono a área permanece a mesma.
- Compreendam os conceitos das transformações geométricas.
- Reconheçam a íntima relação entre arte e matemática.

## 5 CONCLUSÃO

A exploração de conceitos geométricos através das tesselações do plano constitui um importante recurso didático no ensino-aprendizagem de Geometria. A manipulação de materiais concretos nas atividades propostas desenvolve habilidades e conceitos abstratos de forma lúdica, despertando o interesse do aluno pela disciplina e estimulando o pensamento matemático.

A contextualização e a interdisciplinaridade presentes nas atividades e nas aplicações das tesselações propostas nesse trabalho promovem um novo olhar aos conteúdos matemáticos. Este contexto possibilita aos estudantes a percepção da relação dos conteúdos estudados com diversas situações na natureza, na arte, na arquitetura, tecnologia da informação, entre outros.

As atividades ainda não foram aplicadas em sala de aula, mas esperamos que possam ser eficientes já que fogem aos padrões de aulas expositivas e de resolução mecânica de exercícios. Em face a todas essas características esperamos que este trabalho contribua significativamente para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática.

## REFERÊNCIAS

- 1 SILVA, R. N. **Sobre pavimentações do plano euclidiano**. 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto-SP, 2014.
- 2 BARBOSA, R. M. **Descobrendo padrões em mosaicos**. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.
- 3 AFINI, D. C.; JÚNIOR, S. J. C. **Mosaicos, pavimentações do plano e o ensino da geometria**. Curitiba-PR, 2013. Acesso: 10/02/2015. Disponível em: <[http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2842\\_780\\_ID.pdf](http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2842_780_ID.pdf)>.
- 4 MOISE, E. E.; DOWNS Jr., F. L. **Geometria Moderna, Vol. II**. New York: Edgard Blücher Ltda, 1991. v. 1.
- 5 COELHO, A. **Estudo dos polígonos por intermédio da pavimentação do plano**. 2014. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2014.
- 6 CAMPELO, A. C. de A. J. **Reticulados, projeções e aplicações à teoria da informação**. 2014. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, 2014.
- 7 DIAS, C. C. **Desafio geométrico : módulo I (Matemática na prática. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática)**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010.
- 8 BARBOSA, P. M. O estudo da geometria. **Revista Benjamin Constant**, v. 25, p. 14–22, 2003.
- 9 SAMPAIO, P. A. da S. R. A matemática através da arte de m. c. escher. *Millenium*, p. 48–58, 2012. 42 (janeiro/junho).
- 10 SANTOS, L. S. **Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio**. 66 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2014.
- 11 CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. **Sphere packings, lattices and groups**. 3<sup>a</sup>. ed. New York: Springer Science & Business Media, 1991. v. 290.
- 12 BRASIL, P. C. N. d. E. M. Parte iii: Ciências da natureza. **Matemática e suas Tecnologias**, p. 43, 2000.
- 13 BRASIL, S. de Educação F. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

**ANEXOS**

**ANEXO A – MOLDES PARA CONSTRUÇÃO DO KIT DE POLÍGONOS REGULARES**

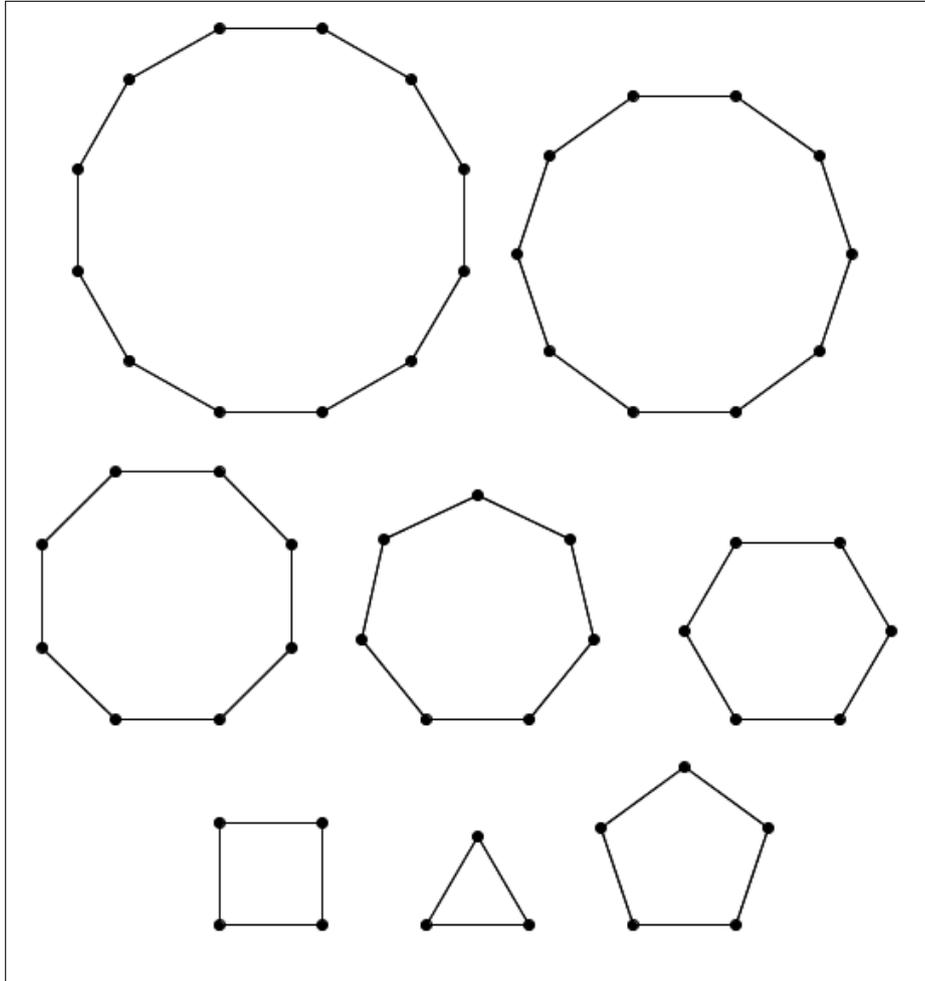


Figura 52 – Moldes para construção do kit de polígonos regulares