



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Instituto de Matemática e Estatística

Luiz Claudio de Sousa Passaroni

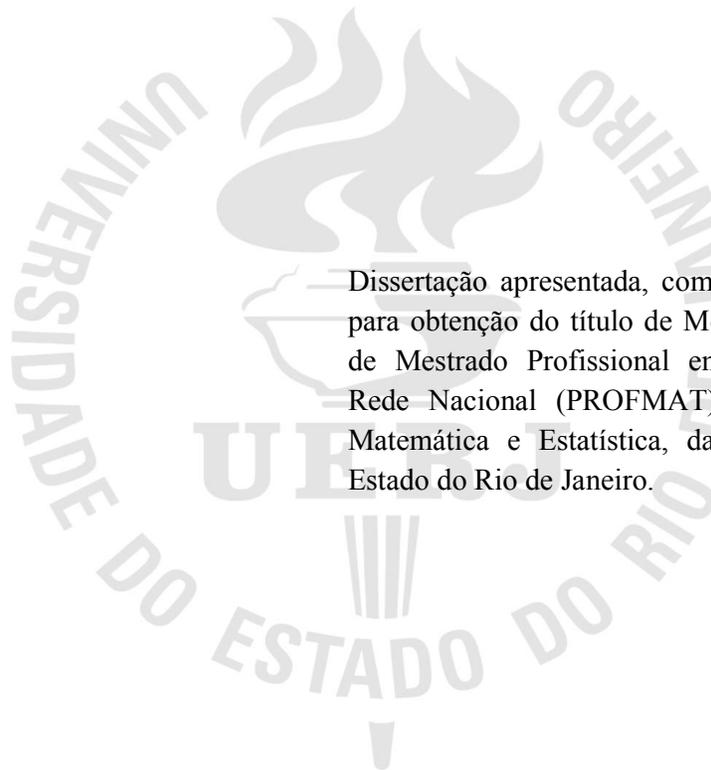
**Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI) – Aplicações ao
ensino básico**

Rio de Janeiro

2015

Luiz Claudio de Sousa Passaroni

Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI) – Aplicação ao ensino básico



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

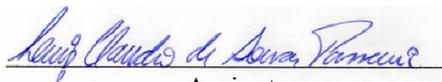
S286 Passaroni, Luiz Claudio de Sousa.
Construções geométricas por dobraduras (ORIGAMI): aplicações ao ensino básico / Luiz Claudio de Sousa Passaroni. - 2015.
131 f. : il.

Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino - Teses. 2. Origami - Teses. I. Mattos, Francisco Roberto Pinto. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística . III. Título.

CDU 51.07

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.



Assinatura

30 / 01 / 2015

Data

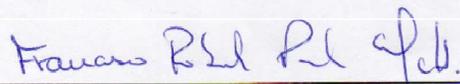
Luiz Claudio de Sousa Passaroni

Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI) – Aplicações ao ensino básico

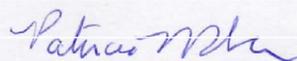
Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de janeiro de 2015.

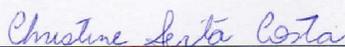
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ



Prof.^a Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ



Prof.^a Dra. Christine Sertã Costa
Instituto de Matemática – PUC/RJ

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a toda minha família, em particular à minha esposa Vanessa, presente em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Vanessa pelo irrestrito apoio e incentivo no decorrer do curso e durante a elaboração deste trabalho, sempre munida de palavras de conforto, ânimo e carinho.

Ao meu filho Luiz Felipe, que muito me apoiou, preocupando-se com desenvolvimento e os desdobramentos da elaboração do meu “livro”, forma como ele, carinhosamente, referia-se a este trabalho.

À minha filha Maria Júlia, que com seu carinho e alegria era sempre fonte de energia, revigorando-me para as diversas jornadas no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Mattos, pelos conselhos úteis e precisos, pela orientação tranquila e pelas palavras de apoio e incentivo.

A Deus, por abençoar a mim e minha família, com saúde e iluminar nossos caminhos.

RESUMO

PASSARONI, L. C. S. *Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI): aplicações ao ensino básico*. 131f. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

A presente dissertação tem o objetivo de mostrar a arte Origami sob um contexto matemático, apresentando um pequeno resumo dos aspectos história e o desenvolvimento do Origami ao longo do tempo e dando maior destaque às suas aplicações na matemática, com o emprego dos axiomas de Huzita e a proposta de ampliação deste conjunto de axiomas com a inclusão da circunferência no papel Origami. Com o uso das técnicas de dobraduras, este trabalho mostra várias aplicações do Origami na matemática, tais como: a solução de alguns problemas clássicos, a construção de polígonos, a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo, cálculo de algumas áreas, a solução de alguns problemas de máximos e mínimos, seguidos dos conceitos matemático envolvidos em cada um deles. E a inclusão da circunferência no plano Origami permitiu ainda, o estudo das construções das cônicas por dobraduras.

Palavras-chave: Origami. Axiomas de Huzita-Hatori. Construção de polígonos. Cônicas. Dobraduras. Trissecção de ângulo.

ABSTRACT

PASSARONI, L. C. S. Geometric constructions by folding (ORIGAMI) : applications to basic education. 131f. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This work aims to demonstrate the Origami art in a mathematical context, with a brief summary of the historical aspects and its development over time, giving more prominence to applications in mathematics, with the use of the axioms of Huzita and proposal to expand this set of axioms to include the circle in Origami paper. As the use of folding techniques, this work shows various applications of Origami in mathematics, such as the solution of some classical problems; the construction of polygons; the demonstration of the sum of the interior angles of a triangle; the calculation of some areas and the solution of some problems of maximum and minimum, followed by mathematical concepts involved in each of them. The inclusion of the circle in Origami plan allowed also to study the constructions of conic by folding.

Keywords: Origami. Axioms of Huzita-Hatori. Construction of polygons. Conics. Folding. Angle trisection.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	ORIGAMI ASPECTOS HISTÓRICOS	12
2	ORIGAMI E MATEMÁTICA	15
2.1	A fundamentação para as construções por dobraduras	15
2.2	Os axiomas válidos	16
2.3	Extensão dos axiomas com inclusão da circunferência	20
2.4	Verificação que a lista de axiomas é completa	26
3	PROBLEMAS RESOLVIDOS POR DOBRADURAS	28
3.1	O Teorema de Haga	28
3.1.1	<u>Construção 1 para o Teorema de Haga</u>	28
3.1.2	<u>Construção 2 para o Teorema de Haga</u>	29
3.1.3	<u>Construção 3 para o Teorema de Haga</u>	30
3.2	Os Problemas Clássicos	32
3.2.1	<u>Solução dos Problemas Clássicos por Origami</u>	33
3.2.1.1	Trissecção de um Ângulo	33
3.2.1.2	Duplicação do Cubo	41
3.2.1.3	Quadratura do Círculo	45
4	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM DOBRADURA	46
4.1	Polígonos Construtíveis	47
4.1.1	<u>Triângulo Equilátero</u>	47
4.1.2	<u>Quadrado</u>	53
4.1.3	<u>Retângulos</u>	55
4.1.3.1	Retângulo cuja Diagonal divide o Ângulo Reto em Ângulos de 36° e 54°	55
4.1.3.2	Retângulo Áureo	57
4.1.4	<u>Pentágono</u>	61
4.1.5	<u>Hexágono Regular</u>	68
4.1.6	<u>Heptágono Regular</u>	73
4.1.7	<u>Octógono Regular</u>	80
4.1.8	<u>Eneágono Regular</u>	85
5	PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO	90

5.1	Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo	90
5.2	Principais Ceviana do Trinângulo	92
5.2.1	<u>Bissetrizes</u>	92
5.2.2	<u>Medianas</u>	93
5.2.3	<u>Alturas</u>	95
5.2.4	<u>Mediatrizes</u>	95
5.3	Teorema de Pitágoras	96
5.4	Área do triângulo	98
5.5	Área do Trapézio	99
5.6	Problemas de Números Construtíveis	100
5.7	Problemas de Máximos e Mínimos	103
5.8	Cônicas	108
5.8.1	<u>Parábola</u>	109
5.8.2	<u>Elipse</u>	112
5.8.3	<u>Hipérbole</u>	115
	CONCLUSÃO	118
	REFERÊNCIAS	119
	ANEXO A – Construções dos Polígonos	122
	ANEXO B – Construções das Cevianas	128
	ANEXO C – Construções das Cônicas	129

INTRODUÇÃO

A educação e, em especial, o ensino de Matemática passam por grandes mudanças com a democratização do acesso às novas tecnologias e à informação, fazendo com que os docentes necessitem de maior dedicação na elaboração e no planejamento de atividades mais práticas, dinâmicas e que despertem maior interesse dos educandos. O emprego de recursos didáticos deve seguir o que orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadora, computador e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, à base da atividade matemática. (PCN - Vol.3 - Matemática. p. 19)

Sob este aspecto, o Origami se apresenta como alternativa de baixo custo, capaz de proporcionar à prática docente um fator motivador e lúdico, devidamente integrado ao ensino de matemática que, se bem utilizado, pode ser empregado como uma poderosa ferramenta de apoio ao ensino de geometria e na solução de alguns problemas de máximos e mínimos.

Segundo Neirelise Buske (2007. p. 13), devemos ressaltar que nenhum recurso didático é capaz, por si só, de promover o aprendizado e sendo assim, as atividades de construções com Origami devem ser seguidas por uma análise dos conceitos matemáticos envolvidos no desenvolvimento da construção e do produto final.

De acordo com o exposto, foram elencados os tópicos sobre Origami que formam um conjunto de conhecimentos que permitam a elaboração de atividades de matemática com o emprego do Origami.

No primeiro capítulo, apresentamos uma descrição histórica do Origami, com os desdobramentos de sua utilização como adornos e certificados, chegando ao despertar do interesse dos matemáticos e de algumas aplicações contemporâneas com a dobra Miura e os robôs de Origami.

O segundo capítulo aborda os conceitos matemáticos envolvidos nas construções com Origami que culminaram com a apresentação, na Primeira Conferência Internacional sobre Origami em Educação e Terapia, dos axiomas de Huzita, em 1991, que estabelecem as reflexões possíveis entre pontos e retas. Com a inclusão de um novo elemento, a circunferência, é estabelecida uma ampliação na lista de axiomas, bem como, nas possibilidades de construções.

No terceiro capítulo, listamos alguns problemas que podem ser solucionados através de dobraduras, como o teorema de Haga e de dois dos problemas clássicos da antiguidade: a trisseção de um ângulo qualquer e a duplicação do cubo.

O quarto capítulo é uma lista de construções de polígonos por dobraduras dos quais destacamos a construção do Heptágono e do eneágono regular, que têm suas impossibilidades de construção por régua e compasso, provadas por Gauss.

No quinto capítulo, apresentamos uma série propostas de atividades, para o ensino médio, que têm soluções por Origami muito interessantes e didáticas, como a soma dos ângulos internos de um triângulo, a construção das principais cevianas de um triângulo e alguns problemas de áreas e de máximos e mínimos.

No último capítulo, temos os estudos das cônicas através dos novos axiomas obtidos com a inclusão da circunferência e é feito um comparativo dos resultados obtidos com as construções das cônicas por dobraduras e a construção das mesmas curvas através do *software* de geometria dinâmica, Geogebra.

Deste modo, esta dissertação pretende fornecer um conjunto de elementos de construções com Origami que proporcione aos professores da educação básica uma ferramenta de apoio à atividade docente.

1 ORIGAMI ASPECTOS HISTÓRICOS

O origami é a arte japonesa de construir figuras que representam objetos e animais. Seu nome tem origem japonesa, sendo executado, originariamente, a partir de uma única folha de papel quadrado sem recortes e sem cola, o quê, inicialmente, parece tornar o origami limitado, mas como Ilda Rafael afirma:

As potencialidades do Origami são imensas. Quando pegamos numa folha de papel e começamos a dobrá-la descobrimos formas e propriedades que nos deixam maravilhados. Este é o início daquela que pode ser uma jornada sem fim, através de universo fascinante. (RAFAEL, 2001, p. 16)

Material fundamental para o Origami, o papel, foi inventado na China pelo administrador do palácio do imperador chinês *T'Sai Lun* em 105 a.C., chegando ao Japão no século VI d. C, mas por se tratar de um material considerado de luxo, no princípio, somente era usado pelas classes nobres e em cerimônias religiosas xintoístas, para as quais eram confeccionados ornamentos (*Ktashiro*).

A arte de dobrar papel nem sempre foi conhecida por Origami, segundo Hatori ¹, na Era Edo (1603-1868) foi conhecida como *Orisue* ou *Orikata*, e *Orimono* na Era Cedo Showa (1926-1989).

Em seu artigo, *Matemáticas y Papiroflexia*, Priet (2011, p.175) destaca três importantes períodos do desenvolvimento do Origami. No período Heian (794-1185), o Origami era usado como entretenimento das classes ricas, sendo também usado pelos Samurais que ornamentavam presentes com *noshi*, origamis com forma de leques ou raios. O Origami era usado também na confecção de certificados cuja autenticidade se dava pela forma de dobrá-los, deste modo, depois do certificado ser dobrado, não seria possível desdobra-lo sem que novas marcas fossem feitas no papel. No período *Muromachi* (1338-1573), com a difusão da fabricação e utilização do papel, o origami passou a ser mais acessível às diversas classes sociais na forma de adornos pessoais que, entre outras funções, serviam para diferenciar a classe social do seu portador. A mais ampla utilização do Origami ocorreu no período *Torugwa* (1603-1867), quando são publicados os primeiros livros sobre o assunto. O livro *Como Dobrar Mil Tsurus* ², publicado em 1797, contendo pela primeira vez instruções

¹ HATORI, Koshiro. <http://origami.ousaan.com/library/historye.html>.

² O título original é: “Hiden Senbazuru Orikata”

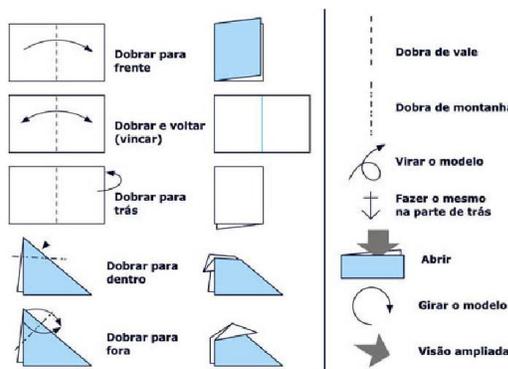
para a construção por Origami do Tsuru, o pássaro sagrado e em 1845 o livro *Janela Aberta à Estação do Inverno*³, com aproximadamente 150 modelos de Origami.

O origami chegou à Europa através dos muçulmanos, que eram exímios dobradores e difundiram esta arte pela Península Ibérica, contudo, a doutrina islâmica impedia que se representassem animais, sendo executadas apenas dobraduras de figuras geométricas.

Em 1889, ao participar da inauguração da Torre Eiffel na Exposição Universal de Paris, Miguel de Unamuno, reitor da Universidade de Salamanca na Espanha, ficou fascinado com uma exposição de origami japonês tornando-o um grande impulsionador desta arte na Espanha, onde é conhecida por papiroflexia.

Originalmente, as técnicas de construção dos modelos de Origamis eram transmitidas de uma geração para outra até que na década de 1950, Uchiyama Koko, tornou-se o primeiro a patentear as suas criações. Nesta mesma década, Akira Yoshizawa o pai do origami moderno, propôs um sistema de diagramação para a representação gráfica das dobraduras que são base para vários origamis, utilizando linhas, setas e alguns outros símbolos. O americano Samuel Randlett acrescentou alguns símbolos, formando um conjunto de símbolos que passaram a constituir a base da linguagem origami, proporcionando uma difusão internacional dos modelos origami, uma vez que, independente do idioma das publicações passou a ser possível a construção dos modelos, bastando saber interpretar os diagramas.

Figura 1– Diagramação de Akira Yoshizawa



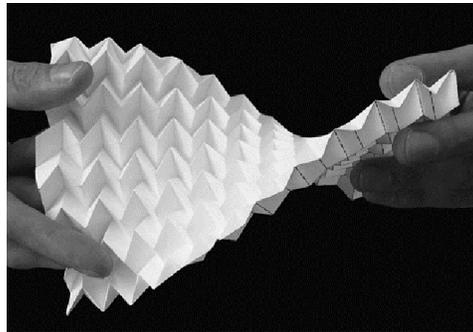
Fonte: <http://rodrigoborigamis.blogspot.com.br/>

Para Oliveira (2005, p. 4), “O origami tem experimentado uma verdadeira explosão de criatividade nos três últimas décadas [...] tornando possível realizar figuras cada vez mais complexas”, destaca ainda, que o origami passou a apresentar um teor mais científico que artístico ao despertar interesse dos matemáticos, engenheiros, físicos e arquitetos. Como

³ O título original é : “Kan No Mado”

exemplo destas novas aplicações do origami, podemos citar a dobradura Miura (Figura 2) que tem por características dividir uma superfície plana em superfícies menores e simétricas, o que torna a superfície original compacta depois de dobrada, e que possibilita seu desdobramento por um único movimento linear e contínuo. Estas características conferem ao origami Miura importantes atributos para o seu emprego em painéis solares de satélites.

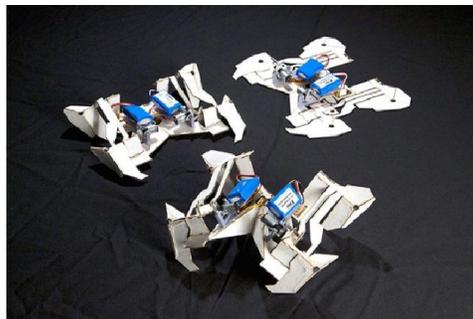
Figura 2 – Dobradura Miura



Fonte: http://www-g.eng.cam.ac.uk/advanced_structures/research.html

Em 2014, pesquisadores da Universidade de Harvard e do MIT, desenvolveram pequenos robôs (Figura 3) que mudam sua forma original, de uma superfície plana, em outras para assumir uma nova função e se movimentar. Esta mudança de formato se dá por dobraduras de acordo com princípios do origami.

Figura 3 – Robôs de Origami



Fonte: <http://f.i.uol.com.br/folha/ciencia/images/14219509.jpeg>

Entre os teóricos mais populares e atuais, podemos destacar o engenheiro Robert J. Lang criador do programa de computação TreeMaker para projetar a construção de origamis com precisão matemática.

2 ORIGAMI E MATEMÁTICA

Na construção dos origamis podemos observar que além de atividade criativa e artística, estamos, muitas vezes, aplicando propriedades matemática, o que despertou interesse de vários estudiosos nas construções por origami.

O livro japonês *Wakoku Chiyekurabe de Kan Chu Sen*, publicado em 1721, foi o primeiro livro que abordou as dobraduras origami em um contexto matemático com uma série de problemas para testar a inteligência matemática.

Outro importante livro de origami com um contexto matemático é o *Exercises in paper folding* (Exercícios geométricos em origami) de T. Sundara Row, publicado em 1893 na Índia e editados em 1966 pela Dover Publications, Inc, New York. O livro apresenta uma grande variedade de construções de polígonos por origami, e demonstrações de algumas proposições geométricas com auxílios das dobraduras.

Maekawa Jun e Peter Engel dedicaram-se aos origamis matemáticos, de forma independente, desenvolveram estudos dos padrões das dobras (ou vincos) e das regiões definidas por elas, e ao projeto de modelos antes mesmo de executá-los. No desenvolvimento mais avançado desta teoria destacam-se Meguro Toshiyuki, Kawahata Fumiaki e Robert Lang que criaram um algoritmo capaz de gerar padrões de dobras.

O matemático Humiaki Huzita é outro relevante personagem dos estudos dos origamis matemáticos, com a apresentação de seus importantes estudos na Primeira Conferência Internacional sobre Origami em Educação e Terapia, de que falaremos com mais detalhes no próximo capítulo.

2.1 A fundamentação para as construções por dobraduras

Na década de 1970, o origami passou a despertar maior interesse dos matemáticos que passaram a estudar as dobras possíveis de se executar, as combinações entre essas dobras e suas propriedades matemáticas. Destes entusiastas destacou-se Humiaki Huzita, matemático japonês que emigrou para Itália, onde estudou física nuclear na Universidade de Pádua e apresentou, na Primeira Conferência Internacional sobre Origami em Educação e Terapia, seis operações básicas capazes de definir uma dobra com base no alinhamento ou combinações de

alinhamentos entre pontos e retas, sendo a primeira descrição formal das construções possíveis com origami. Huzita não levou em consideração os casos em que a construção da dobra é impossível e os casos em que mais de uma dobra era possível.

Jaques Justin apresentou em seu artigo, *Résolution par le Pliage de L'Équation du Troisième degré et Applications Géométriques*, sete possíveis combinações de alinhamentos entre pontos e retas. Contudo, seu artigo, escrito em francês, parece não ter se tornado de amplo conhecimento dos pesquisadores, tanto que, em 2001, Koshiro Hatori apresenta a descoberta da mesma sétima operação só que este, o faz de maneira mais formal.

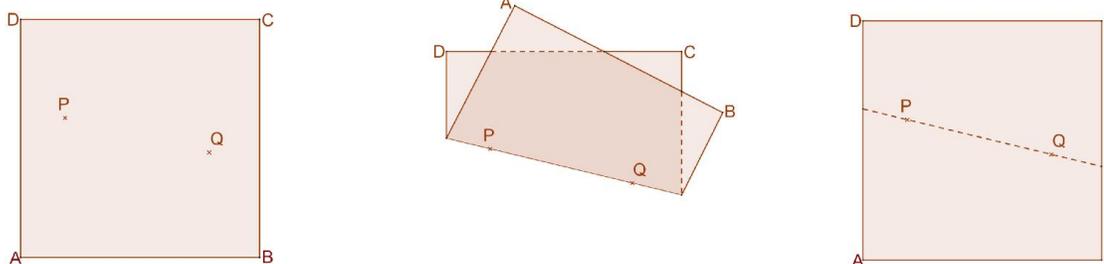
Como a difusão dos procedimentos descritos por Huzita e com a formalização desenvolvida por Hatori, consolidou-se os termos de axiomas de Huzita, axiomas de Huzita-Justin ou ainda de axiomas de Huzita-Hatori.

O físico americano Robert Lang, em 2003, publicou em seu site (<http://www.langorigami.com>) a prova da completude dos axiomas de Huzita-Hatori, demonstrando não haver nenhum outro axioma a ser acrescentado.

2.2 Os axiomas válidos

Axioma 1 – Dados dois pontos distintos P e Q, podemos construir uma única reta m que passa por P e Q.

Figura 4 – Axioma 1

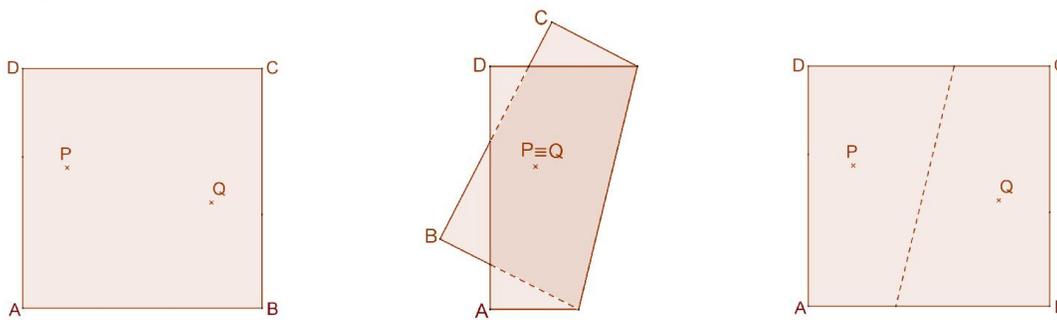


Fonte: O autor, 2014.

Podemos chamar essa operação de função régua.

Axioma 2 – Dados dois pontos P e Q, podemos construir uma única reta, fazendo coincidir P e Q.

Figura 5 – Axioma 2

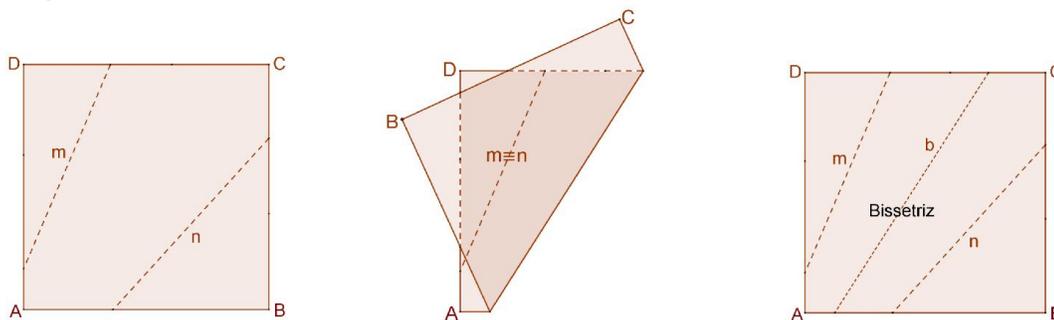


Fonte: O autor, 2014.

Podemos chamar essa operação de função mediatriz.

Axioma 3 – Dadas duas retas distintas m e n , podemos obter um número finito de retas fazendo coincidir m e n .

Figura 6 – Axioma 3



Fonte: O autor, 2014.

Podemos chamar essa operação de função bissetriz e o número de soluções dependendo da posição relativa entre m e n .

Se m e n são paralelas (Figura 7.a), a reta obtida é única e paralela às duas primeiras,

Sendo m e n retas concorrentes (Figura 7.b) e o ponto de intersecção localizado no interior do papel, existem duas retas possíveis de serem construídas.

Figura 7 – Axioma 3, outros casos

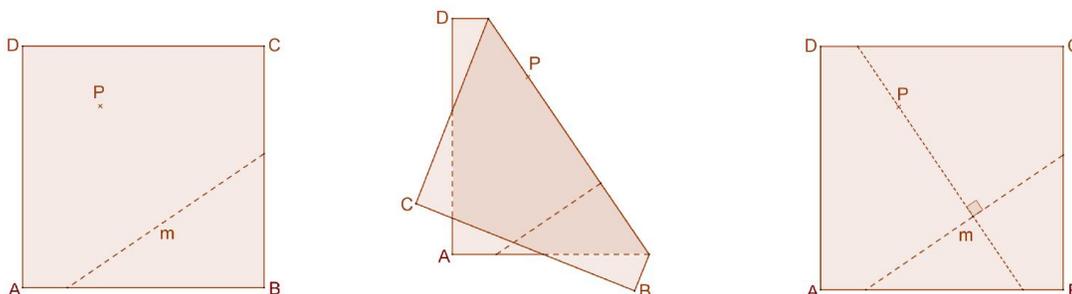


Legenda: (a) - m e n são paralelas; (b) - m e n são concorrentes com o ponto de intersecção no interior do papel.

Fonte: O autor, 2014.

Axioma 4 – Dada uma reta m e um ponto P , podemos obter uma única reta que passa por P , fazendo coincidir m com ela mesma.

Figura 8 – Axioma 4

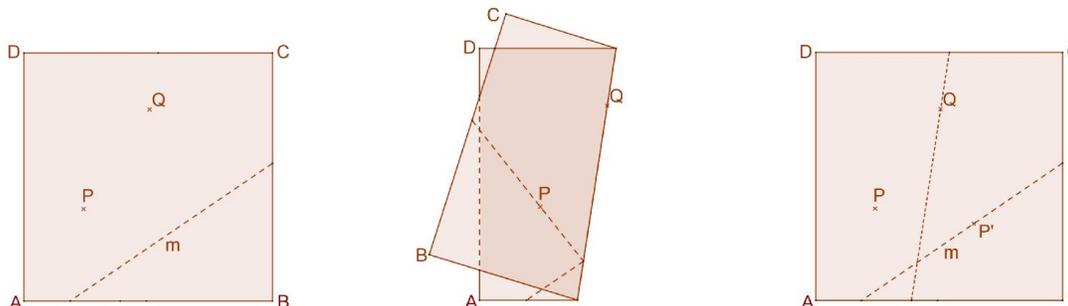


Fonte: O autor, 2014.

Podemos chamar essa operação de função perpendicular.

Axioma 5 – Dada uma reta m , um ponto P não pertencente a m , e um ponto Q , podemos construir um número finito de retas que passam por Q , ao fazermos P coincidir com m ou a construção é impossível.

Figura 9 – Axioma 5

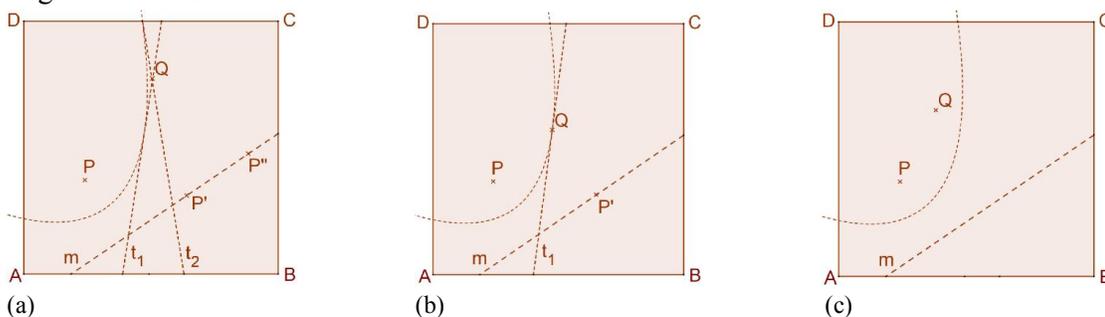


Fonte: O autor, 2014.

Chamando a reta construída de t , temos que t contém o ponto Q e é uma tangente à parábola de foco P , diretriz m .

Existem no máximo duas retas possíveis de construirmos. Nos casos em que existem duas dobras possíveis o ponto Q é exterior (Figura 10.a), nos casos em que apenas uma dobra pode ser construída o ponto Q pertence à parábola (Figura 10.b), e quando não é possível construir a dobra o ponto Q é interior à parábola (Figura 10.c).

Figura 10 – Casos do axioma 5

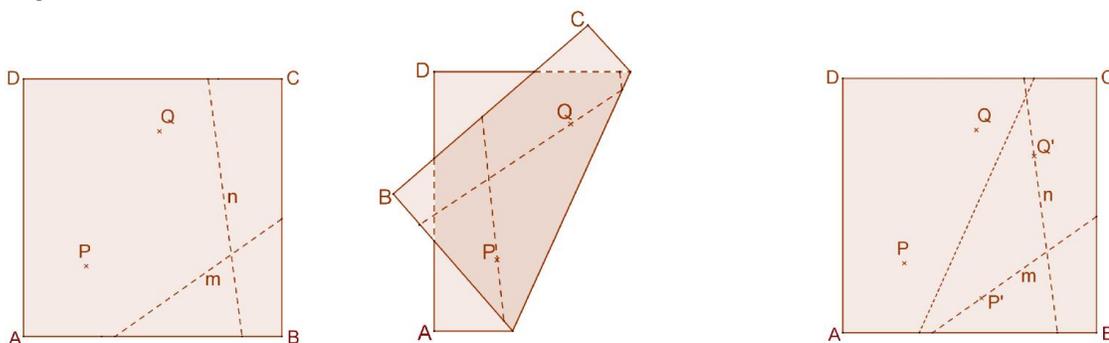


Legenda: (a) - Q é exterior à parábola e duas dobras são possíveis; (b) - Q pertence à parábola e uma dobra é possível; (c) - Q é interior à parábola e a dobra não é possível.

Fonte: O autor, 2014.

Axioma 6 – Dados os pares, ponto P e reta m, e ponto Q e reta n, distintos, onde P e Q não pertencem a m e n, respectivamente, podemos construir um número finito de retas, fazendo coincidir P com m e Q com n, simultaneamente ou a construção é impossível.

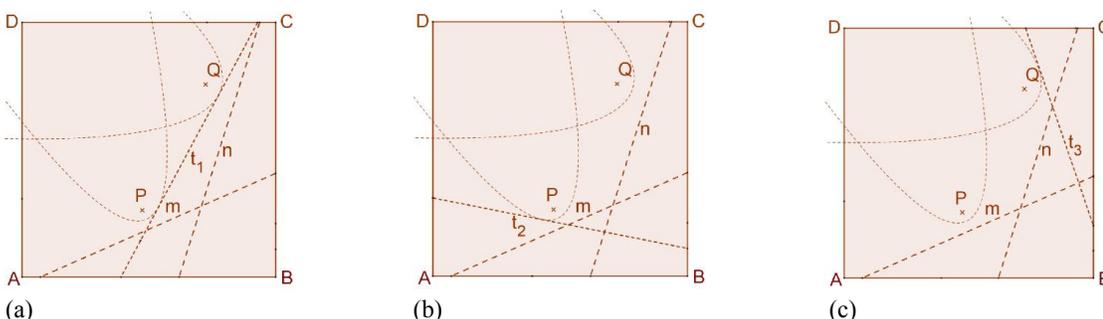
Figura 11– Axioma 6



Fonte: O autor, 2014.

Chamando de t a reta construída, esta é tangente simultaneamente à parábola de foco P e diretriz m e a parábola de foco Q e diretriz n. O número máximo de retas construtíveis é três (Figuras 12.a, 12. b e 12.c) e a construção é impossível quando uma parábola é interior à outra (Figura 13).

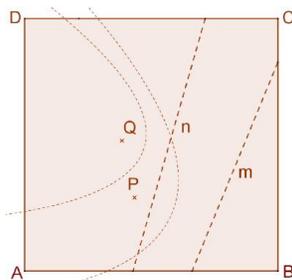
Figura 12 – Possibilidades de construção do axioma 6



Legenda: (a) - 1ª Possibilidade de construção; (b) - 2ª Possibilidade; (c) - 3ª Possibilidade.

Fonte: O autor, 2014.

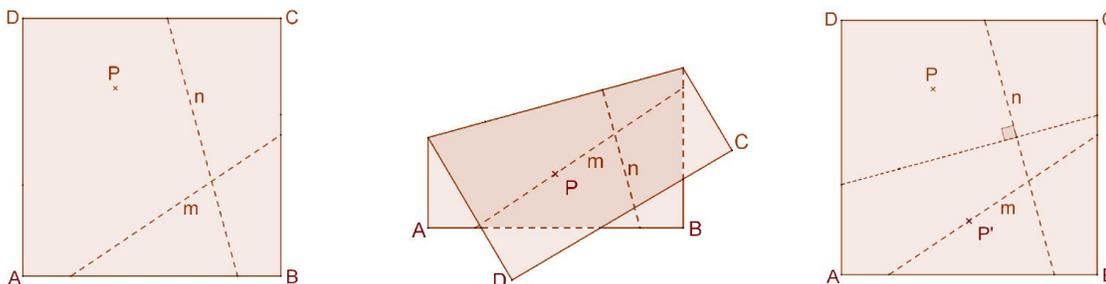
Figura13 – Impossibilidade do Axioma 6



Fonte: O autor, 2014.

Axioma 7 – Dado um ponto P e duas retas m e n, onde P não pertence a m, podemos construir um número finito de retas fazendo coincidir P sobre m e n sobre si mesma, ou a construção é impossível.

Figura 14 – Axioma 7



Fonte: O autor, 2014.

Seja t a dobra construída, t é a tangente à parábola de foco P e diretriz m e t é perpendicular a n. Existe uma única dobra possível de ser construída e será impossível quando $m \parallel n$.

2.3 Extensão dos axiomas com inclusão da circunferência

Saindo do origami tradicional, onde são permitidas somente dobradura em uma folha de papel quadrado sem qualquer marcação ou corte, podemos desenhar com o compasso uma circunferência no plano origami e fazer uma análise das possíveis dobras obtidas com essa

construção. Em seu artigo, Justin e Hatori⁴ já indicava a possibilidade de sobreposições entre um ponto e uma circunferência sem, no entanto, fazer uma descrição detalhada sobre o assunto.

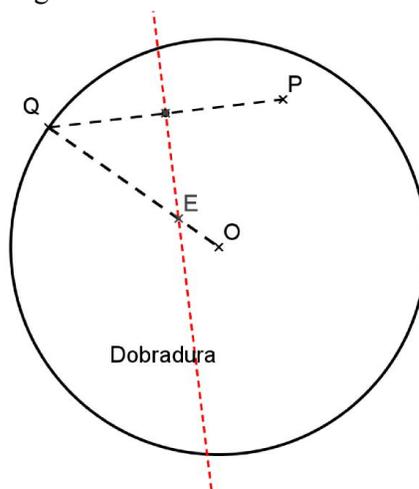
Analisando as possíveis reflexões de ponto qualquer P , em relação a um ponto A de uma circunferência Φ , temos: Sendo o ponto P interior ou exterior à circunferência existe apenas uma reta construtível, fazendo coincidir P com A . No caso de P pertencer à circunferência, com $P \neq A$, ao fazermos coincidir P com A , estremos construindo uma reta que contém o centro da circunferência, o quê não acrescenta nenhuma nova propriedade.

Uma reta pode ser exterior, tangente ou secante a uma circunferência. Segundo Kasem, Ghourabi e Ida (2011, p. 1108), em função da dificuldade de determinarmos se uma reta está muito próxima da circunferência ou se ela é realmente uma tangente a circunferência, as construções de sobreposições entre uma reta e uma circunferência são imprecisas e não serão estudadas. As possíveis sobreposições entre duas circunferências tangentes apresentam certa imprecisão e, nos demais casos, não geram construções com características relevantes, por isso, também não despertam interesse de estudo.

Com o exposto, só nos interessa a análise do alinhamento entre um ponto e uma circunferência, os quais, passaremos a descrever.

Considerando uma circunferência Φ de centro O e um ponto P interior à circunferência não pertencente a Φ , podemos construir uma reta fazendo P coincidir com o ponto Q , da circunferência, como representado na Figura 15.

Figura 15 – Reflexão de P sobre Φ

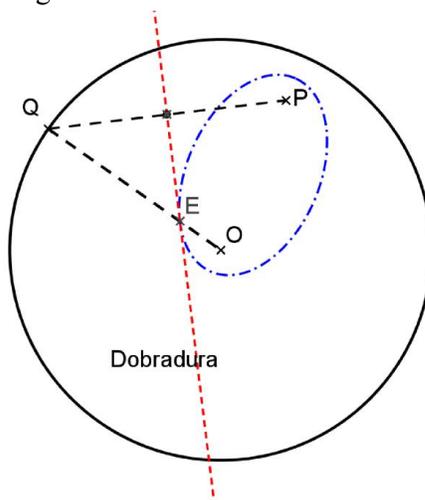


Fonte: O autor, 2014.

⁴ Disponível em: https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/L_Ouvert/n042/o_42_9-19.pdf

Traçando o segmento \overline{OQ} e fazendo P coincidir com Q para construir a dobradura, determinamos o ponto E interseção de \overline{OQ} com a dobradura. Por construção temos que $\overline{EQ} = \overline{EP}$ e é fácil notar que $\overline{EQ} + \overline{EO} = r$ (raio). Com isso, $\overline{EQ} + \overline{EO} = \overline{EP} + \overline{EO} = r$ o que nos dá a definição de uma elipse de focos P e O , constante r sendo E um ponto da elipse (Figura 16).

Figura 16– Característica da dobradura

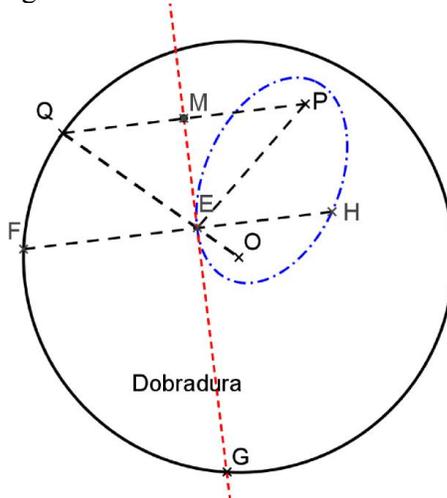


Fonte: O autor, 2014.

Traçando uma perpendicular à dobradura por E (Figura 17), marcando o segmento \overline{FH} , temos:

A dobradura é, por construção, mediatriz de \overline{PQ} e, sendo assim, $\widehat{PEM} \equiv \widehat{QEM}$. Como $\widehat{QEM} \equiv \widehat{OEG}$ (opostos pelo vértice), temos que $\widehat{OEG} \equiv \widehat{PEM}$ e a dobradura e o segmento \overline{FH} são, respectivamente, tangente e normal à elipse no ponto E .

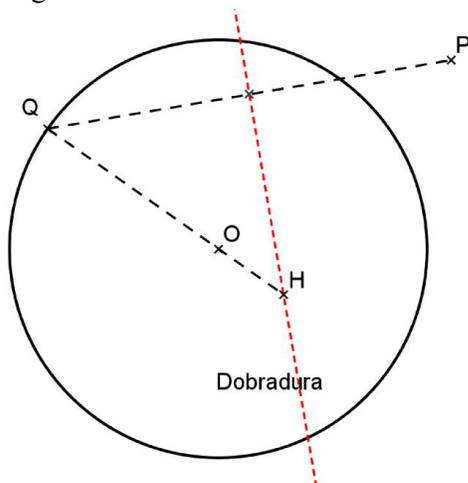
Figura 17 – Característica da dobradura



Fonte: O autor, 2014.

Analisando o caso de P ser exterior à circunferência Φ de centro O , P não pertencente a Φ , podemos construir uma reta fazendo P coincidir com o ponto Q da circunferência como representado na Figura 18.

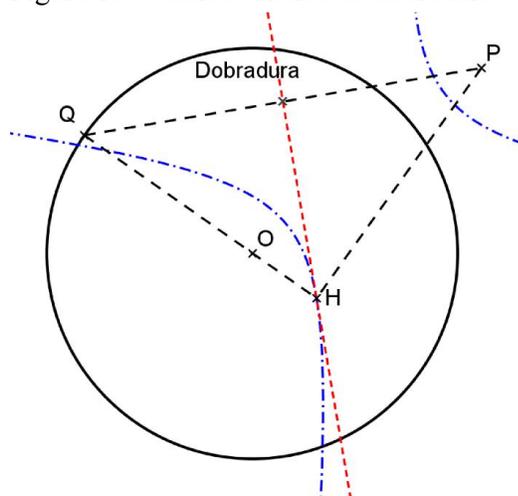
Figura 18 – Reflexão de P sobre Φ



Fonte: O autor, 2014

Traçando o segmento \overline{OQ} e prolongando até intersectar a dobradura no ponto H , temos que, por construção, $\overline{HQ} = \overline{HP}$ e notamos que $\overline{HQ} - \overline{HO} = r$ (raio). Com isso, $\overline{HQ} - \overline{HO} = \overline{HP} - \overline{HO} = r$, o que nos dá a definição de uma hipérbole de focos P e O , constante r sendo H um ponto da hipérbole.

Figura 19 – Característica da dobradura



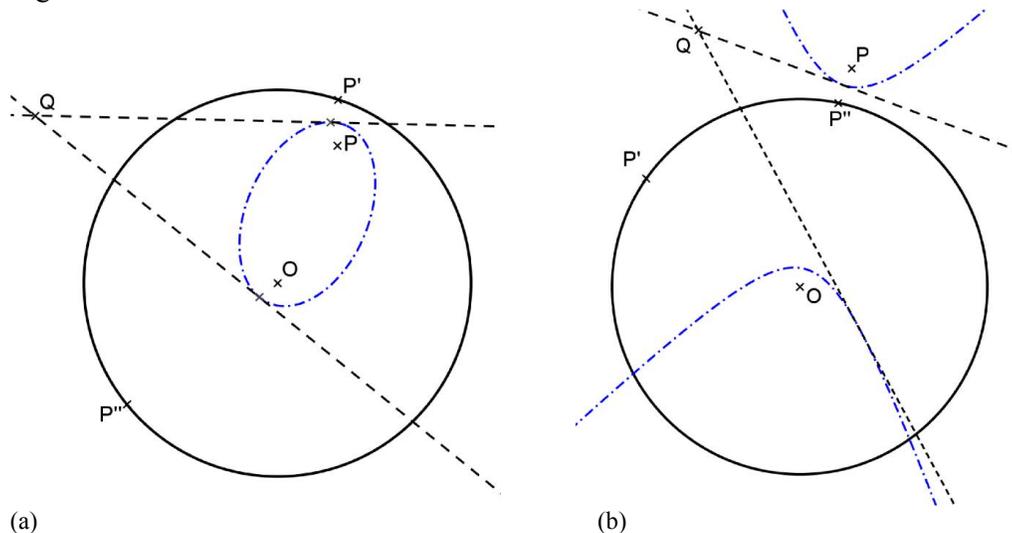
Fonte: O autor, 2014.

Pela construção, temos que o triângulo ΔQHP é isósceles de base \overline{QP} , deste modo, a dobradura é bissetriz do ângulo \widehat{QHP} e sendo assim, a dobradura é tangente à hipérbole no ponto H .

Com o que foi exposto anteriormente, ao marcamos um circunferência no plano origami, podemos acrescenta três novos axiomas.

Axioma 8 – Dados dois pontos P e Q e uma circunferência Φ , onde P não pertence a Φ . Podemos construir um número finito de retas que passam por Q , fazendo P coincidir com Φ ou a construção é impossível.

Figura 20 – Axioma 8

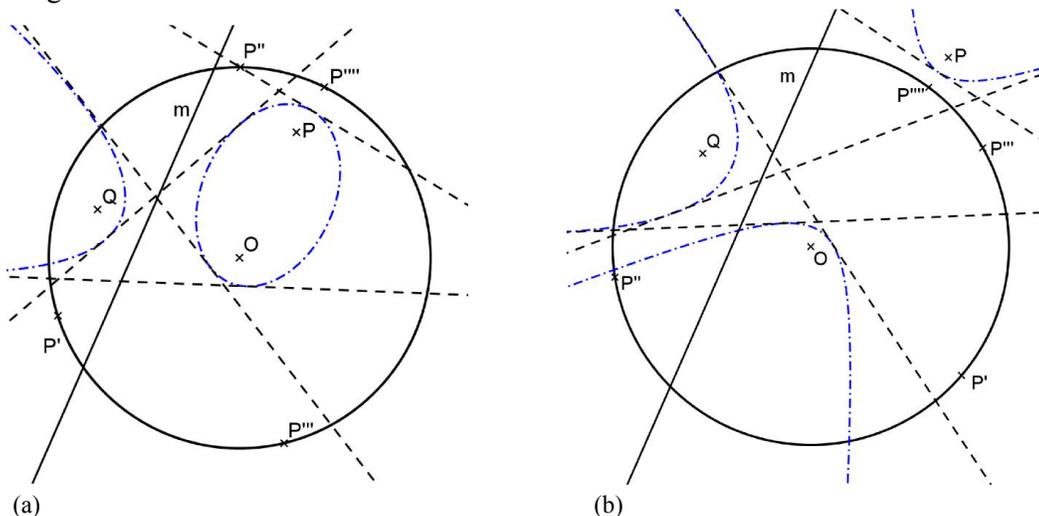


(a) Legenda: (a) - Axioma 8 com “P” interior à circunferência; (b) - Axioma 8 com “P” exterior à circunferência.
Fonte: O autor, 2014.

A dobra construída é uma tangente à cônica (elipse ou hipérbole) que contém o ponto Q , sendo possível, no máximo, duas construções distintas. A construção será impossível se Q está no interior da elipse ou dentro de um ramo da hipérbole.

Axioma 9 – Dados dois pontos P e Q , uma reta m e uma circunferência Φ , onde P e Q não pertencem a Φ e m , respectivamente. Podemos construir um número finito de retas, fazendo P coincidir com Φ e Q com m , simultaneamente, ou a construção é impossível.

Figura 21 – Axioma 9

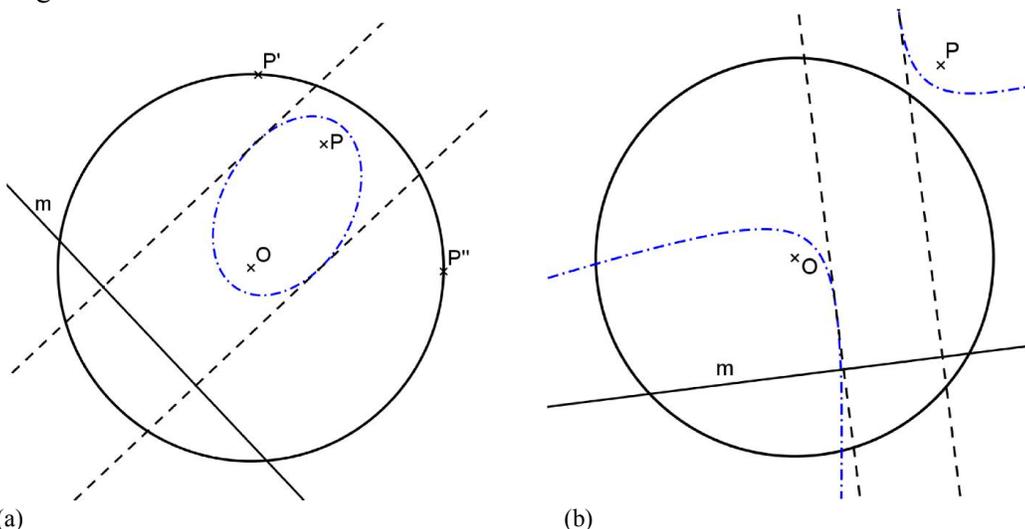


(a) Legenda: (a) - Axioma 9 com “P” interior à circunferência; (b) - Axioma 9 com “P” exterior à circunferência.
 Fonte: O autor, 2014.

A dobra construída é uma tangente comum à cônica (elipse ou hipérbole) e a parábola de foco Q e diretriz m. Podemos construir um número máximo de quatro tangentes comuns. Se a parábola encontra-se completamente dentro de um dos ramos da hipérbole ou a elipse estiver dentro da parábola, a construção é impossível.

Axioma 10 – Dados um ponto P, uma reta m e um círculo Φ , tal que P não pertence à Φ . Podemos construir um número finito de retas fazendo P sobrepor Φ e m sobre si mesma, simultaneamente, ou a construção é impossível.

Figura 22 – Axioma 10



(a) Legenda: (a) - Axioma 10 com “P” interior à circunferência; (b) - Axioma 10 com “P” exterior à circunferência.
 Fonte: O autor, 2014.

A dobra construída pelo axioma 10 é uma tangente à cônica (elipse ou hipérbolo), perpendicular à reta m . Podemos contruir no máximo duas dobras para cada caso, sendo sempre possível a construção para o caso do ponto P ser interior à circunferência e impossível para o caso de P ser exterior, quando m for paralela ao eixo conjugado da hipérbolo.

2.4 Verificação de que a lista de axiomas é completa

No artigo *Origami and Origamic Constructions*⁵, Robert Lang prova que a lista dos sete axiomas de Huzita é completa. O leitor interessado numa prova mais detalhada e com uma abordagem analítica das reflexões pode consultar o artigo.

Levando em consideração a inclusão da circunferência e com isso, o acréscimo de três novos axiomas, mostraremos que a lista de 10 axiomas também é completa como Kasem, Ghourabi e Ida (2011, p. 1110) apresentam em seu artigo. Faremos de maneira mais resumida, uma vez que a discussão dos casos onde a execução da dobra é impossível e a inviabilidade de sobreposição entre reta e circunferência e entre duas circunferências já foram tratadas.

Devemos analisar as possibilidades de sobreposições entre pontos (P), retas (r) e circunferências (Φ), e representaremos a operação reflexão, por exemplo, entre um ponto P_n e uma reta r_n por $P_n \leftrightarrow r_n$. Deste modo, temos que as sobreposições $P_1 \leftrightarrow P_2$ e $r_1 \leftrightarrow r_2$, com $P_1 \neq P_2$ e $r_1 \neq r_2$, correspondem aos axiomas A_2 e A_3 , respectivamente.

A tabela abaixo mostra, por enumeração, todas as operações que podemos efetuar, com uma única dobra, entre ponto, reta e circunferência.

Tabela 1 – Verificação da completude dos axiomas

	$r_1 \leftrightarrow r_1$	$P_1 \leftrightarrow r_1$	$P_1 \leftrightarrow P_1$	$P_1 \leftrightarrow \Phi_1$
$r_2 \leftrightarrow r_2$	*	A_7	A_4	A_{10}
$P_2 \leftrightarrow r_2$	A_7	A_6	A_5	A_9
$P_2 \leftrightarrow P_2$	A_4	A_5	A_1	A_8
$P_2 \leftrightarrow \Phi_2$	A_{10}	A_9	A_8	**

Fonte: O autor, 2014.

⁵ Disponível em: http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

O caso de sobreposições de duas retas, simultaneamente, sobre elas mesmas (*) só é possível se as retas forem paralelas e a dobra obtida será uma perpendicular comum às duas retas. No caso em que as retas forem concorrentes, a dobra será impossível. Dados dois pontos e duas circunferências, a sobreposição de cada ponto com uma circunferência (**), quando for possível, será de execução imprecisa e não acrescentará nenhuma nova propriedade.

Verificamos pela Tabela 1 que todas as combinações correspondem a um único dos axiomas de Huzita-Hatori ou a um dos axiomas da extensão com circunferência, o que permite concluir a completude da lista dos axiomas.

3 PROBLEMAS RESOLVIDOS POR DOBRADURA

3.1 O Teorema de Haga

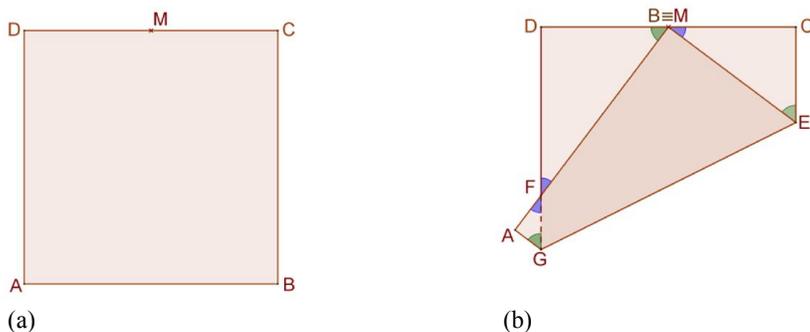
Em algumas construções por origami necessitamos dividir um dos lados do papel origami em três partes iguais, sendo o Teorema de Haga uma ferramenta poderosa para essas construções.

Este teorema foi originalmente formulado por Koji Fusimi que o chamou por “Teorema de Haga”, mais tarde, o próprio Kazuo Haga descobriu outras duas construções possíveis para executar esta divisão.

3.1.1 Construção 1 para o Teorema de Haga

Consideremos o papel origami como um quadrado de aresta unitária e de vértices A , B , C e D . Sobre o lado \overline{CD} marcamos o ponto médio M . Fazendo coincidir B com M , temos:

Figura 23 – Teorema de Haga 1



Legenda: (a) - Construção de M sobre \overline{CD} ; (b) - Construção do teorema de Haga.
Fonte: O autor, 2014.

Na Figura 23.b, podemos observar que os ângulos $\widehat{CME} + \widehat{CEM} = 90^\circ$, deste modo, $\widehat{DBF} = \widehat{CEM}$ e $\widehat{DFB} = \widehat{CME}$ e os triângulos retângulos ΔCEM e ΔDMF são semelhantes.

No triângulo ΔCEM temos que $\overline{EM} = 1 - \overline{CE}$ e aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$(\overline{EM})^2 = (\overline{CE})^2 + (\overline{CM})^2$$

$$(1 - \overline{CE})^2 = (\overline{CE})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 - 2\overline{CE} + (\overline{CE})^2 = (\overline{CE})^2 + \frac{1}{4}$$

$$\overline{CE} = \frac{3}{8} \overline{EM} = \frac{5}{8}$$

Da semelhança dos triângulos $\triangle CEM$ e $\triangle DMF$ obtemos a seguinte proporcionalidade:

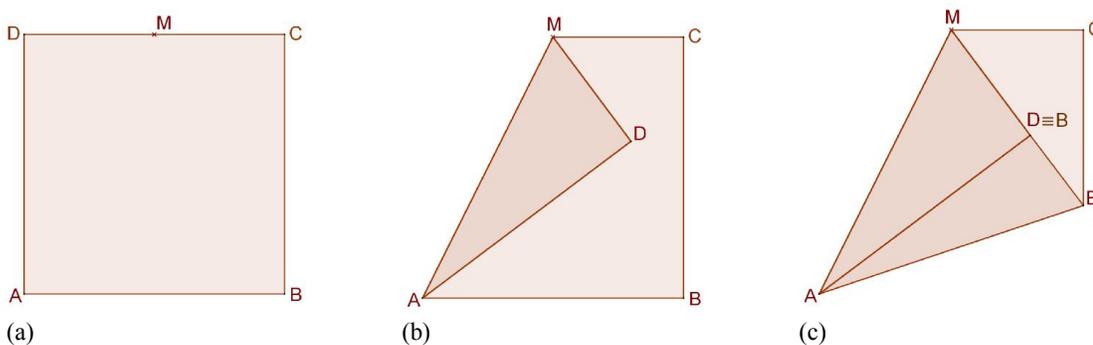
$$\overline{CE} : \frac{1}{2} :: \frac{1}{2} : \overline{DF}$$

Como $\overline{CE} = \frac{3}{8}$, temos que $\overline{DF} = \frac{2}{3}$ e sendo F o ponto que divide o lado \overline{AD} na sua terça parte com $\overline{AF} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ ■

3.1.2 Construção 2 para o Teorema de Haga

Consideremos o papel origami como um quadrado de aresta unitária e de vértices A , B , C e D . Sobre o lado \overline{CD} marcamos o ponto médio M . Construindo a dobra que contém os pontos A e M (Figura 24.b) e fazendo o ponto B coincidir com o ponto D , como indicado na Figura 24.c, temos:

Figura 24 – Teorema de Haga 2



Legenda: (a) - Construção de M sobre \overline{CD} ; (b) - Construção do teorema de Haga 2, passo 1; (c) - construção do teorema de Haga 2, passo 2.

Fonte: O autor, 2014

Na Figura 24.c, temos que \overline{AD} coincide com \overline{AB} , $\widehat{MDA} = 90^\circ$ e $\widehat{EBA} = 90^\circ$ e temos que os pontos E , D e M estão alinhados. Como M é ponto médio, temos, no triângulo $\triangle CME$, que $\overline{MC} = \overline{MD} = \frac{1}{2}$ e $\overline{CE} = 1 - \overline{DE}$ e pelo teorema de Pitágoras tiramos:

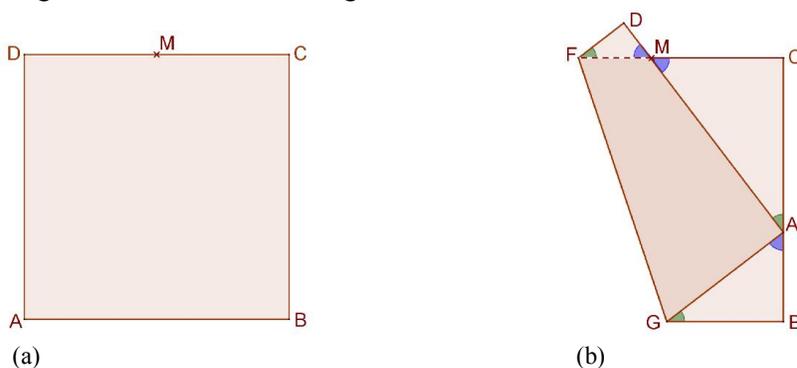
$$\begin{aligned}(\overline{ME})^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\overline{CE})^2 \\ \left(\frac{1}{2} + \overline{DE}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\overline{CE})^2 \\ \left(\frac{1}{2} + \overline{DE}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - \overline{DE})^2 \\ \frac{1}{4} + \overline{DE} + (\overline{DE})^2 &= \frac{1}{4} + 1 - 2\overline{DE} + (\overline{DE})^2 \\ 3\overline{DE} &= 1 \\ \overline{DE} &= \frac{1}{3} \blacksquare\end{aligned}$$

Com isso, construímos o ponto E que divide o lado \overline{BC} em sua terça parte.

3.1.3 Construção 3 para o Teorema de Haga

Consideremos o papel origami como um quadrado de aresta unitária e de vértices A , B , C e D . Sobre o lado \overline{CD} marcamos o ponto médio M . Construindo a dobra que faz coincidir o ponto M com o segmento \overline{AD} e o ponto A com o segmento \overline{BC} , simultaneamente, como indica nas figuras abaixo.

Figura 25 – Teorema de Haga 3



Legenda: (a) - construção de M sobre \overline{CD} ; (b) - Construção do teorema de Haga 3.
Fonte: O autor, 2014.

Na figura 25, identificando os ângulos congruentes podemos mostrar que os triângulos retângulos ΔFDM e ΔACM são semelhantes e fazendo $\overline{FM} = a$, $\overline{MD} = b$, $\overline{AC} = y$ e sendo $\overline{CM} = \frac{1}{2}$, temos $\overline{AM} = 1 - b$ e $\overline{FD} = \frac{1}{2} - a$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔFDM , temos:

$$a^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + b^2$$

$$a^2 = \frac{1}{4} - a + a^2 + b^2$$

$$b^2 = a - \frac{1}{4}$$

Da semelhança dos triângulos ΔFDM e ΔACM obtemos a seguinte proporcionalidade:

$$bx :: \frac{1}{2} : (1 - b)$$

$$b - b^2 = \frac{a}{2}$$

Substituindo b^2 pela expressão anterior, temos:

$$b - a + \frac{1}{4} = \frac{a}{2}$$

$$b = \frac{6a - 1}{4}$$

Com isso, passamos a ter todos os lados do triângulo ΔFDM expressos em função de “a” e aplicando novamente o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + b^2$$

$$a^2 = \frac{1}{4} - a + a^2 + \left(\frac{6a - 1}{4}\right)^2$$

$$36a^2 - 28a + 5 = 0$$

Obtemos as raízes $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{18}$, mas como o segmento \overline{FM} deve ser menor que $\frac{1}{2}$, temos que $a = \frac{5}{18}$ e sendo assim, $b = \frac{1}{6}$.

Recorrendo novamente ao teorema de Pitágoras agora no triângulo ΔCME , obtemos:

$$(1 - b)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

$$y = \frac{2}{3} \blacksquare$$

Construímos que a construção do ponto A' , reflexão de A sobre o segmento \overline{BC} , divide este lado em sua terça parte.

3.2 Os Problemas Clássicos

Na Grécia antiga surgiram os três problemas geométricos que, durante muito tempo, serviram de fonte de estudos e esforços de diversos matemáticos na busca de soluções, desempenhando importante papel no desenvolvimento da matemática, como afirma Robert Yates:

[...]Por meio deste estímulo surgiu grande parte das estruturas atuais da álgebra e geometria.

A procura constante de soluções para os três problemas durante tanto tempo forneceu descobertas espantosamente frutíferas, às vezes achadas por sorte pura e que lançaram luz sobre tópicos bem distantes. (YATES, 1971, p. 5)

A duplicação do cubo, a trisseção de um ângulo qualquer e a quadratura do círculo são considerados os três problemas clássicos da antiguidade, dos quais Francisco Mattos comenta sobre os aspectos históricos:

Embora o problema da quadratura do círculo tenha se tornado o mais famoso dos três problemas clássicos nos tempos modernos, principalmente entre matemáticos amadores, o problema da duplicação do cubo foi provavelmente o mais famoso no tempo dos antigos Gregos. (MATTOS, 2001, p. 9)

Um grande fator que dificultou a obtenção de soluções para estes problemas foram as restrições impostas pelo emprego dos instrumentos euclidianos, a régua não graduada e o compasso, uma vez que, aplicando outros recursos alguns matemáticos desenvolveram novos tipos de instrumentos e métodos de construções, conseguindo encontrar algumas soluções, como Elisandra Figueiredo relata em seu artigo:

[...] os gregos buscaram descobrir novos meios que os levassem a uma solução. Por exemplo, constataram que a duplicação do cubo podia ser resolvida com a intersecção ou de duas parábolas ou de uma hipérbole equilátera com uma parábola. Ainda nesse contexto, foram realizados grandes avanços na área da Geometria com a descoberta de diversas curvas exóticas, tais como a conchoide de Nicomedes, a cissoide de Diocles e a espiral de Arquimedes. (FIGUEIREDO, 2013, p. 41)

Somente no século XIX foi possível demonstrar a impossibilidade de resolvê-los, quando Pierre Laurent Wantzel, em 1837, demonstrou sob quais condições um número real é construtível com régua e compasso.

O fato dos gregos despenderem muito tempo, sem sucesso, na busca de soluções sem chegarem à conclusão da impossibilidade não é motivo de juízo pelo que afirma Francisco Mattos:

A prova da impossibilidade de tais construções se baseia no uso de conceitos matemáticos não triviais, utilizando álgebra abstrata, que eram ferramentas não disponíveis aos antigos matemáticos gregos e mesmo hoje estão fora do alcance da maioria dos estudantes e professores dos ensinos médio e fundamental. (Op. cit., p. 8)

Usando os métodos de construção por dobradura Origami, é possível obter solução para a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo usando apenas uma folha de papel e as técnicas adequadas.

3.2.1 Solução dos Problemas Clássicos por Origami

3.2.1.1 Trissecção de um Ângulo Qualquer

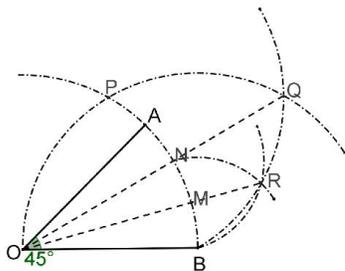
Não há relatos de nenhum fato histórico associado à origem do problema da trissecção de um ângulo qualquer, creditando-se a Hípias de Elis, que viveu no século V a.C. as primeiras tentativas de encontrar uma solução utilizando curvas.

Um aspecto interessante na trissecção de ângulos é o fato de que, para alguns ângulos, a construção com régua e compasso é possível e de fácil execução.

Veremos, então, a trissecção com régua e compasso dos ângulos de 90° e 45° .

Dado um ângulo $\widehat{AOB} = 45^\circ$, traçar o arco de centro O e raio \overline{OB} , e o arco de mesmo raio e centro em B , obtendo P a interseção destes arcos. Traçando um terceiro arco de centro P e raio \overline{PB} , obtemos o ponto Q , como indicado na Figura 26. Deste modo, obtemos os ângulos $\widehat{NOB} = 30^\circ$ e $\widehat{AON} = 15^\circ$. Executando a bissecção de \widehat{NOB} concluímos a trissecção do ângulo de 45° .

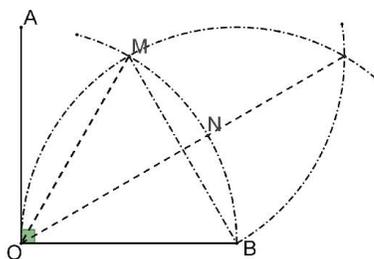
Figura 26 – Trissecção do ângulo de 45°



Fonte: O autor, 2014.

Seja um ângulo reto \widehat{AOB} (Figura 27), traçar o arco de centro O e raio \overline{OB} e o de mesmo raio e centro em B , sendo M a interseção destes arcos. Temos que o triângulo OMB é equilátero, $\widehat{BOM} = 60^\circ$ e $\widehat{AOM} = 30^\circ$. Executando a bissecção de \widehat{BOM} , concluímos a trissecção do ângulo de 90° .

Figura 27 – Trissecção do ângulo de 90°



Fonte: O autor, 2014.

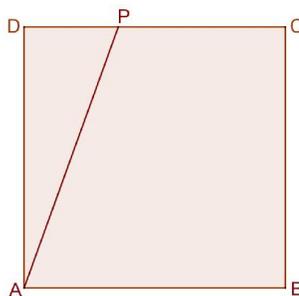
Apesar da existência destas construções não é possível generalizarmos a solução, com régua e compasso, para um ângulo arbitrário.

Para a solução da trissecção de um ângulo qualquer existem diversas tipos soluções mecânicas que o leitor interessado no assunto pode encontrar em “Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega” de João Pitombeira de Carvalho onde são apresentas algumas construções como as desenvolvidas por: Arquimedes, por Nicomedes e a usando Quadratriz.

Apresentaremos, a seguir, o método de trissecção de um ângulo qualquer desenvolvido por Hisashi Abe publicada em 1980, no Japão.

Seja uma folha de papel quadrado de vértices A , B , C e D e, sem perda de generalidade, considere o ângulo agudo \widehat{PAB} , com $P \subset \overline{CD}$.

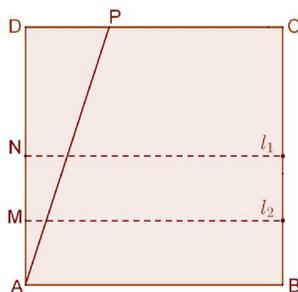
Figura 28 – Trissecção do
ângulo agudo



Fonte: O autor, 2014.

Construir a dobra l_1 , mediatriz de \overline{AD} marcando o ponto N sobre \overline{AD} e construir a dobra l_2 , mediatriz de \overline{NA} marcando o ponto M sobre \overline{AD} (Axioma 2).

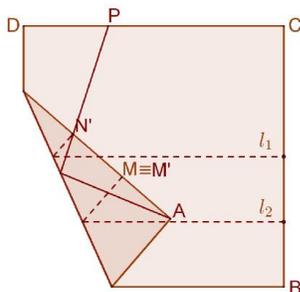
Figura 29 – Trissecção do ângulo
agudo, passo 1



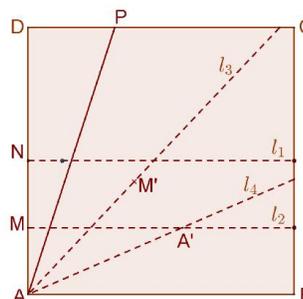
Fonte: O autor, 2014.

Dobrar o papel fazendo o ponto A coincidir com l_2 e o ponto N com \overline{AP} , simultaneamente (Axioma 6). Marcar o ponto $M' \equiv M$ sobre o papel. Construindo as dobras l_3 que contém os pontos A e M' e a dobra l_4 que contém os pontos A e A' (Axioma 1), está concluída a trissecção do ângulo \widehat{BAP} .

Figura 30 – Trissecção do ângulo agudo



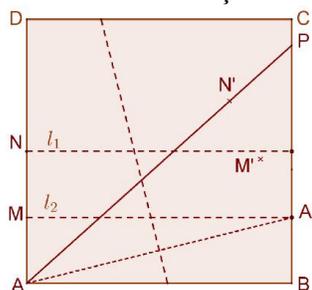
(a)



(b)

Legenda: (a) - Trissecção do ângulo agudo, passo 2; (b) - Trissecção do ângulo agudo, passo 3.
Fonte: O autor, 2014.

Figura 32 – Situação limite de A' na trisseção

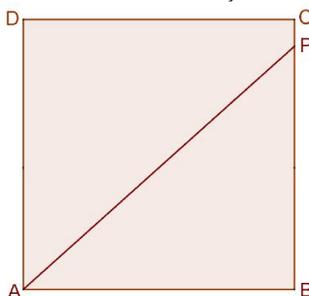


Fonte: O autor, 2014.

Apresentaremos uma variação para a construção da trisseção de um ângulo para afastar esta impossibilidade.

Dado uma folha de papel quadrado de vértices A, B, C e D , e sobre o lado \overline{BC} temos o ponto P e deste modo $\widehat{BAP} < 45^\circ$.

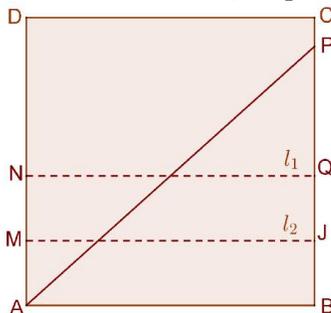
Figura 33–Variação da trisseção



Fonte: O autor, 2014.

Construir a mediatriz relativa aos pontos B e P , determinando a dobra l_1 tal que $N = l_1 \cap \overline{AD}$ e $Q = l_1 \cap \overline{BC}$. Construir a mediatriz relativa aos pontos B e Q , definindo a dobra l_2 , tal que $M = l_2 \cap \overline{AD}$ e $J = l_2 \cap \overline{BC}$ (Figura 34).

Figura 34 – Variação da trisseção, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Construir, como indicado na Figura 35.a, a dobra que faz o ponto A coincidir com l_2 e o ponto N com \overline{AP} , simultaneamente (Axioma 6). Marcar o ponto $M' \equiv M$ sobre o papel. As dobras l_3 que contém os pontos A e M' e a dobra l_4 que contém os pontos A e A' (Axioma 1).

Figura 35 – Variação da Trissecção



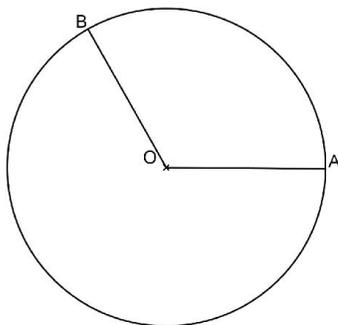
(a) Variação da trissecção, passo 2; (b) Variação da trissecção, passo 3.
 Fonte: O autor, 2014.

Aplicando raciocínio análogo ao da primeira construção da trissecção de um ângulo, podemos mostrar que os ângulos $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{A'AM'} \equiv \widehat{M'AN'}$ e está obtida a trissecção do ângulo $\widehat{BAN'}$ (Figura 35.b)..

Outra construção interessante é a da trissecção do um ângulo obtuso, de Jacques Justin e apresentada por Robert J. Lang (2003).

Dado um ângulo \widehat{AOB} obtuso marcado em uma circunferência, com o vértice do ângulo coincidente com o centro da circunferência.

Figura 36 – Trissecção do ângulo obtuso

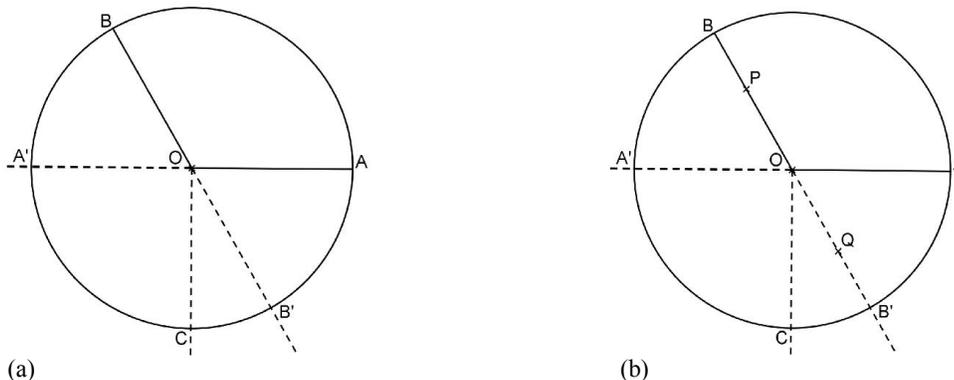


Fonte: O autor, 2014

Dobra o papel ao longo de \overline{AO} e \overline{BO} , prolongando estes segmentos e construir a perpendicular a $\overline{AA'}$ pelo ponto O (Figura 37.a). Marcar, com um compasso, sobre o segmento

\overline{BO} e sobre seu prolongamento, dois pontos equidistantes em relação ao centro O , como indica a Figura 37.b.

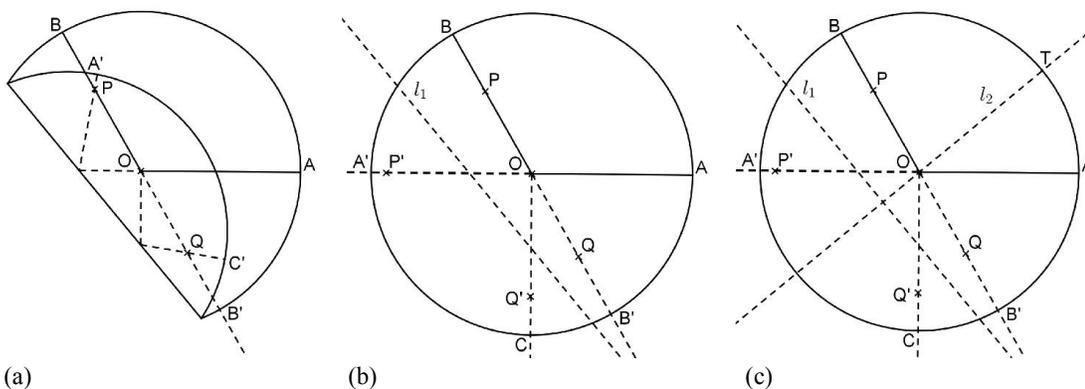
Figura 37 – Trissecção do ângulo obtuso



(a) Trissecção do ângulo obtuso, passo 1; (b) Trissecção do ângulo obtuso, passo 2.
 Fonte: O autor, 2014.

Fazendo o ponto P coincidir com \overline{AO} e o ponto Q com \overline{CO} , simultaneamente, (Axioma 6) marcando a dobra l_1 , como indicado na Figura 40.a. Fazendo a reflexão de l_1 sobre si mesma, construir l_2 , perpendicular a l_1 e que contém O (Axioma 4). Temos que l_2 intersecta a circunferência no ponto T e o ângulo $\widehat{AOT} = \frac{\widehat{AOB}}{3}$.

Figura 38 – Trissecção do ângulo obtuso

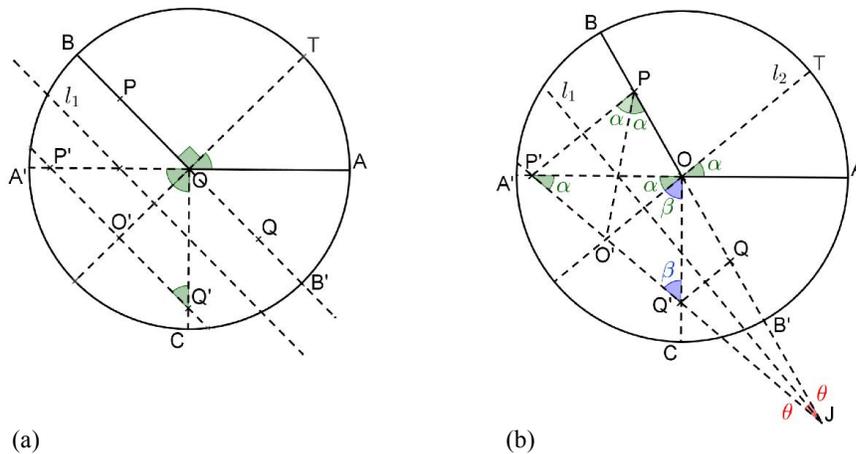


(a) Trissecção do ângulo obtuso, passo 3; (b) Trissecção do ângulo obtuso, passo 4;
 (c) Trissecção do ângulo obtuso, passo 5.
 Fonte: O autor, 2014.

Para verificar a validade da construção devemos observar que, depois de marcados os pontos P' e Q' , podemos construir o segmento $\overline{P'Q'}$ e a construção de l_1 é equivalente ao axioma 3. Assim, l_1 é bissetriz de \overline{PQ} e $\overline{P'Q'}$ e, deste modo, os segmentos l_1 , \overline{PQ} e $\overline{P'Q'}$

podem ser paralelos ou concorrentes. Nos casos em que os segmentos l_1 , \overline{PQ} e $\overline{P'Q'}$ são concorrentes, podemos afirmar, sem perda de generalidade, que se intersectam no ponto J .

Figura 39 – Prova da trisseção do ângulo obtuso



(a)
Fonte: O autor, 2014.

(b)

No caso em que l_1 , \overline{PQ} e $\overline{P'Q'}$ são paralelas (Figura 39. a), temos que, por construção, $\overline{OP} = \overline{OQ}$ e consequentemente $\overline{O'P'} = \overline{O'Q'}$; o segmento $\overline{O'T}$ é perpendicular à l_1 e mediatriz de $\overline{P'Q'}$. Deste modo, o triângulo $\Delta P'OQ'$ é isósceles e podemos concluir que $\widehat{AOB} = 135^\circ$, $\widehat{AOT} = 45^\circ$ e a trisseção é válida.

Na Figura 39. b, o triângulo $\Delta OJO'$ é isósceles e uma vez que $\overline{PP'} \parallel \overline{OO'}$, temos:

$$\widehat{O'OJ} = 90^\circ - \theta = 2\alpha \text{ (I)}$$

Mas do triângulo $\Delta P'OO'$, retângulo em O , temos que:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ (II)}$$

Fazendo a substituição adequada, vem que:

$$\alpha = \beta - \theta$$

Temos ainda, do triângulo $\Delta OQ'J$, que o ângulo $\widehat{Q'OJ} = \beta - 2\theta$.

Dos ângulos \widehat{TOB} e $\widehat{O'OQ}$, opostos pelo vértice, tiramos que:

$$\widehat{TOB} = \widehat{O'OQ}$$

$$\widehat{TOB} = \widehat{O'OQ'} + \widehat{Q'OJ}$$

$$\widehat{TOB} = \beta + \beta - 2\theta$$

$$\widehat{TOB} = 2(\beta - \theta), \text{ logo:}$$

$$\widehat{TOB} = 2\alpha \blacksquare$$

E a trisseção do ângulo obtuso está comprovada.

3.2.1.2 Duplicação do Cubo

A origem do problema de duplicação do cubo é incerta, sendo a mais amplamente conhecida a citada num dos trabalhos de Eratóstenes onde este relata que certa vez, na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos, local do santuário de Apolo, sofrendo com uma grande peste que assolava seu povo, recorreram ao oráculo perguntando o que fazer para combater àquela peste. A resposta teria sido de que o altar de Apolo, de formato cúbico, devia ser duplicado.

Este fato aconteceu por volta de 430 a.C e parece ser a origem do problema de duplicação do cubo, também conhecido como “problema deliano”, que se tornou um dos problemas clássicos da Antiguidade.

Inicialmente podemos pensar que se trata de um problema de geometria espacial mas, na verdade, o problema consiste em: dado um cubo, construir um segmento de reta tal que um segundo cubo, que tenha aresta com medida igual a do segmento, tenha o dobro do volume do primeiro.

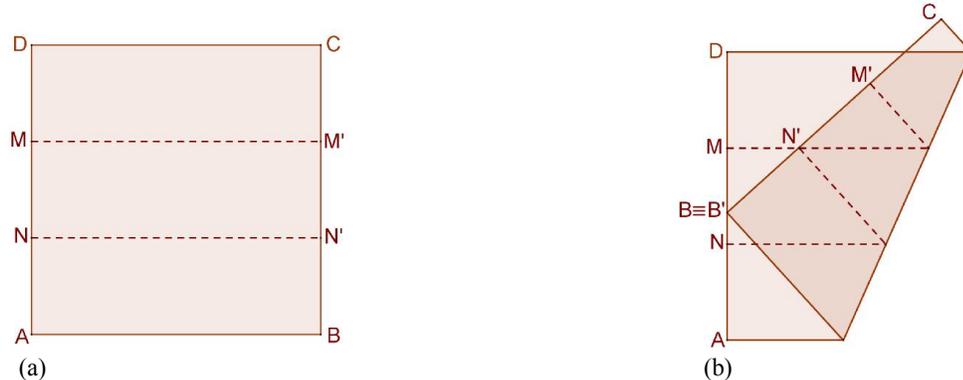
A solução deste problema, apenas com régua não graduada e compasso, é impossível, mas existem alguns métodos que permitem tal construção, das quais podemos citar a solução de Menécmo, a máquina de Platão, a máquina de Eratóstenes, a solução de Nicomedes, a construção de Árquitas, o método de Diocles e o método de Hirão que o leitor interessado encontra com detalhes em “Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega” de João Pitombeira de Carvalho (2009).

Apresentaremos a solução de duplicação do cubo por dobradura Origami, utilizando o método desenvolvido por Peter Messer.

Seja uma folha de papel quadrado de vértices A , B , C e D .

Aplicando uma das construções do teorema de Haga, dividir um o lado \overline{AD} em três segmentos iguais definindo os pontos N e M . Marcar duas perpendiculares ao lado \overline{AD} por M e N , construindo os segmentos $\overline{MM'}$ e $\overline{NN'}$. Fazer coincidir o ponto B com o segmento \overline{AD} e o ponto N' com o segmento $\overline{MM'}$, simultaneamente (Axioma 6), marcando o ponto B' sobre \overline{AD} .

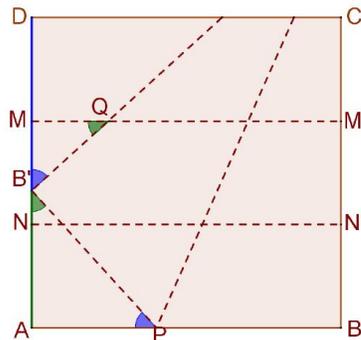
Figura 40 – Duplicação do cubo



Legenda: (a) - Duplicação do cubo, passo 1; (b) - Duplicação do cubo, passo 2.
Fonte: O autor, 2014.

Consideremos, sem perda de generalidade, que o segmento $\overline{AB'} = 1$ para facilitar os cálculos e denotando $\overline{BD} = x$ e $\overline{AP} = z$. Assim, o lado do quadrado terá por medida $(1 + x)$. Temos que mostrar que $\overline{BD} = \sqrt[3]{2}$.

Figura 41– Prova da duplicação do cubo



Fonte: O auto, 2014.

Aplicando o teorema de Pitágoras dos lados do triângulo ΔABP , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{B'P})^2 &= (\overline{AB'})^2 + (\overline{AP})^2 \\ (x + 1 - z)^2 &= 1^2 + z^2 \\ x^2 + 1 + z^2 + 2x - 2xz - 2z &= 1 + z^2 \\ -2xz - 2z &= -x^2 - 2x \\ z(2x + 2) &= x^2 + 2x \\ \overline{AP} = z &= \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \end{aligned}$$

Expressando \overline{BM} em função de x e lembrando que \overline{DM} e $\overline{B'Q}$ têm por medida a terça parte do lado do quadrado, temos:

$$\overline{B'M} = \overline{B'D} - \overline{DM}$$

$$\overline{B'M} = x - \frac{(1+x)}{3}$$

$$\overline{B'M} = \frac{2x-1}{3}$$

Podemos notar que os triângulos retângulos $\Delta APB'$ e $\Delta MQB'$ são semelhantes, do que tiramos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{B'P}} = \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'Q}}$$

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{x+1 - \frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}}$$

$$(x^2+2x)(x+1) = (2x-1)[(2x+2)(x+1) - (x^2+2)]$$

$$x^3+3x^2+2x = 2x^3+3x^2+2x-2$$

$$x^3 = 2$$

$x = \sqrt[3]{2}$, como queríamos demonstrar. ■

A construção de Messer mostra a possibilidade de obtermos $\sqrt[3]{2}$, considerando o segmento $\overline{AB'}$ como unitário, mas não deixa claro como determinar o lado do quadrado de modo que $\overline{AB'}$ corresponda ao comprimento desejado.

Apresentaremos outra construção para a duplicação do cubo.

Seja um cubo de aresta a_1 e volume V_1 , o problema consiste em encontramos outro cubo de aresta a_2 e volume V_2 , de tal forma que:

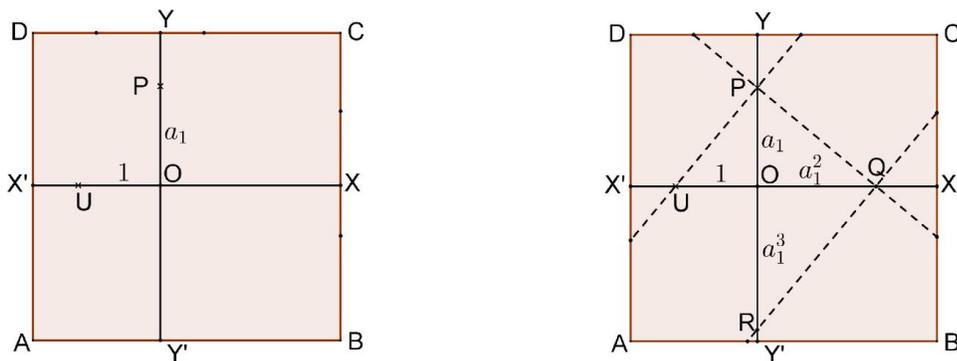
$$V_2 = 2V_1$$

$$a_2^3 = 2a_1^3$$

$$a_2 = \sqrt[3]{2a_1^3}$$

Devemos, inicialmente, construir o segmento de medida a_1^3 e para tal utilizamos uma folha de papel onde foram marcados os eixos coordenados. Sobre $\overline{OX'}$ marcamos a unidade $\overline{OU} = 1$ e sobre $\overline{OY'}$, $\overline{OP} = a_1$.

Marcar a reta que contém os pontos U e P. Construir a um segmento perpendicular a \overline{UP} que contém P. Essa perpendicular intersecta $\overline{OX'}$ em Q. Por último, construir uma perpendicular a \overline{PQ} pelo ponto Q. Essa perpendicular intersecta $\overline{OY'}$ em R.

Figura 42 – Construção do segmento a_1^3 

Fonte: O autor, 2014.

Deste modo, do triângulo ΔUPQ , retângulo em P, temos que:

$$\overline{OU} \overline{OQ} = (\overline{OP})^2$$

$$1 \overline{OQ} = (a_1)^2$$

$$\overline{OQ} = a_1^2$$

Da mesma forma, temos no triângulo ΔPQR , retângulo em Q:

$$\overline{OP} \overline{OR} = (\overline{OQ})^2$$

$$a_1 \overline{OR} = (a_1^2)^2$$

$$\overline{OR} = a_1^3$$

Construímos assim, o segmento de medida a_1^3 que pode ser facilmente duplicado e devemos construir o segmento de medida $\sqrt[3]{2a_1^3}$.

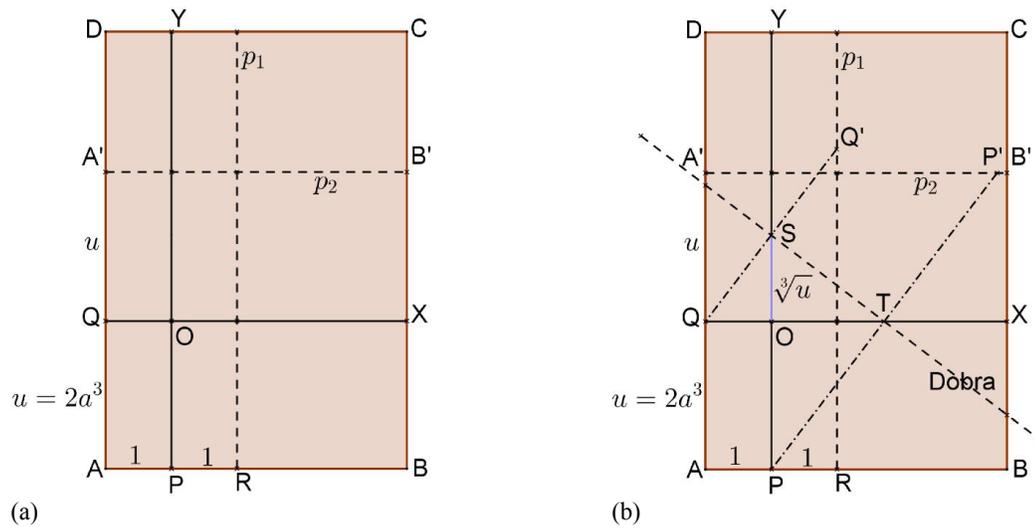
Tomemos o retângulo ABCD de dimensão suficientes para as seguintes construções:

Sobre \overline{AB} , marcar os pontos P e R, tais que, $\overline{AP} = \overline{PR} = 1$ e sobre \overline{AD} marcar os pontos Q e A', de modo que, $\overline{AQ} = \overline{QA'} = u$ ($u = 2a_1^3$).

Construir perpendiculares a \overline{AB} , pelos pontos P e R e perpendiculares ao segmento \overline{AD} , pelos pontos Q e A' (Figura 43.a).

Aplicando o axioma 6, fazer coincidir, simultaneamente, o ponto Q com o segmento p_1 e o ponto P como o segmento p_2 , construindo a dobra indicada na Figura 43.b.

Figura 43 – Solução da duplicação do cubo



(a)

Fonte: O autor, 2014.

(b)

No triângulo ΔQST , retângulo em S, temos:

$$\overline{QO} \overline{OT} = (\overline{OS})^2$$

$$\overline{OT} = (\overline{OS})^2$$

Temos que no triângulo ΔSTP , retângulo em T:

$$\overline{OS} \overline{OP} = (\overline{OT})^2$$

Fazendo as substituições adequadas, temos:

$$\overline{OS}u = (\overline{OS})^4$$

$$u = (\overline{OS})^3$$

$$\overline{OS} = \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{2a^3} \blacksquare$$

3.2.1.3 A Quadratura do Círculo

Sobre a impossibilidade da quadratura do círculo, destacamos o que escreve Owen:

O problema da quadratura do círculo, isto é, de construir com régua e compasso (o lado de) um quadrado com área igual à de um círculo dado com raio não nulo, é bastante mais difícil do que os outros dois por assentar numa distinção mais fina de tipos de números e resultados de Análise Matemática. (BRISON, 2001, p.49)

Em 1882, Lindemann demonstrou, utilizando análise matemática, que o número π é transcendente logo, não é construtível e o círculo não é “quadrável”.

4 CONTRUÇÕES GEOMÉTRICA COM DOBRADURAS

Na Grécia antiga, a palavra números significava números inteiros o que, na verdade, correspondia aos números naturais. Não se conheciam os números negativos nem os números racionais, as frações eram consideradas apenas a razão entre dois números inteiros. Diante dessa dificuldade, os gregos passaram a associar grandezas a segmentos de reta, desenvolvendo a álgebra através de conceitos geométricos, utilizando a palavra resolver com o sentido de construir.

Euclides (330 – 275 a. C.) no livro IV da sua obra “Elementos” apresenta construções, com régua não graduada e compasso, para os polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 15 lados (indicaremos por P_n o polígono de n lados). O fato dessa lista não contar com as construções dos polígonos de P_7 e P_9 gerou grande dúvida se de fato eram construtíveis ou não.

Em 1796 Gauss (1777-1855) relacionou, pela primeira vez, a construção de polígonos regulares com as raízes da equação $x^n - 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}, n > 3$), onde cada vértice é representando pelas soluções complexas daquela equação, provando ser impossível construir, apenas com régua e compasso, os polígonos de 7 e 9 lados.

Apesar de ter usado somente recursos algébricos em sua demonstração da impossibilidade de construção do P_7 e P_9 , Gauss construiu, usando regras das construções euclidianas, o polígono de 17 lados. Se no polígono P_n , n é primo, Gauss provou que o polígono só será construtível se e somente se n for da forma $2^{2^m} + 1$ (Primos de Fermat).

A respeito de construções geométricas, vale ressaltar o que dizem Courant e Robbins:

Ao lidar com construções geométricas, nunca se deve esquecer de que o problema não consiste em desenhar figuras na prática com certo grau de exatidão, mas que uma solução possa ser ou não encontrada teoricamente, utilizando apenas régua e compasso, supondo que os instrumentos tenham uma exatidão perfeita[...] (COURANT, 2000)

Nas construções por origami não levamos em conta a habilidade de quem executa as dobras, o tamanho do papel nem a perfeição da construção, o que devemos considerar é que com utilização dos axiomas e dos procedimentos geométricos do origami, seja possível obter a construção pretendida, mesmo que seja inviável de executá-la na prática.

4.1 Polígonos Construtíveis

Apresentaremos as construções de polígonos por origami, descrevendo os passos para a execução das construções, bem como as justificativas que envolvem cada uma delas. Alguns polígonos possuem várias construções possíveis, das quais, serão apresentadas as que consideramos mais importantes.

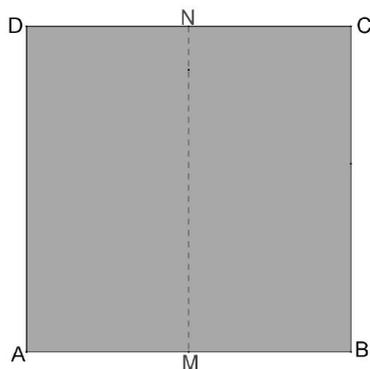
4.1.1 Triângulo Equilátero

1ª Construção

Utilizando um papel quadrado de vértices A , B , C e D com, sem perda de generalidade, lado medindo uma unidade de comprimento.

Construir a dobra \overline{MN} pelo axioma 2, fazendo coincidir \overline{AD} com \overline{BC} . A reta \overline{MN} é mediatriz de \overline{AB} .

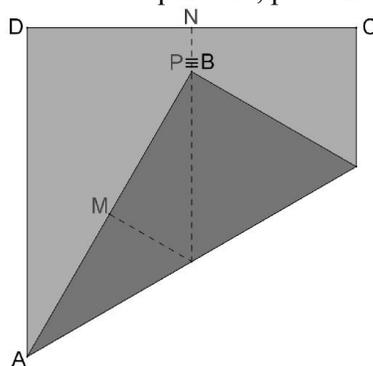
Figura 44 – Construção do triângulo equilátero, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Fazer coincidir o ponto B com o segmento \overline{MN} , fixando A (Axioma 5), marcando sobre \overline{MN} o ponto $P \equiv B$. Deste modo, $\overline{AP} \equiv \overline{AB}$ (Figura 45).

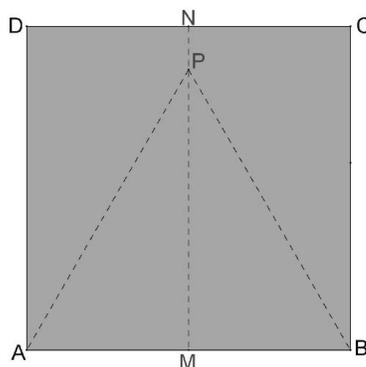
Figura 45 – Construção do triângulo equilátero, passo 2



Fonte: O autor, 2014.

Construir os segmentos \overline{AP} e \overline{BP} pelo axioma 1. Como $\overline{AP} = \overline{AB}$ e \overline{MN} é mediatriz de \overline{AB} , $\overline{AP} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{BP}$ e o triângulo ΔABP é equilátero.

Figura 46 – Construção do triângulo equilátero, passo 3



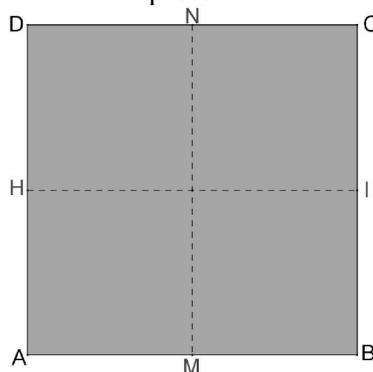
Fonte: O autor, 2014.

2ª Construção

Nessa construção, vamos obter o triângulo equilátero máximo. Utilizando um papel quadrado de vértices A , B , C e D com, sem perda de generalidade, lado medindo uma unidade de comprimento.

Construir a dobra \overline{MN} , fazendo coincidir \overline{AD} com \overline{BC} . Fazendo coincidir \overline{AB} com \overline{CD} , marcar a dobra \overline{HI} . Pelo axioma 2, temos que \overline{MN} é mediatriz de \overline{AB} , e \overline{HI} é mediatriz \overline{AD} (Figura 49).

Figura 47 – Construção 2 do triângulo equilátero, passo 1

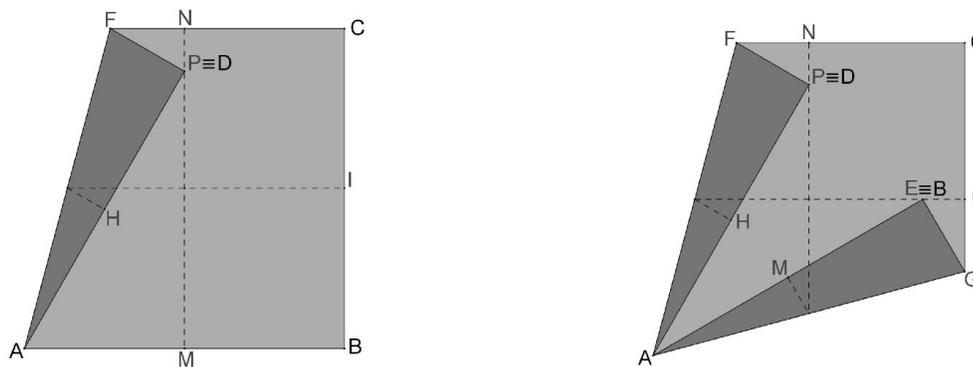


Fonte: O autor, 2014.

Fixando A, fazer coincidir o ponto D com o segmento \overline{MN} e o ponto B com o segmento \overline{HI} (Axioma 5), construindo os segmentos \overline{AF} e \overline{AG} , respectivamente. Temos que, por construção, os ângulos $\widehat{FAD} \equiv \widehat{FAP} \equiv \widehat{GAB} \equiv \widehat{GAE}$ (Figura 48.a).

Na Figura 48.a, temos que o triângulo ΔAMP , retângulo em M, tem lados \overline{AP} e \overline{AM} que medem 1 e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Deste modo, $\cos \widehat{PAM} = \frac{1}{2}$ e $\widehat{PAM} = 60^\circ$.

Figura 48 – Construção 2 do triângulo equilátero



(a)

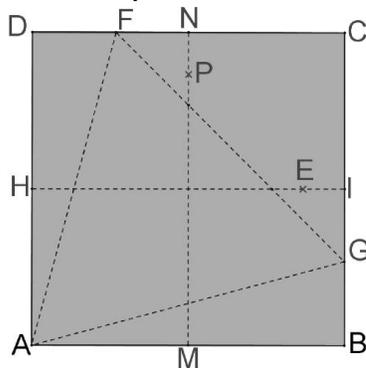
(b)

Legenda: (a) - Construção 2 do triângulo equilátero, passo 2; (b) - Construção 2 do triângulo equilátero, passo 3.

Fonte: O autor, 2014.

Podemos observar que $\widehat{FAD} + \widehat{FAG} + \widehat{BAG} = 90^\circ$ (Figura 49) e como $\widehat{FAD} \equiv \widehat{BAG}$ e $\widehat{PAM} = 60^\circ$ (Figura 48.a), temos que $\widehat{FAD} = \widehat{BAG} = 15^\circ$. Como $\overline{DF} \equiv \overline{BG} \rightarrow \overline{CF} \equiv \overline{CG}$ e o triângulo ΔFCG é isósceles e $\widehat{CFG} = \widehat{FGC} = 45^\circ$. Como isso, podemos concluir que $\widehat{AFG} = \widehat{AGF} = 60^\circ$ e o triângulo ΔAGF é equilátero.

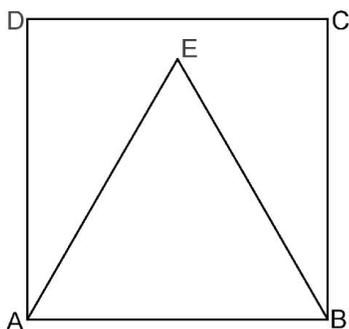
Figura 49 – Construção 2 do triângulo equilátero, passo 4



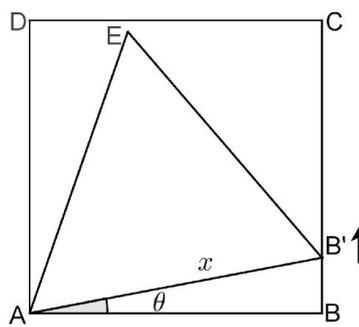
Fonte: O autor, 2014

Para provarmos que o triângulo obtido é máximo, admitimos um triângulo equilátero cujo um dos lados é coincidente, internamente, com um dos lados do quadrado. Sejam os vértices A e $B' \equiv B$ (B do quadrado e B' do triângulo), comuns ao triângulo e ao quadrado. Fixamos o vértice A e deslizamos o vértice B' sobre o lado \overline{BC} do quadrado, fazendo a amplitude de θ e o comprimento x aumentarem e consequentemente a área do triângulo.

Figura 50 – Prova que o triângulo é máximo



(a)



(b)

Legenda: (a) - Prova que o triângulo é máximo, passo 1; (b) - Prova que o triângulo é máximo, passo 2.
Fonte: O autor, 2014.

Este crescimento de x se dará até o momento em que E , vértice do triângulo, coincida com o lado \overline{CD} do quadrado. Este momento é limite, visto que depois deste ponto, o triângulo passa a ter uma região externa ao quadrado. Quando o ponto E coincide com o segmento \overline{CD} temos que $\theta = 15^\circ$, logo, $0 \leq \theta \leq 15^\circ$.

Sendo o lado do triângulo x , a sua altura será $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ e considerando o quadrado de lado unitário, temos que $x = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$. A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{4} \sec^2 \theta$$

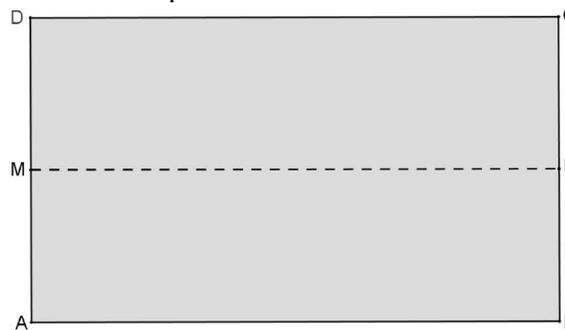
No intervalo $0 \leq \theta \leq 15^\circ$ a função cosseno é decrescente, e assim, a função secante é crescente e, conseqüentemente, o valor máximo da área será obtido para $\theta = 15^\circ$, provando que a construção nos fornece o triângulo equilátero de área máxima.

3ª Construção

Nesta construção vamos obter o triângulo equilátero a partir de uma folha de papel de formato retangular. Essa construção não é possível com uma folha de papel quadrada.

Construir o segmento \overline{MN} , mediatriz dos lados \overline{AD} e \overline{BC} (lados menores do retângulo), aplicando o axioma 2 fazendo coincidir, \overline{AB} com \overline{CD} .

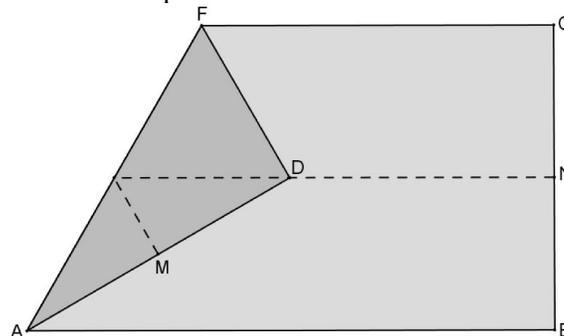
Figura 51 – Construção 3 do triângulo equilátero, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Coincidindo o ponto D com o segmento MN, construir o segmento \overline{AF} (lado do triângulo equilátero).

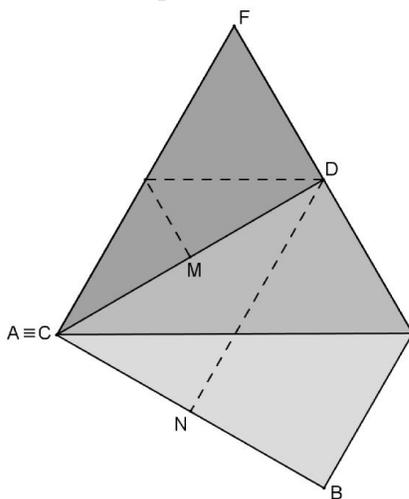
Figura 52 – Construção 3 do triângulo equilátero, passo 2



Fonte: O autor, 2014.

Sobrepor os segmentos \overline{FC} e \overline{AF} construindo \overline{FG} , outro lado do triângulo equilátero. Devemos observar que, após esta última dobra os pontos A e C serão coincidentes ou não dependendo do tamanho do papel.

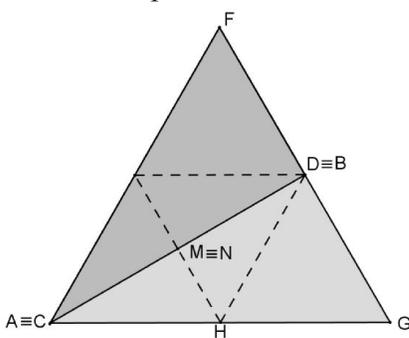
Figura 53 – Construção 3 do triângulo equilátero, passo 3



Fonte: O autor, 2014.

Fazer coincidir os segmentos \overline{BG} e \overline{GF} , finalizando a construção do triângulo equilátero ΔAGF .

Figura 54 – Construção do triângulo equilátero, passo 4

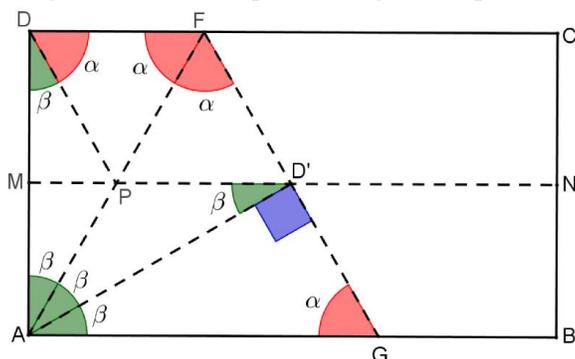


Fonte: O autor, 2014.

Para entendermos porque a construção descrita fornece um triângulo equilátero, desdobrar o papel e analisar as dobras feitas.

Marcando os ângulos congruentes obtemos a Figura 55.

Figura 55 – Prova que o triângulo é equilátero



Fonte: O autor, 2014.

Marcando, inicialmente, os ângulos $\widehat{D'FA} = \alpha$ e $\widehat{FAD'} = \beta$ (D' é o ponto marcado sobre \overline{MN} onde fizemos coincidir D). Como o triângulo $\triangle AFD'$ é retângulo (por ser a reflexão do triângulo $\triangle ADF$), temos que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Supondo a aplicação do axioma 3, fazendo coincidir os segmentos \overline{AD} e $\overline{AD'}$, temos que \overline{AF} é bissetriz do ângulo $\widehat{DAD'}$, temos que $\widehat{DAF} = \widehat{FAD'} = \beta$ e como o triângulo $\triangle ADF$ é retângulo em D , $\widehat{AFD} = \alpha$. Sendo \overline{MN} mediatriz de \overline{AD} , $\overline{PD} = \overline{PA}$ e $\widehat{PAM} = \widehat{PDM} = \beta$, e temos então que $\widehat{PDF} = \alpha$. Pelo triângulo $\triangle ADF$ ser reflexão do triângulo $\triangle ADF$, vemos que $\widehat{PDF} = \widehat{PD'F} = \alpha$ e $\widehat{PDM} = \widehat{PD'A} = \beta$.

Do triângulo $\triangle AMD'$, retângulo em M , tiramos que $\beta = 30^\circ$ e sendo assim, como α e β são complementares, $\alpha = 60^\circ$.

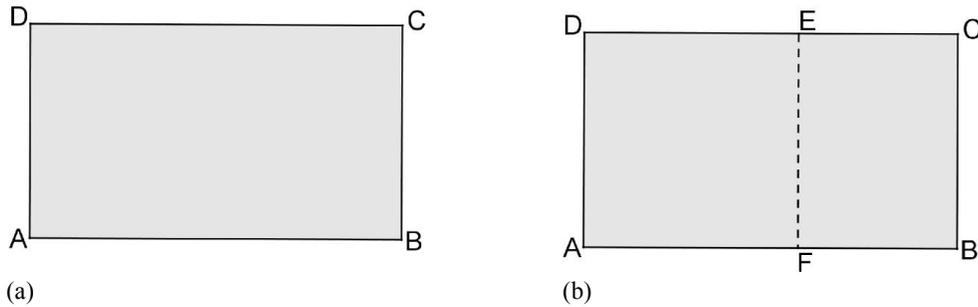
Podemos concluir que os ângulos $\widehat{FD'P} = \widehat{D'GA} = 60^\circ$ e o triângulo $\triangle AFG$ é equilátero. ■

4.1.2 Quadrado

1ª Construção

Faremos a construção de um quadrado a partir de uma folha de papel retangular. Fixando o ponto D , fazer coincidir os segmentos \overline{AD} e \overline{CD} (Axioma 3), marcando o ponto E coincidente A , sobre \overline{CD} . Temos $\overline{DE} = \overline{AD}$.

Figura 56 – Construção do quadrado



(a)
 Legenda: (a) - Papel retangular; (b) - Construção do quadrado.
 Fonte: O autor, 2014.

Construir a dobra perpendicular ao segmento \overline{CD} pelo ponto E, e sendo F a interseção desta perpendicular com o segmento \overline{AB} , teremos o quadrado AFED.

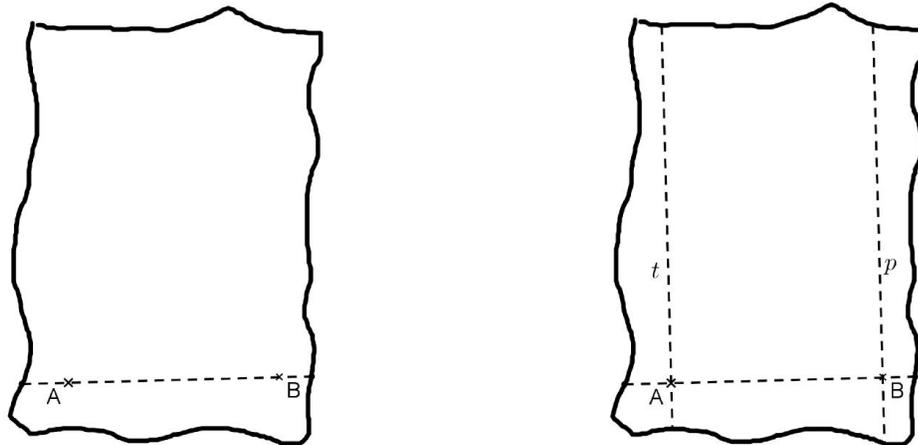
2ª Construção

Construção de um quadrado a partir de uma folha de formato qualquer.

Marcar dois pontos A e B (deve ser escolhido de forma conveniente para que seja possível a construção) e pelo axioma 1, construir a reta que contém A e B (Figura 57.a).

Construir, utilizando o axioma 4, as retas t e p perpendiculares à reta construída por A e B, respectivamente.

Figura 57 – Construção 2 do quadrado

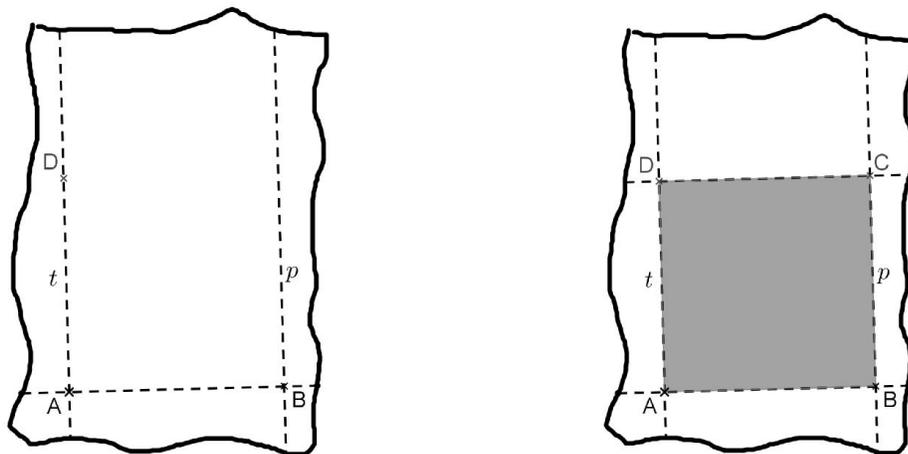


(a)
 Legenda: (a) - construção 2 do quadrado , passo 1; (b) - construção 2 do quadrado, passo 2.
 Fonte: O autor, 2014.

Dobrando o papel, fazendo coincidir o segmento \overline{AB} com a reta t , marcamos o ponto D , onde B coincide com t . Temos que $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Pelo axioma 4, podemos marcar a dobra perpendicular à reta t através do ponto D , esta dobra intersecta a reta p no ponto C . Temos o quadrado $ABCD$.

Figura 58 – Construção 2 do quadrado



(a)

(b)

Legenda: : (a) - construção 2 do quadrado , passo 3; (b) - construção 2 do quadrado, passo 4.

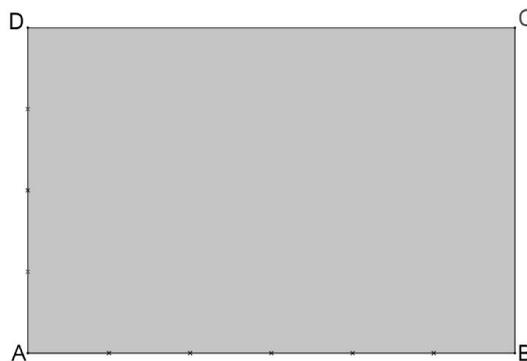
Fonte: O autor, 2014.

4.1.3 Retângulos

4.1.3.1 Retângulo cuja Diagonal Divide o Ângulo Reto em Ângulos de 54° e 36°

Sem perda de generalidade utilizaremos um retângulo com as dimensões de 4 e 6 unidades de comprimentos como indica a figura abaixo.

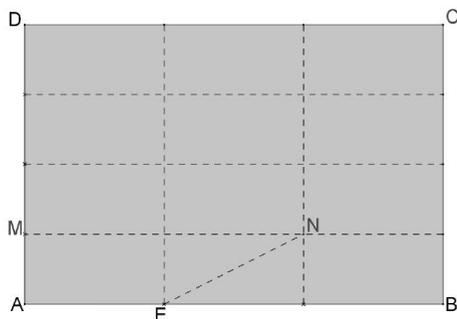
Figura 59 – Construção do retângulo



Fonte: O autor, 2014.

Dividir o retângulo, utilizando o axioma 3, em 12 retângulos congruentes, marcar os pontos E, M, N e o segmento \overline{EN} , como indicado na Figura 60.

Figura 60 – Construção do retângulo, passo 1

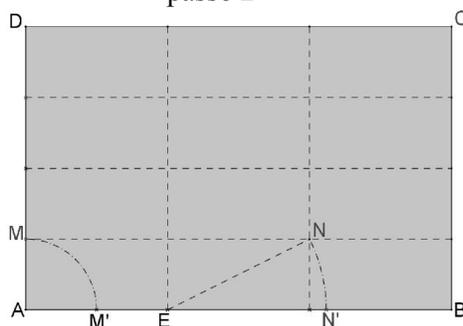


Fonte: O autor, 2014.

Dobrar fazendo o ponto M coincidir com o segmento \overline{AB} , fixando A, marcamos o ponto M' onde M coincide com AB (Axioma 5).

Coincidir o segmento \overline{EN} com \overline{AB} , fixando E, marcando o ponto N' onde N coincide com \overline{AB} .

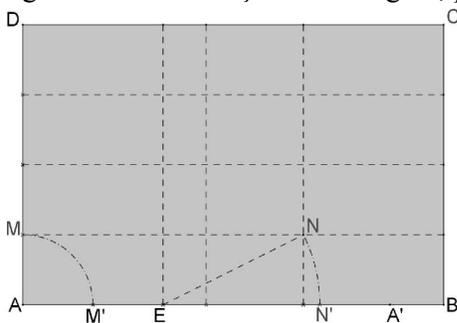
Figura 61 – Construção do retângulo, passo 2



Fonte: O autor, 2014.

Sobrepor o segmento \overline{AB} sobre ele mesmo, fazendo coincidir os pontos M' e N', marcando o ponto A' onde A coincide com \overline{AB} .

Figura 62 – Construção do retângulo, passo 3



Fonte: O autor, 2014.

Figura 64 – Parthenon



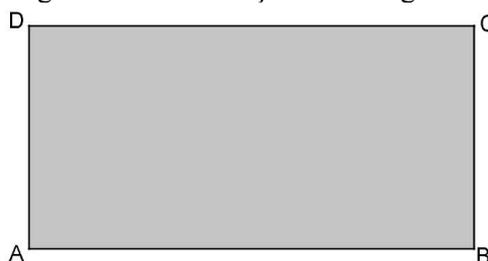
Fonte: <http://www.fisica-interessante.com>

Definindo algebricamente, temos que um retângulo cujas dimensões a e b ($a < b$) é áureo quando $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{b+a}{b} = \Phi$.

1ª Construção

Construiremos o retângulo áureo a partir de uma folha de papel retangular que, sem perda de generalidade, tem largura e comprimento medindo duas e quatro unidades de comprimento, respectivamente. Esta restrição das medidas dos lados tem somente a finalidade de tornar a construção possível.

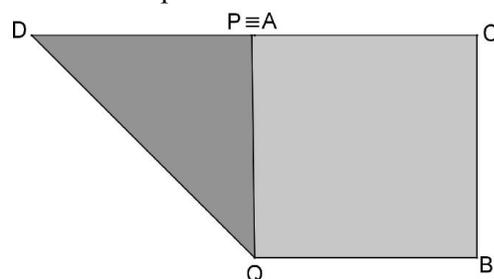
Figura 65 – Construção do retângulo áureo



Fonte: O autor, 2014.

Sobreponha os segmentos \overline{AD} e \overline{CD} (axioma 3) marcando o ponto P sobre \overline{DC} . Pelo axioma 4, construir o segmento perpendicular à \overline{CD} por P , obtendo o ponto Q sobre \overline{AB} .

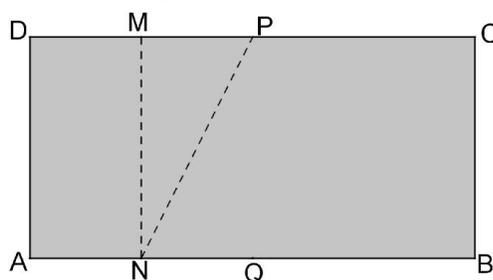
Figura 66 – Construção do retângulo áureo, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Sobreponha os segmentos \overline{AD} e \overline{QP} construindo o segmento \overline{MN} paralelo àqueles dois.

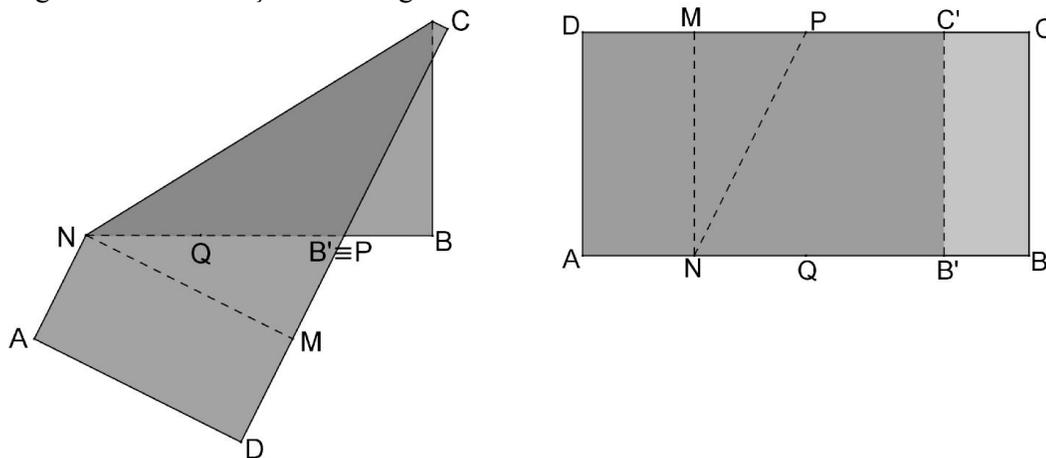
Figura 67 – Construção do retângulo áureo,
passo 2



Fonte: O autor, 2014.

Construir o segmento \overline{NP} (axioma 1) e o sobrepor ao segmento \overline{AB} , fixando N, marcando o ponto B' . Temos que $\overline{NP} = \sqrt{5}$ e $\overline{AB'} = 1 + \sqrt{5}$. Marcar, aplicando o axioma 4, o segmento perpendicular à \overline{AB} por B' , obtendo o ponto C' em \overline{CD} . O retângulo $AB'C'D$ da Figura 68.b é o retângulo áureo porque $\frac{AB'}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034 \dots$, como era desejado.

Figura 68 – Construção do retângulo áureo



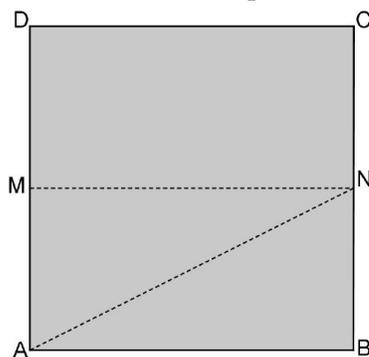
(a) (b)
Legenda: (a) - Construção do retângulo áureo, passo 3; (b) - Construção do retângulo áureo, passo 4.
Fonte: O autor, 2014.

2ª Construção

Para a construção será utilizada uma folha de papel quadrada de vértices ABCD que, sem perda de generalidade, podemos supor que possui lados que medem duas unidades de comprimento.

Construir o segmento \overline{MN} , pelo axioma 3, fazendo coincidir os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} e marcar o segmento \overline{AN} (axioma 1).

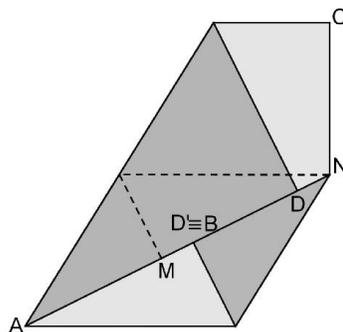
Figura 69 – Construção 2 retângulo do áureo, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Fazer coincidir os segmentos \overline{AD} e \overline{BN} com \overline{AN} fixando A e N, respectivamente. Marcando o ponto D' e sobre \overline{AD} , onde o ponto B coincide com \overline{AN} e \overline{AD} . Temos que $\overline{BN} = 1$, $\overline{AN} = \sqrt{5}$ e $\overline{AD'} = \sqrt{5} - 1$.

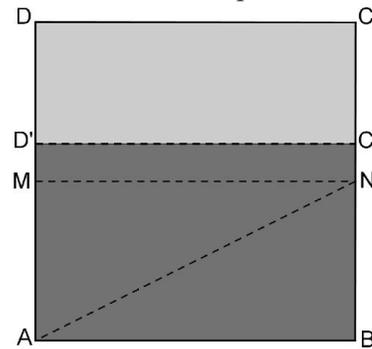
Figura 70 – Construção 2 do retângulo áureo, passo 2



Fonte: O autor, 2014.

Desdobra e marcar, pelo axioma 4, o segmento perpendicular a \overline{AD} por D', marcando o ponto C' em \overline{BC} , intersecção da perpendicular com este lado.

Figura 71– Construção do retângulo áureo, passo 3



Fonte: O autor, 2014.

No retângulo ABC'D' temos $\overline{AD'} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{AB} = 2$ o que nos fornece a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD'}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = 1,618035$ e o retângulo ABC'D' é áureo.

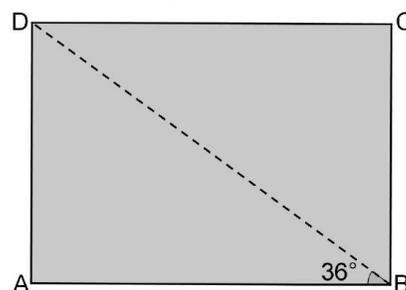
4.1.4 Pentágono

1ª Construção

Esta construção é possível para a maioria dos retângulos, contudo, para construirmos um pentágono regular é necessário que a folha de papel tenha a forma retangular e que a diagonal divida o ângulo reto em ângulos de 36° e 54° (a construção desse retângulo já foi mostrada).

Dado o retângulo ABCD que, sem perda de generalidade, é tal que sua diagonal divide o ângulo reto em ângulos que medem 36° e 54° .

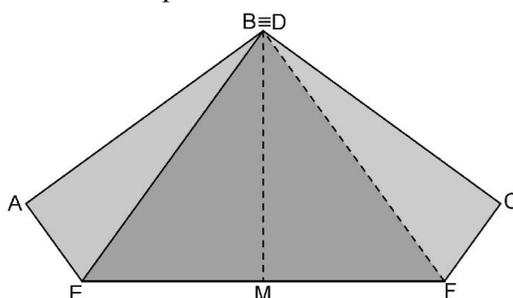
Figura 72 - Construção do pentágono regular



Fonte: O autor, 2014.

Construir, pelo axioma 1, o segmento que contém os pontos B e D (diagonal do retângulo) e fazer coincidir os pontos B e D, construindo o segmento \overline{EF} que contém M, ponto médio de \overline{BD} .

Figura 73 – Construção do pentágono regular,
passo 1

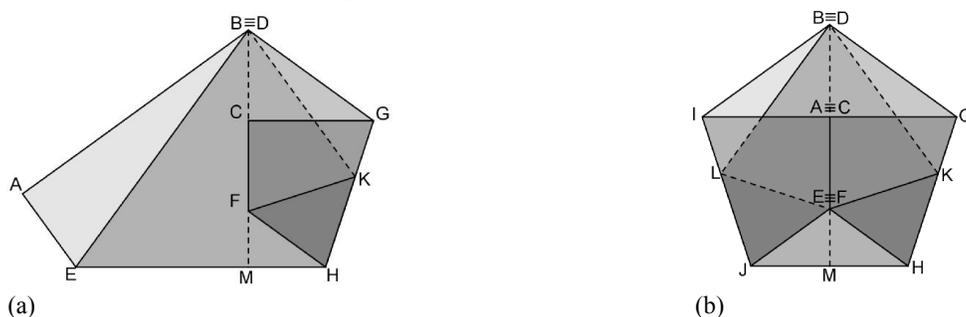


Fonte: O autor, 2014.

Deste modo, na Figura 73, temos que os ângulos, $\widehat{FDM} = \widehat{EBM} = 36^\circ$, $\widehat{CBM} = \widehat{ADM} = \widehat{BFM} = \widehat{DEM} = 54^\circ$, $\widehat{BFC} = \widehat{DEA} = 72^\circ$ e $\widehat{ABC} = 108^\circ$. Notamos que a figura é simétrica em relação ao eixo \overline{BM} .

Pelo axioma 3, fazer coincidir os segmentos \overline{CF} e \overline{AE} com \overline{BM} .

Figura 74 - Construção do pentágono regular



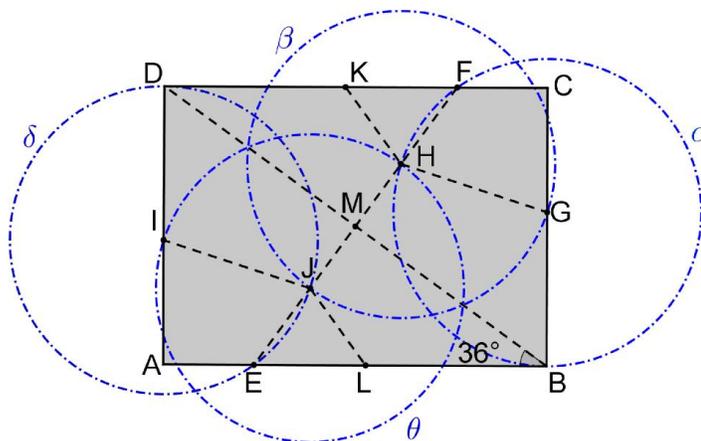
Legenda: (a) - Construção do pentágono regular, passo 2; (b) - Construção do pentágono regular, passo 3.
Fonte: O autor, 2014.

Temos que $\widehat{BGC} = 36^\circ$, por ser complementar de $\widehat{CBG} = 54^\circ$. Na Figura 72.b temos que, pela sobreposição de ângulos, $2\widehat{CGH} + \widehat{BGC} = 180^\circ$, logo $\widehat{CGH} = 72^\circ$ e $\widehat{BGH} = 108^\circ$. Na Figura 71 temos que $\widehat{CFM} = 126^\circ$ e, executando a dobra da Figura 74.a, verificamos que $\widehat{MFH} = 54^\circ$, $\widehat{FHM} = 36^\circ$ e, pela sobreposição de ângulos, $2\widehat{KHF} + \widehat{FHM} = 180^\circ$ e sendo assim, temos que $\widehat{KHF} = 72^\circ$ e $\widehat{KHM} = 108^\circ$. Por simetria, podemos concluir de maneira análoga, também que $\widehat{DIJ} = \widehat{IJH} = 108^\circ$.

Temos que o pentágono BGHJI é equiângulo.

Analisando as dobra no papel com o auxílio do software de matemática dinâmica (Figura 75), Geogebra, construímos os círculos: α com centro em G e raio \overline{GB} que contém H, β de centro H e raio \overline{HJ} que contém G, θ de centro J e raio \overline{JI} que contém H e δ de centro I e raio \overline{ID} que contém J. Deste modo, temos que $\overline{GB} = \overline{GH} = \overline{HJ} = \overline{JI} = \overline{ID}$ e o pentágono é equilátero.

Figura 75 – Verificação de que o pentágono é equilátero



Fonte: O autor, 2014.

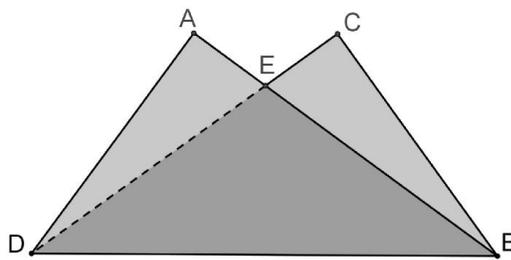
2ª Construção

Da mesma maneira que a construção 1, esta construção é possível para a maioria dos retângulos, contudo, para construirmos um pentágono regular é necessário que a folha de papel tenha a forma de um retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 36° e 54° , construção esta que já foi mostrada neste trabalho.

Dado o retângulo ABCD que, sem perda de generalidade, sua diagonal divide o ângulo reto em ângulos que medem 36° e 54° .

Dobrar o papel, pelo axioma 1, construindo o segmento \overline{BD} como ilustra a figura abaixo.

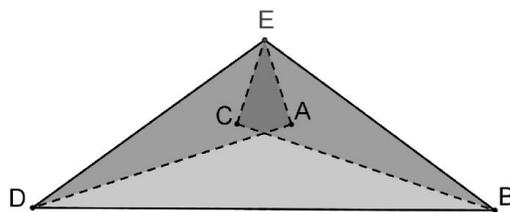
Figura 76 – Construção 2 do pentágono regular, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Dobrar ao longo dos segmentos \overline{DE} e \overline{BE} , construindo o triângulo $\triangle DBE$ que será a base da construção. Temos que $\widehat{DBE} = \widehat{BDE} = 36^\circ$ e $\widehat{DEB} = 108^\circ$.

Figura 77 - Construção 2 do pentágono regular, passo 2

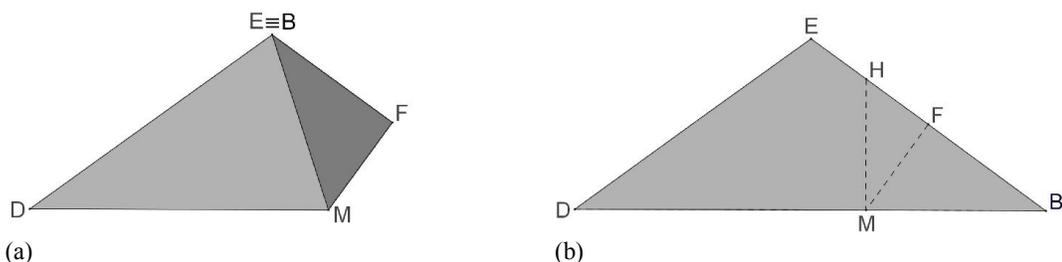


Fonte: o Autor, 2014.

Marcar o segmento \overline{FM} , pelo axioma 2, fazendo coincidir os pontos E e B, deste modo, os segmentos \overline{FM} e \overline{BE} são perpendiculares e $\overline{FE} = \overline{FB}$.

Pelo ponto M, utilizando o axioma 4, marcar o segmento \overline{MH} perpendicular a \overline{BD} .

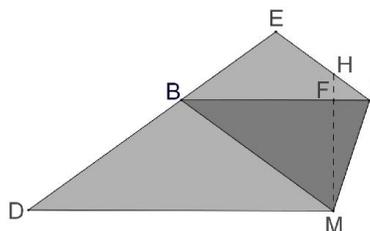
Figura 78 - Construção 2 do pentágono regular



Legenda: (a) - Construção 2 do pentágono regular, passo 3; (b) - Construção 2 do pentágono regular, passo 4.
Fonte: O autor, 2014.

Dobrar, fazendo coincidir os segmentos \overline{MF} e \overline{MH} , o ponto B ficará sobre o segmento \overline{DE} , construindo o segmento \overline{MI} , lado do pentágono. Facilmente pode-se provar que o segmento \overline{BI} é paralelo a \overline{DM} .

Figura 79 - Construção 2 do pentágono regular, passo 5

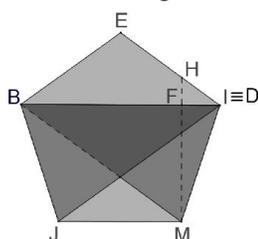


Fonte: O autor, 2014.

Temos que os ângulos $\widehat{MBI} = \widehat{BMD} = 36^\circ$, como $\widehat{BMD} + 2\widehat{BMI} = 180^\circ$, concluímos que $\widehat{BMI} = 72^\circ$ e $\widehat{DMI} = 108^\circ$ (ângulo interno do pentágono). Pela soma dos ângulos internos do triângulo ΔBMI , tiramos que $\widehat{BIM} = 72^\circ$ e $\widehat{EIM} = 108^\circ$ (ângulo interno do pentágono).

Dobrando, fazendo coincidir os pontos D e I e os segmentos \overline{BD} e \overline{BI} , respectivamente, construímos o pentágono EDMJB. Com raciocínio análogo ao anterior, podemos concluir que $\widehat{EBJ} = \widehat{BJM} = 108^\circ$ e o pentágono é equiângulo.

Figura 80 – Construção 2
do pentágono
regular

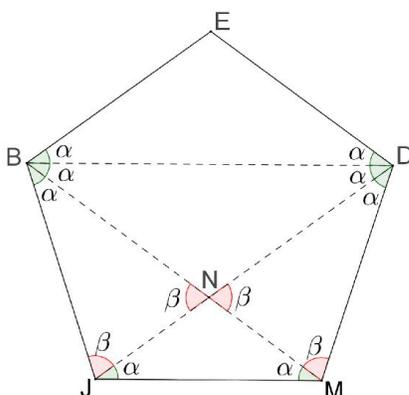


Fonte: O autor, 2014.

Para simplificar, mostraremos que o pentágono é equilátero, apenas marcando ângulos e lados congruentes.

Temos, na Figura 81, os ângulos $\alpha = 36^\circ$ e $\beta = 72^\circ$. Observando os triângulos semelhantes e inspecionando os lados correspondentes, concluímos que $\overline{EB} = \overline{BJ} = \overline{JM} = \overline{MD} = \overline{DE}$ e o pentágono é equilátero e regular.

Figura 81 – Verificação que o pentágono
é equilátero



Fonte: O autor, 2014.

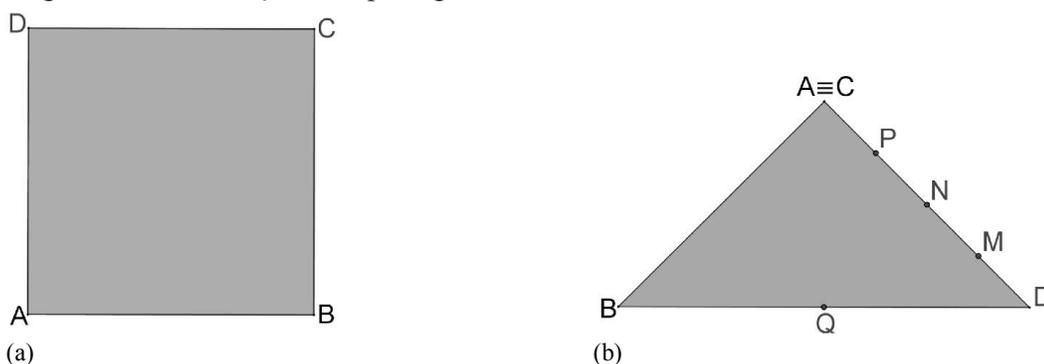
3ª Construção

Esta construção do pentágono é apresentada em alguns trabalhos como a construção do pentágono regular, contudo trata-se de uma excelente aproximação.

Para executarmos a construção utilizaremos uma folha de papel quadrado ABCD.

Dobrar o papel pela diagonal \overline{BD} (axioma 1) e marcar os pontos M, N e P, sobre o segmento \overline{AD} (axioma 2), que o dividem em quatro partes iguais e marcar o ponto Q, ponto médio de \overline{BD} .

Figura 82 – Construção 3 do pentágono

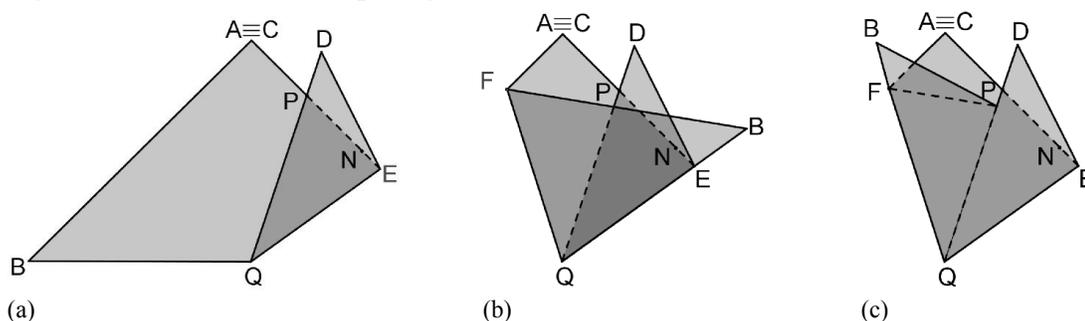


Legenda: (a) - Papel base; (b) - Construção 3 do pentágono, passo 1.

Fonte: O autor, 2014.

Dobrar o papel, fazendo coincidir o segmento \overline{DQ} e \overline{PQ} , construindo a bissetriz \overline{QE} , de \widehat{DQP} (axioma 3). Coincidir os segmentos \overline{BQ} e \overline{QE} , construindo a bissetriz \overline{QF} , de \widehat{BQE} e repetido o processo, coincidir os segmentos \overline{QB} e \overline{QF} .

Figura 83 – Construção 3 do pentágono

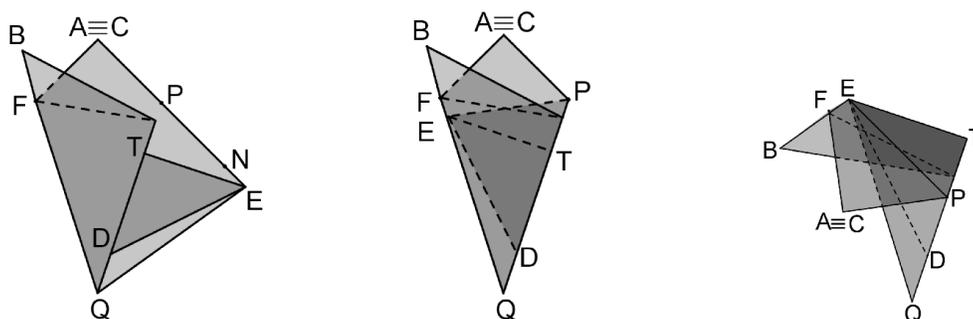


Legenda: (a) - Construção 3 do pentágono, passo 2; (b) - Construção 3 do pentágono, passo 3; (c) - Construção 3 do pentágono, passo 4.

Fonte: O autor, 2014.

Aplicando o axioma 4 marcar o segmento \overline{TE} , sobrepondo o segmento \overline{QD} a ele mesmo, determinado uma perpendicular que contém o ponto E. Sobrepor os segmentos \overline{QF} e \overline{QE} e dobrar tudo ao longo do segmento \overline{TE} .

Figura 84 - Construção 3 do pentágono

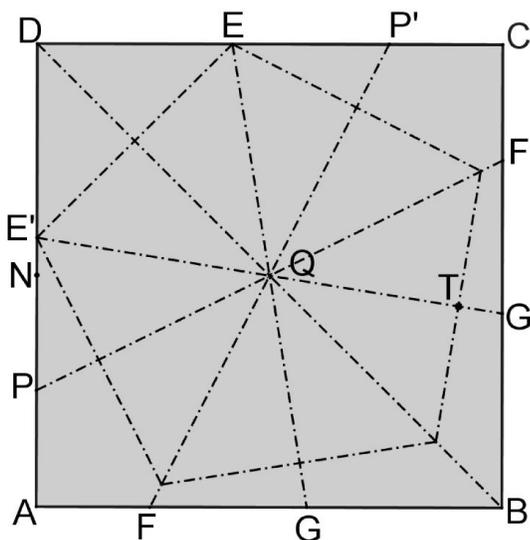


- (a) (b) (c)
 Legenda: (a) - Construção 3 do pentágono, passo 2; (b) - Construção 3 do pentágono, passo 3;
 (c) - Construção 3 do pentágono, passo 4.

Fonte: O autor, 2014.

O pentágono obtido é indicado na Figura 85.

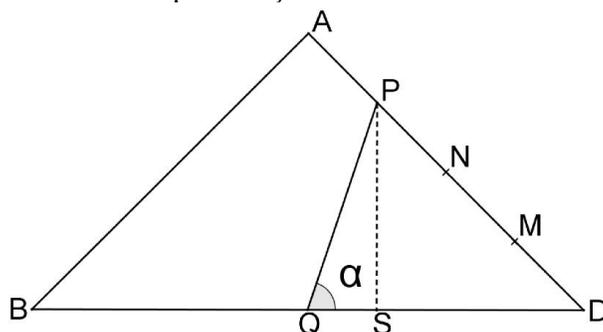
Figura 85 – Pentágono



Fonte: O autor, 2014.

Analisando a construção e a figura é fácil notar que o ângulo central do pentágono tem a mesma amplitude que o ângulo \widehat{PQD} e pelo segundo passo podemos calcular a medida de \widehat{PQD} .

Figura 86 – Verificação que o pentágono é uma aproximação



Fonte: O autor, 2014.

Sabendo que $\widehat{PDQ} = 45^\circ$, \overline{PS} é perpendicular a \overline{QD} e considerando $\overline{QD} = a$, temos que $\overline{AD} = a\sqrt{2}$, $\overline{PD} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, $\overline{PS} = \overline{DS} = \frac{3a}{4}$ e $\overline{QS} = \frac{a}{4}$. Com essas informações podemos calcular o valor de α .

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PS}}{\overline{QS}} = 3$$

$$\alpha = 71,56^\circ$$

Como sabemos um pentágono regular possui ângulo central de 72° indicando que a construção obtida é uma aproximação do pentágono regular.

4.1.5 Hexágono Regular

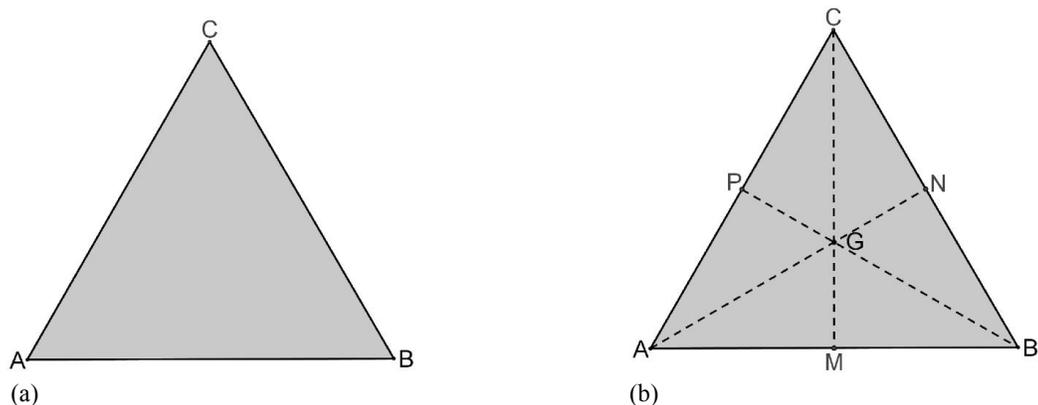
1ª Construção

Utilizaremos para essa construção uma folha de papel com a forma de um triângulo equilátero que poder ser facilmente obtida executando-se uma das construções já apresentadas.

Dado uma folha de papel no formato de um triângulo equilátero ABC.

Utilizando o axioma 2, marcar as mediatrizes \overline{NA} , \overline{BP} e \overline{CM} como indicado na figura.

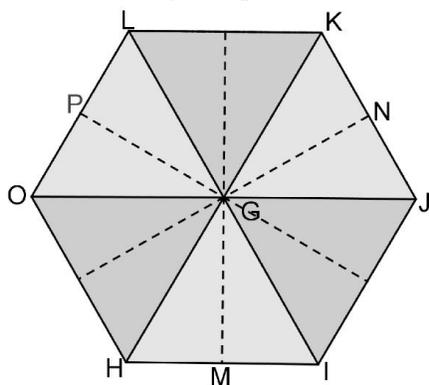
Figura 87 – Construção do Hexágono regular



Legenda: (a) -Construção do hexágono regular, papel base; (b) - Construção do hexágono regular, passo 1.
Fonte: O autor, 2014.

Fazer coincidir os pontos A, B e C com o ponto G. É fácil notar que o hexágono obtido é regular.

Figura 88 – Construção do hexágono regular, passo 2



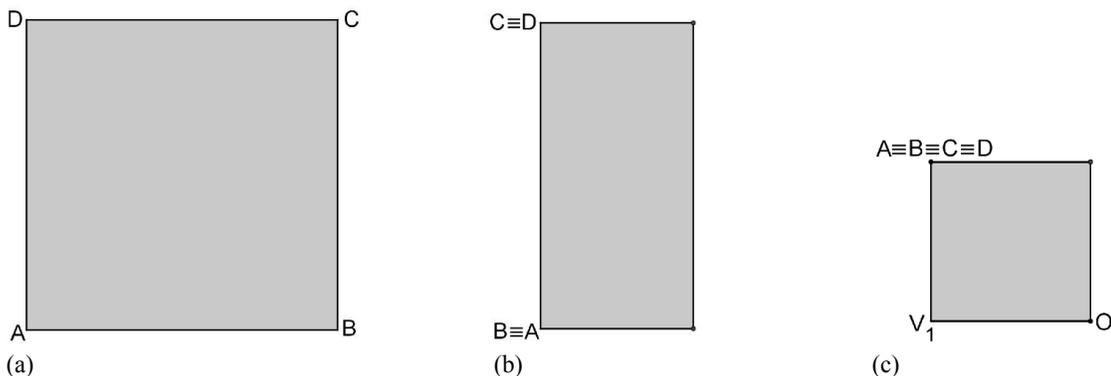
Fonte: O autor, 2014.

2ª Construção

Para a construção será utilizada uma folha de papel quadrada ABCD que, sem perda de generalidade, podemos supor que possui duas unidades de comprimento.

Dobrar a folha de papel duas vezes, formando um quadrado que é a quarta parte do original. Fazer coincidir os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} e depois coincidir os pontos A, B, C e D.

Figura 89 – Construção 2 do hexágono regular

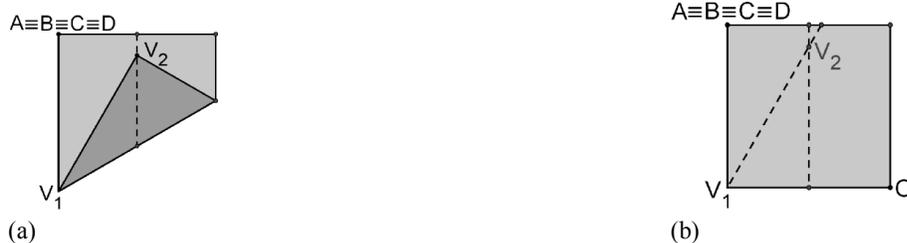


Legenda: (a) - Construção 2 do hexágono regular, papel base; (b) - Construção 2 do hexágono regular, passo 1; (c) - Construção 2 do hexágono regular.

Fonte: O autor, 2014.

Marcar a mediatriz dos pontos V_1 e O (axioma 2). Marcar o ponto V_2 onde, fixando-se V_1 , o ponto O coincide com a mediatriz de $\overline{V_1O}$. Construir a dobra que contém V_1 e V_2 . Temos que $\widehat{OV_1V_2} = 60^\circ$ e $\overline{OV_1} = \overline{V_1V_2}$.

Figura 90 – Construção 2 do hexágono regular



Legenda: (a) - Construção 2 do hexágono regular, passo 3; (b) - Construção 2 do hexágono regular, passo 4.

Fonte: O autor, 2014.

Desdobrando a folha concluímos que:

$$\overline{V_1V_2} = \overline{V_2V_3} = \overline{V_3V_4} = \overline{V_4V_5} = \overline{V_5V_6} = \overline{V_6V_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

Construindo os segmentos que contém os pontos V_1 e V_6 , V_3 e V_4 respectivamente, obtemos o polígono $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ que é um hexágono regular (Figura 91.b).

Figura 91 – Construção 2 do hexágono



(a)

(b)

Legenda: (a) - Construção 2 do hexágono regular, passo 5; (b) - Construção 2 do hexágono regular, passo 6.

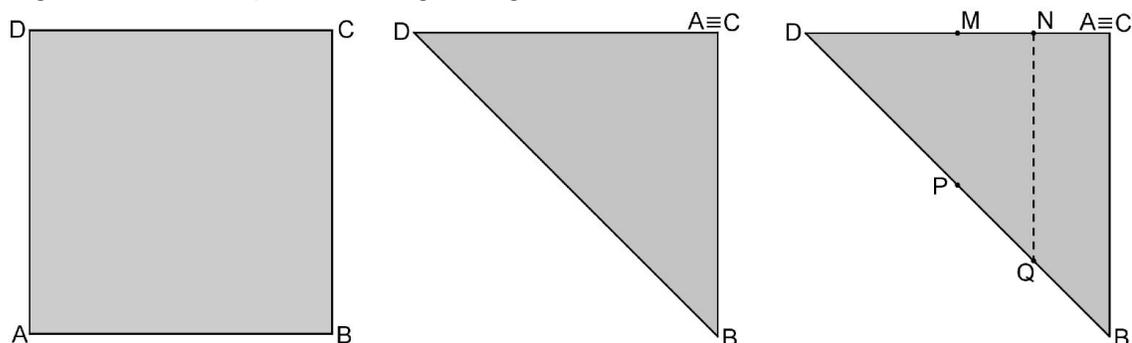
Fonte: O autor, 2014.

3ª Construção

Para a construção será utilizada uma folha de papel quadrada ABCD que, sem perda de generalidade, podemos supor que possui duas unidades de comprimento.

Fazendo coincidir os pontos A e C (axioma 2) construímos um triângulo isósceles. Pelo axioma 2, fazer coincidir os pontos C e D marcando M e P pontos médios de CD e BD, respectivamente. Novamente aplicando o axioma 2, fazendo coincidir os pontos C e M, marcar o segmento \overline{NQ} , perpendicular a \overline{CD} e tal que N é ponto médio de \overline{CM} .

Figura 92 – Construção 3 do hexágono regular



(a)

(b)

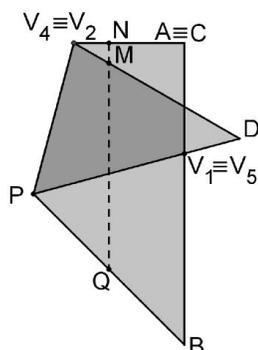
(c)

Legenda: (a) - Construção 3 do hexágono regular, papel base; (b) - Construção 3 do hexágono regular, passo 1; (c) - Construção 3 do hexágono regular, passo 2.

Fonte: O autor, 2014.

Utilizando o axioma 5, fixando P, fazer coincidir o ponto M com o segmento \overline{NQ} marcando os pontos coincidentes V_1 e V_5 em \overline{AB} e \overline{CB} , respectivamente e os pontos V_2 e V_4 em \overline{AD} e \overline{CD} , respectivamente.

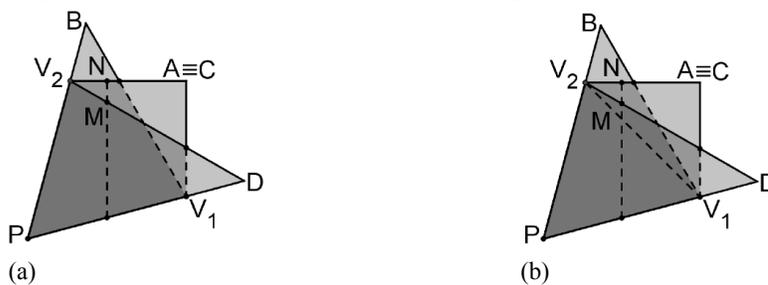
Figura 93 – Construção 3
do hexágono
regular, passo 3



Fonte: O autor, 2014

Pelo axioma 2, construir o segmento $\overline{PV_1}$ dobrando para trás o triângulo ΔV_1PB tendo o segmento $\overline{PV_1}$ como eixo de rotação e, em seguida, dobrar tudo marcando o segmento $\overline{V_1V_2}$.

Figura 94 – Construção 3 do hexágono regular

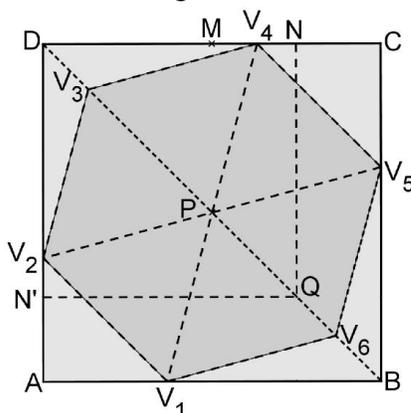


Legenda: (a) - Construção 3 do hexágono regular, passo 4; (b) - Construção 4 do hexágono regular, passo 5.

Fonte: O autor, 2014.

Desdobrando o papel, obtemos o hexágono regular como indicado na Figura 93.

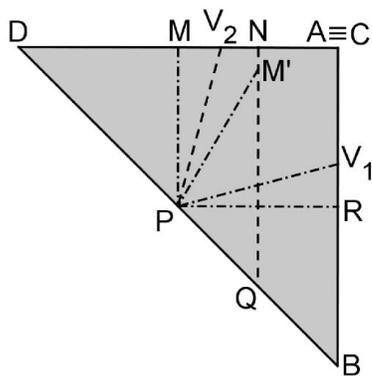
Figura 95 – Construção 3 do hexágono
regular



Fonte: O autor, 2014.

Analisando a Figura 96, em especial o quadrado AMPR destacado, observamos que as dobras marcadas neste quadrado são semelhantes às descritas na construção 2 do triângulo equilátero.

Figura 96 – Verificação que o Hexágono é regular



Fonte: O autor, 2014.

Deste modo, usando os mesmos argumentos apresentados naquela construção (ver página 48), podemos concluir que $\widehat{V_1PV_2} = 60^\circ$, $\overline{PV_1} = \overline{PV_2} = \overline{V_1V_2}$ e $\widehat{V_2PM} = \widehat{V_1PR} = 15^\circ$. Com isso, temos que $\widehat{V_2PD} = \widehat{V_1PB} = 60^\circ$ e na Figura 94.b temos os seis ângulos centrais e os seis lados sobrepostos e o hexágono é regular.

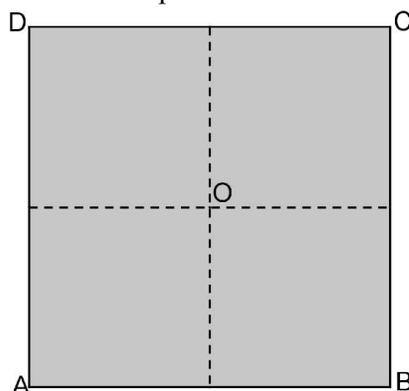
4.1.6 Heptágono Regular

1ª Construção

Para a construção será utilizada uma folha de papel quadrada ABCD que, sem perda de generalidade, podemos supor que possui quatro unidades de comprimento.

Construir a mediatriz dos lados \overline{AD} e \overline{BC} , e a mediatriz dos lados \overline{AB} e \overline{CD} . Consideremos essas retas como os eixos, \overrightarrow{Ox} e \overrightarrow{Oy} , respectivamente, de um sistema cartesiano com $O = (0,0)$.

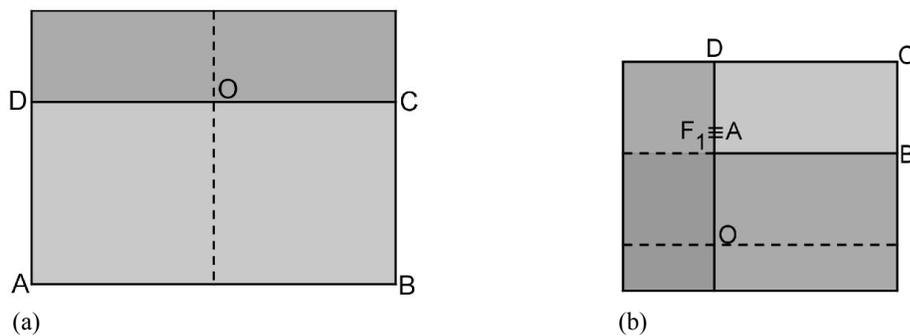
Figura 97 – Heptágono regular,
passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Fazer o lado \overline{CD} coincidir com o eixo \overrightarrow{Ox} marcando, sobre o eixo \overrightarrow{Oy} , o ponto $F_1 = (0,1)$. Desdobrar e dobrar fazendo coincidir o ponto médio de \overline{AB} com F_1 e \overline{AD} com \overrightarrow{Oy} , marcar o ponto $F_2 = (-1, -\frac{1}{2})$.

Figura 98 – Construção do heptágono regular



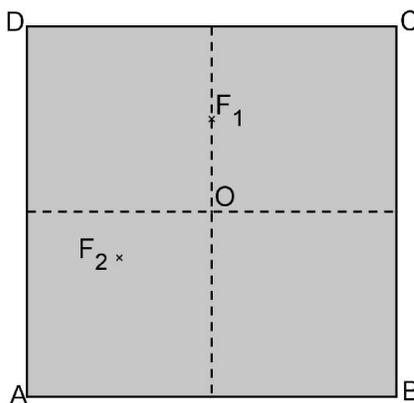
(a)

(b)

Legenda: (a) - Construção do heptágono regular, passo 2; (b) - Construção do Heptágono regular, passo3.

Fonte: O autor, 2014.

Figura 99 – Localização de F_1 e F_2

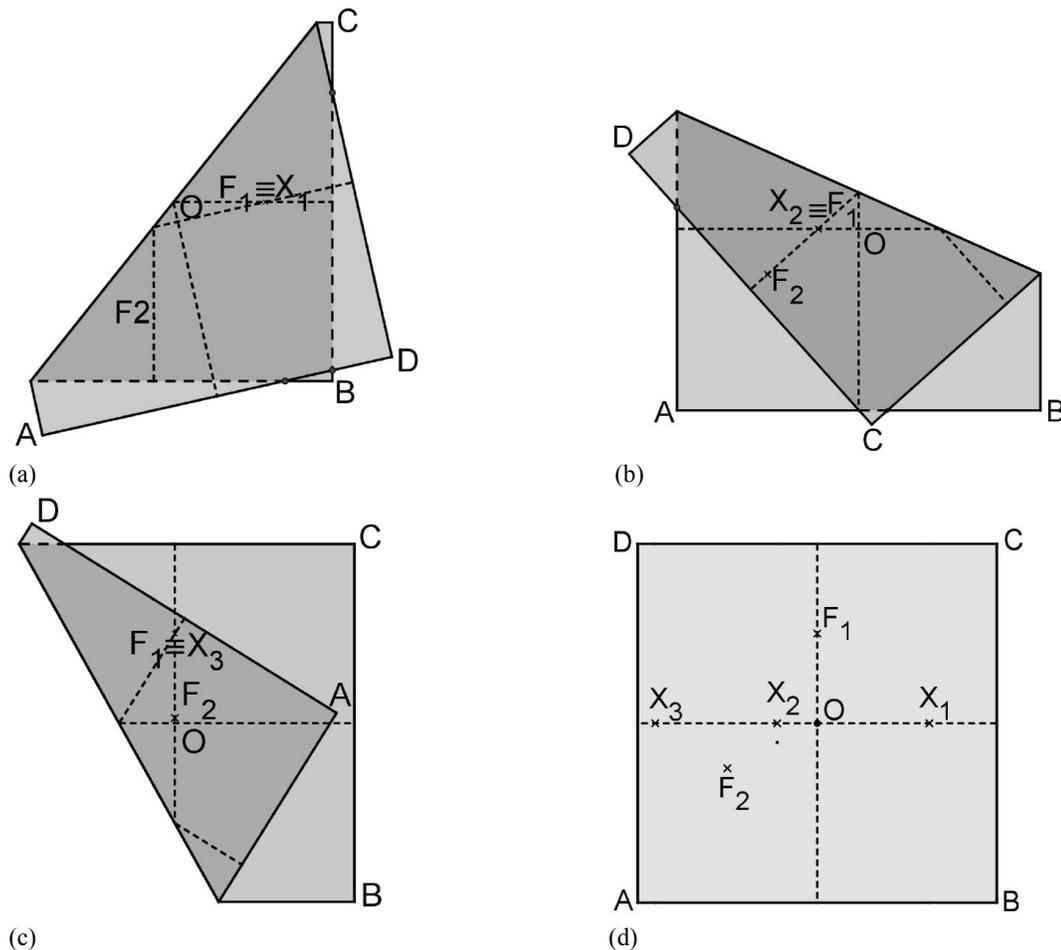


Fonte: O autor, 2014.

Aplicando o axioma 6, fazer coincidir F_1 e F_2 com \overrightarrow{Ox} e \overrightarrow{Oy} , respectivamente, essa dobra pode ser executada em três pontos distintos.

Para cada dobra possível marcamos os pontos x_1 , x_2 e x_3 , onde F_1 coincide com \overrightarrow{Ox} .

Figura 100 – Construção do heptágono regular

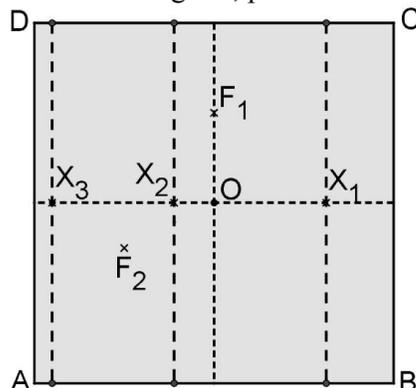


Legenda: (a) - Construção do heptágono regular, passo 4; (b) - Construção do heptágono regular, passo 5;
(c) - Construção do heptágono regular, passo 6; (d) - Localização dos pontos X_1 , X_2 e X_3 .

Fonte: O autor, 2014.

Utilizando o axioma 4, construir segmentos perpendiculares ao eixo \overrightarrow{Ox} e que contém os pontos x_1 , x_2 e x_3 .

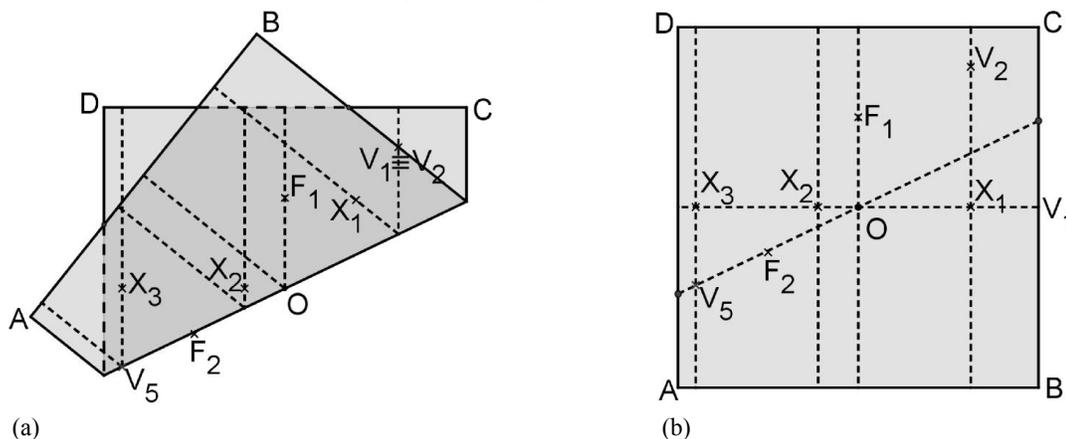
Figura 101 – Construção do heptágono regular, passo 7



Fonte: O autor, 2014.

Passaremos a construir os vértices do heptágono regular e sendo assim, temos que o ponto médio de \overline{BC} é o primeiro vértice que chamaremos de V_1 . Pelo axioma 5, construir a reta que contém O, fazendo coincidir V_1 com a perpendicular que contém x_1 . O ponto V_1 intersecta a perpendicular no ponto V_2 e a reta construída intersecta a perpendicular que contém x_3 em V_5 .

Figura 102 – Construção do heptágono regular



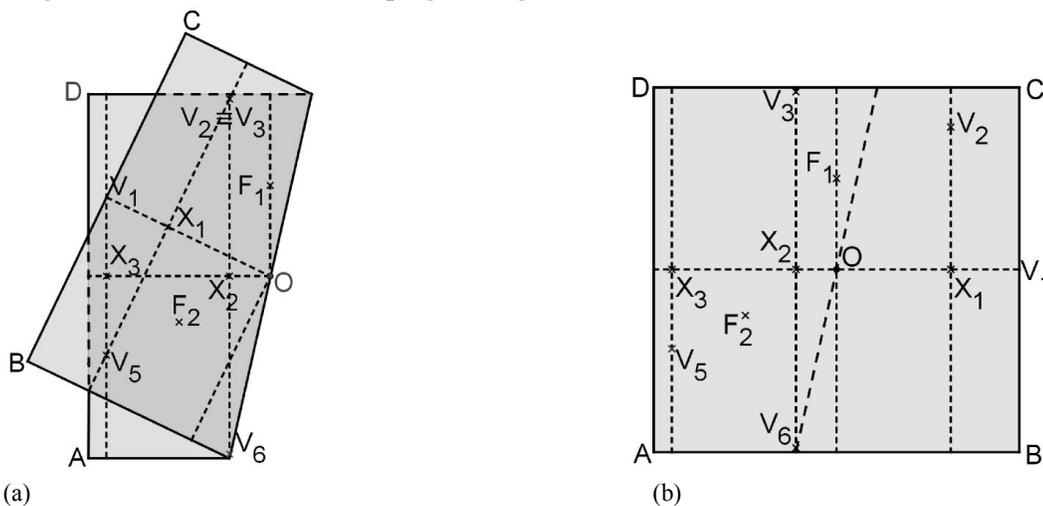
(a)

(b)

Legenda: (a) - Construção do heptágono regular, passo 8; (b) - Visualização da dobra construída no passo 8.
Fonte: O autor, 2014.

Construir a reta que passa por O, fazendo V_2 coincidir com a perpendicular que contém x_2 (axioma 5). O ponto onde V_2 coincide com a perpendicular será o vértice V_3 e a reta construída intersecta a perpendicular que contém x_2 no ponto que será o vértice V_6 .

Figura 103 – Construção do heptágono regular



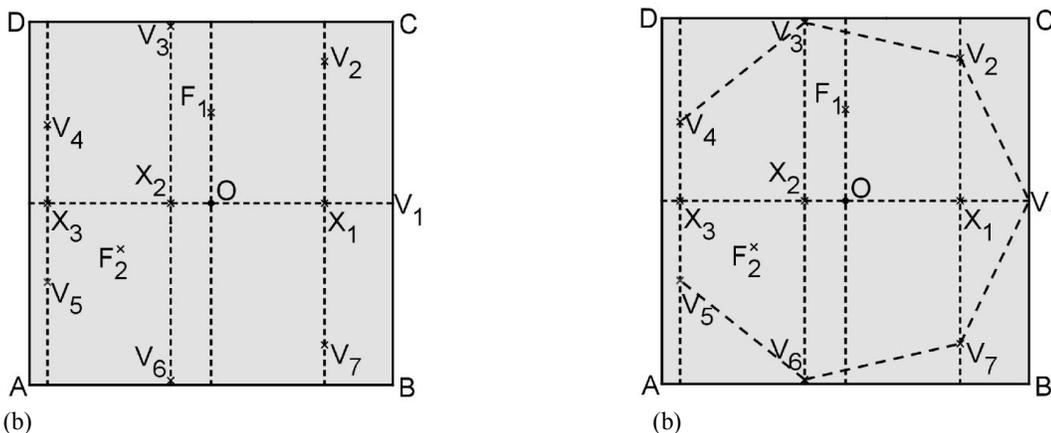
(a)

(b)

Legenda: (a) - Construção do heptágono regular, passo 9; (b) - Visualização da dobra construída no passo 8.
Fonte: O autor, 2014.

Para marcarmos os vértices restantes, podemos fazer o seguinte: As reflexões de V_2 e V_5 em relação ao eixo \overrightarrow{Ox} determinam os vértices V_7 e V_4 , respectivamente. Temos marcados os vértices do heptágono e podemos, pelo axioma 1, construir seus lados.

Figura 104 – Construção do heptágono regular



(a)

(b)

Legenda: (a) - Construção do heptágono regular, passo 10; (b) - Visualização do heptágono regular.
Fonte: O autor, 2014.

Prova algébrica da construção do heptágono regular

Usando o método de Gauss que associa os vértices do heptágono às raízes da equação $Z^7 - 1 = 0$, onde Z são soluções complexas que correspondem aos vértices do heptágono inscrito numa circunferência de raio 1 e centro na origem, no plano de Argand-Gauss. Temos $Z = 1$ uma das soluções que nos fornece o vértice $V_1 = (1, 0)$.

$$\frac{Z^7-1}{Z-1} = Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0, \text{ dividindo por } Z^3 \text{ obtemos:}$$

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} = 0, \text{ organizando de maneira conveniente temos;}$$

$$Z^3 + \frac{1}{Z^3} + Z^2 + \frac{1}{Z^2} + Z + \frac{1}{Z} + 1 = 0$$

$$\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^3 - 3.Z - 3.\frac{1}{Z} + \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 2 + Z + \frac{1}{Z} + 1 = 0$$

$$\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^3 + \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 2.\left(Z + \frac{1}{Z}\right) - 1 = 0$$

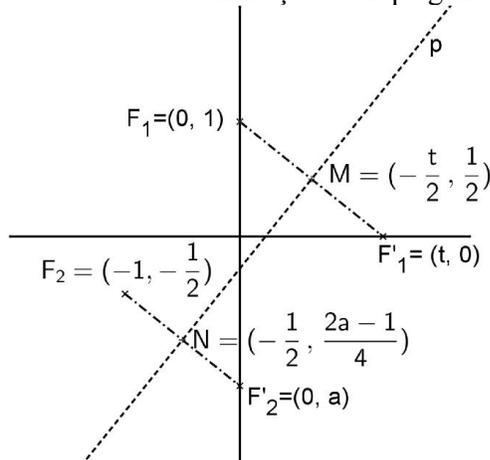
Fazendo a substituição $\omega = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)$, temos que para $Z=1 \rightarrow \omega = 2$ o que justifica a utilização de uma folha de lado 4 unidades de comprimento e ainda, ω é a soma da raiz complexa com seu conjugado o que resulta no dobro da parte real de Z , $\omega = 2 \operatorname{Re}(Z)$ corroborando com a utilização do plano complexo de raio duplicado. A substituição nos fornece uma nova equação:

$$\omega^3 + \omega^2 - 2\omega - 1 = 0 \quad (*)$$

Com isso, concluímos que para construirmos o heptágono regular, devemos encontrar a solução da equação (*).

Aplicando o axioma 6 para determinar as soluções da equação cúbica, marcamos os focos $F_1 = (0, 1)$, $F_2 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e suas respectivas diretrizes $y = 0$ e $x = 0$. A reta construída será tangente comum às parábolas e mediatriz de $\overline{F_1F'_1}$ e $\overline{F_2F'_2}$ (F'_1 e F'_2 são os pontos onde F_1 e F_2 coincidem com $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente).

Figura 105 – Gráfico da prova algébrica da construção do heptágono



Fonte: O autor, 2014.

Determinando a equação da reta $\overleftrightarrow{F_1F'_1}$ obtemos $y = -\frac{1}{t}x + 1$. Sendo p perpendicular à reta $\overleftrightarrow{F_1F'_1}$, tem como equação $y = tx + K$ e como $M \in p$ verificamos que $K = \frac{1-t^2}{2}$. Deste modo, a equação de p é dada por:

$$y = tx + \frac{1-t^2}{2}$$

Podemos obter equação da reta $\overleftrightarrow{F_2F'_2}$ que é dada por $y = \frac{1+2a}{2}x + a$ e sendo $\overleftrightarrow{F_1F'_1} // \overleftrightarrow{F_2F'_2} \Leftrightarrow \frac{1+2a}{2} = -\frac{1}{t}$ o que nos permite concluir que $a = -\frac{2+t}{2t}$.

Além disso, $N \in p$ e aplicando as coordenadas de N em p , temos:

$$\frac{2a-1}{4} = t\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1-t^2}{2}$$

Multiplicando a equação por 4, obtemos:

$$2a-1 = (-2t) + 2 - 2t^2$$

Substituindo o valor de a na equação, temos:

$$2\left(-\frac{2+t}{2t}\right) - 1 = (-2t) + 2 - 2t^2$$

Multiplicando a equação por t , obtemos:

$$\begin{aligned} -t - 2 - t &= (-2t^2) + 2t - 2t^3 \\ 2t^3 + 2t^2 - 4t - 2 &= 0 \end{aligned}$$

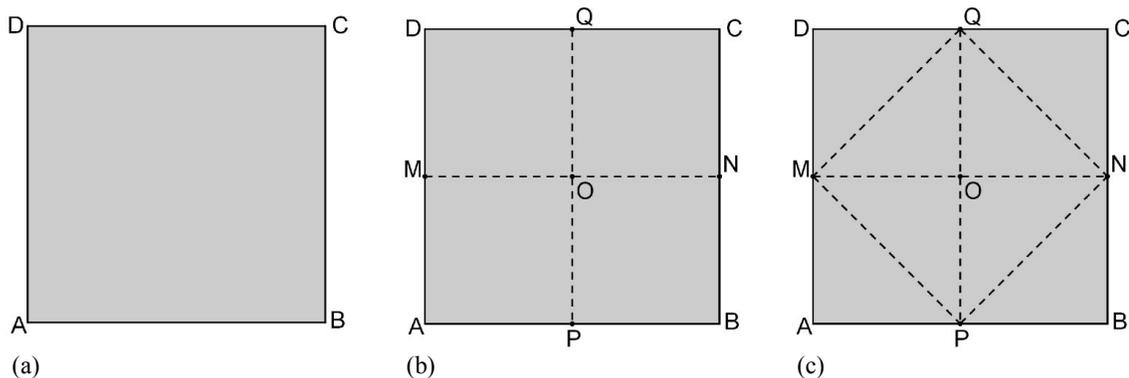
Dividindo a equação por 2, vem:

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

A equação obtida é exatamente a equação solução do heptágono, logo, as reflexões de F_1 sobre o eixo \overleftrightarrow{Ox} , determinam as abscissas dos vértices do heptágono regular, sendo as perpendiculares ao eixo \overleftrightarrow{Ox} nos pontos x_1, x_2 e x_3 da Figura 104, o lugar geométrico de um par de vértices.

Aplicando o axioma 6, estamos determinando os pontos cuja distância à origem são equivalentes a $\overline{OV_1}$ e ainda, a dobra construída, mediatriz de dois vértices V_1 e V_2 , intersecta o perpendicular que contém x_3 determinando o vértice V_5 .

Figura 107 – Construção do octógono regular

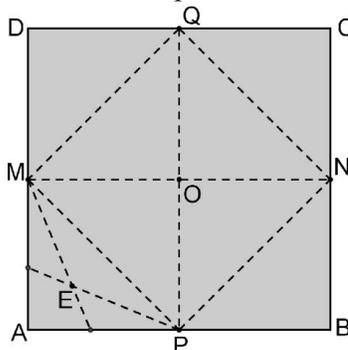


Legenda: (a) - Papel base; (b) - Construção do octógono regular, passo 1; (c) - Construção do octógono regular, passo 2.

Fonte: O autor, 2014.

Fazendo coincidir os segmentos \overline{AM} e \overline{AP} com \overline{MP} , construir as bissetrizes dos ângulos \widehat{AMP} e \widehat{APM} , respectivamente, que se intersectam em E

Figura 108 – Construção do octógono regular, passo 3

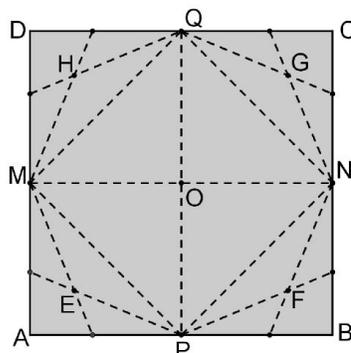


Fonte: O autor, 2014.

Sendo $\widehat{AMP} = \widehat{APM} = 45^\circ$, temos que $\widehat{EMP} = \widehat{EPM} = \frac{45^\circ}{2}$ e, sendo assim, temos que $\widehat{MEP} = 135^\circ$, ângulo interno do octógono regular.

Repetindo o procedimento nos demais vértices encontramos os pontos E, F, G e H.

Figura 109 – Construção do octógono regular, passo 4

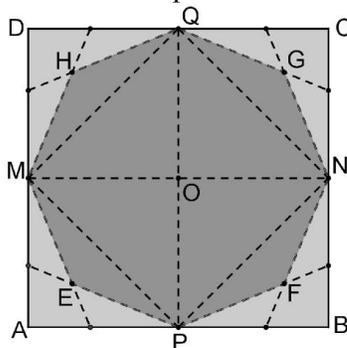


Fonte: O autor, 2014.

Verificamos que $\widehat{EPF} = \widehat{EPM} + \widehat{MPN} + \widehat{FPN}$, mas sabemos que $\widehat{MPN} = 90^\circ$ e, por construção, $\widehat{EPM} = \widehat{FPN} = \frac{45^\circ}{2}$. Obtendo-se assim $\widehat{EPF} = 135^\circ$ e o mesmo podemos constatar para os ângulos \widehat{FNG} , \widehat{GQH} e \widehat{HME} .

Os triângulos ΔMEP , ΔPFN , ΔNGQ e ΔQHM são isósceles e congruentes, sendo assim, o polígono MEPFNGQHM é um octógono regular (Figura 110).

Figura 110 – Construção do octógono regular, passo 4



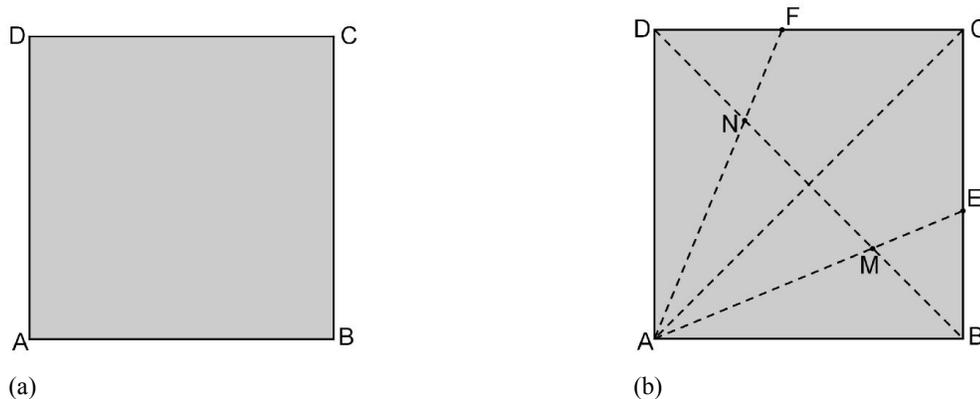
Fonte: O autor, 2014.

2ª Construção

Consideremos inicialmente uma folha de papel quadrado ABCD de lado medindo 1 unidade de comprimento.

Utilizando o axioma 1, marcamos as diagonais deste quadrado. Fazendo coincidir os segmentos \overline{AB} e \overline{AD} como \overline{AC} construímos (axioma 3) as bissetrizes \overline{AE} e \overline{AF} , respectivamente. A bissetriz \overline{AE} intersecta a diagonal \overline{BD} no ponto M e a bissetriz \overline{AF} no ponto N .

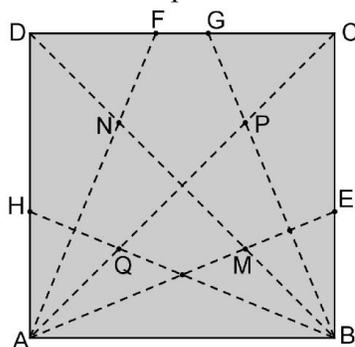
Figura 111 – Construção 2 do octógono regular



Legenda: (a) - Papel base; (b) - Construção do octógono regular, passo 1.
Fonte: O autor, 2014.

Fazendo coincidir os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} como \overline{BD} construímos (axioma 3) as bissetrizes \overline{BH} e \overline{BG} , respectivamente. A bissetriz \overline{BH} intersecta a diagonal \overline{AC} no ponto Q e a bissetriz \overline{BG} no ponto P .

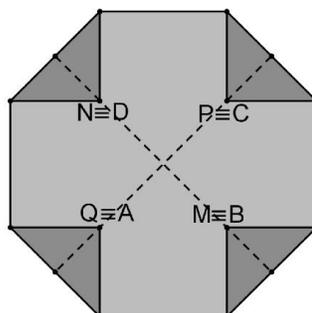
Figura 112 – Construção 2 do octógono regular, passo 2



Fonte: O autor, 2014.

Para finalizar a construção, dobramos o papel, fazendo coincidir A com Q , B com M , C com P e D com N .

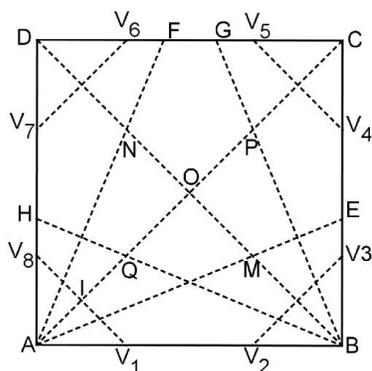
Figura 113 – Construção 2 do octógono regular, passo 3



Fonte: O autor, 2014.

Analisando a Figura 114, onde estão marcadas as dobras utilizadas para a construção, temos.

Figura 114 – Dobras da construção do octógono regular



Fonte: O autor, 2014.

Seja \overline{AC} diagonal do quadrado $ABCD$ e $\overline{V_1V_8}$ a mediatriz de \overline{AQ} , temos o ângulo $\widehat{AV_1} = 90^\circ \rightarrow \widehat{V_1A} = 45^\circ \rightarrow \widehat{V_8V_1V_2} = 135^\circ$, repetindo o procedimento para os outros vértices, verificamos que o octógono é equiângulo.

Considerando o lado do quadrado $ABCD$ unitário e sabendo que \overline{BQ} é bissetriz de \widehat{ABQ} , temos que $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QO}}{\overline{BO}}$ e podemos tirar:

Seja as medidas $\overline{AB} = 1$, $\overline{BO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{AQ} + \overline{QO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos que $\overline{AQ} = \sqrt{2} - 1$. É fácil notar que $\overline{AQ} = \overline{V_1V_8} = \sqrt{2} - 1$, lado do octógono, e $\overline{AV_1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. Repetindo os cálculos para o vértice seguinte do quadrado, temos que $\overline{BV_2} = \overline{AV_1}$ e como $\overline{AV_1} + \overline{V_1V_2} + \overline{V_2B} = 1$, concluímos que $\overline{V_1V_2} = \sqrt{2} - 1$ e o mesmo podemos verificar para os

demais lados do polígono, verificando que o octógono é equilátero e consequentemente regular.

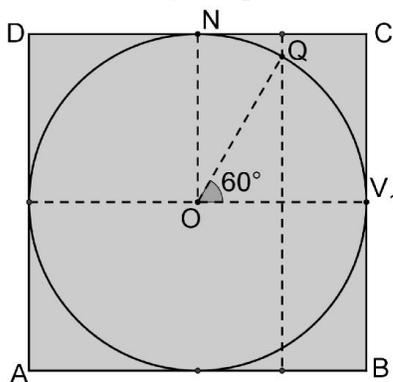
4.1.8 Eneágono Regular

1ª Construção

Para essa construção usaremos uma folha de papel quadrada ABCD, onde foi desenhado, com um compasso, uma circunferência cujo centro seja a interseção dos segmentos \overline{AC} e \overline{BD} (ponto O) e raio maior possível sem tocar na borda da folha.

Marcar, aplicando o axioma 2, as mediatrizes $\overline{OV_1}$ e \overline{ON} dos segmentos \overline{BC} e \overline{CD} que intersecta a circunferência no ponto V_1 e R respectivamente. Construir a mediatriz de $\overline{OV_1}$ (axioma 2) que intersecta a circunferência em Q e temos que o ângulo $\widehat{V_1OQ} = 60^\circ$.

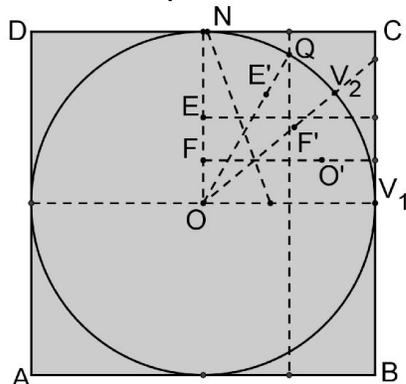
Figura 115 – Construção do eneágono regular, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Utilizando os procedimentos para a trissecção do ângulo $\widehat{V_1OQ}$, como descrito na seção 3.2.1.1, página 34, para obtermos o ângulo central do eneágono com amplitude de 40° .

Figura 116 – Construção do eneágono regular, passo 2

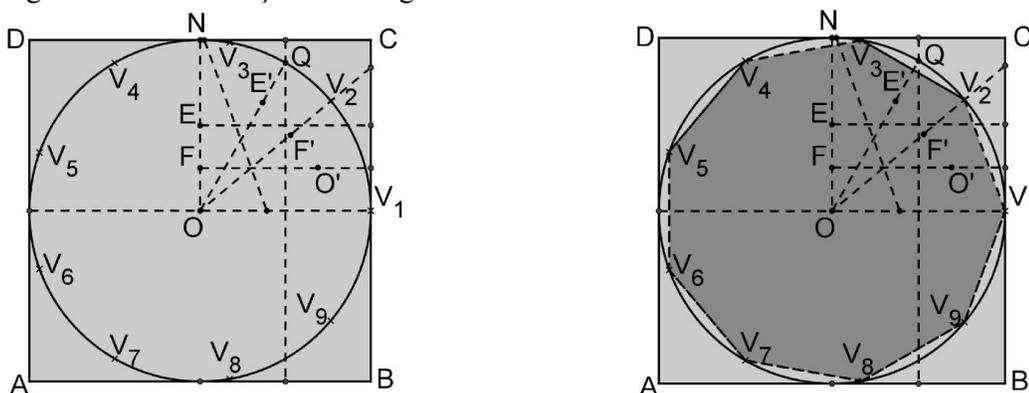


Fonte: O autor, 2014.

Com a trisseção obtemos V_2 e fazendo a reflexão de V_1 em relação a $\overline{OV_2}$ marcamos V_3 sobre a circunferência. Determinamos os demais vértices V_n marcando, sobre a circunferência, as reflexões de V_{n-2} em relação a $\overline{OV_{(n-1)}}$ (Figura 117.a).

Aplicando o axioma 1, ligando os vértices, construímos o eneágono regular como indica a Figura 117.b.

Figura 117 – Construção do eneágono



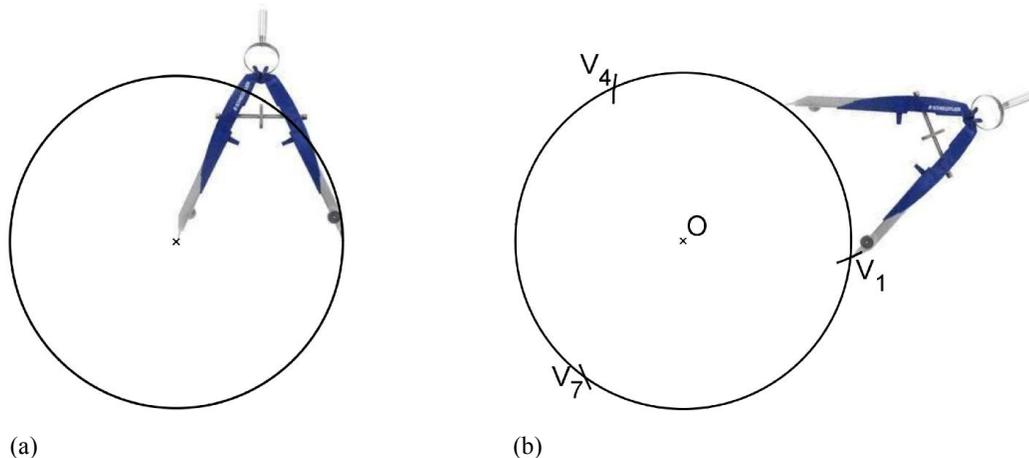
Legenda: (a) - Construção do eneágono regular, passo 3; (b) - Construção do eneágono regular, passo 4.
Fonte: O autor, 2014.

2ª Construção

Para essa construção usaremos uma folha de qualquer formato.

Marcamos na folha o ponto O centro da circunferência e utilizando um compasso, construímos uma circunferência de raio qualquer. Com a mesma abertura do compasso marcamos três arcos de 120° e, deste modo, estamos marcando na circunferência os vértices V_1 , V_4 e V_7 do eneágono.

Figura 118 – Construção 2 do eneágono regular

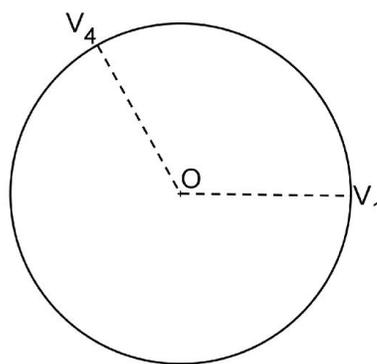


(a) (b)
 Legenda: (a) - Construção da circunferência; (b) - Divisão da circunferência em três ângulos congruentes.
 Fonte: O autor, 2014.

Usando o processo de trisseção de ângulos obtusos em $\widehat{V_1OV_4}$, marcaremos outros dois vértices do eneágono.

Executando a trisseção de $\widehat{V_1OV_4}$, temos:

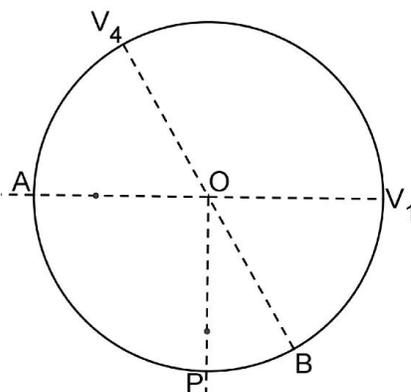
Figura 119 – Construção 2 do eneágono regular, passo 1



Fonte: O autor, 2014.

Prolongar os segmentos $\overline{V_1O}$ e $\overline{V_4O}$, intersectando a circunferência nos pontos A e B, respectivamente, e construir a perpendicular ao segmento $\overline{V_1A}$ que contém O, como indicado na Figura 120.

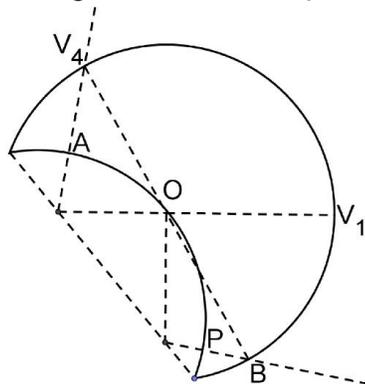
Figura 120 – Construção 2 do eneágono regular, passo 2



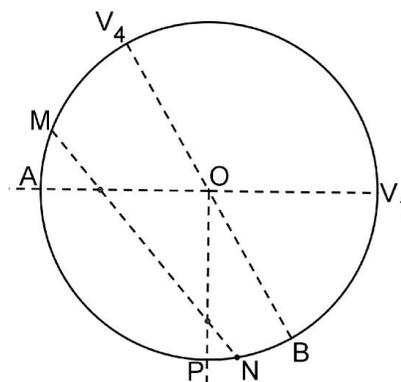
Fonte: O autor, 2014.

Fazer coincidir, simultaneamente, $\overline{V_1A}$ com V_4 e \overline{OP} com B construindo o segmento \overline{MN} (Figura 121.a).

Figura 121 – Construção 2 do eneágono regular



(a)



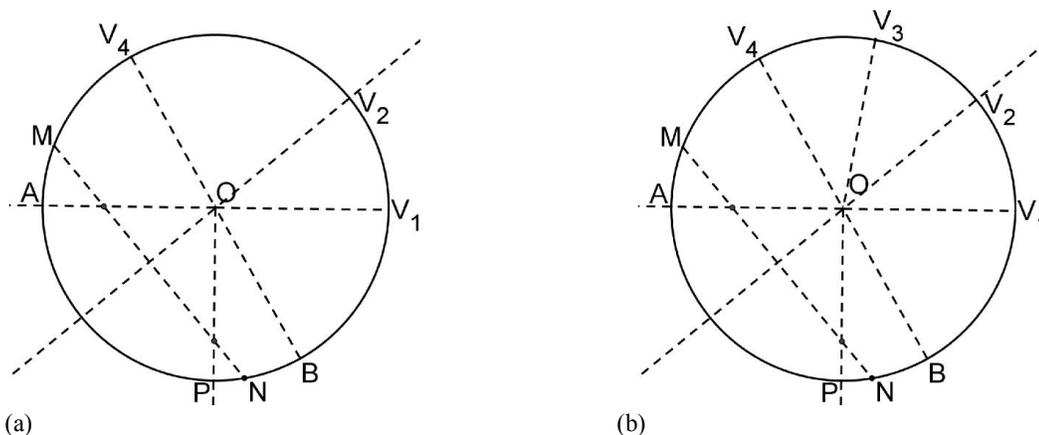
(b)

Legenda: (a) - Construção 2 do eneágono regular, passo 3; (b) - Construção 2 do eneágono regular, passo 4.

Fonte: O autor.

Construir a perpendicular ao segmentos \overline{MN} que contém O e intersecta a circunferência em V_2 . Sendo $\widehat{OV_2}$ a trisseção do ângulo $\widehat{V_1OV_4} = 120^\circ$ temos que $\widehat{V_1OV_2} = 40^\circ$, ângulo central do eneágono regular. Utilizando o axioma 3, fazendo coincidir os segmentos $\overline{V_2O}$ e $\overline{V_4O}$, marcar sobre a circunferência o vértice V_3 .

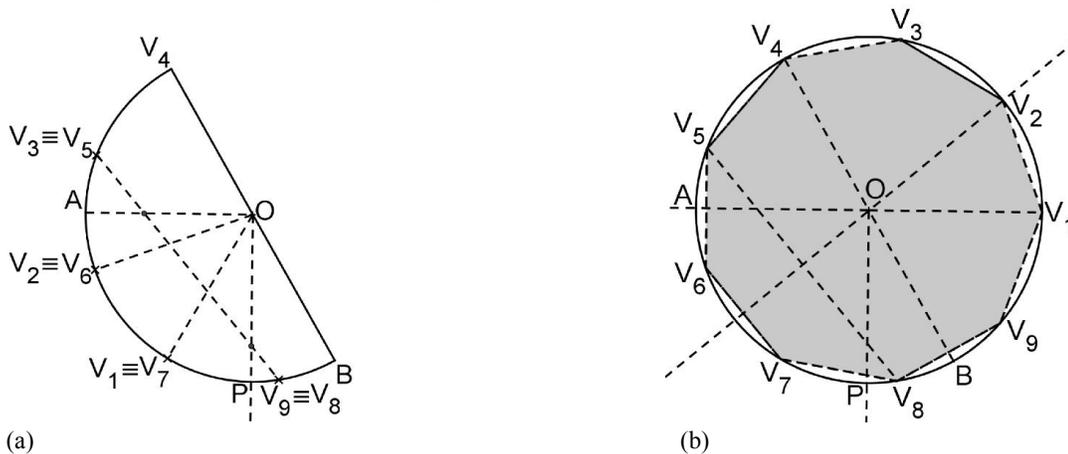
Figura 122 – Construção 2 do eneágono regular



Legenda: (a) - Construção 2 do eneágono regular, passo 5; (b) - Construção 2 do eneágono regular, passo 6
 Fonte: O autor, 2014.

Nessa construção, temos que o ponto M e N correspondem, respectivamente, aos vértices V_5 e V_8 . Dobrar o papel ao longo do segmento $\overline{V_4B}$ e marcar os vértices $V_5 \equiv V_3$, $V_6 \equiv V_2$, $V_7 \equiv V_1$ e $V_9 \equiv V_8$. Desse modo, obtemos o eneágono regular como indicado na Figura 123.b.

Figura 123 – Construção 2 do eneágono regular



Legenda: (a) - Construção do eneágono regular, passo 7; (b) - Eneágono regular.
 Fonte: O autor, 2014.

5 PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO

Apresentaremos uma pequena lista de atividades com origami que, além da utilidade como elemento motivador, permitirão o estudo de diversos conceitos de geometria plana bem como outros conceitos matemáticos. Estas atividades são apenas sugestões que juntamente com o conjunto de axiomas, com as construções de polígonos e as demais construções por origami apresentadas neste trabalho, pretendem proporcionar aos professores uma base para a elaboração de novas atividades criativas que utilizem o origami como importante elemento lúdico e motivador no ensino da matemática, seguindo o que pensam Rêgo, Rêgo e Gaudêncio.

O origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio de observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. (REGO; REGO; GAUDÊNCIO, 2003, p. 18).

A importância das atividades com origami é reforçada pelas palavras de Grazielle Rancan (2011, p.18): “As atividades com dobraduras manuais possuem uma dinâmica que valorizam a descoberta, a conceituação, a construção manipulativa, a visualização e a representação geométrica.” e atendem ao que preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a respeito da importância da utilização de novos recursos no desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem da matemática.

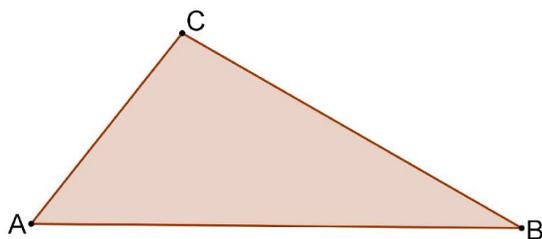
O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem (PCN, Matemática, 1997, p. 19).

5.1 Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

Inicialmente, cada aluno deve cortar uma folha de papel na forma triangular sem dimensões previamente definidas.

A Figura 124 representa apenas um exemplo de um triângulo construído.

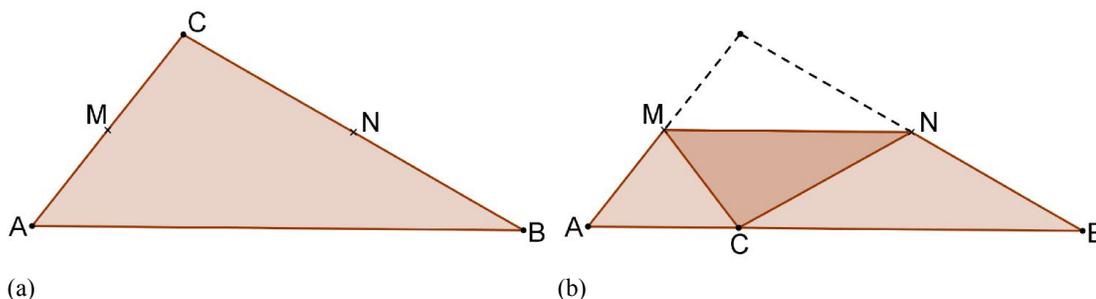
Figura 124 – Triângulo qualquer



Fonte: O autor, 2014.

Marcar os pontos médios M e N dos segmentos \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente. Fazendo C coincidir com \overline{AB} , construindo o segmento \overline{MN} .

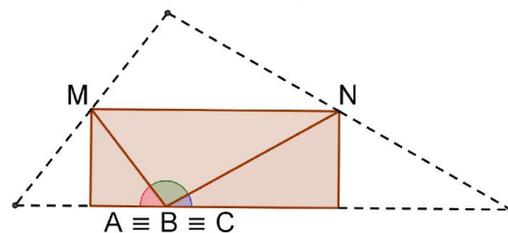
Figura 125 – Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer



(a) (b)
 Legenda: (a) - Construção, passo 1; (b) - Construção, passo 2.
 Fonte: O autor, 2014.

Dobrar os vértices A e B para construir as perpendiculares ao segmento \overline{AB} que contém M e N , deste modo, os vértices A e B coincidirão com C .

Figura 126 – Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer



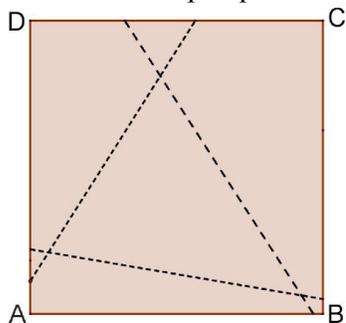
Fonte: O autor, 2014.

Temos que os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} juntos, formam um ângulo raso e a soma deles é igual a 180° e, como os triângulos são diferentes, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° , como queríamos mostrar.

5.2 Principais Cevianas do Triângulo

Para cada uma das atividades de construção das cevianas, tomaremos como ponto de partida uma folha de papel quadrada onde cada aluno deverá marcar, sobre sua folha, três dobras que formarão um triângulo.

Figura 127 – Triângulo qualquer

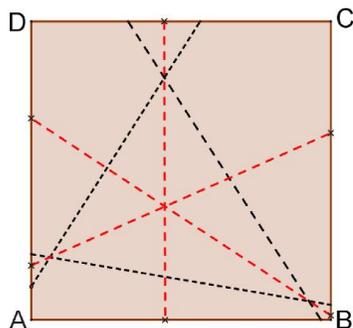


Fonte: O autor, 2014.

5.2.1 Bissetrizes

Aplicando o axioma 3 nos lados do triângulo, iremos construir as bissetrizes internas do triângulo como indicado na Figura 128.

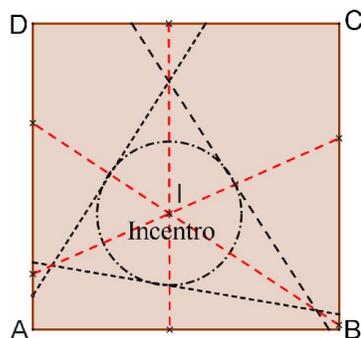
Figura 128 – Construção das bissetrizes



Fonte: O autor, 2014.

Com isso, podemos observar que as bissetrizes internas intesectam num único ponto, o incentro e com o auxílio de um compasso, podemos mostrar que o incentro é equidistante aos lados do triângulo, isso é, o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Figura 129 – Propriedade das bissetrizes



Fonte: O autor, 2014.

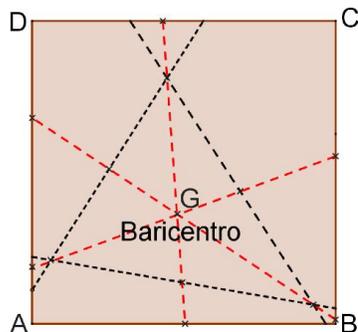
5.2.2 Medianas

Primeiramente, devemos usar o axioma 2 apenas para marcar o ponto médio de cada lado do triângulo, em seguida, com o axioma 1, ligar os pontos médios com os vértices opostos traçando as medianas.

Observamos que as medianas intersectam num único ponto, o baricentro.

É possível, por dobradura, mostrar que o baricentro divide cada mediana na proporção $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, do seguinte modo: Seja um vértice e um ponto médio, comuns a mesma mediana, fazer coincidir tais pontos com o baricentro e verificar a construção de três segmentos coincidentes, logo, a mediana foi dividida em três segmentos congruentes.

Figura 130 – Construção das medianas



Fonte: O autor, 2014.

Executando a construção do baricentro numa folha de papel triangular, é possível mostrar que o baricentro é o centro de gravidade do triângulo, colocando a ponta de um lápis no baricentro e equilibrando o triângulo.

Figura 131 – Propriedade do baricentro

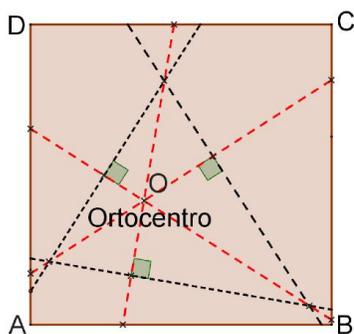


Fonte: <http://caosyfractales.blogspot.com.br/2012/05/el-baricentro-de-un-triangulo.html>

5.2.3 Alturas

De posse do axioma 4, construir as dobras que são as alturas relativas a cada lado do triângulo. Temos que as alturas se intersectam num único ponto, o ortocentro.

Figura 132 – Construção das alturas

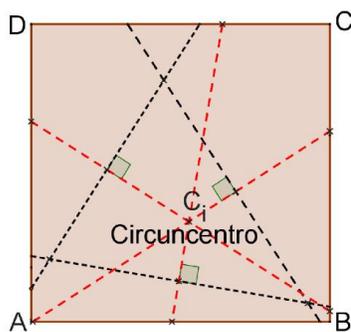


Fonte: O autor, 2014.

5.2.4 Mediatrizes

Aplicando o axioma 2, fazendo os vértices coincidirem dois a dois marcar as mediatrizes do triângulo.

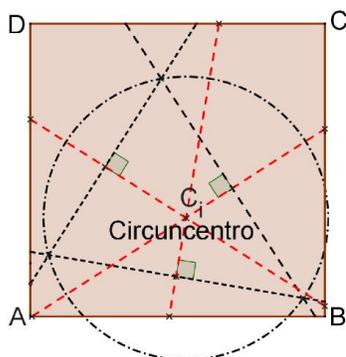
Figura 133 – Construção das mediatrizes



Fonte: O autor, 2014.

Notamos que as mediatrizes intersectam-se em um único ponto, o circuncentro e com a ajuda de um compasso, podemos facilmente mostrar que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Figura 134 – Propriedade das mediatrizes



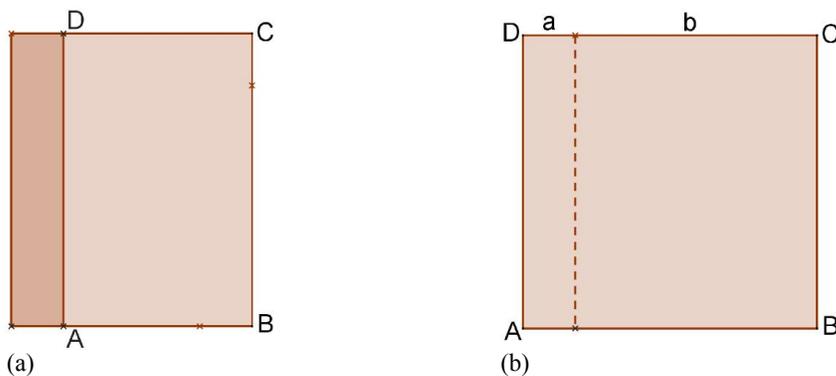
Fonte: O autor, 2014.

5.3 Teorema de Pitágoras

Usaremos a dobradura para demonstrar o teorema de Pitágoras tomando como ponto de partida uma folha de papel quadrada.

Dobrar e desdobrar a folha, fazendo um dos lados se sobreporem, deste modo, dois lados opostos serão divididos em dois segmentos que chamaremos de a e b .

Figura 135 – Construção do teorema de Pitágoras



(a)

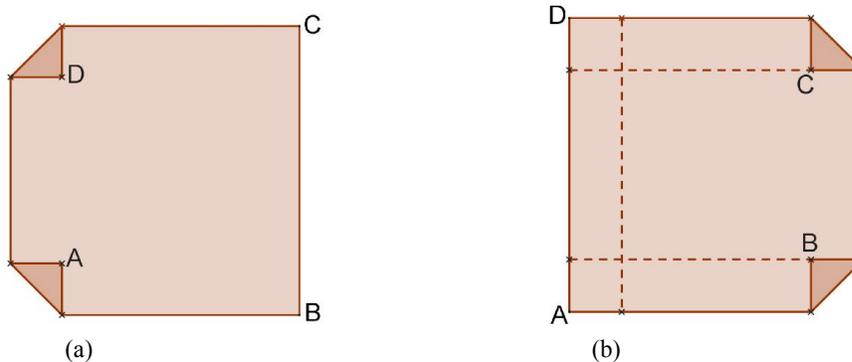
(b)

Legenda: (a) - Construção, passo 1; (b) Construção, passo 2.

Fonte: O autor, 2014.

Transferindo as medidas a e b para os demais lados como indicado nas figuras abaixo.

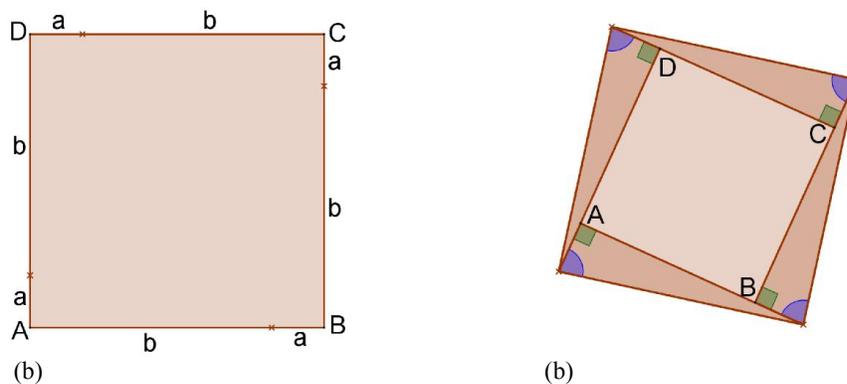
Figura 136 – Construção do teorema de Pitágoras



Legenda: (a) - Construção, passo 3; (b) - Construção, passo 4.
Fonte: O autor, 2014.

Deste modo, passaremos a ter os lados do quadrado divididos em seguimento a e b , convenientemente marcados, como observamos na figura abaixo. Podemos dobrar para marcar as hipotenusas dos triângulos retângulos.

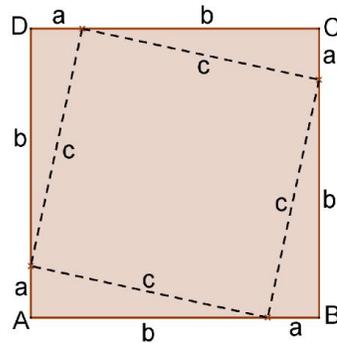
Figura 137 – Construção do teorema de Pitágoras



Legenda: (a) - Construção, passo 5; (b) - Construção, passo 6.
Fonte: O autor, 2014.

Podemos notar que os triângulos retângulos da Figura 138 são congruentes já que possuem catetos de medida a e b e chamaremos as hipotenusas de c .

Figura 138 – Construção do teorema de Pitágoras



Fonte: O autor, 2014.

Temos que a área do quadrado maior (de lado $a + b$) é igual a soma das áreas de quatro triângulos (de catetos a e b) e a área do quadrado menor (de lado c).

$$(a + b)^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + c^2$$

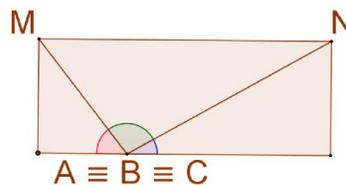
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ Como queríamos demonstrar. } \blacksquare$$

5.4 Área do Triângulo

Dado um triângulo qualquer ΔABC , devemos executar as mesmas dobrar executada para a soma dos ângulos internos, obtendo o retângulo conforme a Figura 139.

Figura 139 – Construção da área do triângulo



Fonte: O autor, 2014.

Deste modo, o retângulo obtido possui um dos lados com medida igual à metade da altura do triângulo (chamemos a altura do triângulo de h) e o outro lado tem por medida metade da base \overline{AB} do triângulo e ainda, a área do triângulo é igual ao dobro da área do retângulo. Relacionando as áreas, vem:

$$A_{\Delta} = 2 \times A_{\square}$$

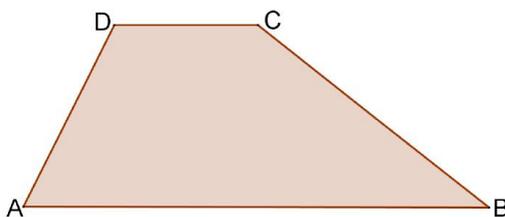
$$A_{\Delta} = 2 \times \frac{h}{2} \times \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} \blacksquare$$

5.5 Área do Trapézio

Usaremos dobradura para obter a fórmula para cálculo da área de um trapézio, para tal, tomemos uma folha na forma de um trapézio de dimensões não determinadas (Figura 140).

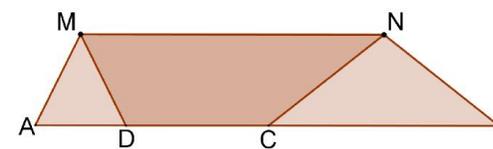
Figura 140 – Trapézio qualquer



Fonte: O autor, 2014.

Sobrepor a base menor \overline{CD} sobre a base maior \overline{AB} , como indicado na Figura 141.

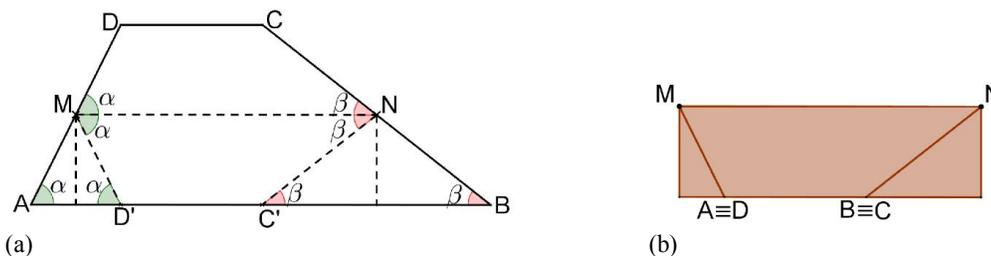
Figura 141 – Construção da área do Trapézio



Fonte: O autor, 2014.

Fazer coincidir os segmentos \overline{AM} e \overline{BN} com os segmentos \overline{DM} e \overline{CN} , respectivamente. Iremos obter um retângulo como indicado na Figura 142.b.

Figura 142 – Construção da área do trapézio



(a) - Ângulos congruentes marcados no trapézio; (b) - Retângulo construído.
 Fonte: O autor, 2014.

Na Figura 142.a, são indicados os ângulos congruentes, formados pela execução das dobras, indicando que essas dobraduras formam um retângulo.

Temos que a área do trapézio é o dobro da área do retângulos, um lado do retângulo tem por medida a metade da medida da altura (h) do trapézio e o outro lado do retângulo tem por medida a metade da soma das bases (B e b) do trapézio. Relacioando essas área, vem:

$$A_{trap.} = 2 \times A_{\square}$$

$$A_{trap.} = 2 \times \frac{h}{2} \times \frac{(B + b)}{2}$$

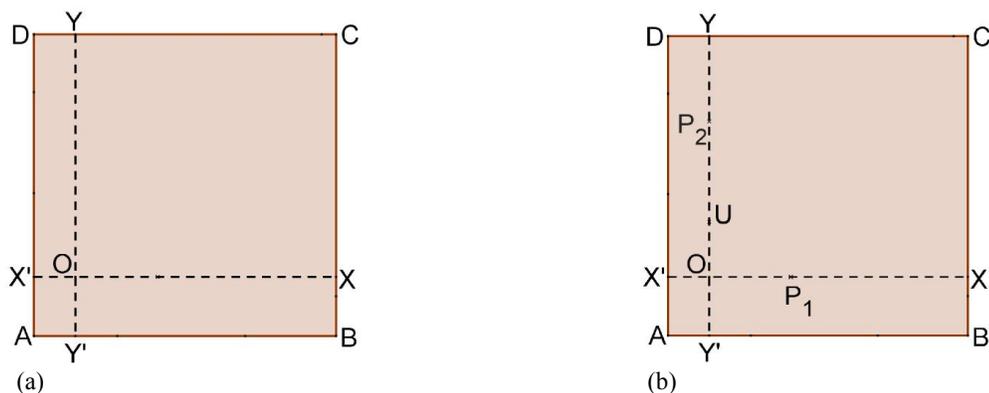
$$A_{trap.} = \frac{(B + b)}{2} h \blacksquare$$

5.6 Problemas de Números Construtíveis

Problema 1: Sendo dados dos segmentos de comprimentos a e b e a unidade, determinar $a \cdot b$.

Em uma folha, marcar duas retas perpendiculares, formando assim um sistema de coordenadas para o plano do papel, onde uma dobra representa o eixo-x e a outra o eixo-y e a interseção delas será a origem O . Marcar sobre \overline{OX} o segmento $\overline{OP_1} = a$ e sobre \overline{OY} , marcar os segmentos $\overline{OU} = 1$ e $\overline{OP_2} = b$.

Figura 143 – Construção do produto de dois números

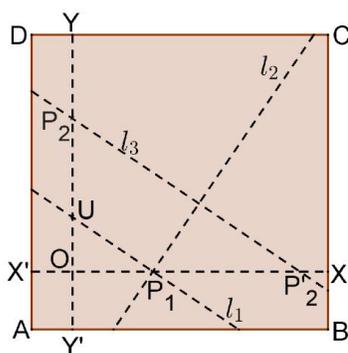


(a) - Construção do produto de dois números, passo 1; (b) - Construção do produto de dois números, passo 2.

Fonte: O autor, 2014.

Marcar a dobra l_1 que contém U e P_1 (axioma 1) e construir a dobra l_2 , perpendicular à l_1 (axioma 4). Fazer a dobra l_3 , perpendicular à l_2 que contém o ponto P_2 . Temos que $l_3 \cap \overline{OX} = P'_2$.

Figura 144 – Construção do produto de dois números



Fonte: O autor, 2014.

Da semelhança dos triângulos $\Delta OP_2P'_2$ e ΔOUP_1 , tiramos que:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP'_2}}$$

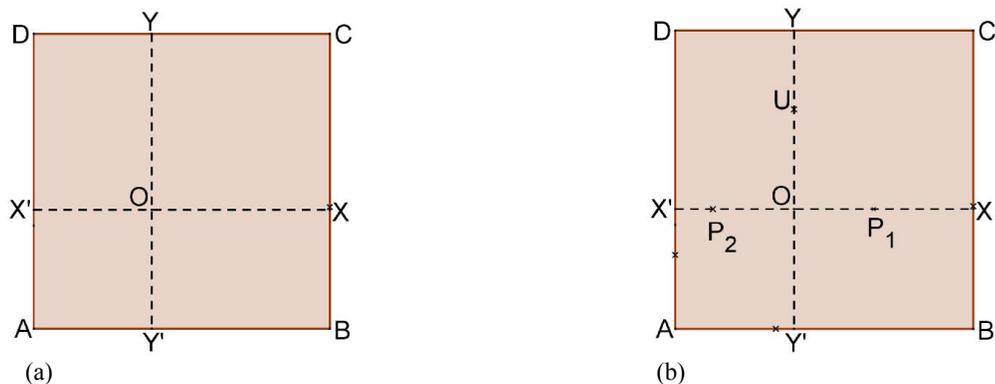
$$\frac{1}{a} = \frac{b}{\overline{OP'_2}}$$

$$\overline{OP'_2} = ab, \text{ como desejado.}$$

Problema 2: Sendo dados dos segmentos de comprimentos a e b e a unidade, determinar $\frac{a}{b}$.

Construir na folha de papel sistema de coordenadas como descrito no problema anterior. Marcar sobre \overline{OX} o segmento $\overline{OP_1} = a$, sobre \overline{OY} o segmento $\overline{OU} = 1$ e sobre $\overline{OX'}$ o segmento $\overline{OP_2} = b$.

Figura 145 – Construção do quociente de dois números

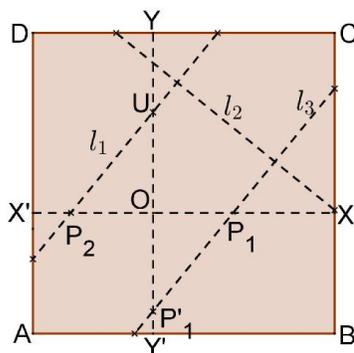


Legenda: (a) - Construção do quociente de dois números, passo 1; (b) - Construção do quociente de dois números, passo 2.

Fonte: O autor, 2014.

Marcar a dobra l_1 que contém U e P_2 (axioma 1) e construir a dobra l_2 , perpendicular à l_1 (axioma 4). Fazer a dobra l_3 , perpendicular à l_2 que contem o ponto P_1 . Temos que $l_3 \cap \overline{OY'} = P'_1$.

Figura 146 – Construção do quociente de dois números



Fonte: O autor, 2014.

Da semelhança dos triângulos $\Delta OP_1P'_1$ e ΔOUP_2 , tiramos que:

$$\frac{\overline{OP'_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OP_2}}$$

$$\frac{\overline{OP'_1}}{a} = \frac{1}{b}$$

$$\overline{OP'_1} = \frac{a}{b}, \text{ como desejado.}$$

5.7 Problemas de Máximos e Mínimos

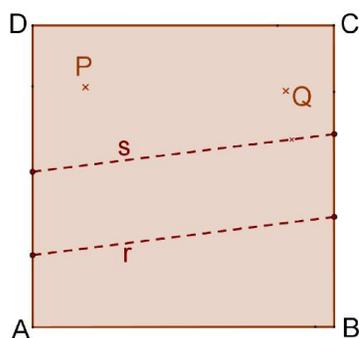
Listaremos alguns problemas propostos por Roger C. Alperin e suas soluções, por dobraduras, apresentadas por Francisco Mattos (2010).

Problema 1:

Sejam duas cidades P e Q situadas do mesmo lado de um rio. Ambas devem utilizar um mesmo ponto Z, para captação de água na margem do rio r, situado entre as cidades. Localize Z de modo que a quantidade de tubulação gasta para levar água às duas cidades P e Q seja mínima.

Sejam P e Q como na Figura 147, considerando o rio com largura constante d representado pelas retas paralelas r // s.

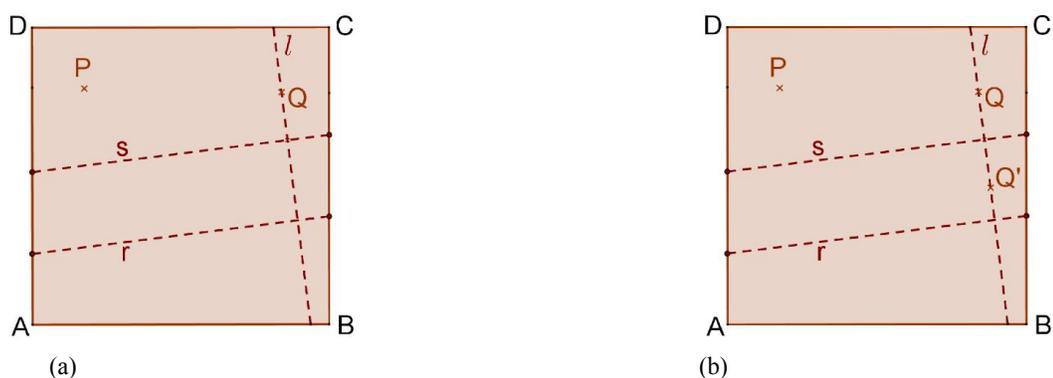
Figura 147 – Problema 1



Fonte: O autor, 2014.

Dobrar a reta r sobre ela mesma construindo uma reta l tal que $l \perp r$ e $Q \in l$. Em seguida, dobrar o papel ao longo da reta r, refletindo l sobre si mesma, marcar o ponto Q', reflexão de Q sobre l.

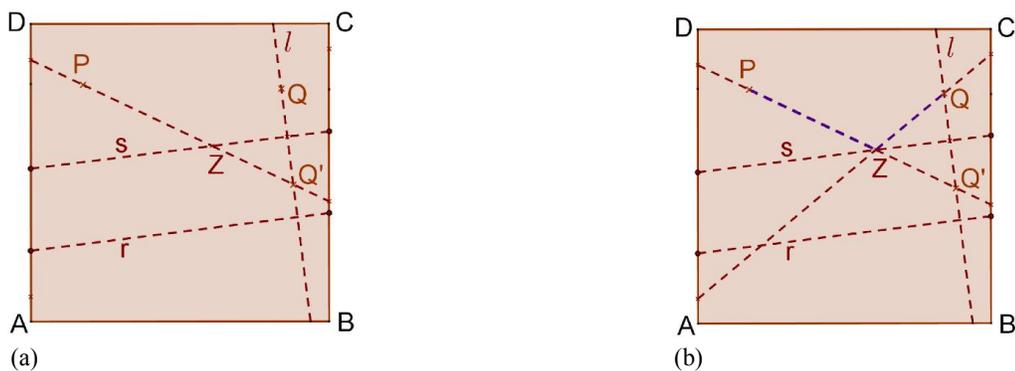
Figura 148 – Solução do problema 1



(a) Solução do problema 1, passo 1; (b) Solução do problema 1, passo 2.
 Legenda: (a) - Solução do problema 1, passo 1; (b) - Solução do problema 1, passo 2.
 Fonte: O autor, 2014.

Construir a dobra que determina a reta que contém os pontos P e Q' , marcando o ponto $Z = r \cap \overline{PQ'}$, deste modo, temos que $\overline{PQ'}$ é a menor distância entre os pontos P e Q' e $\overline{PZ} + \overline{ZQ}$ é a menor distância que liga as duas cidades P e Q , passando por um ponto Z da margem do rio.

Figura 149 – Solução do problema 1



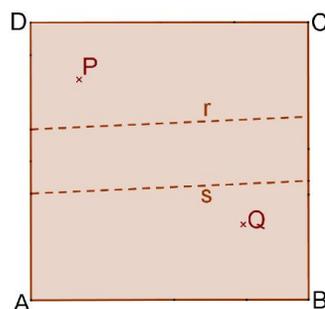
(a) Solução do problema 1, passo 3; (b) Solução do problema 1, solução.
 Legenda: (a) - Solução do problema 1, passo 3; (b) - Solução do problema 1, solução.
 Fonte: O autor, 2014.

Problema 2:

Sejam duas cidades P e Q separadas por um rio de largura constante d . Se o comprimento da ponte deve ser d , determine o ponto Z da margem de modo a construirmos a menor distância possível em estradas para ligar as cidades P e Q .

Sejam P e Q como na figura abaixo e considerando o rio com largura constante d , representado pelas retas paralelas $r // s$.

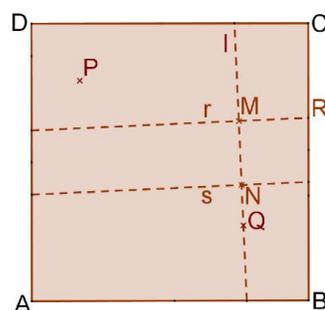
Figura 150 – Problema 2



Fonte: O autor, 2014.

Dobrar a reta r sobre ela mesma construindo uma reta l tal que $l \perp r$ e $Q \in l$ (axioma 4) e definindo os pontos M e N , tais que $M = r \cap l$ e $N = s \cap l$.

Figura 151 – Solução do problema 2, passo 1

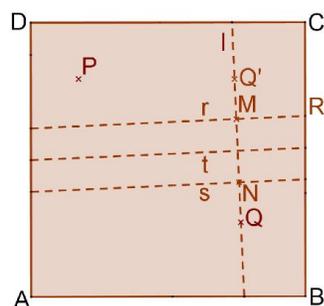


Fonte: O autor, 2014.

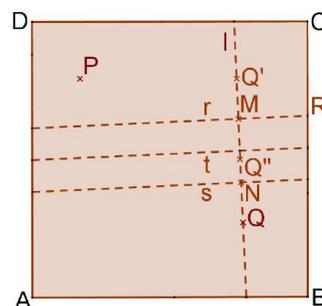
Dobrar e fazer coincidirem as retas r e s , construindo a reta t , paralela média de s e r e marcar o ponto Q' reflexão de Q sobre l .

Em seguida, dobrar o papel ao longo da reta r , refletindo l sobre si mesma, marcar o ponto Q'' , reflexão de Q' sobre l .

Figura 152 – Solução do problema 2



(a)



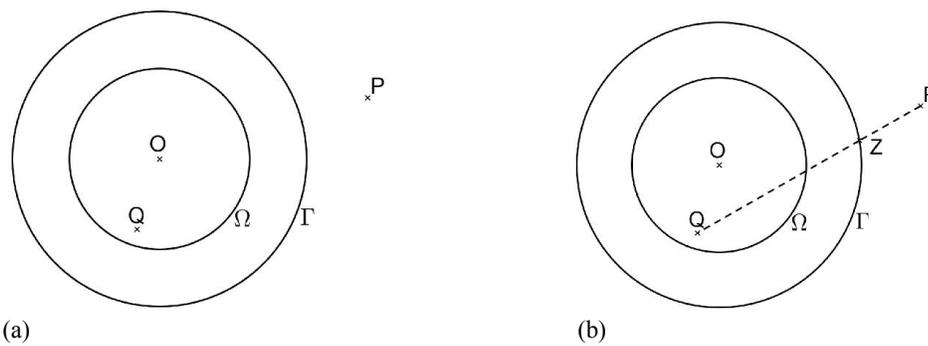
(b)

Legenda: (a) - Construção do problema 1, passo 2; (b) - Construção do problema 1, passo 3.

Fonte: O autor, 2014.

A Figura 155.a representa o esquema do problema. Chamaremos a circunferência externa por Γ e a interna de Ω . Marcar o segmento \overline{PQ} , que seria a menor distância entre P e Q, sem levar em conta o anel circular. Marcar o ponto $Z = \Gamma \cap \overline{PQ}$.

Figura 155 – Problema 3



(a)

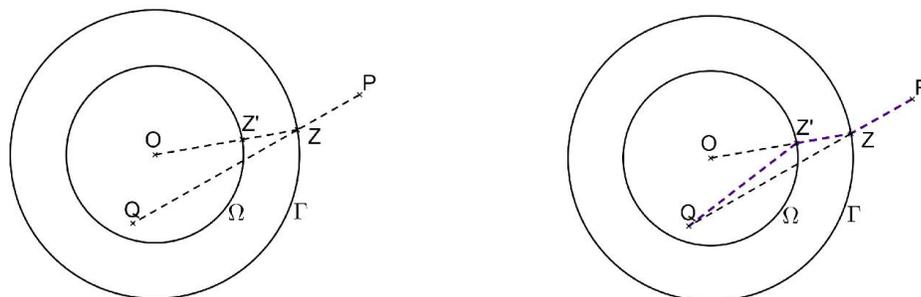
(b)

Legenda: (a) - Construção do problema 3; (b) - Solução do problema 3, passo 1.

Fonte: O autor, 2104.

Construir a dobra \overline{OZ} marcando sobre Ω o ponto Z' , onde $Z' = \Omega \cap \overline{OZ}$. A menor distância entre as cidades A e B será obtido por $\overline{QZ'} + \overline{ZZ'} + \overline{ZP}$, com $Z'Z = d$.

Figura 156 – Solução do problema 3



(a)

(b)

Legenda: (a) - Solução do problema 3, passo 2; (b) - Solução do problema 3, passo 3.

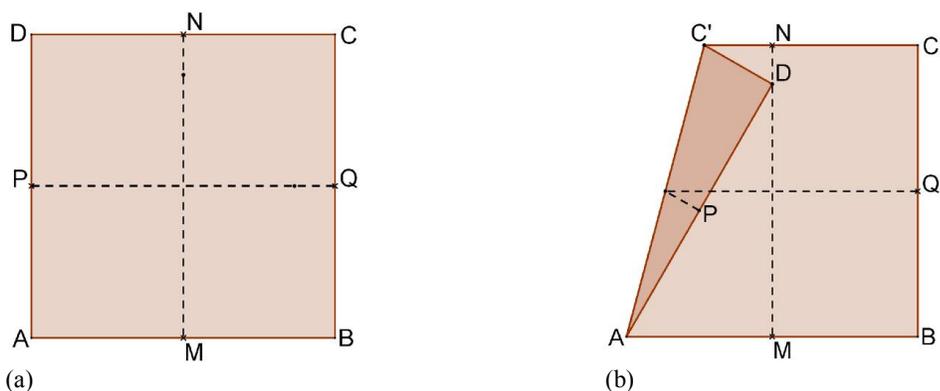
Fonte: O autor, 2104.

Problema 4:

Dado um quadrado de lado l , construir o triângulo equilátero, de área máxima, inscrito ao quadrado.

Construir as mediatrizes \overline{MN} e \overline{PQ} dos segmentos \overline{AB} e \overline{AD} , respectivamente, como indicado na Figura 157.a. Coincidir o vértice D com o segmento \overline{MN} , construindo o segmento $\overline{AC'}$ (Figura 157.b).

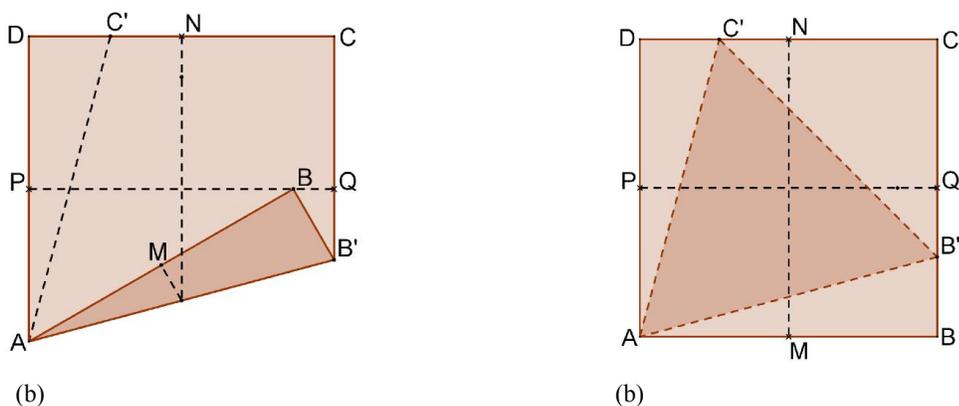
Figura 157 – Solução do problema 4



Legenda: (a) - Solução do problema 4, passo 1; (b) - Solução do problema 4, passo 2.
 Fonte: O autor, 2014.

Dobra o papel, fazendo o ponto B coincidir com o segmento \overline{PQ} (Figura 158.a)

Figura 158 – Solução do problema 4



Legenda: (a) - Solução do problema 4, passo 3; (b) - Triângulo equilátero inscrito.
 Fonte: O autor, 2014.

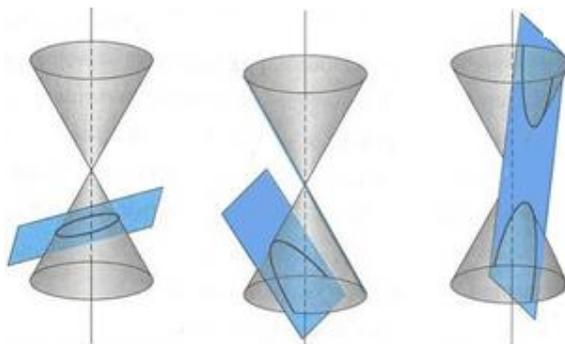
Esta solução foi apresentada na seção 4.1.1, onde se encontra a demonstração de que o triângulo equilátero obtido é máximo.

5.8 Cônicas

Os primeiros estudos sobre cônicas foram desenvolvidos por Apolônio de Perga (260 a.C-200 a. C), que em sua obra, “As Cônicas”, apresentam um extenso estudo das secções planas de um cone de revolução e para tal, aplica apenas métodos da geometria Euclidiana.

As cônicas são curvas planas obtidas pela intersecção de um plano com um cone circular reto, de modo que, a natureza da cônica depende apenas da inclinação do plano secante em relação às geratrizes da superfície cônica.

Figura 159 – Cônicas



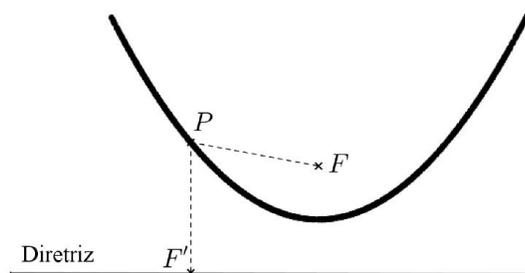
Fonte: <http://gramir33.webnode.es/a10%C2%B0/geometria-analitica/conicas/>

Diferentemente da geometria analítica que estabelece propriedades dos pontos pertencentes às curvas, a geometria origami estuda a correspondência entre as dobras construídas, isto é, a correspondência entre uma reta e as curvas.

5.8.1 Parábola

A parábola é definida como lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes a um ponto fixo (foco) e a uma reta fixa (diretriz), que não contém o ponto.

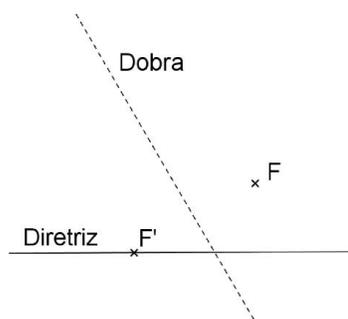
Figura 160 – Parábola



Fonte: O autor, 2014.

O axioma 5 nos permite construir, por dobradura, uma tangente à parábola dados foco F e diretriz d .

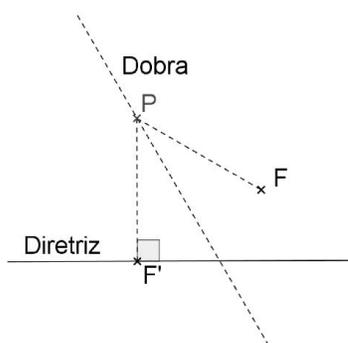
Figura 161 – Dobradura
construída
pelo axioma 5



Fonte: O autor, 2014.

Temos que a reta construída é a mediatriz de F e F' (ponto onde F coincide com a diretriz), logo, contém o ponto P que é equidistante da reta d e do ponto F . Aplicando o axioma 4, construindo a dobradura perpendicular à diretriz por F' , obtemos o ponto P intersecção da perpendicular com a tangente que é um ponto da tangente.

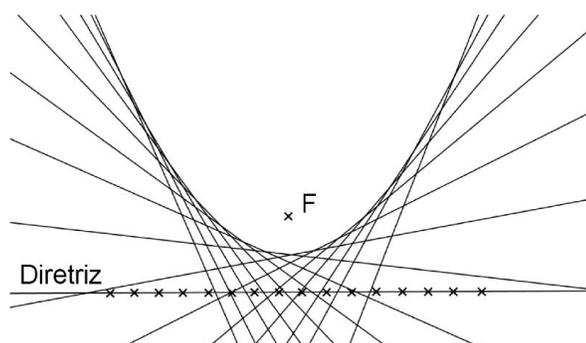
Figura 162 – Propriedade da
dobradura construída
pelo axioma 5



Fonte: O autor, 2014.

Repetindo-se a operação com o axioma 5 em número suficiente, o conjunto de dobras, retas tangentes, formará uma parábola como indica a Figura 163.

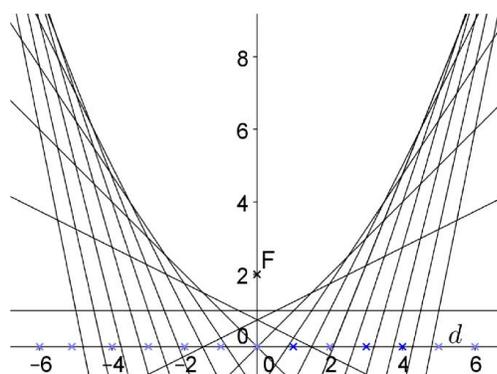
Figura 163 – Conjunto de dobraduras construído pelo axioma 5



Fonte: O autor, 2014.

Dados o ponto $F = (0, 2)$ e a reta $d: y = 0$, respectivamente foco e diretriz, podemos construir uma parábola marcando dobraduras ao fazermos F coincidir com d . Obtemos a figura abaixo.

Figura 164 – Elementos da parábola



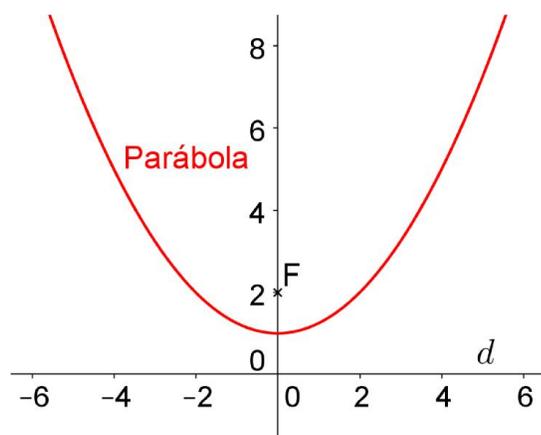
Fonte: O autor, 2014.

Da geometria analítica, tiramos que a parábola descrita anteriormente possui equação:

$$x^2 = 4(y - 1)$$

Com recurso do software de geometria dinâmica Geogebra, podemos, inserindo no campo de entrada a equação $x^2 = 4(y - 1)$, obter uma parábola e comparar as curvas obtidas nos dois processos.

Figura 165 – Parábola construída com auxílio do software Geogebra

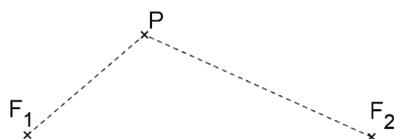


Fonte: O autor, 2014.

5.8.2 Elipse

A elipse é definida como lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano têm soma constante.

Figura 166 – Lugar geométrico dos pontos da elipse



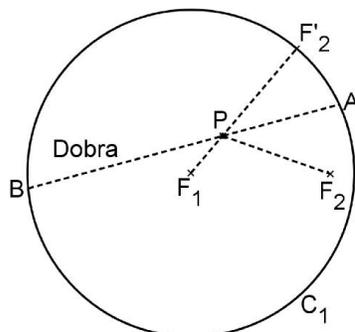
$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{constante}$$

Fonte: O autor, 2014.

Passaremos a analisar a construção da elipse por origami, para tal, consideramos uma folha de papel onde temos marcados uma circunferência C_1 de centro F_1 e raio r , $r > 0$ e um ponto F_2 , com $\overline{F_1F_2} < r$.

Pelo Axioma 8, podemos construir uma dobra ao coincidir F_2 com C_1 e analisando a figura abaixo, temos:

Figura 167 – Dobradura
construída pelo
axioma 8



Fonte: O autor, 2014.

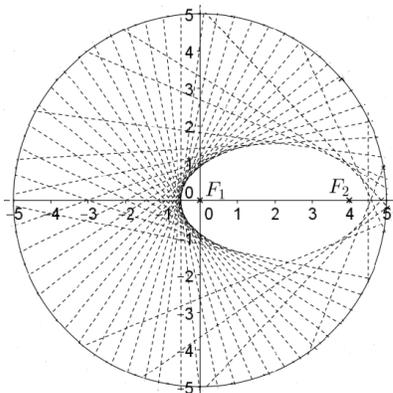
Deste modo, a dobra construída é mediatriz dos pontos F_2 e F'_2 e $|\overline{F_2P}| = |\overline{F'_2P}|$. Temos que $|\overline{F_1P}| + |\overline{F'_2P}| = r$ e fazendo uma substituição simples obtemos $|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = r$ onde r é uma constante, logo P é ponto da elipse de focos F_1 e F_2 .

Podemos observar ainda que os ângulos $\widehat{BPF_1} = \widehat{APF'_2}$, ângulos opostos pelo vértice, e sendo \overline{AB} mediatriz dos pontos F_2 e F'_2 , temos que $\widehat{APF_2} = \widehat{APF'_2}$, com isso, $\widehat{BPF_1} = \widehat{APF_2}$ o que nos indica que \overline{AB} (dobra construída) é tangente à elipse de focos dados.

Seja a circunferência C_1 de centro F_1 de raio r ($r > 0$) e um ponto F_2 , com $\overline{F_1F_2} < r$, tal que, F_1 coincide com a origem dos eixos coordenados e $F_2 = (x_{F_2}, 0)$, marcado sobre o eixo \overline{Ox} , temos que a elipse construível por dobradura possui eixos maior e menor medindo, respectivamente, r e $\sqrt{r^2 - (x_{F_2})^2}$ e centro $C = \left(\frac{x_{F_2}}{2}, 0\right)$.

A figura abaixo é formada por um conjunto de dobras que são tangentes à elipse de focos $F_1 = (0,0)$ e $F_2 = (4,0)$ e, ao lado, a curva formada pelo conjunto dos pontos das dobras que são pontos de tangência à elipse.

Figura 168 – Elipse formada
por dobraduras,
pelo axioma 8

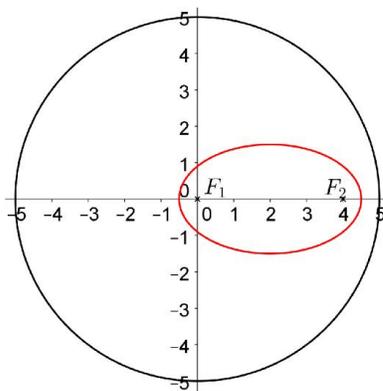


Fonte: O autor, 2014.

Podemos então comparar à elipse obtida com o software de geometria dinâmica Geogebra, inserindo-se no campo de entrada a equação:

$$35x^2 - 144x + 100y^2 - 81 = 0$$

Figura 169 – Elipse construída
pelo software
Geogebra

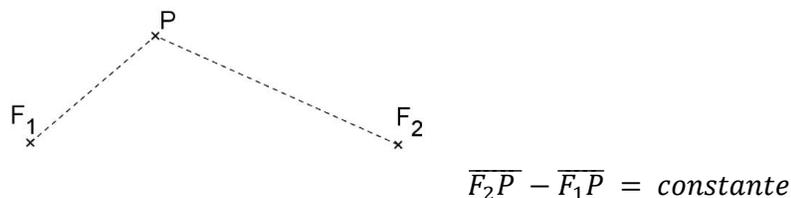


Fonte: O autor, 2014.

5.8.3 Hipérbole

A hipérbole é definida como lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano têm diferença constante.

Figura 170 – Lugar geométrico dos pontos da hipérbole

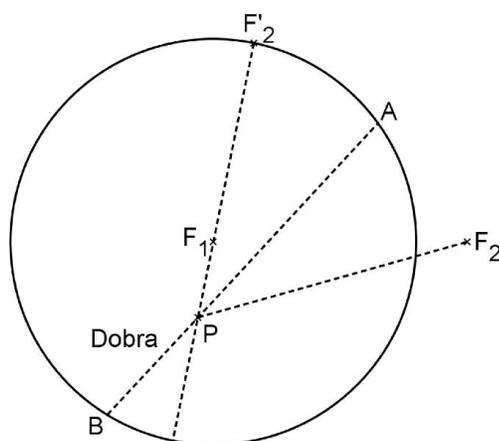


Fonte : O autor, 2014.

Analisando a construção da hipérbole por origami, consideramos uma folha de papel onde temos marcados uma circunferência C_1 de centro F_1 e raio $r, r > 0$ e um ponto F_2 , com $\overline{F_1F_2} > r$.

Podemos, aplicando o axioma 8, construir uma dobra ao coincidir F_2 com C_1 no ponto F'_2 como indica a figura abaixo.

Figura 171 – Dobradura construída pelo axioma 8



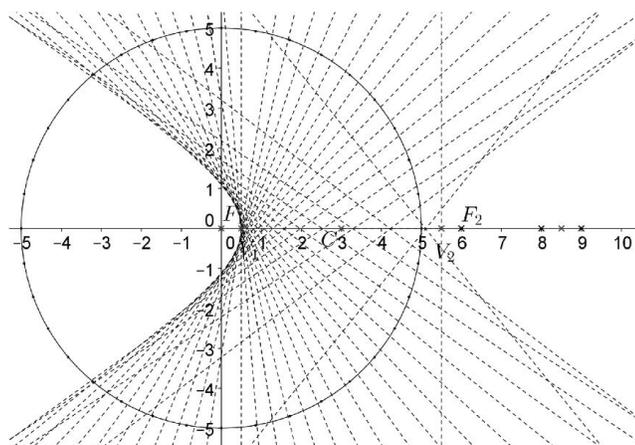
Fonte: O autor, 2014.

Temos que a dobra construída é mediatriz dos pontos F_2 e F'_2 e $|\overline{F_2P}| = |\overline{F'_2P}|$. Como $|\overline{F'_2P}| - |\overline{F_1P}| = r$, fazendo uma substituição simples obtemos $|\overline{F_2P}| - |\overline{F_1P}| = r$. Sendo r uma constante temos que P é ponto da hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Sendo \overline{AB} mediatriz dos pontos F_2 e F'_2 , temos que ângulos $\widehat{APF_2} = \widehat{APF'_2}$ e, deste modo, o segmento construído \overline{AB} é tangente à hipérbole de focos dados.

Seja a circunferência C_1 de centro F_1 de raio r ($r > 0$) e um ponto F_2 , com $\overline{F_1F_2} > r$, tal que, F_1 coincide com a origem dos eixos coordenados e $F_2 = (x_{F_2}, 0)$, marcado sobre o eixo \overline{Ox} , marcando um número suficiente de dobra, obtemos a hipérbole como indicado na figura abaixo.

Figura 172 – Hipérbole formada por dobraduras,
pelo axioma 8



Fonte: O autor, 2014.

Da geometria analítica, tiramos que a hipérbole em questão possui os seguintes elementos:

$$\text{Distância focal: } 2c = |\overline{F_1F_2}| = |x_{F_2}|$$

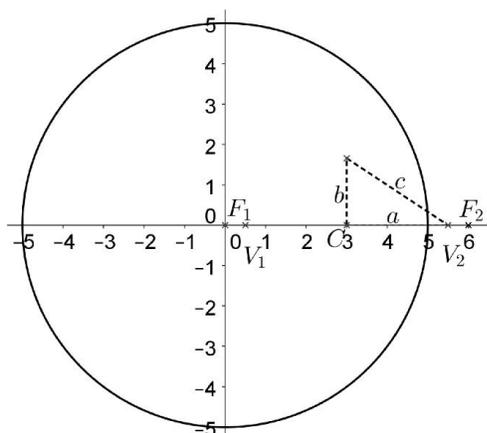
$$\text{Centro: } C = \left(\frac{x_{F_2}}{2}, 0\right)$$

$$\text{Vértices: } V_1 = \left(\frac{x_{F_2}-r}{2}, 0\right) \text{ e } V_2 = \left(\frac{x_{F_2}+r}{2}, 0\right)$$

$$\text{Eixo real ou transverso: } 2a = |\overline{V_1V_2}| = r$$

$$\text{Eixo imaginário ou conjugado: } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{x_{F_2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

Figura 173 – Elementos da hipérbole



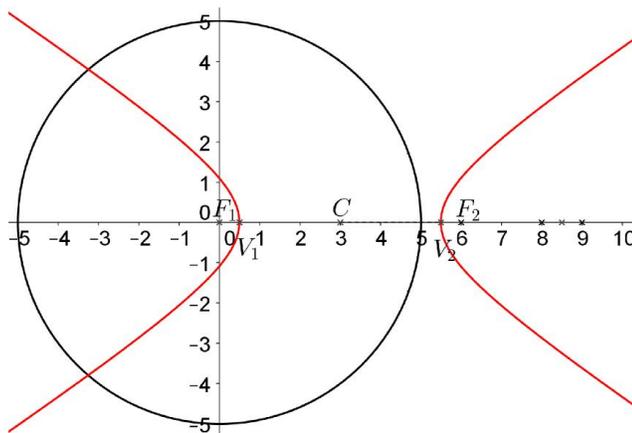
Fonte: O autor, 2014.

Com esses dados verificamos que essa hipérbole tem equação:

$$44x^2 - 264x - 100y^2 + 121 = 0$$

Inserindo essa equação no campo de entrada do software de geometria dinâmica Geogebra, obtemos o gráfico abaixo.

Figura 174 – Hipérbole construída com auxílio do software Geogebra



Fonte: O autor, 2014.

CONCLUSÃO

Esta dissertação foi elaborada com a finalidade de mostrar o Origami como um poderoso instrumento capaz de contribuir com a aprendizagem da Matemática na Educação Básica. Acreditamos que a utilização do Origami pode proporcionar, ao aluno, a oportunidade de refletir sobre alguns conceitos matemáticos, à medida que, construindo seu próprio material tem a oportunidade de perceber, através de suas próprias observações ou pela orientação do professor, propriedades envolvidas nas construções.

Esperamos que este trabalho desperte nos professores interesse pelo Origami como um recurso didático surpreendente, de baixo custo, que muito pode contribuir com a prática docente através da elaboração de atividades criativas e lúdicas, tornando o ensino da matemática mais atrativo e prazeroso.

Por fim, desejamos que esta dissertação, de alguma maneira, contribua com a melhoria da Educação Básica de nosso país.

REFERÊNCIAS

- ALPERIN, Roger C. A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. *New York Journal of Mathematics*, 2000. Disponível em: <<http://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf>>. Acesso em: 25 ago. 2013.
- BARRETO, Carlos Alberto. *A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria*. 2013. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) – Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2013.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática/ Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRISON, Owen. Construções Geométricas. *Gazeta de Matemática*, 2001. Disponível em: <<http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=40>>. Acesso em: 19 fev. 2014.
- BUSKE, Neirelise. *Uma Contribuição para o Ensino de Geometria Utilizando Origami e Caledoscópio*. 2007. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2007.
- CARVALHO, João Pitombeira de. Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega. Im: II BIENAL DE MATEMÁTICA, 2009, Rio de Janeiro: PUC/Rio, 2009. Disponível em:<<http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf>>. Acesso em: 07 ago. 2013.
- CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. *Explorando Geometria com Origami*. Departamento de Matemática. São Paulo: Universidade Federal de São Carlos, 2009. Disponível em <<http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>>. Acesso em: 07 ago. 2013.
- COURANT, R. e ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. Traduzido por Adalberto da Silva Brito do original em inglês: What is Mathematics?, 1941.
- FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; BOULLAUF, Maiara Franciene; MIARKA, Roger. A (Im)Possibilidade da quadratura do Círculo por meio da Quadratriz. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 81, p. 40-44, Mai./Ago.2013.
- GERETSCHLAGER, Robert. Euclidean constructions and the geometry of origami. *Mathematics Magazine*, Austria, v. 68, n. 5, p. 357–371, Dec. 1995. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2690924>>. Acesso em: 06 out. 2014.
- GLEASON, Andrew M. Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. *The American Mathematical Monthly*, Washington, Vol. 95, No. 3, pp. 185-194, mar. 1988. Disponível em:< <http://www.jstor.org/stable/2323624>>. Acesso em: 12 nov. 2014.

HATORI, Koshiro. *History of Origami*. [s.n.t.]. Disponível em: <<http://origami.ousaan.com/library/historye.html>>. Acesso em: 08 ago. 2014.

HERNÁNDEZ, Jesús de la Peña. Mathematics and Origami. [s.n.t.]. Disponível em: <<http://www.caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Mathematics%20and%20Origami.pdf>>. Acesso em: 13 fev. 2014.

HULL, Thomas. *Project origami: Activities for exploring mathematics*. 2. ed. Wellesley, MA: A K Peters Book, 2006.

IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras*. São Paulo: Scipione, 1988. (Vivendo a Matemática).

JUSTIN, Jacques Justin. *Résolution par le Pliage de L'Équation du Troisième degré et Applications Géométriques*. [s.n.t.] Disponível em: <https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/L_Ouvert/n042/o_42_9-19.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2014.

KASEM, Asem; GHOURABI, Fadoua; IDA, Tetsuo. Origami Axioms and Circle Extension, *The 26th ACM Symposium on Applied Computing (SAC)*, Tunghai University, Taichung, Taiwan, p. 1106-1111, 2011.

KUMAYAMA, Hiedo. *Matemática Versus Origami: Trisseção de um Ângulo Agudo*. [s.n.t.]. Disponível em: <<http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/ofl.pdf>>. Acesso em: 08 ago. 2014.

LANG, Robert J.. *Origami and Geometric Constructions*. [s.n.t.]. Disponível em: <http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2014.

MATTOS, Francisco Roberto Pinto. *Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões*. 2001. 295 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. *Origami: História de uma Geometria Axiomática*. 2008. 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira de. *Origami: Matemática e Sentimento*. [s.n.t.]. Disponível em: <<http://nilsonjosemachado.net/20041008.pdf>>. Acesso em: 10 agosto 2014.

PEDROSO, Hermes Antônio; PRECIOSO, Juliana Conceição. O Problema da Construção de Polígonos Regulares de Euclides a Gauss. *FAMAT em Revista*, Minas Gerais, n. 13, p. 109-123, Nov.2009.

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antônio. Construções Euclidianas e o Desfecho de Problemas Famosos da Geometria. *Revista Ciência Exatas e Naturais*, Paraná, v. 13. n. 2, p. 163-183, jul./dez. 2011.

PRIETO, José Ignacio Royo. Matemáticas y papiroflexia, *Revista Sigma*, Madrid, n. 21, p. 175-192, Set./Out.2002.

RAFAEL, Ilda. Origami, Educação Matemática, *Revista da Associação dos Professores de Matemática*, Lisboa, n. 114, p. 16-22, set./out.2011.

RANCAN, Grazielle. *Origami e Tecnologia: Investigando possibilidades para ensinar Geometria no Ensino Fundamental*. 2011. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciência e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

RÊGO, Rogéria Gaundêncio do; RÊGO, Romulo Marinho do; GAUDÊNCIO Junior S. *A geometria do Origami: atividades de ensino através de dobraduras*. 01. ed. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2003.

ROW, T. Sundara Row. *Geometric Exercises in Paper Folding*, Chicago: Open Court, 1941.

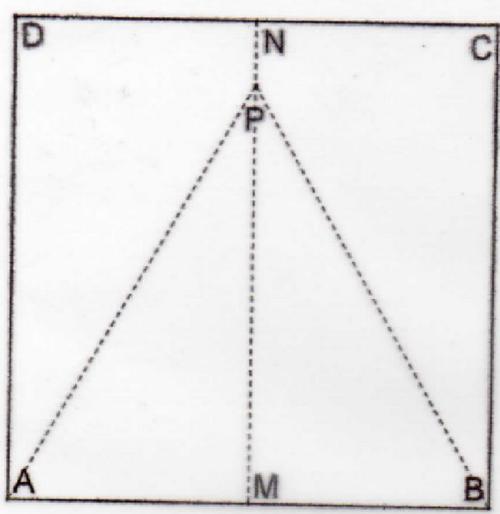
SILVA, Ângelo Sabbatino. *Construções de polígonos regulares em Origami e com régua e compasso*. 2013. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat) – UNIRIO, Rio de Janeiro, 2013.

WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

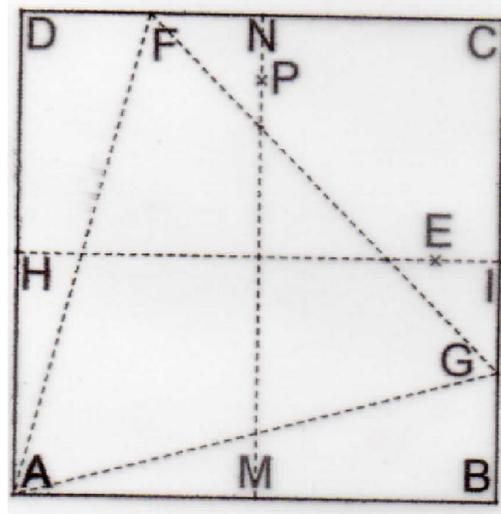
YATES, Robert C. The trisection problem. *National Mathematics Magazine*. 4. ed., v.15, p.191–202, Jan.1941. Disponível em:< <http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/ne01/jyt/linkjstor/trisection/tri3.pdf>>. Acesso em: 16 set. 2014.

ANEXO A – Construções dos Polígonos

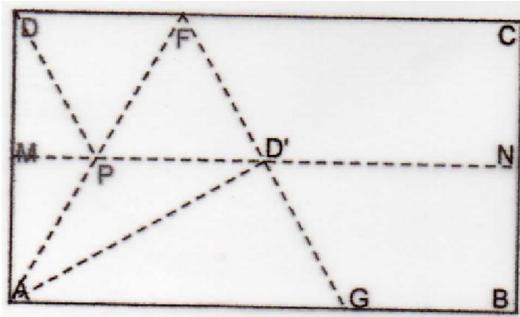
Triângulo Equilátero 1



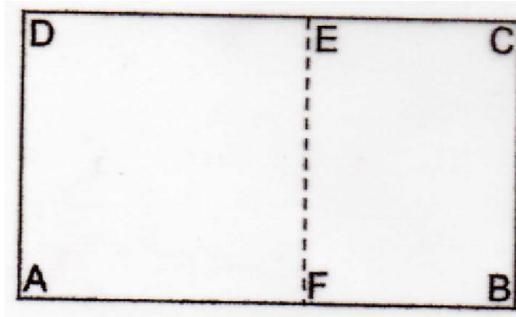
Triângulo Equilátero 2



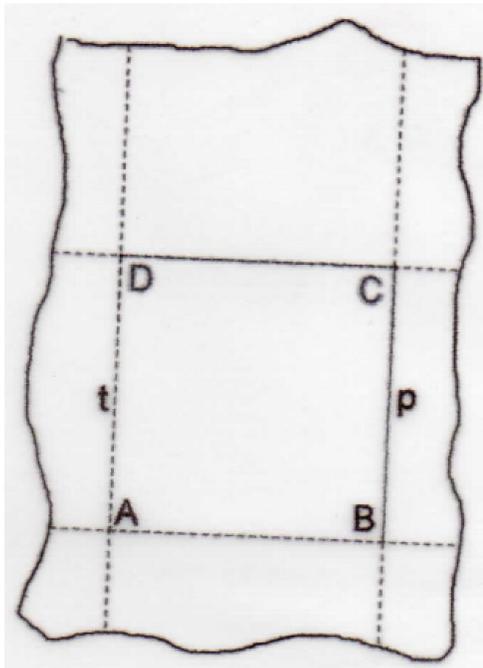
Triângulo Equilátero 3



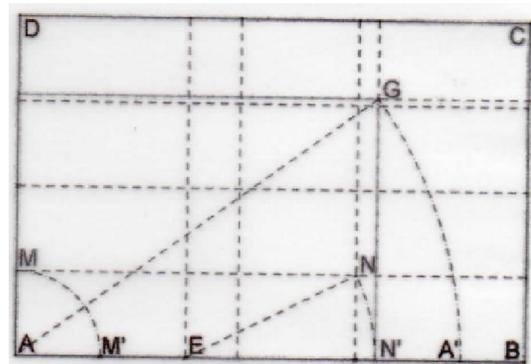
Quadrado 1



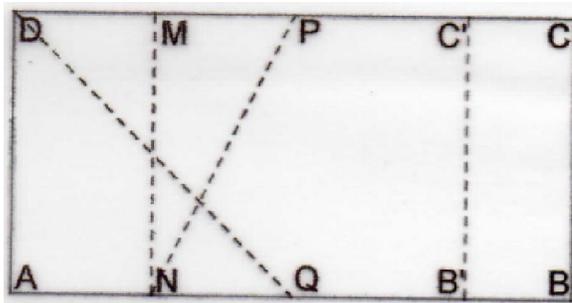
Quadrado 2



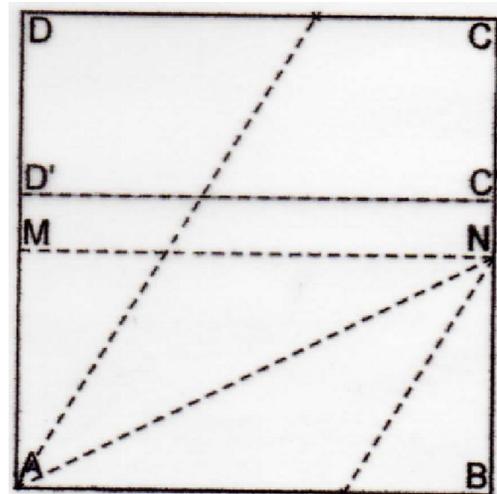
Retângulo (54°, 36°)



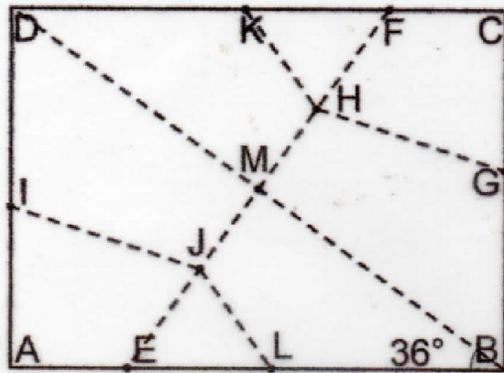
Retângulo Áureo 1



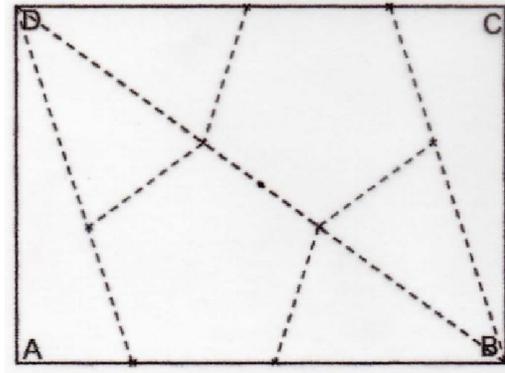
Retângulo Áureo 2



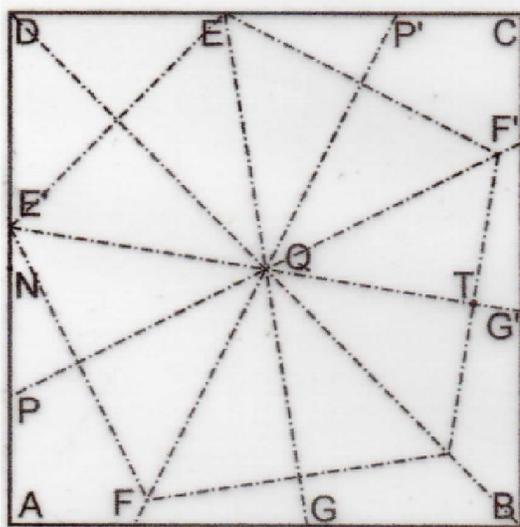
Pentágono 1



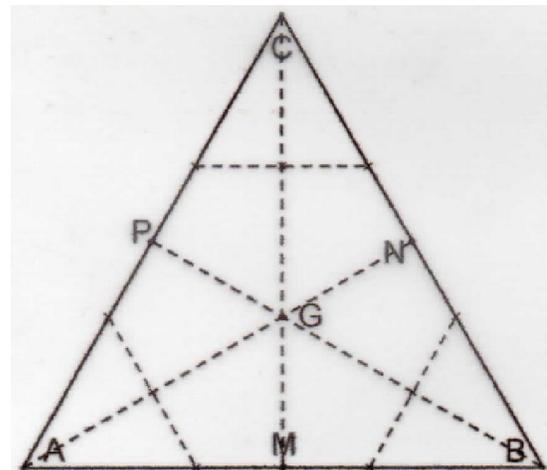
Pentágono 2



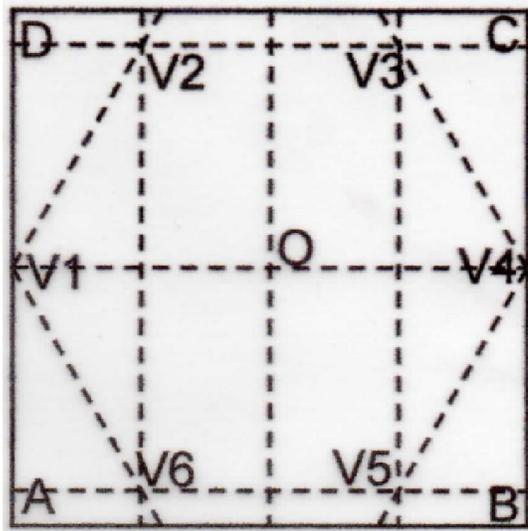
Pentágono 3



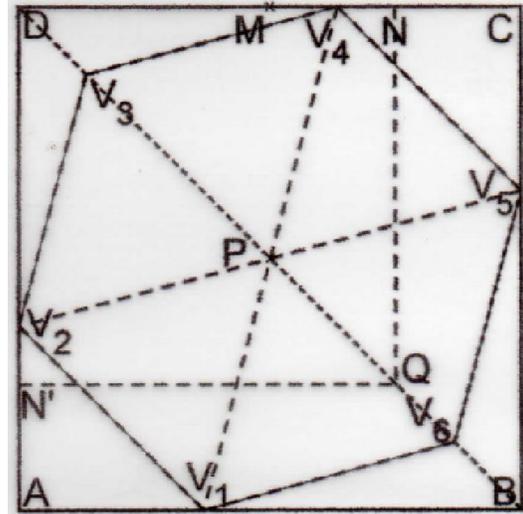
Hexágono 1



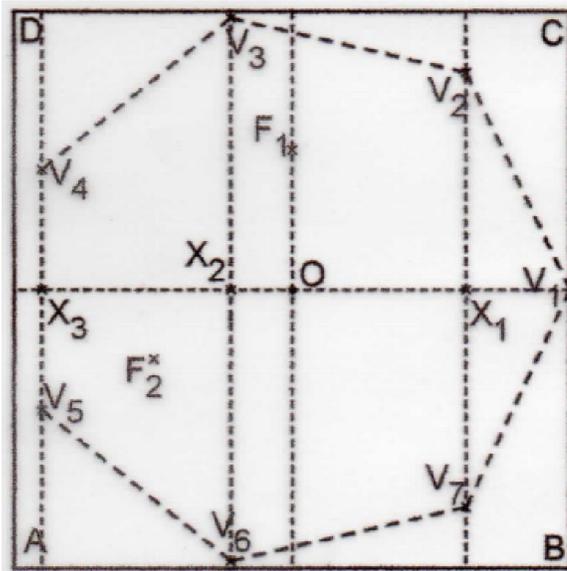
Hexágono 2



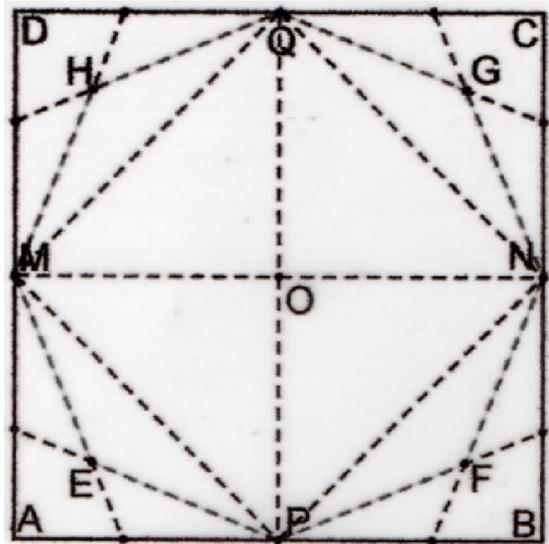
Hexágono 3



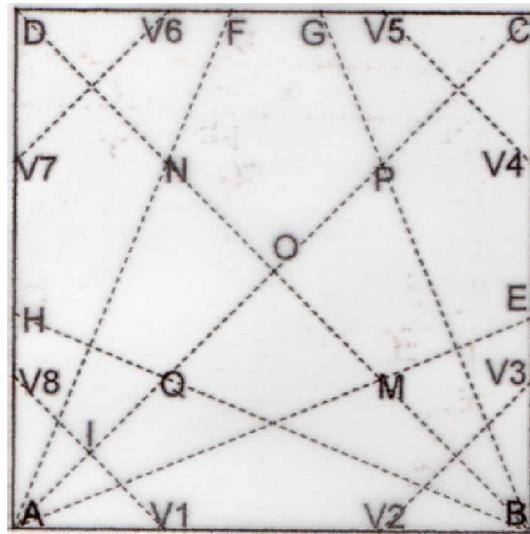
Heptágono



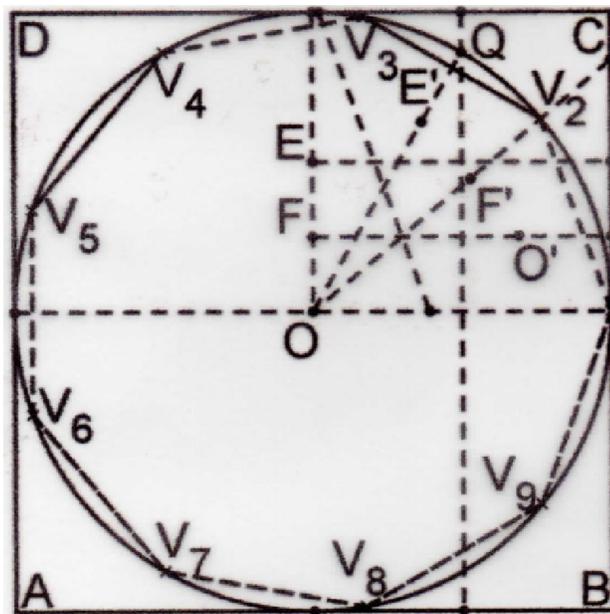
Octógono 1



Octógono 2

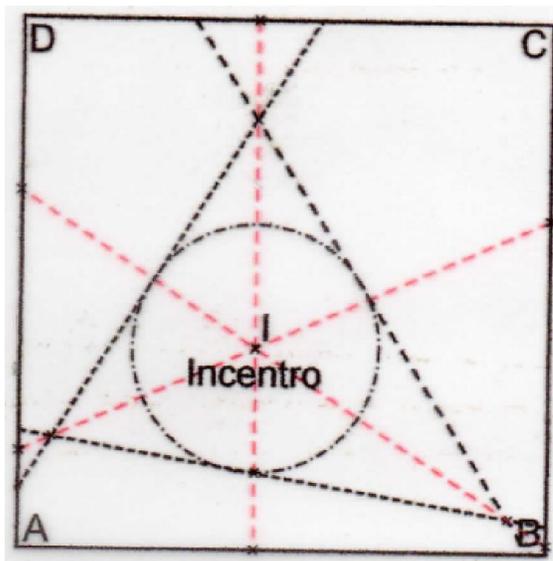


Eneágono 1

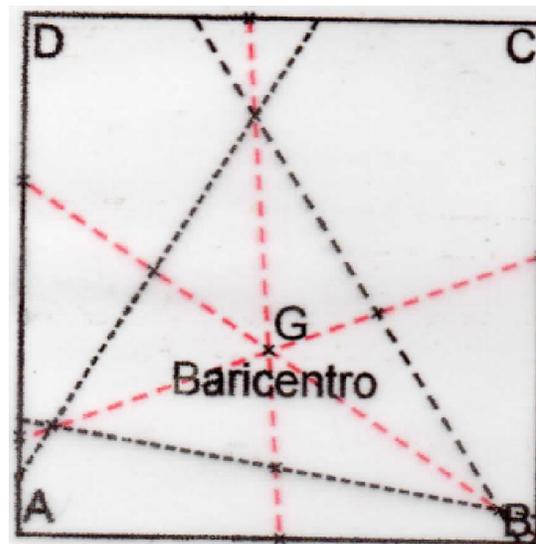


ANEXO B – Construções das Cevianas

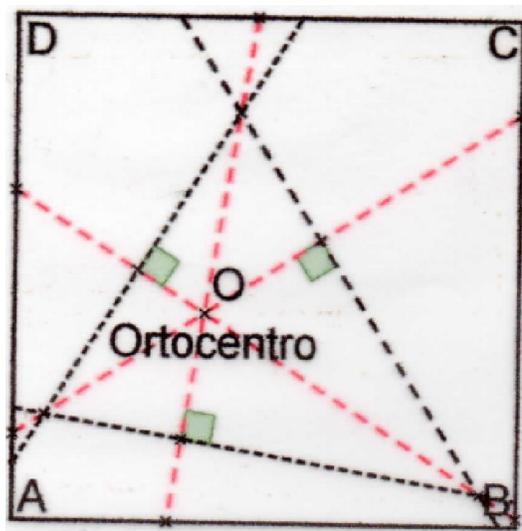
Bissetrizes



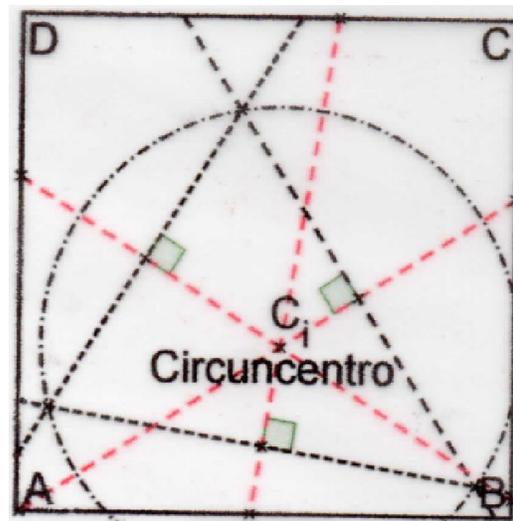
Medianas



Alturas

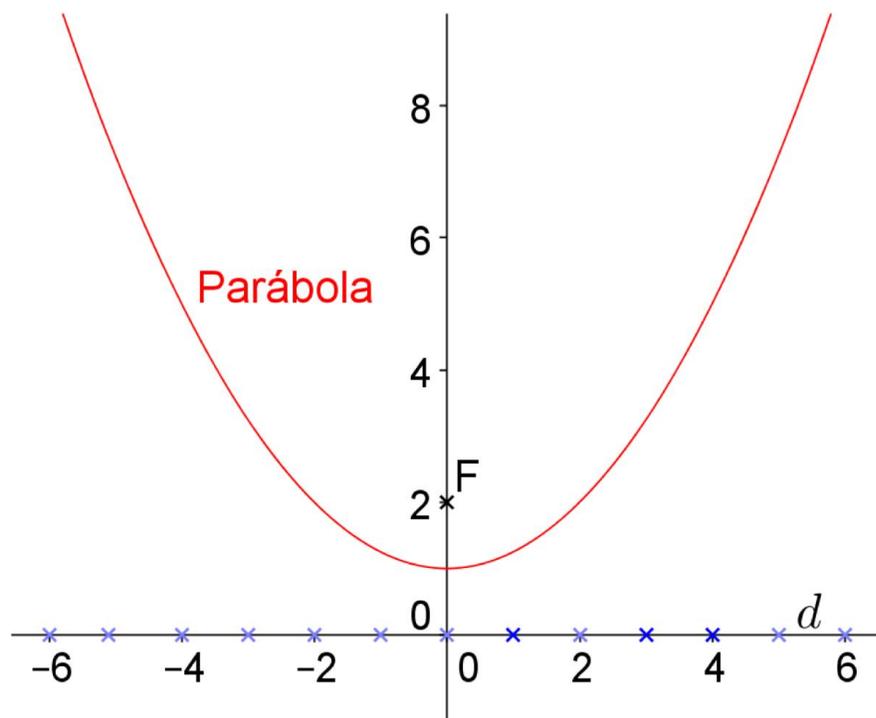


Mediatrizes

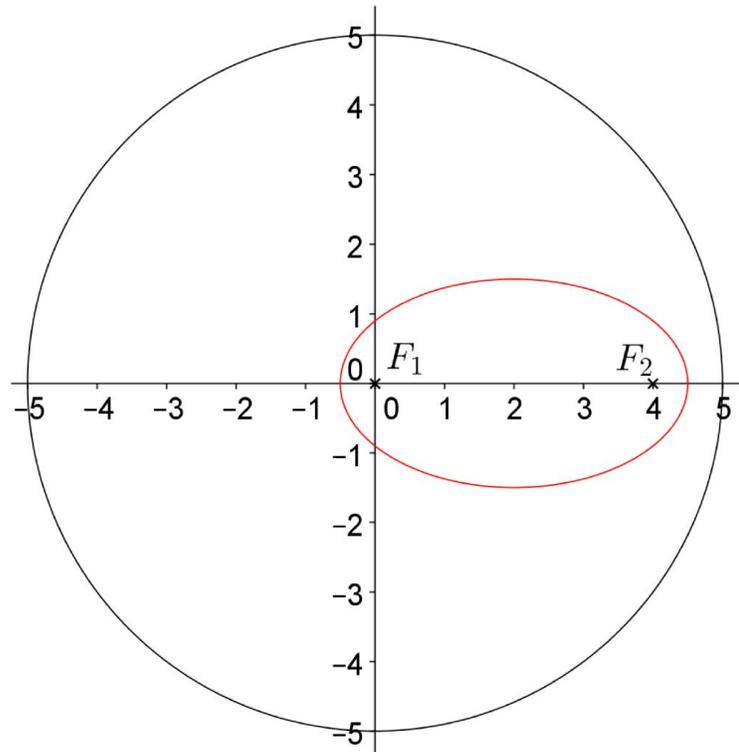


ANEXO C – Construções das Cônicas

Parábola



Elipse



Hipérbole

