UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT

RODOVLAS FABIANO DOS SANTOS

MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA EXPLORAR CONCEITOS MUSICAIS PARA ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL

PONTA GROSSA
2015

MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA EXPLORAR CONCEITOS MUSICAIS PARA ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi

PONTA GROSSA
2015

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Santos, Rodovlas Fabiano dos

S237 Matemática e música: uma abordagem para explorar conceitos musicais para ensinar matemática no ensino médio e fundamental/ Rodovlas Fabiano dos Santos. Ponta Grossa, 2015.
76f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Luciane Grossi.

1.Ensino de matemática. 2.Música. 3.Geogebra. 4.Monocórdio. I.Grossi, Luciane. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510.9

TERMO DE APROVAÇÃO

Rodovlas Fabiano dos Santos

"MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA EXPLORAR CONCEITOS MUSICAIS PARA ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

LGrossi

Orientador: Profa. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Sani Carvalho

Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Fabiane de Oliveira

Profa. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 01 de Outubro de 2015.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha Amada Mãe, pois além de ser uma mãe incrível ainda acumula a função de pai de forma brilhante. Dedico a Deus pela saúde e aos meus familiares e Amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar saúde e me proteger durante as diversas horas de viagens e estudos.

A Professora Dra. Luciane Grossi pela paciência, dedicação para orientação deste trabalho, mas sobretudo pelos incentivos no decorrer do curso.

A minha mãe Maria de Fátima dos Santos que foi a pessoa de suma importância para conclusão desse curso.

Ao meu irmão Dan Igor dos Santos que me auxiliou em muitos momentos nessa jornada.

A minha noiva Sabrina Comelli pelo apoio nesse período.

Aos meus colegas do curso do PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pelas horas e conhecimentos divididos nesse período de estudos e principalmente aos colegas de viagem: Gilmar, Fabrício e Ausdry.

Aos membros da banca examinadora, professorras Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva e Dra. Fabiane de Oliveira pelo tempo dedicado à análise deste trabalho e pelas importantes contribuições.

Ao corpo docente do PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela atenção e estímulo durante o curso.

A Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT, possibilitando-me a obtenção do título de mestre.

E a todos os amigos, familiares e colegas de trabalho que me ajudaram de alguma forma para a realização deste trabalho.

RESUMO

A música é sem dúvida uma das principais formas de manifestação cultural, de gêneros e gostos diversos a música ocidental tem em geral uma mesma base musical e esta base tem seu cerne em conceitos matemáticos simples. Esse trabalho objetiva trazer esses conceitos matemáticos ao conhecimento de alunos do ensino médio e fundamental através da história da música. Propõe-se uma revisão bibliográfica da importância e das contribuições de Pitágoras na construção da escala Diatônica e da influência que os estudos pitagóricos exerceram na escala Temperada, que é atualmente utilizada. O estudo apresenta-se norteado por documentos oficiais como PCN e PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais e Parâmetros Curricular Nacionais do Ensino Médio) e diretrizes curriculares a respeito do estudo da matemática, aliando conteúdos matemáticos a conceitos do cotidiano, nesse caso a conceitos musicais. Nesse trabalho, são tratadas atividades que podem ser reproduzidas por professores de matemática sem que o mesmo necessite de conhecimentos avançados sobre música, tais como o estudo de frações na construção de um monocórdio e com auxílio do programa Geogebra é explorado conceitos de sons descritos através de funções exponenciais e trigonométricas.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Música, Geogebra, Monocórdio.

ABSTRACT

Music is without any doubt one of the main ways to express culture, gender and personal tastes. Western music in general has the same musical basis which has its core in simple mathematical concepts. This study aims to bring mathematical concepts to high and elementary school students through the history of music. This essay proposes a literature review about the importance and the contributions of Pitagoras in the construction of Diatonic Scale and the influence that pitagorian studies exert in the Equal Tempered Scale, used nowadays. This paper is based in official documents such as PCN and PCNEM (National Curricular Parameters and National Curricular Parameters of High School) and curricular guidelines about the study of Mathematics allying mathematical subjects to daily life concepts, in this case, musical concepts. Activities that can be reproduced by Mathematics teachers even when the teacher does not have advanced musical knowledge are studied in this paper, for example, studying fractions aiming to build a monochord with the program Geogebra exploring sound concepts described by exponential and trigonometric functions.

Keywords: Teaching mathematics, Music, Geogebra, Monochord.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Trabalhar com ensino da matemática é sempre uma tarefa desafiadora, já que sujeita o professor à uma dualidade pedagógica. Se por um lado, objetiva-se que o aluno compreenda e assimile os conteúdos técnicos, de outro lado, tal conhecimento deve criar ferramentas que possam ter utilidade prática, a fim de que possa ser usado além dos bancos escolares.

O pouco tempo disponível, os sistemas de avaliação vigentes, a pressão para ingresso nas universidades através de vestibulares e a falta de recursos, em sentido amplo, tornam o ensino da matemática extremamente técnico e formal. Aos olhos dos estudantes, a disciplina parece enfadonha e desinteressante, aparentemente sem função prática.

Outrossim, para um aluno que se identifica mais com as áreas humanas ou biológicas, por exemplo, estudar funções trigonométricas pode parecer bastante tedioso, já que não lhe foi demonstrado como áreas distintas podem estar integradas e relacionadas.

Por conta disso, o presente trabalho visa expor uma correspondência entre a matemática e as ciências musicais, mostrando que por trás dos sons extraídos de um violão, uma flauta ou uma bateria, existem inúmeros conhecimentos matemáticos implícitos, por vezes, inexplorados pelos alunos.

Buscou-se demonstrar uma estratégia pedagógica para demonstrar a estreita relação existente entre a matemática e as áreas humanas, evidenciando, neste passo, que ao escutar uma bela canção está-se, na verdade, trabalhando de forma implícita com a beleza da matemática.

Procurou-se, assim, resgatar a importância sociocultural da música para a história da humanidade. Não por outro motivo, há mais de 2500 anos os pitagóricos acreditavam que, para educar bem uma pessoa, esta deveria ser disciplinada musicalmente.

Muitos dos conceitos que atravessaram séculos e são utilizados até hoje na área musical tem base sobre os pitagóricos. Apesar de ser mais conhecido pelo seu famoso teorema, Pitágoras e seus discípulos tentaram, através de frações simples, resolver problemas de concordância entre notas musicais.

Com este propósito, são apresentadas práticas que relacionem notas musicais, proporções, funções exponenciais e funções trigonométricas, sem que exijam um conhecimento aprofundado em conceitos musicais.

1.1 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Esse trabalho busca atender uma das competências em Matemática apontadas no PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) que é a contextualização das ciências num âmbito sociocultural, afim de que exista uma análise crítica e a transformação no pensamento científico.

Esse trabalho tem por objetivos:

– Compreender a relação histórica entre conceitos de proporções e notas musicais;

– Observar os conceitos matemáticos e científicos empregados por Pitágoras e os pitagóricos na construção do primeiro instrumento musical inventado na história da humanidade com conceitos puramente matemáticos;

– Interpretar funções exponenciais através da escala temperada;

– Interpretar e conceituar transformações de funções trigonométricas através de conceitos sonoros e com uso de escala musical;

– Compreender de forma simplificada conceitos e aspectos físicos dos sons.

Pretende-se mostrar que mesmo uma área do conhecimento que parece tão distante da matemática tem seu cerne em conceitos simples de proporções. A compreensão de que a música, além de seus aspectos sociais e culturais, também tem seu aspecto matemático é de certa forma um estímulo para o ensino de matemática e o despertar do interesse dos alunos por esta área.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho foi conduzido previamente pelo levantamento histórico da relação de música e matemática no Capítulo 2. A história da música nem sempre foi associada de forma direta a matemática, mas ao longo das descobertas musicais foi se descobrindo uma relação entre as proporções e os sons mais harmoniosos, mas foi apenas com Pitágoras e seus discípulos que se deu o registo dessa relação tão confinante. Além disso, foi abordado o desenvolvimento da música ocidental com as clássicas notas musicais (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si).

Ainda no capítulo 2, outros matemáticos e músicos que influenciaram na criação da escala Temperada são citados, esta escala utilizada ainda hoje se baseia nas contribuições pitagóricas.

No capítulo 3, uma revisão bibliográfica é exposta a fim de conceituar a física do som e compreender, de forma simples, a relação de onda com o som. Esses conceitos são importantes para que seja possível utilizar as nomenclaturas ao se referir ao som e compreender que as funções periódicas são fundamentais na representação de um som harmônico.

No capítulo subsequente, destaca-se uma proposta para construção de um monocórdio simples, afim de recriar a experiência feita pelos pitagóricos na obtenção das consonâncias musicais (a oitava, a quarta e a quinta). Ainda explorando essa construção pode-se trabalhar com alguns conceitos de frações.

Em seguida, no capítulo 5 uma proposta é apresentada para explorar a construção da função exponencial através da escala temperada, sempre quando se trabalha com funções exponenciais os exemplos mais comuns utilizados em sala são as tabelas de juros compostos. O foco deste capítulo é dar outra possibilidade de explorar tal tema.

Para o capítulo 6 é composto pela elaboração de uma sugestão que explora o Geogebra como ferramenta base, com o propósito de mostrar as transformações da função seno e cosseno através das variações do som. Nesse capítulo exploram-se as variações de altura, volume do som e das notas musicais da escala temperada.

As considerações finais desse trabalho e as sugestões de trabalhos futuros são apresentadas no sétimo capítulo.

2 LEVANTAMENTO HISTORICO DA MÚSICA

Este capítulo trata do surgimento da música através de vários períodos, desde o descobrimento de instrumentos musicais arqueológicos, até a concepção da escala temperada utilizada na música contemporânea. Embora a música seja uma manifestação cultural e que foi desenvolvida por quase todos os povos da antiguidade, é possível notar a influência dos registros dos pitagóricos na construção de uma escala musical, utilizando proporções simples e o monocórdio. Observa-se a tentativa de construções de novas escalas musicais, mas que nitidamente também foram influenciadas pelo legado dos pitagóricos. Ainda nesse capítulo, explica-se a construção, pela óptica matemática, de duas escalas musicais: a diatônica e a temperada.

2.1 SURGIMENTO DA MÚSICA

Durante uma expedição em uma caverna, localizada no sudoeste da Alemanha, cientistas se depararam com alguns dos mais antigos instrumentos musicais já encontrados: tratava-se de diversas flautas, feitas com ossos de aves e marfins de mamutes, que teriam aproximadamente de 42 mil a 43 mil anos.

Figura 1 - Flautas confeccionadas com marfins de mamutes.

Fonte - BBC.

Já em 1995, em meio a um antigo acampamento Neandertal localizado em uma caverna na Eslovênia, encontrou-se uma flauta, feita a partir de um fragmento do osso do fêmur de um urso, apresentada na Figura 1. O instrumento tem entre 43 mil a 82 mil anos, e espantou os musicologistas que o estudaram, já que o objeto possuía padrões nas distâncias de seus furos, que podiam bem emitir as notas que compõe a música ocidental. Sendo assim, questiona-se quando o homem começou a produzir música, e como exatamente se deu esta trajetória.

É bastante provável que os primeiros hominídeos tenham utilizado o próprio corpo, através de combinações de palmas, passos e tons de voz, criando, desta forma, códigos de caça ou ritos religiosos, inspirados nos sons da natureza. Sonidos como canto dos pássaros, assobio dos ventos, barulho das cachoeiras, etc., podem ter inspirado os hominídeos primitivos a produzir suas próprias combinações sonoras princípio do que hoje, chamamos de música.

Neste sentido, Frederico (2002, p.2) nos elucida que:

> Os instrumentos musicais dos primitivos, assim como seus utensílios, tiveram como princípio o corpo humano. Da concha da mão ele chegou ao vaso para beber. Do braço ele chegou ao remo. Depois o homem descobriu que seu corpo reunia vário utensílios sonoros. Como a garganta e a boca já produziam uma melodia, juntou-se o estalar de dedos, palmas, até braços e pernas acabaram produzindo uma música corporal rítmica.

Contudo, até o momento não há consenso sobre quando, ou onde, os campos da matemática e da música se fundiram. Sobre isso, assevera Abdounur (1999, p.2):

> Provavelmente, o início das manifestações de aspectos interativos dos campos supracitados perde-se, como dizem os historiadores, na noite dos tempos, uma vez que quase todos os povos da Antiguidade encontram manifestações destas áreas em separado.

Consoante o pensamento de Frederico (2000), os primeiros instrumentos musicais não eram hábeis para produzir qualquer tipo de melodia. Com o passar dos anos, os objetos foram gradativamente sendo modificados, na medida em que os homens selecionavam as sonoridades que mais lhe agradavam.

O mesmo autor relata, ainda, que as primeiras flautas eram feitas de bambu com um só furo, e que após sua confecção, eram juntadas em sequência para emitir sons diferentes.

Neste remodelamento dos objetos, os primitivos começaram a perceber uma relação entre o tamanho da flauta e o som emitido. Quanto maiores fossem as flautas, mais grave seria o som emitido. Neste compasso podem ter surgido as primeiras relações da matemática com a música, ainda que de forma rudimentar.

As primeiras evidências e documentos sobre a união entre a música e matemática apareceram apenas no período Clássico, por volta do século V a.C, na Grécia Antiga, com a eclosão da filosofia grega, entendida como “aspiração ao conhecimento racional, lógico e sistemático da realidade natural e humana.” (CHAUÍ, 2000)

A partir desse período começam a surgir os primeiros documentos científicos escritos. Nestes tratados, promovia-se a tentativa de explicar, racionalmente, os fenômenos humanos e naturais, observando-se a realidade de forma dedutiva e matemática.

Segundo Marcondes (2010, p19):

> Os diferentes povos da Antiguidade – assírios e babilônicos, chineses e indianos, egípcios, persas e hebreus -, todos tiveram visões próprias da natureza e maneiras diversas de explicar os fenômenos e processos naturais. Só os gregos, entretanto, fizeram ciência, e é na cultura grega que podemos identificar o princípio deste tipo de pensamento que podemos denominar, nesta sua fase inicial, de filosófico-científico.

O surgimento da filosofia clássica influenciou o pensamento moderno como um todo, e não por outra razão, ainda é utilizado termos gregos para diversas áreas do conhecimento, tais como: teologia, metafísica, geografia, filosofia, matemática e outras. Aliás, a palavra ‘música’ deriva do grego *musiké téchne* que significa “a arte das musas”. O termo resulta da mitologia grega, na qual Apolo era o deus das artes e ele regia o coro formado por Musas: Clio, Polímnia, Urania, Tália, Calíope, Erato, Melponome, Terpsícore e Euterpe. (ROSCHEL, 2014)

Outrossim, é nesta fase da história humana que surge o filósofo e matemático Pitágoras, quiçá o primeiro a trazer contribuições científicas para a música.

2.2 PITÁGORAS

A figura de Pitágoras é envolvida em certo misticismo – alguns pesquisadores chegam a defender que ele nunca existiu de fato. Como grandes ícones da história, o filósofo não deixou documentos escritos, e desta forma, torna-se tarefa árdua separar lenda de realidade no que a ele se refere.

Para Boyer (1974 p.34) não sobreviveu ao tempo nenhuma obra de Pitágoras e nem se sabe se jamais compuseram alguma obra, o que fizeram teria sido reconstruída com base numa tradição, simples propagação de conhecimentos, não muito digna de confiança.

De acordo com Strathern (1998, p.13) Pitágoras teria nascido por volta de 580 a.C. na Ilha de Samos (ilha que hoje pertence ao território Grego localizada ao leste do Mar Egeu).

Pouco se sabe sobre a sua infância, mas que aos 16 anos já espantava mestres locais com seu conhecimento e questões acima da compreensão da época, ele teria então sido enviado para estudar em Mileto para aprender com Tales. Tal fato é colocado em dúvida por Boyer (1974, p.35) “Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável dada à diferença de meio século entras suas idades”.

Sabe-se que Pitágoras viajou pelo Egito e Babilônia, absorvendo conhecimentos não apenas de Matemática, mas também de Religião e Astronomia. Por razões políticas, mudou-se para Crotona (sul da atual Itália), onde fundou uma comunidade de estudos filosóficos e metafísicos, conhecida atualmente como ‘Escola Pitagórica’. Ali, algumas das primeiras lições de geometria, astronomia e música foram desenvolvidas e estudadas.

Pitágoras faleceu em meados de 500 a.C., em uma cidade próxima à baia de Tarento. Mesmo muito após sua morte, seus discípulos lhe atribuíram autoria por diversos estudos, em inúmeras áreas do conhecimento.

Dentre tais atribuições, seu lampejo mais famoso é o teorema que leva seu nome: “em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Sabe-se, todavia, que a contribuição do matemático é ainda maior que esta proposição.

Em seus discursos, Pitágoras fazia analogias matemáticas e trazia um pouco de misticismo, na tentativa de explicar os fenômenos naturais. Ao filósofo é atribuída a ideia de que os planetas emitiam sons na sua órbita, formando uma espécie de ‘música cósmica’, que criava harmonia na medida em que se movimentavam. (ABDOUNUR, 1999)

Inclusive, a ideia de música cósmica veio influenciar, séculos mais tardes, o astrônomo alemão Johannes Kepler (Séc. XVII), que acreditava, tanto quanto os pitagóricos, que era possível ouvir a ‘música das esferas’, ou seja, a melodia que ressoava dos planetas através de suas órbitas. Registra-se que, até então, a teoria heliocêntrica ainda não era aceita. Mais tarde, Kepler teria organizado as órbitas dos planetas com razões métricas em relação ao sol, apresentando seu trabalho em termos de escalas musicais. (RODRIGUES, p.13, 1999)

Para os pitagóricos, a música detinha papel fundamental, até mesmo para a educação, acreditava-se que os mais educados musicalmente possuíam capacidade de vislumbrar com mais clareza o que havia de belo e artístico.

Ademais, também é imputada à Pitágoras a lei das cordas vibrantes – uma das primeiras leis mecânicas formuladas matematicamente – bem como a descoberta das grandezas incomensuráveis. Registra-se, neste ponto, que os pitagóricos admitiam que o conhecimento era um bem comum, e desta sorte, as descobertas supramencionadas foram atribuídas ao filósofo mesmo que este não tivesse contribuído diretamente com elas, simplesmente porque foram realizadas em sua escola. (ABDOUNUR, 1999)

De qualquer forma, no entendimento de Van Doren (2012, p. 50), Pitágoras ou os pitagóricos valeram-se do pensamento matemático para tentar encontrar uma conjunção entre a música e os números. Neste sentido:

> Um dia, segundo diz a lenda, sentado com um instrumento musical no colo, Pitágoras percebeu que as divisões de uma corda esticada que produzia harmonias poderiam ser descritas em termos de razão simples entre pares de números, a saber, 1 para 2, 2 para 3 e 3 para 4. Hoje em dia, representamos esta relação como 1/2, 2/3 e 3/4. Este fato extraordinário espantou Pitágoras que adorava música, pois pareceu-lhe extremamente bizarro que existisse uma ligação entre números, por um lado, e as notas de uma corda, por outro, que pudesse levar o espectador às lágrimas ou exaltar lhe o espírito. (VAN DOREN, 2012, p. 50).

Esse fato é conhecido como o primeiro experimento científico, ou ao menos, o primeiro já registrado em toda a história.

2.3 PITÁGORAS E O MONOCÓRDIO

De acordo com Rodrigues (1999), existe uma lenda, na qual Pitágoras teria passado na frente de um ferreiro, percebendo que alguns dos sons lhe eram agradáveis ao ouvido. Notou, com isso, que os sons prazerosos eram de martelos que seguiam uma proporção de pesos, descrita pelo filósofo, em seu tratado de música

Micrologus. Sobre o conto, Guido d’Arezzo (992-1050) citado por Rodrigues (1999, p. 17) descreve:

> Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia (concordiam) que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia (modulationis) estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conversava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso.

Inspirado nesta ideia, Pitágoras começou a estudar sons em um instrumento composto por uma única corda, que era estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha de madeira. Possuía também um cavalete móvel que era movido entre a prancha e a corda. O apetrecho ficou conhecido como monocórdio. A figura 2 ilustra a lenda de Guido d´Arezzo e a construção do monocórdio por Pitágoras.

Figura 2 - Ilustração de Franchinus Gafurius (Theorica Musicae, 1492), da descoberta de Pitágoras das proporções das consonâncias.
Fonte: Rodrigues (1999, p. 18)

Com o monocórdio, Pitágoras tentou reproduzir as proporções observadas. Em seus experimentos, observou que, ao tocar a corda com seu tamanho original, o som era reproduzido normalmente. Todavia, ao posicionar o cavalete na metade da corda, o som era o mesmo, porém um pouco mais agudo. Daí ele concluiu a primeira consonância da tônica e a oitava, respectivamente 1 e 1/2. ABDOUNUR (1999, p.5)

Nesta esteira, declara Abdounur (1999, p.5):

> Em seu experimento, Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a 3/4 do comprimento da corda em relação a sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a 3/4 de seu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Analogamente, exercida a pressão a 2/3 do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a 1/2 obtinha-se a oitava do som original.

Essas conclusões acabaram acarretando na Tetratkys ou a tétrade sagrada, símbolo que, para os pitagóricos, constituía-se nos quatro primeiros números inteiros (1,2,3 e 4). Enfatiza-se que os discípulos de Pitágoras veneravam o número quatro, considerando-o a origem do universo. Não por outro motivo, este número teceu as bases musicais da época.

A tétrade era a quarta sequência de números triangulares conhecidos pelo pitagóricos:

1

1+2=3

1+2+3 = 6

1+2+3+4=10

Despertava-se atenção o fato de que as proporções trabalhadas por Pitágoras tem frações equivalentes às da lenda dos martelos do ferreiro, contada por Guido d'Arezzo. Note que:

1/2 = 6/12

3/4 = 9/12

2/3 = 8/12

Assim, 6, 8, 9 e 12 foram considerados números harmônicos.

Outra propriedade que fascinou os pitagóricos é que tais números harmônicos seguem algumas propriedades entre si:

a) 6 está para 8 assim como 9 está para 12

6/8 = 9/12

b) 6 está para 9 assim como 8 está para 12

6/9 = 8/12

c) 9 é a média aritmética de 6 e 12

$$\frac{6+12}{2} = 9$$

d) 8 é a média harmônica de 6 e 12

$$8 = \frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

2.4 CONSTRUINDO AS ESCALAS MUSICAIS

Inicialmente é preciso esclarecer que, na época de Pitágoras, não havia qualquer conhecimento sobre tonalidades das notas. Atualmente, mesmo quem não é músico profissional consegue distinguir a nota Dó na vibração de uma corda, conceito este que na Grécia antiga ainda não havia sido formulado.

Com isso exposto, Pitágoras tocou seu monocórdio com a corda solta, e o som que se emitiu (qual não se sabia a tonalidade) foi adotado como a Tônica, termo utilizado até hoje pelos músicos para descrever a primeira nota ou a nota fundamental.

O pensador utilizou-se das proporções 1/2, 2/3 e 3/4, e com isso, percebeu que os sons estavam em consonância (termo utilizado para sons harmoniosos, agradáveis ao ouvido) a tônica.

Na figura 3 pode-se observar as relações de oitava, quinta e quarta em relação à tônica, temos então:

A Tônica, razão 1:1- Corda inteira.

A Oitava, razão 1:2 – Metade da corda. (diapason)

A Quinta, razão 2:3 – Dois terços do comprimento da corda. (diapente)

A Quarta, razão 3:4 – Três quartos comprimento da corda.(diatessaron) PEREIRA (2013, p. 19)

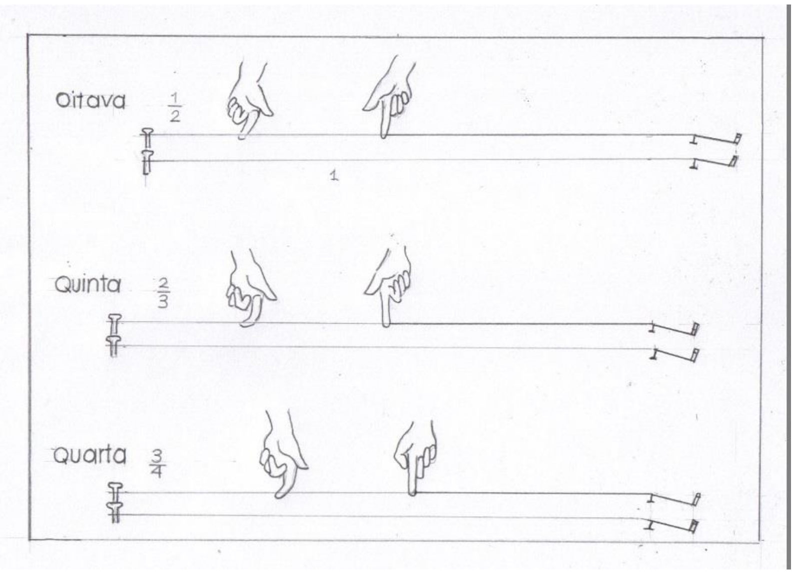


Figura 3 - Esquema de comparação das consonâncias pitagóricas
Fonte: O Autor

Para que fique ainda mais claro, um experimento semelhante poderia ser feito com um violão. Ao tocar a primeira corda, afinada em dó, na sua totalidade, obtém-se um som. Se for apertado exatamente na metade da corda, alcançar-se-á o mesmo som Dó obtido antes, porém, mais agudo, uma oitava acima.

Ao tocar 3/4 da mesma corda, obter-se-á a nota Fá, que na escala Diatônica é a quarta nota a partir do Dó. Repetindo o experimento, mas tocando 2/3 daquela corda, obtém-se a nota Sol, quinta na escala diatônica. Neste raciocínio, a escala Pitagórica era composta apenas pela tônica, a quarta, a quinta e a oitava.

2.5 OBTENDO AS OUTRAS NOTAS MUSICAIS DA ESCALA DIATÔNICA

De acordo com o que fora exposto acima, é bastante provável que Pitágoras não tenha realizado seu experimento tomando a nota Dó como referência. Apesar de tal fato, será utilizado a nota Dó como tônica, pois isso irá facilitar na compreensão de como foram obtidas as demais notas da escala diatônica.

Sabe-se que nem sempre as notas musicais foram ordenadas e nomeadas como conhecemos na atualidade. De acordo com Frederico (2000, p.46), em 675 a.C. a lira tinha sete cordas, e era chamada de ‘Lira de Hermes’. As cordas tinham uma afinação descendente e uma em relação com o céu: Ré (Lua), Dó (Mercúrio), Si Bemol (Vênus), Lá (Sol), Sol (Marte), Fá (Júpiter), Mi (Saturno).

Para se obter as notas da escala diatônica, foi feito uma sequência de quintas puras, relação de comprimentos 2/3, chamada de gama pitagórica. A relação ficou estabelecida como Ciclo de Quintas.

Para melhor entendimento da matéria, se estabelece que a corda tenha comprimento 1 para qualquer unidade de medida, e que tal corda dá-se a nota Dó. Chama-se de Dó$_1$ a tônica, ou seja, a nota emitida pela vibração da corta inteira; e de Dó$_2$, a oitava, nota emitida pelo toque de metade da corda.

Para obtenção das notas, de acordo com a gama pitagórica, é feito a simples multiplicação do comprimento da corda por 2/3, mas a cada vez que o comprimento ficar menor que 1/2, o resultado deve ser multiplicado por 2, a fim de se manter a nota na primeira oitava.

É desta forma que chega-se à escala diatônica:

Dó$_1$ – Ré – Mi – Fá – Lá – Sol – Si – Dó$_2$

Se para obter Dó$_1$ temos um comprimento de 1 unidade de comprimento. Para obter Sol, a saber, a quinta nota na escala diatônica, tem-se:

$$1.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Ou seja, a corda de comprimento $\frac{2}{3}$ representa a nota sol.

Agora, tomando o resultado anterior e multiplicando novamente pela fração 2/3:

$$\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Note que:

$$\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$$

Com isso, é necessário multiplicar esse resultado por dois, objetivando manter a nota na primeira oitava, logo:

$$\frac{4}{9}.2 = \frac{8}{9}$$

Por fim, a corda de comprimento $\frac{8}{9}$ dará a nota Ré.

Agora, com o resultado da nota anterior e repetindo o procedimento, obtem-se desta forma, a quinta nota a partir do Ré, a nota Lá.

$$\frac{8}{9}.\frac{2}{3} = \frac{16}{27}$$

Para obter a próxima nota, Mi, faz-se novamente a multiplicação:

$$\frac{16}{27}.\frac{2}{3} = \frac{32}{81}$$

Aqui, chega-se num impasse, pois $\frac{32}{81} < \frac{1}{2}$, razão qual será tomada o dobro para fração, para obter o Mi que se refere à primeira oitava.

Desta forma, a fração $\frac{64}{81}$ representa a nota Mi.

No mesmo passo, é possível obter a nota Si. Veja:

$$\frac{64}{81}.\frac{2}{3} = \frac{128}{243}$$

Por conseguinte, a fração $\frac{128}{243}$ é o comprimento da corda que fornece a nota Si.

A nota Fá é a quarta justa de Dó$_1$, isto é, a fração da corda que tocará a nota Fá é $\frac{3}{4}$**.**

Percebe-se que a quinta de Fá é o Dó$_2$, pois:

$$\frac{3}{4}.\frac{2}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Pode-se observar na Tabela 1 as frações referente as notas musicais segundo a escala pitagórica.

Tabela 1 - Sequência de frações Escala Pitagórica

Dó$_1$	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó$_2$**
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: O Autor

Hoje, sabe-se que a relação da frequência de vibração de uma corda é inversa ao comprimento da corda, assim, é possível observar na Tabela 2 que se a nota Dó$_1$ fornece uma frequência f, as outras notas serão frações inversas das contidas na Tabela 1.

Tabela 2 - Frequências das notas musicais (Escala Pitagórica) em relação a tônica

Dó$_1$	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó$_2$**
$\boldsymbol{f}$	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$	$2f$

Fonte: O Autor

Conforme expõe Rodrigues (1999, p.22), os gregos basearam seu sistema musical na lira, ainda que não tivessem instrumentos técnicos ou conceituais que lhes permitissem a compreensão do fenômeno vibratório das cordas, ou mesmo da análise da frequência de sons. Só o que possuíam, era a observação empírica da relação inversa entre a frequência do som emitido pela corda vibrante e seu tamanho.

2.6 ESCALA TEMPERADA

A escala Pitagórica não é a única utilizada pelos músicos ao longo dos tempos, porém, indubitavelmente serviu de base para que outros estudiosos da música criassem outras escalas.

Abdounur (1999, p.14) cita a contribuição que Arquitas de Tarento concedeu à música. De acordo com o autor, Arquitas, a quem é atribuída a invenção das roldanas e dos parafusos (430-360 a.C.), teria sido discípulo na escola pitagórica. Entre seus diversos estudos, constavam trabalhos sobre consonâncias musicais.

Para Arquitas, consonâncias são produzidas por dois ou mais sons simultâneos percebidos como apenas um. Assim, o problema não concerne ao fenômeno em si, mas sim à sua percepção, levando Arquitas a realizar uma série de questionamentos sobre o tema. Sua contribuição mais significativa foi calcular um intervalo de terça maior acima de uma nota como a média harmônica entre o comprimento gerador de tal nota e aquele que produzia uma quinta acima.

Além disso, Arquitas construiu uma escala baseando-se nas médias harmônicas e aritméticas que obteve em relação às proporções encontradas por Pitágoras.

Sobre o tema, esclarece Abdounur (1999, p.17):

> Cabe ressaltar que o intervalo de terça maior obtido por Arquitas concorda com aquele presente na Série Harmônica. Tal fenômeno levar-nos-ia a imaginar que Arquitas possuísse um ouvido sensível ao perceber que a terça correspondente a (4/5) – mais baixa que a pitagórica, (64/81) – soava mais natural, uma vez que se fundia exatamente dentro dos harmônicos naturais de uma nota.

Muitos povos construíram diferentes escalas musicais, de modo que citar todas seria algo impossível. O que se percebe, contudo, é que a escala pitagórica foi suficiente até meados da idade média. Conforme elucida Benett (1986, p. 13), a música mais antiga conhecida, tanto sacra quanto profana, é o cantochão, que consistia em uma música monofônica, com melodia única. Em regra, esse tipo de música utilizava notas dentro de apenas uma oitava, e ainda é utilizado em algumas igrejas e abadias.

Com o advento do renascimento, essa espécie de música começou a ser trocada pelas primeiras músicas polifônicas, que possuíam duas linhas de melodias tecidas conjuntamente. Desta feita, a música ganhou caráter mais harmônico e a escala pitagórica começou a se mostrar limitada.

Sabe-se atualmente, que o valor da frequência de uma onda é inversamente proporcional ao tamanho da corda. Por isso, no que se refere a escala pitagórica, se tendo $Dó_1$ uma oitava acima de $Dó_2$, a frequência de $Dó_2$ é o dobro da frequência de $Dó_1$. Neste raciocínio, generaliza-se que a frequência dada por uma nota Dó qualquer na escala pitagórica, a cada oitava que é elevada em relação à frequência f de $Dó_1$, será dado por:

$$\text{Dó}(n) = \text{f}.2^n$$

Onde n é o número da oitava acima.

Utilizando o recurso do ciclo das quintas, a frequência da nota anterior fica multiplicada por 3/2 (pois é o inverso de 2/3). Assim a frequência de uma nota qualquer a partir da frequência f de Dó$_1$ será dada por:

Frequência Nota(m) = $\mathrm{f}.\left(\frac{3}{2}\right)^{m}$, onde m é o número de ciclos de quintas realizado.

O interessante dessas generalizações é que tomando n=7 (sete oitavas) e m=12 (ciclo de 12 quintas), tem-se:

$$\mathrm{Dó}(7) = \mathrm{f}.2^{7} = 128.\mathrm{f}$$

$$\text{Frequência Nota}(m)=\mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}74\mathrm{f}$$

Essa diferença é conhecida como “Coma Pitagórica”.

De acordo com a observação de Sandroni (2012 p.347):

> Esta diferença 129,74... :128 é conhecida como o “coma de Pitágoras e nela está a origem das dissonâncias da escala pitagórica, que inexistem apenas nos intervalos de quarta, quinta e oitava. Não é por outra razão que estes intervalos chegam até nossos dias com a denominação de “justos” em teoria musical. Os demais, a segunda, a terça, a sexta e a sétima são maiores ou menores, nunca são ditas justas.

Em razão dos inconvenientes gerados pela Coma Pitagórica, e também pelas adversidades geradas pela Terça Pitagórica, ajustada por Arquitas, como relatado, surge a necessidade do temperamento da escala musical. O termo traduz um processo para ajustar os intervalos musicais, a fim de manter alguns desses intervalos como “puros”, sobretudo à relação entre as oitavas. Portanto, alguns intervalos no temperamento serão ligeiramente imprecisos.

Segundo Hora (2004, p.39 – 40), o termo temperamento expressa um compromisso de afinação. Temperar significa escolher quais intervalos terão erros (mínimos) em detrimento de outros que deverão ser puros (sem erros).

Desta forma, sobretudo no período renascentista, surgiram os principais modos de temperamento musicais. Alguns desses tomaram proporções vultosas no progresso da teoria musical.

Gioseffo Zarlino (1517-1590), compositor e teórico musical na Renascença, acreditava que a harmonia vinha da diversidade, tanto como na pintura. Foi autor de importantes obras sobre a música e tratados sobre a harmonia e afinações musicais, tais como: Le istitutioniharmoni-che (1558), Dimostrationihar-moniche (1571) e Sopplimentimusicali (1588).

Matematicamente, a contribuição de Zarlino foi acrescentar o número 5 à escala pitagórica, antecipando assim alguns conceitos da série harmônica que só seriam formalizados dois séculos mais tarde. Isto posto, a escala de Zarlino é apresentada na tabela 3.

Tabela 3 - Escala de Zarlino

Dó	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó**
1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2

Fonte: O Autor

Vislumbra-se que Zarlino não seguia o ciclo de quintas para construção de seu temperamento musical. O que fez foi reproduzir a influência básica da escala Pitagórica, seguindo as divisões aritméticas e harmônicas dos intervalos, afinal, sabe-se que o intervalo de oitava (1:2) gera a quinta perfeita (2:3) e a quarta perfeita (3:4). O compositor continuou o procedimento, criando a terça maior (4:5) e a terça menor (5:6), através do intervalo de quinta.

Note que:

$$\frac{1+\frac{2}{3}}{2}=\frac{5}{6}$$

Ou seja, a média aritmética entre a tônica e a quinta.

$$\frac{2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1/2}}=\frac{4}{5}$$

Média harmônica entre a tônica e a quinta.

Recursivamente, Zarlino foi obtendo as outras notas do seu temperamento.

Mesmo quase 2000 anos após o período clássico, nota-se a influência pitagórica em Zarlino, quando este explica as consonâncias musicais através de frações mensuráveis, utilizando, para tanto, conceitos matemáticos simples. O intuito era obter uma liberdade musical, na qual o músico não precisaria se preocupar com possíveis distorções. Tal procura não terminaria com os estudos de Zarlino, já que outros teóricos tentaram formar escalas musicais, tomando as ideias pitagóricas como base.

O filósofo e matemático francês René Descartes, conhecido como uma das figuras chave da revolução científica, escreveu em 1618 a obra intitulada

Compendium Musicae, na qual utiliza diagramas matemáticos para explicar a harmonia musical. Na Figura 4 é apresentado um esquema proposto por Descartes.

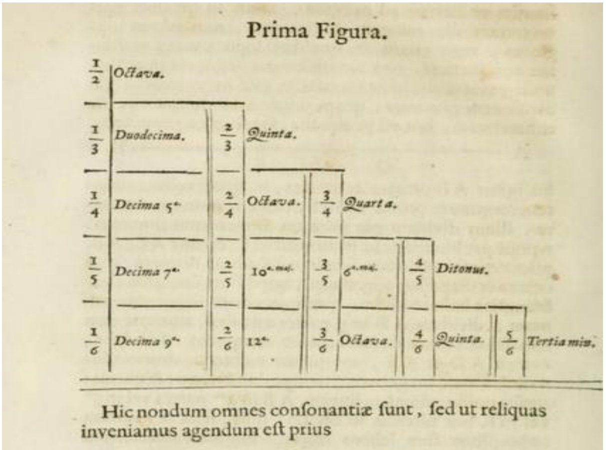
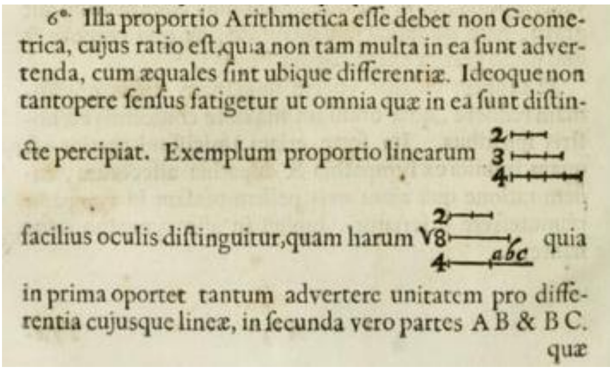


Figura 4 – Um dos esquemas matemáticos de sua obra Compendium Musicæ.
Fonte: Renati Descartes Musicæ compendium - Internet Archive

Em sua obra, Descartes defende o prazer que os sentidos humanos são capazes de experimentar em relações matemáticas simples, concordando, de certa forma, com os pitagóricos. Na Figura 5 pode-se observar o trecho em que Descartes sugere que é visualmente mais prazeroso perceber proporções entre 2, 3 e 4 do que 2, $\sqrt{8}$ e 4.



6ª Illa proportio Arithmetica eſſe debet non Geometrica, cujus ratio eſt, quia non tam multa in ea ſunt advertenda, cum æquales ſint ubique differentiæ. Ideoque non tantopere ſenſus fatigetur ut omnia quæ in ea ſunt diſtincte percipiat. Exemplum proportio linearum 2 3 4 facilius oculis diſtinguitur, quam harum 2 √8 4 quia in prima oportet tantum advertere unitatem pro differentia cujusque lineæ, in ſecunda vero partes A B & B C. quæ

Figura 5 - Esquemas matemáticos de sua obra Compendium Musicæ, para compreensão visual das proporções.
Fonte: Renati Descartes Musicæ compendium - Internet Archive

Johannes Kepler (1571-1630) contribuiu de forma significativa ao meio científico, principalmente nos estudos da física e da astronomia, mas deixou, também, diversas pesquisas sobre música. Em 1619, publicou a coletânea de cinco livros, chamada de Harmonices Mundi, na qual apresentou estudo sobre consonâncias e dissonâncias musicais.

Abdounur (1999, p.62) esclarece que Kepler verificou a existência de oito consonâncias musicais: uníssono (1/1), oitava (2/1), quinta (3/2), quarta (4/3), terça maior (5/4), terça menor (6/5), sexta maior (5/3) e sexta menor (8/5).

Kepler utilizou-se, ainda, de uma metáfora para explicar a velocidade dos planetas na sua órbita em torno do sol. Explanou que os planetas realizam órbita elíptica, e explicou que o segmento que une o centro do sol e um planeta varre áreas (A) iguais em intervalos de tempos (Δt) iguais. O físico demonstrava, assim, que os planetas tinham velocidades diferentes em pontos diferentes da órbita.

Para Rodrigues (1999, p.21), Kepler estabeleceu as harmonias dos seis planetas conhecidos, através do cálculo das razões afélio/periélio de cada um deles. Por exemplo, Saturno percorre um arco de 106 segundos por dia no seu ponto mais afastado do sol (afélio), e de 135 segundos por dia no ponto mais afastado da estrela (periélio). Obtém-se assim, $106/135 \approx 4/5$.

Neste viés, a analogia de Kepler compara as órbitas dos planetas com as consonâncias musicais, que ficam assim distribuídas segundo Abdounur (1999, p.64):

Saturno: 4/5 (terça maior)
Júpiter: 5/6 (terça menor)
Marte: 2/3 (quinta)
Terra: 15/16 (semitom)
Vênus: 24/25 (diese)
Mercúrio: 5/12 (3ª menor composta).

Outro pensador, com enorme colaboração científica para o desenvolvimento do temperamento das notas musicais, foi o francês Marin Mersenne (1588-1648). Monge franciscano, que dedicou-se exclusivamente aos estudos da religião, filosofia, matemática e música. Mersenne é conhecido entre os matemáticos pela descrição de que todo número primo é da forma 2^p -1, que mais tarde com a computação, verificou-se ser equivocada.

Mersenne trocava informações com outros cientistas e pensadores de sua época, a exemplo de Pascal, Roberval, Desargues e Gassendi, em Paris; Descartes, na Holanda; Galileu, Torriceli e Cavalieri, na Itália; Fermat em Toulouse e Hobbes em suas visitas à França. (ABDOUNUR,1999 p. 54).

Nesta época específica da história, o foco no estudo da música deixa de ser o dogmatismo pitagórico, no qual os números imperam os sentidos, e a busca pelo prazer das consonâncias é o objetivo primordial. Nesta nova fase, existe uma preocupação com os aspectos físicos da música.

Com esta nova doutrina, Mersenne estudou as vibrações das cordas, não apenas como faziam os pitagóricos, com as relações de proporção com a tônica, mas ainda tomando por base a espessura e o material que foi construído a corda. O pensador foi além, almejando uma explicação racional para as consonâncias musicais – diferentemente dos antepassados gregos, que as buscavam mediante elaboração de cálculos simples, e sempre com certo tom místico.

Mersenne colocou em seu plano de observação os instrumentos de corda, de sopro e até os de percussão. Contemplava todos eles, estudando não apenas a parte matemática, mas também a física dos objetos, como os materiais que eram produzidos.

Seu conhecimento foi condensado na obra Harmonie Universelle, composta por 7 livros, nos quais aborda quase todos os tipos de instrumento. Em um desses livros, Mersenne examina e retoma as ideias de Zarlino, consistentes em dividir os instrumentos em doze semitons iguais, utilizando médias proporcionais.

Leonard Euler (1707 – 1783) também nos iluminou com sua pesquisa sobre consonâncias musicais. Em seu trabalho Ensaio de uma Nova Teoria da Música *(Tentamen novae theoriae musicae, 1739),* Euler descreve, de forma dedutiva, uma fórmula matemática para calcular os graus de consonâncias de um intervalo.

O matemático suíço teria elucidado que, quando há temperamentos iguais, a escala não possui consonâncias extremamente puras, porém, o ouvido escutaria a razão de forma simplificada. Por exemplo, a sequência 36-45-54-64 era indistinguível de 36-45-54-63 ou mesmo de 4-5-6-7. (ABDOUNUR, 2007 p.376)

Para Rodrigues (1999, p.25):

> A teoria elaborada por Euler, baseada numa perspectiva hipotético-dedutiva, acabou por não ter uma reação favorável nos músicos de setecentos, mas não deixa por isso de ser uma notável incursão na teoria da música feita pelo matemático mais marcante do século do iluminismo, no qual a música europeia iria, contudo, começar a fornecer exemplos de composições como o Cravo bem temperado de J. S. Bach, cujos dois volumes datam, respectivamente, de 1722 e 1744.

Já que a escala pitagórica não atendia os anseios musicais no início do período Barroco, e em meio a diversos pesquisadores estudando diversos métodos de temperamento musical, surgiu a ideia do temperamento igual, que consistia em dividir uma oitava em 12 semitons iguais:

Ainda, segundo Abdounur (1999, p. 84):

> Esse modelo, desenvolvido e sistematizado no final do século XVII e início do século XVIII, época de J.S.Bach, consistia na divisão da oitava em 12 intervalos iguais de semitom, permitindo portanto ao instrumentista de tecla a execução de uma peça em qualquer tonalidade diatônica.

Destaca-se que a escala temperada, utilizada atualmente na música ocidental, só foi desenvolvida face à formalização do conceito de logaritmos, realizada por John Napier (1550-1617). Sem seus estudos, seria impossível a utilização de tal escala para a construção de instrumentos musicais.

Christiaan Huygens (1629-1695) defendeu em seu trabalho *Novus Cyclus Harmonicus (1691)* a divisão da oitava em trinta e uma partes iguais, utilizando conceitos dos logaritmos. Sua proposta, entretanto, mostrou-se falha para utilização na música (Rodrigues,1999 p. 24)

A questão dava-se, pois, sendo uma frequência f para uma nota qualquer (dentre as doze), ao multiplicar esse valor doze vezes por um fator *x* (semitom), havia que se encontrar a mesma nota na oitava de referência.

Em outras palavras:

$$f.x.x.x.x.x.x.x.x.x.x.x.x = f.x^{12} = 2.f,$$

assim:

$$x = \sqrt[12]{2} = 2^{(1/12)}.$$

Considerando a nota $Dó_1$ como referência, e com frequência *f,* as notas na escala temperada foram constituídas conforme apresentado na tabela 4.

Tabela 4 - Relação de frequências da escala temperada

Nota	**Frequência**
$Dó_1$	f
$Dó_\#$[1] ou $Ré_b$[2]	$f.2^{(1/12)}$
Ré	$f.2^{(2/12)}$
$Ré_\#$ ou Mi_b	$f.2^{(3/12)}$
Mi	$f.2^{(4/12)}$
Fá	$f.2^{(5/12)}$
$Fá_\#$ ou Sol_b	$f.2^{(6/12)}$
Sol	$f.2^{(7/12)}$
$Sol_\#$ ou La_b	$f.2^{(8/12)}$

[1] Quando a nota acompanhar o símbolo: # leia-se sustenido.
[2] Quanto a nota acompanhar o símbolo: b leia-se bemol.

Lá	$f.2^{(9/12)}$
$Lá_{\#}$ ou si_b	$f.2^{(10/12)}$
Si	$f.2^{(11/12)}$
$Dó_2$	$f.2$

Fonte: O Autor

Abdounur (1999, p 85) sustenta que:

> Provavelmente, a divisão procedeu-se dessa forma por respeito a uma certa continuidade a escala grega, cujo processo de construção – percurso de quintas – apresenta-se de tal maneira que o caminho aí delineado assumia, a menos de oitavas, máxima aproximação da nota inicial após 12 notas.

Esse ‘respeito’ pela escala pitagórica fica ainda mais evidente, ao se comparar a Tabela 5 de frequências das notas idealizadas pelos pitagóricos com a escala temperada.

Tabela 5 - Comparação entre a Escala Pitagórica e a Escala Temperada

	Relação de frequências			
	Escala Pitagórica	Aproximação	Escala Temperada	Aproximação
$Dó_1$	1	1,00	1	1
Ré	9/8	1,125	$2^{(1/6)}$	1,122462048
Mi	81/64	1,265625	$2^{(1/3)}$	1,25992105
Fá	4/3	1,333...	$2^{(5/12)}$	1,334839854
Sol	3/2	1,50	$2^{(7/12)}$	1,498307077
Lá	27/16	1,6875	$2^{(3/4)}$	1,681792831
Si	243/128	1,8984375	$2^{(5/6)}$	1,887748625
Dó2	2	2,00	2	2

Fonte: O Autor

Neste ponto, é importante elucidar por qual razão usamos $dó_{\#} = Ré_b$. Na escala cromática, quando se sobe meio tom, utiliza-se o símbolo # (sustenido). Quando se desce meio tom, utiliza-se o sinal b (bemol). Como exemplo, se da nota Dó se deseja subir meio tom, tem-se a nota $dó_{\#}$, mas se de outro giro obtém-se a nota Ré, e se planeja descer meio tom, tem-se $ré_b$.

A figura 6 mostra o esquema, com teclas de piano, a fim de ilustrar de forma mais clara a escala cromática.

Escala Cromática ascendente:

Dó – Dó# – Ré – Ré# – Mi – Fá – Fá# - Sol – Sol# - Lá – Lá# - Si - Dó

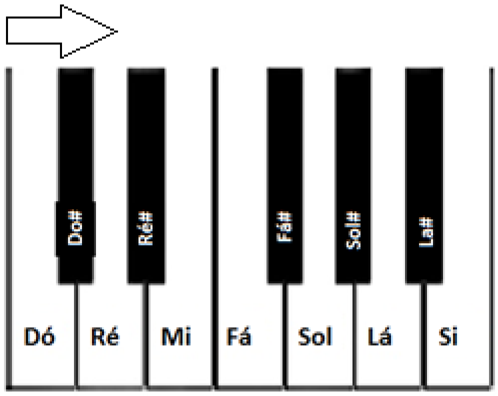


Figura 6 - Esquema para escala cromática crescente em um piano
Fonte: O Autor

A Escala Cromática descendente pode ser observada na figura 7.

Dó – Si – Si$_b$ – Lá – Lá$_b$ – Sol – Sol$_b$ – Fá – Mi – Mi$_b$ – Ré – Ré$_b$ – Dó

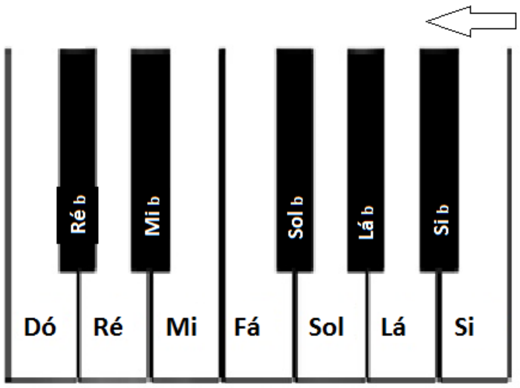


Figura 7 - Esquema para escala cromática decrescente em um piano
Fonte: O Autor

3 ASPECTOS FÍSICOS DO SOM

Este capítulo apresenta alguns conceitos e terminologias no entendimento de ondas sonoras, trata da forma que o ouvido humano identifica essas ondas e explana de maneira breve terminologias como altura e amplitude de um som.

O matemático grego Euclides (306 a.C – 283 a.C), conhecido pela autoria da obra Os Elementos, que fundamenta a geometria plana, teria sido o primeiro a relacionar o som com ondas vibratórias. O sábio relacionou que a frequência de uma corda é inversamente proporcional ao seu tamanho.

De acordo com ABDOUNUR (2007, p.371):

> Até início do século XVII, estudava-se acústica somente no que concernia a sua aplicação à música, sabendo-se já nesta época da possibilidade de produção de sons por corpos vibrantes, porém não havia formalização sobre a noção de propagação por ondas no ar. A sistematização desta ideia por meio de fórmulas matemáticas demonstrativas ocorreria mais tarde com Newton, Laplace e Euler.

Segundo Ramalho; Nicolau e Toledo. (2015, p.402) denomina-se onda uma perturbação que se propaga em um meio. Por exemplo, suponha que duas pessoas estejam segurando uma corda esticada, cada qual em uma extremidade. Se uma delas movimentar a corda de maneira brusca, formar-se-á uma perturbação, movimento inicial este que se denomina pulso. A propagação deste pulso pela longitude da corta é denominada de onda.

A mesma observação pode ser feita quando jogamos pedras num lago. Nota-se que o impacto da pedra na água é o pulso, e as perturbações decorrentes são as ondas.

Em síntese, existem dois tipos de ondas:

– **Ondas mecânicas**: originadas pela deformação de um meio material, e que precisam de um meio para se propagar;

– **Ondas Eletromagnéticas**: originadas por cargas magnéticas, e que não precisam, necessariamente, de um meio para propagação.

Uma senóide é uma representação gráfica para uma onda, em que os pontos mais altos são chamados de cristas e os pontos mais baixos chamados de ventres. O termo amplitude refere-se à distância entre o ponto médio da vibração e a crista (ou vale) da onda. A amplitude é igual ao máximo afastamento em relação ao equilíbrio, onde entende-se por equilíbrio a reta formada por uma onda sem qualquer vibração. Podemos observar o equilíbrio na figura 8, a qual é dada por uma reta pontilhada. O comprimento de onda, por sua vez, é a distância que vai de uma crista à outra adjacente. HEWITT (2002, p.331)

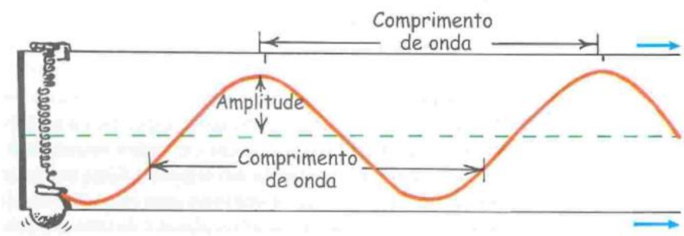


Figura 8 - Esquema: Comprimento e Amplitude de Onda
Fonte – HEWWIT (2002, p.332)

Nos fenômenos periódicos, além do período T, considera-se a frequência *f*. Chama-se frequência o número de vezes em que o fenômeno se repete na unidade de tempo como se pode notar na tabela 6.

Tabela 6 - Relação proporcional entre intervalo de tempo e número de repetições do fenômeno ondulatório

Intervalo de tempo	**Número de vezes em que o fenômeno se repete**
(período) T	1 (vez)
(unidade de tempo) 1	f (vezes) (frequência)

Fonte: O Autor

Por regra de três simples, temos: $f.T = 1$,

Ou seja: $f = \frac{1}{T}$

A unidade de frequência do Sistema Internacional de Unidades (ciclos por segundo) é denominada hertz (símbolo: Hz), em homenagem ao matemático Alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894), que demonstrou a existência das ondas de rádio em 1886.

Por exemplo, se ocorrem três vibrações a cada segundo, a frequência é de três vibrações por segundo, ou seja, 3 Hz. Uma estação de rádio FM, por exemplo, que está sintonizada em 102.7 Mhz (milhões de hertz) transmite ondas de frequência de oscilação de 102 700 000 hertz.

Como frequência é o inverso do período, entende-se que, por exemplo, uma vibração de 3Hz precise de 1/3 de segundo para ser transmitida.

Um simples bater de palmas não parece uma onda periódica, porém o bater de palmas é o pulso, as ondas a partir desse pulso são as perturbações que esse pulso causa no ar. É fato que o som também se propaga em outros meios como a água e através de corpos elásticos (aqueles que sofrem perturbações, mesmo que imperceptíveis ao olho humano), porém este trabalho concentra apenas a propagação do som exclusivamente no ar.

Diferente do que se usa cotidianamente, o termo ‘altura do som’ não se refere a percepção de maior volume ou menor volume. Na realidade, a altura do som é dada por sua frequência em hertz. Neste raciocínio, um som de frequência 200 Hz é mais ‘alto’ que um som de 100 Hz. Por sua vez, um som de 50Hz seria mais ‘baixo’ que este de 100Hz.

Uma pessoa comum, em média, pode escutar na faixa de 20Hz a 20000Hz (valores que podem variar para cada indivíduo). Os sons abaixo de 20Hz são classificados como infrassônicas e sons mais altos que 20000hz são classificados como ultrassônicos.

Em se tratando da escala diatônica, é possível afirmar que dentro de uma mesma oitava, a nota Mi é uma nota mais alta que a nota Ré, mas que a nota Mi é mais baixa que a nota Sol. Ou seja, conforme se sobe a escala a partir do Dó fundamental de um piano (Dó central de um piano), obtem-se notas mais altas, notas que terão maior frequência em Hertz.

O processo que leva o som aos nossos ouvidos é uma sequência de rarefação e compressão do ar, sucessão de eventos após o pulso, que é muito rápida e só é percebida pelo humano devido à grande sensibilidade do tímpano. Em uma caixa de som pode-se notar esse processo de rarefação e compressão do ar, já que é possível ver o centro do alto-falante fazendo pequenos movimentos, transformando impulsos magnéticos em pulsos sonoros.

A intensidade de um som é dada pela amplitude das vibrações de pressão no interior de uma onda sonora. Quando um aparelho de som está no seu máximo volume, podemos dizer que está na sua maior intensidade, porém quando mudamos o volume desse aparelho para o mínimo, na verdade estamos diminuindo a intensidade sonora.

A intensidade sonora é medida por watts/metro^2, para uma pessoa comum, em média, a intensidade mínima é de 10^{-12}w/m^2 e a intensidade máxima seria de aproximadamente 1w/m^2. Por se tratar de uma faixa de valores muito grande, foi criada uma escala em homenagem ao inventor Alexandre Graham Bell. Nessa escala o limiar mínimo de audição foi considerado como 0 bel, note que apesar de usar o valor zero, zero bel não é zero absoluto mas 10^{-12}w/m^2 que é quase o silêncio total, por isso é utilizado o zero nessa escala. Um som 10 vezes mais intenso que o zero bel seria de 1 bel ou 10decibels (10^{-11}w/m^2). Por sua vez 20 decibels seria 100 vezes maior que o limiar da audição. Contudo a percepção da intensidade sonora é diferenciada para cada pessoa.

Assim, para medir a intensidade sonora, definiu-se uma grandeza B, denominada nível de intensidade, da seguinte maneira:

$$B = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Onde I_0 é a intensidade mínima supracitada.

Se $I = I_0$, temos $B = \log\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = log1 = 0$;

Se $I = 10I_0$, temos $B = \log\left(\frac{10I_0}{I_0}\right) = log10 = 1$;

Se $I = 100I_0$, temos $B = \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) = log100 = 2$.

De maneira geral temos:

Se $I = 10^nI_0$, temos $B = \log\left(\frac{10^nI_0}{I_0}\right) = log10^n = n$.

É possível facilmente diferenciar o som produzido pelo ruído de um bater de chaves e uma nota musical e sem muita dificuldade é razoável até mesmo distinguir os sons de uma mesma nota musical produzida por instrumentos musicais diferentes. Essa diferença sutil de sonoridade chamamos de Timbre. Imagine que um músico toque uma nota Dó em um piano e que posteriormente faça isso em qualquer outro instrumento, apesar de ser a mesma nota os sons serão ligeiramente diferentes, ou seja, tem timbres diferentes. A diferença de timbre de uma mesma nota nos instrumentos se dá pelas variações do material que o instrumento foi produzido e da característica física de cada um, pois ao tocar uma nota além da perturbação no ar existe a perturbação no próprio instrumento, causando assim pequenas modificações. Segundo Hewitt (2002, p.362) é a variedade das componentes de frequência que dão a uma nota musical seu timbre característico.

Em 1822 Jean Batiste Joseph Fourier (1768-1830) publica Théorie analytique de la chaleur (Teoria analítica do calor), na tentativa de mostrar que a condução de energia em corpos sólidos podia ser analisada por séries matemáticas infinitas. Fourier descreve que movimentos ondulatórios complicados podem ser descritos como sequências de curvas senoidais. Para descrever sons diferentes pode-se utilizar séries, hoje conhecidas como séries de Fourier, para descrever de forma simplificada esse som.

Para Abdounur (1999, p. 88):

> Nesse ponto, pode-se entender o processo que levou à compreensão racional deste fenômeno à luz da matemática. A comprovação da característica periódica do som associada à contribuição indireta de Fourier (1769-1830) para a música colaboraram na solução do enigma proposto por Pitágoras à ciência há cerca de 2500 anos atrás: Por que se caracterizam consonância pela relação de pequenos números inteiros?

Através da Análise de Fourier chegou-se à conclusão que qualquer forma periódica de vibração pode ser obtida pela soma de vibrações simples multiplicadas por 1 (fundamental), 2, 3, 4... vezes a frequência do movimento dado. ABDOUNUR (1999, p.89).

4 PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DO MONOCÓRDIO

Neste capítulo uma proposta de construção do monocórdio é apresentada com o objetivo de utilizar conceitos de frações. Posteriormente conceitua-se de maneira simplificada os conceitos básicos de frações que podem ser abordados com essa atividade e então é proposto atividades com frações que auxiliam na construção da escala diatônica.

A exploração do conteúdo de frações com a utilização do monocórdio pode ser feita através de aulas expositivas ou minicurso que relacione a música com a matemática. Podemos adaptar esse conteúdo a realidade do estudante ou do tempo disponível. A construção do monocórdio pode ser produzida em um minicurso. É muito importante que seja exposto o contexto histórico, a preocupação dos Pitagóricos com as consonâncias musicais, a experiência realizada pelos Pitagóricos e inclusive a lenda contada por *Guido d´Arezzo* sobre os pesos dos martelos do ferreiro.

Na exploração do tema é importante que o aluno compreenda que a experiência dos pitagóricos com o monocórdio se deu através do método dedutivo, mas que logo os pitagóricos perceberam que os sons mais harmoniosos se dão através de razões simples. E que os pitagóricos provavelmente chegaram a essas conclusões utilizando o misticismo, ou seja, a crença que tudo poderia ser explicado através dos números mais simples.

4.1 CONSTRUINDO MONOCÓRDIO DE MANEIRA SIMPLIFICADA

Materiais necessários:

– Tábua de madeira com aproximadamente 70 cm de comprimento, 10 cm de largura e 3 cm de espessura, conforme figura 9. (A largura e a espessura podem ter outros valores sem prejuízo para a construção)

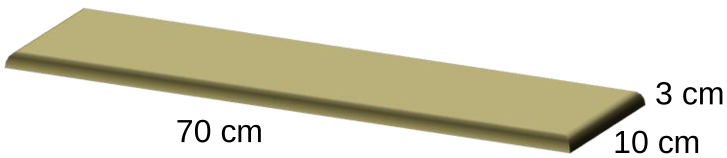


Figura 9 - Especificações da tábua para a construção do monocórdio
Fonte: O Autor

– Dois pedaços de madeira que tenham a mesma largura da tábua escolhida, com 3 cm espessura e 5 cm de altura.

– Um pedaço de madeira com aproximadamente o formato de um prisma triangular, tal que uma das alturas desse prisma seja um pouco maior que 5 cm. Esse prisma não será fixado ao monocórdio, utilizaremos posteriormente como cavalete móvel do instrumento.

– Cola de Madeira;

– Pregos;

– Martelo

– Corda de violão;

– Fita Métrica

Na tábua, cole (ou pregue) em cada extremidade cada um dos pedaços de madeira de tal forma que estes fiquem exatamente a 66 cm de distância um do outro. É importante que esses pedaços de madeira fiquem exatamente na mesma altura quando fixados na tábua principal, pois eles serão os cavaletes, observe a figura 10 para compreender o esquema de construção.

Figura 10 - Esquema lateral posicionamento dos cavaletes.
Fonte: O Autor

Em cada extremidade da tábua fixe um prego, de acordo com a figura 11, de tal forma que estes pregos fiquem bem presos, mas que não estejam totalmente introduzido na tábua. O prego deve ser fixo de tal forma que cada um fique exatamente no ponto médio da largura da tábua.

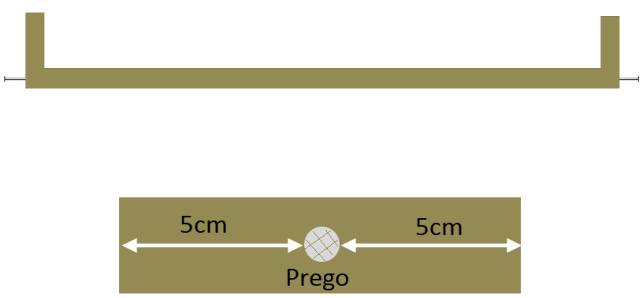


Figura 11 - Esquema lateral e frontal posicionamento pregos
Fonte: O Autor

Amarre uma das pontas da corda de violão em um dos pregos, estique essa corda até o outro prego e fixe-o. Certifique-se que a corda ficou bem esticada, conforme a figura 12.

Figura 12 - Esquema lateral posicionamento da corda
Fonte: O Autor

Com o auxílio da fita métrica, faça na tábua as marcações das consonâncias pitagóricas. Como o monocórdio tem dois cavaletes, chamaremos um dos cavaletes de A e o outro de B. A fim de facilitar as marcações deve se medir sempre no sentido de A para B.

A tônica deverá ter 66 cm, ou seja, pela corda esticada.

A oitava deve ter $\frac{1}{2}$ da tônica, a marcação deverá estar à 33 cm do cavalete A.

A quarta pitagórica tem $\frac{3}{4}$ da tônica, isto é, $\frac{3}{4}.66 = 49{,}5cm$.

A quinta pitagórica é $\frac{2}{3}$ da tônica,ou seja, $\frac{2}{3}.66 = 44cm$.

Uma vez que se deseja explorar parte da história das notas musicais, seria interessante que a oitava, a quarta e a quinta fossem destacadas das outras marcações.

As marcações no monocórdio devem seguir os valores da tabela 7.

Tabela 7 - Medidas das marcações no monocórdio

	Dó$_1$	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó2**
Fração	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2
Medida (cm)	66	58,6	52,14	49,5	44	39,1	34,7	33

Fonte: O Autor

A organização na marcação das medidas é de suma importância. Na figura 13 observa-se como ficam as marcações conforme as medidas da tabela 7.

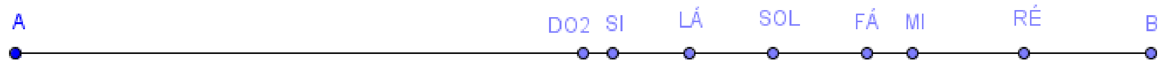


Figura 13 - Esquema disposição das notas no monocórdio.
Fonte: O Autor.

É importante salientar que a construção do monocórdio pode não necessariamente ser construído pelo orientador da atividade, o mesmo pode apenas utilizar as medidas e materiais alternativos.

4.2 EXPLORANDO FRAÇÕES COM A CONSTRUÇÃO DO MONOCÓRDIO

O objetivo desta proposta é conseguir de forma rudimentar reproduzir a experiência científica dos pitagóricos, a obtenção das consonâncias básicas no monocórdio, a tônica, a oitava, a quarta e a quinta. Incentivando assim de forma concreta a utilização de operações através de frações. Para tanto é necessário definir alguns conceitos matemáticos.

Denomina-se como fração, à representação de números racionais não negativos compostos por numerador e denominador e traço da fração.

$$\frac{numerador}{denominador}$$

O denominador indica em quantas partes o inteiro é dividido, e o numerador indica quantas partes é tomado do inteiro.

Por exemplo: A fração $\frac{1}{3}$ tem denominador 3, o que indica que o inteiro em 3 foi dividido em partes iguais, o numerador 1 indica que se tomou apenas 1 das três partes, tal relação é salientada na figura 14.

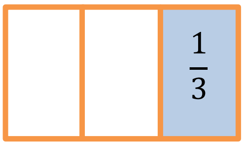


Figura 14 - Representação da fração 1/3
Fonte: O autor

4.2.1 Propriedades das frações

4.2.1.1 Frações equivalentes

Se é feita a multiplicação dos termos de uma fração (numerador e denominador) pelo mesmo número natural n, se obtém uma fração dita equivalente a primeira.

$$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$$

É possível simplificar uma fração pelo fator equivalente, isto é, se em uma fração o numerador e denominador são divisíveis pelo mesmo número (ou seja MDC(na, nb)= n), então divide-se numerador e denominador por n, obtendo:

$$\frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$$

4.2.1.2 Comparação entre frações

Caso as frações tenham o mesmo numerador, será maior a fração que tiver o menor denominador, por exemplo:

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5}.$$

Caso as frações tenham o mesmo denominador, será maior a fração que tiver o maior numerador, por exemplo:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}.$$

Caso as frações não tenham numeradores e denominadores de mesmo valor, deve-se transformar as duas frações em frações equivalentes, tal que o denominador de ambas seja o Mínimo Múltiplo Comum entre seus denominadores. Por exemplo:

Comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$.

Como o MMC(3,5)=15

Tem-se:

$$\frac{2}{3} = \frac{2.5}{3.5} = \frac{10}{15},$$

e

$$\frac{4}{5} = \frac{4.3}{5.3} = \frac{12}{15}.$$

Então:

$$\frac{10}{15} < \frac{12}{15},$$

e conclui-se que:

$$\frac{2}{3} < \frac{4}{5}.$$

4.2.1.3 Soma ou subtração de frações

Caso as frações apresentem o mesmo denominador, basta somar (ou subtrair) os numeradores. Mas se as frações estiverem com denominadores diferentes, deve-se reescrever as duas frações por frações equivalentes de tal forma que seus denominadores sejam o mínimo múltiplo comum entre os denominadores anteriores, realizando então a operação de soma ou subtração dos numeradores, por exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5},$$

O MMC(2,5)=10, tem-se então:

$$\frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{11}{10}.$$

4.2.1.4 Multiplicação de frações

Apenas multiplique seus respectivos numeradores e os denominadores.

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

Por exemplo:

$$\frac{2}{3} . \frac{5}{7} = \frac{10}{21}.$$

4.2.1.5 Divisão de frações

Em caso geral a divisão de uma fração por outra pode ser feita pela multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda, ou seja:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c},$$

Por exemplo:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}.\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\ .$$

4.3 ATIVIDADES SUGERIDAS

Problema 1:

Compare as frações do conjunto A = {1/2; 64/81; 128/243; 3/4; 2/3; 16/27; 8/9; 1} e reescreva o conjunto A em ordem crescente.

Solução:

Nessa atividade o aluno tem que explorar os conceitos de frações equivalente, comparar a cada duas frações criando assim a sequência correta. É importante que após encontrar a solução, seja feita a observação geométrica dessas frações no Monocórdio para melhor compreensão dos resultados obtidos.

Após aplicar o processo obtém-se a solução: A = {1/2; 128/243; 16/27; 2/3; 3/4; 64/81; 8/9; 1}

Problema 2:

Para uma corda de 66 cm de comprimento, como obter as medidas correspondentes de cada fração referente as consonâncias pitagóricas?

Solução:

Nessa atividade o professor pode explorar o conceito de fração aplicável em qualquer medida de comprimento, explicando, por exemplo, como obter a fração 3/4 em uma corda de 100 cm. Divide-se a corda em 4 pedaços iguais de 25 cm e toma-se 3 desses pedaços, chegando aos 75 cm. É importante que o próprio aluno conclua que a simples multiplicação do tamanho da corda pela fração desejada chegará ao resultado esperado.

É muito provável que os alunos sintam dificuldade com as frações que tenham maiores denominadores, portanto deve-se começar pelas frações com menores denominadores {1/2; 2/3; 3/4}.

Problema 3:

Sabendo que todas as notas uma oitava acima devem ser exatamente a metade da oitava anterior, com base nas frações já calculadas correspondentes a cada nota musical, calcule as frações correspondentes a cada nota próxima oitava, ou seja, uma oitava acima.

Solução:

Por exemplo: Se a fração referente a nota Mi na primeira oitava (Mi_1) é 64/81 então a fração referente a nota Mi na segunda oitava Mi_2 é:

$$\frac{\frac{64}{81}}{2} = \frac{64}{81} \cdot \frac{1}{2} = \frac{32}{81}.$$

Esse problema explora a divisão de fração por outra fração, pois em todas é preciso dividir cada fração conhecida por 2. Na tabela 8 é apresentada a solução do problema.

Tabela 8 - Solução da atividade com frações - Problema 3

Dó₁	**Ré₁**	**Mi₁**	**Fá₁**	**Sol₁**	**Lá₁**	**Si₁**	**Dó₂**
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2
Dó₂	Ré₂	Mi₂	Fá₂	Sol₂	Lá₂	Si₂	Dó₃
1/2	4/9	32/81	3/8	1/3	8/27	64/243	1/4

Fonte: O Autor

Problema 4: Utilizando os resultados do exercício anterior, faça um diagrama da disposição das duas primeiras oitavas no monocórdio. Utilizando esse diagrama e o ciclo de quintas descreva as frações que compõe a escala pitagórica.

Solução:

Utilizando a tabela 8 para montar o diagrama, pode-se observar a solução do problema através da figura 15.

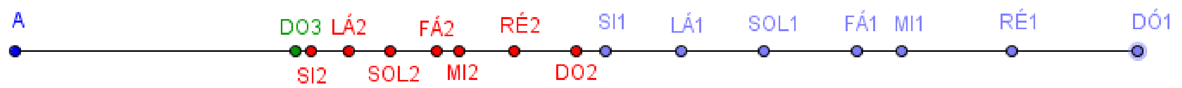


Figura 15 – Solução da atividade com frações - Problema 4
Fonte: O Autor

Como já mencionado nesse trabalho o ciclo de quintas na escala pitagórica consiste em multiplicar a fração referente a uma nota por 2/3 gerando as quintas, exceto a fração referente a nota Fá (quarta).

Pelo ciclo de quintas tem-se a seguinte sequência:

- A quinta de Do_1 é Sol_1;

- A quinta de Sol_1 é a nota $Ré_2$, como a nota $Ré_2$ está na segunda oitava, multiplica-se esse resultado por 2 e obtendo a nota $Ré_1$;

- A quinta de Ré1 será $Lá_1$;

- A quinta de $Lá_1$ é a nota Mi_2, que será multiplicada por 2 para manter na primeira oitava, assim obtém-se a nota Mi_1;

- A quinta de Mi_1 é Si_1;

- A quinta de $Fá_1$ é a oitava $Dó_2$.

Na figura 16 é possível observar geometricamente como se comporta o esquema das quintas.

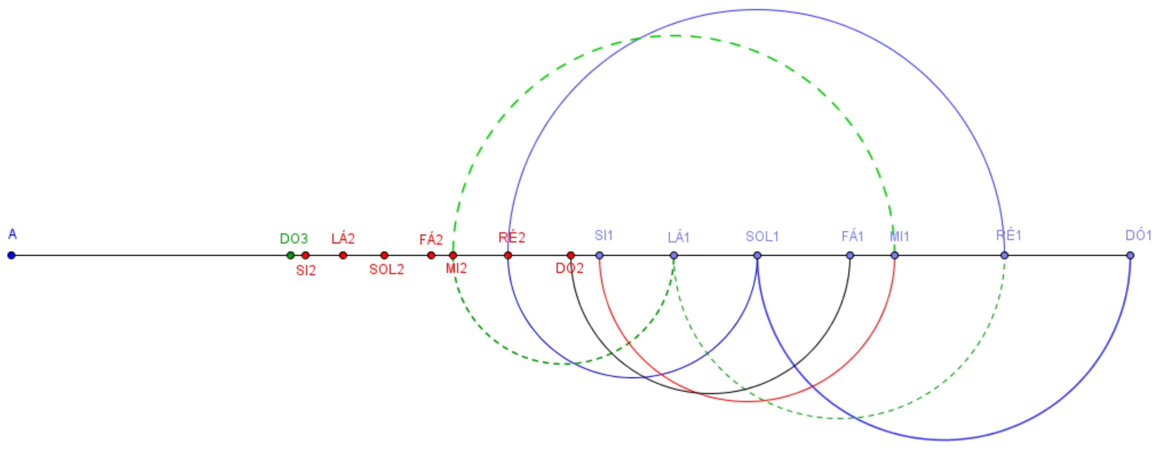


Figura 16 - Solução da atividade com frações, sequência do ciclo de quintas - Problema 4
Fonte: O Autor

Problema 5: No Ciclo de quintas, as notas formam uma sequência de tal maneira que sempre a sua quinta, será a quinta nota desde que comece a contar pela nota atual. Forme a sequência do ciclo de quintas a partir do $Dó_1$ e termine antes de começar a oitava.

Solução:

É necessário colocar todas as notas de $Dó_1$ até Si_7 em ordem e então destacar as quintas, conforme tabela 9.

Tabela 9 - Solução da atividade com frações - Problema 5

Dó$_1$	Ré$_1$	Mi$_1$	Fá$_1$	**Sol$_1$**	Lá$_1$	Si$_1$
Dó$_2$	**Ré$_2$**	Mi$_2$	Fá$_2$	Sol$_2$	**Lá$_2$**	Si$_2$
Dó$_3$	Ré$_3$	**Mi$_3$**	Fá$_3$	Sol$_3$	Lá$_3$	**Si$_3$**
Dó$_4$	Ré$_4$	Mi$_4$	**Fá$_4$**	Sol$_4$	Lá$_4$	Si$_4$
Dó$_5$	Ré$_5$	Mi$_5$	Fá$_5$	**Sol$_5$**	Lá$_5$	Si$_5$
Dó$_6$	**Ré$_6$**	Mi$_6$	Fá$_6$	Sol$_6$	**Lá$_6$**	Si$_6$
Dó$_7$	Ré$_7$	**Mi$_7$**	Fá$_7$	Sol$_7$	Lá$_7$	**Si$_7$**

Fonte: O Autor

Observando a tabela 9, a sequência no ciclo de quintas é:

Dó$_1$ - Sol$_1$ - Ré$_2$ - Lá$_2$ - Mi$_3$ - Si$_3$ - Fá$_4$ - Dó$_5$ - Sol$_5$ - Ré$_6$ - Lá$_6$ - Mi$_7$ - Si$_7$

Problema 6: Através da resolução do exercício anterior, mostre o defeito da escala pitagórica que aparece no Sí$_7$.

Solução:

Como é possível observar na sequência anterior, a nota Sí$_7$ ocupa a décima terceira posição após contínuos ciclos de quinta, ou seja, multiplicações sucessivas pela fração 2/3. Considerando a nota Dó$_1$ como a tônica e que tem fração valor 1 em relação ao tamanho do monocórdio, pode-se deduzir que:

$$Sí_7\ 1.\left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \frac{4096}{531441} \approx 0{,}007707\ ,$$

Mas note que seguindo a lógica que o tamanho da corda que gera a nota uma oitava acima deve ser a metade da oitava anterior, deve-se observar que a fração referente a nota Sí$_1$=$\frac{128}{243}$, assim a nota Sí2 deve ter a metade do tamanho de Si1 e assim por diante, logo deduz-se que:

$$Sí_7 = \frac{128}{243} : 64 = \frac{2}{243} \approx 0{,}00823\ .$$

Foram essas pequenas diferenças que embora pareçam matematicamente insignificantes, traziam transtornos aos músicos da época, por isso a escala pitagórica acabou sendo trocada pela escala temperada.

5 PROPOSTA ESTUDO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Nesse capítulo é abordado a escala temperada, que é utilizada nos dias atuais, para servir de estímulo para o estudo de funções exponenciais. Quando se trata de função exponencial, os exemplos mais comuns, em geral, são: juros compostos e crescimento populacional. Por isso essa parte do trabalho pretende formalizar outro exemplo que pode ser levado a qualquer sala de aula sem exigir muito esforço do discente.

5.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = b.a^x$ para todo $x \in IR$, onde a e b são constantes positivas. Se a>1, a função é crescente e se 0< a <1, a função é decrescente. (Brener, 2013, p.64)

Exemplo 1:

Dados b =1 e a =2, tem-se: $f(x) = 2^x$

A tabela 10 apresenta alguns pares ordenados da função acima citada e na figura 17 o esboço da função.

Tabela 10 - Pares ordenados para função exponencial f(x)=2^x

x	**f(x)**
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4

Fonte: O Autor

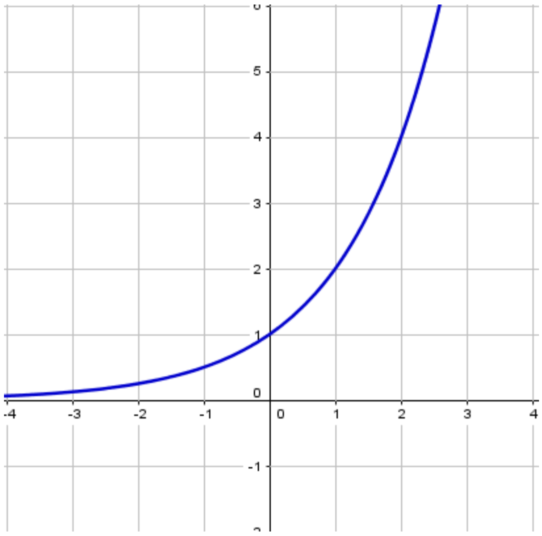


Figura 17 - Gráfico Função exponencial $f(x)=2^x$
Fonte: O Autor (Geogebra)

Exemplo 2:

Dados b=1 e a =1/2, tem-se que: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Usando como base a função acima se tem a construção do esboço do gráfico na figura 18 com os pares ordenados construídos na tabela11.

Tabela 11 - Pares ordenados para função exponencial $f(x)=2^{-x}$

X	f(x)
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

Fonte: O Autor

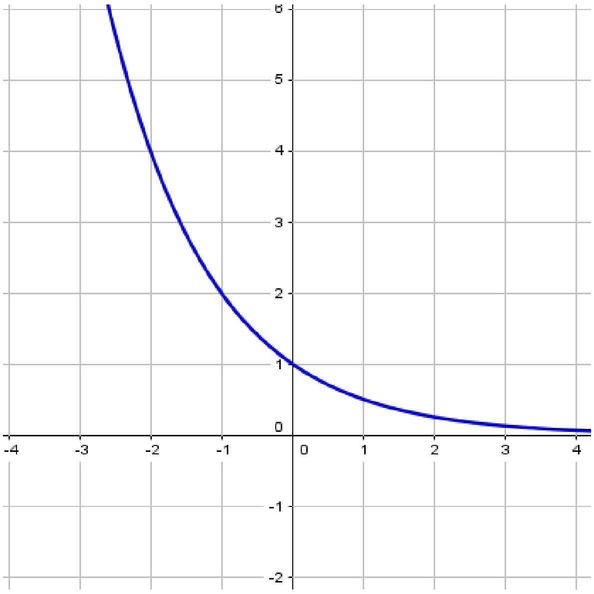


Figura 18 - Gráfico Função exponencial $f(x)=2^{-x}$
Fonte: O Autor (Geogebra)

É possível observar pelos exemplos anteriores, que independente da função exponencial ser crescente ou decrescente, a função exponencial intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0;1). Tomando então uma função: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b.a^x$ para $b \neq 0$, a função interceptará o eixo das ordenadas no ponto (0;b) pois:

Se x=0

$$f(0) = b.a^0 = b.1 = b$$

Exemplo 3:

Dados $b = 1$ e $a = 2$, tem-se: $f(x) = 3.2^x$, sendo apresentado na tabela 12 alguns pares ordenados da função e o esboço da mesma na figura 19.

Tabela 12 - Pares ordenados para função exponencial $f(x)=3.2^x$

x	**f(x)**
-2	3/4
-1	3/2
0	3
1	6
2	12

Fonte: O Autor

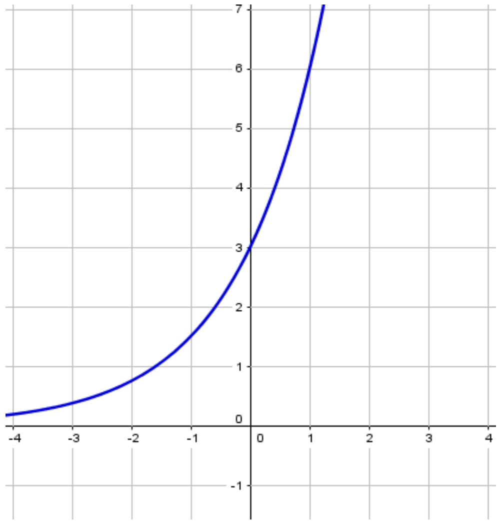


Figura 19 - Gráfico função exponencial $f(x)=3.2^x$
Fonte: O Autor (Geogebra)

5.2 ATIVIDADE: MÚSICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Como já mencionado nesse trabalho a escala temperada é a mais utilizada, e é possível usar essa escala para construir uma função exponencial, para isso deve-se utilizar um piano e um afinador musical eletrônico, porém como esse instrumento não seria de fácil acesso um simulador de piano eletrônico será utilizado em substituição. Existem muitos simuladores de piano disponíveis na *internet*, nesse trabalho foi escolhido *piano virtual* disponível na loja virtual do Google Chrome (http://virtualpianos.info/). A escolha desse aplicativo se deu ao fato deste apresentar a frequência em Hertz de cada nota, dispensando assim a utilização de um afinador eletrônico e também por ser um aplicativo gratuito.

O aplicativo traz as notas musicais em forma de siglas utilizadas pelos músicos, segue as siglas na tabela 13.

Tabela 13 - Siglas utilizadas para Escala Temperada

Nota	Siglas Naturais	Sustenido	Bemol
Lá	A	A#	Ab
Si	B	B#	Bb
Dó	C	C#	Cb
Ré	D	D#	Db
Mi	E	E#	Eb
Fá	F	F#	Fb

Fonte: O Autor

O aplicativo mostra também um numeral, que representa a oitava em que a nota está, por exemplo, a nota C5 representa Dó na quinta oitava do piano.

Problema 1:

Utilizando o aplicativo *piano virtual*, apresentado na figura 20, encontre todas as notas Dó e anote sua frequência em Hertz.

Figura 20 - Tela Aplicativo Piano Virtual
Fonte: Acervo do Autor

Solução:

Utilizando a opção numeral que o aplicativo apresenta, pode-se identificar que a primeira nota Dó (C1) encontra-se na tecla 4, assim basta contar 12 teclas para obter a próxima nota Dó, então C1 é dada pela tecla 4, C2 pela tecla 6, C3 tecla 28, C4 tecla 40, C5 tecla 52, C6 tecla 64 e finalmente C7 pela tecla 76.

A solução do problema segue na tabela 14.

Tabela 14 – Solução da atividade função exponencial - Problema 1

Nota	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**
Frequência (Hz)	33	65	131	262	523	1047	2093

Fonte: O Autor

É importante ressaltar que o programa apresenta os valores aproximados para frequência de cada nota.

Problema 2:

Utilizando o programa Geogebra disponha os valores obtidos no problema anterior em um plano cartesiano.

Solução:

Como a nota C4 é considerada o Dó central considere esse valor como de abscissa igual a zero e ordenada igual a sua frequência em Hz dado no exercício anterior, por exemplo a C4 será o ponto (0;262), as sete notas em questão devem formar uma progressão aritmética de razão igual 1. A solução do problema com todos os pontos é apresentada na figura 21.

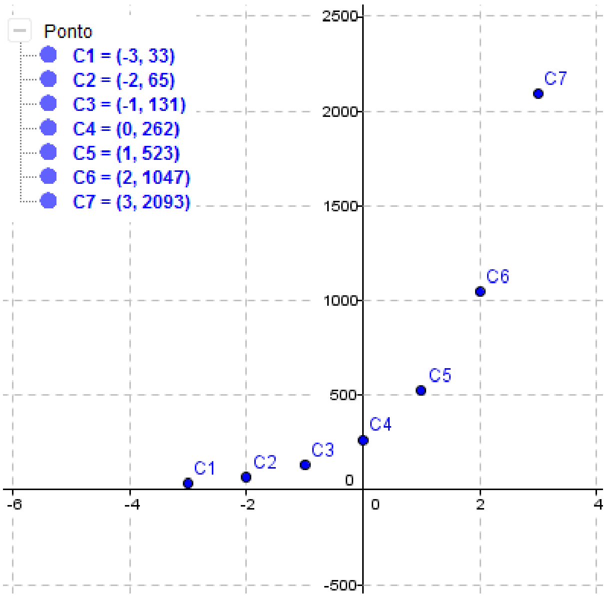


Figura 21 - Solução da atividade função exponencial – Problema 2

Problema 3: Escreva uma função exponencial que se ajuste aos pontos dados.

Solução:

Considerando os pontos (0,262) e (1,523) tem-se:

$$f(x) = b.a^x$$

Para $x = 0$ na equação acima, obtém-se $b = 262$, assim para $x = 1$, é possível concluir que:

$$523 = 262.a^1$$

$$a = \frac{523}{262} \approx 2$$

Então a função $f(x) = 262.2^x$ é a que melhor se ajusta aos pontos e na figura 22 o esboço função em questão é apresentado.

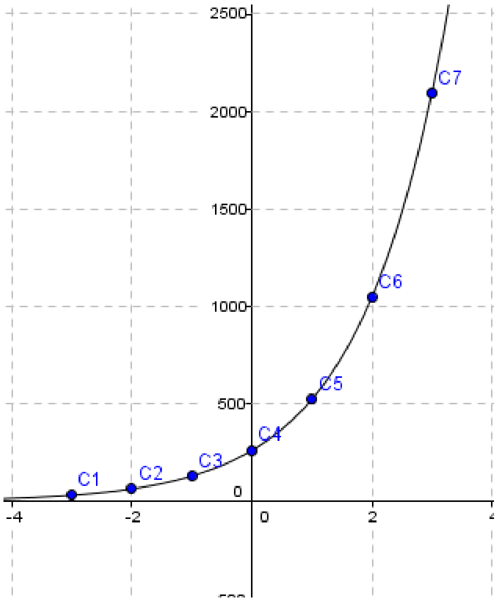


Figura 22 - Gráfico Função Exponencial f(x)=262.2^x
Fonte: O Autor

6 PROPOSTA PARA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O conceito de funções periódicas, em especial as funções seno e cosseno, que são geralmente utilizadas para representar fenômenos naturais ondulatórios são tratados neste capítulo. Assim como a proposta de construção de atividades no Geogebra que relacionem senóides e conceitos sonoros expostos no capítulo 2 e a construção da escala temperada.

6.1 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função é denominada periódica se existe um número real *P*≠0 tal que $f(x+P)=f(x)$ para todo $x \in D(f)$. O número *P* é chamado período da função, assim o gráfico das funções periódicas se repetem a cada intervalo de $|P|$.

Por exemplo, considere a função:

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad | \, f(x) = (-1)^x$$

É fácil observar que:

$$f(0+2) = f(0)$$

Ou de forma mais genérica que:

$$f(x+2) = f(x), \, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Na figura 23 pode-se observar graficamente o exemplo de função periódica.

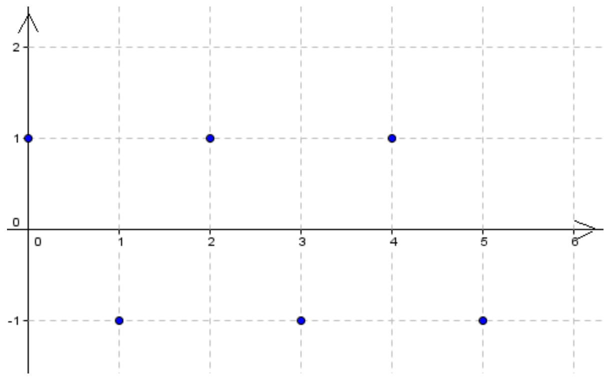


Figura 23 - Exemplo de função periódica.
Fonte: O Autor (Geogebra)

A fim de observar a característica gráfica da periodicidade de uma função pode-se visualizar a figura 24 onde dois exemplos de gráficos de função periódica são apresentados, em que se nota a característica de repetição de valores das ordenadas a cada período de abscissas.

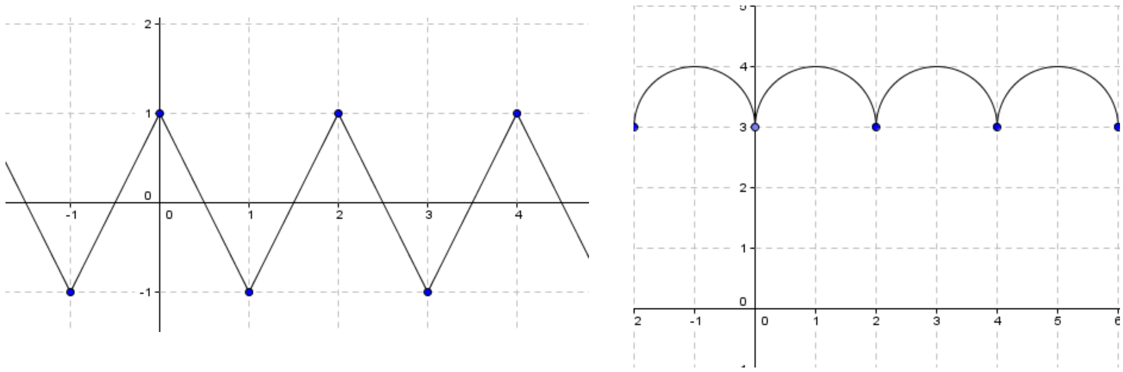


Figura 24 - Exemplos de funções periódicas
Fonte: O Autor (Geogebra)

6.2 FUNÇÃO SENO

Seja x um número real. Marca-se um arco medida x (radianos) em uma circunferência com raio unitário. Sendo P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x, com a circunferência, conforme a figura 25.

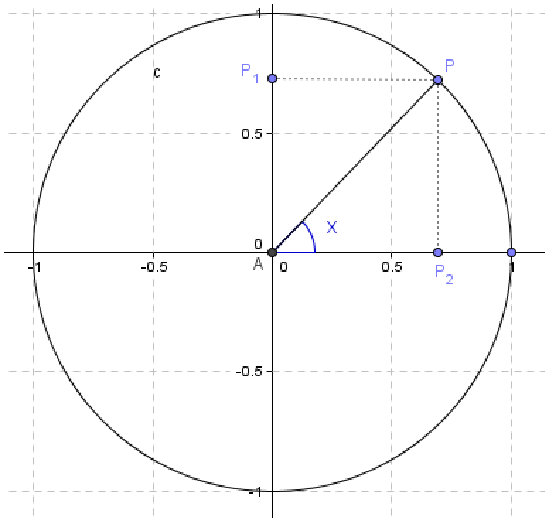


Figura 25 – Circunferência de raio unitário
Fonte: O Autor

Observando a figura, tem-se que:

$$sen\ x = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$$

Assim:

$$sen\ x = \frac{\overline{PP_2}}{1}$$

Sendo $\overline{P_1P}//\overline{AP_2}$, tem-se que os segmentos $\overline{PP_2} = \overline{AP_1}$, definindo $y = AP_1$, a função seno fica assim definida: $f: IR \to IR \quad |y = senx$.

O gráfico da função $f(x) = sen\,x$, forma a curva conhecida como senóide, que pode ser observada na figura 26.

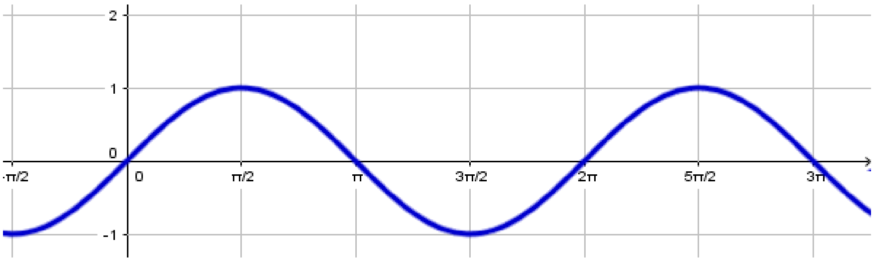


Figura 26 - Representação gráfica da função seno
Fonte: O Autor

6.3 FUNÇÃO COSSENO

Repetindo o procedimento da função seno, marcamos um ângulo central com medida x (radianos) em uma circunferência com raio unitário, tal que x seja um número real. Sendo P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x, com a circunferência, conforme figura 25.

Observando a figura 25 e repetindo o procedimento anterior para determinar a função seno, tem-se que:

$$cos\ \ x = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$$

Assim:

$$cos\ \ x = \frac{\overline{AP_2}}{1}$$

Observe que o segmento $\overline{AP_2} = cos\,x$, definindo $y = AP_2$, a função cosseno fica assim definida: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | \, y = cos\,x$.

O gráfico da função $f(x) = cos\ \ x$, forma a curva conhecida como senóide (o nome senóide também é dado para a função cosseno, pois as curvas de seno e cosseno são as mesmas, diferindo apenas em sua posição no eixo x, na figura 27 vê-se um esboço da função cosseno.

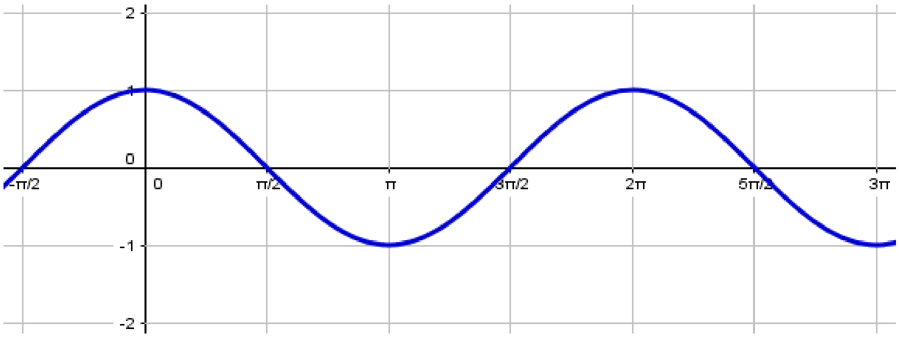


Figura 27 - Representação gráfica da função cosseno
Fonte: O Autor

6.4 TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS DA FUNÇÃO SENO E COSSENO

A família de funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a + b.sen(c.x)$, onde $\{a; c\} \in IR$ e $b \in IR^*$, são chamadas de variações da função $f(x) = sen\, x$, que aqui nesse trabalho será denotada de função seno original. Para melhor compreensão, alguns exemplos com as variações da função seno serão trabalhadas a seguir.

Exemplo 1

$$f(x) = 2.sen\, x$$

Note que da função original variou-se apenas o coeficiente $b = 2$, enquanto os coeficientes $c = 1$ e $a = 0$.

Escolhendo por exemplo $x = \frac{\pi}{4}$, tem-se:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

É de fácil verificação que ao modificar o coeficiente b para 2, todas as imagens da função seno original terão seu valor duplicado. A representação gráfica da função é dada na figura 28.

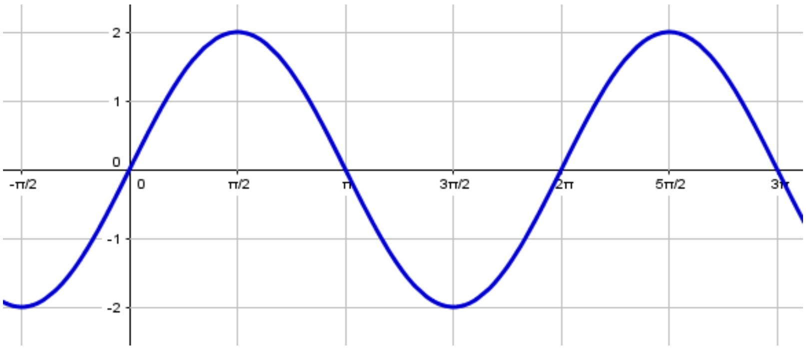


Figura 28 - Representação Gráfica Função Seno - Exemplo 1
Fonte: O Autor

Pode-se observar que o coeficiente b alterou a imagem da função deixando a mesma com valor máximo igual a 2 e valor mínimo igual a -2, $Imagem(f) = [-2; 2]$, Observe que o valor do Período = $2.\pi\ rad$.

Exemplo 2:

$$f(x) = sen(2x)$$

Tem-se: $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$

Para $x = \frac{\pi}{4}$, por exemplo:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(2.\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Nesse exemplo a imagem da função não será alterada em relação a imagem da função original, $Imagem(f) = [-1; 1]$, porém ocorre uma alteração no período, pois:

$$f(x) = f(x + \pi)\ para\ todo\ x \in \mathbb{R}$$

Logo , Período = $\pi\ rad$.

A representação gráfica é dada na Figura 29.

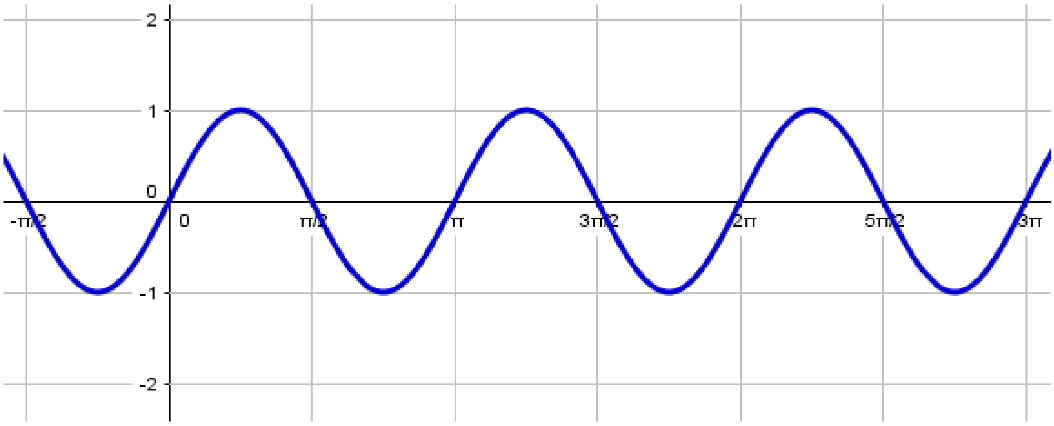


Figura 29 - Representação gráfica função seno - Exemplo 2
Fonte: O Autor

Exemplo 3:

$$h(x) = 3 + 2senx$$

Com coeficientes: $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$, o coeficiente mudará apenas a imagem da função $f(x) = 2senx$, pois todos seus valores de imagem serão deslocados 3 unidades positivas, assim $Imagem(h) = [1; 5]$ e Período=2π.

Na figura 30 é possível comparar as funções dadas no exemplo 2 e no exemplo 3.

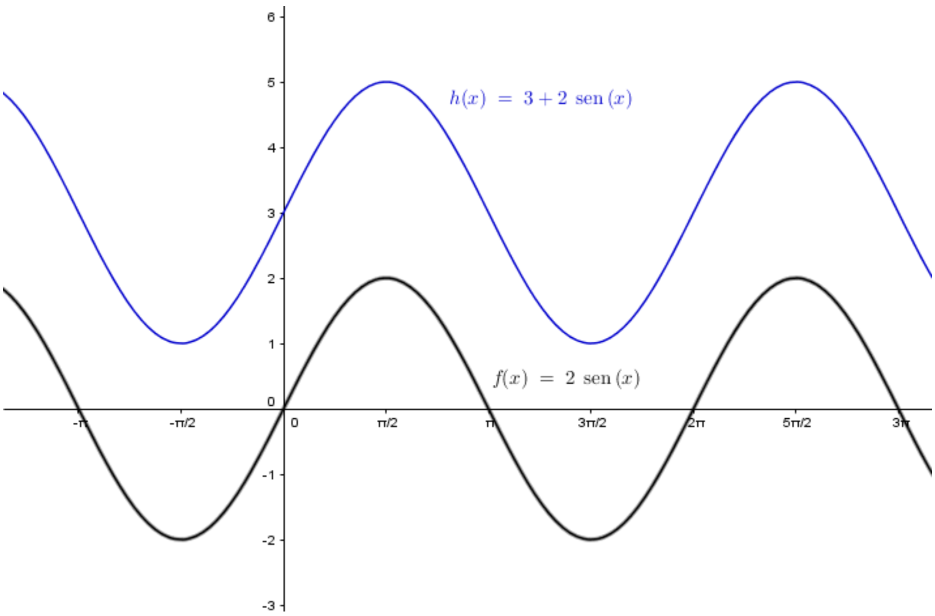


Figura 30 – Representação gráfica h(x) = 3+2senx e função f(x) = 2senx
Fonte: O Autor (Geogebra)

Exemplo 4:

Considere a função: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad | \ g(x) = 3 + 2.sen(4x)$

Nessa função, que pode ser vista na figura 31, ocorre a alteração de imagem e período da função, para o cálculo de uma imagem de um valor de x que pertença ao domínio tem-se, por exemplo:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + 2.sen\left(4.\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + 2sen(\pi)$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + 2.0$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

Nota-se então que $Imagem(g) = [1; 5]$ e Período= $\frac{\pi}{2}$

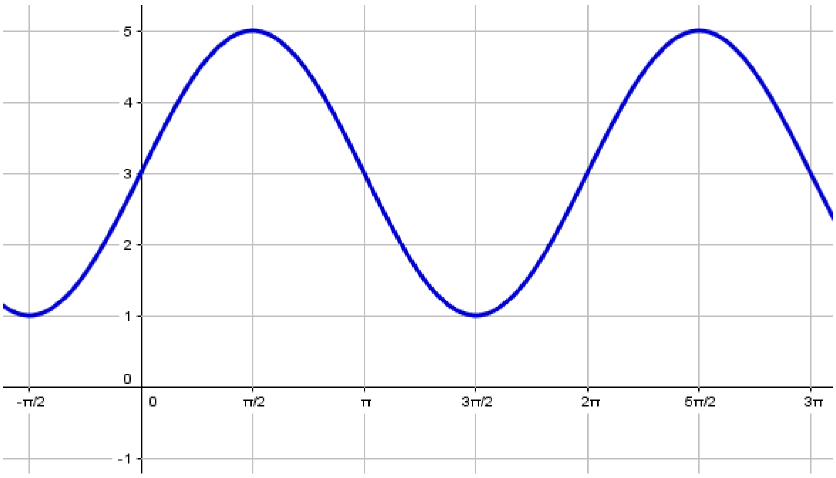


Figura 31 - Representação gráfica função seno - Exemplo 4
Fonte: O Autor

De maneira geral para: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a + b.sen(c.x)$, onde $\{a; c\} \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, pode-se observar que os coeficiente a e b alteram o valor de imagem da função e o coeficiente *c* altera o período da função.

Pode-se concluir que a imagem será: $Imagem[-b + a; b + a]$, para b>0, ou $Imagem[b + a; -b + a]$ para b<0.

Com os exemplos trabalhados acima pode-se observar que a alteração no período da função transformada em relação a função original (função seno de período 2 π) é sempre o período da função original dividido pelo parâmetro que multiplica a variável no argumento, ou seja:

$$Período = \frac{2\pi}{c}$$

É importante que as considerações feitas sobre as transformações seno são equivalentes para a função cosseno e que os resultados para imagem e período serão os mesmos.

6.5 MODELO MATEMÁTICO DO SOM

Segundo Abdounur (1999, p. 89) foi tentando resolver um problema que buscava a temperatura de uma placa plana condutora que Fourier, em 1882, teria encontrado a seguinte a solução para uma equação diferencial:

$$y = \frac{1}{2} + (a_1 cosx + b_1 senx) + (a_2 cos2x + b_2 sen2x) + \cdots$$

Ainda segundo o autor, do ponto de vista acústico-musical:

> Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido corresponde a um tom musical pode ser sempre de maneira única exibido como uma soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical.(ABDOUNUR, 1999,p.89)

Pode-se dizer que um mesmo som pode ter características diferentes, por exemplo, a mesma nota musical tocada em instrumentos diferentes, apesar de ser a mesma nota, chega ao ouvido com pequenas, porém perceptíveis diferenças, a essas pequenas diferenças chamamos de timbre, como já foi citado nesse trabalho.

Utilizando as Séries de Fourier, pode-se traduzir matematicamente soma de funções senos e cossenos. Na figura 32 tem-se alguns exemplos de sons que podem ser representados como somas de funções senos.

Os sons sem sobreposição de ondas são chamados de notas puras e em geral, são utilizadas com ondas senoidais. A mesma nota musical tocada em instrumentos diferentes, terão gráficos diferentes, pois tem timbres diferentes ou seja, existe uma sobreposição de sons, porém ambas terão sempre a mesma frequência.

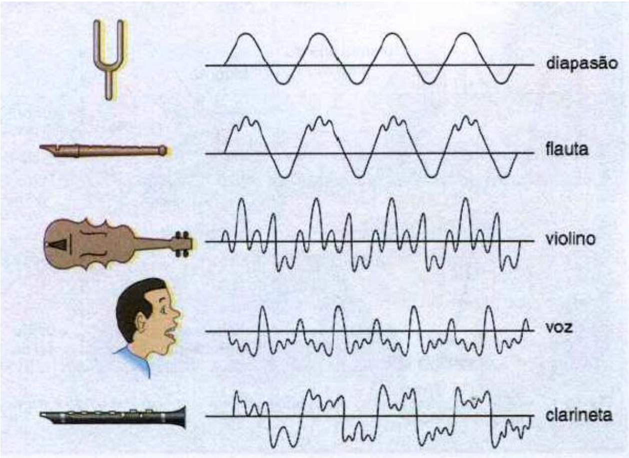


Figura 32 - Formas de ondas correspondentes a alguns instrumentos
Fonte: ALVARENGA & MÁXIMO (2000, p.319)

Atividade 1 – Entendendo a altura de um som utilizando o programa Geogebra.

A presente atividade tem como objetivo criar uma atividade no programa Geogebra, a fim de compreender a relação que existe entre o período de uma função seno e a altura de um som. Podendo assim comparar a diferença para a função seno e ao mesmo tempo escutar a transformação do som.

Para elaborar a atividade no programa Geogebra, é necessário seguir os passos indicados:

– Utilizar o programa na face gráfica;

– Clique com o botão esquerdo na tela, selecione a opção “janela de visualização”, Defina o eixo x no intervalo Xmin=-0.8 e Xmáx = 0.8 e o eixo y com Ymin=-8 e Ymáx=8. (O programa Geogebra utiliza ponto para separação entre a parte inteira e a parte fracionada).

– Clique no botão “Controle Deslizante” , na configuração deixe a opção número, o nome como “a” e configure o intervalo para mín=0, máx=500 e incremento=10.

– Na caixa de entrada, no canto inferior da tela, escreva a função: $f(x) = 5sen(2 * \pi * x * a)$. (Para inserir a constante π no geogebra, basta escrever: pi)

– Selecione a opção “Botão” e clique em qualquer lugar na tela, em legenda escreva: “Tocar” e em Código Geogebra escreva: =tocarSom(f(x),0,20). Essa opção vai emitir através do computador o som referente à frequência da função seno para o intervalo de zero a 20 segundos.

– Com o botão esquerdo do mouse, selecione no número "a" a opção animar, com isso o número "a" irá oscilar entre 0 e 500 de 10 em 10 como foi configurado anteriormente.

– Em seguida clique no botão "tocar" e pode-se ouvir as diferenças sonoras conforme as variações da frequência da função seno.

É possível observar que quanto maior o coeficiente, mais agudo parece o som, isso se dá pois as notas mais agudas tem maior frequência. Na figura 33 tem-se a interface gráfica do Geogebra para o próximo exemplo:

Considere o coeficiente a=400, então:

$f(x) = 5sen(2\pi x400)$

Sabendo que o período da função é calculado por:

$$P = \frac{2\pi}{2\pi.400} = \frac{1}{400} = 0,0025$$

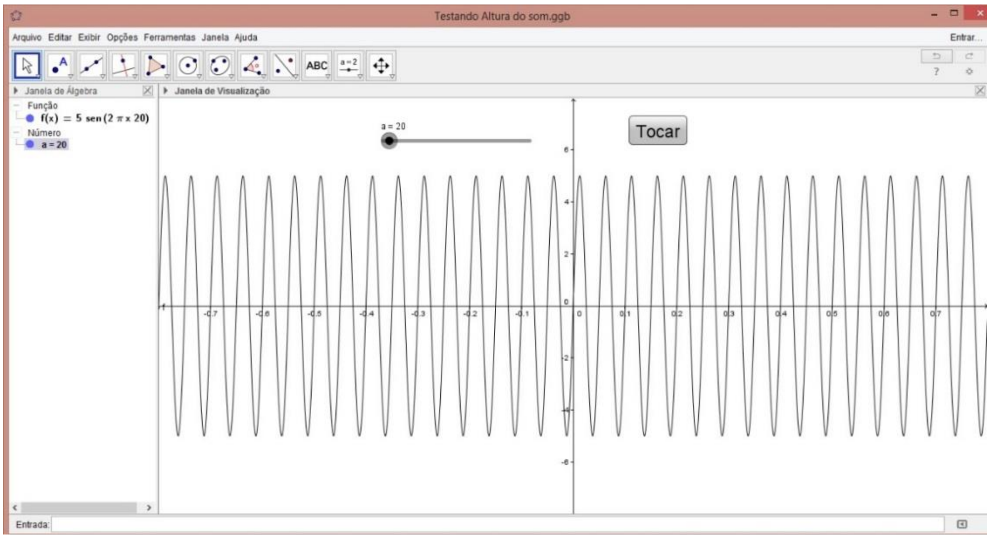


Figura 33 - Tela Geogebra - Atividade 1

Assim para a=400 tem-se uma função que representa um som 400Hz. Note que quanto maior o coeficiente a, maior será a frequência desse som.

Atividade 2 - Compreendendo a intensidade sonora utilizando transformações gráficas da função seno através do Geogebra.

Com essa atividade pode-se identificar as transformações de uma função seno (ou cosseno) e as diferenças na intensidade sonora.

Para desenvolver essa atividade no Geogebra é necessário seguir alguns passos:

– Clique com o botão esquerdo na tela, selecione a opção “janela de visualização”. Defina o eixo x no intervalo Xmin=-0.02 e Xmáx = 0.02 e o eixo y com Ymin=-20 e Ymáx=20. (O programa Geogebra utiliza ponto para separação entre a parte inteira e a parte fracionada).

– Clique no botão “Controle Deslizante” , nas configuração deixe a opção número, o nome como “a” e configure o intervalo para mín=0, máx=20 e incremento=0.1.

– Na caixa de entrada, no canto inferior da tela, escreva a função: $f(x) = a * sen(2 * \pi * 262 * x)$. (262 Hz é a frequência da nota Dó central no Piano)

– Selecione a opção “Botão” e clique em qualquer lugar na tela, em legenda escreva: “Tocar” e em Código Geogebra escreva: =tocarSom(f(x),0,20).

– Com o botão esquerdo do mouse, selecione no número “a” a opção animar, com isso o número “a” irá oscilar entre 0 e 20 de 0,1 em 0,1 como foi configurado anteriormente.

– Em seguida clique no botão “tocar” e pode-se ouvir as diferenças sonoras conforme as variações da amplitude da função seno, conforme figura 34.

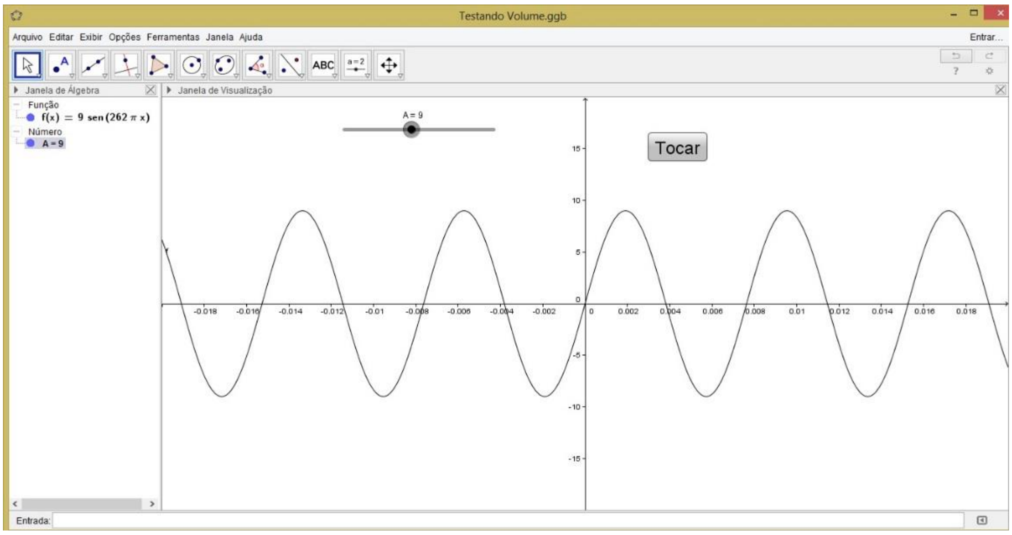


Figura 34 - Tela Geogebra - Atividade 2
Fonte: O Autor (Geogebra)

É importante ressaltar que ao ver e ouvir as diferenças da variação das funções seno em questão, o aluno poderá associar o ato de “aumentar o volume” de um rádio com aumentar a amplitude de uma função seno, obtendo assim o mesmo som, porém com maior intensidade. A intensidade sonora, como já foi mencionada nesse trabalho, é medida em decibel, porém essa medida só poderá ser aferida caso o condutor da atividade use um Decibelímetro (Medidor de nível sonoro), pois essa medida dependerá também se o usuário estiver usando ou não um aparelho sonoro com amplificador e a capacidade do mesmo. Para substituir o Decibelímetro existem alguns aplicativos para celular que calculam esse valor com alguma aproximação.

Atividade 3 – Construindo a escala temperada com auxílio do Geogebra.

Essa atividade tem por objetivo construir funções seno que ao utilizar a função do tocar som do Geogebra será possível identificar a nota musical através do som e ao mesmo tempo visualizar a função que representa esse som.

Para construção dessa atividade é preciso observar que cada nota musical tem sua frequência característica em hertz. Como já foi mencionado nesse trabalho as frequências das notas musicais em um piano pertencem a função:

$$f(x) = 262.2^x$$

Como já é sabido a escala temperada forma uma progressão geométrica de razão $2^{(1/12)}$, com os valores aproximados na tabela 15.

Tabela 15 - Valores de frequência (Hz) na Escala Temperada

Nota	X	f(x) (Valores aproximados)
Dó	0	262
Dó# ou Réb	1/12	277
Ré	2/12	293
Ré# ou Mib	3/12	311
Mi	4/12	329
Fá	5/2	349
Fá# ou Solb	6/12	370
Sol	7/12	392
Sol# ou Láb	8/12	415
La	9/12	440
Lá# ou Sib	10/12	466
Sí	11/12	494
Dó	12/12	523

Fonte: O Autor

Com esses dados pode-se construir a atividade no Geogebra seguindo os passos:

– Clique com o botão esquerdo na tela, selecione a opção “janela de visualização”, Defina o eixo x no intervalo Xmin=-0.01 e Xmáx = 0.01 e o eixo y com Ymin=-10 e Ymáx=10.

– Insira um botão deslizante com as seguintes configurações: min=0, max=10, incremento=1 e nome= v. Esse botão deslizante servirá para alterar a amplitude das funções, pois utilizando a função seno com $y \in [-1; 1]$ o som sairá com baixo volume, dependendo das condições do equipamento.

– Insira um botão deslizante com as seguintes configurações: min= 0, max=5, incremento= 1 e nome= a .Esse botão servirá para ajustar caso queira o tempo que a nota será tocada.

– Insira um botão para cada função que representará uma nota musical, o processo será repetitivo então é importante que se utilize uma legenda para o nome de cada função. Nesse trabalho foi adotado como nome de função a letra inicial de cada nota musical e para as notas de meio tom com sustenidos foi acrescentado um *s* ao nome, por exemplo, a nota Dó será D(x) e Dó# será Ds(x), a exceção fica pela nota Si que será Si(x).

– Cada botão deve ter as seguintes configurações: Legenda = Nome da Nota. Em Código Geogebra insira a função seno com o nome previamente definido igual a *v*sen(2*pi*x*frequência)*, na linha inferior digite: Tocarsom(Nome da função, 0,a). Por exemplo, as configurações do botão referente a nota Ré# ficariam assim: Legenda: Ré#, Código Geogebra: *Rs(x)=v*sen*(*2*pi*x*311*) (na primeira linha) e TocarSom(*Rs(x),0,a*) na segunda linha.

Repetindo o procedimento para toda escala temperada tem-se 13 botões que ao clicar apresentará o gráfico da função seno e emitirá o som referente a nota musical. Na figura 35 tem-se o exemplo de como devem ficar dispostos os botões da atividade referida.

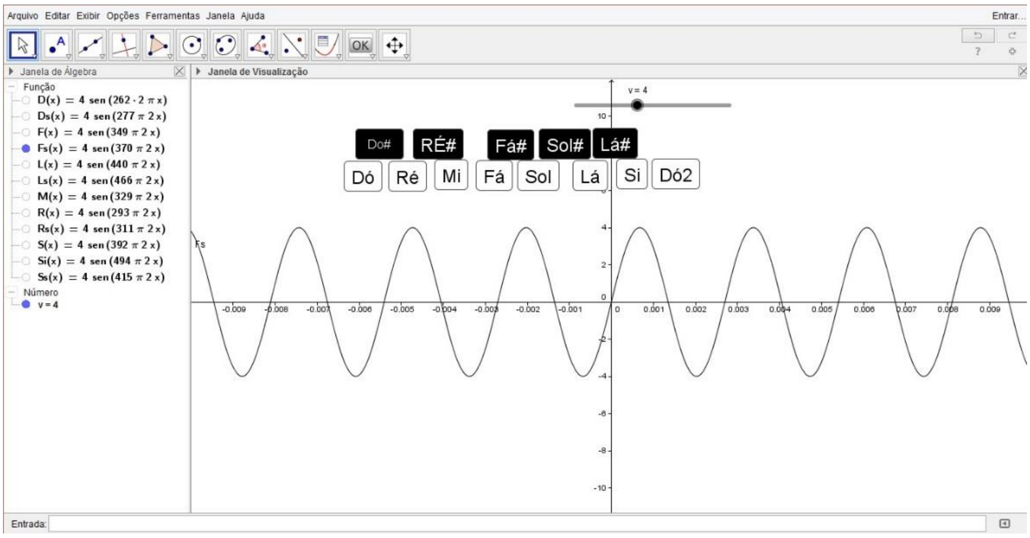


Figura 35 - Tela Geogebra - Atividade 3
Fonte: O Autor (Geogebra)

Atividade 4 – Utilizando a atividade anterior, crie uma função que seja o somatório de outras duas funções e utilize a função tocar.

Nessa proposta deseja-se utilizar a atividade anterior como base a fim de mostrar que o som pode ser escrito como a soma de duas ou mais funções trigonométricas.

Para isso pretende-se criar uma nova função que vai somar as notas Dó e Sol (a escolha pode ser feita com quaisquer outras notas), assim:

– No item Janela de Álgebra selecione (botão azul ao lado da função) apenas as funções D(x) e S(x), o usuário vai notar que vão aparecer os gráficos referentes as duas funções.

– No canto inferior, em Entrada escreva Z(x) = D(x) + S(x).

– Ao aparecer o gráfico da função na Janela de Álgebra (clique para aparecer a função caso a mesma não apareça automaticamente). Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da função Z(x), clique em propriedades na aba e selecione uma cor que destaque a função.

– Com os três gráficos aparecendo na tela de apresentação o professor poderá explorar os conceitos de somas de funções.

- Na função Entrada digite: TocarSom[Z(x);0;2], essa função vai tocar o som referente a função Z(x) por um intervalo de 2 segundos, caso o usuário queira pode aumentar ou diminuir esse intervalo. Na figura 36, pode-se visualizar a apresentação da atividade 4.

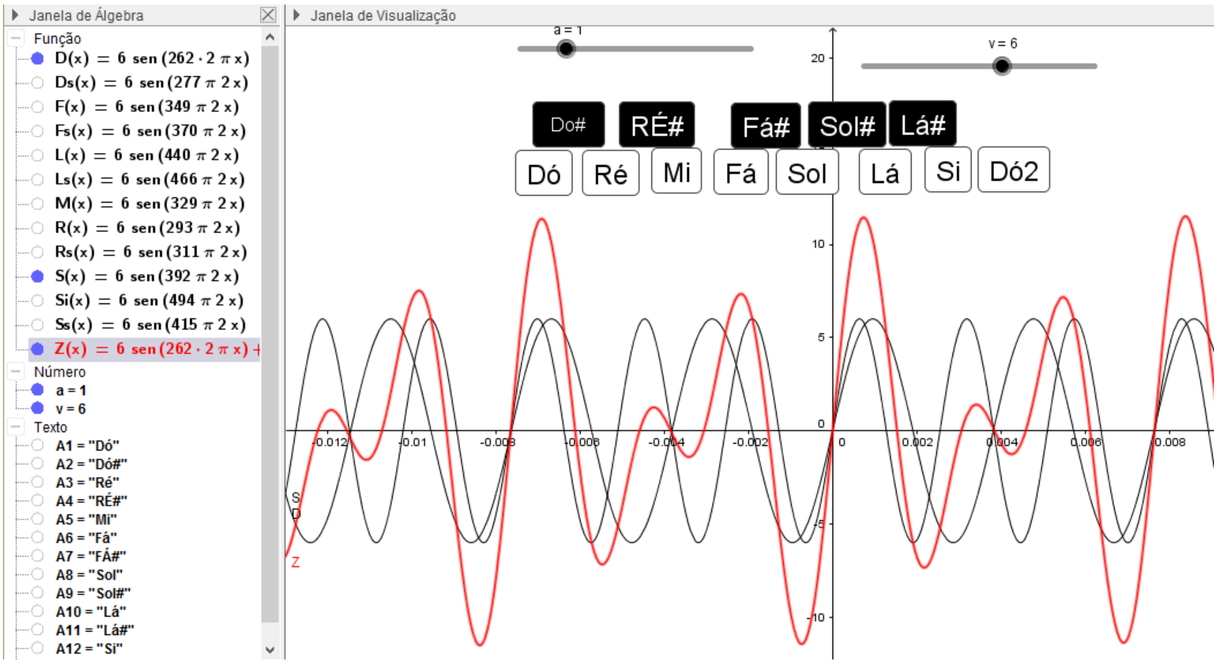


Figura 36 – Tela Geogebra – Atividade 4
Fonte: O Autor (Geogebra)

Essa atividade pode ser explorada com a soma de três ou mais funções, ficando a critério do leitor, pode-se inclusive criar funções seno quaisquer, não necessariamente as que formam as notas musicais, e que além de períodos distintos que tenham intensidades distintas.

7 CONCLUSÃO

O corrente texto tem como escopo desvendar como o estudo da matemática pode ser explorado no universo da música. Buscou-se, academicamente, a tentativa de descrever a matemática através de sons e notas musicais, levantando-se a hipótese de que existem inúmeros conceitos matemáticos em uma música clássica ou em uma composição de um grande artista de rock.

Impressionante foi constatar que, a beleza da matemática está inserida nas melodias musicais, mesmo que os próprios músicos não se deem conta disso. Com o estudo, verificou-se a existência implícita dos números e funções trigonométricas em cada composição.

É imprescindível que, além do conhecimento técnico exigido pelo currículo básico, o professor de matemática mostre os aspectos práticos da ciência em tela, para que, além de aprendê-la e interpretá-la, o aluno possa se entusiasmar durante o estudo.

Sendo assim, o presente estudo buscou demonstrar uma face da matemática, muitas vezes, ignorada nos tempos atuais. O projeto aqui delineado almeja causar surpresa, tanto aos músicos quanto aos estudantes da matemática, que talvez, nunca perceberam a integração entre as duas áreas do conhecimento.

Atender aos parâmetros curriculares em forma de pensamento científico é um encargo que exige tempo e dedicação, mas que pode trazer uma satisfação inigualável. Compreender a influência dos pitagóricos e a importância das proporções para a música, por exemplo, ajuda não apenas a construir uma interdisciplinaridade antes não vista, mas também revelar como a matemática escreve as leis do universo e permeia o nosso mundo físico.

Do mesmo modo, a observação de experimentos científicos, tais com o monocórdio de Pitágoras, aguça a criatividade e a curiosidade dos alunos, o que certamente os estimulará para a aprendizagem, promovendo a educação de forma mais ampla.

Por fim, é salientada a importância da apresentação de conceitos matemáticos com a utilização de *softwares*, afinal vivemos em um período onde a comunicação é extremamente rápida e com uma vasta gama de programas e sintetizadores disponíveis de forma gratuita na internet. Nesse trabalho, utilizou-se do programa GeoGebra, mundialmente famoso para o ensino da matemática, por sua interface simplificada. Por fim, trata-se de programa livre, o que certamente facilita seu uso em qualquer meio acadêmico.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Tendo como base o tema de música e matemática e objetivando a o ensino da matemática de forma prazerosa, propõe-se alguns temas a serem trabalhos em estudos futuros tais como:

– A história dos logaritmos e a importância desse conhecimento para a construção de instrumentos musicais;

– A escrita utilizada pelos músicos em partituras e a similaridade com a linguagem simbólica matemática;

– História e construção do violão utilizando as relações matemáticas existentes nos trastes desse instrumento;

– Utilizar Progressões Geométricas e Progressões Aritmética para explicar o “tempo” musical (Conceitos como: mínima, semínima);

– Estudar formas de fazer com que aluno utilize o Geogebra afim de entender os conceitos de função;

– Investigar outras formas de contribuição que o ensino de música pode trazer aos estudantes de matemática e sua reciprocidade, caso exista.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996. Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: Mai. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: Mai. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: Mai. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Lei nº11.769, de 18 de agosto de 2008.** Alteração na Lei nº9.394. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11769.htm> Acesso em: Jun. 2015.

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados.** São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

ABDOUNUR, Oscar João. **Mudanças estruturais nos fundamentos matemáticos da música a partir do século XVII: considerações sobre consonância, série harmônica e temperamento.** Revista Brasileira de História da Matemática. Dez. 2007. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20Festschrift/30%20-%20Oscar%20-%20final.pdf> Acesso em: Mai. 2015.

ALVARENGA, B. & MÁXIMO, M. **Curso de Física, Volume 2.** São Paulo: Editora Scipione,2000.

BBC NEWS DE LONDRES. **Earliest music instrument found.** Mai, 2012. Disponível em: <http://www.bbc.com/news/science-environment-18196349> Acesso em: Mai, 2015.

BENNETT, Roy. **Uma breve história da música**; tradução, Maria Teresa Resende Costa. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1986.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, Ed Universidade de São Paulo, 1974.

BRENER, Carlos Luiz da Silva. **Objetos da aprendizagem para ensino de logaritmos e exponenciais.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Sociedade Brasileira de Matemática/ Instituto de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

CHAUÍ, Marilena. **Convite à filosofia**. São Paulo: Ática, 2000.

DESCARTES, Renê. **Musicæ Compendium.** 1683. Disponível em: <https://archive.org/details/renatidescartesm00descuoft> Acessado em: Abr. 2015.

FREDERICO, Edson. **Música Breve História**. São Paulo: SBEM. 1ª Ed. Brasil. Editora IrmãosVitale, 2000.

HEWITT, Paul G. **Física conceitual**. Porto Alegre: Bookmann. 2002.

HORA, Edmundo Pacheco. **As obras de Froberger no contexto da afinação mesotônica.** (Tese de Doutorado). Campinas: Instituto de Artes, Unicamp, 2004.

MARCONDES, Danilo. **Iniciação à filosofia: dos pré-socráticas a Witgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

RAMALHO, J. F; NICOLAU, G ; TOLEDO, P.A. **Os Fundamentos da Física - Volume 2 - Termologia, óptica geométrica e ondas**. São Paulo: Moderna, 2003.
REVISTA SUPER INTERESSANTE. **Qual o instrumento musical mais antigo?** Fev. 2003. Disponível em: <http://super.abril.com.br/cultura/qual-instrumento-musical-mais-antigo-443660.shtml> Acesso em: Mai, 2015.

RODRIGUES, José Francisco. **A Matemática e a Música.** Colóquio/Ciências, nº23, 1999. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf.> Acesso em: 12 de março de 2015.

ROSCHEL, Renato. **História da Música.** Publicado em: Almanaque Folha UOL: Disponível em: http://almanaque.folha.uol.com.br/musicaoquee.htm Acesso em: Mai, 2015.

PEREIRA, Marcos. **Matemática e Música De Pitágoras aos dias de hoje.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

SANDRONI, Fernando A. R. **Música e harmonia: Origens da escala diatônica.** Revista de Ciências Humanas, Out. de 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revistacfh/article/viewFile/2178-4582.2012v46n2p347/24189> Acessado: Abr. 2015.

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.** Tradução: Marcus Penchel; Rio de Janeiro, Zahar, 1998.

VAN DOREN, Charles. **Uma breve história do conhecimento.** Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2012.