Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

José Souto Sobrinho Filho

O Surgimento dos números irracionais

Rio de Janeiro
2015

José Souto Sobrinho Filho

O Surgimento dos números irracionais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Coorientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S677 Sobrinho Filho, José Souto.
O Surgimento dos números İrracionais / José Souto. – 2015.
61f.: il.

Orientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Coorientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Números irracionais - Teses. 2. Matemática - História - Teses. I. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. II. Carvalho, João Bosco Pitombeira de. III.Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 511.14

Assinatura Data

José Souto Sobrinho Filho

O Surgimento dos números irracionais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 25 de agosto de 2015.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido(Orientadora)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho(Coorientador)

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes Silva

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

À minha esposa Vânia e à minha filha Thaiany pela paciência e pela força incomensuráveis que dispuseram a mim.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus por ter me dado muita saúde para que esse momento acontecesse.

À minha esposa Vania e à minha filha Thaiany pela compreensão desses momentos difíceis e prazerosos que foram dedicados a esta nova etapa da minha vida.

Aos professores do PROFMAT-UERJ que proporcionaram este momento ímpar na minha vida. Um sonho realizado que eu buscava há muito tempo.

À Profª. Dra. Claudia Ferreira R. Concordido pela paciência, orientação e dedicação a este trabalho.

Ao Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho pela orientação e revisão do texto, muito importantes para a conclusão deste trabalho.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro, extremamente importante no caminhar deste projeto.

Por fim, agradeço aos colegas e amigos que compartilharam comigo, mais este sucesso na minha vida. Um agradecimento especial aos amigos Andre Luis e Luiz Claudio.

A todas as pessoas mencionadas acima, meu muito obrigado!

.

RESUMO

SOBRINHO FILHO, José Souto. *O surgimento dos números irracionais.* 2015. 61f.:il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Este é um trabalho de pesquisa sobre um conjunto de números (irracionais) que é pouco trabalhado no ensino básico de matemática. Foi uma procura muito interessante e enriquecedora, pois encontrei matemáticos e historiadores com visões bem diferentes. Muitos deles não aceitavam este novo conjunto. Para Leopold Kronecker, só existia o conjunto dos números inteiros. Já para Cantor e Dedekind, o aparecimento dos irracionais foi extremamente importante para o desenvolvimento da matemática, abrindo novos horizontes. Menciono aqui um pouco da vida e da obra de alguns matemáticos que se envolveram com os números irracionais. Tratamos ainda da descoberta dos incomensuráveis, ou seja, como iniciou-se o problema da incomensurabilidade, e do retângulo áureo e sua importância em outras áreas. O trabalho mostra também dois grupos de números que não são mencionados quando ensinamos equações algébricas, que são os números algébricos e os números transcendentes, assim como teoremas essenciais para a prova da transcendência dos irracionais especiais π e e. Por fim, proponho uma aula para uma turma do 3º ano do Ensino Médio com o objetivo de mostrar a irracionalidade de alguns números, usando os teoremas pertinentes.

Palavras-chave: Números irracionais. Grandezas incomensuráveis. Antifairese.

ABSTRACT

SOBRINHO FILHO, José Souto. The emergence of irrational numbers. 2015. 61f.: il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This is a research about a set of numbers (irrationals) that is little explored in secondary school mathematics teaching. It was a very interesting and enriching search, because quite contrary facts were found. Several 19th century mathematicians did not accept this new set of numbers. To Leopold kronecker, only the set of the integers existed. To Cantor and Dedekind, the irrational numbers were extremely important for the development of mathematics, opening new horizons. I also mention the life and work of some mathematicians who were involved with the irrational numbers the discovery of the incommensurability was iniciated. The golden rectangle and its importance in other areas. The work also presents two groups of numbers that are not mentioned when algebraic equations are taught, the algebraic numbers and transcendental numbers. Essential theorems for the proof of the special irrational numbers π e e. Finnaly, I propose a lesson to a 3rd year high school class in order to show the irrationality of some numbers, using the relevant theorems.

Keywords: Irrational numbers. Immeasurable quantities. Antifairese.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho traz uma pesquisa bibliográfica acerca dos números irracionais. Ao escolher este tema, não imaginava o quanto é valiosa a história da matemática. Tomar ciência da quantidade de matemáticos, historiadores, filósofos e outros, que se envolveram neste percurso de descobertas, discussões e conflitos, tudo em prol da matemática, foi uma grata surpresa.

Quanto à procura da origem dos irracionais, encontrei alguns fatos interessantes. Alguns matemáticos como Leopold Kronecker (matemático alemão, 1823-1891) não aceitavam os irracionais. Houve, inclusive, um conflito entre Georg Cantor (matemático, físico e filósofo alemão, 1845-1918) e Kronecker, que foi considerado como uma forte controvérsia do século XIX. O teor desta controvérsia era que Cantor defendia os infinitésimos e o estudo dos irracionais, enquanto Kronecker não aceitava, de forma alguma, este novo conjunto, pois para ele só existia o conjunto dos números inteiros.

O Capítulo 1 aborda o surgimento dos números irracionais, mostrando como iniciou-se o problema dos incomensuráveis. Mostra uma técnica usada para a percepção dos incomensuráveis, a antifairese. A palavra antifairese significa "subtração recíproca". Há matemáticos que afirmam que a incomensurabilidade surgiu neste fato (relação entre o lado e a diagonal de um quadrado). Ainda neste capítulo é apresentado o retângulo áureo e provado que seus lados são incomensuráveis, usando o argumento da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado. São relatados comentários de alguns matemáticos e historiadores sobre o surgimento dos irracionais e finaliza-se este capítulo com o "Corte de Dedekind". Dedekind observa a existência de cortes sem elementos de separação no conjunto dos números racionais. Acho interessante que o professor mostre aos alunos a importância das grandezas comensuráveis e incomensuráveis, no que tange aos conteúdos de números racionais e irracionais.

O Capítulo 2 apresenta os números algébricos e os transcendentes, evidenciando dois transcendentes importantes, o número π e o número neperiano e. Muitos matemáticos se envolveram com esses dois grupos de números. Dentre esses matemáticos, temos: Johann H. Lambert (matemático, físico e astrônomo suíço, 1728-1777), Adrien Marie Legendre (matemático francês, 1752-1833), Leonhard Euler (matemático e físico suíço, 1707-1783), Joseph Liouville (matemático francês, 1809-1882) e Charles Hermite (matemático francês, 1822-1901), que, de várias maneiras, demonstraram a transcendência de π e e. Enunciamos o Teorema de Lindemann-Weierstrass que foi de grande utilidade para mostrar a transcendência de um número e usado para verificar que π e e são transcendentes. Por fim, é provada a igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0,$ conhecida como "Identidade de Euler" (Leonhard Euler, matemático e físico suíço, 1707-1783). Esta expressão é considerada a mais bela da matemática.

A construção de segmentos usando apenas régua e compasso, chamados segmentos construtíveis, também é tratada neste capítulo. É apresentado o problema da quadratura do círculo, que envolveu muitos matemáticos durante séculos, ficando provada a impossibilidade de resolvê-lo somente no século XIX. O capítulo é finalizado, enunciando-se o 7º problema de David Hilbert (matemático alemão, 1862-1943).

No Capítulo 3 faço um breve relato sobre a descoberta dos incomensuráveis, mencionando a divergência entre alguns historiadores e matemáticos daquela época, se teria ou não ocorrido uma crise no pensamento pitagórico. Abordo a vida e a obra de alguns deles. As contribuições que cada um deu em prol da matemática.

No Capítulo 4 é feita uma proposta de aula para uma turma do 3º ano do Ensino Médio, com o objetivo de fazer com que o aluno prove a irracionalidade de números da forma $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b} + \sqrt[p]{c},$ onde a, b e c são números inteiros positivos, usando o teorema das raízes racionais e um teorema sobre a paridade de um número inteiro, demonstrados em sala de aula. Este capítulo é finalizado com a seguinte pergunta: será que conseguimos marcar, com exatidão, os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ na reta numérica? Chegou-se à conclusão que sim. O desenvolvimento da aula com a participação da turma foi satisfatório.

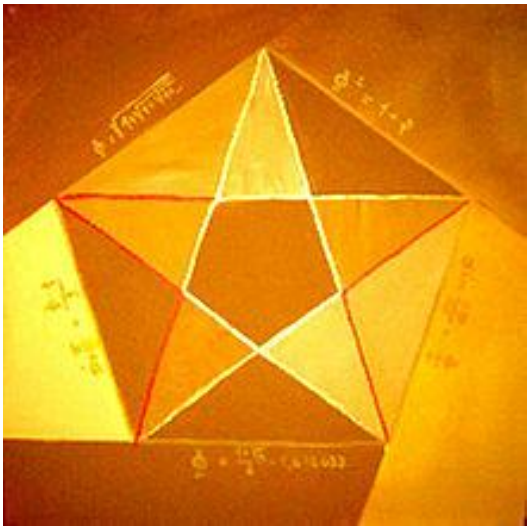
No Anexo apresento um artigo muito interessante, cujo título é Representando Números Primos e Irracionais. Este artigo faz uma analogia entre números primos e números irracionais, com relação à forma como estes números são definidos e como eles são percebidos pelos alunos.

1 **O SURGIMENTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA HISTÓRIA**

Acredita-se que a descoberta dos números irracionais coube ao pitagórico Hipaso de Metaponto (filósofo pré-socrático, nascido em torno do ano 500 a EC), em um momento em que os pitagóricos pensavam que os números racionais podiam descrever toda a geometria do mundo, e por esse motivo ele teria sido expulso da escola pitagórica. Alguns pesquisadores afirmam que esta descoberta pode ter iniciado no estudo do problema das diagonais de um pentágono regular, que constituem o famoso pentagrama (Figura 1).

Neste estudo, observa-se que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono regular, elas formam um novo pentágono regular menor. Neste novo pentágono, traçamos as cinco diagonais e forma-se um novo pentágono regular. Continuando este processo indefinidamente, isto é, construindo os pentágonos e suas respectivas diagonais, observamos que não existe um segmento que podemos tomar como unitário, de modo que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do mesmo pentágono. Isto nos dá a ideia de segmentos incomensuráveis, que iremos definir a seguir. Como consequência, a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular não é racional, isto é, suas medidas não podem ser colocadas na forma de fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros. Dizemos então que esta razão corresponde a um número irracional.

Figura 1 – Pentagrama



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Pentagrama

O pentagrama é a figura formada pela união das diagonais de um pentágono regular. Podemos obtê-lo, também, prolongando os lados do pentágono até formar uma estrela. Observe que podemos formar outro pentagrama menor dentro do pentágono regular do pentagrama maior, e assim sucessivamente.

Quando comparamos dois segmentos incomensuráveis, surge um número irracional. Definiremos a seguir, grandezas incomensuráveis.

1.1 **Grandezas incomensuráveis**

1.1.1 Definição

Duas grandezas são incomensuráveis quando não existe uma unidade comum à medição das mesmas. Caso exista esta unidade comum, as grandezas são comensuráveis.

Exemplos:

a) Dois segmentos de reta de medidas $3{,}5cm$ e $6cm$ são comensuráveis, pois existe esta unidade comum (por exemplo, $0{,}5cm$)

b) Dois segmentos de reta que medem, respectivamente, $5\,cm$ e $\sqrt{2}\,cm$ são incomensuráveis, pois não existe esta unidade comum, como mostraremos (Devemos lembrar que o segundo segmento é determinado, construindo um triângulo retângulo de catetos unitários).

O problema da incomensurabilidade, segundo alguns outros pesquisadores, iniciou-se na tentativa de usar o lado de um quadrado para medir a sua diagonal. Platão (filósofo e matemático grego, 428/427 a EC - 348/347 a EC) e Aristóteles (filósofo grego, 384-322 a EC), autores do século IV a EC, tratavam deste problema comparando o lado e a diagonal de um quadrado.

Segundo David Herbert Fowler (matemático britânico, 1937-2004),

> A descoberta dos incomensuráveis não teria criado uma crise nos fundamentos da matemática grega. Muito pelo contrário, contribuiu para o desenvolvimento de novas técnicas para trabalhar com razões e proporções. (FOWLER, apud BOYER, 1999)

Com a descoberta dos incomensuráveis, houve uma separação entre o universo das grandezas e o universo dos números. Diz Aristóteles:

> Para provar alguma coisa, não se pode passar de um gênero para outro, isto é, não se pode provar uma proposição geométrica pela aritmética... Se o gênero é diferente, como na aritmética e na geometria, não é possível aplicar demonstrações aritméticas a propriedades de grandezas. (ARISTÒTELES, apud BOYER, 1999)

De acordo com Proclus (filósofo e matemático, nascido em Constantinopla, 412-485),

> A teoria das grandezas comensuráveis foi desenvolvida, primeiramente, pela aritmética e depois, por imitação, pela geometria. Por essa razão, ambas as ciências definem grandezas comensuráveis como aquelas que estão uma para outra na razão de um número para outro número, o que implica que a comensurabilidade existiu primeiro entre os números. (PROCLUS, apud ROQUE, 2012)

Um procedimento muito interessante usado no estudo das grandezas incomensuráveis é o da “Antifairese” ou subtrações recíprocas. Este procedimento era bem conhecido pelos matemáticos gregos que trabalhavam com aritmética no final do século V a EC, ou seja, eles sabiam como aplicar este método na comparação de segmentos incomensuráveis. O objetivo da antifairese era o de aproximar razões entre segmentos incomensuráveis. No uso deste procedimento, não há necessidade do conceito de número racional ou de fração e independe de a razão estar inserida numa relação de proporção. A técnica da antifairese se tornou imprescidível para que se criasse uma nova teoria das razões, independente da igualdade entre os números.

1.1.2 O método da antifairese

A palavra antifairese é de origem grega e significa, literalmente, subtração recíproca. Este procedimento é análogo ao “Algoritmo de Euclides”, cujo objetivo é encontrar o maior divisor comum entre dois números. As subtrações recíprocas, também conhecidas como subtrações mútuas, se fazem da seguinte forma: dados dois números (ou duas grandezas), em cada etapa subtrai-se, do maior, o maior múltiplo do menor. Este método descreve uma série de comparações. Vejamos um exemplo:

Vamos comparar dois montes, A e B, de palitos de fósforo. O monte A tem 60 palitos e o monte B, 16 palitos. Concluímos que

1) Do monte A é possível subtrair três vezes o monte B, e ainda sobra um monte com 12 palitos;

2) Do monte B é possível subtrair uma vez o monte com 12 palitos, e ainda sobra um monte com 4 palitos;

3) Do monte com 12 palitos é possível subtrair três vezes o monte com 4 palitos, e chega-se ao final do procedimento.

Figura 2 - Monte A com 60 palitos

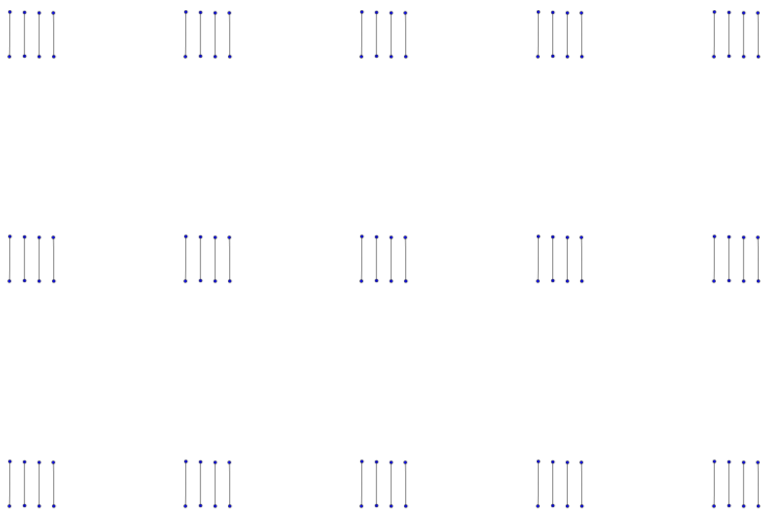
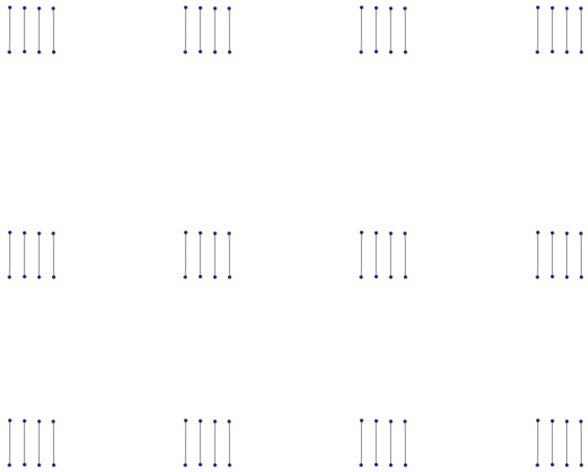


Figura 3 - Monte B com 16 palitos

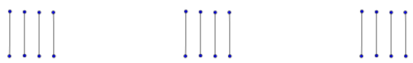
1) Do monte A, subtrai-se três vezes o monte B

Figura 4 - Três montes com 16 palitos cada



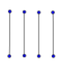
e, sobra:

Figura 5 - Monte com 12 palitos



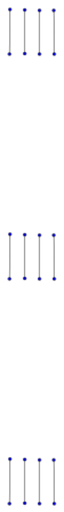
2) Do monte B, subtrai-se uma vez o que sobrou de 1 (12 palitos) e sobra um monte com 4 palitos:

Figura 6 - Monte com 4 palitos



3) Do que sobrou de 1 (12 palitos), subtrai-se, exatamente, três vezes o monte com 4 palitos que sobrou de 2:

Figura 7 - Três montes com 4 palitos cada



e, o procedimento chega ao fim.

A sequência “três vezes, uma vez e exatamente três vezes” representa o número de subtrações que se pode fazer em cada etapa. A razão antifairética $60{:}16$ é representada pela notação ant($60{,}16$)=[$3{,}1{,}3$]

Para Fowler, os gregos entendiam determinadas razões, como por exemplo $60{:}16$, por ser possível aplicar a antifairese. No entanto, nem sempre é possível uma representação finita por inteiros, de certas grandezas.

Esta técnica pode ser usada na comparação de dois segmentos de reta, por exemplo, $A\ e\ B,\ A > B$. Vamos supor que B não cabe um número inteiro de vezes em A. Podemos escrever:

$A = n_1B + R_1$(B cabe n_1 vezes em A e sobra R_1)

$B = n_2R_1 + R_2$ (R_1 cabe n_2 vezes em B e sobra R_2)

$R_1 = n_3R_2 + R_3$ (R_2 cabe n_3 vezes em R_1 e sobra R_3),

e assim por diante.

Ao final do procedimento, o último resto não nulo encontrado é o segmento comum aos segmentos A e B. Porém, se a antifairese não chegar ao fim, tem-se um caso de incomensurabilidade. Assim, duas grandezas são comensuráveis se, e somente se, o processo da antifairese é finito.

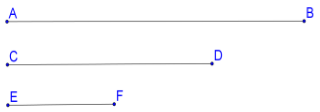
Por exemplo, sejam os segmentos AB e CD de comprimentos $6u$ e $4u$, respectivamente.

Temos que:

a) o segmento CD cabe uma vez em AB, e sobra um segmento EF de comprimento $2u$;

b) o segmento EF cabe, exatamente, duas vezes em CD e o processo chega ao fim (EF é o segmento comum aos segmentos AB e CD).

Figura 8 - Segmentos AB, CD e EF



Fonte: O autor, 2015

Logo, os segmentos AB e CD são comensuráveis.

Ao compararmos o lado e a diagonal de um quadrado usando a antifairese, obteremos a sequência “uma vez, duas vezes, duas vezes, duas vezes...”. Esta sequência continua indefinidamente, o que comprova a incomensurabilidade dessas grandezas.

Afirma Fowler:

> Três noções distintas de razão estariam presentes na tradição grega: uma vinda da teoria musical; outra, da astronomia (que teria servido como base para as definições do livro V dos Elementos); e a última, baseada na antifairese. (FOWLER, apud ROQUE, 2012)

E ainda segundo ele, a antifairese teria sido usada desenvolver uma teoria de razão, independente da noção de proporção.

Segundo Roque (2012), a primeira teoria geral das razões teve como base a técnica da antifairese. Consta no livro X de Euclides um estudo mais detalhado dos incomensuráveis.

Antes da descoberta dos incomensuráveis, as grandezas eram classificadas como comensuráveis em comprimento ou em potência (mais especificamente, em quadrado). Por exemplo, num quadrado de lado 2, o lado e a diagonal não são comensuráveis em comprimento, mas são comensuráveis em quadrado (o quadrado do lado é 4 e o quadrado da diagonal é 8). Repetia-se este procedimento para potências superiores, com o objetivo de contornar o problema dos incomensuráveis. Esta técnica de incluir outras potências, além dos quadrados, deve-se a Teaetetus (matemático grego que morreu em 368 a EC), e com isso as grandezas incomensuráveis foram mais bem classificadas.

1.1.3 Exemplo do funcionamento da antifairese: uma prova geométrica para a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado.

Considere um quadrado $A_1B_1C_1D_1$ (Figura 2) de lado L e diagonal D. Suponhamos por absurdo que D e L são comensuráveis, ou seja, existe uma unidade u tal que $D = n \times u$ e $L = m \times u$ para m e n inteiros positivos. Na construção tomamos o ponto A_2 tal que o segmento B_1A_2 tem comprimento L. Então, os triângulos $A_1B_2B_1$ e $A_2B_2B_1$ são congruentes, pois têm a hipotenusa B_1B_2 em comum. Logo, $A_1B_2 = A_2B_2$, que é o lado do novo quadrado (observe que a diagonal B_1D_1 divide o ângulo $A_1D_1C_1$ em dois ângulos congruentes de $45º$). O lado L_1 do novo quadrado é igual a $D - L$, logo

$$L_1 = n \times u - m \times u \rightarrow L_1 = n_1 \times u,$$

onde n_1 é um inteiro positivo. A diagonal D_1 do novo quadrado é igual a $L - L_1$.

Então,

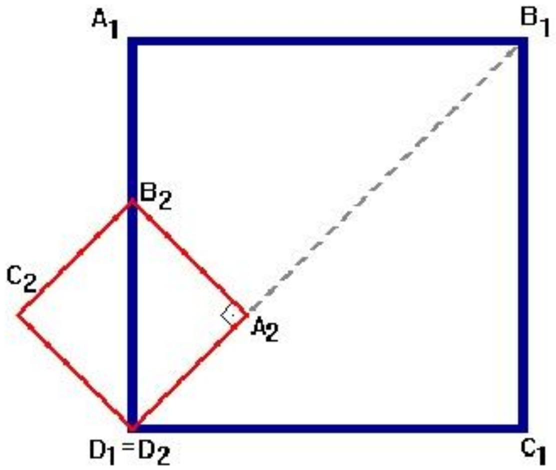
$$D_1 = m \times u - n_1 \times u \rightarrow D_1 = m_1 \times u,$$

onde m_1 é um número inteiro positivo.

Este processo pode ser repetido um número infinito de vezes. Obtem-se, assim, uma sequência infinita de quadrados, cujas medidas dos lados L_i, $i = 1,2,3,\ldots$, decrescem e tendem a zero, ou seja, $L_i \rightarrow 0$. Observamos a impossibilidade desta sequência existir, pois os lados podem ser expressos na forma $L_i = n_i \times u$, com n_i inteiro positivo. Logo, concluímos que D e L são incomensuráveis.

Por outro lado, ao construirmos os quadrados cujas medidas dos lados são L_1,L_2,L_3,..., observaremos a relação L_i = $2L_{i+1}$+ L_{i+2}, onde $i = 1, 2, 3$,... . Isto significa que o lado do novo quadrado, em cada passo, é menor ou igual à metade do lado do quadrado anterior. Assim, a sequência dos lados obtidos realmente decresce, e pode se tornar menor do que qualquer quantidade dada, em particular, daquela que foi tomada como unidade.

Figura 9 – Construção de quadrados

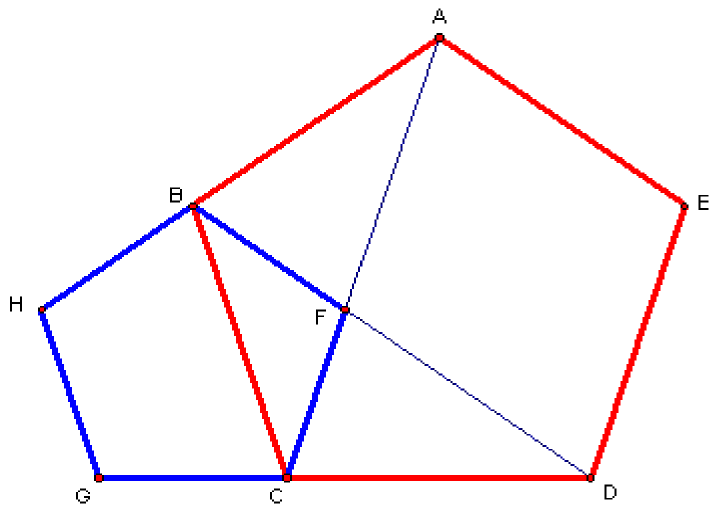


Fonte: ROQUE, Carvalho, 2013

Para provarmos, geometricamente, que o lado e a diagonal de um pentágono regular são incomensuráveis, procedemos de forma análoga.

Vemos abaixo os pentágonos regulares $ABCDE$ e $BHGCF$ (Figura 10). Repetimos o procedimento um certo número de vezes, chegaremos à conclusão que a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular não é racional.

Figura 10 - Construção de pentágonos regulares



Fonte: ROQUE, Carvalho, 2013

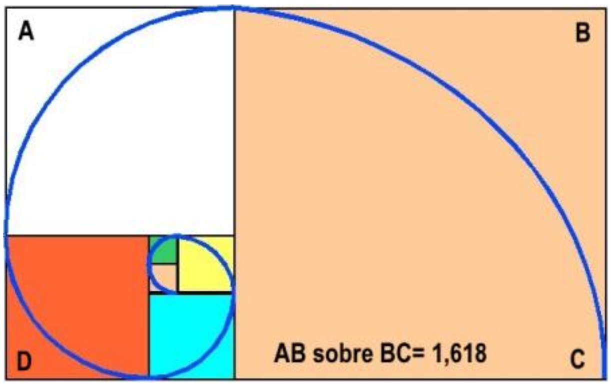
Um exemplo muito importante de segmentos incomensuráveis surge na comparação dos lados de um retângulo especial, considerado o mais importante da matemática, como veremos na próxima seção.

1.2 **O retângulo áureo**

Vejamos agora como segmentos incomensuráveis aparecem em vários contextos. Dentre eles, destaca-se o retângulo áureo estudado pela primeira vez por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci.

O crescimento de uma planta ou a espiral formada por um grande furacão, assim como outros fenômenos, seguem, aproximadamente, uma regra matemática que foi nomeada ”Equação Áurea” ou “Retângulo Áureo”.

Figura 11 - Retângulo áureo de Fibonacci

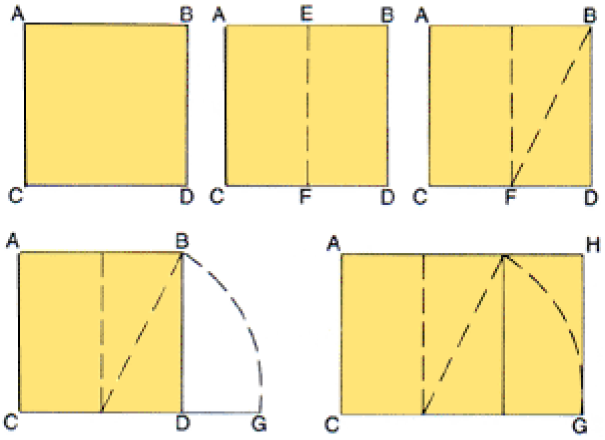


Fonte: http://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/

1.2.1 Construção de um retângulo áureo

Desenha-se um quadrado $ABDC$. Em seguida, constrói-se o segmento FB que liga o ponto médio F do segmento CD (E é ponto médio do segmento AB) com o vértice B. Este segmento serve de raio para o arco que vai de B até o prolongamento do lado CD, encontrando o ponto G. Forma-se, então, o retângulo $AHGC$ que é um Retângulo Áureo.

Figura 12 – Construção do retângulo áureo



Fonte: http://www.matematicahoje.com.br/telas/mat_hoje/livro/oitava.asp?aux=B

Dizemos que AC é o segmento áureo de CG.

Com efeito, se $AB = x, EB = FD = \frac{x}{2}$, então $FB = FG = \frac{x\sqrt{5}}{2}$ (usando o teorema de Pitágoras). Encontramos o retângulo áureo $AHGC$ de lados $AH = CG = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x(1+\sqrt{5})}{2}$ e $AC = x$. Se o lado do quadrado for unitário, as dimensões do retângulo serão 1 e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.2.2 <u>Definição</u>

Chama-se "retângulo áureo" qualquer retângulo $AHGC$ com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado como $ABDC$, o retângulo restante, $BHGD$ será semelhante ao retângulo original. Se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição de retângulo áureo é traduzida pela relação: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, onde a razão $\Phi = \frac{a}{b}$ é chamada razão áurea (proporção áurea, número de ouro ou número de harmonia). Podemos escrever:

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, e encontramos para raízes $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (não serve por ser negativo). Então, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$

Pela expressão, Φ é um número irracional, pois $\sqrt{5}$ é um número irracional. Fica assim provado, geometricamente, que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis, como no caso do lado e da diagonal de um quadrado.

Dizemos que um ponto C de um segmento AB divide este segmento na razão áurea, se $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Dizemos também que C divide o segmento AB em média e extrema razão (ou meia e extrema razão), isto porque AC aparece duas vezes na proporção como termos do meio, enquanto AB e CB são os termos extremos.

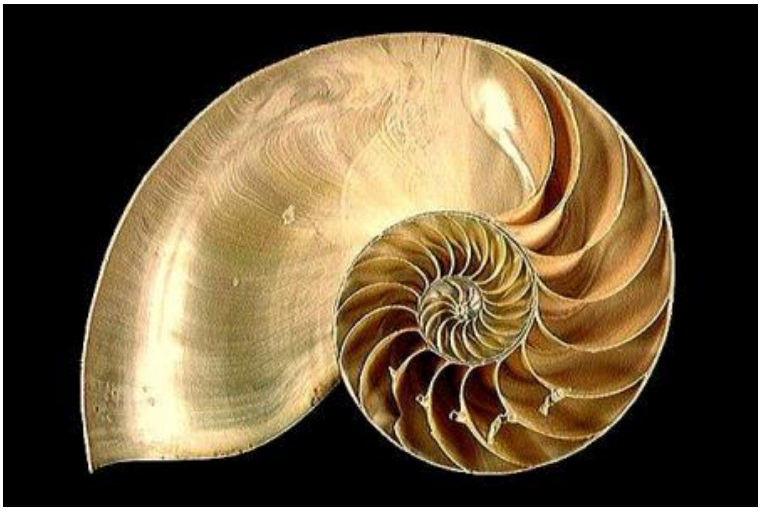
Num pentágono regular $ABCDE$ (Figura 10), ao traçarmos as diagonais AC e BD, onde F é o ponto de interseção dessas diagonais, temos que F divide cada uma delas na razão áurea. Ou seja:

$\frac{AC}{AF} = \Phi$, $\frac{DB}{DF} = \Phi$ e $\frac{AC}{AF} = \frac{AF}{FC}$ (o ponto F divide o segmento AC em média e extrema razão).

1.2.3 A importância do retângulo áureo

A razão ou proporção áurea é encontrada na natureza, nas artes e na arquitetura. Por exemplo, nas conchas e no próprio corpo humano aparecem razões áureas.

Figura 13 – Estrutura do movimento espiral do Nautilus



Fonte: http://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/

O retângulo áureo está presente em muitas obras de arquitetura, em esculturas e pinturas, por ser uma forma geométrica muito agradável e bela, pois exprime o movimento mantendo-se em espiral, indefinidamente. Alguns matemáticos, arquitetos e artistas incorporam, até hoje, a razão áurea em seus trabalhos.

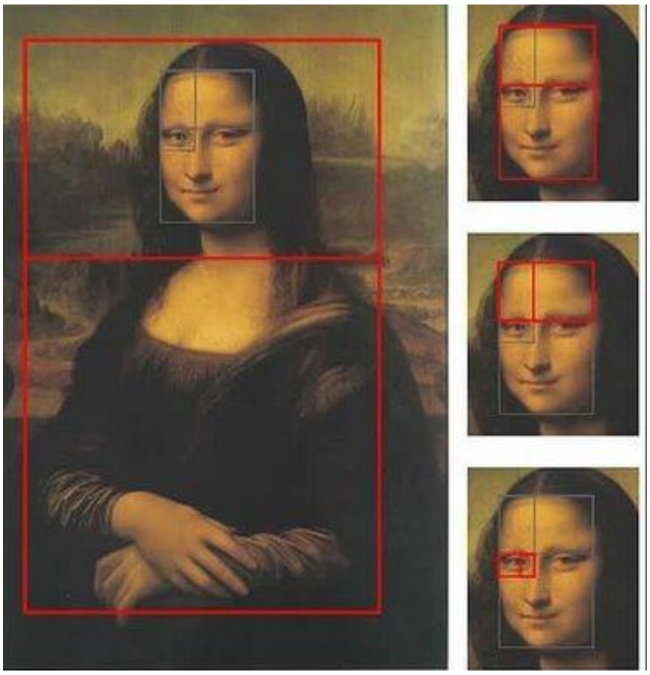
O Partenon é uma das obras mais admiradas da arquitetura universal, pois as proporções de sua fachada se aproximam do retângulo áureo, como pode ser visto na figura abaixo.

Figura 14 – Partenon grego de Atenas

Fonte: http://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/

As pinturas de Leonardo da Vinci tinham certas características como imagens centralizadas. Ele fazia uso da matemática em seus cálculos artísticos. Em sua grande obra, a Monalisa, ele posicionou a imagem de modo que pudesse ser dividida em retângulos áureos.

Figura 15 - Monalisa



Fonte: http://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/

Em sua obra “Os Elementos”, livro X, Euclides utilizou a razão áurea para construir o pentágono regular e os dois sólidos regulares mais complexos: o dodecaedro (12 faces pentagonais) e o icosaedro (20 faces triangulares).

1.3 **Os cortes de Dedekind**

São inúmeras as contribuições do matemático Dedekind à Matemática. Uma das mais importantes foi a de “cortes”, com os quais caracterizou, num livro de 1872, os números reais.

Dedekind observou que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar uma continuidade de números reais se supusermos, o que agora se chama “Axioma de Cantor – Dedekind”, que os pontos sobre uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais.

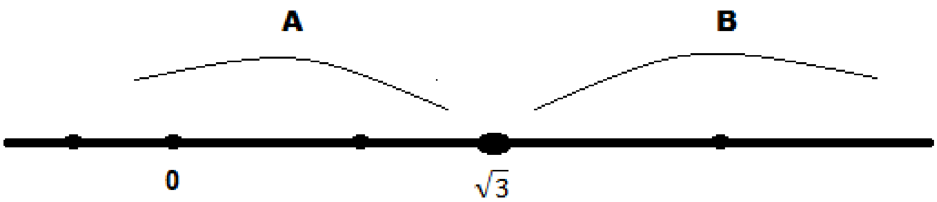
Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind publicou uma obra intitulada “Continuidade e Números Irracionais”. Esta obra tem a finalidade de caracterizar a continuidade da reta, ou seja, mostrar que todo corte (A, B) da reta é produzido por um e somente um ponto dela. Ponto este que a divide em duas classes A e B.

Se os pontos de uma reta são divididos em duas classes, A e B, tais que todos os pontos de A estão à esquerda de todos os pontos de B, então existe um, e somente um, ponto que determina essa divisão em duas classes, A e B, isto é, que divide a reta em duas partes. Este corte é denominado Corte de Dedekind.

Se A possui um ponto que corresponde ao seu maior número ou se B contém um ponto que corresponde ao seu menor número, o corte define um número racional; mas, se A não tem um maior número e B não tem um menor número, então o corte define um número irracional.

Se, por exemplo, pusermos em A todos os pontos correspondentes aos números racionais negativos e também todos os pontos correspondentes aos racionais positivos cujos quadrados são inferiores a 3, e em B todos os pontos que correspondam aos racionais positivos cujos quadrados são superiores a 3, dividimos todo o conjunto dos racionais de um modo que define um número irracional que é $\sqrt{3}$.

Figura 16 – Exemplo de corte (A, B) que representa $\sqrt{3}$



Fonte: O Autor, 2015

Dedekind observa que a existência de cortes sem elementos de separação no conjunto dos números racionais é a expressão aritmética da descontinuidade neste conjunto. Ao passo que, com a adjunção dos novos elementos (os números irracionais), obtemos o conjunto dos números reais, que ao contrário do conjunto dos racionais, é agora um “contínuo numérico”, pois os irracionais vêm preencher as “lacunas” de descontinuidade então existentes no conjunto dos números racionais.

Assim, Dedekind chegou a uma definição cuidadosa de número real, que até então não existia.

A propriedade de continuidade da reta também foi formulada por Georg Cantor. Por isso, ela é conhecida como “Axioma da Continuidade Dedekind–Cantor”. Embora tenha chegado a um resultado equivalente ao de Dedekind, Cantor concebeu o conjunto dos números reais de maneira muito diferente da cyuonsiderada por Dedekind. Cantor se utilizou das sequências de Cauchy para provar a completude do conjunto dos números reais. Sua demonstração pode ser encontrada em Lima (1993).

2 UM PASSO ALÉM: OS NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Quando trabalhamos no Ensino Médio, recordamos os conjuntos numéricos tradicionais. Evidenciamos a irracionalidade dos números π (pi) e e (neperiano) por serem especiais, porém não falamos de dois grupos de números bastante interessantes que são os números algébricos e os transcendentes. Um professor que possui algum conhecimento sobre a história da matemática, poderia falar um pouco sobre esses dois grupos de números e, também, de alguns matemáticos que se envolveram com esses números. Neste capítulo é feita uma breve abordagem sobre tais números.

2.1 **Definição**

Um número é algébrico quando satisfaz a uma equação algébrica da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, onde os coeficientes a_0, a_1,..., a_{n-1} e a_n são números inteiros. Caso contrário, ele é dito transcendente.

Por exemplo, $\sqrt{5}$ é um número algébrico, pois satisfaz à equação $x^2 - 5 = 0$.

O número $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ também é algébrico, pois:

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \rightarrow x - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2} \rightarrow (x - \sqrt{3})^3 = (\sqrt[3]{2})^3.$$

Desenvolvemos os produtos, depois isolamos o trinômio $x^3 + 9x - 2$ e, por fim, elevamos ambos os membros ao quadrado, chegando à equação abaixo:

$$x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0,$$

que é uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Observamos que, como todo número racional é raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, então, todo número racional é algébrico. E então, surge a seguinte pergunta: todo número irracional é ou não raiz de uma equação algébrica com $n \geq 2$? A resposta a esta pergunta foi dada pelo matemático francês J. Liouville em 1844, que nesse ano construiu um grupo de números reais não algébricos, chamados números transcendentes, definidos como segue:

Um número real x é dito número de Liouville, se para todo número inteiro positivo n, existirem inteiros p e q tais que:

$$0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}, q > 1$$

Exemplos simples de números transcendentes são os da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Todo número desta forma é um número de Liouville. A demonstração desse fato pode ser encontrada em Figueiredo (1985).

2.2 **Os números irracionais especiais e (neperiano) e π (pi)**

A demonstração da irracionalidade de π só aconteceu no século XVIII, apesar de ter sido um número estudado desde a antiguidade.

Johann Heinrich Lambert (matemático, físico, astrônomo e filósofo suíço radicado na Prússia, 1728-1777) e Adrien (Adrian) Marie Legendre (matemático francês, 1752-1833) mostraram, em 1770 e 1794, respectivamente, que tanto π quanto π^2 são números irracionais.

Um fato bastante interessante que chama a atenção é que há a possibilidade de a irracionalidade de π ter sido demonstrada pela primeira vez, por Lambert em 1761, usando frações contínuas, como podemos ver em Bekmann (1977).

Em Figueiredo (1985, p.15), encontramos uma demonstração da irracionalidade de π dada pelo matemático Ivan Niven, em artigo publicado no Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), pág. 509. Esta demonstração envolve temas como binômio de Newton, funções, limites, continuidade, derivadas e integrais. Existem outras provas da irracionalidade de π que foram dadas por Mary Cartwright, Hermite, Bourbaki e Miklós Laczkovich (en.wikipedia.org/wiki/proof.that π is irrational).

Observamos que não há precisão com relação à época em que foi realmente provada a irracionalidade de π. O fato é que muitos matemáticos e historiadores se envolveram e trabalharam arduamente para obter essa demonstração.

Existe uma afirmativa muito interessante que envolve os números transcendentes e os números irracionais. Veja:

Proposição 1: Se α é um número transcendente, então α é irracional.

Prova: Seja α um número transcendente. Suponha que ele seja racional, isto é, que existem a e b inteiros, $b \neq 0$, onde $\alpha = \frac{a}{b}$. Então, α é algébrico, pois é raiz da equação $bx - a = 0$. Isto é uma contradição, pois α é transcendente. Logo, α é irracional.

Podemos observar, facilmente, que a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional e não é transcendente.

Em 1844, J. Liouville conseguiu provar que nem e nem e^2 podem ser raízes de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, isto é, que e é transcendente. Então, baseado na afirmativa acima, podemos concluir que e é irracional (FIGUEIREDO, 1985, p.12).

Aproximadamente trinta anos depois (1873), outro matemático francês, Charles Hermite, mostrou, também, que e é transcendente, baseado nas ideias de Liouville. Esta demonstração foi publicada em uma série de notas, no Comptes Rendus de l´Académie des Sciences de Paris. Karl Weierstrass (matemático alemão,1815-1897) em 1885 e Adolf Hurwitz (matemático alemão, 1865-1919) em 1893 também provaram a transcendência de e, fazendo algumas mudanças na demonstração feita por Hermite (FIGUEIREDO,1985, p.51).

Ferdinand C.L Lindemann (matemático alemão, 1852-1939), em 1882, mostrou que π é um número transcendente em seu artigo intitulado ´´Uber die zahl π``, baseado no método usado por Hermite para provar a transcendência de e. Para isso, Lindemann mostrou que a equação e^{ix}+1=0 não pode ser satisfeita se x é algébrico. Euler havia mostrado, por volta de 1741, que x=π satisfaz à equação, chegando à igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, conhecida como identidade de Euler. Com isso, conclui-se que π não é algébrico, ou seja, π é transcendente. E então, mais uma vez chegaríamos à irracionalidade de π baseado na afirmativa mencionada acima.

Veremos mais detalhes a seguir.

2.2.1 A identidade de Euler

A Identidade de Euler é dada pela igualdade abaixo:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Para demonstrá-la, vamos considerar a representação de e^x em série de potências:

$$(1) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)$$

Usamos aqui um artifício que será muito útil para a dedução da identidade. Fazemos:

$$(2)\ x = iz.$$

E substituímos em (1), obtendo

$$(3) \quad e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots$$

Do estudo dos números complexos, sabemos que:

$$(4) \quad \begin{cases} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{cases}$$

Substituindo,(4) em (3), vem:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots$$

$$(5) \quad e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)$$

Da relação (5), podemos ver que as séries infinitas entre parênteses nos conduzem às conhecidas séries infinitas trigonométricas:

$$(6) \quad \cos(z) = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right)$$

e

$$(7) \quad \text{sen}\,(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)$$

Substituindo (6) e (7) na relação (5), obtemos:

$$(8) \quad e^{iz} = \cos(z) + i\text{sen}(z)$$

Agora, se fizermos $z = \pi$, teremos:

(9) $e^{\pi i} = \cos(\pi) + isen(\pi)$

Como $\cos(\pi) = -1$ e $sen(\pi) = 0$, podemos escrever:

$e^{\pi i} = -1 + 0,$

ou seja, $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Esta identidade é considerada por muitos a expressão mais bela da matemática.

2.2.2 O Teorema de Lindemann – Weierstrass

Teorema: Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são números algébricos linearmente independentes sobre o corpo dos números racionais, então e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3},…, e^{x_n} são algebricamente independentes sobre o conjunto dos racionais.

Este teorema é de grande utilidade para estabelecer a transcendência de um número.

Lindemann demonstrou, em 1882, que e^a é transcendente para todo número algébrico a não nulo. Karl Weierstrass demonstrou a forma mais geral deste teorema, em 1885.

Em particular para $a = 1$, temos que: como 1 é algébrico e linearmente independente sobre o conjunto dos racionais, $e^1 = e$ é transcendente.

Este teorema, juntamente com o teorema de Gelfond-Schneider, está generalizado como a conjectura de Schanuel. As transcendências de e (visto acima) e π são obtidas como corolários deste teorema.

Provemos agora que π é transcendente. Se π fosse algébrico sobre o conjunto dos racionais, $2\pi i$ também o seria (porque $2i$ é algébrico, e o produto de números algébricos é um número algébrico) (FIGUEIREDO,1985, p.29) e portanto, segundo o teorema de Lindemann-Weierstrass $e^{2\pi i} = 1$ é transcendente. Mas como 1 é racional, π é necessariamente transcendente.

2.3 **Construção de Segmentos**

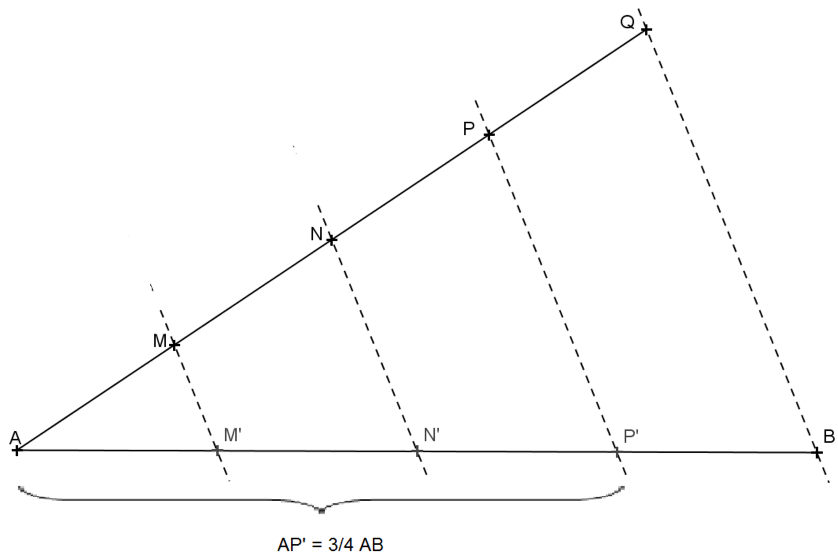
Tomando-se como referencial um segmento unitário, podemos construir segmentos de comprimento igual a qualquer número racional, usando apenas régua e compasso.

Ex. Segmento de comprimento $\frac{3}{4}$.

Construção:

Temos um segmento AB unitário e AC uma semirreta auxiliar. Com um compasso, a partir de A, construímos quatro segmentos de mesma medida e encontramos os pontos M, N, P e Q. Ligamos o ponto Q ao ponto B e, em seguida, construímos segmentos paralelos ao segmento BQ, partindo de P, N e M. Com isso, dividimos o segmento unitário AB em quatro partes iguais, ou seja, os segmentos AM', MN', NP' e $P'B$ têm a mesma medida. Então, o segmento AP' tem $\frac{3}{4}$ unidades de comprimento.

Figura 17 – Divisão de um segmento em partes iguais



Fonte: O autor, 2015

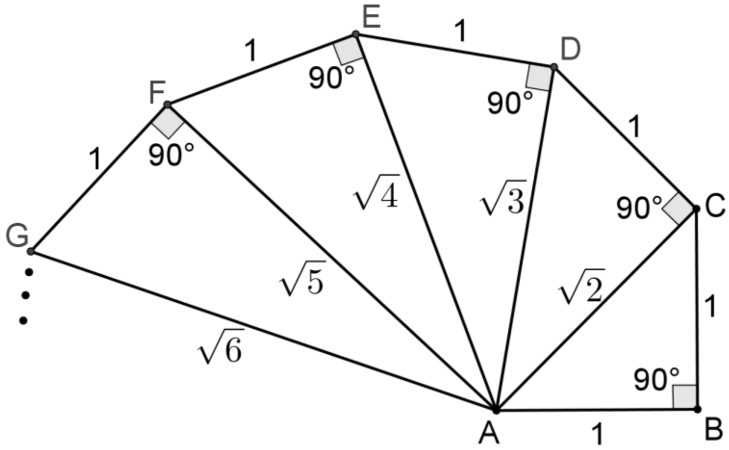
Além disso, podemos construir um segmento de comprimento $\sqrt{a}$ unidades, onde a é qualquer inteiro positivo.

Ex: $a = 2$

Fazendo os segmentos AB, BC, CD, DE, EF e FG unitários e aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos que AC mede $\sqrt{2}$ unidades, AD mede $\sqrt{3}$

unidades, AE mede $\sqrt{4}$ unidades, AF mede $\sqrt{5}$ unidades e AG mede $\sqrt{6}$ unidades. Procedendo da mesma forma indefinidamente, encontraremos segmentos de comprimentos $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ...

Figura 18 – Determinação de segmentos de comprimento $\sqrt{a}$



Fonte: O autor, 2015

Assim, um segmento cujo comprimento seja $a + b\sqrt{c}$, onde a e b são números racionais e c um número inteiro positivo, podem também ser construídos. Construímos um segmento de comprimento $\sqrt{c}$, em seguida construímos um segmento $b\sqrt{c}$ e, por fim, construímos um segmento de comprimento $a+b\sqrt{c}$. Esses números da forma $a + b\sqrt{c}$ são conhecidos como "surdos" ou irracionais quadráticos.

Finalmente, pode-se provar que os únicos segmentos passíveis de serem construídos com régua e compasso (segmentos construtíveis) são aqueles cujo comprimento seja um surdo (FERNANDES, 2013). Concluímos que todos os segmentos passíveis de serem construídos com régua e compasso têm comprimento igual a um número algébrico. A recíproca não é verdadeira, ou seja, nem todo número algébrico pode ser o comprimento de um determinado segmento, construído com régua e compasso, por exemplo, o número $\sqrt[3]{2}$.

Vamos mostrar que $\sqrt[3]{2}$ não pode ser escrito na forma $a+b\sqrt{c}$, com a e b racionais e c inteiro positivo, ou seja, ele não é construtível.

Vamos supor que $x = \sqrt[3]{2}$ seja construtível. Então, $x = \sqrt[3]{2}$ é da forma $a+b\sqrt{c}$. Se $x = a+b\sqrt{c}$, então elevando - se ao cubo ambos os membros, obteremos:

$$x^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}$$

Como $x^3 = 2$, temos $2 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}$

ou $2 = a^3 + 3ab^2c + (3a^2b + b^3c)\sqrt{c}$

e então $\begin{cases} a^3 + 3a\,b^2c = 2 \\ 3a^2b + b^3c = 0 \end{cases}$ (I)

Se $x = a + b\sqrt{c}$ é raiz da equação $x^3 - 2 = 0$, então $x_1 = a - b\sqrt{c}$ também é raiz, pois:

$x_1 = (a - b\sqrt{c})$,

$2 = a^3 - 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c - b^3c\sqrt{c}$,

$2 = (a^3 + 3ab^2c) - (3a^2b + b^3c)\sqrt{c}$,

cuja solução é a mesma do sistema (I).

Logo, $x_1^3 = x^3$ e consequentemente $x_1 = x$, o que acarreta $b = 0$ e $x = a$, o que é um absurdo.

Então, $\sqrt[3]{2}$ não pode ser comprimento de um segmento construído apenas com régua e compasso.

Com a afirmativa acima, chegamos à impossibilidade da duplicação do cubo usando apenas régua e compasso. Ou seja, dado um cubo de aresta a construtível, não conseguiremos encontrar outro cubo de aresta x construtível, cujo volume seja o dobro do volume do cubo dado. Vejamos:

$x^3 = 2a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}a$

Como $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, x não é construtível.

Sobre o problema da quadratura do círculo, se fosse possível quadrar o círculo, poderíamos construir, apenas com régua e compasso, um segmento de comprimento igual $a\sqrt{\pi}$, pois $\sqrt{\pi}$ é o comprimento do lado de um quadrado de área igual à área de um círculo de raio igual a 1. E, então, chegaríamos à conclusão que $\sqrt{\pi}$ é um número algébrico, logo π também seria algébrico (FIGUEIREDO, 1985, p.29), o que contraria a transcendência de π. Vale notar que este quadrado existe, mas não pode ser construído da maneira proposta pelos geômetras gregos, usando apenas régua e compasso.

2.4 **Um pouco de curiosidades históricas**

2.4.1 Anaxágoras

Anaxágoras (matemático e filósofo, 500 a EC – 428 a EC), nasceu em Clazômene, atual Turquia, viveu em Atenas durante o século V a EC. Por ter opiniões bem contrárias ao senso comum da época (heresia), foi preso e teve como sentença a pena de prisão. Seu amigo e discípulo Péricles (político grego, 495 a EC – 429), que tinha muita influência em Atenas, conseguiu libertá-lo.

Durante sua permanência na prisão tentou construir um quadrado que tivesse a mesma área de um círculo, usando apenas régua e compasso, ou seja, provar a quadratura do círculo. Assim, nasceu um dos problemas mais importantes da história da matemática e que envolveu grandes matemáticos por quase dois milênios e meio.

2.4.2 O 7º problema de Hilbert

Esse é um dos problemas propostos por David Hilbert (matemático alemão, 1862 – 1943) em 1900. Este problema trata da natureza irracional e transcendental de alguns números. Eis o problema:

a^b é sempre transcendente, quando $a,\ a \neq 0$ e $a \neq 1,$ for algébrico e b for algébrico irracional?

Esta pergunta foi respondida afirmativamente por Alexander Gelfond em 1934 e uma solução mais elegante foi dada por Theodor Schneider em 1935 (FIGUEIREDO, 1985, p.89).

Observe que b não pode ser racional nem transcendente; se b for racional, então a^b será algébrico; por outro lado, existem valores transcendentes de b (por exemplo, $b = \log_a 5)$ para os quais a^b será algébrico (nesse exemplo $a^b = 5$). E então, b tem de ser algébrico irracional. Este resultado é conhecido como o Teorema de Gelfond ou Teorema de Gelfond-Schneider.

São exemplos de números transcendentes:

$2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{-3}}$, 5^{i}, $i^{\sqrt{5}}$ e outros tantos

Poucos matemáticos em toda a história podem se igualar a Hilbert por suas grandes ideias e, por isso foi considerado como um dos maiores matemáticos do século XX, estando no mesmo nível de Henri Poincaré (matemático, físico e filósofo francês, 1854–1912). Poincaré lançou obras importantes na matemática pura, física matemática e mecânica celeste antes de Albert Einstein e era reconhecido como o mais brilhante pesquisador da Teoria da Relatividade.

Muitos outros matemáticos, além destes mencionados, estiveram, em certos períodos, ligados às questões dos números algébricos e transcendentes, como Borel, Markoff, Siegel, Hurwitz, Weierstrass e outros.

3 A DESCOBERTA DOS INCOMENSURÁVEIS E A VIDA E OBRA DE ALGUNS PENSADORES

3.1 Um pouco sobre a descoberta dos incomensuráveis

Sobre a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga há duas visões contraditórias. A primeira é que esta descoberta teria sido seguida por uma crise no pensamento pitagórico, pois de acordo com um princípio pitagórico, tudo (referente a medidas) poderia ser explicado ou representado por meio de números inteiros. A segunda, praticamente restrita aos especialistas da história da matemática, é que a descoberta dos incomensuráveis não trouxe crise alguma, de acordo com os estudiosos sobre este assunto.

Aqueles que defendem que a descoberta dos incomensuráveis gerou uma crise, argumentam que a base fundamental do pitagorismo é que a essência de todas as coisas era explicada por números inteiros ou por suas razões.

Para os pitagóricos, as razões expressas por números inteiros eram chamadas de comensuráveis, o que significa que as duas quantidades são medidas por uma unidade comum. Caso contrário, as razões eram chamadas de não exprimíveis, isto é, razões incomensuráveis.

Muitos autores, como David Fowler (ROQUE, 2012), discordam que a descoberta da incomensurabilidade tenha causado uma crise no pensamento pitagórico. Segundo Fowler, as fontes confiáveis não indicam nenhuma incompatibilidade da incomensurabilidade com o princípio pitagórico, de que tudo é número. Seu principal argumento é que a geometria grega tinha um caráter estritamente não aritmetizado, sendo possível fazer geometria sem ter a necessidade de associar um número a cada segmento ou área.

Após a leitura de diversos textos sobre a história da incomensurabilidade, cheguei à conclusão que a versão histórica atualmente com maior aceitação entre os historiadores é que não houve uma crise de fundamentos entre os pitagóricos.

3.2 **Alguns matemáticos envolvidos com os irracionais**

3.2.1 Teodoro de Cirene (465 - 398 a EC)

Matemático grego da Academia de Platão, nasceu em Cirene, hoje Shahhat, Líbia, e foi um dos principais filósofos da escola de filosofia moral de Cirene.

Pitagórico, viveu a maior parte da vida em Atenas onde teve permanentes contatos com Platão e Sócrates, tratando de filosofia, astronomia, aritmética, música e, praticamente, todos os assuntos educacionais. Seus conhecimentos chegaram aos nossos dias nos escritos de Platão. Acredita-se que tenha contribuído para o Livro X de Euclides.

3.2.2 Eudoxo de Cnido (408 - 355 a EC)

O grego Eudoxo de Cnido foi o inventor das esferas celestes e um dos primeiros a descrever o movimento dos planetas. Sabe-se que ele esteve na cidade de Tarento na Itália, para estudar com um discípulo de Pitágoras chamado Arquitas. Também estudou medicina na Sicília, antes de viajar para Atenas.

Proveio da academia platônica de Atenas. Dentre os principais mestres e pesquisadores, em meados do quarto século a EC, é considerado um dos bons matemáticos de seu tempo.

Apesar do livro “Os Elementos” (escrito por Euclides de Alexandria por volta do século 3 a EC) ter sido durante muito tempo o texto mais importante para o desenvolvimento da ciência, muitas das demonstrações nele contidas já haviam sido apresentadas por mestres mais antigos, especialmente por Eudoxo.

Contemporâneo do filósofo Platão, Eudoxo tornou-se um dos mais conhecidos matemáticos de sua época, por dominar muito as técnicas da geometria vigente. Seu trabalho merece nossa atenção, quando estuda um procedimento matemático para calcular a área de superfícies. Assim, através desta sua técnica que chamou de Método da Exaustão. Ele criou este método para resolver problemas de cálculos de áreas e volumes, que hoje são tratados pelo cálculo integral.

Por ter criado o método da exaustão, Eudoxo, considerado um gênio, contribuiu definitivamente para o surgimento das ideias de Newton, Leibniz e Riemann, na elaboração de um importante trabalho: o desenvolvimento das integrais.

Dedicou boa parte de sua vida na comparação entre os números, criando assim a teoria das proporções, onde inclui pela primeira vez os números irracionais, que atormentavam os matemáticos do passado.

Como os irracionais aparecem com frequência no cálculo de áreas e de volumes, que eram feitos por meio do cálculo integral, Eudoxo era considerado um dos criadores desta disciplina. O Cálculo Integral só ficou definitivamente estabelecido no final do século 19, 2200 anos depois de seu tempo.

No livro de Euclides consta a formulação de Eudoxo (ROQUE, 2012):

> Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente. Isto é, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, e só se, dados os inteiros m e n, sempre que m.a<n.b, então m.c < n.d; ou se m.a=n.b, então m.c=n.d; ou se m.a › n.b, então m.c › n.d.

A definição de Eudoxo de igualdade de razões se assemelha ao processo de multiplicação cruzada, usado hoje para frações: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e só se, $a \times d = b \times c$ (processo equivalente à redução ao mesmo denominador).

3.2.3 Teaetetus (morreu em 368 a EC)

Matemático grego nascido em Atenas, da Academia de Platão, especialista no estudo das grandezas incomensuráveis. As ideias presentes nos livros X e XII de “Os Elementos” geralmente são atribuídas a Eudoxo e Teaetetus. O livro X do tratado de Euclides mostrou que a ciência de investigar o comensurável e o incomensurável, o racional e os irracionais, tem sua origem na Escola de Pitágoras, mas sofreu um desenvolvimento importante nas mãos de Teaetetus, admirado justamente por seu talento natural neste assunto e em outras áreas da Matemática.

Teaetetus escreveu sobre raízes quadradas, linhas medianas, apótemas, binômios, etc. Também pode ter sido o autor da teoria das proporções que aparece no trabalho de Eudoxo, e o primeiro a estudar o octaedro e o icosaedro.

Há um diálogo com seu nome, que foi um tributo comemorativo de Platão a seu amigo. Neste diálogo, Teaetetus discutiu com Sócrates e Teodoro a natureza das grandezas incomensuráveis, que aparece no início do livro X de "Os Elementos". São feitas as distinções entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis e também entre aquelas que, sendo incomensuráveis em comprimento, são ou não são incomensuráveis em quadrado. Números como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são incomensuráveis em comprimento, mas são comensuráveis em quadrado, pois seus quadrados têm razão 3 para 5. As grandezas $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, por outro lado, são incomensuráveis tanto em comprimento quanto em quadrado.

3.2.4 Fibonacci (1170 - 1250)

Leonardo de Pisa nasceu, provavelmente, em Pisa (agora Itália). Era mais conhecido por Fibonacci (filho de Bonacci), pois seu pai se chamava Guilliemo Bonacci.

Um de seus legados deixados para a matemática foi a importante sequencia (1, $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$ ..., x_n,...), onde $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, isto é, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores. Os termos desta sequencia são chamados números de Fibonacci.

Se fizermos as razões entre cada termo e o seu antecessor, encontraremos outra sequência onde o termo geral é dado $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. À medida que formos determinando essas razões sucessivas, observaremos que vão se aproximando do número 1,6180339 (aproximando até a 7ª casa decimal). Podemos afirmar que quando n tende a infinito, o limite é Φ. Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1{,}6180339$$

3.2.5 Kronecker (1823 - 1891)

Leopold Kronecker nasceu na Alemanha de pais judeus, embora tenha optado pelo protestantismo.

Em contato com Weierstrass, Dirichlet, Jacobi e Steiner, obteve seu doutoramento em 1845 com uma tese sobre teoria algébrica dos números. De acordo com Weierstrass, aprovava a aritmetização universal da Análise, mas defendia uma aritmética finita, entrando em conflito com Cantor.

Insistia na ideia de que aritmética e análise deveriam basear-se nos números inteiros, os quais considerava como tendo sentido dado por Deus e rejeitava a construção dos números reais, porque não poderia ser feita por processos finitos. Achava que os números irracionais não existiam, lutando pela sua extinção. Diz-se que perguntava a Lindemann para que servia sua prova de que π não é algébrico, se os números irracionais não existiam.

Kronecker contribuiu, significativamente, para a álgebra, embora suas ideias na época fossem consideradas metafísicas. Seu finitismo chegava a embaraçar Weierstrass, mas foi a Cantor que atacou mais gravemente, opondo-se a que lhe dessem uma posição na Universidade de Berlin e, além disso, tentando derrotar e extinguir o ramo da matemática que Cantor estava criando, com a existência dos números transfinitos. Cantor defendeu-se num de seus artigos, dizendo que numerações definidas podem ser feitas com conjuntos infinitos tão bem quanto com finitos, mas Kronecker continuava com seus ataques e críticas. Este conflito entre Cantor e Kronecker é considerado como uma das mais fortes controvérsias matemáticas do século XIX.

Kronecker é famoso, entre outras coisas, pela afirmação: “Deus fez os inteiros; o resto é invenção humana”.

3.2.6 Dedekind (1831 - 1916)

Julius Wilhelm Richard Dedekind nasceu em Braunschweing, Alemanha. Em alguns pontos, a vida de Dedekind se assemelha à de Weierstrass: ele era um em quatro filhos e também nunca se casou; e ambos viveram mais de oitenta anos. Porém, Dedekind se iniciou na matemática mais cedo que Weierstrass, entrando na Universidade de Göttingen aos dezenove anos e obtendo seu doutorado três anos depois, com uma tese sobre o cálculo, que foi elogiada por Gauss. Permaneceu em Göttingen durante alguns anos, ensinando e ouvindo aulas de Dirichlet e depois dedicou-se ao ensino secundário, principalmente em Brunswich, pelo resto da vida.

Dedekind viveu vários anos depois de sua célebre introdução dos “cortes”. A famosa editora Teubneu deu como data de sua morte, no calendário de matemáticos, o dia 4 de setembro de 1899. Dedekind que viveu ainda mais doze anos, escreveu ao editor que passara a data em questão em conversa estimulante com seu amigo Georg Cantor.

A atenção de Dedekind se voltara para o problema dos números irracionais desde 1858, quando dava aulas de cálculo. Em 1872, Dedekind publicou seu livro mais célebre, “A Continuidade e os números irracionais”. Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido somente com a aritmética, sem usar a geometria como guia.

Ele se perguntou o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta à natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto dado. Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e só um, ponto que realiza esta divisão em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes.

3.2.7 Cantor (1845 - 1918)

A vida de Cantor foi tragicamente diferente da do seu amigo Dedekind. Georg Cantor nasceu em Saint-Petersburg,no dia 3 de março de 1845, de pais que haviam emigrado da Dinamarca, mas ele passou a maior parte de sua vida na Alemanha, tendo a família se mudado para Frankfurt, quando ele tinha onze anos. Seus pais eram cristãos de ascendência judia, sendo seu pai um convertido ao protestantismo e sua mãe, católica de nascimento.

O filho Georg se interessou fortemente pelos argumentos sutis dos teólogos medievais, sobre a continuidade e o infinito, e isso contribuiu para que não quisesse seguir uma carreira em engenharia, como seu pai sugeria. Em seus estudos em Zurich, Gottingen e Berlin, o jovem, consequentemente, concentrou-se em filosofia, física e matemática, o que pareceu ter estimulado sua enorme imaginação matemática. Teve como professores, matemáticos tão brilhantes como Krummer, Weierstrass e Kronecker.

Doutorou-se em Berlin em 1867 com uma tese sobre a teoria dos números, mas suas primeiras publicações mostram atração pela análise de Weierstrass. Esse campo estimulou as ideias revolucionárias que lhe ocorreram pouco antes dos trinta anos. Havia uma ligação da obra de Cantor com a expressão “número real”, focando na palavra“ infinito”.

Lecionou matemática numa escola privada feminina, devido à falta de lugares disponíveis na Universidade. Só dois anos depois ingressou no corpo docente da Universidade de Halle, uma instituição de ensino pouco prestigiada.

Cinco anos depois, com 29 anos de idade, foi para a Suiça onde conheceu Richard Dedekind um outro jovem matemático que dois anos antes tinha publicado a sua própria teoria sobre os irracionais. Eles passaram muitas horas discutindo as respectivas teorias. Eram relativamente desprezados pela comunidade matemática, pois era o que acontecia com todos aqueles que tinham ideias contestadas para sua época.

3.2.8 Lindemann (1852 - 1939)

Carl Louis Ferdinand Von Lindemann nasceu em Hannover, Alemanha. Em 1873, tendo como orientador Felix Klein, obteve o título de Doutor. Entre 1883 e 1893 foi professor em Königsberg. Tornou-se mais conhecido por ter sido professor de matemáticos ilustres como David Hilbert e Hermann Minkowski.

Em 1882, quando publicou a prova da transcendência de π, entrou em definitivo para o rol dos grandes matemáticos. Os métodos usados são parecidos com os de Charles Hermite na sua demonstração da transcendência do número de Euler (e). Anteriormente à publicação da demonstração de Lindemann, se sabia que se π fosse transcendente, então o antigo problema da quadratura do círculo não poderia ser resolvido.

4 OS IRRACIONAIS EM SALA DE AULA

Neste capítulo propomos uma aula para uma turma do 3º ano do Ensino Médio. O objetivo é fazer com que o aluno consiga demonstrar a irracionalidade de números da forma $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ + $\sqrt[p]{c}$, com a, b e c números inteiros positivos, usando dois teoremas importantes que são o teorema das raízes racionais e um teorema sobre a paridade de números inteiros.

Teorema 1: Teorema das raízes racionais

Se $\frac{p}{q}$ (p e q primos entre si) é raiz de uma equação da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}$ $+\ldots+ a_1 x + a_0 = 0$, com coeficientes inteiros, $a_0 \neq 0$, então p divide a_0 e q divide a_n.

Demonstração:

Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} +\ldots+ a_1 x + a_0 = 0$, devemos ter

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

Eliminando os parênteses e multiplicando todos os termos da equação por q^n, obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q +\ldots+ a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \ (4.1).$$

Dividindo todos os termos de (4.1) por p (depois de colocar p em evidência) e subtraindo o último termo em ambos os lados da igualdade, temos:

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots+ a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0}{p}\, q^n \ (4.2).$$

Observe que o lado esquerdo de (4.2) nos dá um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como p e q são primos entre si, para que o número $\frac{a_0}{p} q^n$ seja inteiro, a_0 deve ser múltiplo de p, isto é, p é divisor de a_0.

Por outro lado, dividindo-se todos os termos de (4.1) por q (depois de colocar q em evidência) e subtraindo o primeiro termo em ambos os lados, temos

$$a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = -a_n \frac{p^n}{q} \quad (4.3).$$

Observando que o lado esquerdo de (4.3) nos dá um número inteiro, tem-se, portanto, que o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como p e q são primos entre si, para que o número $a_n \frac{p^n}{q}$ seja inteiro, a_n deve ser múltiplo de q, isto é, q é divisor de a_n.

Teorema 2: Se o quadrado de um número inteiro é par, então este número é par.

Demonstração:

Seja n um inteiro tal que n^2 é par. Suponhamos, por absurdo, que n seja ímpar.

Podemos escrever $n = 2k + 1$, com $k \epsilon \mathbb{Z}$, então $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$. Como $4k(k+1)$ é par, $4k(k+1) + 1 = n^2$ é impar, chegando a uma contradição.

A partir dos teoremas acima, provar que os números $\sqrt{2}$, 1+$\sqrt{3}$,$\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ são irracionais.

a) Formemos a equação $x = \sqrt{2}$. Elevando-se ambos os membros à segunda \potência, vem:

$x^2 = 2 \rightarrow x^2 - 2 = 0$

De acordo com o Teorema 1, os únicos números racionais que podem ser raízes dessa equação são 1, -1, 2 e -2. Assim, concluímos que $\sqrt{2}$ é irracional.

b) Analogamente ao item a, temos:

$x = 1 + \sqrt{3} \rightarrow x - 1 = \sqrt{3}$

Elevando-se à segunda potência ambos os membros e desenvolvendo os produtos, encontramos a equação $x^2 - 2x - 2 = 0$. De acordo com o Teorema 1, só os números racionais $1, -1$, 2 e -2 podem ser raízes dessa equação. Assim, chegamos à conclusão que $1 + \sqrt{3}$ é irracional.

c) A demonstração da irracionalidade de $\sqrt[3]{2}$ é idêntica ao item a. Basta elevar ambos os membros à terceira potência e continuar com o mesmo raciocínio.

d) Formemos a equação $x = \sqrt{3} + \sqrt{6}$. Elevemos ambos os membros ao quadrado. Desenvolvendo os produtos e depois subtraindo 9 de ambos os membros, elevamos ao quadrado ambos os membros e encontramos a equação $x^4 + 18x^2 + 9 = 0$. De acordo com o Teorema 1, os únicos racionais que podem ser raízes dessa equação são $1, -1$, 3, -3, 9 e -9. Logo, o número $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ é irracional.

Vejamos agora uma alternativa para demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Poderíamos provar a irracionalidade do número $\sqrt{2}$, usando uma demonstração por absurdo. Isto significa que vamos partir da hipótese de que $\sqrt{2}$ é racional e devemos chegar a um absurdo.

Demonstração:

Supondo que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros primos entre si, podemos escrever que $a = \sqrt{2}\, b \rightarrow a^2 = 2b^2$.

Pela última igualdade, a^2 é um número par. E, se a^2 é par, então a é par (Teorema 2), podemos escrever: $a = 2c \rightarrow a^2 = 4c^2 \rightarrow 2b^2 = 4c^2 \rightarrow b^2 = 2c^2$.

Pela última igualdade concluímos que: b^2 é par, logo b é par. Chegamos a um absurdo, pois a e b são primos entre si como supomos no início da demonstração. Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Como um desafio para os alunos, faço a seguinte pergunta:

Será que conseguimos marcar, com exatidão, os números irracionais $\sqrt{2}$,$\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$ + $\sqrt{6}$ na reta numérica?

A resposta é sim. Vejamos:

Construímos os triângulos retângulos ABC, ADE, AFG, AHI e $AJK,$ de forma que $AB = BC = 1 \rightarrow AC = \sqrt{2} = AD$

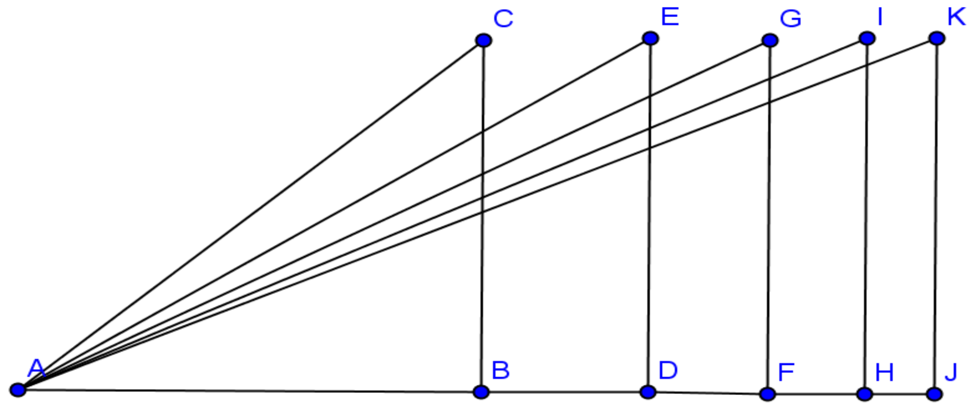
$AD = \sqrt{2}$ e $DE = 1 \rightarrow AE = \sqrt{3} = AF$

$AF = \sqrt{3}$ e $FG = 1 \rightarrow AG = \sqrt{4} = AH = 2$

$AH = 2$ e $HI = 1 \rightarrow AI = \sqrt{5} = AJ$

$AJ = \sqrt{5}$ e $JK = 1 \rightarrow AK = \sqrt{6}$ e $\sqrt{3} + \sqrt{6} = AF + AK$

Figura 19 - Construção Geométrica dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$



Fonte: O autor, 2015

Como última atividade da aula distribuí aos alunos um artigo, cujo título é Representando números primos e irracionais (ZAZKIS, 2005). Dividi a turma em grupos e li o artigo com eles. Acharam interessante, mas tiveram uma certa dificuldade de entendimento. Aconteceram perguntas bem variadas, mas pertinentes ao objetivo que eu havia traçado. Surgiram, inclusive, sugestões para os assuntos a serem ministrados posteriormente. No Anexo B, faço a apresentação do artigo em português

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando me propus a pesquisar sobre os irracionais, não imaginava o imenso universo que iria encontrar. Muitos artigos e livros foram consultados e, com certeza, ainda há muitos a serem lidos. Os pensamentos divergentes de vários historiadores e matemáticos e a não aceitação dos irracionais por alguns deles foram os fatos que mais me chamaram a atenção.

Foram necessários cerca de 2500 anos para que os irracionais entrassem em definitivo para o contexto da matemática, fato que se deu desde a “descoberta” dos segmentos incomensuráveis, pelos gregos, até a construção axiomática realizada por Dedekind ou Cantor no século XIX. Dessa forma, partindo de ideias mais próximas à geometria, ao longo do tempo, para a construção definitiva do conceito de número irracional, as noções de cálculo e análise se mostraram de grande importância.

Nesse sentido, matemáticos como Cauchy e Weierstrass foram fundamentais para que essa construção se efetivasse, além de todos os já mencionados no trabalho. Cauchy definia os irracionais como limites de sequências ou séries convergentes de números racionais. Já Weierstrass definia o número real como sendo a própria sequência que converge.

Ao trabalhar com os irracionais no Ensino Fundamental, não damos a importância necessária a este conjunto. Falamos apenas o necessário para chegarmos ao conjunto dos números reais. Acho importante que exploremos mais esse assunto, inclusive mencionando as formas de apresentação de um número irracional e suas aproximações.

Já no Ensino Médio, ao trabalhar com as equações algébricas, sugiro que se definam números algébricos e transcendentes e, se possível, se fale da transcendência dos irracionais especiais π e e. São grupos de números que, normalmente, não mencionamos no curso.

Ao terminar este trabalho fiquei com a sensação de missão cumprida. Foi árduo, mas prazeroso e enriquecedor. O objetivo era saber como os números irracionais surgiram e o comportamento dos matemáticos daquela época, quanto a esta novidade. Além do objetivo alcançado, este trabalho me abriu novos horizontes, horizontes estes que gostaria de compartilhar com nossos professores. Inicialmente, deveríamos dar uma maior ênfase ao conjunto dos números irracionais, quando trabalhado no Ensino Fundamental. Mostrar a grandeza deste conjunto. Já no Ensino Médio, ao trabalhar com equações algébricas, definir números algébricos e transcendentes e, se possível, falar da transcendência dos irracionais especiais π e e.

Este trabalho foi muito enriquecedor para mim e gostaria de deixar uma sugestão, não só para os professores de matemática, mas também aos que gostam de uma boa leitura, que é conhecer a História da Matemática. Com certeza irão adquirir bastante conteúdo e terão um crescimento nas suas práticas pedagógicas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. 3 ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2006.

ACZEL, A. D. *O mistério de Alef*. São Paulo: Editora Globo, 2003.

BEKMANN, P. *A history of Pi*. 4 ed. Colorado: The Golem Press, 1977.

BOYER, C. *História da matemática*. 2 ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.

FERNANDES, A. C. P. *Aplicações da álgebra no estudo de segmentos construtíveis*. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) UFSJ, Santo Antônio, 2013. Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/profmat/csa >. Acesso em: 25 abr. 2015.

FIGUEIREDO, D. G. *Números irracionais e transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 1985.

LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

NIVEN, I. *Números racionais e irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ROQUE, T. *História da matemática*. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T; CARVALHO, J. P. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: PROFMAT/IMPA, 2013.

ZAZKIS, R. Representing Numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v.36, n. 2-3, p. 207-217, 2005.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Pentagrama. Acesso em: 12 nov.2014.

http://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao. Acesso em: 12 nov. 2014.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Fra%C3%A7%C3%A3o_cont%C3%ADnua. Acesso em 25 nov. 2014.

https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational. Acesso em: 20 jan. 2015.

http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/quadratura.html. Acesso em: 20 janeiro 2015.

somatematica.com.br/biograf/dedekind.php. Acesso em 27 abril 2015.

ANEXO - Artigo da autora Rina Zazkis

Finalizando, apresento um artigo da autora Rina Zazkis (Faculty of Education, Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia, Canada) publicado no International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.36, 2005, cujo título é Representando Números Primos e Irracionais

Este artigo faz uma analogia entre números primos e números irracionais, com relação à forma como estes números são definidos e como eles são percebidos pelos alunos.

São apresentados dois estudos:

a) Um estudo sobre a compreensão de números primos por professores do Ensino Fundamental, recém - formados.

b) Um estudo sobre a compreensão de números irracionais por professores do Ensino Secundário, recém-formados.

Considerando o resultado desses estudos, o autor apela para uma maior atenção no ensino de características transparentes em representações de números e sugere várias estratégias sobre como isso pode ser conseguido.

1) O que os números irracionais e os números primos têm em comum?

Os leitores são convidados a examinar por um minuto a sua resposta ou a reação a esta pergunta, antes da leitura continuada.

Quando perguntamos aos alunos, a resposta mais comum é um olhar perplexo, como “dizer sem dizer”. Que tipo de pergunta estúpida é essa?

Quando perguntamos aos colegas, a resposta mais comum foi um olhar perplexo, seguido por algo como “Oh! Nunca pensei nisso”.

Neste artigo, encontramos uma analogia incomum entre os números primos e os números irracionais. Esta analogia refere-se à ausência de uma representação “transparente“ para estes números. Discutimos como isso pode influenciar os alunos nas percepções de números e um presente obstáculo para o entendimento.

2) Definições e Imagens

De um modo geral, os números irracionais são aqueles que não podem ser representados como um quociente e números primos são aqueles que não podem ser representados como um produto. Inserindo o rigor matemático para esta observação áspera, nós, obviamente, reconhecemos que o quociente acima mencionado refere-se a $\frac{a}{b}$, onde a é um número inteiro e b é um número inteiro diferente de zero, ao passo que o produto acima referido é um produto de números naturais maiores do que 1. No entanto, nosso foco no que se segue não é sobre as restrições rigorosas, mas nas palavras “não pode ser representado”, isto é, identificar conceitos não pelo que eles são, mas por aquilo que não são e se concentrando na representação.

Tall e Vinner usam o conceito de imagem para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais e as propriedades e processos associados. Como tal “não pode ser representado”, é uma parte de como estes conceitos são percebidos. Uma definição matemática de número irracional baseia-se no conceito de número real, que é formalmente definida usando cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy.

Uma definição equivalente para um número irracional, refere-se à não repetição infinita na representação decimal e à não existência de um número finito.

Além disso, uma definição matemática formal para um número primo, é que é um número natural que tem exatamente dois fatores (preferimos esta definição para o que se refere à divisibilidade por apenas 1 e ele mesmo, pois ajuda a excluir o número 1 da lista de números primos).

Respostas de alguns professores, quando lhes pediram para descrever um número primo:

Sally: Os números primos não podem ser divididos por qualquer coisa diferente de 1 e ele próprio.

Tom: Primos são aqueles que não podem ser fatorados.

Karen: Número primo seria um número divisível apenas por 1 e por si próprio.

Jenny: Os números primos têm apenas dois fatores. Eles não têm outros fatores a serem divididos.

Zazkis e Liljedahl relataram que as descrições negativas apareceram nas respostas de 15 dos 18 participantes, quer na sua descrição inicial de números primos (por exemplo, Sally e Tom) ou em suas explicações adicionais (por exemplo, Karen e Jenny). Em resumo, a descrição negativa é o que irracionais e primos têm em comum, ou como uma definição de trabalho ou como uma percepção comum.

3) Representações: Transparentes e Opacas

Lesh e outros introduziram a distinção entre representações “transparentes” e “Opacas”.

Segundo esses pesquisadores, uma representação transparente tem nem mais nem menos significado do que a ideia representada ou estrutura. Uma representação opaca enfatiza alguns aspectos das ideias ou estrutura e desenfatiza outros. Usando a terminologia de Lesh na elaboração da distinção entre as representações transparentes e opacas, Zazkis e Gadowsky focado sobre as representações de números que introduzem a noção de relativa transparência e opacidade. Ou seja, eles sugeriram que todas as representações de números são opacas no sentido de que eles sempre escondem algumas das características de um número, embora possa revelar outras, no que diz respeito ao que seria transparente. Por exemplo, do número $784 = 28^2$ enfatiza, torna transparente, que é um quadrado perfeito, mas desenfatiza, deixa opaco, que é divisível por 98. Representar o mesmo número como $13 \times 60 + 4$, torna transparente que o resto da divisão de 784 por 13 é 4, mas deixa opaco sua propriedade de ser um quadrado perfeito.

Zazkis e Liljedah ampliaram ainda mais as noções de transparência na representação de números específicos para a representação de conjuntos de números que possuam a mesma propriedade, através da utilização da notação algébrica. Isto é, para um conjunto onde k é um número inteiro, $17k$ é uma representação transparente para um múltiplo de 17, como esta propriedade é incorporada ou ´´ pode ser vista `` por esta forma de representação. No entanto, é impossível determinar se $17k$ é um múltiplo de 3, considerando a representação sozinha. Neste caso, dizemos que a representação é opaca com respeito à divisibilidade por 3.

Aplicam-se os conceitos de opacidade e transparência a números irracionais e racionais, como por exemplo, a representação como uma fração comum e uma representação transparente de um número racional (isto é, a racionalidade é incorporada na representação). E, por exemplo, o número $0{,}010011000111 \ldots$ é uma representação transparente de um número irracional, isto é, a irracionalidade pode ser deduzida a partir desta representação.

Representar um número como um produto de dois números naturais superiores a 1, é uma representação transparente para um número composto. No entanto, não há representação transparente para um número primo.

A seguir são apresentados trechos de dois estudos que examinaram a compreensão dos números primos e dos números irracionais, respectivamente.

4) Em Números Primos e Representações

Em nosso estudo de pesquisa recente na compreensão da primalidade, foi apresentada a um grupo de 116 professores do Ensino Fundamental, a seguinte questão:

Considere $F = 151 \times 157$. É F um número primo?

Circule SIM/NÃO e explique a sua decisão.

Os participantes deste estudo foram alunos matriculados em um “Princípios de Matemática para o curso de professores”, que é um curso fundamental para a certificação no nível elementar. A questão foi apresentada aos participantes, após a conclusão da unidade em teoria elementar dos números. Dos 74 estudantes que afirmaram corretamente que F é composto, apenas 52 justificaram por sua estrutura como um produto, concentrando-se a explicação sobre a definição dos termos números primos ou compostos. A resposta popular foi calcular F e aplicar o aprendido algoritmo de verificação de primalidade.

Por exemplo, Kathy descreveu sua estratégia da seguinte forma: $151 \times 157 = 23707$, $\sqrt{23707} < 154$. Confira todos os números primos menores do que 154, para ver se o número é primo e se nenhum deles pode dividir 23707, então o número é primo. No entanto, esta descrição geral seguiu-se a lista de números primos até 23 e uma conclusão que F é primo. A estratégia de Kathy não está incorreta, mas sim desnecessária e deselegante, no caso dado, que é a implementação incompleta da estratégia, que levou a uma conclusão errada. Aconteceram outras respostas populares, bem variadas.

É impossível, dado um número relativamente grande, concluir sua primalidade sem uma cuidadosa “verificação”, por exemplo, aplicando o algoritmo conhecido.

A característica unificadora em respostas incorretas ou justificativas inadequadas é a falta de atenção a esta característica transparente (o produto de todos os números), na representação do número F.

5) Números Irracionais e Representações

Em nosso estudo de pesquisa recente na compreensão da irracionalidade, foi apresentada a seguinte questão a um grupo de 46 professores de Matemática do Ensino Secundário.

Considere $\frac{53}{83}$. Vamos chamar esse número de M. Ao efetuar esta divisão, o visor da calculadora mostra $0{,}63855421687$. É M um número racional ou irracional? Explicar. (note-se que os números foram cuidadosamente escolhidos, de modo que a natureza repetitiva da representação decimal é “opaca“ em um visor da calculadora. O comprimento do período, neste caso, é de 41 dígitos)

Os participantes deste estudo tinham pelo menos dois cursos de Cálculo na sua formação. No entanto, apenas cerca de 60% deles deram uma resposta correta, que foi seguida de justificativa adequada, ou seja, M é racional, pois é um quociente de dois números inteiros. Aceitamos a crítica de que esta pergunta foi intencionalmente enganosa, mas era o nosso objetivo verificar que tipo de distração pode ser causado por uma calculadora.

Aconteceram outras respostas, como:

$\frac{53}{83}$ é irracional, porque não há um padrão no decimal $0{,}63855421687$

$\frac{53}{83}$ é racional, porque ele termina (a calculadora mostra $0{,}63855421687$)

Nessas respostas, identificamos vários temas que se sobrepõem: aplicação de uma definição incorreta ou incompleta, a distração por um visor da calculadora e a falta de consciência da relação entre as frações e decimais com repetição. No entanto, a tendência geral nessas respostas é a falta de atenção ou ignorância da característica de representação (o quociente de números inteiros), que é transparente.

6) O Papel das Representações em Educação Matemática

A questão da representação não é nova para a Educação Matemática. A discussão de representações em matemática é muitas vezes relacionada com sistemas representacionais qualitativamente diferentes, como símbolos escritos, imagens ou modelos de manipulação. O foco é sobre representações que desvendem propriedades dos números. Qual o papel dessas representações em matemática e na aprendizagem em matemática?

6.1) Ferramentas para manipulação e comunicação

Consideremos, por exemplo, a soma de dois números ímpares. Fazendo as representações devidas, chegamos à conclusão que esta soma é um número par. De modo semelhante, chegou-se à conclusão que a soma de dois números racionais é um número racional. Quando foi considerado a soma de dois números irracionais, Sirotic e Zazkis (pesquisadores) relataram que 19 dos 46 (41%) dos professores afirmaram que esta soma (na verdade a soma de dois números irracionais positivos) é sempre irracional.

Concluímos que a falta de uma representação simbólica finita para um número irracional impede a capacidade de os alunos manipularem estes números, ao passo que os números racionais podem ser manipulados.

6.2) Ferramentas para a compreensão

Compreender está ligado à capacidade de aplicar várias representações e escolher uma apropriada para a situação-problema. Janvier descreve o entendimento como um processo cumulativo baseado principalmente sobre a capacidade de lidar com um conjunto “sempre enriquecedor” de representações.

6.3) Ferramentas para construções mentais

Tratar conceitos matemáticos como objetos, apoia a construção de correspondentes objetos mentais na mente dos alunos. Os pesquisadores concordam que a obtenção de uma concepção de objeto matemático é um desafio. Sugerimos que a falta de representação transparente para números primos bem como para os números irracionais, cria um obstáculo para agir como tal, cria uma dificuldade adicional para a construção de um objeto mental.

7) Papel dos Exemplos

Exemplos desempenham um papel importante na matemática, Vamos argumentar que esse papel é ainda mais crucial em casos de números irracionais e primos, onde os objetos não têm representação aparente.

Mason e Pimm afirmam que quando um professor apresenta um exemplo, ele ou ela vê a sua generalidade e relata o que o exemplo representa.

Exemplos também servem como ferramentas úteis, quando os alunos são obrigados a lidar com objetos que ainda não foram totalmente construídas em suas mentes.

7.1) Exemplos de números primos

A existência de uma representação transparente para uma propriedade de número específico pode ajudar em abstrair e generalizar esta propriedade. No entanto, a falta de uma representação transparente por números primos pode levar os alunos a generalizar a partir de exemplos.

7.2) Exemplos de números irracionais

Voltemo-nos, agora, para exemplos de números irracionais. Como exercício, peça aos seus alunos para listar uns 10 números irracionais. Alguns alunos ficam presos após listagem de $\sqrt{2}$ e π. Sirotic lembra sobre a seguinte conversa, enquanto estava observando uma aula de matemática na classe 9:

Aluno: É π o único número irracional?

Mestre: Não, há também $\sqrt{2}$.

O professor perde a chance de mostrar outros números irracionais, inclusive os algébricos e os transcendentes.

7.3) Enriquecendo o repertório

O professor deve variar nos exemplos "sempre mencionados". Por exemplo: mostre a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Porque não a de $\sqrt{15}$, por exemplo.

Zazkis mostrou dificuldades que alunos de graduação com experiência, em tentar imitar a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{3}$, tendo dificuldade em generalizar. Talvez, se de vez em quando citarmos $\sqrt{17}$, a ideia de irracionalidade será mais facilmente generalizada para incluir a raiz quadrada de qualquer primo.

8) Resumo e Discussão

Os dois estudos mencionados neste artigo, entendimento e compreensão da primalidade e irracionalidade, independem um do outro, mas convergem para o tema comum, que é o tema da representação. Em resumo, o elemento comum a ambos os estudos é que as questões apresentadas aos participantes, inclui uma representação transparente para um número que não é primo e para um número que não é irracional.

É um desafio no ensino de graduação matemática para "quebrar nos alunos", hábitos em relação à execução de algoritmos e redirecionar sua atenção para as estruturas de representação. Esse desafio é especialmente crucial quando se trabalha com professores em formação, os educadores das futuras populações de alunos. Como podemos ensinar os alunos a ver o que é visível, para que percebam o que é transparente?

Não há soluções simples, embora algumas perguntas simples como “trivial” acima, poderia ser um ponto de partida. Mas, o mais importante, se queremos alunos para ver o que vemos, nós poderíamos começar, por simplesmente, pedindo-lhes para olhar, e depois olhar de novo.