



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

As Leis de Kepler

Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha

Teresina - 2013

Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha

Dissertação de Mestrado:

As Leis de Kepler

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

Co-Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2013

R6721

Rocha, Hélder Borges Vieira da Laranjeira.

As leis de Kepler / Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha. -
2013.

57 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciência da Natureza, 2013.

“Orientador: Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva”.

“Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa”.

1. Geometria Diferencial. 2. Lei da Gravitação Universal.
3. Fórmula de Binet. 4. Cônicas Polares. I. Título.

CDD 516.36

Agradecimentos

Agradeço, imensamente, a Deus, pela oportunidade de concretizar este trabalho com saúde e serenidade e por haver Ele escolhido o livro do Universo com as letras da Matemática dando, assim, a nós, em nossa insignificância, a maravilhosa oportunidade de compreender um pouco de sua admirável obra.

Agradeço, em especial, a minha esposa, Irlaiany, pelo amor, carinho, incentivo e compreensão pelos momentos que me fiz ausente para dedicar-me à vida acadêmica e profissional.

Agradeço ao meu orientador, Juscelino Silva, pela prontidão em orientar-me neste trabalho, fazendo um acompanhamento em todas as suas etapas de forma objetiva e segura. Pela amizade e paciência em transmitir seus conhecimentos, amenizando, assim, minhas deficiências. Pela sua competente e brilhante atuação acadêmica.

Agradeço ao meu co-orientador, Paulo Alexandre, pela amizade e companheirismo, pelo seu apoio durante essa pós-graduação, pelos momentos que dispôs em tirar dúvidas, pelas valorosas sugestões e correções neste trabalho.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica durante a pós-graduação, em especial aos professores: Humberto, Jurandir, Jefferson, Newton, Roger e Liane.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial aos meus pais, Luiz Gonzaga e Rita Borges, aos meus irmãos e irmã, a meu sobrinho Isaac, a minha tia Rejane Marcelli, por sempre terem me apoiado e incentivado nesta caminhada, transmitindo amor, segurança, otimismo e outros valores que contribuíram para minha formação enquanto cidadão.

Agradeço a todos os meus amigos da pós-graduação, em especial a Edivan, Paulo Airton, Ethiamara, Valessa Zaigla, Valtercio e Nascimento, pelos momentos que dedicavam a estudar em grupo e pelas importantes colaborações e discussões ao longo desse período.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

“a natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”

Richard Feynman.

Resumo

Esta dissertação inicia-se com o contexto histórico acerca do encontro entre dois astrônomos, Tycho Brahe e Johannes Kepler, numa época de conflitos entre católicos e protestantes, do qual surgiu a descoberta das três Leis de Kepler que regem os movimentos dos planetas ao redor do Sol. Em seguida, apresentamos alguns resultados úteis neste trabalho sobre álgebra vetorial, cálculo e geometria analítica que culminam nas Leis de Kepler quando partimos de duas leis de Sir Isaac Newton, a saber, Lei da Gravitação Universal e da Segunda Lei do Movimento. Tal processo é feito estabelecendo-se um sistema de equações diferenciais, também evidenciadas neste trabalho, que rege o movimento dos planetas.

Palavras-chave: Lei da Gravitação Universal, Segunda Lei do Movimento, Fórmula de Binet, Cônicas Polares e Leis de Kepler.

Abstract

This thesis begins with the historical context about the meeting of two astronomers, Tycho Brahe and Johannes Kepler, in a time of conflict between Catholics and Protestants, which came the discovery of Kepler's three laws that govern the movements of planets around the Sun then present some useful results in this work on vector algebra, calculus and analytic geometry that culminate in Kepler's Laws when we left two laws of Sir Isaac Newton, namely Law of Universal Gravitation and the Second Law of Motion. This process is done by establishing a system of differential equations, also highlighted in this paper, which governs the motion of the planets.

Keywords: Law of Universal Gravitation, Second Law of Motion, Binet formula, Polar Conics and Kepler's Laws.

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
1 Contexto Histórico	3
2 Elementos de Álgebra Vetorial e Cálculo	6
2.1 Produto Interno	6
2.2 Produto Vetorial	10
2.3 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais	15
3 Cônicas e Áreas em Coordenadas Polares	22
3.1 Cônicas	22
3.1.1 Elipse	22
3.1.2 Hipérbole	24
3.1.3 Parábola	25
3.2 Coordenadas polares	27
3.3 Áreas em coordenadas polares	29
3.4 Cônicas em Coordenadas Polares	30
4 Equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes	34
4.1 Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes	34
4.2 Equações diferenciais lineares não-homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes	41
4.2.1 Método de Variação dos Parâmetros	42

5	As Leis de Kepler	45
5.1	A Segunda Lei de Kepler	45
5.1.1	Momento Angular	46
5.1.2	A Órbita em Coordenadas Polares	47
5.2	A Primeira Lei de Kepler	50
5.2.1	A Fórmula de Binet	50
5.2.2	Cônicas em Coordenadas Polares	51
5.2.3	Interpretação Geométrica da Segunda Lei de Kepler	53
5.3	A Terceira Lei de Kepler	54
5.3.1	O Período de Revolução de um Planeta	54
5.4	Aplicações	55
5.4.1	Satélites Artificiais	55
	Referências	58

Introdução

Desde a antiguidade o homem indaga-se sobre os mistérios do Universo e de como os planetas e o sistema se comportam em relação uns aos outros. As Leis de Kepler é um marco na Gravitação descrevendo com a precisão matemática o comportamento de tais objetos celestiais, sugerindo que uma força vinda do Sol é responsável pelo movimento dos planetas. Embora enunciadas por Kepler, o mesmo não conseguiu demonstrar que tais Leis seriam verdadeiras. Tal feito foi alcançado por Sir Isaac Newton, um dos maiores gênios de todos os tempos, com o auxílio de sua segunda Lei do Movimento e de sua outra Lei intitulada de Lei da Gravitação Universal. Não se pode esquecer que as Leis de Kepler são amplamente fundamentadas nas observações do astrônomo Dinamarquês Tycho Brahe, cujo mesmo era seguidor das teorias de Nicolau Copérnico, que teve seu trabalho levado a um novo patamar, afirmando que o Sol era o centro do Sistema Solar. Tais Leis colocaram abaixo vários dogmas religiosos impostos pela igreja católica, sendo que os feitores de tais proezas sofreram duras penas e incassáveis perseguições da mesma igreja católica.

O interesse pelo tema se deu por observar que no Ensino Médio as Leis de Kepler são postuladas sem fazer menção de como demonstrá-las, pois estas são feitas apenas com conteúdos que têm na sua essência o Cálculo Diferencial e Integral, que não integram o Currículo do Ensino Médio. Motivei-me, então, a fazer um material autossuficiente que desperte a curiosidade dos alunos do Ensino Básico que estudam Cálculo e que contemple os resultados matemáticos suficientes para um bom entendimento das demonstrações e interpretações das Leis de Kepler. Nesse caso, o tema versa sobre conteúdos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), de uma forma mais aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Médio, relacionando a Matemática e a Física.

O capítulo 1 apresenta um pouco da história de tais Leis e ainda das pessoas envolvidas

em tal enlace grandioso. O capítulo 2 trata dos produtos escalar e vetorial de vetores no espaço, das derivadas de funções vetoriais, da velocidade e aceleração ao longo de curvas espaciais. Um breve tratamento de seções cônicas, inclusive, em coordenadas polares, e o cálculo de áreas de seções em coordenadas polares são apresentados no capítulo 3. Teoricamente, conhecendo-se a posição e a velocidade de cada planeta num determinado instante, as equações diferenciais, vistas no capítulo 4, determinam suas posições como funções do tempo, no passado e no futuro. No capítulo 5, por motivos didáticos apresentamos primeiramente a demonstração da Segunda Lei, uma vez que a mesma é, de certa forma, independente das outras duas. Em seguida, é apresentado a fórmula de Binet que com auxílio da Primeira Lei transforma a equação do movimento em uma equação do tipo oscilador harmônico simples. Falou-se ainda um pouco sobre cônicas em coordenadas polares e demonstramos a Primeira Lei de Kepler. Por último, com auxílio das duas outras Leis, demonstramos a bela e surpreendente Terceira Lei de Kepler.

Capítulo 1

Contexto Histórico

Ao publicar, em 1543, seu famoso trabalho *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, Copérnico (1473-1543) iniciava uma revolução, não apenas na Astronomia, mas em todo o pensamento filosófico e religioso dos tempos modernos. Tanto assim que o ano de 1543 é considerado o marco inicial da ciência moderna. Em 1506 ele começou a desenvolver um sistema astronômico com base em suas observações dos corpos celestes e logo constatou que a hipótese geocêntrica, de Aristóteles e Cláudio Ptolomeu, não era compatível com a realidade e que a teoria dos epiciclos era um forma artificial de se ajustar os fatos àquela hipótese. Ptolomeu e seus sucessores recorriam ao artifício de utilizar círculos deferentes e epiciclos: o círculo deferente era o círculo básico que girava em torno da Terra; e o epiciclo era um círculo menor, centrado em algum ponto do deferente. O planeta deslocava-se no deferente. Com os raios do deferente e do epiciclo devidamente ajustados, bem como suas velocidades, era possível fazer com que os movimentos planetários observados da Terra pudessem ser mais ou menos explicados. Como as observações não se conformavam exatamente com as previsões da teoria, o recurso era refazer os cálculos, adicionando epiciclo sobre epiciclo, em construções de crescente complexidade.

É difícil, hoje, fazer-se uma idéia do que significou naquela época desafiar a teoria milenar de Ptolomeu, entrando em conflito frontal com a teologia cristã e com arraigados princípios de ordem estética e simplicidade matemática do Universo. Embora as idéias de Copérnico não tenham respondido a todas as perguntas que levantaram, elas tiveram um impacto profundo na evolução científica, separando a Ciência da religião. Elas germinaram e encontraram em Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630) os seus grandes seguidores. Os trabalhos de Galileu são o início da Mecânica, que nas mãos de

Newton recebeu a admirável formalização que conhecemos.

Kepler desde muito cedo revelou uma inteligência excepcional. Além de possuir comprovada competência em Matemática, Astronomia e Óptica, era um espírito profundamente místico. Conta-se que em 1595, enquanto dava uma aula, ele teve a “brilhante idéia”, inspirada em Pitágoras e Platão, segundo o qual deveria haver uma correlação entre os cinco sólidos regulares da Geometria e os seis planetas então conhecidos (de Mercúrio a Saturno, inclusive a Terra). Guiado por esse pensamento, ele construiu uma teoria segundo a qual os planetas se apóiam sobre esferas, assim dispostas: as órbitas dos planetas situavam-se sobre seis esferas separadas entre si por cinco poliedros regulares, cada um circunscrito à esfera anterior e inscrito na seguinte. Maravilhado com tal conjectura, que hoje nos parece infantil, publicou um livro cujo longo nome é atualmente abreviado como *Mysterium Cosmographicum (Mistérios dos Cosmos)*. Ali defendia o heliocentrismo e propunha seu modelo de órbitas circulares, percorridas com velocidades constantes. Uma cópia do livro foi enviada a Galileu e outra ao astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Brahe, o mais renomado astrônomo da época, trabalhava para o governo de seu país e em 1576 construíra um grandioso observatório próximo a Copenhague. As medições astronômicas feitas por ele durante duas décadas vieram mais tarde a desempenhar um papel fundamental nas descobertas de Kepler.

Em 1598 o arquiduque da Áustria fechou o seminário protestante em Graz, na Áustria, local onde Kepler ensinava Matemática desde 1594 e foi expulso do mesmo e da cidade, diante de sua recusa em retornar ao catolicismo. Para sua felicidade, Tycho Brahe, que havia tomado conhecimento de Kepler devido a publicação do seu *Mysterium Cosmographicum (Mistérios dos Cosmos)*, foi contratado em 1599 pelo imperador da Bohemia, mudou-se para Praga e, em 1600, convidou Kepler para juntar-se a ele, como assistente no observatório de Praga, dando início a uma profícua, embora curta, cooperação. Tycho faleceu em 24 de outubro de 1601 e, dois dias depois, o imperador nomeou Kepler sucessor do dinamarquês. Mergulhado nos cálculos relativos à órbita de Marte, Kepler teve que admitir que o modelo de órbitas circulares percorridas pelos planetas com velocidades constantes não era compatível com as medições de Tycho. Assim, em 1602, começou abandonar a idéia das velocidades uniformes ao constatar que quando Marte passava por posições mais próximas ou mais distantes do Sol, movia-se, respectivamente, mais depressa ou mais lentamente. Evidenciava-se, também, que a órbita não era circular

e seus cálculos mostraram que a linha que liga Marte ao Sol varre, em tempos iguais, áreas iguais, qualquer que seja a posição do planeta sobre sua órbita. Finalmente, em 1605, concluiu que a órbita de Marte é uma elipse, com o Sol em um dos focos. Testando pacientemente suas conjecturas relativas a Marte para os outros planetas verificou que elas se aplicavam a todos e assim pôde anunciar suas duas primeiras leis em um livro chamado *Astronomia Nova*, de 1609:

1. As órbitas dos planetas são elipses, das quais o Sol ocupa um dos focos.
2. A linha que une o Sol a qualquer planeta cobre áreas iguais em tempos iguais, quaisquer que sejam as posições do planeta sobre sua órbita.

Em 1612 deixou Praga e aceitou a posição de matemático oficial e professor em Linz, na Áustria, onde logo publicou um interessantíssimo estudo mostrando que o abade Dionysius Exiguus, em 523 a.D., cometera um erro de cinco anos na estimativa da data do nascimento de Jesus e que ela deve ser situada em 4 a.C.. Sua produção científica atingira intensidade máxima, apesar dos enormes problemas que enfrentava: um filho de seis anos morrera de varíola, sua esposa sofria de transtornos mentais e sua velha mãe, em 1615, fora vítima de uma caça às bruxas, tendo sido presa e torturada, somente escapando da fogueira depois de cinco anos de esforços de Kepler para libertá-la. Em 1619 publicou o célebre *Harmonices Mundi (A Harmonia do Mundo)* onde, demolindo o antigo modelo dos poliedros regulares, anunciou sua terceira lei do movimento planetário: os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias ao Sol. Poucos anos depois, Sir Isaac Newton, em seu livro *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como consequência de outras duas leis de sua autoria, a *Segunda Lei do Movimento* e a *Lei da Gravitação Universal*.

Capítulo 2

Elementos de Álgebra Vetorial e Cálculo

Neste capítulo falaremos do produto interno e do produto vetorial, e sobre funções vetoriais, destacando as definições, propriedades básicas, exemplos e alguns resultados que serão usados para descrever o movimento dos planetas no espaço.

2.1 Produto Interno

Definição 1. A norma ou comprimento do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número

$$\|\vec{v}\| = d(A, B).$$

Obs 1.

a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante. Com efeito, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $AB \equiv CD$ e, portanto, $d(A, B) = d(C, D) = \|\vec{v}\|$.

b) Se $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

c) Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, então as coordenadas de \vec{v} coincidem com as coordenadas do ponto P . Logo, se $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$, então $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Exemplo 1. Dados $A = (-1, 2, 1)$ e $B = (4, 1, -1)$, determinar a norma do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Solução. Temos

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{30}.$$

Obs 2.

a) Temos $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$. Além disso, $\vec{v} \neq \vec{0} \iff \|\vec{v}\| > 0$.

b) Se \vec{v} é um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.

De fato, se $\vec{v} = (x, y, z)$, temos $\lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ e, portanto,

$$\|\lambda \vec{v}\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|.$$

c) Um vetor é chamado unitário se sua norma é igual a 1.

d) Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário, chamado normalizado do vetor \vec{v} , com igual direção e sentido que \vec{v} .

De fato, os vetores têm a mesma direção (são paralelos) pois um é múltiplo do outro.

Pelo item (b), temos:

$$\left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = 1,$$

e como $\frac{1}{\|\vec{v}\|} > 0$, os vetores \vec{v} e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ têm o mesmo sentido.

e) Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é também unitário e tem a mesma direção que \vec{v} , mas não o mesmo sentido.

Exemplo 2. Determinar o normalizado do vetor $\vec{u} = (3, -2, 1)$.

Solução. Como $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, o normalizado de \vec{u} é o vetor:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, -2, 1) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right).$$

Exemplo 3. Determinar os vetores unitários paralelos ao vetor $\vec{v} = (1, -2, 2)$.

Solução. Temos $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$. Portanto os vetores unitários paralelos ao vetor \vec{v} são:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \text{ e } \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Definição 2. O ângulo $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ não nulos é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC , medido no plano π_{ABC} que contém os pontos A , B e C .

Obs 3.

a) Medimos os ângulos em radianos ou em graus, onde π radianos corresponde a 180° .

b) Note que $0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$, equivalentemente, $0^\circ \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

c) Tem-se:
$$\begin{cases} \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}), \\ \angle(\lambda \vec{v}, \mu \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}), & \text{se } \lambda\mu > 0, \\ \angle(\lambda \vec{v}, \mu \vec{u}) = \pi - \angle(\vec{u}, \vec{v}), & \text{se } \lambda\mu < 0. \end{cases}$$

Definição 3. O produto interno (ou escalar) entre os vetores \vec{u} e \vec{v} no espaço, é o número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta & , \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. O produto interno entre os vetores \vec{u} e \vec{v} também é indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Obs 4.

a) Da comutatividade da multiplicação de números reais e da observação 3, concluímos que o produto interno é comutativo, isto é, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, para todos os vetores \vec{u} e \vec{v} do espaço.

b) O produto interno de um vetor com si próprio é não negativo. Com efeito, sendo $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{u}) = 0$:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0,$$

a igualdade acontece quando $\vec{u} = \vec{0}$.

Proposição 1. Se $\vec{u} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $\vec{v} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ são vetores no espaço, então,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2. \quad (2.1)$$

Demonstração. Se algum dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é nulo, temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e, também, $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$. Logo, a identidade (2.1) é satisfeita.

Sejam $\vec{u} = \vec{OP}$ e $\vec{v} = \vec{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, onde O é a origem do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então, $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1, \gamma_2 - \gamma_1)$.

Seja $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle OPQ$, obtemos:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Daí:

$$\begin{aligned} 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\alpha_2 - \alpha_1)^2 - (\beta_2 - \beta_1)^2 \\ &\quad - (\gamma_2 - \gamma_1)^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_1 - \alpha_1^2 \\ &\quad - \beta_2^2 + 2\beta_2\beta_1 - \beta_1^2 - \gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_1 - \gamma_1^2 \\ &= 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2). \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)$. □

Proposição 2. *Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores arbitrários do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

- a) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$;
- b) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = 0$;
- c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
- d) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
- e) $\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
- e) $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$;
- f) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.

Definição 4. *O vetor \vec{u} é perpendicular ou ortogonal ao vetor \vec{v} , e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, quando o ângulo entre eles é reto ou quando um dos vetores é o vetor nulo.*

Proposição 3. Se o vetor \vec{u} é perpendicular ou ortogonal ao vetor \vec{v} , então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Demonstração. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e, também, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, temos, então,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = 90^\circ.$$

□

Exemplo 4. Determine os valores de x e y de modo que o vetor $\vec{u} = (x, y, 1)$ tenha norma igual a $\sqrt{3}$ e seja perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1, 3, 4)$.

Solução. Temos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e só se,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (x, y, 1), (1, 3, 4) \rangle = x + 3y + 4 = 0 \iff x = -3y - 4.$$

Por outro lado,

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + 1^2 = 3 \iff x^2 + y^2 = 2. \quad (2.2)$$

Substituindo-se $x = -3y - 4$ na equação (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned} (-3y - 4)^2 + y^2 = 2 &\iff 10y^2 + 24y + 14 = 0 \\ &\iff y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 560}}{20} \\ &\iff y = -\frac{28}{20} = -\frac{7}{5} \text{ ou } y = \frac{-24 + 4}{20} = -1. \end{aligned}$$

O problema possui então duas soluções, $\vec{u}_1 = (1/5, -7/5, 1)$ e $\vec{u}_2 = (-1, -1, 1)$.

2.2 Produto Vetorial

Seja OXYZ um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Definição 5. O produto vetorial de \vec{u} por \vec{v} é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Um dispositivo prático, para determinar o produto vetorial, consiste em calcular o “determinante simbólico” da matriz 3×3 cujos elementos da primeira linha são os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor \vec{u} e os da terceira são as coordenadas do vetor \vec{v} :

$$\vec{u} \times \vec{v} := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Proposição 4. Para quaisquer vetores no espaço $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

- 1) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, isto é, $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a \vec{u} e a \vec{v} .
- 2) $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se, e só se, um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é múltiplo do outro.
- 3) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$, onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.
- 4) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
- 5) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$.
- 6) $(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
- 7) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$.

Demonstração. 1) Temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) x_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1) y_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_1 \\ &= x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) x_2 - (x_1 z_2 - x_2 z_1) y_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_2 \\ &= x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_1 y_2 z_2 + x_2 y_2 z_1 + x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) Se \vec{v} é múltiplo de \vec{u} , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Logo, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) = \lambda (x_1, y_1, z_1) = \lambda \vec{u}$, ou seja,

$$x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1. \quad (2.3)$$

Multiplicando a primeira das identidades (2.3) por y_1 e a segunda por x_1 , obtemos:
 $y_1 x_2 = \lambda x_1 y_1 = x_1 y_2 \implies x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

Multiplicando a primeira das identidades (2.3) por z_1 e a terceira por x_1 , obtemos: $x_2z_1 = \lambda x_1z_1 = x_1z_2 \implies x_1z_2 - x_2z_1 = 0$.

Finalmente, multiplicando a segunda das identidades (2.3) por z_1 e a terceira por y_1 , obtemos: $y_2z_1 = \lambda y_1z_1 = y_1z_2 \implies y_1z_2 - y_2z_1 = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0$. Se $\vec{u} = \vec{0} = (0, 0, 0)$, então $\vec{u} = 0\vec{v}$, isto é, \vec{u} é múltiplo de \vec{v} . Assim, podemos supor que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0) = \vec{0}$, isto é, pelo menos uma coordenada de \vec{u} é diferente de zero. Se $x_1 \neq 0$, seja, $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$. Afirmamos que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

De fato, como $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, segue que $y_2 = \frac{x_2}{x_1}y_1$. E, uma vez que $x_1z_2 - x_2z_1 = 0$, temos $z_2 = \frac{x_2}{x_1}z_1$. Logo,

$$\lambda\vec{u} = \frac{x_2}{x_1}(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x_2}{x_1}x_1, \frac{x_2}{x_1}y_1, \frac{x_2}{x_1}z_1\right) = (x_2, y_2, z_2) = \vec{v}.$$

Os casos $y_1 \neq 0$ e $z_1 \neq 0$ são tratados da mesma maneira. Segue-se, então, que um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é múltiplo do outro se, e só se,

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, se, e só se,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0).$$

Em particular, $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{0} = \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ para todo vetor \vec{u} .

3) Temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= y_1^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + y_2^2z_1^2 + x_1^2z_2^2 - 2x_1x_2z_1z_2 \\ &\quad + x_2^2z_1^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\ &= x_1^2(y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + z_2^2) + z_1^2(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad - 2x_1x_2y_1y_2 - 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= x_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ &\quad + z_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - x_1^2x_2^2 - y_1^2y_2^2 \\ &\quad - z_1^2z_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - x_1^2 x_2^2 \\
 &\quad - 2x_1 x_2 y_1 y_2 - y_1^2 y_2^2 - 2z_1 z_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) - z_1^2 z_2^2 \\
 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\
 &\quad - \left((x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + 2z_1 z_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + z_1^2 z_2^2 \right) \\
 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\
 &\quad - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \\
 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta \\
 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$.

4) Temos:

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
 &= -(y_2 z_1 - y_1 z_2, -(x_2 z_1 - x_1 y_2), x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
 &= -(\vec{v} \times \vec{u}).
 \end{aligned}$$

5) Como $\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, temos:

$$\begin{aligned}
 (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} &= ((\lambda y_1) z_2 - y_2 (\lambda z_1), -((\lambda x_1) z_2 - x_2 (\lambda z_1)), (\lambda x_1) y_2 - x_2 (\lambda y_1)) \\
 &= \lambda (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
 &= \lambda (\vec{u} \times \vec{v}).
 \end{aligned}$$

A outra identidade, $\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$, prova-se de maneira análoga.

6) Sendo $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\vec{u} + \vec{w} = (x_1 + x_3, y_1 + y_3, z_1 + z_3)$, temos:

$$(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 + x_3 & y_1 + y_3 & z_1 + z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} y_1 + y_3 & z_1 + z_3 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 + x_3 & z_1 + z_3 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 + x_3 & y_1 + y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \\
 &= ((y_1 + y_3)z_2 - (z_1 + z_3)y_2) \vec{i} - ((x_1 + x_3)z_2 - (z_1 + z_3)x_2) \vec{j} \\
 &\quad + ((x_1 + x_3)y_2 - (y_1 + y_3)x_2) \vec{k} \\
 &= (y_1z_2 + y_3z_2 - z_1y_2 - z_3y_2) \vec{i} - (x_1z_2 + x_3z_2 - z_1x_2 - z_3x_2) \vec{j} \\
 &\quad + (x_1y_2 + x_3y_2 - y_1x_2 - y_3x_2) \vec{k} \\
 &= ((y_1z_2 - y_2z_1) + (y_3z_2 - y_2z_3)) \vec{i} - ((x_1z_2 - z_1x_2) + (x_3z_2 - x_2z_3)) \vec{j} \\
 &\quad + ((x_1y_2 - y_1x_2) + (x_3y_2 - x_2y_3)) \vec{k} \\
 &= \left((y_1z_2 - y_2z_1) \vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1) \vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k} \right) \\
 &\quad + \left((y_3z_2 - y_2z_3) \vec{i} - (x_3z_2 - x_2z_3) \vec{j} + (x_3y_2 - x_2y_3) \vec{k} \right) \\
 &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v}.
 \end{aligned}$$

7) De fato, o vetor $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é coplanar com \vec{v} e \vec{w} . Logo, existem m e n reais tais que

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = m\vec{v} + n\vec{w}. \quad (2.5)$$

Para determinar m e n , escolhe-se a base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ com \vec{i} paralelo a \vec{v} , \vec{j} coplanar com \vec{v} e \vec{w} , e \vec{k} paralelo a $\vec{v} \times \vec{w}$.

Então, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= a\vec{i} \\
 \vec{w} &= b\vec{i} + c\vec{j} \\
 \vec{u} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por outro lado:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = ac\vec{k}$$

e

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & ac \end{vmatrix} = acy\vec{i} - acx\vec{j}$$

ou:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= acy \vec{i} - acx \vec{j} \\ &= acy \vec{i} - acx \vec{j} + abx \vec{i} - abx \vec{i} \\ &= (bx + cy) a \vec{i} - ax (b \vec{i} + c \vec{j})\end{aligned}$$

Tendo em vista as igualdades (2.6), temos:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (bx + cy) \vec{v} - ax \vec{w}. \quad (2.7)$$

Comparando as igualdades (2.5) e (2.7), temos que $m = bx + cy$ e $n = -ax$. Mas de acordo com a definição de produto escalar e tendo em vista as igualdades (2.6), $bx + cy = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ e $ax = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Daí, $m = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ e $n = -\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Substituindo m e n em (2.5), vem:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}.$$

□

2.3 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Uma função vetorial \mathbf{r} é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Isso significa que para todo número t no domínio de \mathbf{r} existe um único vetor denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são os componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f , g e h são funções de valor real chamadas funções componentes de \mathbf{r} e escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)).$$

Exemplo 5. Se $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2 + t, -2 + 5t)$, então as funções componentes são $f(t) = t^3$, $g(t) = t^2 + t$ e $h(t) = -2 + 5t$.

Definição 6. Se $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right)$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Exemplo 6. Determine $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{r}(t)$ onde $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t+3}, \frac{t-1}{t^2-1}, 2+t^2)$.

Solução. De acordo com a Definição 6, o limite de \mathbf{r} é o vetor cujos componentes são os limites das funções componentes de \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{r}(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t+3}, \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^2-1}, \lim_{t \rightarrow 1} 2+t^2 \right) \\ &= (2, 1/2, 3). \end{aligned}$$

Uma função vetorial \mathbf{r} é contínua em \mathbf{a} se $\lim_{t \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{a})$. Em vista da Definição 6, vemos que \mathbf{r} é contínua em \mathbf{a} se e somente se suas funções componentes f , g e h são contínuas em \mathbf{a} .

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f , g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I . Então o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço para os quais

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \tag{2.8}$$

e t varia no intervalo I é chamado **curva espacial**. As equações em (2.8) são denominadas equações paramétricas de C e t é conhecido como parâmetro. Podemos pensar em C como tendo sido traçado pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se consideramos a função vetorial $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então $\mathbf{r}(t)$ é um vetor de posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ sobre C . Assim, qualquer função vetorial \mathbf{r} define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento $\mathbf{r}(t)$, como mostrado na figura (2.1)

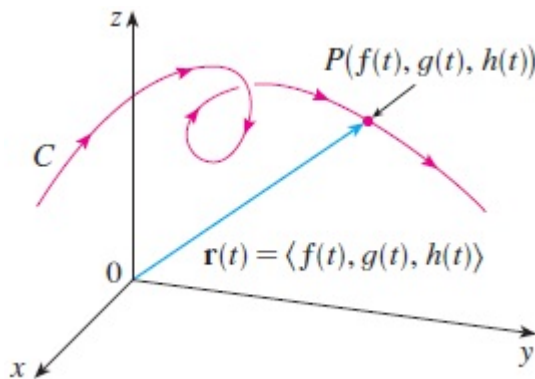


Figura 2.1: C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição $\mathbf{r}(t)$

Exemplo 7. Determine a equação vetorial que representa a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

Solução. A curva C resultante da interseção do plano com o cilindro é uma elipse. A projeção desta sobre o plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Assim, podemos escrever

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \sin t$$

Escrevendo as equações paramétricas para C , obtemos

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 2 - \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, (2 - \sin t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Essa equação é chamada parametrização da curva C .

Definição 7. A derivada $\dot{\mathbf{r}}(t)$ de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é definida do mesmo modo como é feito para as funções reais:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se o limite existir.

O significado geométrico dessa definição está representado na figura (2.2). Se os pontos

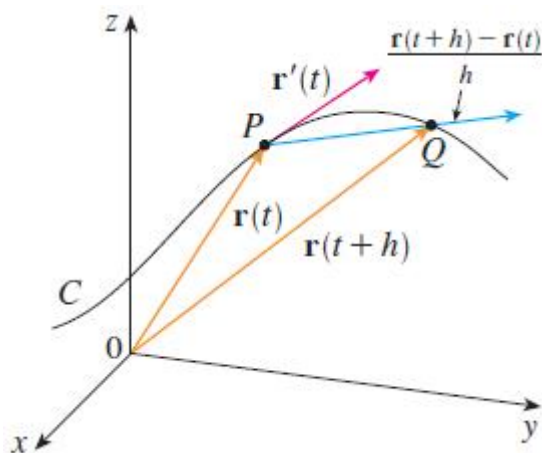


Figura 2.2: Vetor velocidade

P e Q têm valores de posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t+h)$, então \overrightarrow{PQ} representa o vetor $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$,

que pode ser visto como o vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$. Quanto $h \rightarrow 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão dizemos que o vetor $\dot{\mathbf{r}}(t)$ é chamado vetor tangente à curva definida por \mathbf{r} no ponto P , desde que exista $\dot{\mathbf{r}}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$. A reta tangente a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial \mathbf{r} por diferenciação de cada componente de \mathbf{r} .

Teorema 1. *Se $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, onde f , g e h são funções diferenciáveis, então*

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)).$$

Demonstração. Pela definição (7), temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(f(t+h), g(t+h), h(t+h)) - (f(t), g(t), h(t))]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right) \\ &= (\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)) \end{aligned}$$

□

O próximo teorema mostra que as fórmulas de diferenciação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

Teorema 2. *Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} funções vetoriais diferenciáveis, λ um escalar e f , uma função real. Então,*

- 1) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \dot{\mathbf{u}}(t) + \dot{\mathbf{v}}(t)$
- 2) $\frac{d}{dt}[\lambda \mathbf{u}(t)] = \lambda \dot{\mathbf{u}}(t)$
- 3) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = \dot{f}(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\dot{\mathbf{u}}(t)$
- 4) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t)$
- 5) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t)$

$$6) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = \dot{f}(t)\dot{\mathbf{u}}(f(t))$$

Demonstração. Consideremos $\mathbf{u}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e $\mathbf{v}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$.

1) Sendo $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), f_3(t) + g_3(t))$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] &= (\dot{f}_1(t) + \dot{g}_1(t), \dot{f}_2(t) + \dot{g}_2(t), \dot{f}_3(t) + \dot{g}_3(t)) \\ &= (\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dot{f}_3(t)) + (\dot{g}_1(t), \dot{g}_2(t), \dot{g}_3(t)) \\ &= \dot{\mathbf{u}}(t) + \dot{\mathbf{v}}(t) \end{aligned}$$

2) Como $\lambda\mathbf{u}(t) = (\lambda f_1(t), \lambda f_2(t), \lambda f_3(t))$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\lambda\mathbf{u}(t)] &= (\lambda\dot{f}_1(t), \lambda\dot{f}_2(t), \lambda\dot{f}_3(t)) \\ &= \lambda(\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dot{f}_3(t)) \\ &= \lambda\dot{\mathbf{u}}(t) \end{aligned}$$

3) Temos $f(t)\mathbf{u}(t) = (f(t)f_1(t), f(t)f_2(t), f(t)f_3(t))$. Como $f(t)f_i(t)$ é o produto de duas funções reais, segue-se que

$$\frac{d}{dt}[f(t)f_i(t)] = \dot{f}(t)f_i(t) + f(t)\dot{f}_i(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] &= (\dot{f}(t)f_1(t) + f(t)\dot{f}_1(t), \dot{f}(t)f_2(t) + f(t)\dot{f}_2(t), \dot{f}(t)f_3(t) + f(t)\dot{f}_3(t)) \\ &= (\dot{f}(t)f_1(t), \dot{f}(t)f_2(t), \dot{f}(t)f_3(t)) + (f(t)\dot{f}_1(t), f(t)\dot{f}_2(t), f(t)\dot{f}_3(t)) \\ &= \dot{f}(t)(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) + f(t)(\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dot{f}_3(t)) \\ &= \dot{f}(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\dot{\mathbf{u}}(t) \end{aligned}$$

4) Sendo $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$, as regras ordinárias de diferenciação do produto nos fornecem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt}[f_i(t)g_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^3 [\dot{f}_i(t)g_i(t) + f_i(t)\dot{g}_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{f}_i(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^3 f_i(t)\dot{g}_i(t) \\ &= \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \end{aligned}$$

5) Pela definição (5), temos

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) = (f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t), g_1(t)f_3(t) - f_1(t)g_3(t), f_1(t)g_2(t) - g_1(t)f_2(t)).$$

Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] &= (\dot{f}_2(t)g_3(t) + f_2(t)\dot{g}_3(t) - \dot{g}_2(t)f_3(t) - g_2(t)\dot{f}_3(t), \\ &\quad \dot{g}_1(t)f_3(t) + g_1(t)\dot{f}_3(t) - \dot{f}_1(t)g_3(t) - f_1(t)\dot{g}_3(t), \\ &\quad \dot{f}_1(t)g_2(t) + f_1(t)\dot{g}_2(t) - \dot{g}_1(t)f_2(t) - g_1(t)\dot{f}_2(t)) \\ &= (\dot{f}_2(t)g_3(t) - g_2(t)\dot{f}_3(t), g_1(t)\dot{f}_3(t) - \dot{f}_1(t)g_3(t), \\ &\quad \dot{f}_1(t)g_2(t) - g_1(t)\dot{f}_2(t)) + \\ &\quad (f_2(t)\dot{g}_3(t) - \dot{g}_2(t)f_3(t), \dot{g}_1(t)f_3(t) - f_1(t)\dot{g}_3(t), \\ &\quad f_1(t)\dot{g}_2(t) - \dot{g}_1(t)f_2(t)) \\ &= \dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t) \end{aligned}$$

6) Pela regra da cadeia para funções reais, temos $\frac{d}{dt}[f_i(f(t))] = \dot{f}(t)\dot{f}_i(f(t))$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] &= \left(\frac{d}{dt}[f_1(f(t))], \frac{d}{dt}[f_2(f(t))], \frac{d}{dt}[f_3(f(t))] \right) \\ &= (\dot{f}(t)\dot{f}_1(f(t)), \dot{f}(t)\dot{f}_2(f(t)), \dot{f}(t)\dot{f}_3(f(t))) \\ &= \dot{f}(t)(\dot{f}_1(f(t)), \dot{f}_2(f(t)), \dot{f}_3(f(t))) \\ &= \dot{f}(t)\dot{\mathbf{u}}(f(t)) \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Mostre que, se $|\mathbf{r}(t)| = c$ (uma constante), então $\dot{\mathbf{r}}(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t .*

Demonstração. Como $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$ e c^2 é uma constante, da Fórmula (4) do Teorema 2 vem

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 2\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t).$$

Então, $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, o que implica que $\dot{\mathbf{r}}(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

□

No movimento de uma partícula no espaço onde seu vetor posição no instante t seja $\mathbf{r}(t)$, o vetor

$$(1/h)(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)) \tag{2.9}$$

se aproxima da direção de movimento da partícula que se move ao longo da curva $\mathbf{r}(t)$. Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo. O vetor (2.9) fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento h e seu limite é o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ no instante t , ou seja,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (2.10)$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

Como no caso do movimento unidimensional, a aceleração da partícula é definida como a derivada da velocidade. Assim sendo, de (2.10) vem

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Capítulo 3

Cônicas e Áreas em Coordenadas Polares

Neste capítulo apresentaremos as definições, propriedades básicas e alguns resultados das cônicas, com a primazia concedida à elipse e à hipérbole, com um tratamento em termos de coordenadas polares. Falaremos também da área de uma região cuja fronteira é dada por uma curva polar.

3.1 Cônicas

Nesta seção daremos as definições de parábolas, elipses e hipérbolas e apresentaremos suas equações-padrão. Elas são chamadas seções cônicas, ou cônicas, pois resultam da interseção de um cone com um plano.

3.1.1 Elipse

Uma elipse é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante. Esses dois pontos são chamados focos.

Para obter a equação mais simples para uma elipse, colocamos os focos no eixo x nos pontos $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ como na figura (3.1), de modo que a origem esteja na metade do caminho entre os focos.

Seja a soma das distâncias a partir de um ponto na elipse até os focos $2a > 0$. Então $P(x, y)$ é um ponto na elipse quando

$$d(P, F_1) + (P, F_2) = 2a,$$

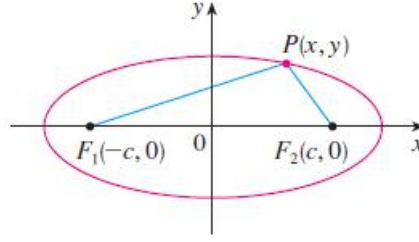


Figura 3.1: $d(P, F_1) + (P, F_2) = 2a$

isto é, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ ou $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que nos dá

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevamos ao quadrado novamente, obtemos

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

que se torna

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo F_1F_2P , vemos que $2c < 2a$, assim $c < a$ e, portanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniência, seja $b^2 = a^2 - c^2$. Então a equação da elipse torna-se $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ou, se ambos os lados forem divididos por a^2b^2 ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

Como $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, segue que $b < a$. Para $y = 0$ temos $x = \pm a$. Os pontos correspondentes $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são chamados de vértice, e o segmento de reta que une os vértices é dito eixo principal. Os outros dois vértices da elipse, $(0, b)$ e $(0, -b)$, são encontrados quando fazemos $x = 0$, dessa forma $y = \pm b$ (veja a figura (3.2)). A equação (3.1) não muda se x for trocado por $-x$ ou y for trocado por $-y$, logo, a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos. Note que, se os focos coincidirem, então $c = 0$, $a = b$ e a elipse torna-se um círculo com raio $r = a = b$.

Se os focos de uma elipse estiverem localizadas no eixo y em $(0, \pm c)$, então podemos encontrar sua equação trocando x e y em (3.1) (veja a figura (3.3)).

Obs 5. A equação da elipse quando o centro encontra-se no ponto (h, k) e tem eixo focal, eixo que contém os focos, paralelo ao eixo OX é $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Caso o eixo focal seja paralelo ao eixo OY , temos $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.

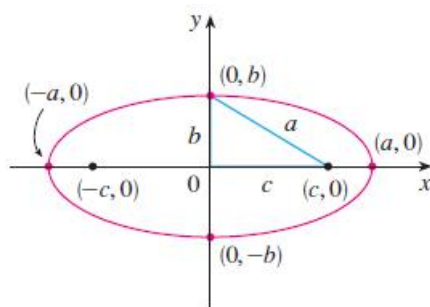


Figura 3.2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

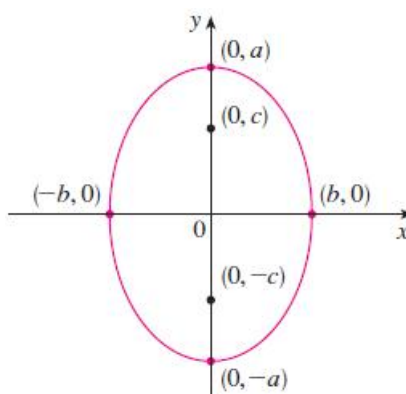


Figura 3.3: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

3.1.2 Hipérbole

Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos em um plano cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (os focos) é uma constante $2a > 0$. Se $P(x, y)$ é um ponto da hipérbole, devemos ter $|\text{d}(P, F_1) - \text{d}(P, F_2)| = 2a$. Essa definição é ilustrada na figura (3.4).

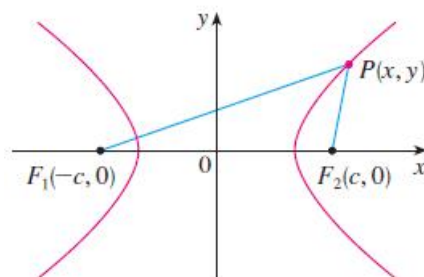


Figura 3.4: $|\text{d}(P, F_1) - \text{d}(P, F_2)| = 2a$

A obtenção da equação da hipérbole quando os focos estão sobre o eixo x é análoga à obtenção dada anteriormente para uma elipse. Assim, se a hipérbole tem os focos $(\pm c, 0)$

e $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, a sua equação é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.2}$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$. Os pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são os vértices da hipérbole.

A partir da equação (3.2) vemos que a hipérbole é simétrica em relação a ambos os eixos, pois se trocarmos x por $-x$ ou y por $-y$, a equação não se altera, e obtemos também

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1.$$

Isso mostra que $x^2 \geq a^2$, assim $|x| = \sqrt{x^2} \geq a$. Portanto temos $x \geq a$ ou $x \leq -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas ramos. Tais ramos se aproximam das assíntotas $y = \pm \frac{b}{a}x$, isto é, eles chegam arbitrariamente próximos das assíntotas (veja a figura (3.5)).

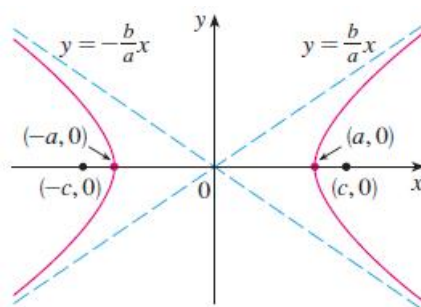


Figura 3.5: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Se os focos da hipérbole estiverem sobre o eixo y obtemos a equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{3.3}$$

Donde temos $y \geq a$ ou $y \leq -a$. Seus focos são $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, os pontos $(0, \pm a)$ seus vértices e $y = \pm \frac{a}{b}x$ suas assíntotas, como ilustrado na figura (3.6).

Obs 6. A equação da hipérbole quando o centro encontra-se no ponto (h, k) e o eixo focal, reta que contém F_1 e F_2 , é paralelo ao eixo OX é $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Caso o eixo focal seja paralelo ao eixo OY , temos $\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$.

3.1.3 Parábola

Uma parábola é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo F , denominada foco, e a uma reta fixa, chamada diretriz, são iguais.

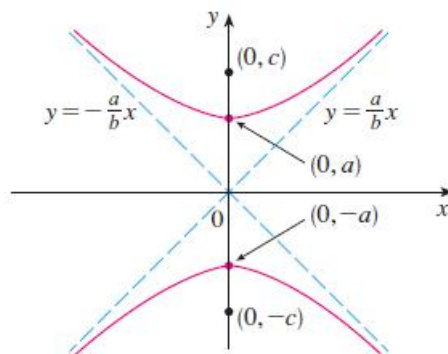


Figura 3.6: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Obteremos uma equação particularmente simples para uma parábola se colocarmos o vértice na origem O e sua diretriz paralela ao eixo x , como na figura (3.7). Se o foco for

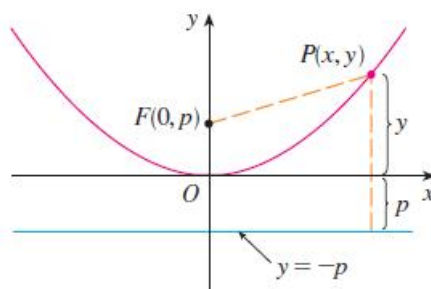


Figura 3.7: $x^2 = 4py$, $p > 0$

o ponto $(0, p)$, então a diretriz tem a equação $y = -p$. Se $P(x, y)$ for um ponto qualquer na parábola, então a distância de P até o foco é

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

e a distância de P até a diretriz é $|y + p|$. (A figura 3.7 ilustra o caso onde $p > 0$.) Pela definição de parábola, devemos ter

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Obtemos uma equação equivalente elevando ao quadrado e simplificando:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= |y + p|^2 = (y + p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 &= 4py \end{aligned}$$

Se o foco da parábola for $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$, onde $p > 0$, obteremos a equação $y^2 = 4px$, como mostra a figura (3.8).

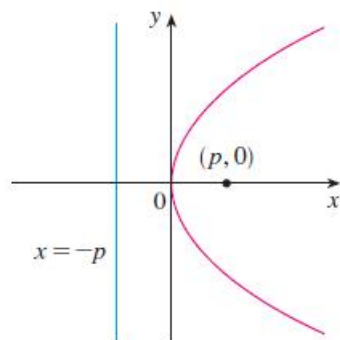


Figura 3.8: $y^2 = 4px$, $p > 0$

Obs 7. A equação da parábola quando o vértice se encontra no ponto (h, k) e a diretriz paralela ao eixo OX é $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Caso a diretriz seja paralela ao eixo OY , temos $(y - h)^2 = 4p(x - k)$.

3.2 Coordenadas polares

Escolhemos um ponto no plano conhecido como pólo (ou origem) e o denominamos O . Então, desenhamos um raio (semirreta) começando em O , chamado eixo polar. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta OP como na figura (3.9). Daí

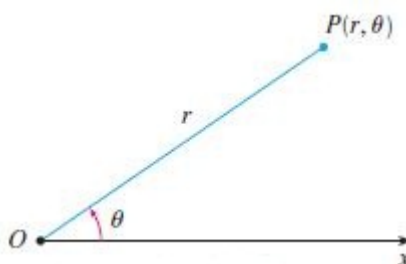


Figura 3.9: Eixo polar

o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) onde r e θ são suas coordenadas polares tais que $0 \leq r \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $-\pi \leq \theta < \pi$. Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e concordamos que $(0, \theta)$ representa o pólo para qualquer valor de θ .

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da figura (3.10), na qual o pólo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo x positivo.

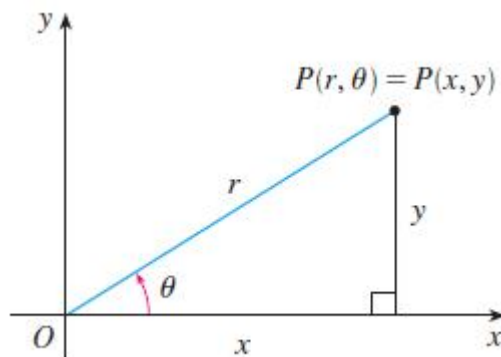


Figura 3.10: Coordenadas polares

Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) , então, a partir da figura, temos

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta \quad (3.4)$$

As equações (3.4) são válidas para todos os valores de r e θ e nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Somando-se os quadrados dessas equações, obtemos

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \implies x^2 + y^2 = r^2$$

e da razão entre elas

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta \implies \frac{y}{x} = \tan \theta.$$

Exemplo 9. Converta o ponto $(2, \frac{\pi}{3})$ de coordenadas polares para cartesianas.

Solução. Como $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$, as equações (3.4), nos fornecem

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

e

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Portanto, o ponto é $(1, \sqrt{3})$ nas coordenadas cartesianas.

Exemplo 10. Represente o ponto com coordenadas cartesianas $(1, -1)$ em termos de coordenadas polares.

Solução. Se escolhermos r positivo, temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como o ponto $(1, -1)$ está no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$; e outra é $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$.

Obs 8. A distância r fica determinada univocamente, mas o mesmo não acontece com θ , pois, como θ aumenta através do intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, cada valor de $\tan \theta$ ocorre duas vezes. Devemos escolher θ de modo que o ponto (r, θ) esteja no quadrante correto.

Exemplo 11. Que curva é representada pela equação polar $r = 2$?

Solução. A curva consiste em todos os pontos (r, θ) com $r = 2$. Como r representa a distância do ponto ao pólo, a curva $r = 2$ representa o círculo com centro O e raio 2. Em geral, a equação $r = a$ representa um círculo com centro em O e raio $|a|$.

Obs 9. O gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$ consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfazem a equação.

3.3 Áreas em coordenadas polares

Seja \mathcal{R} a região ilustrada na figura (3.11), limitada pela curva polar $r = f(\theta)$ e pelos raios $\theta = a$ e $\theta = b$, onde f é uma função contínua positiva e onde $0 < b - a \leq 2\pi$. Dividimos

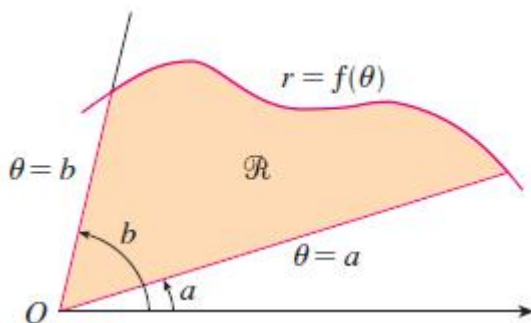


Figura 3.11: Área entre os raios $\theta = a$ e $\theta = b$.

o intervalo $[a, b]$ em subintervalos com extremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ e larguras $\Delta\theta$. Os raios $\theta = \theta_i$ dividem então \mathcal{R} em n regiões menores com ângulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Se

escolhermos θ_i^* no i -ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, então a área ΔA_i da i -ésima região será aproximada pela área do setor de um círculo com ângulo central $\Delta\theta$ e raio $f(\theta_i^*)$. (Veja a figura (3.12).)

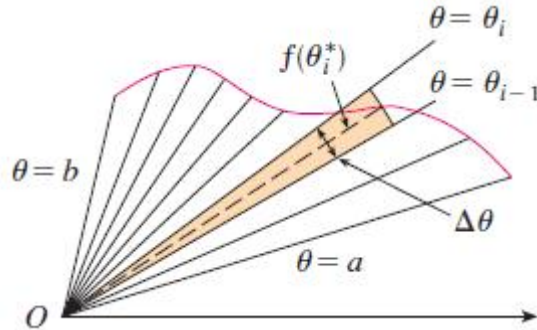


Figura 3.12: Área entre os raios $\theta = a$ e $\theta = b$ dividida em n partes.

A área de um setor circular é proporcional a seu ângulo central. Daí a sua área é

$$\frac{\theta}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta, \quad (3.5)$$

onde r é o raio do setor e θ , a medida em radianos do ângulo central. Logo, a partir da equação (3.5), temos

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta.$$

Portanto, a área total A de \mathcal{R} é

$$A \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta,$$

expressão esta que é uma soma de Riemann. Logo,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (3.6)$$

Quando aplicamos a fórmula (3.6), é interessante pensar na área como varrida por um raio que gira e passa por O e que começa com ângulo a e termina com ângulo b .

3.4 Cônicas em Coordenadas Polares

Nesta seção daremos uma definição geral que engloba os três tipos de cônicas em termos de um foco e da diretriz correspondente a esse fato e usando a definição geral e escolhendo um sistema de coordenadas polares com origem no foco e eixo polar perpendicular ou paralela à diretriz, veremos que uma cônica nessas coordenadas polares assume um forma bem simples.

Teorema 3. *Sejam F um ponto fixado e ℓ uma reta fixada (denominada diretriz) em um plano e e um número real positivo. O conjunto de todos os pontos P no plano tal que*

$$d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)$$

é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$, de foco no ponto F e excentricidade e .

Demonstração. Note que se $e = 1$, então $d(P, F) = d(P, \ell)$, e assim o conjunto é uma parábola, de acordo com a definição de parábola.

Suponhamos que $0 < e \neq 1$. Colocaremos o foco F na origem, ou seja, $F = (0, 0)$, e a diretriz paralela ao eixo y e d unidades para a direita. Então a diretriz tem a equação $x = d$ e é perpendicular ao eixo polar. Se o ponto P tiver coordenadas polares (r, θ) , vemos a partir da figura (3.13). que $d(P, F) = r$ e $d(P, \ell) = d - r \cos \theta$. Como $d(P, F) = ed(P, \ell)$,

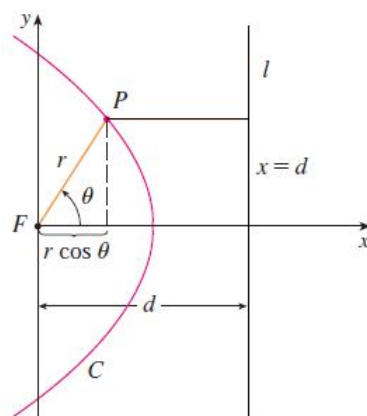


Figura 3.13: Sistema OXY escolhido.

temos

$$r = e(d - r \cos \theta). \tag{3.7}$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os membros da equação (3.7) e usarmos $r^2 = x^2 + y^2$ e $x = r \cos \theta$, obtemos

$$\begin{aligned} r^2 = e^2(d^2 - 2dr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta) &\iff r^2 = e^2(d^2 - 2dr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta) \\ &\iff x^2 + y^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2) \\ &\iff x^2 + y^2 = d^2 e^2 - 2de^2 x + e^2 x^2 \\ &\iff (1 - e^2)x^2 + 2de^2 x + y^2 = d^2 e^2 \\ &\iff (1 - e^2) \left(x^2 + \frac{2de^2}{1 - e^2} x \right) + y^2 = d^2 e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = d^2e^2 + \frac{(1 - e^2)d^2e^4}{(1 - e^2)^2} \\
 &\Leftrightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = d^2e^2 \left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \right) \\
 &\Leftrightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{d^2e^2}{1 - e^2}} = 1. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Se $0 < e < 1$, reconhecemos a equação (3.8) como a equação de uma elipse da forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $h = -\frac{de^2}{1 - e^2}$, $a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}$ e $b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}$. De fato, pois $0 < e < 1 \Rightarrow e^2 < 1$ e daí $0 < 1 - e^2 < 1$. Multiplicando essa última desigualdade por $d^2e^2(1 - e^2)$ obtemos $d^2e^2(1 - e^2)^2 < d^2e^2(1 - e^2)$. Segue-se, então, que $\frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} > \frac{d^2e^2}{1 - e^2}$. Logo, a reta focal é o eixo OX e, portanto,

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{d^2e^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{1 - e^2} \left(\frac{1}{1 - e^2} - 1 \right) = \frac{d^2e^2}{1 - e^2} \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right) = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2}$$

ou $c^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2} \Leftrightarrow c = \frac{de^2}{1 - e^2}$. Isso nos diz que $h = -c$. Além disso,

- $\frac{c}{a} = \frac{de^2}{1 - e^2} \times \frac{1 - e^2}{de} = e$ é a excentricidade.
- $C = \left(-\frac{de^2}{1 - e^2}, 0 \right)$ é o centro.
- $F_1 = C + (c, 0) = (0, 0) = F$ é um foco.
- $\ell : x = d$ é perpendicular à reta focal (eixo OX).

e

$$\begin{aligned}
 d(C, \ell) &= |x - d| = \left| -\frac{de^2}{1 - e^2} - d \right| = \left| -\frac{de^2}{1 - e^2} - d \right| = \left| \frac{-de^2 - d + de^2}{1 - e^2} \right| \\
 &= \left| \frac{-d}{1 - e^2} \right| = \frac{d}{1 - e^2} = \frac{a}{e}.
 \end{aligned}$$

Observe que o foco F está entre o centro C e o ponto $M = (d, 0)$, pois a abscissa d de M é positiva e a abscissa de C é negativa, onde M é o ponto de interseção de ℓ com a reta focal.

Se $e > 1$, então $1 - e^2 < 0$. Logo, o conjunto de pontos é uma hipérbole com reta focal no eixo OX , pois $\frac{d^2 e^2}{(1 - e^2)^2} > 0$ e $\frac{d^2 e^2}{1 - e^2} < 0$. Assim, sua representação cartesiana é dada por

$$\frac{\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{d^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{d^2 e^2}{e^2 - 1}} = 1,$$

com $a^2 = \frac{d^2 e^2}{(1 - e^2)^2}$, $b^2 = \frac{d^2 e^2}{e^2 - 1}$ e

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{d^2 e^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{d^2 e^2}{e^2 - 1} = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2} \left(\frac{1}{1 - e^2} - 1\right) = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2} \left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right) = \frac{d^2 e^4}{(1 - e^2)^2}$$

ou $c^2 = \frac{d^2 e^4}{(1 - e^2)^2} \iff c = \frac{de^2}{e^2 - 1}$. Neste caso, sendo $h = -\frac{de^2}{1 - e^2}$, a hipérbole é da forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Temos, também, que

- $\frac{c}{a} = \frac{de^2}{e^2 - 1} \times \frac{e^2 - 1}{de} = e$ é a excentricidade.
- $C = \left(-\frac{de^2}{1 - e^2}, 0\right)$ é o centro.
- $F_1 = C + (c, 0) = (0, 0) = F$ é um foco.
- $\ell : x = d$ é perpendicular à reta focal (eixo OX).

e

$$\begin{aligned} d(C, \ell) &= |x - d| = \left| -\frac{de^2}{1 - e^2} - d \right| = \left| -\frac{de^2}{1 - e^2} - d \right| = \left| \frac{-de^2 - d + de^2}{1 - e^2} \right| \\ &= \left| \frac{-d}{1 - e^2} \right| = \frac{d}{e^2 - 1} = \frac{a}{e}. \end{aligned}$$

Note que, na hipérbole, o ponto $M = (d, 0)$ está entre o foco F e o centro C , pois $0 < d < -\frac{de^2}{1 - e^2}$, onde M é o ponto de interseção de ℓ com a reta focal.

Podemos deduzir, de maneira análoga, a equação de uma elipse (ou hipérbole) para $0 < e < 1$ ou $e > 1$ quando $x = -d$, ou seja, quando a reta ℓ estiver à direita do ponto F . Assim sendo, obteríamos $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ em vez da equação (3.7) que pode ser escrita como $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$. Caso ponhamos $\ell : y = m$ ou $\ell : y = -m$, analogamente teríamos as equações polares $r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$ e $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$, respectivamente. Em qualquer caso, para $e = 1$, teríamos sempre uma parábola. \square

Capítulo 4

Equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

As equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, que introduziremos neste capítulo, mostram que a equação que rege o movimento dos planetas satisfaz a fórmula de Binet, que é uma equação do tipo oscilador harmônico, como se verá no capítulo 5.

4.1 Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua¹. Consideremos a equação linear de 2ª ordem

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f \tag{4.1}$$

onde, de forma compacta, escreve-se $\ddot{x}(t) = \ddot{x}$, $\dot{x}(t) = \dot{x}$, $f(t) = f$ e $p, q \in \mathbb{R}$.

Se $f = 0$ em (a, b) , a equação (4.1) se diz homogênea e o método de resolução da equação

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \tag{4.2}$$

¹Consideraremos na maioria dos casos problemas onde o intervalo é a semirreta $t > 0$ ou toda a reta $-\infty < t < \infty$

consiste em buscar soluções na forma

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (4.3)$$

onde λ é um parâmetro a determinar. Assim, levando-se $x(t)$, dada por (4.3), a fim de que seja solução de (4.2), temos

$$\begin{aligned} \ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 &\implies \frac{d^2}{dt^2} (e^{\lambda t}) + p \frac{d}{dt} (e^{\lambda t}) + q (e^{\lambda t}) = 0 \\ &(\lambda^2 e^{\lambda t}) + p (\lambda e^{\lambda t}) + q (e^{\lambda t}) = 0 \\ &e^{\lambda t} (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \end{aligned}$$

de onde se segue que

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (4.4)$$

que é conhecida como a equação característica ou equação auxiliar da equação (4.2). Portanto, se escolhermos λ igual as soluções de (4.4), as funções $e^{\lambda t}$ correspondentes são soluções de (4.2).

Teorema 4. *A solução geral da equação*

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (4.5)$$

onde $\omega \neq 0$ é um número real dado, é $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ com $A, B \in \mathbb{R}$.

Demonstração. As funções $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ satisfazem (4.5), logo tais funções são soluções de (4.5). Assim, quaisquer que sejam os reais A e B ,

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.6)$$

será também solução de (4.5). De fato, pois

$$\frac{d^2}{dt^2} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$$

e daí

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = 0.$$

Se $x = x(t)$, $x \in \mathbb{R}$, for solução de (4.5) então existirá uma constante k tal que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$[\dot{x}(t)]^2 + \omega^2 [x(t)]^2 = k.$$

De fato, pois, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}([\dot{x}(t)]^2 + \omega^2[x(t)]^2) &= 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + 2x(t)\omega^2\dot{x}(t) \\ &= 2\dot{x}(t)(\ddot{x}(t) + \omega^2x(t)) \\ &= 2\dot{x}(t) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $[\dot{x}(t)]^2 + \omega^2[x(t)]^2 = k$ é constante.

Suponhamos, agora, que $x = x(t)$, $x \in \mathbb{R}$, seja uma solução qualquer de (4.5). Façamos $a_0 = x(0)$ e $b_0 = \dot{x}(0)$. A função g dada por

$$g(t) = a_0 \cos(\omega t) + \frac{b_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

é solução de (4.5) e, além disso,

$$g(0) = a_0 \cos 0 + \frac{b_0}{\omega} \sin 0 \Rightarrow g(0) = a_0$$

e

$$\dot{g}(0) = -a_0 \sin 0 + b_0 \sin 0 \Rightarrow \dot{g}(0) = b_0.$$

Sendo $g(t)$ e $x(t)$ soluções de (4.5), $g(t) - x(t)$ também o é, pois

$$\ddot{g}(t) - \ddot{x}(t) + \omega^2(g(t) - x(t)) = [\ddot{g}(t) + \omega^2g(t)] - [\ddot{x}(t) + \omega^2x(t)] = 0 - 0 = 0.$$

Logo, existe uma constante k tal que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$[\dot{g}(t) - \dot{x}(t)]^2 + \omega^2[g(t) - x(t)]^2 = k.$$

De $g(0) = x(0)$ e $\dot{g}(0) = \dot{x}(0)$ resulta $k = 0$. Assim, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$[\dot{g}(t) - \dot{x}(t)]^2 + \omega^2[g(t) - x(t)]^2 = 0$$

e daí $g(t) = x(t)$, ou seja,

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

onde $A = a_0$ e $B = \frac{b_0}{\omega}$. □

Exemplo 12. *O movimento de uma partícula sobre o eixo x é regido pela equação*

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

onde $m > 0$ e $k > 0$ são constantes reais dadas. Descreva o movimento.

Solução. A equação é equivalente a

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. A solução geral é

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Tomando-se φ tal que $\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ e $\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, resulta

$$x = \sqrt{A^2 + B^2} [\cos \varphi \cos(\omega t) + \sin \varphi \sin(\omega t)],$$

ou seja,

$$x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \varphi).$$

Trata-se, então, de um movimento harmônico simples de amplitude $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Obs 10. Dizemos que uma partícula que se desloca sobre o eixo x descreve um movimento harmônico simples (MHS) se a equação horária for do tipo $x = a \cos(\omega t - \varphi_0)$. Os números a , ω e φ_0 denominam-se, respectivamente, amplitude, pulsação e fase inicial do movimento.

Teorema 5. Seja $p^2 - 4q$ o discriminante da equação característica (4.4). Então

- i) se $p^2 - 4q > 0$, a equação (4.4) tem duas raízes reais distintas, λ_1 e λ_2 , e a solução geral da equação homogênea (4.2) será $x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, com $A, B \in \mathbb{R}$.
- ii) se $p^2 - 4q = 0$, a equação (4.4) nos dá apenas uma raiz real, $\lambda_1 = \lambda_2$, e a solução geral da equação homogênea (4.2) será $x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$, com $A, B \in \mathbb{R}$.
- iii) se $p^2 - 4q < 0$, a equação (4.4) nos dá duas raízes complexas conjugadas, $\lambda = \alpha \pm \beta i$ onde $\alpha = -\frac{p}{2}$ e $\beta = -\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, e a solução geral da equação homogênea (4.2) será $x = e^{\lambda t} [A \cos \beta t + B \sin \beta t]$, com $A, B \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como λ_1 e λ_2 são raízes de $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, temos

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -p \\ \lambda_1 \lambda_2 = q. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 &\iff \ddot{x} - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{x} + \lambda_1\lambda_2x = 0 \\ &\iff \ddot{x} - \lambda_1\dot{x} - \lambda_2\dot{x} + \lambda_1\lambda_2x = 0 \\ &\iff \frac{d}{dt}(\dot{x} - \lambda_1x) - \lambda_2(\dot{x} - \lambda_1x) = 0. \end{aligned}$$

Segue que $x = x(t)$ será solução de (4.2) se, e somente se, $u = \dot{x} - \lambda_1x$ for solução da equação linear de 1ª ordem

$$\frac{du}{dt} - \lambda_2u = 0.$$

Como $u = k_2e^{\lambda_2t}$, segue que $x = x(t)$ será solução de (4.2) se e somente se

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_1x = \lambda_2k_2e^{\lambda_2t} \iff \frac{dx}{dt}e^{-\lambda_1t} - \lambda_1xe^{-\lambda_1t} = \lambda_2k_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}.$$

Sendo $\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_1t}x) = \frac{dx}{dt}e^{-\lambda_1t} - \lambda_1xe^{-\lambda_1t}$, temos que

$$\begin{aligned} xe^{-\lambda_1t} &= k_1 + \int \left(\frac{dx}{dt}e^{-\lambda_1t} - \lambda_1xe^{-\lambda_1t} \right) dt \\ &= k_1 + \int \lambda_2k_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} dt, \end{aligned}$$

com k_1 e k_2 constantes. Logo, $x = x(t)$ será solução de (4.2) se, e somente se, for da forma

$$x = k_1e^{\lambda_1t} + e^{\lambda_1t} \int \lambda_2k_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} dt. \quad (4.7)$$

i) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue-se de (4.7) que

$$x = k_1e^{\lambda_1t} + e^{\lambda_1t} \frac{(\lambda_2k_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

ou

$$x = Ae^{\lambda_1t} + Be^{\lambda_2t}$$

onde $A = k_1$ e $B = \frac{\lambda_2k_2}{\lambda_2-\lambda_1}$.

ii) $\lambda_1 = \lambda_2$, segue-se de (4.7) que

$$x = k_1e^{\lambda_1t} + e^{\lambda_1t} \int \lambda_2k_2 dt \Rightarrow x = k_1e^{\lambda_1t} + \lambda_2k_2te^{\lambda_1t} \Rightarrow x = Ae^{\lambda_1t} + Be^{\lambda_1t}$$

onde $A = k_1$ e $B = \lambda_2k_2$.

iii) Sejam f e g funções definidas em \mathbb{R} e tais que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-\frac{p}{2}t}g(t)$.

Vamos mostrar que f será solução de (4.2) se, e somente se, g for solução de

$$\ddot{x} + \left(\frac{4q - p^2}{4} \right) x = 0. \quad (4.8)$$

De fato, se f for solução de (4.2) teremos, para todo $t \in \mathbb{R}$, que

$$\ddot{f}(t) + pf(t) + qf(t) = 0$$

ou

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-\frac{p}{2}t} g(t) \right) + p \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{p}{2}t} g(t) \right) + q \left(e^{-\frac{p}{2}t} g(t) \right) = 0. \quad (4.9)$$

Substituindo-se

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{p}{2}t} g(t) \right) = -\frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}t} g(t) + e^{-\frac{p}{2}t} \dot{g}(t)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-\frac{p}{2}t} g(t) \right) = \frac{p^2}{4} e^{-\frac{p}{2}t} g(t) - p e^{-\frac{p}{2}t} \dot{g}(t) + e^{-\frac{p}{2}t} \ddot{g}(t),$$

em (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{p^2}{4} e^{-\frac{p}{2}t} g(t) - p e^{-\frac{p}{2}t} \dot{g}(t) + e^{-\frac{p}{2}t} \ddot{g}(t) \right) + p \left(-\frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}t} g(t) + e^{-\frac{p}{2}t} \dot{g}(t) \right) \\ + q \left(e^{-\frac{p}{2}t} g(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\left(-\frac{p^2}{4} + q \right) g(t) e^{-\frac{p}{2}t} + \ddot{g}(t) e^{-\frac{p}{2}t} = 0 \iff e^{-\frac{p}{2}t} \left[\frac{(4q - p^2)}{4} g(t) + \ddot{g}(t) \right] = 0,$$

donde temos $\frac{(4q-p^2)}{4} g(t) + \ddot{g}(t) = 0$. Portanto, pelo Teorema 4, g é solução de (4.8).

Se g é solução de (4.8), temos $\ddot{g}(t) + \left[\frac{(4q-p^2)}{4} \right] g(t) = 0$. Mas

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t) &= \left(f(t) e^{\frac{p}{2}t} \right)'' \\ &= \left(\dot{f}(t) e^{\frac{p}{2}t} + \frac{p}{2} f(t) e^{\frac{p}{2}t} \right)' \\ &= \ddot{f}(t) e^{\frac{p}{2}t} + \frac{p}{2} \dot{f}(t) e^{\frac{p}{2}t} + \frac{p}{2} \dot{f}(t) e^{\frac{p}{2}t} + \frac{p^2}{4} f(t) e^{\frac{p}{2}t} \\ &= \ddot{f}(t) e^{\frac{p}{2}t} + p \dot{f}(t) e^{\frac{p}{2}t} + \frac{p^2}{4} f(t) e^{\frac{p}{2}t}. \end{aligned}$$

e

$$\left[\frac{(4q - p^2)}{4} \right] g(t) = \left[\frac{(4q - p^2)}{4} \right] f(t) e^{\frac{p}{2}t} = qf(t) e^{\frac{p}{2}t} - \frac{(p^2)}{4} f(t) e^{\frac{p}{2}t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t) + \left[\frac{(4q - p^2)}{4} \right] g(t) = 0 &\iff e^{\frac{p}{2}t} \left(\ddot{f}(t) + p \dot{f}(t) + \frac{p^2}{4} f(t) + qf(t) - \frac{p^2}{4} f(t) \right) = 0 \\ &\iff \ddot{f}(t) + p \dot{f}(t) + qf(t) = 0. \end{aligned}$$

Logo, f é solução de (4.2). Neste caso, sendo g solução de (4.8)

$$g(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

onde $\beta = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$. Segue, então que

$$f(t) = e^{-\frac{p}{2}t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

e fazendo $\alpha = -\frac{p}{2}$, resulta

$$f(t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t).$$

□

Exemplo 13. *Ache a solução do problema*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \text{ e } \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Solução. *A equação característica é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, cujas raízes são -1 e 2 . Como as raízes são distintas, temos pelo Teorema 5 que a solução geral é dada por*

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t}.$$

Devemos, agora, determinar A e B para que as condições iniciais sejam satisfeitas. Neste caso, temos que

$$\dot{x} = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}.$$

Então

$$\begin{cases} Ae^0 + Be^0 = 0 \\ -Ae^0 - 2e^0 = 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases}$$

e, portanto, $A = 1$ e $B = -1$. A solução do problema é $x = e^{-t} - e^{-2t}$.

Exemplo 14. *Resolva a equação $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$, onde $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ e $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$.*

Solução.

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \iff \lambda = 4.$$

Como $\lambda = 4$ é a única raiz da equação característica, a solução geral será

$$x = Ae^{4t} + Bte^{4t}.$$

4.2 Equações diferenciais lineares não-homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Consideremos a equação linear (4.1), de 2ª ordem, com coeficientes constantes. Se f não for identicamente nula em (a, b) , a equação (4.1) se diz não-homogênea e diremos, ainda, que (4.2) é a equação homogênea associada a (4.1).

Teorema 6. *A solução geral da equação diferencial não-homogênea (4.1) escrita como*

$$x(t) = x_h(t) + w(t)$$

onde $w = w(t)$ é uma solução particular da equação (4.1) e $x_h(t)$ é a solução geral da homogênea associada a equação (4.1).

Demonstração. De fato, sendo $w = w(t)$, $t \in (a, b)$, solução de (4.1),

$$\ddot{w}(t) + p\dot{w}(t) + qw(t) = f(t).$$

Supondo que $x = x(t)$ seja outra solução qualquer de (4.1), resulta que $x(t) - w(t)$ é solução da homogênea (4.2), pois, $\forall t \in (a, b)$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}[x(t) - w(t)] + p \frac{d}{dt}[x(t) - w(t)] + q[x(t) - w(t)] &= (\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t)) \\ &\quad - (\ddot{w}(t) + p\dot{w}(t) + qw(t)) \\ &= f(t) - f(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $x = x(t)$ for tal que $x(t) - w(t)$ é solução da homogênea, então $x = x(t)$ será solução de (4.1), pois

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}[x(t) - w(t)] + p \frac{d}{dt}[x(t) - w(t)] + q[x(t) - w(t)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t)) - (\ddot{w}(t) + p\dot{w}(t) + qw(t)) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) - f(t) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) &= f(t), \end{aligned}$$

Portanto a solução geral de (4.1) quando $f \neq 0$ é $x = x_h + w$ onde x_h é a solução geral da homogênea (4.2) e w uma solução particular de (4.1). \square

Importante. Um teorema bastante importante na teoria de equações diferenciais é o Teorema de Existência e Unicidade que no nosso caso garante que a equação (4.1) admite única solução que é apresentada no Teorema 6.

Definição 8.

(i) Duas funções $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são linearmente dependentes (abreviadamente *l.d.*) se existe uma constante k tal que $\phi_2(t) = k\phi_1(t)$, para todo $t \in (a, b)$.

(ii) Duas funções $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são linearmente independentes (*l.i.*) se a condição

$$\alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) = 0, \tag{4.10}$$

para todo $t \in (a, b)$ implicar $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Exemplo 15. As funções $\sin x$ e $\cos x$ são *l.i.*

Definição 9. Dadas duas funções diferenciáveis $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, o determinante

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

é chamado o Wronskiano das funções ϕ_1 e ϕ_2 .

Determinar a solução geral da homogênea associada já sabemos. O problema, agora, é como determinar uma solução particular. Para isso ilustraremos o método de variação dos parâmetros para a equação

$$\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = f(t) \tag{4.12}$$

onde $f(t)$ é uma função.

4.2.1 Método de Variação dos Parâmetros

Suponhamos que se conheça um par, ψ_1 e ψ_2 , de soluções linearmente independentes de (4.2). O método consiste em buscar funções $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ tais que a função

$$x(t) = \alpha_1(t)\psi_1(t) + \alpha_2(t)\psi_2(t) \tag{4.13}$$

seja solução de (4.2). Derivando (4.13) obtemos

$$\dot{x} = \alpha_1\dot{\psi}_1 + \alpha_2\dot{\psi}_2 + \dot{\alpha}_1\psi_1 + \dot{\alpha}_2\psi_2 \tag{4.14}$$

onde omitimos a explícita dependência em t para simplificar a notação. Ora, estamos com dois graus de liberdade na nossa busca; então, não há mal em perder um, impondo a condição

$$\dot{\alpha}_1 \psi_1 + \dot{\alpha}_2 \psi_2 = 0 \quad (4.15)$$

cujas razoabilidade o leitor descobrirá após alguma meditação. Logo (4.14) se torna

$$\dot{x} = \alpha_1 \dot{\psi}_1 + \alpha_2 \dot{\psi}_2 \quad (4.16)$$

que derivada nos dá

$$\ddot{x} = \alpha_1 \ddot{\psi}_1 + \alpha_2 \ddot{\psi}_2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{\psi}_2. \quad (4.17)$$

Como queremos que $x(t)$ seja solução de (4.12), levamos (4.13), (4.16) e (4.17) à equação (4.12) e usando o fato que ψ_1 e ψ_2 são soluções de (4.2) obtemos

$$\dot{\alpha}_1 \dot{\psi}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{\psi}_2 = f. \quad (4.18)$$

Agora resolveremos o sistema (4.15), (4.18) para obter $\dot{\alpha}_1$ e $\dot{\alpha}_2$

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{f\psi_2}{W} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_2 = -\frac{f\psi_1}{W} \quad (4.19)$$

onde W designa o Wronskiano de ψ_1 e ψ_2 . De (4.19) obteremos α_1 e α_2 .

Exemplo 16. *Resolva a equação*

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^t. \quad (4.20)$$

Solução. *A equação característica é $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.*

Como as raízes são distintas, a solução homogênea, pelo Teorema 5, é dada por

$$x_h(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t},$$

onde $\psi_1(t) = e^{2t}$ e $\psi_2(t) = e^{3t}$ são soluções l.i. de

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0. \quad (4.21)$$

O Wronskiano de ψ_1 e ψ_2 é

$$W[\psi_1, \psi_2](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{vmatrix} = e^{5t}. \quad (4.22)$$

Logo, usando as igualdades (4.19), obtemos

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{f\psi_2}{W} = -\frac{e^t e^{3t}}{e^{5t}} = -e^{-t} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_2 = -\frac{f\psi_1}{W} = -\frac{e^t e^{2t}}{e^{5t}} = e^{-2t}$$

e daí

$$\alpha_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad \alpha_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Concluimos pois que uma solução particular de (4.20) é

$$x_p(t) = e^{-t}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}e^{3t} = \frac{1}{2}e^t.$$

Portanto, uma solução geral de (4.20) é

$$x(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^t. \tag{4.23}$$

Observe que se tivéssemos escolhido outras primitivas de $\dot{\alpha}_1$ e $\dot{\alpha}_2$, digamos

$$\dot{\alpha}_1 = e^{-t} + 2 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_2 = -\frac{1}{2}e^{-2t} + 3,$$

a solução geral de (4.20) obtida seria

$$x(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t}$$

a qual é equivalente a (4.23).

Capítulo 5

As Leis de Kepler

Começamos, neste capítulo, a demonstração das Leis de Kepler pela Segunda Lei, por ela ser de certa forma independente das outras duas. Em seguida vemos a fórmula de Binet, que nos auxilia na demonstração da Primeira Lei. Por último, demonstramos a Terceira Lei com o auxílio das outras duas Leis.

5.1 A Segunda Lei de Kepler

Consideremos um planeta P de massa m deslocando-se em sua órbita ao redor do sol. Representaremos por $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a órbita (trajetória) de P , isto é, para cada instante t , $\mathbf{X}(t)$ é um vetor de \mathbb{R}^3 , cujo mesmo doravante será chamado de raio vetor, que determina as coordenadas cartesianas de P . Assumiremos que a órbita de P é suficientemente suave ao ponto de podermos calcular as derivadas primeira e segunda de \mathbf{X} . A origem do nosso sistema tridimensional será o Sol, como mostra a figura (5.1).

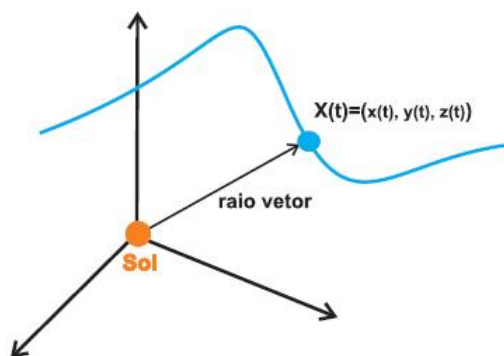


Figura 5.1: Órbita do planeta.

Seja \mathbf{F} a força que rege o movimento de P , então pela Segunda Lei de Newton, temos,

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{X}} \quad (5.1)$$

onde $\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}$ representa a derivada com respeito a t (tempo) e m é a massa de P . Tal força é oriunda do campo gravitacional gerado pela presença do sol e de acordo com a Lei da Gravitação Universal, a mesma deve ser diretamente proporcional ao produto das massas do planeta e do sol e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os mesmos, possuindo ainda a direção do raio vetor que os une, o que matematicamente é expresso por

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^2} \frac{\mathbf{X}}{r} \quad (5.2)$$

onde $r = \|\mathbf{X}\|$ e M é a massa do sol e G é a constante de proporcionalidade que é conhecida como constante da gravitação ¹. O sinal negativo é devido a força gravitacional ser de atração, portanto contrária a orientação do raio vetor \mathbf{X} . Usando as equações (5.1) e (5.2) tem-se

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\frac{MG}{r^3} \mathbf{X}. \quad (5.3)$$

5.1.1 Momento Angular

A definição a seguir será de grande valia.

Definição 10. *O momento angular \mathbf{Y} , associado ao planeta P é dado pela curva*

$$\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}}. \quad (5.4)$$

Note que o momento angular é, em cada t , ortogonal ao raio vetor (vetor posição) e ao vetor velocidade de P dado por $\dot{\mathbf{X}}$. Em virtude da equação (5.3) temos o seguinte lema.

Lema 1. *A órbita do planeta P é uma curva plana.*

Demonstração. Para provarmos tal resultado é suficiente provarmos que o momento angular de P é constante, pois assim sendo a órbita estará no plano de \mathbb{R}^2 contendo a origem, que é ortogonal a \mathbf{Y} , figura (5.2). Com efeito, calculado a derivada do momento angular \mathbf{Y} , temos

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{X}} \times \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} \times \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \times \left(-\frac{MG}{r^3} \mathbf{X} \right) = -\frac{MG}{r^3} \mathbf{X} \times \mathbf{X} = 0, \quad (5.5)$$

¹Note que $r = \|\mathbf{X}\|$ é a distância entre o sol e o planeta P .

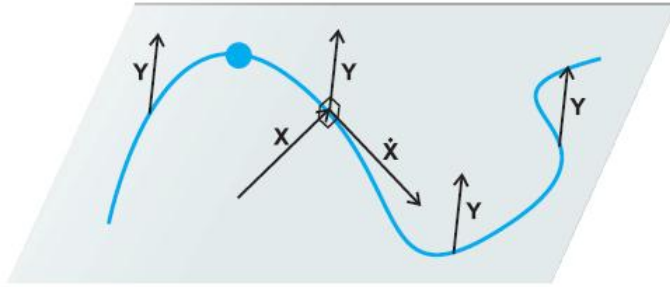


Figura 5.2: Momento angular constante.

onde usamos a equação (5.3) e o fato que $\mathbf{X} \times \mathbf{X} = \dot{\mathbf{X}} \times \dot{\mathbf{X}} = 0$. Daí segue que $\mathbf{Y}(t) = cte$ (constante). Assumiremos que tal constante é não nula, uma vez que, suponto $\mathbf{Y} = 0$, teremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{X}}{r} \right) = \frac{r\dot{\mathbf{X}} - \dot{r}\mathbf{X}}{r^2} = \frac{r^2\ddot{\mathbf{X}} - r\dot{r}\dot{\mathbf{X}}}{r^3} = \frac{\langle \mathbf{X}, \ddot{\mathbf{X}} \rangle \dot{\mathbf{X}} - \langle \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}} \rangle \ddot{\mathbf{X}}}{r^3} = \frac{\langle \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}} \rangle \times \mathbf{X}}{r^3} = \frac{\mathbf{Y} \times \mathbf{X}}{r^3} = 0$$

o que implicaria que $\mathbf{X}(t) = cte \cdot r(t)$ e portanto o planeta P possuiria uma reta como órbita, o que, por motivos óbvios, não pode ser verdade. Sendo $\mathbf{Y}(t) = \vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \neq 0$ e tomando-se o produto escalar de $\mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}}$ com \mathbf{X} , temos

$$\langle \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle = \langle \kappa, \mathbf{X} \rangle = \kappa_1 x(t) + \kappa_2 y(t) + \kappa_3 z(t).$$

Como $\langle \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X} \rangle = 0$, temos $\kappa_1 x(t) + \kappa_2 y(t) + \kappa_3 z(t) = 0$, onde $\mathbf{X} = (x(t), y(t), z(t))$, representa um plano que contém a origem e é perpendicular ao vetor constante $\vec{\kappa} \neq 0$. Portanto o planeta P possui órbita planar.

□

5.1.2 A Órbita em Coordenadas Polares

Vimos na seção anterior que a órbita de \mathbf{X} é planar e portanto não há perda de generalidade em considerarmos tal plano como sendo o plano $z = 0$ e assim a órbita de P assumirá a forma

$$\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t), 0), \tag{5.6}$$

e ainda $\mathbf{Y}(t) = (0, 0, x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))$, pois $\dot{\mathbf{X}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)$ e $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) \times \dot{\mathbf{X}}(t)$. Representando apenas por κ a única coordenada não nula de \mathbf{Y} , temos que

$$x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = \kappa \text{ (constante)}$$

mediante (5.5). Por motivos que ficarão claros à frente, usaremos coordenadas polares para representar a órbita \mathbf{X} do planeta \mathcal{P} , isto é, faremos

$$r(t) = \|\mathbf{X}(t)\|, \quad x(t) = r(t) \cdot \cos\theta(t) \quad \text{e} \quad y(t) = r(t) \cdot \sin\theta(t), \quad (5.7)$$

como mostra a figura (5.3).

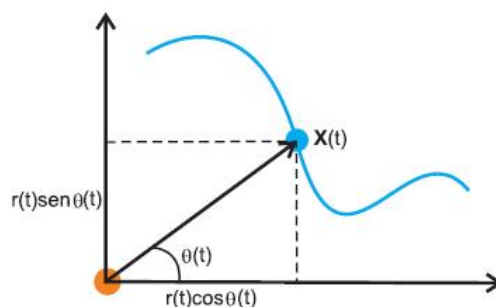


Figura 5.3: Trajetória em coordenadas polares.

Consideremos agora a área $A(t)$, da região sob a órbita \mathbf{X} de t_0 a t , isto é, a área sob a curva limitada pelo raio vetor $\mathbf{X}(t_0) = (r(t_0), \theta(t_0))$ e $\mathbf{X}(t) = (r(t), \theta(t))$, veja a figura (5.3). Escrevendo, pelo menos localmente, $r = r(\theta)$, temos que a área $A(t)$ é expressa por

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} r^2(\theta(t)) d\theta(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2(\theta(t)) \dot{\theta}(t) dt, \quad (5.8)$$

onde $d\theta = \dot{\theta} dt$ e abusamos da notação usando a mesma variável para limite de integração e variável de integração.

Definição 11. *A velocidade areolar associado ao planeta \mathcal{P} é definida por $\dot{A}(t)$, ou seja, a taxa de variação da área descrita pelo raio vetor em relação ao tempo.*

Em virtude de tal definição temos o seguinte lema

Lema 2. *A velocidade areolar do planeta \mathcal{P} é constante.*

Demonstração. Com base em (5.7) temos que

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{e} \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \quad (5.9)$$

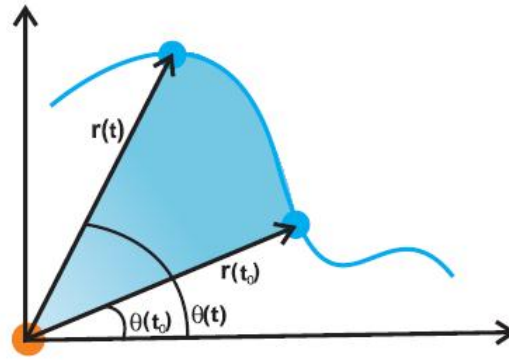


Figura 5.4: Área entre os raios vetores.

e portanto

$$\begin{aligned}
 x\dot{y} - \dot{x}y &= r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) - (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) r \sin \theta \\
 &= r \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta - r \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \\
 &= r^2 \dot{\theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= r^2 \dot{\theta} = \kappa
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo a (5.8)

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2(\theta(t)) \dot{\theta} = \frac{1}{2} \kappa. \tag{5.11}$$

□

Em virtude de (5.11) temos

Lei 1 (Segunda Lei de Kepler). O raio vetor ligando o sol a um dado planeta varre área iguais em tempos iguais.

Demonstração. Usando (5.11) temos que

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \kappa dt = \frac{1}{2} \kappa \cdot t - \frac{1}{2} \kappa \cdot t_0 = \frac{1}{2} \kappa \cdot t + A(0). \tag{5.12}$$

Considere dois intervalos de tempos iguais, digamos (t_1, t_2) e (t_3, t_4) , onde $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$.

Assim a área percorrida no intervalo de tempo (t_1, t_2) é $A(t_2) - A(t_1)$ e ainda

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{1}{2} \kappa \cdot (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} \kappa \cdot (t_4 - t_3) = A(t_4) - A(t_3), \tag{5.13}$$

onde $A(t_4) - A(t_3)$ é a área percorrida pelo raio vetor no intervalo de tempo (t_3, t_4) .

Desta forma fica provada a Segunda Lei de Kepler. □

Após provarmos a Primeira Lei de Kepler apresentaremos uma visão geométrica da Segunda Lei.

5.2 A Primeira Lei de Kepler

5.2.1 A Fórmula de Binet

Com base nas expressões (5.9) temos

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta \quad (5.14)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta. \quad (5.15)$$

Usando a equação (5.3), temos $\ddot{x} = -\frac{MG}{r^3}x$ e $\ddot{y} = -\frac{MG}{r^3}y$. Logo,

$$\ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta = -\frac{MG}{r^2}\cos\theta \quad (5.16)$$

$$\ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta = -\frac{MG}{r^2}\sin\theta, \quad (5.17)$$

daí fazendo $\cos\theta \cdot (5.16) + \sin\theta \cdot (5.17)$ temos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2} \quad (5.18)$$

e usando que $r^2\dot{\theta} = \kappa$ obtemos

$$-\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}\kappa} + \frac{1}{r} = \frac{MG}{\kappa^2}. \quad (5.19)$$

Fazendo ainda $-\sin\theta \cdot (5.16) + \cos\theta \cdot (5.17)$, temos

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (5.20)$$

que é equivalente a equação $r^2\dot{\theta} = \kappa$, uma vez que

$$\frac{d}{d\theta} (r^2\dot{\theta}) = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Devido a esse fato tal equação não será levada em consideração daqui em diante.

Obs 11. *Note que o par de equações*

$$-\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}\kappa} + \frac{1}{r} = \frac{MG}{\kappa^2}, \quad r^2\dot{\theta} = \kappa \quad (5.21)$$

são equivalentes a equação que rege o movimento, dada por

$$\ddot{X} = -\frac{MG}{r^3}X.$$

Obs 12. Como a função $\dot{\theta}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, devido a (5.10), então a função θ possui uma função inversa, a saber, $t = t(\theta)$. Assim podemos entender r como uma função de θ , da forma $r(\theta) = r(t(\theta))$. Temos ainda que

$$\frac{dt(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}(t(\theta))} \quad (5.22)$$

Lema 3. (Fórmula de Binet) A função $r = r(\theta)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{MG}{\kappa^2}. \quad (5.23)$$

Demonstração. Utilizando a regra da cadeia temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \dot{r} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \dot{r} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \quad \text{e} \quad \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{d\dot{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \ddot{r} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \ddot{r} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}}, \quad (5.24)$$

onde usamos (5.22). Daí segue que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -r^{-2} \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -r^{-2} \dot{r} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = -\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{\kappa}. \quad (5.25)$$

Na última igualdade usamos (5.10). Derivando mais uma vez temos

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{\dot{r}}{\kappa} \right) = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{\ddot{r}}{\kappa \dot{\theta}}, \quad (5.26)$$

onde na última igualdade usamos (5.24). Substituindo a última equação em (5.19) obtemos o resultado desejado. \square

5.2.2 Cônicas em Coordenadas Polares

A fórmula de Binet, vista na seção anterior, é uma equação linear de segunda ordem relativamente fácil de ser resolvida, uma vez que a mesma é uma equação do tipo oscilador harmônico.

É um fato bastante simples de ver que uma solução geral da equação (5.23) é da forma

$$\frac{1}{r} = \alpha \cdot \cos\theta + \beta \cdot \sin\theta + \frac{MG}{\kappa^2} \quad (5.27)$$

onde α e β são constantes dependendo dos dados iniciais. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\theta(0) = 0$, isto é, que no inicial $t = 0$ o planeta P situava-se sobre o eixo dos x a uma distância $r(0) = r_0$ do Sol. Assim,

$$\frac{1}{r_0} = \alpha \cdot \cos 0 + \beta \sin 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{r_0}$$

e ainda

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta = -\frac{\dot{r}}{\kappa} \Rightarrow \beta = -\frac{\dot{r}_0}{\kappa},$$

onde $\dot{r}_0 = \dot{r}(0)$. Logo, a equação (5.27) pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cdot \cos \theta - \frac{\dot{r}_0}{\kappa} \cdot \sin \theta + \frac{MG}{\kappa^2}. \quad (5.28)$$

Pondo na equação (5.28), $\frac{1}{r_0} = \lambda \cos \omega$ e $-\frac{\dot{r}_0}{\kappa} = \lambda \sin \omega$, obtemos

$$\frac{1}{r} = \lambda \cdot \cos(\theta - \omega) + \frac{MG}{\kappa^2}, \quad (5.29)$$

onde $\lambda^2 = (1/r_0)^2 + (\dot{r}_0/\kappa)^2$ e $\omega = \text{tg}^{-1}(-r_0\dot{r}_0\kappa^{-1})$ e portanto tal equação assume a forma

$$r = \frac{\frac{\kappa^2}{MG}}{1 + \frac{\lambda\kappa^2}{MG} \cdot \cos(\theta - \omega)}. \quad (5.30)$$

Representando $e = \frac{\lambda\kappa^2}{MG}$ e $d = \lambda^{-1}$, afirmamos que a equação

$$r = \frac{d \cdot e}{1 + e \cdot \cos(\theta - \omega)} \quad (5.31)$$

é uma elipse com excentricidade e e centro no ponto $(e^2 d / (1 - e^2), 0)$.

Obs 13. Não há mudança nenhuma, em termos geométricos, tomarmos coordenadas polares na forma

$$x = r \cdot \cos(\theta - \omega) \text{ e } y = r \cdot \sin(\theta - \omega), \quad (5.32)$$

uma vez que a única mudança é que agora estamos considerando o ângulo que o raio vetor faz com a reta $\theta = \omega$ e antes considerávamos o ângulo entre o raio vetor e a reta $\theta = 0$.

Obs 14. É natural assumirmos que $e < 1$ uma vez que r_0 , M e G devem ser números consideravelmente grandes e κ não deve ser uma constante muito grande por representar uma velocidade (areolar) de um planeta.

Vejamos então que a equação (5.31) é uma elipse. Temos que

$$r + e \cdot r \cos(\theta - \omega) = d \cdot e,$$

elevando ambos os lados ao quadrado e usando (5.32), segue que

$$x^2 + y^2 = e^2 (d^2 - 2dx + x^2)$$

e ainda

$$(1 - e^2) x^2 + 2de^2 x + y^2 = e^2 d^2,$$

completando o quadrado

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2},$$

que é uma equação da elipse

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde

$$c = \frac{e^2 d}{1 - e^2}, \quad a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}. \quad (5.33)$$

Note que estamos assumindo que $e < 1$ e portanto $c > 0$ e ainda $0 < (1 - e^2)^2 < 1 - e^2 < 1$, implicando com $a > b$. Logo tal elipse possui seu eixo maior sobre o eixo dos x . (veja a figura (5.5)). Com isso, acabamos de provar o seguinte resultado.

Lei 2 (Primeira Lei de Kepler). Cada planeta se move em órbita elíptica, tendo o sol um dos focos.

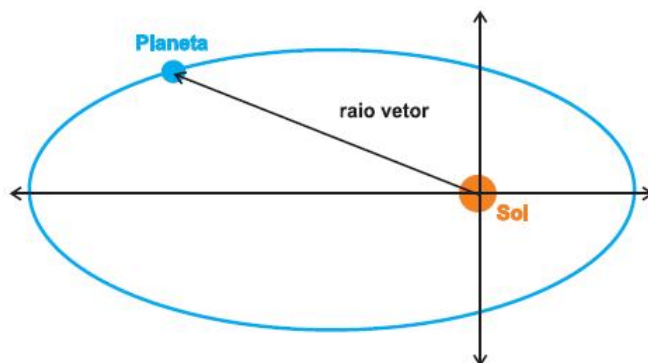


Figura 5.5: Órbita elíptica.

5.2.3 Interpretação Geométrica da Segunda Lei de Kepler

Agora que sabemos como é a forma geométrica da órbita do planeta P, vejamos na figura (5.6) uma interpretação geométrica para a Segunda Lei de Kepler. Na figura acima os intervalos de tempo são iguais, isto é, $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ e, portanto, a Segunda Lei afirma que as áreas hachuradas acima são iguais.

Obs 15. *Este resultado é impressionante! Na antiguidade, além de os povos acharem que as órbitas eram circulares, achava-se ainda que a velocidade em que os planetas se deslocavam sobre suas órbitas era constante. Mas a Segunda Lei mostra que tal velocidade não é constante mas sim a velocidade da área varrida pelo raio vetor, em particular quando*

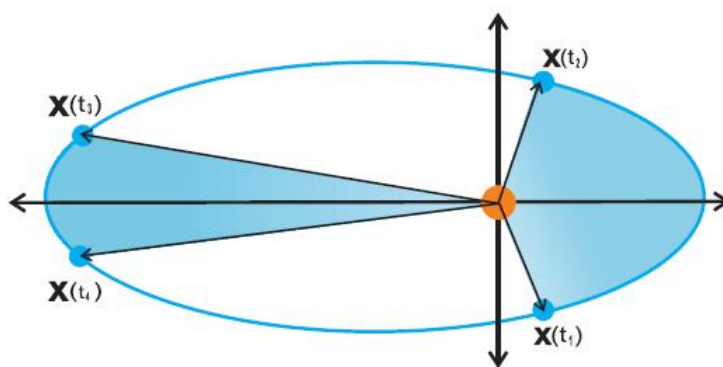


Figura 5.6: Interpretação da Segunda Lei.

o planeta encontra-se mais perto do sol sua velocidade é maior de quando o mesmo está distante do sol.

5.3 A Terceira Lei de Kepler

Provaremos aqui a Terceira Lei de Kepler.

5.3.1 O Período de Revolução de um Planeta

Fica óbvio, pela Primeira Lei de Kepler, que as órbitas dos planetas são periódicas e portanto cada planeta deve possuir um período de revolução, isto é, o tempo necessário para cada planeta dar uma volta completa em torno do Sol. Representaremos aqui por T o período do planeta P e provaremos o seguinte resultado

Lei 3. A razão entre o quadrado do período de revolução de um planeta e o cubo do semi-eixo maior de sua órbita é a mesma para todos os planetas.

Demonstração. Consideremos agora um sistema de coordenadas cuja origem é o Sol, o mesmo é um dos focos da trajetória do planeta em questão e ainda o eixo maior de tal elipse está sobre o eixo dos x . A corda focal de uma elipse é o segmento de reta, de comprimento $2l$, que é perpendicular ao eixo maior passando por um dos focos e suas extremidades estão sobre a elipse. Veja figura (5.7). Tendo em vista que a equação de tal elipse é

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.34}$$

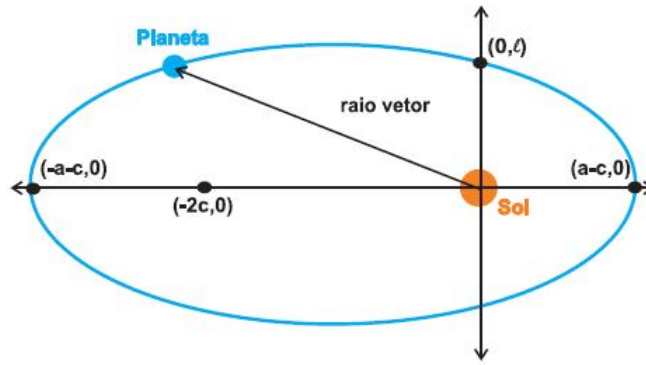


Figura 5.7: Corda focal.

o valor de ℓ deve ser tal que

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \ell^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^2 \cdot b^2}{a^2},$$

o que nos dá $\ell = \frac{b^2}{a}$. Usando as expressões (5.33) concluímos que

$$\ell = \frac{b^2}{a} = \frac{\frac{e^2 d^2}{1-e^2}}{\frac{ed}{1-e^2}} = e \cdot d = \frac{\lambda \kappa^2}{MG} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\kappa^2}{MG}. \quad (5.35)$$

Usando o fato da velocidade areolar \dot{A} ser constante temos que

$$T = \frac{\text{Área da Elipse}}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}\kappa} = \frac{2\pi ab}{\kappa}, \quad (5.36)$$

seguindo que

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2\pi ab}{\kappa}\right)^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{a\kappa^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{4\pi^2}{\kappa^2} = \ell \cdot \frac{4\pi^2}{\kappa^2} = \frac{\kappa^2}{MG} \cdot \frac{4\pi^2}{\kappa^2} = \frac{4\pi^2}{MG}. \quad (5.37)$$

Concluindo a demonstração deste resultado surpreendente. □

5.4 Aplicações

5.4.1 Satélites Artificiais

Newton considerou explicitamente a possibilidade da existência de satélites artificiais da Terra. Conforme ilustrado na figura (5.8), adaptada de seu “Sistema do Mundo”, ele discutiu o que aconteceria se, do topo V de uma montanha muito alta, projéteis fossem lançados horizontalmente com velocidades iniciais crescentes. A princípio, teríamos trajetórias parabólicas com VD e VE na figura (as parábolas são na verdade aproximações

de pequenas porções de elipses keplerianas). Entretanto, para uma velocidade suficientemente grande, Newton observa que o projétil descreveria uma órbita fechada em torno da Terra, voltando ao ponto de partida. E se os lançamentos fossem feitos de altitudes crescentes, diz ele, os corpos “descreveriam arcos concêntricos com a Terra, ou de excentricidade várias, e continuariam circulando nos céus nessas órbitas como fazem os planetas em suas órbitas”. O primeiro satélite artificial, em órbita pela União Soviética em 1957,

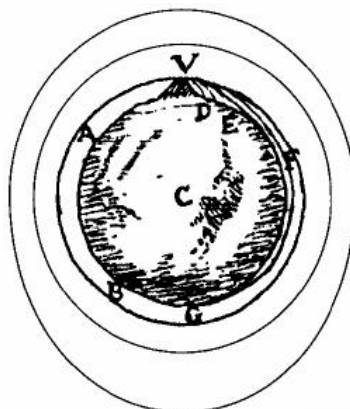


Figura 5.8: Satélites artificiais na visão de Newton.

Sputnik, tinha uma órbita aproximadamente circular a cerca de 550 km da superfície da Terra, ou seja, $R \approx 6,95 \times 10^6 \text{ m}$, pois o raio da Terra é $6,4 \times 10^6 \text{ m}$, e dava uma volta completa em torno da Terra em $T \approx 96 \text{ min}$. Se $T = 24 \text{ h}$, obtemos $R \approx 42.000 \approx 6,5R_T$, onde R_T é o raio da Terra. Um satélite a essa altitude é síncrono, ou seja, como tem período orbital igual ao de rotação da Terra, permanece sempre acima do mesmo ponto da Terra, o que é importante para transmitir comunicações. O primeiro satélite desse tipo, Syncom II, foi lançado em 1963.

Exemplo 17. Considere um satélite síncrono em órbita de Júpiter cuja massa é $M_J = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$ e cujo raio é $R = 7,0 \times 10^7 \text{ m}$. Sendo a constante da gravitação universal $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ e considerando que o dia de Júpiter é de aproximadamente 10 h, determine a altitude do satélite em relação à superfície desse planeta.

Solução. Pela Terceira Lei de Kepler, temos

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_J}{4\pi^2}}.$$

Como $R = R_J + H$, onde H é a altitude do satélite, e $T = 10 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ s}$, segue que

$$\begin{aligned}R_J + H &= \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_J}{4\pi^2}} \\7 \cdot 10^7 + H &= \sqrt[3]{\frac{(3,6 \cdot 10^4)^2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{4\pi^2}} \\H &= 9,1 \cdot 10^7.\end{aligned}$$

Portanto, a altitude do satélite é igual a $9,1 \cdot 10^7 \text{ m}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G. S. de S., *Cálculo das funções de uma variável*, Volume II, Sétima Edição, Rio de Janeiro, Editora LTC, 2004.
- [2] Figueiredo, D.G. de, Neves, A.F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, Terceira Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [3] Garbi, G. G., *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, Quinta Edição, São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010.
- [4] Guidorri, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Volume II, Quinta Edição, Rio de Janeiro, Editora LTC, 2001.
- [5] Material de Geometria II, PROFMAT, 2012.
- [6] Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica*, Volume I, Quarta Edição, São Paulo, Editora Edgard Blücher, 2002.
- [7] Steinbruch, A., Winterle, P., *Geometria Analítica*, Segunda Edição, São Paulo, Editora Pearson Makron Books, 1987.
- [8] Silva, J. P., Notas sobre as Leis de Kepler, <http://juscelinasilva.blogspot.com.br/>
- [9] Stewart, J., *Cálculo*, Volume II, Quinta Edição, Editora Thomson, 2006.