



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**

**O ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU: Uma  
aplicação com o software GeoGebra.**

Mossoró - RN

2015

**Tiago Leão Silva**

**O ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU: Uma aplicação  
com o software GeoGebra.**

Trabalho de Conclusão de  
Curso apresentado à Pró-Reitoria de  
Pesquisa e Pós-Graduação da  
Universidade Federal Rural do Semi-  
Árido como requisito para obtenção do  
título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Maurício  
Zuluaga Martinez.

**Co-Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Ms.  
Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz.

Mossoró - RN

2015

Catálogo na Fonte

Catálogo de Publicação na Fonte. UFERSA - BIBLIOTECA CENTRAL ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ

Silva, Tiago Leão.

O ensino de funções polinomiais do 2º grau: Uma aplicação com o software GeoGebra / Tiago Leão Silva. - Mossoró, 2015.

61f: il.

1. Álgebra linear. 2. Funções. 3. GeoGebra - geometria. 4. Matemática. 5. Processo ensino aprendizagem - matemática. I. Título

RN/UFERSA/BOT/763

CDD 512.5 S586e

TIAGO LEÃO SILVA

**O ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU: UMA APLICAÇÃO  
COM O SOFTWARE GEOGEBRA.**

Dissertação apresentada a Universidade  
Federal Rural do Semi-Árido –  
UFERSA, Campus Mossoró para  
obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

APROVADA EM: 10/09/2015

**BANCA EXAMINADORA**

Mauricio Zuluaga Martinez

Profº. Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFERSA  
Presidente

Ricardo Antonio Faustino da Silva Braz

Profº. Ms. Ricardo Antonio Faustino da Silva Braz - UFERSA  
Primeiro Membro

Walter Martins Rodrigues  
Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues – UFERSA  
Segundo Membro

Aleksandre Saraiva Dantas

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN  
Terceiro Membro

MOSSORÓ/RN, 2015.

Dedico este trabalho a Deus, a minha família, aos meus colegas de curso, colegas de trabalho, aos professores e coordenadores do Profmat da Ufersa, que com palavras de apoio e incentivo me ajudaram a conquistar mais esse objetivo na vida.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, autor de todas as coisas, sem ele nada seria possível!

A minha esposa, Kelvia, que sempre me incentivou desde os tempos de escola com palavras de encorajamento e compreensão nos momentos difíceis.

A minha filha recém-nascida, Maria Valentina, que serviu de inspiração desde o instante em que soube da sua existência.

Aos meus pais, Francisco Cavalcante da Silva e Maria da Conceição Leão da Silva, e irmãs, Elizabeth Leão Silva e Antônia Natália Leão Silva que me ajudaram sempre da forma que podiam e me educaram mudando para sempre minha vida, muito obrigado pelas correções e conselhos.

A todo corpo docente e toda coordenação do PROFMAT, em especial ao professor Antônio Ronaldo Garcia Gomes pelos exemplos, conversas descontraídas e amigáveis, e, principalmente, pelo modo como conduziu toda a turma durante esse mestrado e ao professor Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz que com paciência e apoio me conduziu com ensinamentos valiosos.

Aos amigos e colegas de curso, de forma excepcional aos amigos e parceiros de viagem Anderson Cavalcante dos Santos e Paulo Jakson Dias Cruz que no decorrer desse longo e árduo período sempre foram peças chaves na colaboração e desenvolvimento daquilo que aprendi.

A todos que de alguma maneira me ajudaram a chegar nesse momento tão importante da minha vida.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

Madre Teresa de Calcutá

## RESUMO

Este trabalho busca facilitar e/ou aprimorar os estudos das funções polinomiais do 2º grau com o auxílio do aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra. Durante as aulas tidas como tradicionais, percebemos um certo grau de dificuldade dos alunos, principalmente quanto à interpretação e esboço do gráfico das funções polinomiais do 2º grau. Servindo como ferramenta catalisadora no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, o aplicativo fornece, com uma abordagem simples e eficaz, informações conceituais que são mais facilmente percebidas pelos alunos através da visualização gráfica. Essa visualização gráfica e a interação com o ambiente informatizado tornam a aprendizagem mais dinâmica, prazerosa e significativa para os alunos. No laboratório de informática, colocamos o GeoGebra como centro de estudo mostrando suas ferramentas, alguns comandos e funcionalidade. Aplicamos atividades relacionadas às funções polinomiais do 2º grau somadas ao GeoGebra e por fim, pedimos que respondessem a um questionário que evidenciou o impacto do aplicativo educativo em sala de aula. Os resultados alcançados foram a melhora no desempenho dos alunos no que diz respeito ao estudo do gráfico da função, os zeros da função, seu vértice e pontos de máximo ou mínimo, além do aumento no interesse pelo conteúdo ministrado e pelo aplicativo educativo também.

**Palavras-chave:** Funções, *GeoGebra*, Aprendizagem.



## ABSTRACT

This work aims to analyze the GeoGebra app as a tool in the development of learning polynomial functions of 2nd degree. During the so-called traditional classes, we notice that the students face difficulties, specially regarding the interpretation of second degree polynomial functions. As a tool to boom the development of the teaching-learning process, the app provides, with a simple and eficiente approach, conceptual information that are more easily noticed by students through graphic displays. Those graphic displays and the interaction with the digitalized environment make learning more dynamic, enjoyable, and meaningful to students. In the computer lab, the tools, commands and functions of the app were shown. Also, Geogebra activities related to second degree polynomial functions were applied and, at last, students were asked to answer a questionnaire that highligheted the impact of the educational app in the classroom. The results achieved were the improvement of students performance in relation to the study of funtion graphs, the function zeros, its vertexes and maximum and minimum values, as well as the increased interest on the subject taught ando n the educational app itself.

**Keywords:** Functions, *GeoGebra*, Learning.

## LISTA DE FIGURAS

|                 |    |
|-----------------|----|
| Figura 1 .....  | 30 |
| Figura 2 .....  | 31 |
| Figura 3 .....  | 32 |
| Figura 4 .....  | 32 |
| Figura 5 .....  | 33 |
| Figura 6 .....  | 33 |
| Figura 7 .....  | 34 |
| Figura 8 .....  | 35 |
| Figura 9 .....  | 36 |
| Figura 10 ..... | 37 |
| Figura 11 ..... | 38 |
| Figura 12 ..... | 42 |
| Figura 13 ..... | 43 |
| Figura 14 ..... | 44 |
| Figura 15 ..... | 45 |
| Figura 16 ..... | 46 |
| Figura 17 ..... | 47 |
| Figura 18 ..... | 47 |
| Figura 19 ..... | 48 |
| Figura 20 ..... | 49 |
| Figura 21 ..... | 50 |
| Figura 22 ..... | 51 |

## LISTA DE QUADROS

|               |    |
|---------------|----|
| Quadro 1..... | 19 |
| Quadro 2..... | 20 |
| Quadro 3..... | 21 |
| Quadro 4..... | 22 |

## SUMÁRIO

|   |            |
|---|------------|
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>   | <b>12</b>  |
| <b>JUSTIFICATIVA.....</b>   | <b>13</b>  |
| <b>OBJETIVOS.....</b>   | <b>15</b>  |
| <b>2.1. Objetivo Geral.....</b>   | <b>15</b>  |
| <b>2.2. Objetivos Específicos .....</b>   | <b>15</b>  |
| <b>2.3. Material e Metodologia.....</b>   | <b>15</b>  |
| <b>PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E OUTROS TEXTOS BASE</b>   | <b>17</b>  |
| <b>3.1. Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares<br/>    para o Ensino Médio. ....</b> | <b>17</b>  |
| <b>3.2. Sistemas de Avaliações Externas.....</b>  | <b>18</b>  |
| <b>FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU ATRAVÉS DA HISTÓRIA ...</b>  | <b>21</b>  |
| <b>FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU .....</b>   | <b>24</b>  |
| <b>5.1. Método Resolutivo das Funções Polinomiais do Segundo Grau..</b>                                       | <b>24</b>  |
| <b>APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA.....</b>   | <b>29</b>  |
| <b>6.1. Explorando os Menus e as Ferramentas do Software .....</b>  | <b>30</b>  |
| <b>6.2. Barra de Ferramentas .....</b>  | <b>31</b>  |
| <b>TRABALHANDO COM O GEOGEBRA EM SALA DE AULA.....</b>  | <b>40</b>  |
| <b>7.1. Utilizando o GeoGebra em Sala de Aula. ....</b>   | <b>41</b>  |
| <b>QUESTIONÁRIO.....</b>  | <b>58</b>  |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>   | <b>56</b>  |
| <b>ANEXO.....</b>   | <b>59</b>  |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>  | <b>601</b> |

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a discussão a respeito do processo de ensino aprendizagem, principalmente na matemática, tem sido grande alvo de estudo e debate, no que concerne à disciplina citada, novos caminhos tem sido descobertos e explorados como: a Modelagem Matemática, História da Matemática, Resolução de Problemas, “Softwares” Educativos dentre outros.

Entretanto a prática do ensino tradicional, onde o professor é detentor do conhecimento e o aluno é apenas um mero coadjuvante no processo de ensino aprendizagem, ainda é a forma mais comum de ensinar encontrada nas escolas em geral, fazendo com que o educando ache o conteúdo chato e difícil de ser entendido pois não conseguem relacionar o mesmo com seu cotidiano ou ver nele algo prático que ele possa usar no dia-a-dia, levando o aluno a se desestimular e não se interessarem pela matemática.

Também é fato que poucos livros didáticos trazem em si uma abordagem diferenciada em relação ao conteúdo e aos exercícios relacionados, o que torna esse processo ainda mais difícil.

Durante a apresentação do conteúdo de funções polinomiais do segundo grau, apresentamos aos alunos o *aplicativo* GeoGebra como ferramenta nesse processo de aprendizagem e percebemos que a visualização gráfica e comportamental da função se tornou muito mais fácil de ser compreendida e mais interessante para o aluno, colocamos também situações em que a função foi ou é utilizada no cotidiano como: na cobertura de quadras esportivas, cabos de pontes metálicas lançamento de projéteis entre outros.

## JUSTIFICATIVA

Com o advento das novas tecnologias outros métodos de ensino foram inseridos em sala de aula, um deles o uso de computadores, para a potencialização do processo de ensino aprendizagem, vem se destacando nas escolas como um todo. Entretanto, sua utilização ainda é pouco difundida na prática pedagógica, principalmente no que diz respeito ao uso do GeoGebra. Levando, portanto, aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, essa importante ferramenta que é o GeoGebra para a construção e consolidação do conhecimento das funções polinomiais do 2º grau. A função polinomial do segundo grau, tem um papel importante no cotidiano, como por exemplo na construção de antenas parabólicas ou antenas de TV a cabo que são feitas a partir da rotação de uma parábola, além de pontes e na arquitetura em geral.

Pretendemos levar ao aluno o uso de novas tecnologias em atividades de ensino como forma não só de facilitar, mas também de tornar a atividade mais dinâmica e prazerosa propondo uma ferramenta que possibilite e potencialize seus aspectos cognitivos. Porém não basta só colocar o educando de frente a um computador, é necessário que o professor também domine com eficiência e tenha clareza das ideias e quais objetivos deseja alcançar com determinada ferramenta como afirma BRANDÃO (2010), em *Informática na Educação e Educação Matemática*:

A reflexão sistemática sobre como o computador pode ser utilizado na dinâmica do processo educativo e sobre as medidas a se adotar, tanto por parte de professores quanto de alunos, para assegurar uma participação ativa neste processo, pode servir para minimizar as enormes confusões criadas por incertezas que não fazem senão aumentar os riscos de insucessos e de frustrações quando se projeta o uso de computadores no ensino da Matemática, por exemplo, uma vez que a velocidade das mudanças em curso nesta área impõe uma notável clareza de ideias.(Brandão, 2010)

Faz-se necessário o aperfeiçoamento dos professores, do seu papel nesse processo de ensino-aprendizagem, que envolvem as novas tecnologias e saber aquilo que é o objetivo principal dessa atividade, qual habilidade queremos que o educando desenvolva. Caso contrário teremos mais uma ferramenta que não está auxiliando, mas sim deixando o aluno com outra ferramenta para se

preocupar em aprender e ainda mais confuso, além de continuar achando esse processo difícil ou até mesmo chato.

A ferramenta GeoGebra é um aplicativo educativo que permite a utilização da **Geometria** e da **Álgebra**, esse programa foi desenvolvido em 2002 pelo austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter, professor e pesquisador na área de Informática aplicada à Educação Matemática da universidade de Salzburg na Áustria. Essa ferramenta nos permite tornar a visualização gráfica das funções mais simples e fácil de ser analisada.

Atualmente sabemos que existem diversos trabalhos e pesquisas, utilizando o aplicativo GeoGebra em várias áreas do conhecimento, tais como: física, química, biologia e nas engenharias. O aplicativo permite a visualização em terceira dimensão de modelos experimentais que possam ser projetados e em seguida confeccionados nos laboratórios das indústrias

O aplicativo está, ainda, disponível em diversos idiomas e é utilizado por milhões de usuários ao redor do mundo. Por se tratar de um software livre e de código aberto, qualquer usuário pode aprimorar o programa e criar novos comandos, menus e ferramentas. A contribuição de pesquisadores e estudiosos nos levou, por exemplo, a versão 3D, versão para o sistema ANDROID e menus para geometria hiperbólica.

Apesar das novas tecnologias estarem acessíveis a grande parcela da população e de facilitarem o processo de ensino-aprendizagem sua inserção ainda não está chegando de forma eficaz em sala de aula.

Contudo, percebemos que essas novas tecnologias facilitam e deixam o educando mais seguro quanto ao conteúdo aplicado em sala de aula. Iremos apresentar algumas atividades que foram desenvolvidas no laboratório de informática com o GeoGebra que permitiram ao educando investigar e explorar as Funções Polinomiais do Segundo grau de forma ativa tendo como suporte para esse trabalho a teoria da Tentativa e Erro. Esse método empírico prega que o indivíduo através de tentativas e erros faça averiguações de resultados e analise se os mesmos condizem com o esperado além de tornar o educando participante ativo no processo de ensino-aprendizagem. Esse método ainda levou o aluno a explorar a própria ferramenta GeoGebra o que vai auxiliá-lo em outras atividades.

## **OBJETIVOS**

### **2.1. Objetivo Geral**

Aplicar e analisar o ensino da função polinomial do segundo grau através da interação com o aplicativo GeoGebra em sala de aula.

### **2.2. Objetivos Específicos**

Apresentar o GeoGebra através de aula expositiva, como forma de contato inicial do aluno com o programa.

Fazer com que o aluno utilize o aplicativo GeoGebra e tenha ele como mais uma ferramenta de aprendizagem.

Facilitar o aprendizado do educando com o auxílio do aplicativo GeoGebra;

Promover uma interação mais dinâmica entre alunos e o conteúdo abordado;

Utilização de um questionário para avaliar o que foi desenvolvido em sala.

### **2.3. Material e Metodologia**

Utilizaremos como ferramenta de estudo um computador com o programa GeoGebra versão 5.0 que pode ser encontrado e feito download no site <https://www.GeoGebra.org/> além de aulas expositivas envolvendo a Equação Polinomial do 2º grau com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II ou 1º ano do Ensino Médio, o professor atuará como facilitador na aprendizagem da função polinomial do 2º grau, mas sem interferir nas soluções e resultados que por ventura venham a encontrar. Os alunos terão, por meio da investigação, que construir o conhecimento e buscar desenvolver habilidades para a conclusão do questionário que será aplicado.

Como sujeito de nossa dissertação selecionamos alunos do 9º ano do Colégio da Polícia Militar do Ceará General Edgard Facó. A seleção do sujeito



de nossa pesquisa foi feita tendo em vista o tema a ser abordado nesse ano pelos alunos, no caso, as funções polinomiais do segundo grau. Tendo em vista a dificuldade dos alunos em interpretar gráficos de quaisquer natureza, e principalmente os das funções, buscamos através do programa de geometria educativa GeoGebra dar continuidade ao conteúdo aprendido em sala de aula e servindo tanto como ferramenta dinâmica de aprendizagem, como ferramenta de potencialização do conhecimento já adquirido.

O ambiente de aplicação foi o laboratório de informática da própria escola, pois facilitava o acesso ao computador com o programa e, apesar de todas as escolas disporem de um laboratório de informática, poucas atividades que envolvem matemática são desenvolvidas nele.

Foram desenvolvidas atividades que pudessem levar o aluno a um maior conhecimento e domínio das funções polinomiais do segundo grau, em especial a construção e leitura do gráfico, além de outras ferramentas do GeoGebra.

Espera-se, depois da aplicação dessas atividades, que o aluno seja capaz de identificar, através do gráfico da função polinomial do segundo grau, os zeros da função, o vértice da parábola e o sinal do coeficiente  $a$ , visto que a parábola pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo, além de ser capaz de entender o que ocorre com o gráfico da função com a variação dos coeficientes da função.

Uma outra turma do 9º ano, também da mesma escola, não teve contato como GeoGebra, a fim de avaliarmos se a utilização do programa produz algum efeito positivo na aprendizagem dos alunos ou se ele serve somente como ferramenta expositiva a mais para o conteúdo.

## PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E OUTROS TEXTOS BASE

### 3.1. Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Segundo os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), as equações do segundo grau se enquadram no Quarto Ciclo, ou seja, o equivalente ao 8º e 9º anos. O conteúdo é abordado no bloco dos *Números e Operações* e a orientação é que sejam abordadas situações-problemas, em especial algo do cotidiano, para uma melhor compreensão do aluno.

De acordo com os PCN o aluno deve ter um determinado conhecimento algébrico e, com esse conhecimento, conseguir, através de um conhecimento de regras de resolução, interpretar e formular uma equação do segundo grau com o auxílio de uma variável, como vemos a seguir:

“Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação.” (Brasil, 1998, p. 84)

Vemos, portanto, que não basta somente o saber algébrico, necessita-se também de um conhecimento da língua portuguesa de como interpretar cada situação problema utilizando essas regras aprendidas em sala para solucionar de maneira mais segura e satisfatória, dando sentido as fórmulas aprendidas com as equações do segundo grau.

Esse bloco dos PCN ainda nos leva a pensar em situações problemas que leve o aluno a refletir sobre o resultado obtido, se é válido ou não, se faz sentido ou não como vemos nos parâmetros curriculares em Brasil (1998, p. 88).

*“Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.”*

Isso pode ser observado em uma situação problema que envolva tamanhos, áreas ou volumes em que na resolução de uma equação do segundo grau obtenhamos uma raiz positiva e uma raiz negativa, assim, como estamos tratando de grandezas positivas, não faz sentido um conjunto solução que tenha

uma raiz negativa e nesse tipo de situação o aluno deve ser capaz de analisar e interpretar essa determinada situação.

As Orientação Curriculares para o Ensino Médio estabelecem alguns pontos, sempre com a utilização de situações-problema a serem trabalhados e discutidos no conteúdo de funções tais como: ponto de máximo e ponto de mínimo, zero da função além da relação entre o “aspecto” gráfico e os coeficientes da função. Juntamente com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio que trata das funções quadráticas destacando que o conceito de função desempenha, também, papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos, tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento como a Física, a Geografia ou a Economia (BRASIL, 1999, p. 42).

### **3.2. Sistemas de Avaliações Externas**

Atualmente, além das avaliações internas, os alunos são, periodicamente, submetidos a diferentes avaliações externas, tais como: o SPAECE, o SAEB e o ENEM.

“O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), tem por objetivo avaliar as escolas públicas das redes estaduais e municipais da Educação Básica, desde a alfabetização até o ensino médio.” (SPAECE apresentação).

“O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), conforme estabelece a Portaria n.º 931, de 21 de março de 2005, é composto por dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc).” (Portal Inep)

“Criado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica.” (Portal Mec)

Esses sistemas de avaliações estão entre os de maior relevância dentro do contexto nacional, no caso do Enem e do Saeb, e estadual, no caso do SPAECE. A seguir, mostraremos como estes sistemas de avaliações exploram as funções e equações do segundo grau.

## Quadro da Matriz de Referência do SPAECE

| TEMA I: INTERAGINDO COM OS NÚMEROS E FUNÇÕES |  |
|--|--|
| Nº DESCRITOR                                 | DESCRITOR  |
| D7   | Resolver situação problema utilizando mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum com números naturais.  |
| D8   | Ordenar ou identificar a localização de números inteiros na reta numérica.   |
| D10  | Resolver problema com números inteiros envolvendo suas operações.  |
| D11  | Ordenar ou identificar a localização de números racionais na reta numérica.  |
| D12  | Resolver problema com números racionais envolvendo suas operações.   |
| D13  | Reconhecer diferentes representações de um mesmo número racional, em situação-problema.  |
| D15  | Resolver problema utilizando a adição ou subtração com números racionais representados na forma fracionária (mesmo denominador ou denominadores diferentes) ou na forma decimal. |
| D17  | Resolver situação problema utilizando porcentagem.   |
| D18  | Resolver situação problema envolvendo a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.  |
| D19  | Resolver problema envolvendo juros simples.  |
| D21  | Efetuar cálculos com números irracionais, utilizando suas propriedades.  |
| D24  | Fatorar e simplificar expressões algébricas.   |
| D25  | Resolver situação problema que envolvam equações de 1º grau.   |
| D26  | Resolver situação problema envolvendo equação do 2º grau.  |
| D27  | Resolver situação problema envolvendo sistema de equações do 1º grau.  |

QUADRO 1

## Quadro da Matriz de Referência do Saeb

| <b>III. Números e Operações/ Álgebra e Funções</b> |  |
|--|--|
| D14  | Identificar a localização de números reais na reta numérica.   |
| D15  | Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.                         |
| D16  | Resolver problema que envolva porcentagem.   |
| D17  | Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.   |
| D18  | Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.                                 |
| D19  | Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.  |
| D20  | Analisar crescimento/ decréscimo, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.                               |
| D21  | Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.  |
| D22  | Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.  |
| D23  | Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.                          |
| D24  | Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.                                |
| D25  | Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau. |
| D26  | Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.                                 |
| D27  | Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.                                    |

QUADRO 2

## Quadro de Competências e Habilidades do Enem

| <b>Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.</b>   |   |
|--|---|
| <b>19</b>  | Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.                |
| <b>20</b>  | Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.                       |
| <b>21</b>  | Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.                   |
| <b>22</b>  | Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. |
| <b>23</b>  | Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.            |
| <b>Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.</b> |   |

|    |   |
|----|---|
| 24 | Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.                       |
| 25 | Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.                                    |
| 26 | Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. |

QUADRO 3

Como podemos observar, as funções e equações polinomiais do segundo grau tem se tornado uma constante nas propostas de avaliações externas, demonstrando, assim, sua importância e praticidade dentro de situações-problema que abordam o conteúdo diretamente, como no descritor D26 do SPAECE, ou indiretamente, como na habilidade H19 Enem.

### FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU ATRAVÉS DA HISTÓRIA

É difícil dizer com certeza onde teve início o estudo e o desenvolvimento das funções do segundo grau. O estudo das funções polinomiais do segundo grau tem início nas resoluções das equações do segundo grau. Um dos primeiros indícios encontrados sobre essas equações datam do ano de 1650 a.C. no Egito. O documento foi encontrado na cidade de Luxor pelo egiptólogo Alexander Henry Rhind no ano de 1858. “O papiro de Ahmes, mais conhecido como papiro de Rhind, foi comprado no mercado da cidade e transferido ao museu britânico no ano de 1863.” (Zuin, Elenice de S. Lodron. 2013, p. 3)

Outro registro descoberto foi feito pelos babilônicos que tinham uma álgebra mais desenvolvida que os egípcios e resolviam as equações através de métodos semelhantes ao conhecidos hoje em dia. Como a maioria dos problemas eram de ordem geométrica não era dada importância a valores negativos nem tão pouco a coeficientes de equações negativos. Assim, eles distinguiram as equações em diferentes casos como os citados abaixo:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + q = px$$

Na equação do segundo grau do tipo  $x^2 + px + q = 0$ , com  $p$  e  $q$  positivos não teriam solução.

Porém, na Grécia os matemáticos Euclides e Diofanto foram quem mais contribuíram para o desenvolvimento das equações quadráticas, este com a obra *Arithmetica* e aquele com seus *Elementos*. Nos *Elementos* de Euclides há algumas construções que podem ser interpretada como equações do segundo grau, contribuindo de maneira mais simples. Diofanto contribuiu apresentando símbolos as equações, que até então eram representada de maneira discursiva, e algumas fórmulas como as que veremos a seguir.

| TIPO DE EQUAÇÃO | FÓRMULA RESOLUTIVA  |
|-----------------|---|
| $ax^2 + bx = c$ | $ax = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}$ |
| $ax^2 + c = bx$ | $ax = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$ |
| $ax^2 = bx + c$ | $ax = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$ |

Fórmulas de Diofanto

QUADRO 4

Na Índia temos o matemático Brahmagupta que deu a primeira solução geral para equações do segundo grau do tipo  $ax^2 + bx = c$ , que pode ser escrito pela fórmula:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Corroborando com essa ideia o famoso Bhaskara, afirmava que a regra que o mesmo utilizava e acabou levando seu nome, a “*Fórmula de Bhaskara*” é atribuído a outro matemático indiano conhecido por Sridhara, o curioso é que essa fórmula recebe o nome de Bhaskara somente aqui no Brasil.

O matemático árabe Al-Khwarizmi resolveu equações do segundo grau por meio da geometria utilizando a ideia de completar quadrados. Ele classificou

as equações em seis tipos e ainda apresentou fórmulas resolutivas para as mesmas.

Embora esses e outros grandes matemáticos tivessem colaborado bastante para o desenvolvimento das equações do segundo grau, ainda não tínhamos uma linguagem formal nem tão pouco universal. A partir do século XVI que se intensificaram os estudos voltados a desenvolver as equações quadráticas e foi nessa mesma época que o matemático francês François Viète que iniciou-se a Álgebra Simbólica e só então surgiu a forma geral que conhecemos nos dias de hoje, a conhecer  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Ao inglês William Oughtred é dado o destaque por nos ter generalizado a fórmula que utilizamos até os dias de hoje para encontrar as raízes da equação do segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com James Sylvester temos a noção de discriminante, que como o nome sugere, discrimina quantas raízes teremos na equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Albert Girard foi o responsável pelas relações entre os coeficientes e as raízes da equação do segundo grau;

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a};$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$



## FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Daremos início a definição da função polinomial do segundo grau, para tanto, tomaremos a definição do professor Elon Lages Lima (p. 114) : “Uma função:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se *quadrática* quando existem números reais  $a, b, c$  com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .” O autor chama a função polinomial do segundo grau de função *quadrática*, o que não interfere no entendimento da função, visto que é só uma questão de nomenclatura. Vale lembrar que caso o coeficiente  $a$  seja igual a zero não teremos uma função do segundo grau.

### 5.1. Método Resolutivo das Funções Polinomiais do Segundo Grau.

Para resolvermos uma esse tipo de função utilizaremos o método resolutivo, no qual obtemos o valor do discriminante ( $\Delta$ ), também chamado de delta, encontramos os zeros da função, que são suas raízes e o ponto de máximo e de mínimo dependentes do coeficiente  $a$ . Chamaremos os zeros da função de  $x'$  e  $x''$ .

✓ Caso  $a > 0$ , teremos a concavidade da parábola voltada para cima, e assim ponto de mínimo.

✓ Caso  $a < 0$ , teremos a concavidade da parábola voltada para baixo, e assim ponto de máximo.

O discriminante ( $\Delta$ ), nos indicará quantas raízes teremos na equação, o que equivale dizer quantos zeros teremos na função.

Quando  $\Delta > 0$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem dois zeros distintos, ou seja,  $x' \neq x''$ .

Quando  $\Delta = 0$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem dois zeros iguais ou um único zero real, ou seja,  $x' = x''$ .

Quando  $\Delta < 0$ , a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  não tem zeros reais.

Vale observar que o valor do coeficiente  $c$  da função será o ponto onde o gráfico da função interceptará o eixo OY.

Vejamos no exemplo a seguir.

**Exemplo 1:** Esboce o gráfico da função  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x' = \frac{2}{2} = 1$$

ou

$$x'' = -\frac{6}{2} = -3$$

Como  $a = 1$  temos a concavidade voltada para cima, portanto temos um ponto de mínimo. Para calcular o vértice temos as seguintes fórmulas:

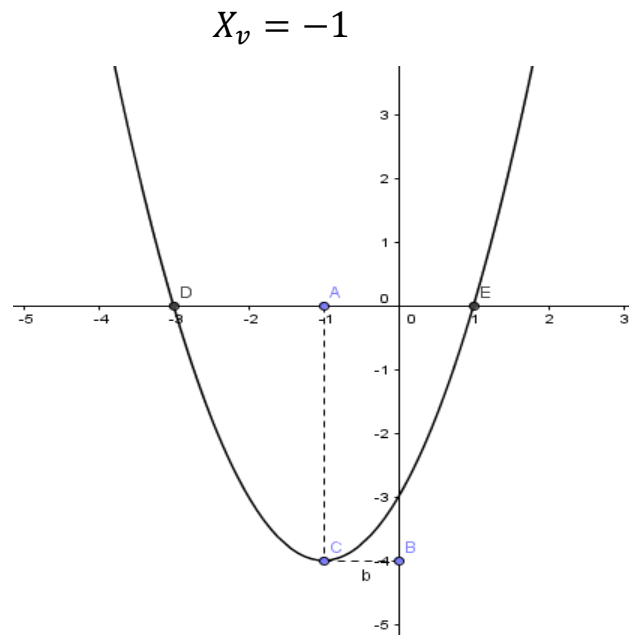
$$Y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$$

$$Y_v = -\frac{16}{4 \cdot 1}$$

$$Y_v = -4$$

$$X_v = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

$$X_v = -\frac{2}{2 \cdot 1}$$



**Exemplo 2:** Esboce o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ .

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 16 - 16$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x' = 2$$

e

$$x'' = 2$$

Como  $a = 1$  temos a concavidade voltada para cima, portanto teremos um ponto de mínimo.

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$$

$$Y_v = -\frac{0}{4.1}$$

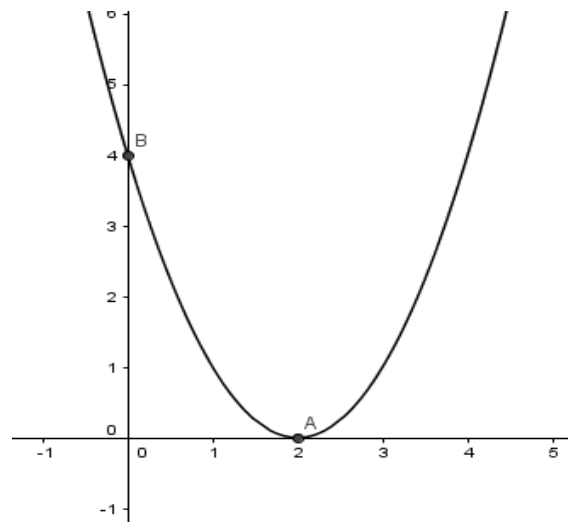
$$Y_v = 0$$

$$X_v = -\frac{b}{2.a}$$

$$X_v = -\frac{(-4)}{2.1}$$

$$X_v = \frac{4}{2}$$

$$X_v = 2$$



Observem que neste caso temos o zero da função coincidindo com o ponto de mínimo. Isso ocorre quando o  $\Delta = 0$ .

**Exemplo 3:** Esboce o gráfico da função  $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ .

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 4^2 - 4.(-1).(-5)$$

$$\Delta = 16 - 20$$

$$\Delta = -4$$

Nesse caso, com  $\Delta < 0$ , o gráfico não interceptará o eixo OX, pois não existem raízes reais.

Como  $a = -1$  temos a concavidade voltada para baixo, portanto temos um ponto de máximo.

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot a}$$

$$Y_v = -\frac{(-4)}{4 \cdot (-1)}$$

$$Y_v = \frac{4}{-4}$$

$$Y_v = -1$$

$$X_v = -\frac{4}{2 \cdot (-1)}$$

$$X_v = -\frac{4}{-2}$$

$$X_v = 2$$

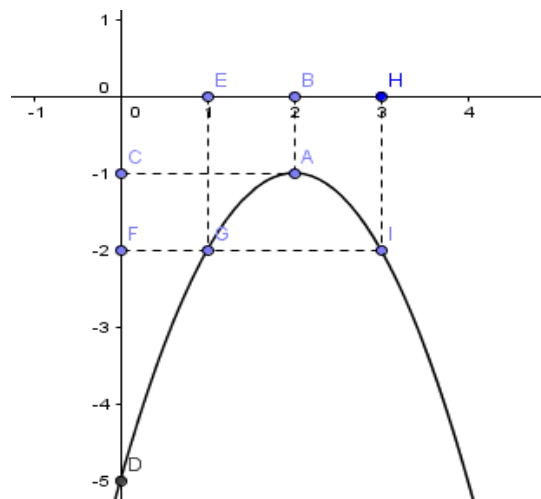
Como nesse caso não temos os zeros da função, convém tomar dois pontos vizinhos ao  $X_v$  para substituir na função e assim, ter um esboço mais seguro. Logo tomemos os pontos  $x = 1$  e  $x = 3$ .

$$f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 5$$

$$f(1) = -2$$

$$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 5$$

$$f(3) = -2$$



## APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Hoje em dia, algumas plataformas já servem de auxílio no ensino da matemática. Por meio das novas tecnologias é possível desenvolver e aplicar de forma mais dinâmica o processo de ensino-aprendizagem. O uso de ambientes informatizados no ensino da matemática, embora ainda tímido, vem se tornando uma alternativa diferenciada para melhorar o desempenho dos alunos e romper obstáculos formados ao longo da vida acadêmica, principalmente no que diz respeito ao ensino básico.

“Os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem.” (Gravina, Santarosa, 1998, pág. 8)

Ou ainda segundo Hebenstreint (1987 apud Gravina; Santarosa, 1998, pág. 8)

“o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos ‘concreto-abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais.”

Como podemos observar a ajuda computacional serve como meio interativo de facilitação de aprendizagem, em especial por possibilitar as ações e reações do aluno frente ao ambiente dinâmico.

Dentro desse ambiente dinâmico e interativo é que vamos explorar o aplicativo educativo GeoGebra, a fim de que a teoria aprendida em sala de aula seja alicerçada com a ajuda do aplicativo, visto que a manipulação do programa pelo aluno com a orientação do professor desenvolverá habilidades que servirão para estruturar o prévio conhecimento já em sala.

Para que um *software* promova realmente a aprendizagem deve estar integrado ao currículo e às atividades de sala de aula, estar relacionado àquilo que o aluno já sabe e ser bem explorado pelo professor. O computador não atua diretamente sobre os processos de aprendizagem, mas apenas fornece ao aluno um ambiente simbólico onde este pode raciocinar ou elaborar conceitos e estruturas mentais, derivando novas descobertas daquilo que já sabia. (Bonilla, 1995, pg.68).

Dessa forma o computador servirá de catalizador no processo de ensino-aprendizagem, sendo um meio e não um fim. O GeoGebra tornará possível a descoberta e/ou o desenvolvimento de diferentes habilidades do educando, tornando-o um integrante ativo na construção de sua aprendizagem, um ideário

almejado que já existe a algum tempo, porém difícil de ser posto em prática, através da descoberta, observação e interação com o ambiente virtual.

A seguir, apresentaremos algumas ilustrações da Barra de Ferramentas do software GeoGebra em sua versão 5.0, dado a sua importância no uso do software.

## 6.1. Explorando os Menus e as Ferramentas do Software

### Tela Inicial do programa

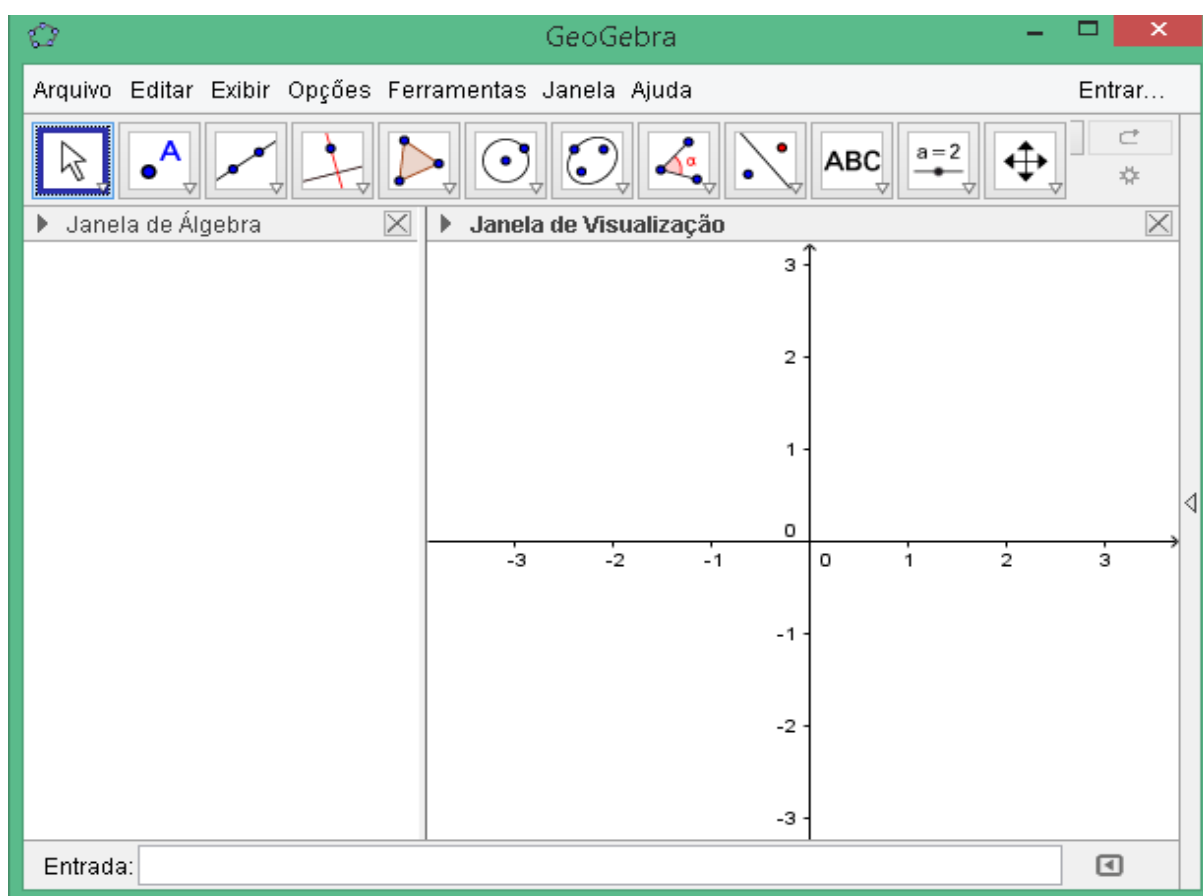


Figura 1

Podemos observar na figura 4 uma Barra de Menu com sete opções; uma Barra de Ferramentas, também podendo ser chamada de “janelas”, com doze ferramentas, sendo cada ferramenta subdividida em outras; uma Janela de Álgebra, onde os comando algébricos serão mostrados; uma Janela de Visualização, onde observaremos o gráfico e um campo de entrada onde

digitaremos a função desejada; além do menu “Entrar...” localizado no canto superior direito, que levará o usuário a se cadastrar ou a se “*logar*” através de alguma conta que ele já possua como: Facebook, Google, Microsoft e etc.

No GeoGebraTube, um suporte na rede mundial de computadores desenvolvido pela GeoGebra.org, o usuário terá acesso a diversos materiais de diferentes pessoas do mundo, onde poderá trabalhar, estudar e até interagir com eles. Na Barra de Menus, encontram-se algumas opções já conhecidas dos usuários de computadores tais como: Arquivo – Novo, Abrir, Gravar, Editar – Desfazer, Refazer, Copiar, Colar e Selecionar Tudo. Nos outros menus é onde aparecem as novidades para os usuários, tais como: Exibir – Janela de Álgebra, Planilha, Janela CAS, Opções – Arredondamento, Tamanho da Fonte, Idioma, Ferramentas – Configurar Barra de Ferramentas, Criar Nova Ferramenta e Ajuda – Tutoriais, Manual e Fórum GeoGebra. Sendo que grande parte dessas ferramentas possuem teclas de atalho que facilitam o acesso do usuário mais habituado com o programa.

## 6.2. Barra de Ferramentas



Figura 2

A Barra de Ferramentas é uma das barras mais utilizadas do programa e é através dela que temos acesso a uma das partes mais interessantes do software, as diversas possibilidades de figuras que podem ser observadas na Janela de Visualização.

Os ícones serão enumerados da esquerda para a direita num total de doze janelas, sendo que alguns deles podem ser representados, também, na forma algébrica, bastando digitar a expressão correspondente na Janela de Álgebra.

Explorar essas ferramentas dará ao aluno uma maior interação com o software e segurança na realização das atividades propostas.



Apresentaremos a seguir essas ferramentas mostrando sua principal função dentro do programa.

### 6.2.1. Ferramenta Mover

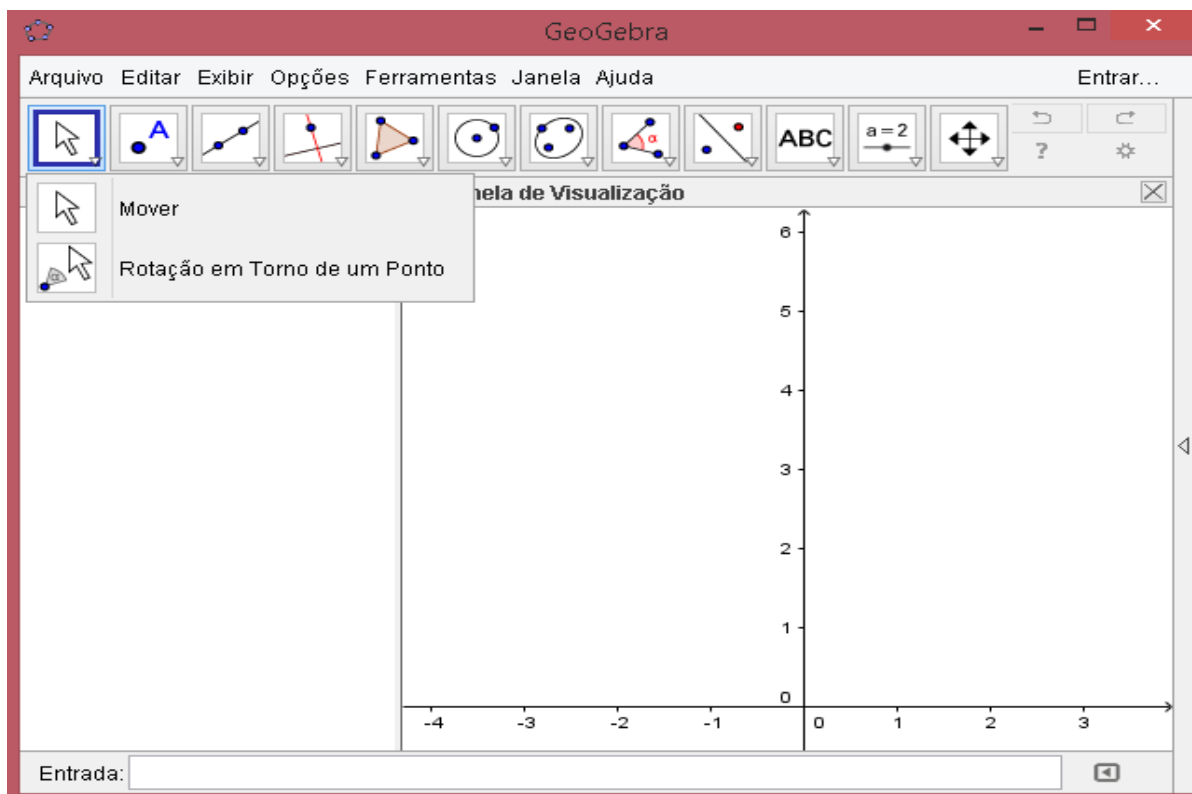


Figura 3

Ao clicar com o cursor sobre o triângulo de qualquer botão da barra de ferramentas e escolher uma das opções disponíveis, a ferramenta escolhida ficará marcada como acesso principal facilitando um possível novo acesso.

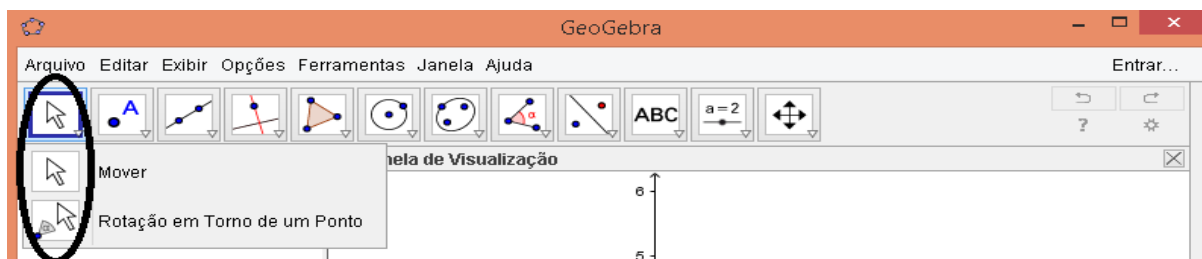


Figura 4



Figura 5

Como podemos observar nas figuras 6 e 7 essa mudança facilita o acesso tornando a utilização da ferramenta mais prática e rápida.



**Mover:** Com esta ferramenta pode-se selecionar, mover e manipular objetos. É uma das ferramentas mais utilizadas do programa. Também pode-se selecioná-la, apertando a tecla “esc” do teclado.

### 6.2.2. Ferramenta de Pontos.

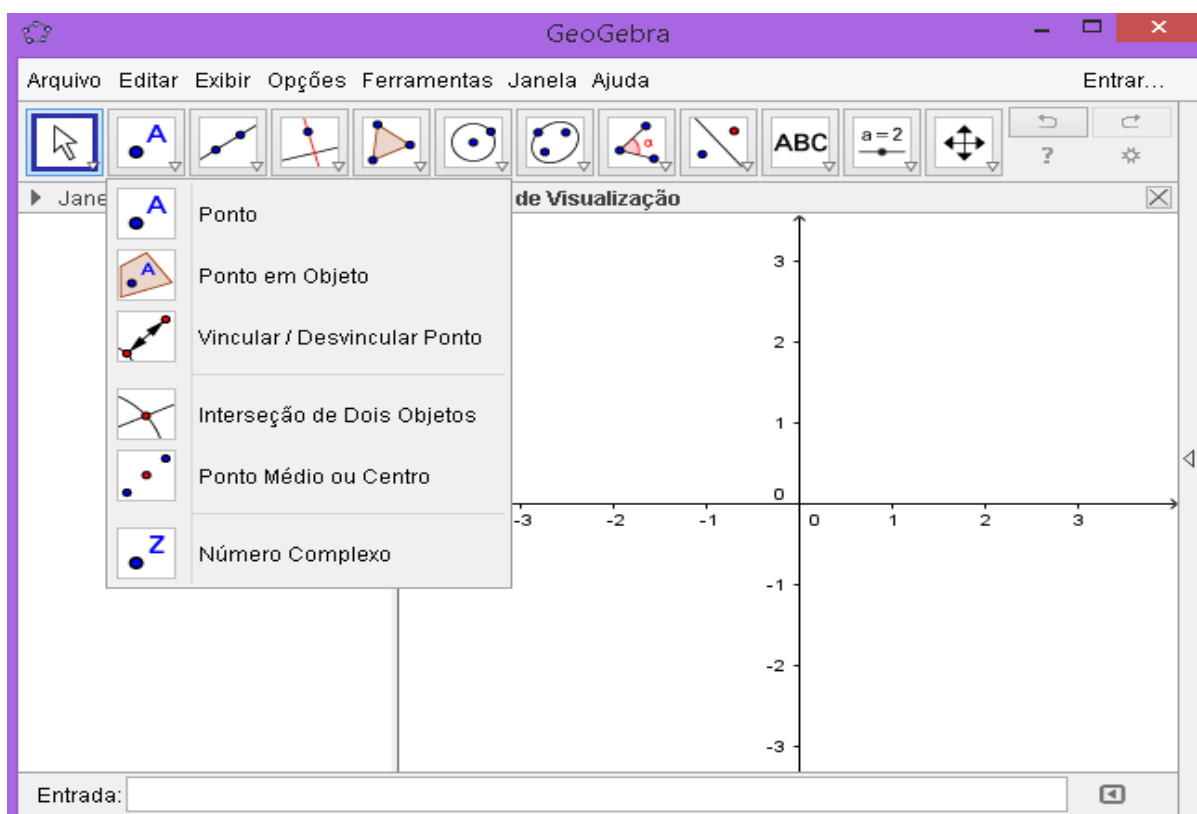


Figura 6



**Ponto:** Cria um ponto em um espaço livre, em um objeto ou em uma interseção. No GeoGebra a rotulação é automática, ou seja, ao criar um

ponto, automaticamente ele recebe um nome ou um rótulo. Essa nomeação se dá usando as letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C).



**Interseção com Dois Objetos:** Com essa opção pode-se explicitar os pontos de interseção entre dois objetos. Para utilizar essa ferramenta, você poderá pontar o cursor diretamente sobre a interseção dos objetos ou clicar sucessivamente sobre cada um dos dois objetos aos quais se deseja mostrar o ponto de interseção.

### 6.2.3. Ferramenta de Retas

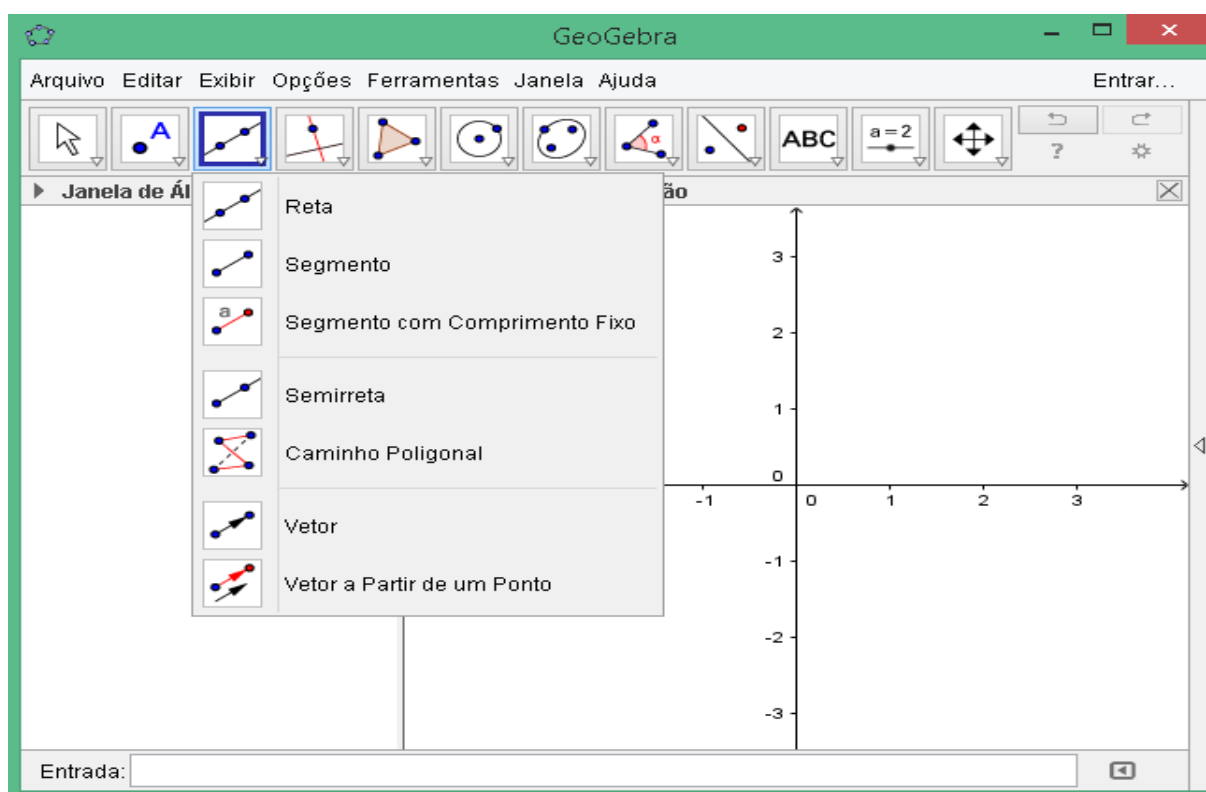


Figura 7



**Reta:** Ativando esta ferramenta, pode-se criar uma reta que passa por dois pontos. Se os pontos já estiverem na área gráfica, basta clicar sobre eles seguidamente. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta em questão ativada.

### 6.2.4. Ferramenta de Retas Especiais

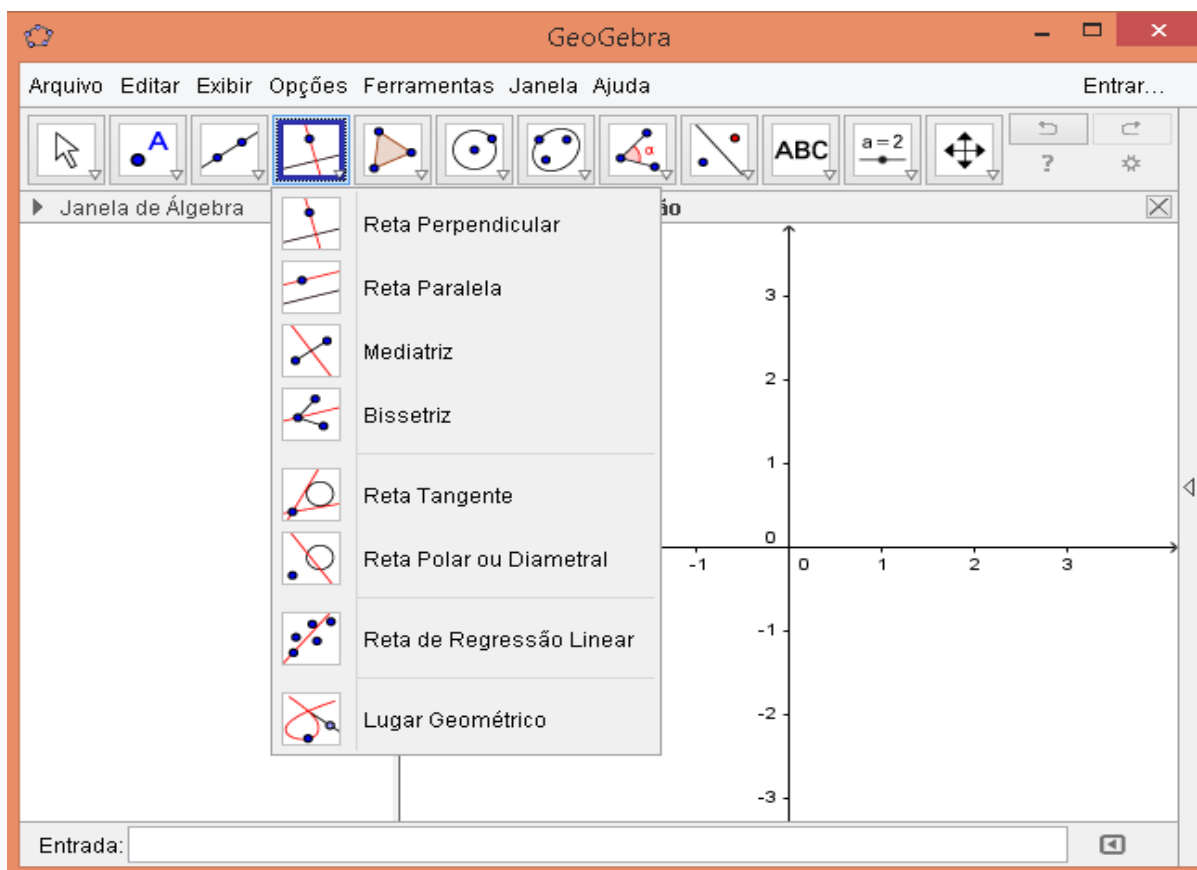


Figura 8



**Reta Perpendicular:** Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, você deverá clicar sobre um ponto e sobre uma direção (naturalmente representada por qualquer semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono).



**Reta Mediatriz:** Esta ferramenta constrói uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento. Caso os pontos ou o segmento já estejam na área gráfica, pode-se criar uma mediatriz, clicando sobre o segmento ou sobre os dois pontos que o determina. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta ativada.



**Lugar Geométrico:** Esta ferramenta constrói automaticamente o lugar geométrico descrito pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc.) ao longo de uma trajetória.

### 6.2.5. Ferramenta de Cônicas

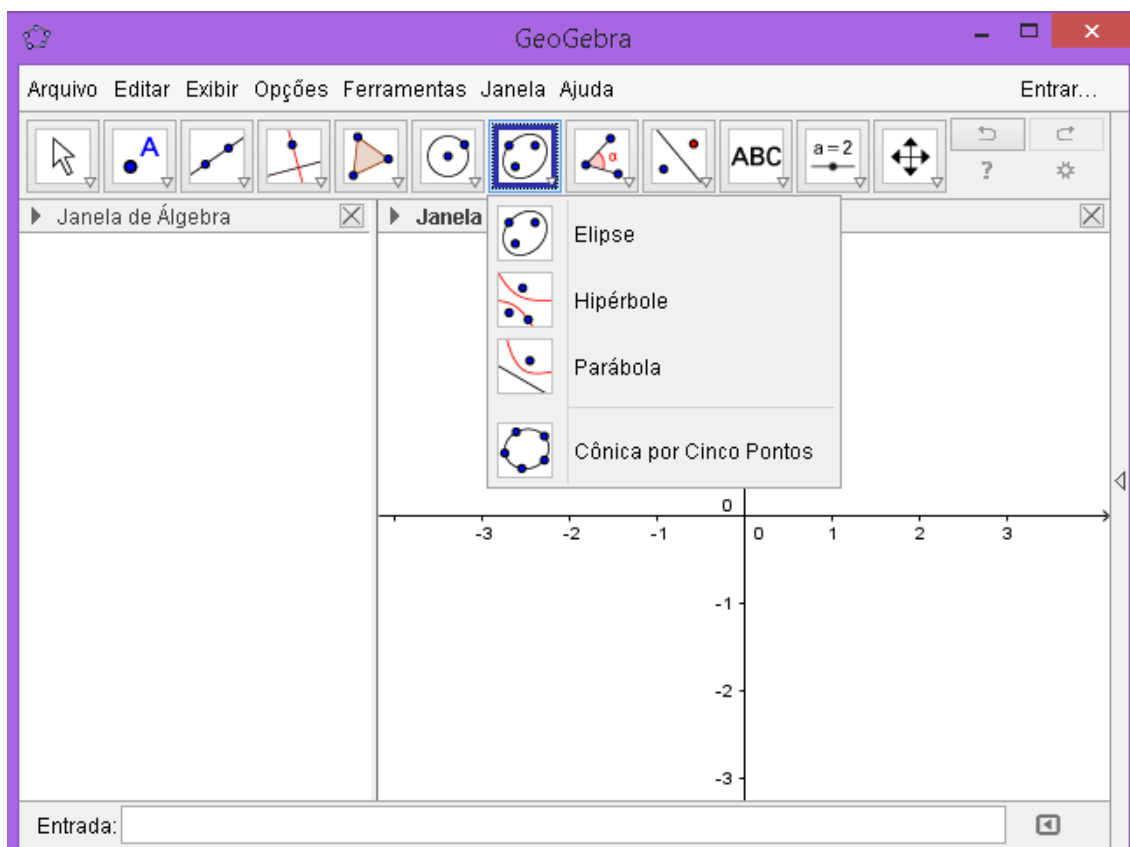


Figura 9



**Parábola:** Esta ferramenta constrói um parábola usando um ponto e uma reta diretriz.

### 6.2.6. Ferramenta de Objetos Dinâmicos

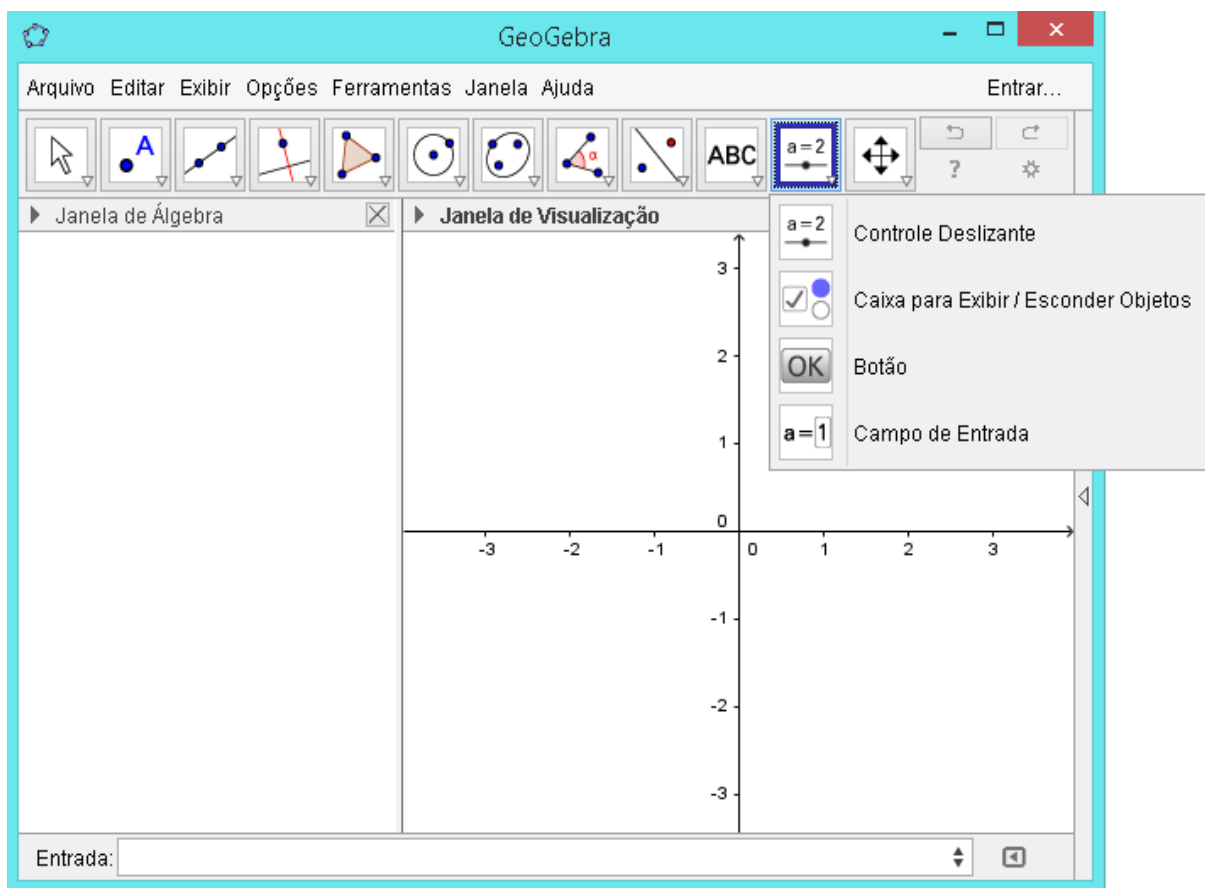


Figura 10



**Controle Deslizante:** É um pequeno segmento com um ponto que se movimenta sobre ele. Com esta ferramenta é possível modificar, de forma dinâmica, o valor de algum parâmetro.



**Campo de Entrada:** Esta ferramenta nos permite inserir um campo de texto para os objetos na área gráfica.

### 6.2.7. Ferramenta Gerais

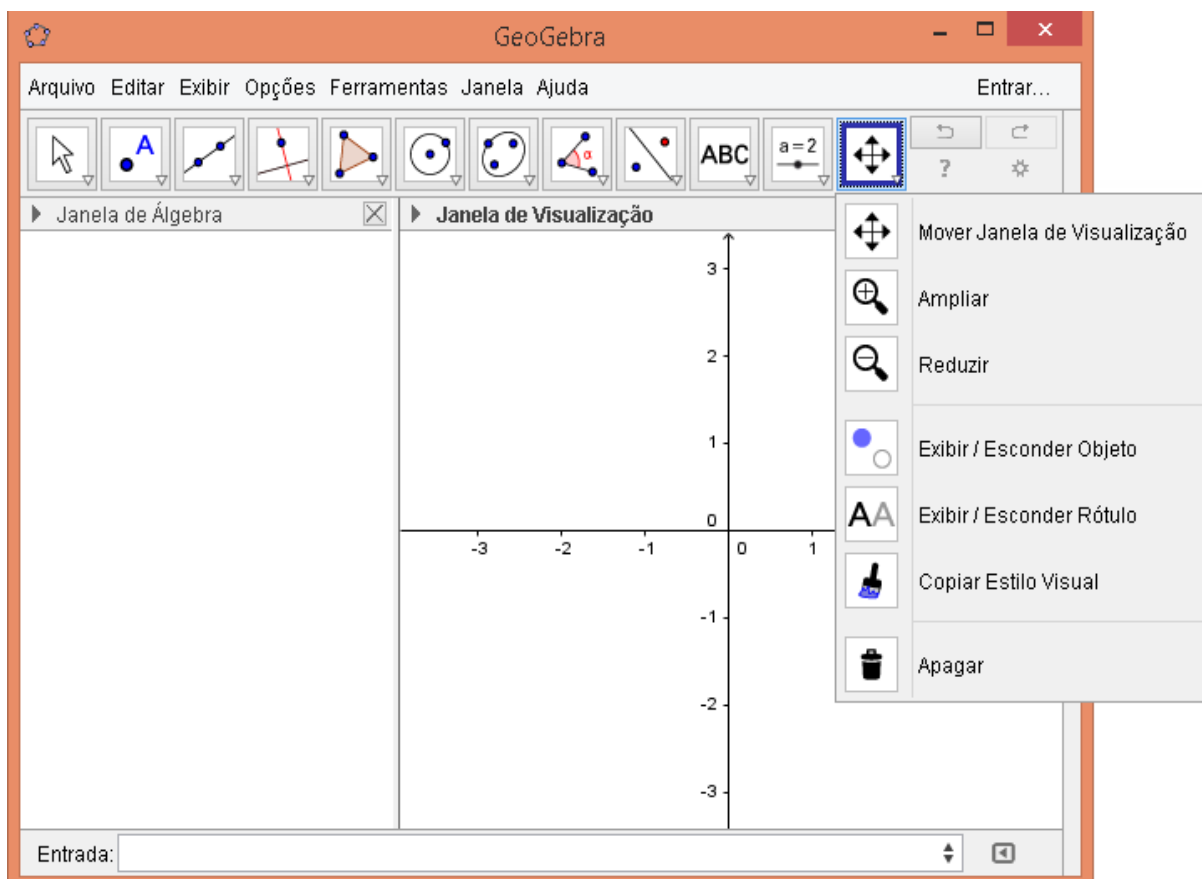


Figura 11



**Mover Janela de Visualização:** Com esta ferramenta, pode-se mover o sistema de eixos, bem como os objetos nele contidos. É ideal para se fazer ajustes com relação a posição dos objetos exibidos na janela de visualização.



**Exibir / Esconder Objeto:** Com esta ferramenta, pode-se ocultar objetos. Para isso, após selecionar a ferramenta, deve-se clicar sobre o objeto que deseja-se ocultar. Ele ficará destacado. Após isso, selecione outra ferramenta qualquer ou aperte o ESC do **teclado**. O objeto ficará oculto. Pode-se também exibir os objetos que estão ocultos.

De posse de algumas das ferramentas do GeoGebra, e com uma visão geral sobre cada uma delas, o aluno pode, na plataforma, interagir com as funções polinomiais do segundo grau de modo a observar o seu comportamento gráfico, verificar os zeros da função e identificar seu ponto de máximo ou de

mínimo. O aluno, pode ainda, fazer variar qualquer coeficiente da função e verificar o que ocorre com o gráfico, dessa forma ele pode definir para que serve cada coeficiente, dando mais sentido ao conteúdo aprendido em sala de aula, que é o alicerce desse trabalho.



## TRABALHANDO COM O GEOGEBRA EM SALA DE AULA

A pesquisa de campo foi desenvolvida em uma escola da rede estadual de ensino do estado do Ceará, Colégio da Polícia Militar do Ceará General Edgard Facó, com turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II e os mais variados níveis de alunos.

Durante a realização da pesquisa foi apresentado e desenvolvido em sala de aula a teoria e os exercícios do conteúdo abordado no 9º ano, Funções Polinomiais do 2º Grau, ou simplesmente Função polinomial do 2º grau ou Função Quadrática. A maioria dos livros didáticos são organizados como o livro adotado pela escola, Projeto Telaris Matemática 9º Ano – Matemática do autor Luiz Roberto Dante, isto é, apresenta-se primeiramente as equação do 2º grau, seguindo uma ordem cronológica, visto que os alunos já tiveram contato com as equações do 1º grau desde o 7º ano, alguns métodos de resolução para a obtenção de suas raízes, requerem um pouco mais de habilidade com a matemática, que é o caso do Método de Completar Quadrados do matemático indiano Al-Khowarizmi.

Outra forma de resolver as equações do 2º grau é através do Método Resolutivo, erroneamente chamado de Fórmula de Bháskara, este, por envolver duas fórmulas que os alunos podem facilmente decorá-las, torna-se o mais utilizado, mesmo que as fórmulas não façam nenhum sentido para boa parte deles.

Depois que os alunos já sabem resolver as equações, começam a ser introduzidas as funções do 2º grau, nesse momento são apresentados os zeros da função, a concavidade da parábola, seu ponto de máximo ou mínimo, vértice da parábola e o esboço do gráfico. É apresentado, também, outras duas fórmulas para a obtenção do vértice da parábola, com isso é gerado no meio dos alunos mais uma preocupação em decorar mais fórmulas, que mais uma vez podem não fazer sentido para a grande maioria deles.

Mesmo com essas dificuldades o aluno, por meio da repetição das fórmulas em exercícios feitos em sala e em casa, acaba aprendendo passos para a obtenção da solução para os exercícios, no entanto percebe-se que ao mudar os exercícios, ditos diretos, para exercícios contextualizados o aluno não

sabe qual fórmula utilizar, pois não aprendeu realmente para que serve ou o que representa aquele determinado código.

Após toda essa problematização em sala de aula os alunos foram levados ao laboratório de informática da escola onde foram apresentados ao software educativo GeoGebra.

### 7.1. Utilizando o GeoGebra em Sala de Aula.

No laboratório de informática, todos os alunos tiveram o primeiro contato com o software através dessa aula. Apesar de estarem totalmente familiarizados com o mundo digital, eles estão restritos às redes sociais, jogos online e similares, ao passo que o contato com softwares educacionais é quase inexistente, sendo exemplificado através do total desconhecimento da ferramenta dinâmica de aprendizagem GeoGebra por parte dos alunos envolvidos.

Mostramos como criar uma parábola utilizando o GeoGebra, sem necessariamente ter uma função polinomial do 2º grau, através da sua definição. Vejamos a definição de parábola,

Definição: Dados uma reta  $r$  e um ponto  $F$  de tal modo que  $F$  não esteja em  $r$ , a parábola será o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que a distância de  $P$  até  $F$  seja igual a distância de  $P$  até  $r$ . A reta perpendicular à reta diretriz passando por  $F$  será chamada de eixo da parábola e o ponto  $V$ , que é o ponto médio do segmento com extremidades em  $F$  e na intersecção da diretriz com o eixo da parábola, será chamado de vértice.

Após a definição veio a parte prática como segue abaixo



Primeiramente, utilizando a ferramenta **Ponto** marcamos dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  na Janela de Visualização que definirá a reta diretriz  $r$ , em seguida marcamos outro ponto que não pertence a reta diretriz que chamaremos de  $F$ , pois será nosso foco.

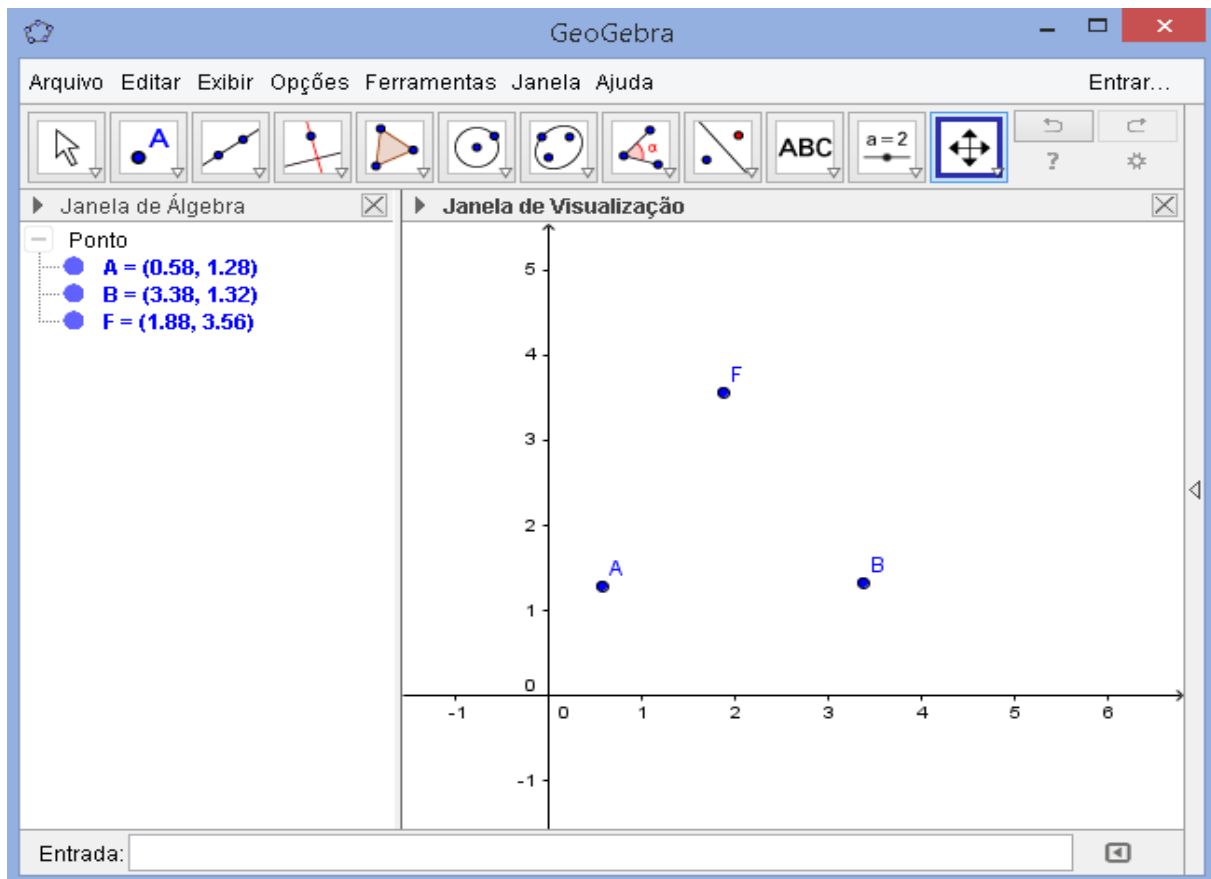



Figura 12

Agora, selecionando a ferramenta  **Reta** selecionamos os pontos **A** e **B** e construímos a reta diretriz ***r***.

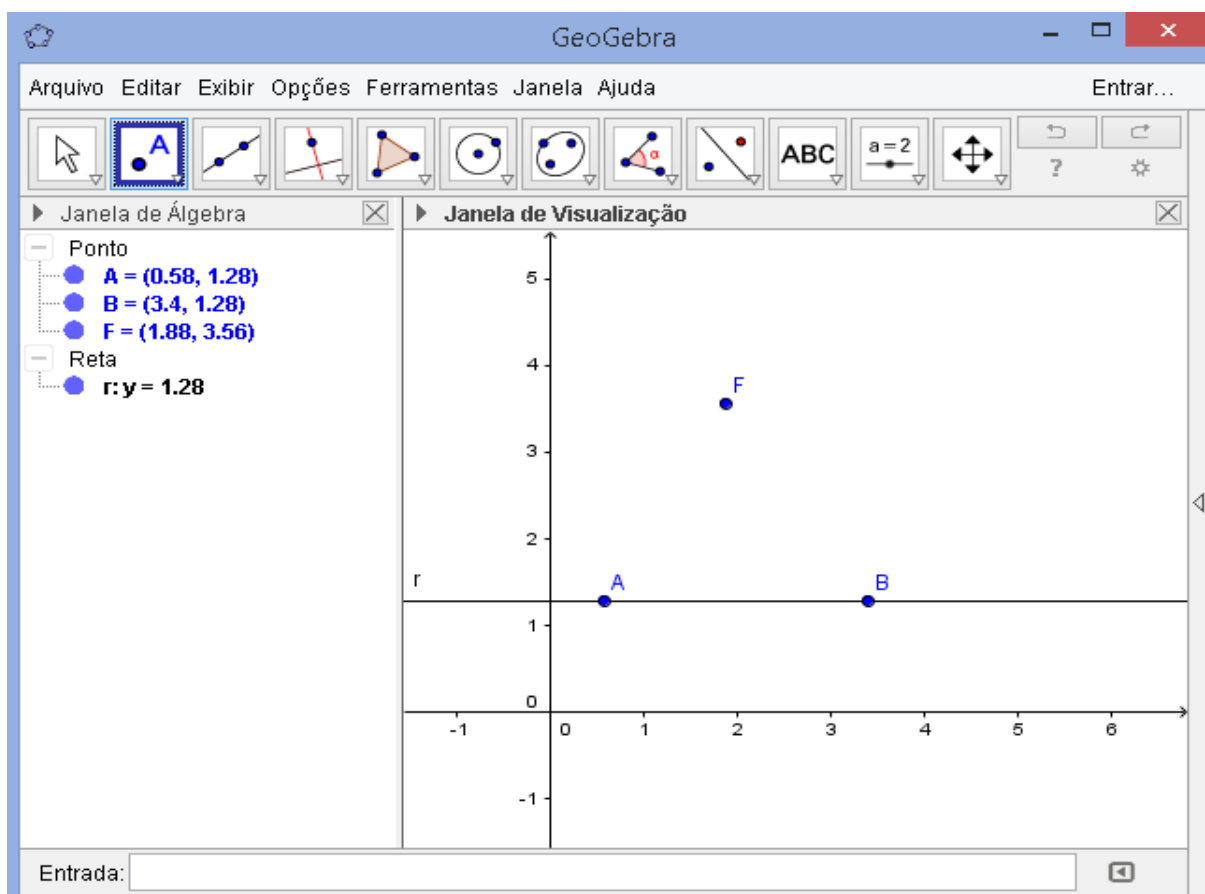




Figura 13

Novamente com a ferramenta  **Ponto**, marcar um ponto sobre a reta diretriz  $r$  e por esse ponto traçar uma reta  $s$  perpendicular à reta diretriz utilizando a ferramenta  **Reta Perpendicular**.

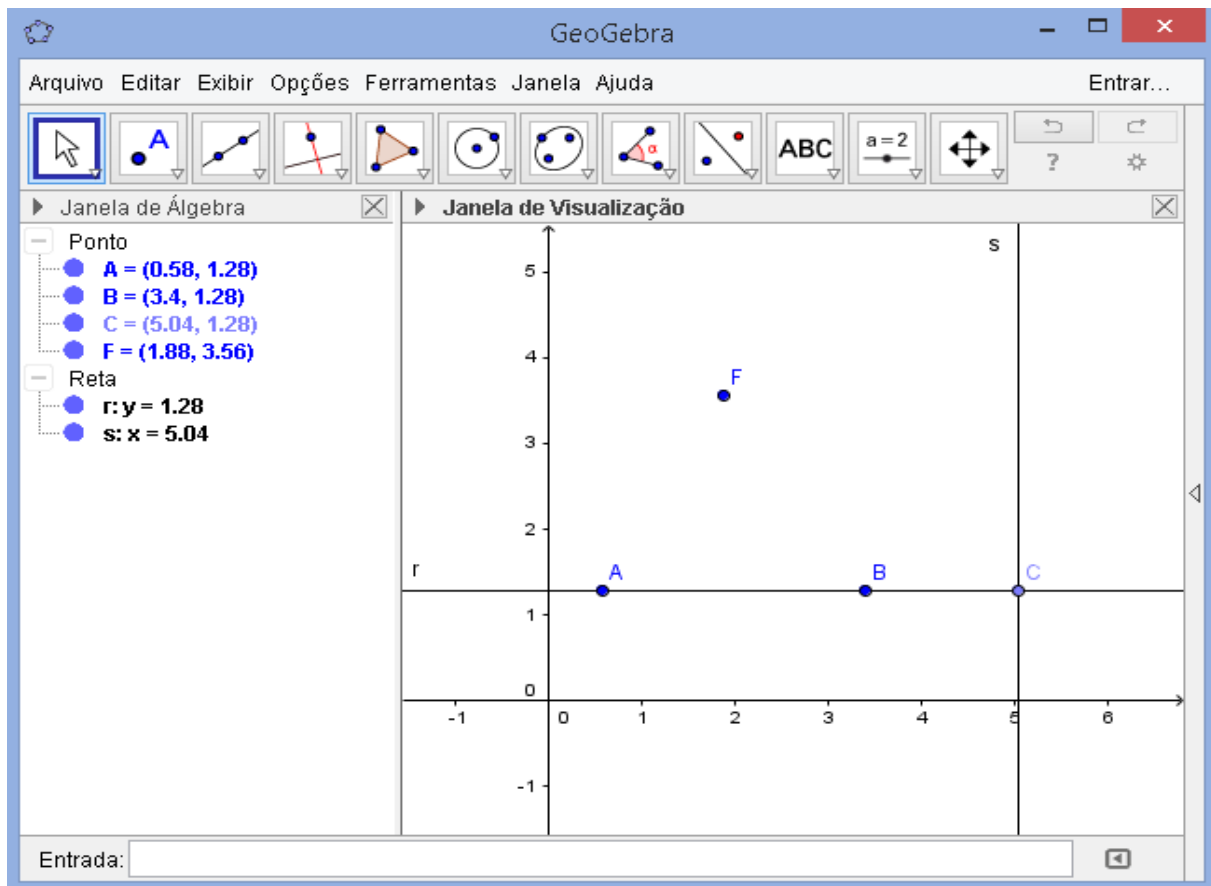



Figura 14

Para traçar o ponto que seja equidistante de  $F$  e da diretriz  $r$  selecione

a ferramenta  **Mediatriz** entre o foco  $F$  e o ponto  $C$ , utilizando ainda a

ferramenta  **Interseção de Dois Objetos** encontramos o ponto  $P$  desejado.

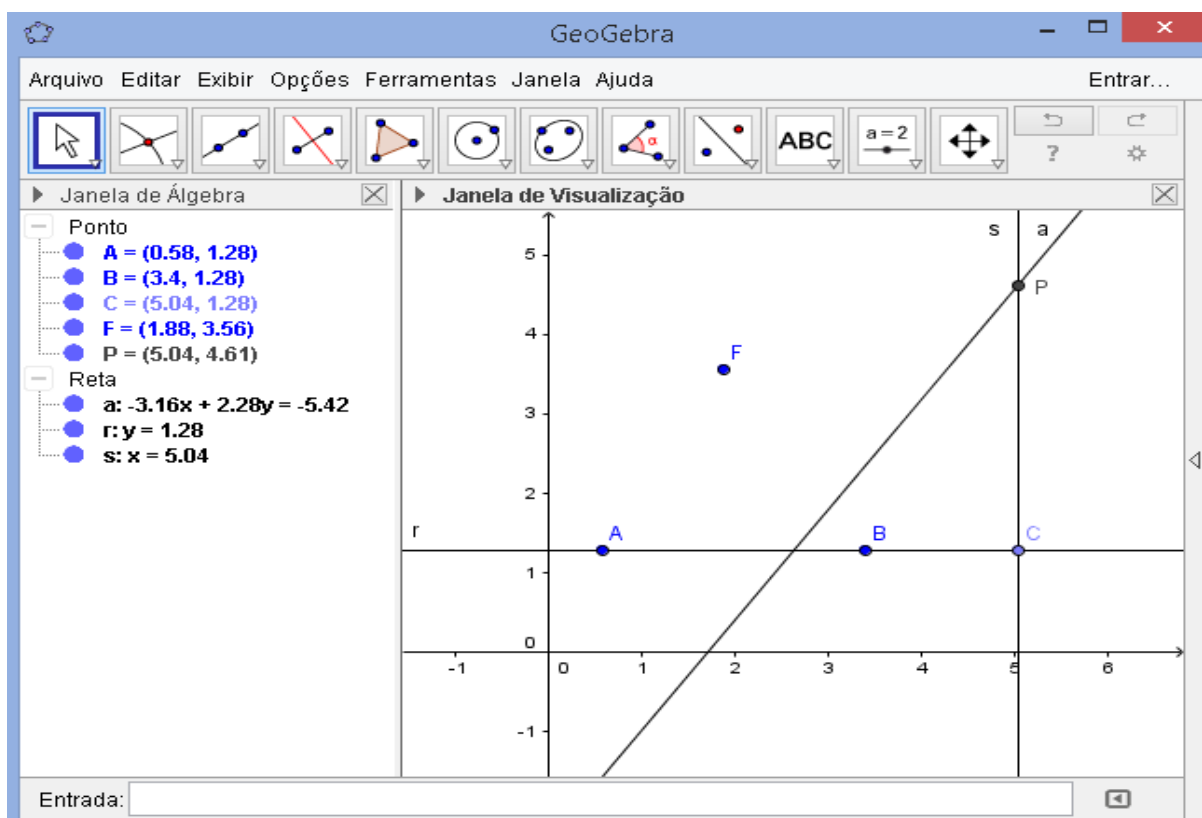


Figura 15

Ao movimentar o ponto  $C$  percebemos que o ponto  $P$  percorre um caminho mantendo a propriedade de ser equidistante do ponto  $F$  e da reta diretriz  $r$ . Esse conjunto de pontos é o que chamamos de parábola.



Agora, basta utilizar a ferramenta **Lugar Geométrico** e então será mostrada a parábola com a possibilidade de movimentar o ponto  $C$  e observar como se move a reta mediatriz e o ponto  $P$ .

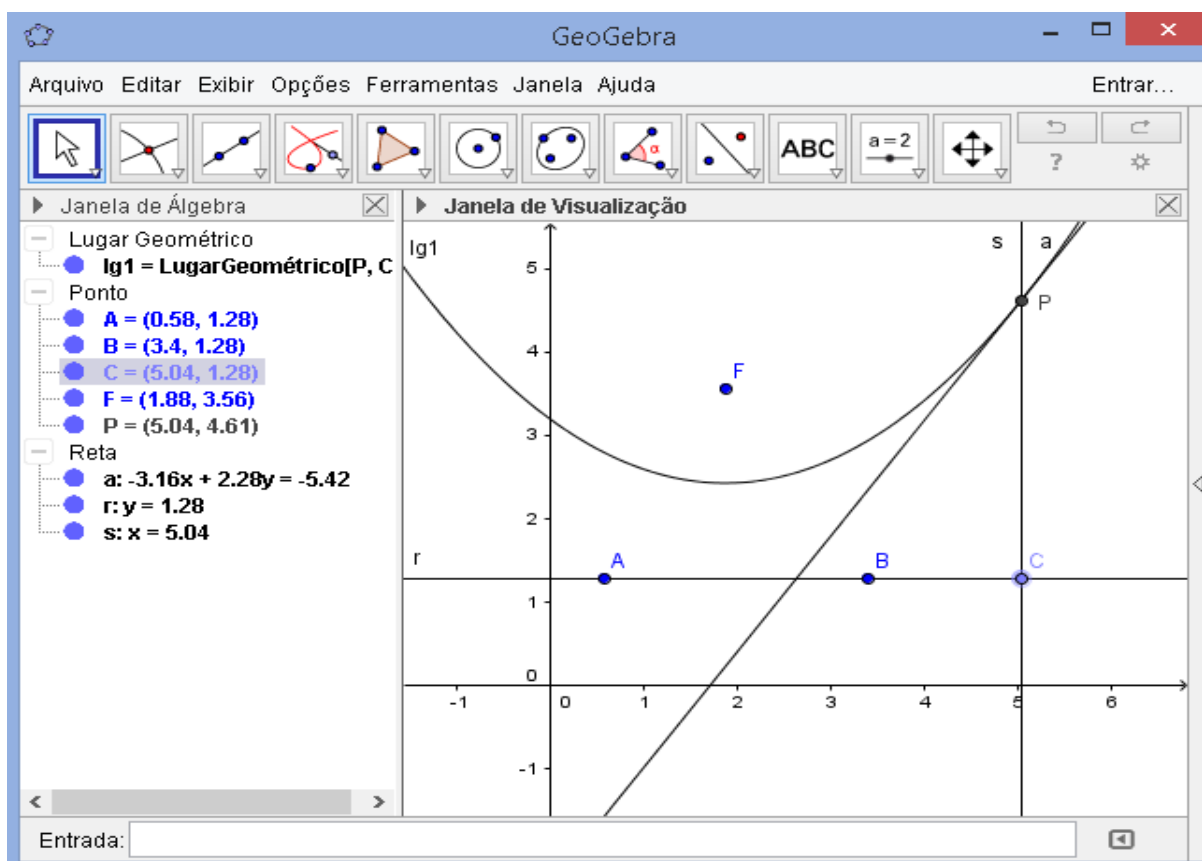


Figura 16

Depois dessa apresentação da construção da parábola com a utilização do software, iniciou-se o trabalho com a exposição gráfica das funções polinomiais do 2º grau. Iniciamos apresentando o gráfico sem valores definidos para os coeficientes da função, mostrando através da Caixa de Entrada os comandos para a construção de uma função polinomial do 2º grau qualquer.



Figura 17



Figura 18

Continuando com a atividade, agora com os alunos como parte ativa do processo de aprendizagem, foi pedido que eles colocassem o cursor sobre o Campo de Entrada e digitassem a função

$$ax^2 + bx + c$$



também foi explicado que onde houvesse um sinal de multiplicação teria que ser inserido o símbolo (\*) e onde houvesse uma potência o sinal (^), assim a função foi, na verdade, digitada da seguinte maneira

$$a*x^2+b*x+c$$

Quando a função foi exposta, de maneira automática, todos os alunos indagaram o porquê do asterisco ao invés do ponto, tão habitual no dia a dia, e também o porquê do acento circunflexo como símbolo para colocar um expoente. Respondemos que era uma particularidade do software.

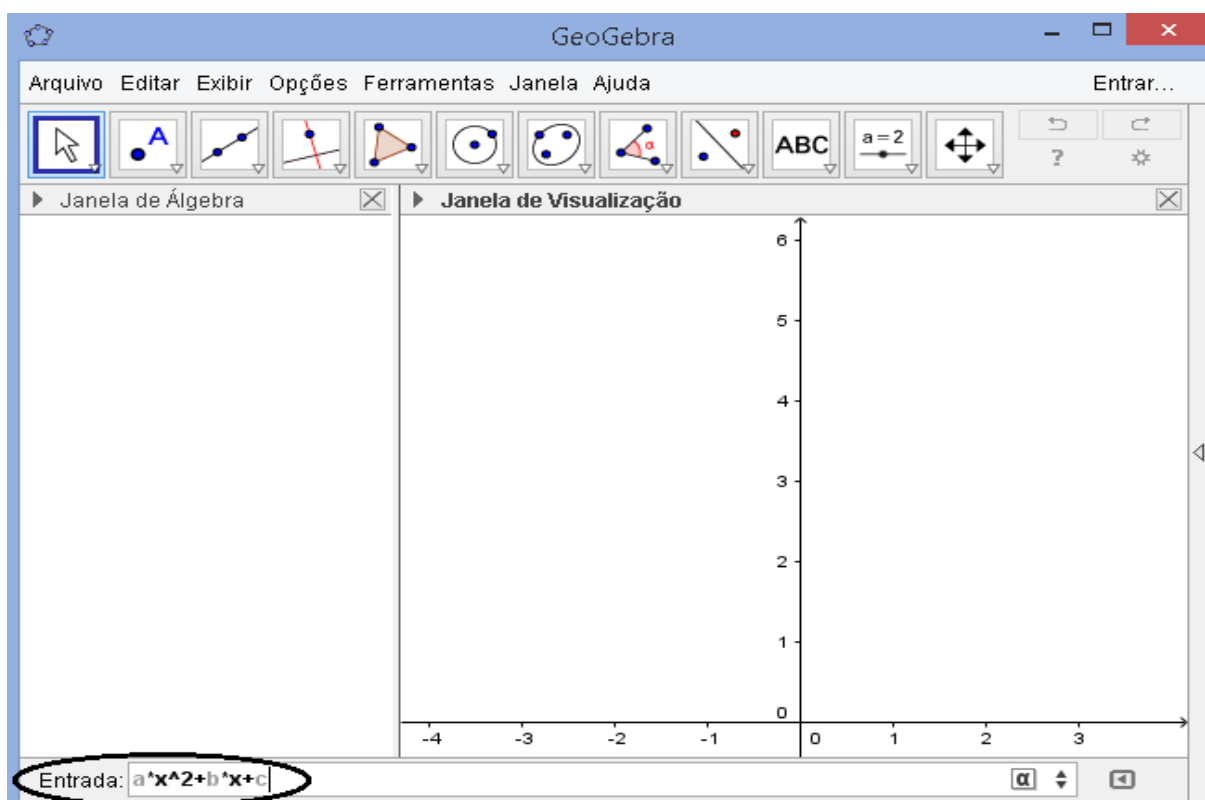
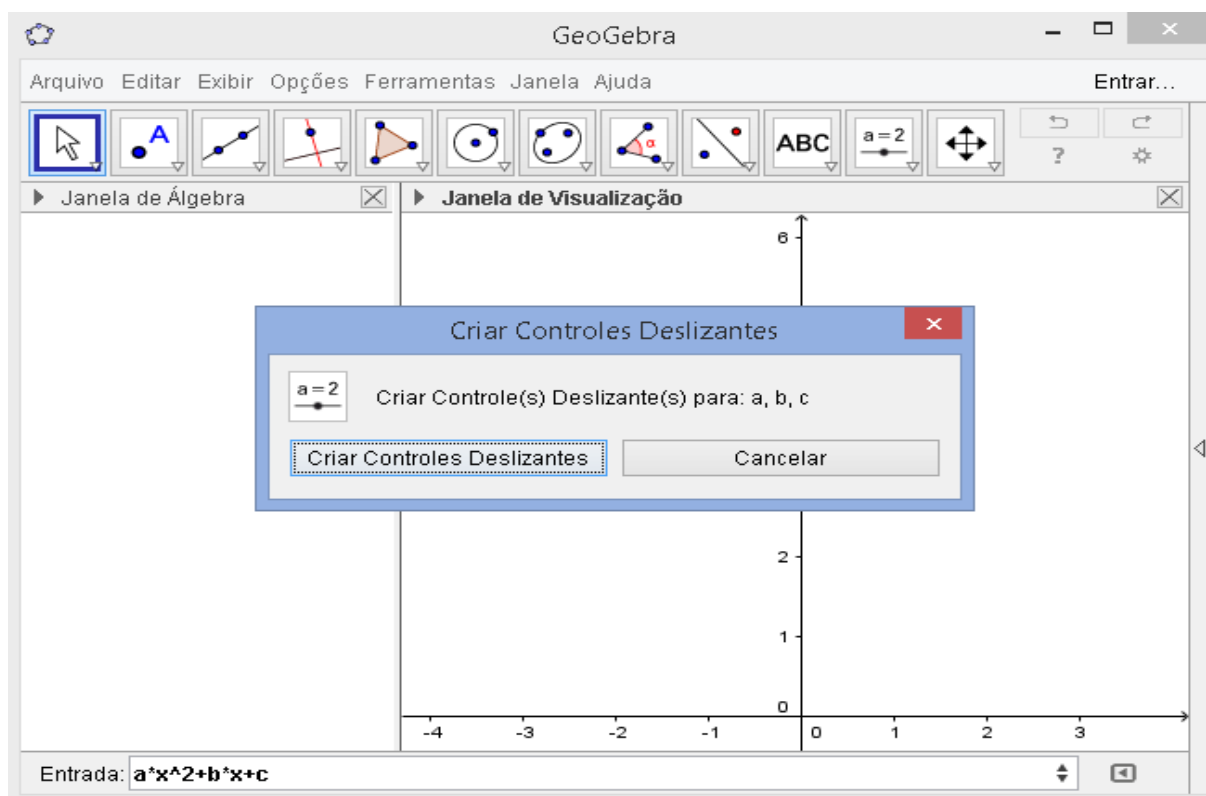


Figura 19

Depois de inserir a função e pressionar o botão “ENTER” aparecerá uma caixa de diálogo pedindo para criar controle deslizante para a, b, c, clique em “OK”.



**Figura 20**

Após criar os controles deslizantes o GeoGebra mostrará na Janela de Álgebra uma função com todos os coeficientes iguais a 1 e ao lado, na Janela de Visualização, o gráfico dessa função.

Em seguida, os alunos são levados a solucionar a função e a esboçar o gráfico como aprenderam em sala de aula para comparar os resultados obtidos com os do programa.

Ao perceberem os mesmos resultados com os do programa e a velocidade com o qual o gráfico é feito, os alunos já veem a ferramenta educativa como um atalho para o fim dos cálculos enormes, fórmulas incompreensíveis e do desperdício de folhas de caderno para algo que eles julgam não precisar, pois dizem que não seguiram uma carreira que envolva matemática, ou por não ter uma aplicabilidade direta o dia a dia deles.

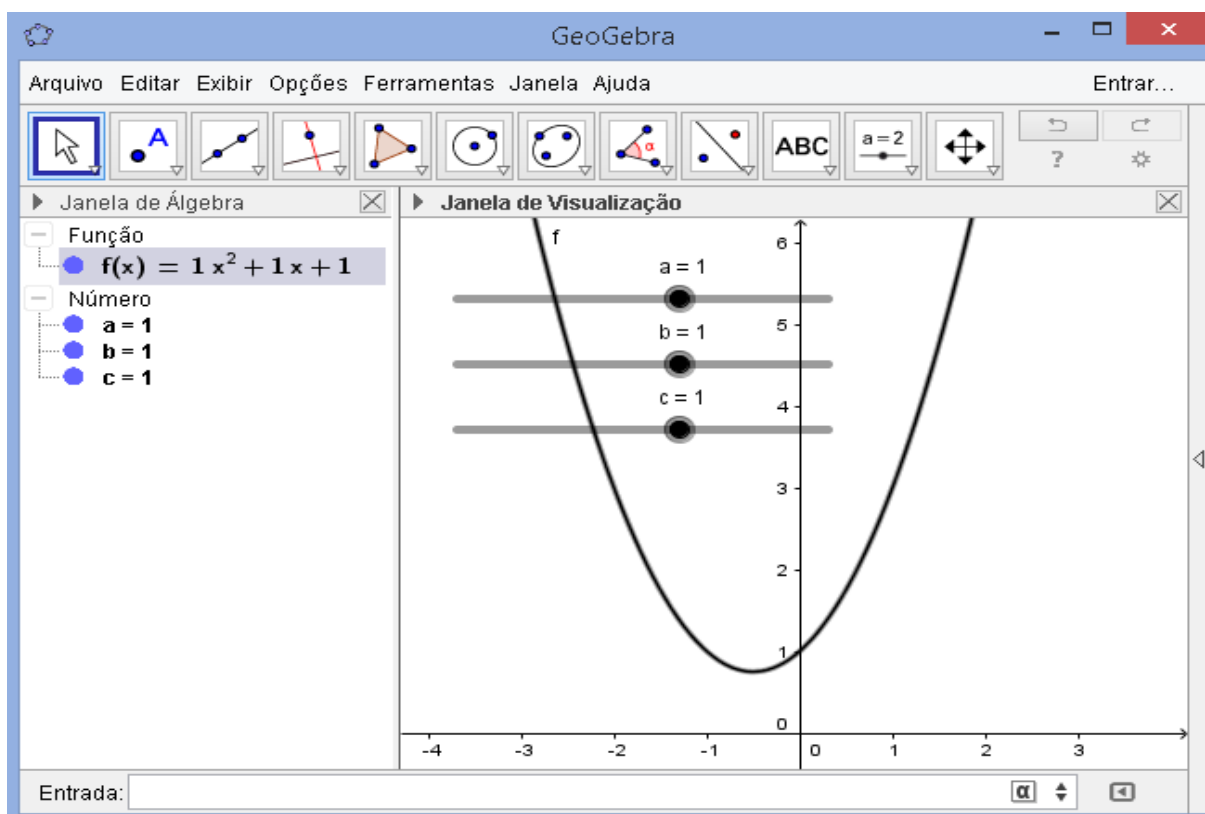


Figura 21

O GeoGebra nos permite, através da opção “animar”, observar a variação do controle deslizante e com isso verificar o comportamento do gráfico. Isso pode ser feito com todos os coeficientes separadamente ou simultaneamente.

Durante a exposição dessa opção ficou mais clara e compreensível o comportamento gráfico da função polinomial do 2º grau, saber o que acontece com o aumento ou diminuição do valor dos coeficientes de uma função ajuda a entender o porquê a parábola muda a concavidade para baixo ou para cima, por exemplo.

Depois da apresentação dos comandos primários e de ferramentas importantes do Geogebra os alunos fizeram uma atividade em dupla com o intuito de explorar a ferramenta dinâmica e interagirem com o programa educativo, tornando o aprendizado mais prazeroso e eficaz.

Durante essa atividade, percebemos que muitos dos alunos se interessaram pelo programa fazendo perguntas sobre onde poderíamos fazer o *download* do software, se era gratuito ou pago, como utilizar outras ferramentas e onde poderiam aprender mais sobre o GeoGebra. Inicialmente falamos sobre

o site do próprio GeoGebra, de alguns tutoriais em vídeos no *Youtube* e também de Livros didáticos como *Aprendendo Matemática com o GeoGebra* do professores J. Cássio e Luís Claudio.

É importante lembrar que uma turma do 9º ano que não teve contato com o GeoGebra e realizou a mesma atividade que os alunos que tiveram acesso ao programa.



Figura 22



Figura 23

A atividade consistia em resolver algumas funções polinomiais do 2º grau, analisar a função quanto a variação dos coeficientes, principalmente o coeficiente  $a$ , e ao discriminante da função.

Após a realização da atividade e ambientação com o software GeoGebra os alunos responderam a um questionário, sem a necessidade de se identificarem, a fim de que pudessem se expressar sem reservas.

O questionário serviu para mostrar a eficiência do software e de como ele pode intervir no aprendizado das funções polinomiais do 2º grau, e mostrou alguns pontos que podem ser trabalhados em sala de aula sem o auxílio do programa como a variação dos coeficientes da função.

Veamos logo abaixo o questionário e as respostas a essas perguntas produzidas pelos alunos.

### Respostas da questão 1:

1) O que você achou da atividade realizada no laboratório de informática?

*Foi interessante e dinâmica, auxiliou na fixação da matéria, além de sair um pouco do padrão, mostrando que pode-se aprender matemática com recursos tecnológicos também, não só "matemática" em cadernos.*

1) O que você achou da atividade realizada no laboratório de informática?

*É bem legal, sabe, uma maneira diferente de se aprender e uma ótima maneira de fazer com que os alunos se interessem mais pelo conteúdo.*

Podemos notar que com a ajuda do GeoGebra, além de melhor fixação do conteúdo, há também um aumento no interesse do aluno pelo conteúdo.

### Respostas da questão 2:

2) Você já conhecia o software Geogebra? O que você achou dele?

*Não, um jeito diferente de se aprender e bem eficaz. Ajuda mais com o aprendizado.*

2) Você já conhecia o software Geogebra? O que você achou dele?

Não, é bem dinâmico e facilitou muito na construção de gráficos, utilizando o Geogebra.

Vemos pelas respostas que os alunos não conheciam o software e que ele veio realmente para melhorar o aprendizado, fazendo que esse conhecimento seja colocado de forma dinâmica e atrativa.

### Respostas da questão 3:

3) Depois de ter utilizado esse software com a Função Polinomial do 2º grau, você acha que seu entendimento e desempenho sobre o assunto melhorou ou não teve influência alguma? Cite alguns pontos que você acha importante se acredita que teve alguma melhora.

Meu entendimento sobre o assunto melhorou um pouco, já que ele reforçou algumas informações que eu achava confusas!

3) Depois de ter utilizado esse software com a Função Polinomial do 2º grau, você acha que seu entendimento e desempenho sobre o assunto melhorou ou não teve influência alguma? Cite alguns pontos que você acha importante se acredita que teve alguma melhora.

Melhorou, pois ele nos mostra com precisão a construção dos gráficos das funções, eu tinha dificuldade em desenhar uma parábola de uma equação do 2º grau com precisão.

Observamos pelas respostas que o programa melhora a compreensão do conteúdo, reforça o conhecimento já adquirido e consegue sanar dificuldades principalmente no que diz respeito a construção do gráfico.

### Respostas da questão 4:

4) O que você acha que deve ser mantido e o que deveria melhorar na aula com software para ajudar na compreensão do conteúdo?

A aula deve ser frequentemente pois torna mais agradável e facilita o aprendizado do conteúdo. Devia ser mais aulas e a explicação de como usar o software deveria melhorar bastante.

4) O que você acha que deve ser mantido e o que deveria melhorar na aula com software para ajudar na compreensão do conteúdo?

Mantido - a forma prática e direta de ensinar como funciona o programa.  
 Melhorar - a abordagem dos exercícios, que devem ser passados com frequência para melhor estimular o aprendizado.

Quase todas as respostas da questão 4 foram pedindo mais aulas, pois eles relataram em conversas informais que gostariam de conhecer e trabalhar mais com o GeoGebra, que se sentiram atraídos e motivados com o recurso tecnológico.

### Respostas da questão 5:

5) Você achou que o programa foi de fácil utilização ou acha que precisa de mais aulas?

Precisa de mais aulas por que mesmo ele "realizando" todo o trabalho (multiplicação, adição) a utilização precisa entender e saber utilizar pois qualquer erro na digitação deixa a função errado.

5) Você achou que o programa foi de fácil utilização ou acha que precisa de mais aulas?

O programa é de fácil utilização, porém, precisam de mais aulas para aprender a ~~usá-lo~~ usá-lo e explorar melhor seus recursos.

Os alunos relataram que o programa é de fácil utilização, porém necessitam de mais aulas para praticar o uso das ferramentas e das funcionalidades do GeoGebra, familiarizando com o programa e principalmente com a digitação das funções e equações na Janela de Álgebra.

### Respostas da questão 6:

6) Na sua opinião recursos computacionais, como o Geogebra, deveriam ser utilizados de forma regular ou as aulas em sala já são suficientes para a compreensão do conteúdo?

Deveriam ser utilizados, porque é um instrumento que possibilita melhor compreensão e a aula seria mais dinâmica e interessante.

6) Na sua opinião recursos computacionais, como o Geogebra, deveriam ser utilizados de forma regular ou as aulas em sala já são suficientes para a compreensão do conteúdo?

Deveriam sim ser mais utilizados de forma regular, porque além de ajudar a compreensão do conteúdo, ele estimula os alunos a aprenderem mais com o uso de recursos tecnológicos.

Na opinião dos alunos, os softwares educativos são uma nova e boa possibilidade de ensino que proporcionam melhor compreensão do conteúdo, reforçam conteúdos já aprendidos em sala de aula com aulas tradicionais e dinamizam as aulas tornando o conteúdo abordado mais atraente e estimulador.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino das funções polinomiais do 2º grau tem grande importância no meio escolar. Visto a importância que é dado ao conteúdo no final do Ensino Fundamental e também durante todo o Ensino Médio.

Objetivar o conteúdo para os alunos que já estão saturados de um modelo de ensino que fazem deles meros expectadores no processo de ensino-aprendizagem tem levado a algumas discussões entre os professores de matemática. O que devemos fazer para ter a atenção do aluno? Esse modelo de ensino utilizado é suficiente para que o aluno possa se sentir capaz de resolver e discutir situações problemas que envolvam as funções polinomiais do 2º grau?

Essas e tantas outras perguntas nos levaram a buscar novas práticas de ensino que pudessem melhorar o desempenho dos alunos além de tornar a aula mais dinâmica e prazerosa. Visando essa melhora é que utilizamos o software educativo GeoGebra como auxílio e complementação para o ensino da matemática possibilitando a análise e a compreensão do gráfico das funções quadráticas de forma dinâmica. Logo após aulas expositivas sobre o tema o GeoGebra serviu de ferramenta tecnológica para desenvolver e melhorar o desempenho dos alunos.

Como ferramenta dinâmica, o GeoGebra teve fundamental importância no processo de ensino-aprendizagem e se mostrou como uma potente ferramenta na construção, compreensão e desenvolvimento da função, alicerçando o conhecimento já adquirido e fechando lacunas existentes das aulas expositivas.

Depois da utilização do GeoGebra em sala, foi notório e palpável a melhora na compreensão e na resolução de situações problemas que envolveram as funções polinomiais do 2º grau. Notamos, ainda, que o interesse pelo conteúdo abordado, e também pelo programa em si, foi maior após a utilização do software pelos alunos, ou seja, quando os alunos são parte integrante do processo de ensino-aprendizagem e quando eles tem a possibilidade de construir o próprio conhecimento tendo no professor a figura do facilitador ou mediador da aprendizagem, esse conhecimento torna-se mais atraente e eficaz na sua proposta de consolidar o conhecimento do educando.

Apesar dos ótimos resultados obtidos, é necessário ainda aumentar o número de aulas que envolvam o GeoGebra, principalmente para que o aluno tenha mais tempo para interagir com o software, se adaptar aos comandos e ferramentas do programa além de explorar ainda mais o GeoGebra como ferramenta capaz de facilitar e construir novos conhecimentos.

Deve-se salientar que o programa por si só não é capaz de gerar tanta mudança assim, é importante, também, um planejamento e um objetivo a ser alcançado com a utilização do programa, mas ficou claro que sua utilização é um suporte para o conteúdo aprendido em sala de aula, sendo, portanto, uma ferramenta metodológica capaz de melhorar o aprendizado do educando. Saber por onde começar e como apresentar a ferramenta de aprendizagem também fazem parte da construção do conhecimento que se espera desenvolver. Assim sendo, o professor como facilitador da aprendizagem também precisa estar desenvolvendo e melhorando a forma como apresentar os recursos que serão utilizados e a maneira com a qual o aluno vai construir o conhecimento e, através disso, alcançar o resultado desejado.

## ANEXOS

### QUESTIONÁRIO

Turma: \_\_\_\_\_ Turno \_\_\_\_\_

1) O que você achou da atividade realizada no laboratório de informática?

---

---

---

2) Você já conhecia o software Geogebra? O que você achou dele?

---

---

---

3) Depois de ter utilizado esse software com a Função Polinomial do 2º grau, você acha que seu entendimento e desempenho sobre o assunto melhorou ou não teve influência alguma? Cite alguns pontos que você acha importante se acredita que teve alguma melhora.

---

---

---

4) O que você acha que deve ser mantido e o que deveria melhorar na aula com software para ajudar na compreensão do conteúdo?

---

---

---

5) Você achou que o programa foi de fácil utilização ou acha que precisa de mais aulas?

---

---

---

6) Na sua opinião recursos computacionais, como o Geogebra, deveriam ser utilizados de forma regular ou as aulas em sala já são suficientes para a compreensão do conteúdo?

---

---

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONILLA, M.H.S. **Concepções do Uso do Computador na Educação.** Espaços da Escola, Ano 4, n. 18. Ijuí, 1995.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 2ª Edição – São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2003.

BRANDÃO, Edemilson J. Ramos. Matemática Aplicada. **Matemática em Tudo**, abril de 2010. Disponível em:  
<http://matematiaplicada.blogspot.com.br/2010/04/matematica-em-tudo.html>.  
Acesso em: 15 Jul. 2015

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

GRAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Lucina Maria. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.** IV Congresso RIBIE, 1998. Brasília,

LIMA, Elon L., CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo & MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.** Sexta Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

NÓBRIGA, J. Cássio C., ARAÚJO, Luís C. L. **Aprendendo Matemática com o Geogebra.** – São Paulo: Editora Exato, 2010.

**Portal Inep** – Portaria nº 931, de 21 de março de 2005. Disponível em:  
[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/prova\\_brasil\\_saeb/downloads/Por\\_t931\\_21MAR05.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/downloads/Por_t931_21MAR05.pdf) Acesso em 11 de julho de 2015.

**Portal MEC**, Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf). Acesso em 11 de julho de 2015.

**Portal MEC**, Exame Nacional do Ensino Médio, Disponível em:  
[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=183&Itemid=310](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=183&Itemid=310). Acesso em 11 de julho de 2015.

**Portal Inep**, Sistema de Avaliação da Educação Básica. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/saeb> Acesso em 11 de julho de 2015.

**SPAECE**, Sistema de Avaliação Permanente da Educação Básica do Ceará. Disponível em: <http://www.spaece.caedufif.net/apresentacao-2/> Acesso em 11 de julho de 2015.

ZUIN, Elenice de S. Lodron. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, ISSN 2178-034X - Curitiba, Paraná. 18 a 21 de Julho de 2013. Disponível em: [http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3611\\_2037\\_ID.pdf](http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3611_2037_ID.pdf) - Acesso em: 16 Jul. 2015