



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PROPGPq**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**  
**– PROFMAT**

**FRANCISCO DE ASSIS SARAIVA CARNEIRO**

**ISOMETRIAS E HOMOTETIAS NO PLANO**

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2015**

**FRANCISCO DE ASSIS SARAIVA CARNEIRO**

**ISOMETRIAS E HOMOTETIAS NO PLANO**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2015**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

**Universidade Estadual do Ceará – UECE**

**Sistemas de Bibliotecas**

Carneiro, Francisco de Assis Saraiva.

Isometrias e homotetias no plano [recurso eletrônico] / Francisco de Assis Saraiva Carneiro. - 2015.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 68 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

1. Isometria. 2. Semelhança. 3. Geometria.  
4. Software Educacional. 5. Matemática - Estudo e ensino. I. Título.

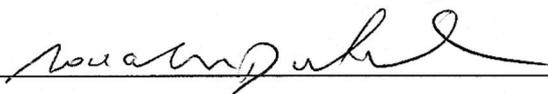
**FRANCISCO DE ASSIS SARAIVA CARNEIRO**

**ISOMETRIAS E HOMOTETIAS NO PLANO**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática

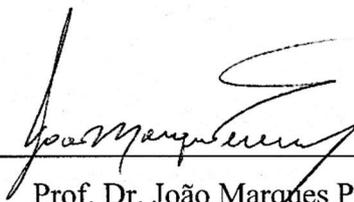
Aprovada em: 30/11/2015

**BANCA EXAMINADORA**



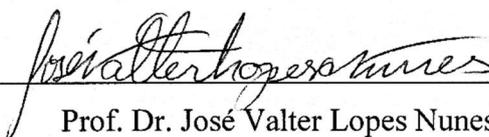
---

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará – UFC



---

Prof. Dr. João Marques Pereira  
Universidade Estadual do Ceará – UECE



---

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes  
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedico esse trabalho a Deus, a minha querida esposa, a minha amável filha, a toda minha família, aos professores e amigos.

## AGRADECIMENTOS

Aqueles e aquelas que realizaram comigo este percurso sabem dos esforços e inegável dedicação empreendidos na construção desta caminhada vitoriosa. Caminhamos juntos, não como espectadores, mas como coautores desta história, por vezes protagonistas. É chegada a hora de finalizarmos esta etapa, como disse o apóstolo Paulo em sua segunda epístola a Timóteo: “*Combati o bom combate, terminei a minha corrida, conservei a fé.*” (2Tm 4, 7)

Agradeço, primeiramente ao Senhor Deus que sempre escudou meus desabafos e concedeu-me forças para levantar a cada tropeço. Agradeço aos meus pais, Raimunda Carneiro Lima e Otávio Saraiva Lima, *in memoriam*, pelos exemplos de vida que impulsionaram minha constante busca por novas oportunidades. Agradeço à minha esposa, Francinilda Santos Carneiro, pela compreensão e amor incondicional demonstrados a cada final de semana, a cada noite, a cada feriado, por mim dedicados aos estudos em que fiz da Matemática a minha companheira, reduzindo significativamente os momentos de namoro e laser do lindo casal de eternos apaixonados. Agradeço à minha amável filha, Ada Santos Carneiro, por acreditar no sucesso de seu pai e ser uma menina muito estudiosa, que adora Geometria.

Preciso agradecer ainda aos meus familiares e amigos pelo incentivo nas inúmeras conversas sobre cada etapa vivida nesse curso. Sou grato a todos os professores que fizeram história nesses quase três anos deste Curso de Mestrado em Matemática, em especial àqueles que iniciaram a turma: Guilherme Ellery, João Marques, João Montenegro e Cleiton Vasconcelos (*in memoriam*); e aqueles que encerram: Othon Lopes (meu estimado orientador do qual sou discípulo), Alberto Flávio, Francisco Pimentel, Hermínio Borges e Tiago Caula.

Se essa viagem fosse realizada em um grande barco, seriam necessários vários remadores. Esses foram cada um dos companheiros e companheira que compartilharam comigo os finais de semana nos últimos três anos: Aline, Daniel, Edilson, Fabrício, Helton, Jorgemberg, José Carlos, Júnior, Landim, Marcos, Otoniel, Paulo Regis, Paulo Sérgio, Rafael e Valmir. São muitos a agradecer, por isso posso ter deixado de mencionar algum amigo ou amiga participante desta etapa da minha vida, mas tenha a certeza que todos têm um carinhoso espaço reservado em meu coração.

Desejo, por fim, ofertar este trabalho a qualquer pessoa que objetive aprimorar seus conhecimentos em Matemática, em especial no tema desta dissertação, deixando-a continuar seu processo evolutivo contribuindo sempre para o desenvolvimento significativo da vida humana.

*"Não entre aqui quem não souber geometria"*  
(Platão)

*"Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial."*  
(Pascal)

## RESUMO

O estudo da Geometria é empolgante e repleto de curiosidades motivadoras da aprendizagem. Nesta perspectiva, este trabalho foi realizado objetivando desvendar matematicamente algumas curiosidades sobre conteúdos ministrados no colégio, quase de forma automática, deixando sem respostas algumas perguntas como: *Será que a congruência de triângulos é válida para qualquer polígono? Será que a semelhança entre figuras planas possui as mesmas propriedades das semelhanças entre triângulos?* Ao desenvolver a pesquisa sobre as isometrias e homotetias no plano as respostas aos questionamentos foram sendo apresentadas, assim ampliando os estudos sobre congruências e semelhanças. Foi construído um Objeto de Aprendizagem interativo a partir do software *GeoGebra* como ferramenta facilitadora ao ensino destes tópicos, disponibilizada *on line* aos professores e usuários que desejarem utilizá-la para este fim.

**Palavras-chave:** Isometria. Semelhança. Geometria. Software educacional. Matemática – Estudo e ensino.

## ABSTRACT

The study of geometry is exciting and full of motivating learning curiosities. In this perspective, this work was performed with the purpose of mathematically untangle some curiosities about the contents taught in school, almost automatically, leaving some unanswered questions such as: *Does the congruence of triangles is valid for any polygon? Does the resemblance between plane figures has the same properties of resemblances between triangles?* By developing the research about the isometries and homotheties, the answers to the questions were being presented, thus expanding the study of congruence and resemblance. An interactive learning object was built from the GeoGebra software as a facilitating tool for teaching these topics, available online to teachers and users who wish to use for this purpose.

**Key-words:** Isometry. Resemblance. Geometry. Educational software. Mathematics - Study and teaching.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - TRANSFORMAÇÃO $T(x, y) = (x, 2y)$ EM UMA CIRCUNFERÊNCIA $\theta$ .....	17
FIGURA 2 - TRANSFORMAÇÃO $T(x, y) = (x + 3, y)$ EM UM TRIÂNGULO $\Delta$ .....	17
FIGURA 3 - TODA ISOMETRIA É SOBREJETIVA. ....	20
FIGURA 4 - A IMAGEM DE UMA RETA POR UMA ISOMETRIA É TAMBÉM UMA RETA.....	21
FIGURA 5 - TODA ISOMETRIA LEVA RETAS PARALELAS EM RETAS PARALELAS. ....	22
FIGURA 6 - REGIÕES ANGULARES NO PLANO.....	23
FIGURA 7 - REFLEXÃO EM TORNO DE UM PONTO $A$ .....	26
FIGURA 8 - REFLEXÃO DE UM PONTO EM TORNO DE UMA RETA. ....	26
FIGURA 9 - 2ª POSSIBILIDADE: $P \in r$ E $Q \notin r$ . ....	27
FIGURA 10 - $P$ E $Q$ ESTÃO EM UMA RETA PERPENDICULAR À RETA $r$ .....	28
FIGURA 11 - 3ª POSSIBILIDADE: $P \notin r$ E $Q \notin r$ E PERTENCEM AO MESMO SEMIPLANO DETERMINADO POR $r$ . ....	28
FIGURA 12 - 4ª POSSIBILIDADE: $P \notin r$ E $Q \notin r$ E ESTÃO EM SEMIPLANOS OPOSTOS DETERMINADOS POR $r$ .....	29
FIGURA 13 - EM UMA REFLEXÃO O SENTIDO DA ROTAÇÃO DOS VÉRTICES.....	29
FIGURA 14 - DOIS TRIÂNGULOS CONGRUENTES COM UM ÚNICO LADO COMUM.....	30
FIGURA 15 - DOIS TRIÂNGULOS CONGRUENTES COM UM ÚNICO VÉRTICE COMUM. ....	31
FIGURA 16 - TRANSLAÇÃO DO SEGMENTO $PQ$ . ....	32
FIGURA 17 - OS TRÊS PONTOS ESTÃO ALINHADOS.....	32
FIGURA 18 - AS RETAS $r$ E $s$ SÃO PARALELAS. ....	33
FIGURA 19 - AS RETAS $r$ E $s$ NÃO SÃO PARALELAS, NEM COINCIDENTES.....	33
FIGURA 20 - TRANSLAÇÃO POR ADIÇÃO DE VETORES. ....	34
FIGURA 21 - TODA TRANSLAÇÃO DIFERENTE DA IDENTIDADE É IGUAL À COMPOSTA DE DUAS REFLEXÕES. ....	35
FIGURA 22 - ROTAÇÃO DO PONTO $X$ PELO ÂNGULO $\alpha$ EM TORNO DO PONTO $O$ .....	36
FIGURA 23 - TODA ROTAÇÃO É UMA ISOMETRIA. ....	36
FIGURA 24 - REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO.....	37
FIGURA 25 - $A, A'$ E $A''$ SÃO NÃO-COLINEARES. ....	38
FIGURA 26 - $A$ E $B_1$ ESTÃO NO MESMO SEMIPLANO.....	38
FIGURA 27 - $A$ E $B_2$ ESTÃO EM SEMIPLANOS OPOSTOS. ....	39
FIGURA 28 - $A, A'$ E $A''$ SÃO PONTOS DISTINTOS E COLINEARES. ....	39
FIGURA 29 - $T$ É UMA TRANSLAÇÃO OU UMA ROTAÇÃO DE $180^\circ$ .....	40
FIGURA 30 - TELA INICIAL DO OBJETO DE APRENDIZAGEM CONSTRUÍDO. ....	41
FIGURA 31 - TELA SOBRE A VERSÃO DO GEOGEBRA UTILIZADO. ....	42
FIGURA 32 - TELA INICIAL DO GEOGEBRA (VERSÃO 5.0) .....	42
FIGURA 33 - TELA DAS REFLEXÕES.....	44
FIGURA 34 - TELA DAS TRANSLAÇÕES. ....	45
FIGURA 35 - TELA DAS ROTAÇÕES.....	47
FIGURA 36 - TELA DAS REFLEXÕES COM DESLIZAMENTO. ....	48

FIGURA 37 - SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (CASO AA). .....	53
FIGURA 38 - SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (CASO LAL). .....	53
FIGURA 39 - SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (CASO LLL). .....	54
FIGURA 40 - DEFINIÇÃO DE HOMOTETIA. ....	54
FIGURA 41 - EM UMA HOMOTETIA OS PONTOS DE O, P E P' SÃO COLINEARES. ....	55
FIGURA 42 - DETERMINAÇÃO DO CENTRO DA HOMOTETIA. ....	56
FIGURA 43 - O É O CENTRO DE SIMETRIA DE UMA HOMOTETIA DE RAZÃO $k = -1$ . ....	57
FIGURA 44 - HOMOTETIA INVERSA. ....	57
FIGURA 45 - AMPLIAÇÃO DIRETA. ( $k > 1$ ) .....	58
FIGURA 46 - REDUÇÃO DIRETA. ( $0 < k < 1$ ) .....	59
FIGURA 47 - AMPLIAÇÃO INVERSA. ( $k < -1$ ) .....	59
FIGURA 48 - REDUÇÃO INVERSA (OU NEGATIVA). ( $-1 < k < 0$ ) .....	60
FIGURA 49 - TELA DAS HOMOTETIAS NO GEOGEBRA. ....	61
FIGURA 50 - PANTÓGRAFO (ILUSTRAÇÃO).....	68

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - COMANDOS PARA CONSTRUÇÃO DA TELA DAS REFLEXÕES. (ELABORADA PELO AUTOR) .....	44
TABELA 2 - COMANDOS PARA CONSTRUÇÃO DA TELA DAS TRANSLAÇÕES. (ELABORADA PELO AUTOR).....	45
TABELA 3 - COMANDOS PARA CONSTRUÇÃO DA TELA DAS ROTAÇÕES. (ELABORADA PELO AUTOR) .....	46
TABELA 4 - COMANDOS PARA CONSTRUÇÃO DA TELA DAS REFLEXÕES COM DESLIZAMENTO. (ELABORADA PELO AUTOR).....	48
TABELA 5 - COMANDOS PARA CONSTRUÇÃO DA TELA DAS HOMOTETIAS NO GEOGEBRA. (ELABORADA PELO AUTOR) .....	64

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>ISOMETRIAS</b> .....	<b>14</b>
2.1	FUNÇÃO .....	14
2.1.1	<i>Domínio</i> .....	<i>14</i>
2.1.2	<i>Imagem</i> .....	<i>14</i>
2.1.3	<i>Contradomínio</i> .....	<i>14</i>
2.1.4	<i>Função Composta</i> .....	<i>14</i>
2.1.5	<i>Função Injetiva</i> .....	<i>15</i>
2.1.6	<i>Função Sobrejetiva</i> .....	<i>15</i>
2.1.7	<i>Função Bijetiva</i> .....	<i>15</i>
2.1.8	<i>Função Inversa</i> .....	<i>15</i>
2.2	ISOMETRIA .....	16
2.2.1	<i>Transformações no plano <math>\mathbb{R}^2</math></i> .....	<i>16</i>
2.2.2	<i>Isometrias e algumas propriedades</i> .....	<i>18</i>
2.2.3	<i>Reflexão</i> .....	<i>26</i>
2.2.4	<i>Translação</i> .....	<i>32</i>
2.2.5	<i>Rotação</i> .....	<i>35</i>
2.2.6	<i>Reflexão com deslizamento</i> .....	<i>36</i>
2.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE AS ISOMETRIAS .....	37
<b>3</b>	<b>SIMULAÇÃO DE ISOMETRIAS NO GEOGEBRA</b> .....	<b>41</b>
3.1	GEOGEBRA .....	41
3.2	DETALHES DA CONSTRUÇÃO .....	41
<b>4</b>	<b>HOMOTETIAS</b> .....	<b>50</b>
4.1	ELEMENTOS DA SEMELHANÇA .....	50
4.1.1	<i>Proporcionalidade e algumas propriedades</i> .....	<i>50</i>
4.1.2	<i>Teorema de Thales</i> .....	<i>52</i>
4.1.3	<i>Semelhança de triângulos</i> .....	<i>52</i>
4.2	HOMOTETIAS E ALGUMAS PROPRIEDADES .....	54
4.2.1	<i>Definição</i> .....	<i>54</i>
4.2.2	<i>Propriedades</i> .....	<i>55</i>
4.2.3	<i>Homotetia direta (positiva)</i> .....	<i>58</i>
4.2.4	<i>Homotetia inversa (negativa)</i> .....	<i>59</i>
4.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE AS HOMOTETIAS .....	60
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÃO DE HOMOTETIAS NO GEOGEBRA</b> .....	<b>61</b>

5.1	DETALHES DA CONSTRUÇÃO.....	61
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>67</b>
	<b>ANEXO A – PANTÓGRAFO .....</b>	<b>68</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Durante esses mais de dois anos transcorridos no curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, desenvolvido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em parceria com a Universidade Estadual do Ceará (UECE), muitas oportunidades foram apresentadas propiciando um maior aprofundamento nas áreas da Matemática em que o mestrando desejasse desenvolver pesquisa. Nas reuniões iniciais o então coordenador, Prof. Guilherme Ellery, já estimulava o desejo pela pesquisa de temas que, segundo ele, “*uma pesquisa de mestrado dever ser um casamento entre o mestrando e o orientador*”.

As palavras motivadoras dos professores e o particular interesse desenvolvido pela Geometria desencadearam esta pesquisa, tendo como objetivo específico a melhoria na qualificação profissional do professor, através de um maior domínio do conteúdo objeto deste trabalho.

O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. (LIMA, 2007, p. 5)

Somente conhecendo muito bem o assunto é que se pode transmiti-lo com fidelidade e poder de convencimento aos alunos. Por isso, o objetivo primeiro da pesquisa era transcorrer sobre as associações entre a Matemática e as formas da natureza, percorrendo desde a Geometria grega até sua apresentação contextualizada das simetrias nos dias atuais. Nos primeiros passos da pesquisa a proposta inicial foi se refinando e sob a orientação do Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes se chegou ao tema desta dissertação: Isometria e homotetia no plano, com uma proposta bem definida de ampliação estruturada do estudo das congruências e semelhanças de triângulos.

O estudo é apresentado em duas partes. A primeira traz uma abordagem geométrica das isometrias no plano euclidiano, detalhando suas propriedades e classificação, concluído que as isometrias são de quatro tipos: reflexão, translação, rotação ou reflexão com deslizamento. Complementando essa parte inicial, é apresentada uma ferramenta interativa na simulação desses conceitos isométricos. A segunda parte resgata um conceito muito utilizado, não apenas no ensino de Matemática, a proporcionalidade. Ao abordar a proporcionalidade na visão matemática, apresenta-se uma definição clara e algumas de suas aplicações como o Teorema de Thales e os casos de semelhança de triângulos. Propondo ampliar o estudo sobre semelhança são apresentadas as homotetias, sua definição, propriedades e características, concluindo que a homotetia preserva a razão de semelhança em qualquer polígono. E para facilitar a visualização

dos conceitos e propriedades homotéticas é apresentada mais uma ferramenta interativa desenvolvida no software Geogebra, disponibilizada *on line* aos professores, alunos e qualquer usuário que anseie em estudar sobre homotetia.

Como parte conclusiva da pesquisa tem-se que, somente através de homotetia, de isometria ou de uma composta de duas ou mais destas pode haver semelhança entre figuras planas. Ficando como sugestão a outros professores de Matemática ampliem esta pesquisa, detalhando as diversas abordagens das isometrias e homotetias.

## 2 ISOMETRIAS

A definição de isometria será apresentada nos subcapítulos seguintes, para isso faz-se necessário relembrar alguns dos conceitos fundamentais de função, suas características, classificação e algumas consequências necessárias ao estudo das isometrias.

### 2.1 FUNÇÃO

Toda função é uma relação binária entre dois conjuntos, isto é, toda função é um conjunto de pares ordenados.

**Definição 2.1.1:** *Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , não vazios, uma relação  $f$  de  $X$  em  $Y$  recebe o nome de aplicação de  $X$  em  $Y$  ou função definida em  $X$  com imagens em  $Y$  se para todo  $x \in X$  existe um único  $y \in Y$ , tal que o par ordenado  $(x, y) \in f$ .*

$$f \text{ é função de } X \text{ em } Y \Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in Y \mid (x, y) \in f$$

Usa-se a seguinte nomenclatura  $f: X \rightarrow Y$  para representar uma função de  $X$  em  $Y$ .

#### 2.1.1 DOMÍNIO

Chama-se domínio de uma função o conjunto  $A$  dos elementos  $x \in X$  para os quais existe  $y \in Y$ , tal que  $(x, y) \in f$ . Como todos os elementos de  $X$  têm essa propriedade, então  $A = X$ . De modo que o domínio é o conjunto de partida da aplicação.

#### 2.1.2 IMAGEM

Dada a função  $f: X \rightarrow Y$ , o conjunto imagem, ou simplesmente imagem da função  $f$  é o conjunto  $Im(f) = \{f(x) \in Y; x \in X\}$

Em particular, sempre  $Im(f) \subset Y$ , podendo ainda ocorrer  $Im(f) = Y$  ou  $Im(f) \neq Y$ .

#### 2.1.3 CONTRADOMÍNIO

A nomenclatura apresentada no item 2.1, na função  $f: X \rightarrow Y$ , contradomínio é o conjunto de chegada  $Y$  que contém todos os possíveis valores para  $y$ , de modo que a imagem da função seja um subconjunto do contradomínio.

#### 2.1.4 FUNÇÃO COMPOSTA

**Definição 2.1.4.1.** *Dadas as funções  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y' \rightarrow Z$ , com  $Y \subset Y'$ , chama-se função composta de  $g$  e  $f$  a função  $h: X \rightarrow Z$ , de forma que a imagem de  $x \in X$  será obtida aplicando-se  $g(f(x))$ , tal que  $h(x) = g(f(x))$  para todo  $x \in X$ .*

Pode-se representar a composta de  $g$  e  $f$  por  $g \circ f$ .

## 1 INTRODUÇÃO

Durante esses mais de dois anos transcorridos no curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, desenvolvido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em parceria com a Universidade Estadual do Ceará (UECE), muitas oportunidades foram apresentadas propiciando um maior aprofundamento nas áreas da Matemática em que o mestrando desejasse desenvolver pesquisa. Nas reuniões iniciais o então coordenador, Prof. Guilherme Ellery, já estimulava o desejo pela pesquisa de temas que, segundo ele, “*uma pesquisa de mestrado dever ser um casamento entre o mestrando e o orientador*”.

As palavras motivadoras dos professores e o particular interesse desenvolvido pela Geometria desencadearam esta pesquisa, tendo como objetivo específico a melhoria na qualificação profissional do professor, através de um maior domínio do conteúdo objeto deste trabalho.

O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. (LIMA, 2007, p. 5)

Somente conhecendo muito bem o assunto é que se pode transmiti-lo com fidelidade e poder de convencimento aos alunos. Por isso, o objetivo primeiro da pesquisa era transcorrer sobre as associações entre a Matemática e as formas da natureza, percorrendo desde a Geometria grega até sua apresentação contextualizada das simetrias nos dias atuais. Nos primeiros passos da pesquisa a proposta inicial foi se refinando e sob a orientação do Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes se chegou ao tema desta dissertação: Isometria e homotetia no plano, com uma proposta bem definida de ampliação estruturada do estudo das congruências e semelhanças de triângulos.

O estudo é apresentado em duas partes. A primeira traz uma abordagem geométrica das isometrias no plano euclidiano, detalhando suas propriedades e classificação, concluindo que as isometrias são de quatro tipos: reflexão, translação, rotação ou reflexão com deslizamento. Complementando essa parte inicial, é apresentada uma ferramenta interativa na simulação desses conceitos isométricos. A segunda parte resgata um conceito muito utilizado, não apenas no ensino de Matemática, a proporcionalidade. Ao abordar a proporcionalidade na visão matemática, apresenta-se uma definição clara e algumas de suas aplicações como o Teorema de Thales e os casos de semelhança de triângulos. Propondo ampliar o estudo sobre semelhança são apresentadas as homotetias, sua definição, propriedades e características, concluindo que a homotetia preserva a razão de semelhança em qualquer polígono. E para facilitar a visualização

dos conceitos e propriedades homotéticas é apresentada mais uma ferramenta interativa desenvolvida no software Geogebra, disponibilizada *on line* aos professores, alunos e qualquer usuário que anseie em estudar sobre homotetia.

Como parte conclusiva da pesquisa tem-se que, somente através de homotetia, de isometria ou de uma composta de duas ou mais destas pode haver semelhança entre figuras planas. Ficando como sugestão a outros professores de Matemática ampliem esta pesquisa, detalhando as diversas abordagens das isometrias e homotetias.

## 2 ISOMETRIAS

A definição de isometria será apresentada nos subcapítulos seguintes, para isso faz-se necessário relembrar alguns dos conceitos fundamentais de função, suas características, classificação e algumas consequências necessárias ao estudo das isometrias.

### 2.1 FUNÇÃO

Toda função é uma relação binária entre dois conjuntos, isto é, toda função é um conjunto de pares ordenados.

**Definição 2.1.1:** *Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , não vazios, uma relação  $f$  de  $X$  em  $Y$  recebe o nome de aplicação de  $X$  em  $Y$  ou função definida em  $X$  com imagens em  $Y$  se para todo  $x \in X$  existe um único  $y \in Y$ , tal que o par ordenado  $(x, y) \in f$ .*

$$f \text{ é função de } X \text{ em } Y \Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in Y \mid (x, y) \in f$$

Usa-se a seguinte nomenclatura  $f: X \rightarrow Y$  para representar uma função de  $X$  em  $Y$ .

#### 2.1.1 DOMÍNIO

Chama-se domínio de uma função o conjunto  $A$  dos elementos  $x \in X$  para os quais existe  $y \in Y$ , tal que  $(x, y) \in f$ . Como todos os elementos de  $X$  têm essa propriedade, então  $A = X$ . De modo que o domínio é o conjunto de partida da aplicação.

#### 2.1.2 IMAGEM

Dada a função  $f: X \rightarrow Y$ , o conjunto imagem, ou simplesmente imagem da função  $f$  é o conjunto  $Im(f) = \{f(x) \in Y; x \in X\}$

Em particular, sempre  $Im(f) \subset Y$ , podendo ainda ocorrer  $Im(f) = Y$  ou  $Im(f) \neq Y$ .

#### 2.1.3 CONTRADOMÍNIO

A nomenclatura apresentada no item 2.1, na função  $f: X \rightarrow Y$ , contradomínio é o conjunto de chegada  $Y$  que contém todos os possíveis valores para  $y$ , de modo que a imagem da função seja um subconjunto do contradomínio.

#### 2.1.4 FUNÇÃO COMPOSTA

**Definição 2.1.4.1.** *Dadas as funções  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y' \rightarrow Z$ , com  $Y \subset Y'$ , chama-se função composta de  $g$  e  $f$  a função  $h: X \rightarrow Z$ , de forma que a imagem de  $x \in X$  será obtida aplicando-se  $g(f(x))$ , tal que  $h(x) = g(f(x))$  para todo  $x \in X$ .*

Pode-se representar a composta de  $g$  e  $f$  por  $g \circ f$ .

**Exemplo 2.1.4.2.** Sejam as funções reais  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = x^2 - x + 2$ . A função composta  $(g \circ f)(x)$  será

$$(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 - (2x - 1) + 2 = 4x^2 - 4x + 1 - 2x + 1 + 2 = 4x^2 - 6x + 4$$

Observa-se que a composta  $(g \circ f)(x)$  só estará definida quanto o domínio da função  $g$  contiver o contradomínio da função  $f$ . E que a composição de funções não é comutativa.

### 2.1.5 FUNÇÃO INJETIVA

**Definição 2.1.4.3.** Dada a função  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f$  será injetiva quando, dados  $x_1, x_2$  elementos de  $X$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$ , implicar  $x_1 = x_2$ , isto é, se  $x_1 \neq x_2$ , então  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

### 2.1.6 FUNÇÃO SOBREJETIVA

**Definição 2.1.4.4.** Dada a função  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f$  será sobrejetiva quando para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$ , tal que  $f(x) = y$ .

$$f \text{ é sobrejetiva} \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y \Leftrightarrow \text{Im}(f) = Y$$

### 2.1.7 FUNÇÃO BIJETIVA

**Definição 2.1.4.5.** Dada a função  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f$  será bijetiva se  $f$  é injetiva e sobrejetiva.

Equivale dizer que para todo elemento  $y \in Y$  existe um único elemento  $x \in X$ , tal que  $f(x) = y$ .

$$f \text{ é bijetiva} \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y$$

### 2.1.8 FUNÇÃO INVERSA

**Definição 2.1.4.6.** Dada a função  $f: X \rightarrow Y$ , uma função  $g: Y \rightarrow X$  é chamada de inversa se  $(f \circ g)(y) = y \forall y \in Y$  e  $(g \circ f)(x) = x \forall x \in X$ . Tal função será representada por  $f^{-1}$ . Assim,

$$f^{-1}: Y \rightarrow X \text{ existe} \Leftrightarrow f \text{ é bijetiva.}$$

**Prova:** Considerando inicialmente:

- (i) Para todo  $y \in Y$  existe um  $x \in X$ , tal que  $f^{-1}(y) = x$ , ou seja,  $(y, x) \in f^{-1}$  e  $(x, y) \in f$ . Então  $f$  é sobrejetiva.

- (ii) Sejam  $x_1, x_2 \in X$ , com  $x_1 \neq x_2$ , de modo que  $f(x_1) = f(x_2) = y$ . Então  $f^{-1}(y) = x_1 = x_2$ . Absurdo. Assim,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  e  $f$  é injetiva.

Portanto, por (i) e (ii),  $f$  é bijetiva.

Reciprocamente:

- (i) Sendo  $f$  sobrejetiva, para todo  $y \in Y$  existe um  $x \in X$ , tal que  $(x, y) \in f$ .  
Então  $(y, x) \in f^{-1}$ .

- (ii) Sendo  $y \in Y$ , para duas imagens  $x_1$  e  $x_2$  em  $f^{-1}$ , temos:

$$(y, x_1) \in f^{-1} \text{ e } (y, x_2) \in f^{-1} \implies (x_1, y) \in f \text{ e } (x_2, y) \in f$$

Como  $f$  é injetiva, então  $x_1 = x_2$ .

Portanto, por (i) e (iii),  $f^{-1}$  é a inversa da função  $f$ . ■

## 2.2 ISOMETRIA

Neste capítulo serão tratadas as transformações no plano, a ser definida na seção 2.2.1, destacando-se algumas funções específicas denominadas isometrias, por possuírem a propriedade de preservar a distância entre dois pontos. Serão apresentadas separadamente as reflexões, as translações, as rotações e as reflexões com deslizamento no plano, que estão entre as isometrias, em uma abordagem geométrica.

### 2.2.1 TRANSFORMAÇÕES NO PLANO $\mathbb{R}^2$

Este trabalho utiliza-se do plano geométrico euclidiano associado ao plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , tomando o estudo de funções do ponto de vista geométrico. De forma que, dada uma transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o interesse será o seu comportamento geométrico, isto é, como as figuras são transformadas no plano. De forma que se pode escrever a transformação  $T$  em função de suas coordenadas, já que está relacionada ao plano cartesiano. Assim,

**Definição 2.2.1.1.** *Chama-se transformação no plano toda função  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

**Exemplo 2.2.1.2.** *Seja  $T$  uma transformação dada por  $T(x, y) = (x, 2y)$ .*

A imagem dessa transformação será uma ampliação vertical, preservando o valor da abscissa e duplicando o valor da ordenada, conforme exemplificado na *Figura 1*, na próxima página.

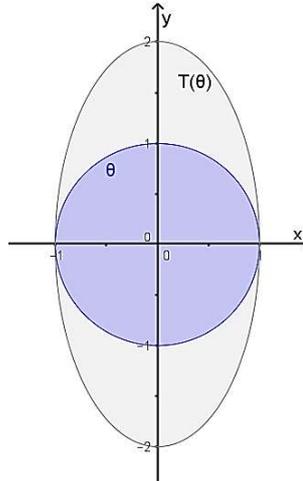


Figura 1 - Transformação  $T(x, y) = (x, 2y)$  em uma circunferência  $\theta$ .

Observe que  $T$  é injetiva e sobrejetiva.

De fato, seja  $(x_1, y_1)$  um ponto do plano, existe um único ponto  $(x, y)$  do qual ele é imagem, ou seja,  $x = x_1$  e  $y = \frac{y_1}{2}$ .

A Figura 1 representa uma circunferência  $\theta$  de equação  $x^2 + y^2 = 1$  e sua transformação  $T(\theta)$ , cuja equação será o resultado da substituição das coordenadas  $x$  e  $y$ .

$$\text{Assim, } x_1^2 + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)y_1^2 = 1.$$

Portanto, a função  $T$ , ao expandir verticalmente a circunferência  $\theta$ , transforma  $\theta$  em uma elipse de semieixos, menor = 1 e maior = 2.

**Exemplo 2.2.1.3.** Seja outra transformação  $T$  no plano, dada por  $T(x, y) = (x + 3, y)$ .

O resultado da aplicação desta transformação será um deslocamento horizontal paralelo ao eixo  $Ox$ , adicionando o valor 3 à abscissa e preservando o valor da ordenada, como exemplificado na Figura 2.

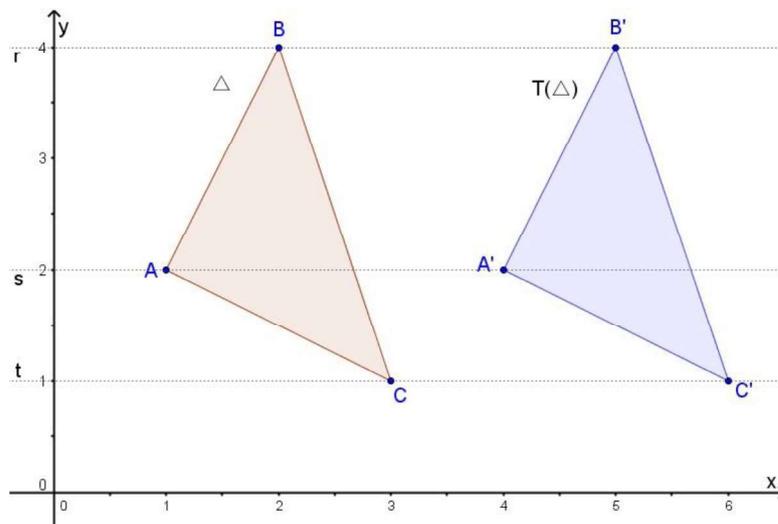


Figura 2 - Transformação  $T(x, y) = (x + 3, y)$  em um triângulo  $\Delta$ .

A *Figura 2* representa um triângulo  $\Delta$  de vértices  $A = (1, 2)$ ,  $B = (2, 4)$  e  $C = (3, 1)$  e sua imagem  $T(\Delta)$  é o triângulo  $A'B'C'$  congruente ao triângulo  $ABC$ , cujos vértices são  $A' = (4, 2)$ ,  $B' = (5, 4)$ , e  $C' = (6, 1)$ . De fato,

$$\begin{cases} d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} \\ d(A', B') = \sqrt{(5-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\begin{cases} d(A, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \\ d(A', C') = \sqrt{(6-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

$$\begin{cases} d(B, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10} \\ d(B', C') = \sqrt{(6-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Assim concluímos, pelo caso de congruência de triângulo (*LLL*), que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes. ■

A seguir, será mostrado que  $T$  é injetiva e sobrejetiva.

Dados  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ , após a ação da aplicação  $T$ , tem-se  $T(A) = (x_1 + 3, y_1)$  e  $T(B) = (x_2 + 3, y_2)$ . Daí,

$$d(T(A), T(B)) = \sqrt{(x_2 + 3 - (x_1 + 3))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore d(T(A), T(B)) = d(A, B)$$

Supondo  $T(A) = T(B)$ , tem-se a demonstração direta

$$T(A) = T(B) \Leftrightarrow (x_1 + 3, y_1) = (x_2 + 3, y_2)$$

$$\therefore x_1 + 3 = x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\therefore y_1 = y_2$$

Logo,  $A = B$ . Portanto,  $T$  é injetiva, como visto na *Definição 2.1.4.3*.

Mostrando a sobjetividade de  $T$ . Dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tem-se  $(x, y) = T(x - 3, y)$ , Portanto,  $T$  é sobrejetiva, conseqüentemente será também bijetiva. ■

## 2.2.2 ISOMETRIAS E ALGUMAS PROPRIEDADES

A seguir, serão apresentados a definição de isometria e alguns exemplos para então serem estudadas algumas de suas propriedades.

**Definição 2.2.2.1.** Denomina-se isometria no plano  $\mathbb{R}^2$  a uma transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distâncias. Ou seja,  $T$  é uma isometria quando  $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$  para quaisquer pontos  $P$  e  $Q$  do plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.2.2.2:** Seja a transformação no plano  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$ .

Dados  $A = (a, b)$  e  $B = (c, d)$  pontos de  $\mathbb{R}^2$ , será verificado se  $T$  é uma isometria aplicando a definição. Assim,  $T(A) = \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}, \frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)$  e  $T(B) = \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}, \frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)$ , implica

$$\begin{aligned} d(T(A), T(B))^2 &= \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} - \frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} - \frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a-b-c+d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c-d}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(a-b-c+d)^2 + \frac{1}{2}(a+b-c-d)^2 \\ &= \frac{1}{2}[(a-b-c+d)^2 + (a+b-c-d)^2] \\ &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 4ac - 4bd) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd) \\ &= (a-c)^2 + (b-d)^2 \end{aligned}$$

Portanto,  $d(T(A), T(B)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = d((a, b), (c, d)) = d(A, B)$ . ■

**Exemplo 2.2.2.3.** Sejam  $a$  e  $b$  números reais e  $T$  uma transformação no plano definida por  $T(x, y) = (x + a, y + b)$ , verificar-se que  $T$  é uma isometria.

Dados  $A = (e, f)$  e  $B = (g, h)$  dois pontos de  $\mathbb{R}^2$ , será verificado se  $T$  é uma isometria aplicando a definição. Logo,  $T(A) = (e + a, f + b)$  e  $T(B) = (g + a, h + b)$ , de modo que  $d(T(A), T(B))^2 = (e + a - g - a)^2 + (f + b - h - b)^2 = (e - g)^2 + (f - h)^2$ .

Portanto,  $d(T(A), T(B)) = \sqrt{(e - g)^2 + (f - h)^2} = d((e, f), (g, h)) = d(A, B)$  ■

A seguir, serão tratadas algumas propriedades básicas das isometrias.

**Proposição 2.2.2.4.** Toda isometria  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é injetiva.

**Prova:** Supondo que  $T(P) = T(Q)$ , assim pela definição,  $d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0$ .

Então,  $P = Q$ , concluindo que  $T$  é injetiva. ■

**Proposição 2.2.2.5.** Toda isometria  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é sobrejetiva, isto é, sua imagem é  $\mathbb{R}^2$ .

**Prova:** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria e  $P'$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$ . Dados  $A$  e  $B$  pontos diferentes no plano  $\mathbb{R}^2$ , então  $T(A) \neq T(B)$ , pois toda isometria é injetiva (*Proposição 2.2.2.4*).

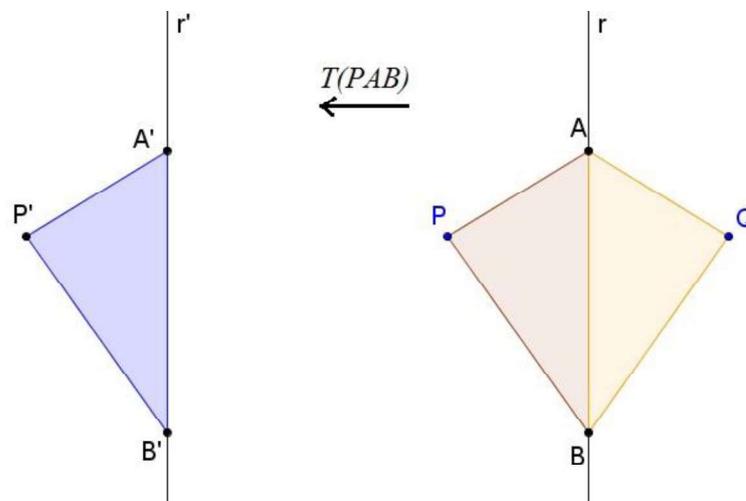
(i) Se  $T(A) = P'$  ou  $T(B) = P'$ , está concluída a demonstração.

(ii) Supondo  $T(A) \neq P'$  e  $T(B) \neq P'$  e fazendo  $T(A) = A'$  e  $T(B) = B'$ , existem apenas dois casos possíveis para os pontos  $A', B'$  e  $P'$ :

1º caso:  $A', B'$  e  $P'$  são colineares, então esses três pontos estão em uma reta  $r'$ , tal que  $A, B \in r$ . Portanto, existe  $P \in r$  tal que  $T(P) = P'$ , concluindo a demonstração.

2º caso:  $A', B'$  e  $P'$  não são colineares. Considerando o triângulo  $P'A'B'$  e construindo os triângulos  $PAB$  e  $QAB$  congruentes ao triângulo  $P'A'B'$ , com  $P$  e  $Q$  em semiplanos opostos em relação à reta  $AB$ . As semirretas  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{AQ}$  são levadas em semirretas diferentes com origem  $A'$ , pois  $T$  é injetiva.  $P \neq Q$  e  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$ . Além disso elas formam ângulos de mesma medida que  $\angle P'A'B'$  com a semirreta  $\overrightarrow{A'B'}$ . Logo, como  $T$  preserva distâncias,  $T(P) = P'$  ou  $T(Q) = P'$ . ■

Veja ilustração na *Figura 3*.



*Figura 3 - Toda isometria é sobrejetiva.*

**Proposição 2.2.2.6.** Se  $P$  e  $Q$  são pontos distintos de  $\mathbb{R}^2$  e  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma isometria, então  $T$  leva o segmento  $PQ$  sobre o segmento  $T(P)T(Q)$ .

LIMA (1995, p. 13), lembra que um ponto  $C$  pertence ao segmento de reta  $PQ$  se, e somente se,  $d(P, Q) = d(P, C) + d(C, Q)$ .

**Prova:** Seja  $C$  um ponto do segmento  $PQ$ , então  $d(P, Q) = d(P, C) + d(C, Q)$ . Como, por hipótese,  $T$  é uma isometria, então  $d(T(P), T(Q)) = d(T(P), T(C)) + d(T(C), T(Q))$ .

Logo, o ponto  $T(C)$  pertence ao segmento  $T(P)T(Q)$ .

Dados  $D$  um ponto de  $T(P)T(Q)$  e  $v = d(T(P), D)$ . Seja  $C$  o ponto de  $PQ$  tal que  $d(P, C) = v$ . Esse ponto existe, pois  $v \leq d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$ .

Observa-se que  $T(C) \in T(P)T(Q)$  e que  $d(T(P), T(C)) = d(P, C) = v$ . Assim,  $D$  e  $T(C)$  são pontos do segmento  $T(P)T(Q)$  à mesma distância de  $T(P)$ .

Portanto  $T(C) = D$ , conseqüentemente, prova-se que  $T$  leva o segmento  $PQ$  sobre o segmento  $T(P)T(Q)$ . ■

Essa propriedade mostra que toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares, mantendo a sua ordenação e suas distâncias.

Nota-se ainda que a aplicação de uma isometria em três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares gera imagens não colineares.

De fato, pela desigualdade triangular, tem-se que  $d(A, B) + d(B, C) > d(A, C)$ . Desse modo, se  $T(B)$  estivesse entre  $T(A)$  e  $T(C)$ , implicaria

$$d(T(A), T(B)) + d(T(B), T(C)) = d(T(A), T(C))$$

Mas,  $d(T(A), T(C)) = d(A, C) > d(T(A), T(B)) + d(T(B), T(C)) = d(T(A), T(C))$  isto é,  $d(T(A), T(C)) > d(T(A), T(C))$ , absurdo. ■

**Proposição 2.2.2.7.** *A imagem de uma reta por uma isometria é também uma reta.*

**Prova:** Seja  $r$  uma reta no plano  $\mathbb{R}^2$ . Dados  $P, Q \in r$ , tais que  $P' = T(P)$  e  $Q' = T(Q)$  sejam suas imagens pela isometria  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e  $r'$  a reta que passa pelos pontos  $P'$  e  $Q'$ , vamos mostrar que  $T(r) = r'$ .

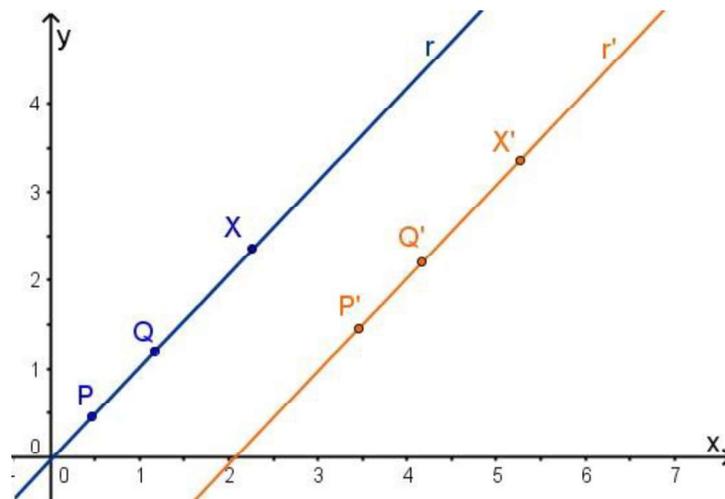


Figura 4 - A imagem de uma reta por uma isometria é também uma reta.

Dado  $X \in r$ , um dos três pontos  $P$ ,  $Q$  e  $X$  está entre os outros dois.

Suponha  $Q$  entre  $P$  e  $X$ , ou seja,  $Q \in PX$  (os outros dois casos são análogos).

Assim  $d(P, X) = d(P, Q) + d(Q, X)$ .

Sejam  $X' = T(X)$  e  $Q' = T(Q)$ . Como  $d(P, X) = d(P', X')$ ,  $d(P, Q) = d(P', Q')$  e  $d(Q, X) = d(Q', X')$ , temos  $d(P', X') = d(P', Q') + d(Q', X')$ , e daí  $Q' \in P'X'$ , de modo que os pontos  $P'$ ,  $Q'$  e  $X'$  são colineares. Isso mostra que  $X \in r \Rightarrow X' \in r'$ .

Como toda isometria é sobrejetiva, *Proposição 2.2.2.5*, tem-se  $T(r) = r'$ . ■

Uma consequência importante dessa demonstração é que se  $T$  é uma isometria, então, dados dois pontos  $A$  e  $B$ ,  $T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{T(A)T(B)}$ , ou seja,  $T$  leva semirreta sobre semirreta.

**Proposição 2.2.2.8.** *As imagens de retas paralelas por uma isometria são também retas paralelas.*

**Prova:** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria. Dadas  $r$  e  $s$  duas retas paralelas e suas imagens  $r' = T(r)$  e  $s' = T(s)$ . Supondo, por absurdo, que  $r'$  e  $s'$  não são paralelas. Então existe  $P'$  pertencente a  $r'$  e  $s'$ . Sejam  $P \in r$  e  $Q \in s$  tais que  $T(P) = P'$  e  $T(Q) = P'$ . Pela Proposição 2.2.2.4  $T$  é injetiva. Isso implica  $P = Q$ , isto é,  $r$  e  $s$  têm um ponto em comum. Absurdo, por hipótese  $r$  e  $s$  são paralelas. Portanto  $r'$  e  $s'$  são paralelas. ■

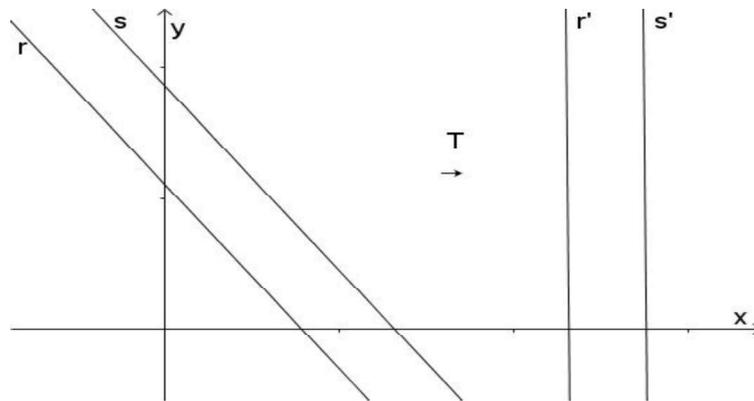


Figura 5 - Toda isometria leva retas paralelas em retas paralelas.

**Proposição 2.2.2.9.** *Se  $ABC$  é um triângulo retângulo com ângulo reto em  $A$ , então sua imagem por uma isometria é o triângulo retângulo  $T(A)T(B)T(C)$  com ângulo reto em  $T(A)$ .*

**Prova:** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria e  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ , de forma que  $A' = T(A)$ ,  $B' = T(B)$  e  $C' = T(C)$ . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$$

Como  $T$  é uma isometria e, portanto, preserva distância, vem

$$d(B', C')^2 = d(A', B')^2 + d(A', C')^2$$

Em virtude da recíproca do Teorema de Pitágoras,  $A'B'C'$  é um triângulo retângulo em  $A' = T(A)$  com hipotenusa  $B'C'$ . ■

Uma generalização dessa proposição será apresentada na Proposição 2.2.2.10, onde a imagem  $\alpha'$  de um ângulo  $\alpha$  obtida através de uma isometria  $T$  será congruente ao mesmo, isto é,  $\alpha' = T(\alpha) \cong \alpha$ .

Como consequência das *Proposição 2.2.2.8* e *Proposição 2.2.2.9*, tem-se que  $T$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares preservando assim os ângulos retos.

De acordo com MUNIZ NETO (2013, p. 10), em Geometria,

*Dadas, no plano, duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , um ângulo (ou região angular) de vértice  $O$  e lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Denotando um ângulo de lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  escrevendo  $\angle AOB$  e sua medida será representada por  $A\hat{O}B$ .*

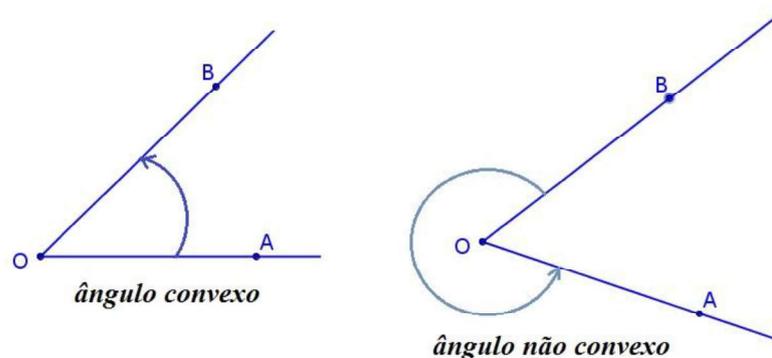


Figura 6 - Regiões angulares no plano.

**Proposição 2.2.2.10.** *Dado um ângulo  $\angle ABC$  e uma isometria  $T$ , então  $T(\angle ABC)$  é o ângulo  $\angle T(A)T(B)T(C)$ , e ambos são congruentes.*

**Prova:** Dado um ângulo  $\angle ABC$  qualquer, não raso, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares. Logo, os pontos  $T(A)$ ,  $T(B)$  e  $T(C)$  não são colineares. Como  $T$  leva semirreta sobre semirreta, *Proposição 2.2.2.7*, então  $T$  leva  $\angle ABC$  sobre  $\angle T(A)T(B)T(C)$ . Por outro lado, o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $T(A)T(B)T(C)$  pelo caso *LLL*, então seus ângulos correspondentes são congruentes. ■

**Proposição 2.2.2.11.** *A inversa de qualquer isometria é também uma isometria.*

**Prova:** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria. Como  $T$  é bijetiva, existe  $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , a inversa de  $T$ . Agora, é suficiente mostrar que  $T^{-1}$  preserva distâncias.

Sejam  $A$  e  $B$  pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ , então

$$d(T^{-1}(A), T^{-1}(B)) = d(T(T^{-1}(A)), T(T^{-1}(B))) = d(A, B)$$

Portanto,  $T^{-1}$  é uma isometria. ■

**Proposição 2.2.2.12.** *A composta de duas isometrias é também uma isometria.*

**Prova:** Sejam  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas isometrias e os pontos  $A$  e  $B$  pertencentes ao plano  $\mathbb{R}^2$ . Verificando a distância entre as imagens de  $A$  e  $B$  pela composta  $T \circ S$ ,

$$d((T \circ S)(A), (T \circ S)(B)) = d(T(S(A)), T(S(B))) = d(S(A), S(B)) = d(A, B)$$

Portanto,  $T \circ S$  é uma isometria. ■

Nas próximas seções será observado que existem poucos tipos de isometrias, as quais serão determinadas por seus pontos fixos, estes terão papel importante nesse estudo.

**Definição 2.2.2.13.** *Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação. Chama-se ponto fixo de  $T$  a todo ponto  $P$  tal que  $T(P) = P$ .*

**Proposição 2.2.2.14.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos fixos de uma isometria  $T$ , então todos os pontos da reta que passa por  $A$  e  $B$  são fixos.*

**Prova:** Sabe-se que  $T$  transforma a reta  $r$  que passa por  $A$  e  $B$  na reta que passa por  $T(A)$  e  $T(B)$ , pela *Proposição 2.2.2.7*. Se  $A$  e  $B$  são pontos fixos, então a reta  $r$  é levada sobre si mesma.

Suponha  $P \in r$ , tal que  $P$  está entre  $A$  e  $B$ , conseqüentemente  $T(P)$  está entre  $A$  e  $B$ . Assim,  $AP = T(A)T(P) = AT(P)$ . Observe que  $P$  e  $T(P)$  estão na mesma semirreta de origem  $A$ , então são o mesmo ponto, ou seja,  $T(P) = P$ .

Para outra posição de  $P$  a demonstração é análoga. ■

**Proposição 2.2.2.15.** *Sejam  $S$  e  $T$  isometrias e  $r$  uma reta no plano. Se existirem pontos  $A \neq B$  em  $r$ , tais que  $S(A) = T(A)$  e  $S(B) = T(B)$ , então  $S(X) = T(X)$  para todo  $X \in r$ , isto é,  $S = T$ .*

**Prova:** Neste caso, a isometria  $M = T^{-1} \circ S$  é tal que  $M(A) = A$  e  $M(B) = B$ , de modo que pela *Proposição 2.2.2.14* todo ponto de  $r$  é fixado por  $M$ , isto é,  $S = T$  em  $r$ . ■

Importante observar que a transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(P) = P$  para todo  $P \in \mathbb{R}^2$  chama-se identidade. Portanto a identidade das transformações em um plano é uma isometria que fixa todos os pontos, indicando-se a identidade de  $\mathbb{R}^2$  por  $Id$ .

A seguir, será mostrado que isometrias diferentes podem fixar, simultaneamente, no máximo, os pontos de uma reta.

**Teorema 2.2.2.16.** *Se uma isometria  $T$  fixa três pontos não colineares, então  $T$  é a identidade.*

**Prova:** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos fixos não colineares da isometria  $T$ . Da *Proposição 2.2.2.14* observa-se que  $T$  fixa as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ . Sejam  $P$  um ponto fora dessas retas e  $Q$  um ponto da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  (diferente de  $A$  e  $B$ ). A reta  $r$  determinada por  $PQ$  intersecta um dos outros dois lados do triângulo  $ABC$  em um ponto  $R$ . Logo  $r$  tem dois pontos  $Q$  e  $R$  fixados por  $T$ , conseqüentemente fixando a reta  $r$ , portanto fixa o ponto  $P$ .

Uma vez que  $P$  foi escolhido arbitrariamente,  $T$  fixa todos os pontos no plano, ou seja,  $T$  é a identidade. ■

**Teorema 2.2.2.17.** *Se duas isometrias  $T$  e  $S$  coincidem em três pontos não colineares, então  $T = S$ .*

**Prova:** Pela propriedades, *Proposição 2.2.2.4* e *Proposição 2.2.2.5*, toda isometria é bijetiva, assim  $T$  admite inversa, e sua inversa é uma isometria. E ainda, a composta de duas isometrias é uma isometria (*Proposição 2.2.2.12*), logo  $T \circ S^{-1}$  é uma isometria.

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os três pontos não colineares fixados por  $T$  e  $S$  simultaneamente. Note que  $S^{-1}$  também fixa esses três pontos. Logo,  $T \circ S^{-1}$  fixa esses três pontos. Pelo *Teorema 2.2.2.16*  $T \circ S^{-1} = Id$ . Portanto,  $T = S$ . ■

Das informações apresentadas sobre pontos fixos, classificam-se as isometrias em três tipos diferentes:

- Isometrias com 2 pontos fixos, isto é, uma reta fixa;
- Isometrias com 1 ponto fixo;
- Isometrias com nenhum ponto fixo.

**Teorema 2.2.2.18.** *Dado um triângulo qualquer, a imagem deste triângulo por uma isometria é um triângulo congruente ao triângulo dado.*

**Prova:** Sejam  $T$  uma isometria e  $ABC$  um triângulo qualquer, então os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são não colineares, conseqüentemente  $T(A)$ ,  $T(B)$  e  $T(C)$  também são não colineares, conforme comentários na *Proposição 2.2.2.6*. Portanto  $T(A)T(B)T(C)$  é um triângulo. Como  $\overline{AB} = \overline{T(A)T(B)}$ ,  $\overline{AC} = \overline{T(A)T(C)}$  e  $\overline{BC} = \overline{T(B)T(C)}$ , os lados correspondentes destes triângulos são congruentes, então, pelo caso *LLL*, os triângulos  $ABC$  e  $T(A)T(B)T(C)$  são congruentes. ■

### 2.2.3 REFLEXÃO

As reflexões constituem um tipo importante de isometrias, também chamada *Simetria Axial*, pois ocorre em torno de um eixo de simetria (reta).

Antes, será apresentada a definição de reflexão em torno de um ponto.

De acordo com LIMA (1995, p. 4), a definição de reflexão em torno de um ponto é

**Definição 2.2.3.1 (Simetria em torno de um ponto):** Considerando um ponto  $A$  sobre a reta  $r$ . A reflexão em torno de  $A$  é a função  $R_A: r \rightarrow r$  que associa a cada ponto  $X \in r$  seu simétrico  $X' = R_A(X)$  relativamente ao ponto  $A$ .

Tem-se portanto  $R_A(A) = A$ , e para todo  $X \neq A$  em  $r$ ,  $A$  é o ponto médio do segmento  $XX'$ , onde  $X' = R_A(X)$ . Observa-se ainda que  $X$  e  $Y$  estão do mesmo lado de  $A$  se, e somente se, suas imagens  $X'$  e  $Y'$  por  $R_A$  também estão. E se estiverem em lados opostos, suas imagens também estarão em lados opostos.

Em qualquer caso, a distância de  $X' = R_A(X)$  a  $Y' = R_A(Y)$  é igual à distância de  $X$  a  $Y$ , logo  $R_A$  é uma isometria.

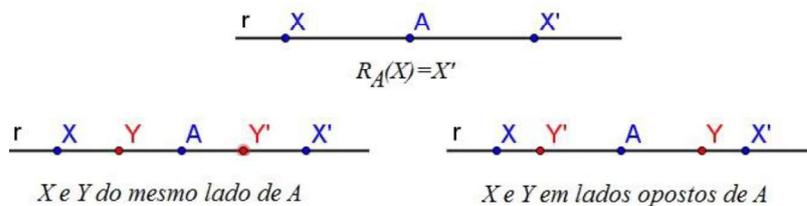


Figura 7 - Reflexão em torno de um ponto  $A$ .

Em qualquer caso de simetria (*reflexão em torno de um ponto*) serão colineares: o ponto  $X$  dado, o centro  $A$  da simetria e a imagem  $X'$ .

Já a reflexão em torno de uma reta é definida por:

**Definição 2.2.3.2 (Simetria Axial):** Seja  $r$  uma reta no plano  $\mathbb{R}^2$ . A reflexão em torno de  $r$  é a transformação  $R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com a seguinte característica:  $R_r(X) = X$  para todo  $X \in r$  e, para  $X \notin r$ ,  $R_r(X) = X'$  é tal que a mediatriz do segmento  $XX'$  é a reta  $r$ .

Isto é, seja  $M$  o pé da perpendicular baixada de  $X$  sobre  $r$ , então  $M$  é o ponto médio do segmento  $XX'$ .

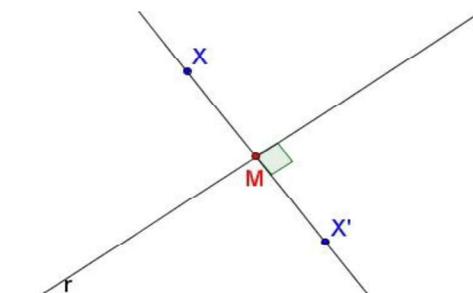


Figura 8 - Reflexão de um ponto em torno de uma reta.

É fácil ver que a reflexão em torno de uma reta  $r$  fixa os pontos de  $r$  e nenhum outro. De fato, essa transformação é uma isometria, sendo um dos três tipos citados anteriormente, particularmente, o caso em que são fixados dois pontos.

**Teorema 2.2.3.3.** *Toda reflexão é uma isometria.*

**Prova:** Seja  $R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reflexão em torno da reta  $r$  e  $P, Q$  dois pontos do plano. Será analisada cada uma das quatro possibilidades para as posições dos pontos  $P$  e  $Q$  em relação a reta dada.

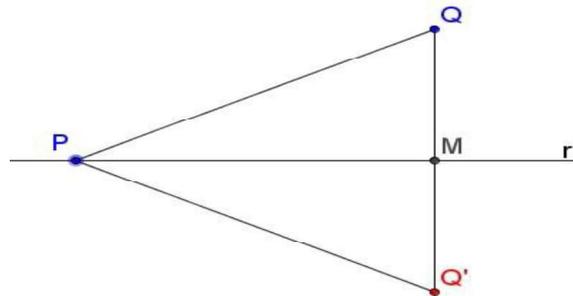
1ª possibilidade:  $P \in r$  e  $Q \in r$ .

Como  $R_r(P) = P' = P$  e  $R_r(Q) = Q' = Q$ , então  $P'Q' = PQ$ .

2ª possibilidade:  $P \in r$  e  $Q \notin r$ .

Dados  $R_r(P) = P' = P$  e  $R_r(Q) = Q'$ . Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $QQ'$ . Se  $P$  está entre o segmento  $QQ'$ , então  $P = M$  é o ponto médio desse segmento. Assim,  $PQ = PQ'$ . Como  $R_r(P) = P$ , tem-se  $\overline{R_r(P)R_r(Q)} = \overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ .

Se  $P$  não está no segmento  $QQ'$ , então  $PQQ'$  forma um triângulo, tal que  $PM$  é a mediana relativa ao lado  $QQ'$  e coincide com a altura relativa à base  $QQ'$ . Logo, esse triângulo é isósceles, implicando  $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ . Veja exemplo na *Figura 9*.



*Figura 9 - 2ª possibilidade:  $P \in r$  e  $Q \notin r$ .*

3ª possibilidade:  $P \notin r$  e  $Q \notin r$  e pertencem ao mesmo semiplano determinado por  $r$ .

Pela transformação no plano,  $R_r(P) = P'$  e  $R_r(Q) = Q'$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos em que os segmentos  $PP'$  e  $QQ'$ , respectivamente, intersectam a reta  $r$ . Se  $P$  e  $Q$  estiverem em uma reta perpendicular a  $r$ , então  $M = N$ .

Ainda sobre a reta perpendicular à  $r$ , sem perda de generalidade, se  $P$  está entre  $Q$  e  $M$ , então  $\overline{PQ} = \overline{QM} - \overline{PM} = \overline{Q'M} - \overline{P'M} = \overline{P'Q'}$ .

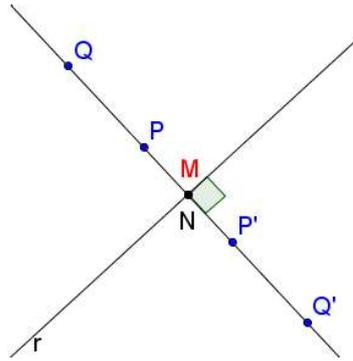


Figura 10 -  $P$  e  $Q$  estão em uma reta perpendicular à reta  $r$ .

Suponha, agora, que  $P$  e  $Q$  não estão em uma reta perpendicular a  $r$ , conforme exemplificado na Figura 11.

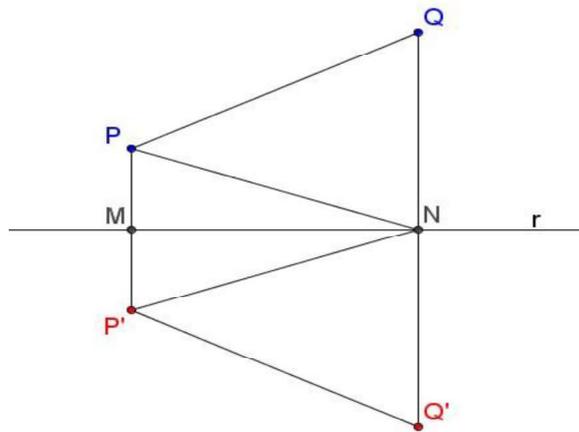


Figura 11 - 3ª possibilidade:  $P \notin r$  e  $Q \notin r$  e pertencem ao mesmo semiplano determinado por  $r$ .

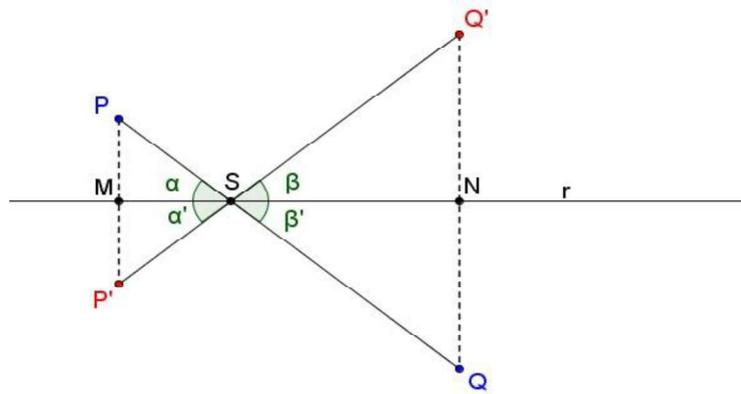
Observe os triângulos  $MPN$ ,  $MP'N$ ,  $NQ'P'$  e  $NQP$ . Como  $r$  é a mediatriz de  $PP'$  e de  $QQ'$ , então  $\overline{Q'N} = \overline{QN}$ ,  $\overline{P'N} = \overline{PN}$  e o triângulo  $PNP'$  é isósceles de base  $PP'$ . Assim, a mediatriz da base é a bissetriz do ângulo oposto à base, isto é,  $\angle PNM \cong \angle P'NM$ , conseqüentemente seus complementares são congruentes, ou seja,  $\angle PNQ \cong \angle P'NQ'$ . Logo, pelo caso  $LAL$  os triângulos  $PNQ$  e  $P'NQ'$  são congruentes, o que implica  $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ .

4ª possibilidade:  $P \notin r$  e  $Q \notin r$  e estão em semiplanos opostos determinados por  $r$ .

Observe que  $P' = R_r(P)$  e  $Q' = R_r(Q)$  também estão em semiplanos opostos determinados por  $r$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos em que os segmentos  $PP'$  e  $QQ'$ , respectivamente, intersectam a reta  $r$ .

Se  $P$  e  $Q$  estiverem em um reta perpendicular a  $r$ , então  $M = N$ . Assim, procedendo de modo análogo ao que foi realizado na demonstração da 3ª possibilidade, prova-se que  $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ .

Suponha, agora, que  $P$  e  $Q$  não estão em uma reta perpendicular a  $r$ , sendo  $M$ ,  $S$  e  $N$  os pontos em que os segmentos  $PP'$ ,  $PQ$  e  $Q'Q$ , respectivamente, intersectam a reta  $r$ , conforme exemplo na *Figura 12*.



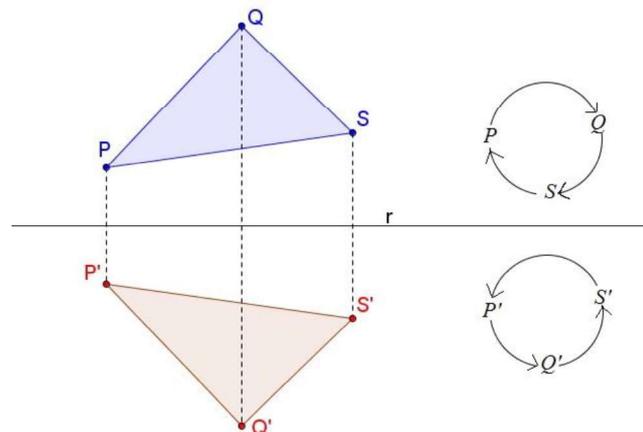
*Figura 12* - 4ª possibilidade:  $P \notin r$  e  $Q \notin r$  e estão em semiplanos opostos determinados por  $r$ .

Observe os triângulos retângulos  $PMS$  e  $P'MS$  têm o lado  $MS$  em comum e  $PM = MP'$ , pelo caso  $LAL$  são congruentes, conseqüentemente  $PS = P'S$ . Analogamente  $SQ = SQ'$ . Assim os triângulos  $PSP'$  e  $Q'SQ$  são isósceles e suas respectivas medianas,  $MS$  e  $SN$ , são bissetrizes:  $\alpha = \alpha'$  e  $\beta = \beta'$ . Por outro lado  $\alpha = \beta'$  pois são ângulos opostos pelo vértice. Então  $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ .

Como  $\beta + \beta'$  é o suplemento do ângulo  $\angle PSQ'$ , segue-se que  $\alpha + \alpha'$  também é, concluindo que os pontos  $P'SQ'$  são colineares. Portanto,  $\overline{P'Q'} = \overline{P'S} + \overline{SQ'} = \overline{PS} + \overline{SQ} = \overline{PQ}$ .

Nas demonstrações das quatro possibilidades foi provado que  $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ , implicando que toda reflexão é uma isometria. ■

Finalizando esta seção sobre reflexões no plano, LIMA (1995, p. 18) apresenta um fato geométrico importante a respeito da reflexão  $R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ : transforma o triângulo  $PQS$  em um triângulo  $P'Q'S'$  no qual a rotação dos vértices  $P' \rightarrow Q' \rightarrow S'$  tem sentido oposto ao sentido da rotação dos vértices  $P \rightarrow Q \rightarrow S$ , conforme *Figura 13*.



*Figura 13* - Em uma reflexão o sentido da rotação dos vértices.

Logo a seguir, serão apresentadas algumas proposições, consequências das reflexões, que auxiliarão na compreensão das isometrias.

**Proposição 2.2.3.4.** *Se  $P$  e  $P'$  são dois pontos de  $\mathbb{R}^2$ , então existe uma única reflexão levando  $P$  em  $P'$ .*

**Prova:** Seja  $R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reflexão em torno da reta  $r$ , tal que  $r$  é a mediatriz do segmento  $PP'$ , então  $R_r(P) = P'$ . Para mostrar que esta reflexão é única levando  $P$  em  $P'$ , suponha que existe uma reflexão  $S_s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em torno da reta  $s$ , tal que  $S_s(P) = P'$ . Como, por definição,  $P'$  é simétrico de  $P$  em relação a  $s$ , então  $s$  é a mediatriz do segmento  $PP'$ , mas essa mediatriz é única. Portanto  $r = s$ , o que implica  $S_s = R_r$ . ■

**Proposição 2.2.3.5.** *Se dois triângulos congruentes possuem um único lado comum, então existe uma reflexão levando um sobre o outro.*

**Prova:** Sejam os triângulos  $PQS$  e  $PTS$  congruentes com lado  $PS$  comum. Como  $PQ = PT$  e  $\angle QPS \cong \angle TPS$ , então a reta  $r$  é a bissetriz de  $\angle QPT$ . Veja exemplo na *Figura 14*.

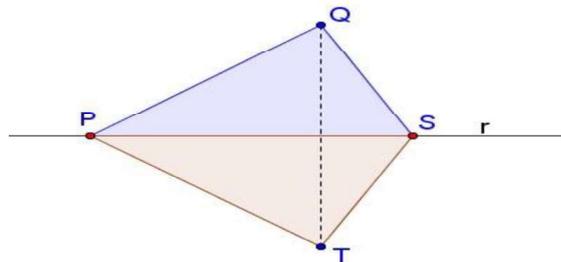


Figura 14 - Dois triângulos congruentes com um único lado comum.

Consequente o triângulo  $PQT$  é isósceles de base  $QT$ , tal que  $r$  é a mediatriz do segmento  $QT$ , provando que  $T$  é o simétrico de  $Q$ .

Agora, considerando uma reflexão  $R_r$  em torno de  $r$ , observa-se que esta leva o triângulo  $PQS$  sobre o triângulo  $PTS$ . ■

**Proposição 2.2.3.6.** *Se dois triângulos congruentes possuem um único vértice comum, então existe uma isometria levando um sobre o outro. Essa isometria é uma reflexão ou a composta de duas reflexões.*

**Prova:** Sejam os triângulos  $PQT$  e  $PXZ$  congruentes com vértice  $P$  comum. Seja  $r$  a reta bissetriz do ângulo  $\angle XPQ$  e  $R_r$  a reflexão em torno dessa reta, logo  $\overline{PQ} = \overline{PX}$ , consequentemente,  $X$  é o simétrico de  $Q$  em relação a  $r$ , isto é,  $R_r(Q) = X$ . Portanto,  $R_r(PQT)$  é o triângulo  $PXT'$  congruente aos triângulos  $PQT$  e  $PXZ$ , possuindo o lado  $PX$  comum ao triângulo  $PXZ$ . Veja exemplificação na *Figura 15*, próxima página.

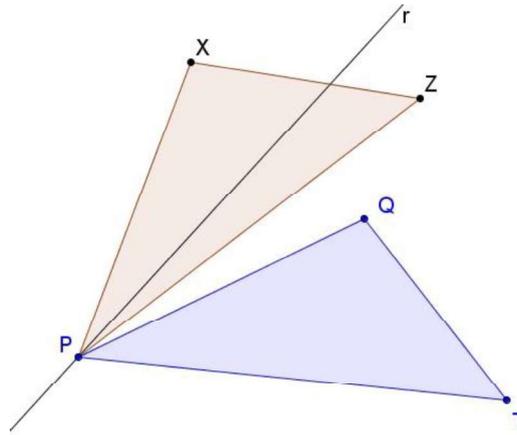


Figura 15 - Dois triângulos congruentes com um único vértice comum.

Se  $Z = T'$ , então  $R_r(PQT) = PXZ$  e fica concluída a demonstração.

Se  $Z \neq T'$ , então aplica-se a *Proposição 2.2.3.5* aos triângulos  $PQT$  e  $PXZ$ , que possuem o lado  $PX$  comum. Assim, a composta de duas reflexões leva  $PQT$  sobre  $PXZ$ . ■

Conclui-se o estudo sobre as reflexões apresentando dois teoremas a seguir:

**Teorema 2.2.3.7.** *Dados dois triângulos congruentes, existe uma isometria que leva um sobre o outro. Essa isometria pode ser a identidade, uma reflexão, ou a composta de duas ou três reflexões.*

**Prova:** Sejam os triângulos  $PQR$  e  $STV$  congruentes. Se forem iguais, a isometria é a identidade. Supondo que sejam diferentes. Se possuírem um único lado comum, pela *Proposição 2.2.3.5*, existe uma reflexão que leva um sobre o outro. Se possuírem um único vértice comum, pela *Proposição 2.2.3.6*, existe uma isometria que leva um sobre o outro, sendo esta uma reflexão ou uma composta de duas reflexões. Se os dois triângulos não têm vértice comum, então considera-se dois deles, por exemplo  $P$  e  $S$ , pela *Proposição 2.2.3.4*, encontra-se a reflexão  $R_r$  que leva  $P$  em  $S$ , obtendo dois triângulos congruentes. ■

**Teorema 2.2.3.8.** *Toda isometria é a identidade, uma reflexão, ou a composta de duas ou três reflexões.*

**Prova:** Seja  $T$  uma isometria diferente da identidade. Seja  $PQS$  um triângulo qualquer. Assim, pelo *Teorema 2.2.2.14*,  $T(P)T(Q)T(S)$  é um triângulo congruente a  $PQS$ . Logo, pelo *Teorema 2.2.3.7*, existe uma isometria  $R_r$  que leva  $PQS$  sobre  $T(P)T(Q)T(S)$ , sendo uma reflexão, ou a composta de duas ou três reflexões. De acordo com os *Teoremas* e as *Proposições* já estudados, pode-se construir  $R_r$  de modo que  $R_r(P) = T(P)$ ,  $R_r(Q) = T(Q)$  e  $R_r(S) = T(S)$ . Logo,  $T$  e  $R_r$  coincidem em três pontos não colineares.

Portanto, pelo *Teorema 2.2.2.17*,  $T = R_r$ . ■

### 2.2.4 TRANSLAÇÃO

Como será apresentado a seguir, *translação* é uma transformação no plano dada por uma isometria que não possui ponto fixo, sendo um dos casos de isometria anteriormente mencionados. Por definição, conforme LIMA (1995, p. 18),

**Definição 2.2.4.1.** *Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $S$  pontos distintos e não colineares no plano  $\mathbb{R}^2$ . A translação  $T_{PQ}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a função assim definida: dado  $S \in \mathbb{R}^2$ , sua imagem  $S' = T_{PQ}(S)$  é o quarto vértice do paralelogramo que tem  $PQ$  e  $PS$  como lados.*

Observe exemplo na Figura 16.

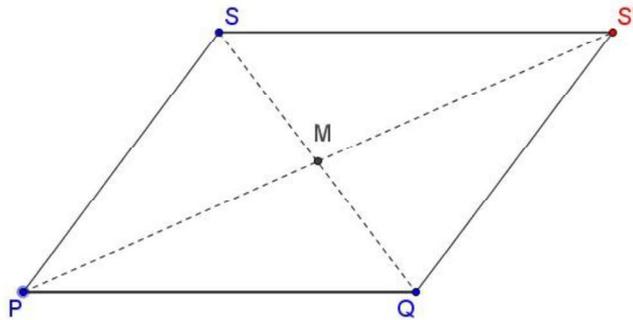


Figura 16 - Translação do segmento  $PQ$ .

Construindo geometricamente o ponto  $S'$ , basta localizar o ponto médio  $M$  do segmento  $QS$  e prolongar o segmento  $PM$  de modo que  $\overline{MS'} = \overline{PM}$ .

A título de observação, quando  $S$  está entre  $P$  e  $Q$  o resultado recai no caso já estudado na Definição 2.2.3.1 (Simetria em torno de um ponto), de maneira que seja qual for a posição de  $S$  no plano, sua imagem  $S'$  fica inteiramente centralizada, pois os segmentos  $PS'$  e  $QS$  têm sempre o mesmo ponto médio.



Figura 17 - Os três pontos estão alinhados.

Convém destacar que a orientação do segmento, isto é, a ordem em que os pontos são informados, caracteriza uma translação diferente, isto é,  $T_{PQ} \neq T_{QP}$ . Na realidade,  $T_{QP}$  é a inversa de  $T_{PQ}$ . Daí a necessidade de se utilizar o termo *segmento de reta orientado  $PQ$*  significando que o ponto  $P$  foi tomado como origem e o ponto  $Q$  como extremidade. Já o segmento orientado  $QP$  tem  $Q$  como origem e  $P$  como extremidade.

**Proposição 2.2.4.2.** Toda translação  $T_{PQ}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma isometria.

**Prova:** Dados os pontos  $X, Y \in \mathbb{R}^2$  e suas imagens  $T_{PQ}(X) = X'$  e  $T_{PQ}(Y) = Y'$ . Se a reta  $r$  que contém  $X$  e  $Y$  é paralela ou coincidente à reta  $s$ , que contém o segmento  $PQ$ , então  $T_{PQ}$ , restrita a  $r$ , é a translação  $T_{XX'}: r \rightarrow r$ , logo  $d(X', Y') = d(X, Y)$ , preservando a distância.

Observe o exemplo na *Figura 18*.

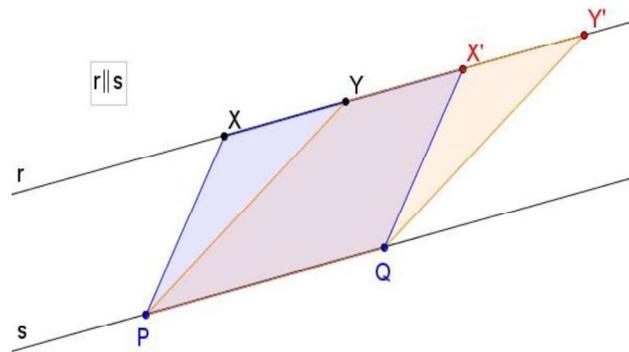


Figura 18 - As retas  $r$  e  $s$  são paralelas.

Se  $r$  não é paralela, nem coincidente, com a reta  $s$ , então  $XX'$  e  $YY'$  são lados opostos de um paralelogramo, logo o mesmo ocorre com  $XY$  e  $X'Y'$ .

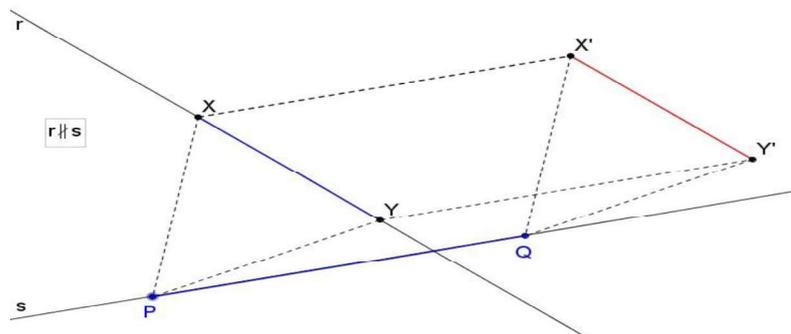


Figura 19 - As retas  $r$  e  $s$  não são paralelas, nem coincidentes.

Portanto,  $d(X', Y') = d(X, Y)$ , provando-se que translação  $T_{PQ}$  é uma isometria. ■

De acordo com LIMA (1995, p. 20) a noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de *vetor* (do Latim “*vehere*” = transportar). Assim, pode-se definir os vetores no plano a partir das translações.

**Definição 2.2.4.3.** Dado  $PQ$  um segmento orientado no plano  $\mathbb{R}^2$ , vetor  $v = \overrightarrow{PQ}$ , de origem  $P$  e extremidade  $Q$ , é o conjunto dos segmentos orientados equipolentes a  $PQ$ .

Sejam  $PQ$  e  $XY$  dois segmentos orientados no plano  $\mathbb{R}^2$ , então  $PQ$  e  $XY$  são *equipolentes* quando  $T_{PQ} = T_{XY}$ . Equivale dizer que os pontos médios dos segmentos  $PY$  e  $QX$  coincidem, isto é,  $PQ$  e  $XY$  são paralelos, têm mesmo comprimento e mesmo sentido.

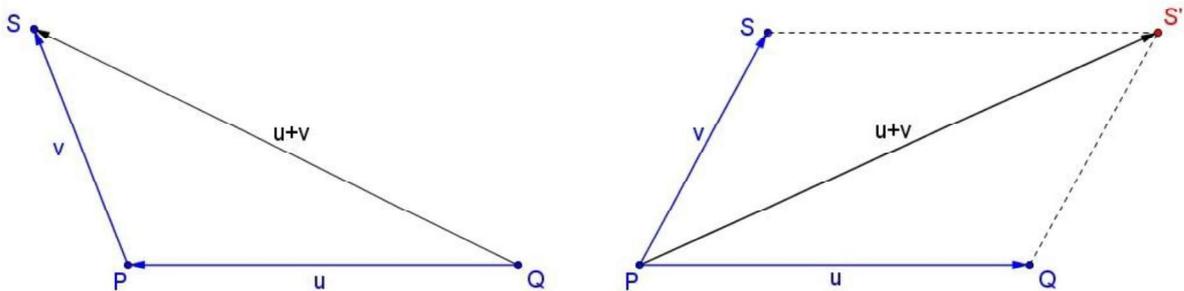
A partir dessa definição, pode-se escrever  $T_v$  em vez de  $T_{PQ}$ , significando que  $T_v$  é a translação do vetor  $v$ .

Reverendo a definição de translação (*Definição 2.2.4.1*), utilizando o conceito de vetores e observando a *Figura 16*, temos que: Dados um segmento orientado  $PQ$  e um ponto  $S$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , existe um único ponto  $S'$  em  $\mathbb{R}^2$ , tal que os segmentos orientados  $PQ$  e  $SS'$  são equipolentes, isto é,  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SS'} = v$ , onde  $S'$  é o quarto vértice do paralelogramo  $PQS'S$ .

Sendo  $T_v(S) = S'$ , escreve-se  $T_v(S) = S + v$  e diz-se que o vetor  $v = \overrightarrow{PQ}$  transportou o ponto  $S$  para a posição  $S'$ , conseqüentemente,  $S' = T_{PQ}(S) = T_v(S)$ .

Duas das propriedades fundamentais dos vetores:

- *Adição (+)*: Dados dois vetores  $u$  e  $v$ , com  $u = \overrightarrow{QP}$  e  $v = \overrightarrow{PS}$ , faz-se  $u + v = \overrightarrow{QS}$ , conforme *Figura 20 (lado esquerdo)*, neste caso os dois vetores possuem origens diferentes. Já a figura do lado direito, apresenta o caso em que os dois vetores  $u = \overrightarrow{PQ}$  e  $v = \overrightarrow{PS}$  possuem a mesma origem, assim  $u + v = \overrightarrow{PS'}$ , onde  $S'$  é o quarto vértice do paralelogramo  $SPQS'$ .



*Figura 20 - Translação por adição de vetores.*

- *Vetor nulo (vetor zero)*: indicado por  $0$ , onde  $0 = \overrightarrow{PP}$ , isto é, vetor em que a origem coincide com a extremidade, tal que  $T_0 = Id$  (*corresponde à identidade das isometrias*).
- *Multiplicação por um número real ( $\cdot$ )*: Dados o vetor  $v = \overrightarrow{PQ}$  e o número real  $t > 0$ , o produto de  $t$  por  $v$  é vetor  $tv = \overrightarrow{PQ_t}$ , onde  $Q_t$  é o ponto da semirreta  $PQ$  tal que  $\frac{\overrightarrow{PQ_t}}{\overrightarrow{PQ}} = t$ . Se  $t < 0$ , põe-se  $tv = -|t|v$  e se  $t = 0$ , tem-se  $0 \cdot v = 0 = \overrightarrow{PP}$ .

Por definição, se  $v = \overrightarrow{PQ}$ , escreve-se  $-v = \overrightarrow{QP}$ . Assim,  $(T_v)^{-1} = T_{-v}$ .

E ainda,  $T_u \circ T_v = T_v \circ T_u = T_{u+v}$ .

Finalizando esta seção, apresenta-se o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.4.4.** *Toda translação diferente da identidade é igual à composta de duas reflexões em torno de duas retas paralelas.*

**Prova:** Seja a translação  $T_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $T_v(P) = P + v$ , com  $v \neq 0$ . Seja  $r$  a reta perpendicular ao vetor  $v$  e que passa pela origem  $OXY$ , e  $s$  a reta paralela a  $r$ , também perpendicular ao vetor  $v$ , tal que  $d(r, s) = \frac{1}{2}|v|$ . Dado  $P \in \mathbb{R}^2$ , se  $R_r$  é a reflexão de  $P$  em torno de  $r$  e  $R_s$  é a reflexão de  $P$  em torno de  $s$ , então  $T_v(P) = R_s(R_r(P)) = (R_s \circ R_r)(P)$ .

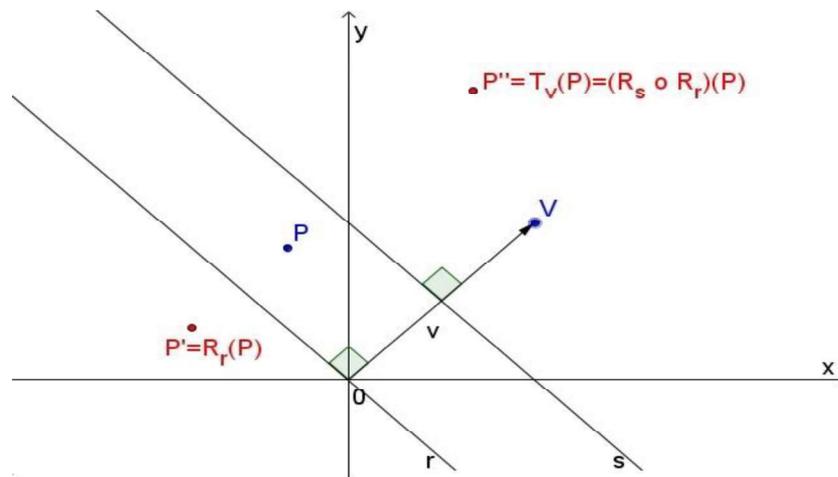


Figura 21 - Toda translação diferente da identidade é igual à composta de duas reflexões.

Será analisado o caso em que  $P$  está no semiplano determinado por  $r$  que contém a reta  $s$ , tal que  $d(P, r) = x < \frac{|v|}{2}$ . Então  $d(P, s) = \frac{|v|}{2} - x$  e  $d(P', s) = \frac{|v|}{2} + x = d(P'', s)$ . Assim,

$$d(P, P'') = d(P, s) + d(P'', s) = \frac{|v|}{2} - x + \frac{|v|}{2} + x = 2 \cdot \frac{|v|}{2} = |v|.$$

Portanto, o segmento  $\overline{PP''}$  tem direção do vetor  $v$ , concluindo que  $(R_s \circ R_r)(P) = T_v(P)$ .

Os outros casos são análogos, apenas ocorrem mudanças de sinais. ■

## 2.2.5 ROTAÇÃO

A rotação é o caso de isometrias que possuem um ponto fixo. Veja definição.

**Definição 2.2.5.1.** *Sejam o ponto  $O \in \mathbb{R}^2$  e um ângulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , tal que  $\alpha = \widehat{AOB}$ . A rotação do ângulo  $\alpha$  em torno do ponto  $O$  é a transformação no plano  $\rho_{O,\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  assim definida: Se  $X = O$ , então  $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ . Se  $X \neq O$ , então  $X' = \rho_{O,\alpha}(X)$  é o ponto do plano, tal que  $d(X, O) = d(X', O)$ , onde  $X\widehat{O}X' = \alpha$ , e o sentido da rotação de  $X$  para  $X'$  é o mesmo de  $A$  para  $B$ .*

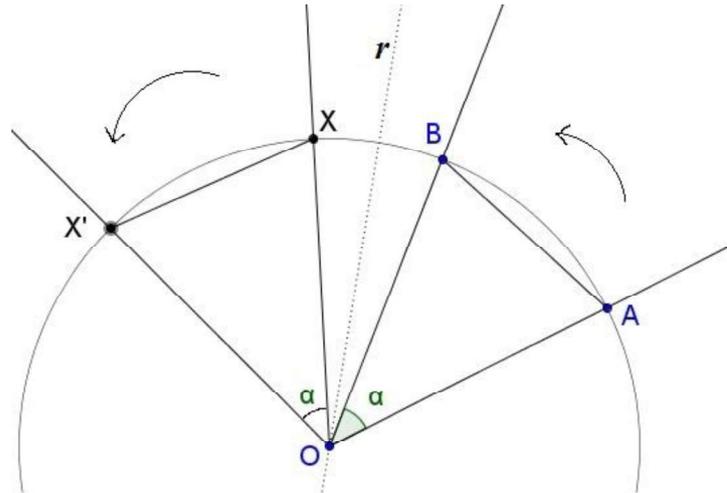


Figura 22 - Rotação do ponto  $X$  pelo ângulo  $\alpha$  em torno do ponto  $O$ .

A condição  $X\hat{O}X' = \alpha$  garante que tomando dois pontos  $A$  e  $B$ , de modo que  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$ , então  $\overline{AB} = \overline{X'X}$ . Assim, apresenta-se o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.5.2.** Toda rotação  $\rho_{O,\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma isometria.

**Prova:** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos no plano  $\mathbb{R}^2$  e suas imagens pela rotação  $\rho_{O,\alpha}$ ,  $P' = \rho_{O,\alpha}(P)$  e  $Q' = \rho_{O,\alpha}(Q)$ . Pela definição,  $OP = OP'$  e  $OQ = OQ'$  e observando os ângulos  $P\hat{O}Q \cong P'\hat{O}Q' = \alpha + \beta$ , conclui-se pelo caso  $LAL$  que os triângulos  $PQO$  e  $P'Q'O$  são congruentes. Portanto  $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ , ou seja,  $\rho_{O,\alpha}$  é uma isometria. ■

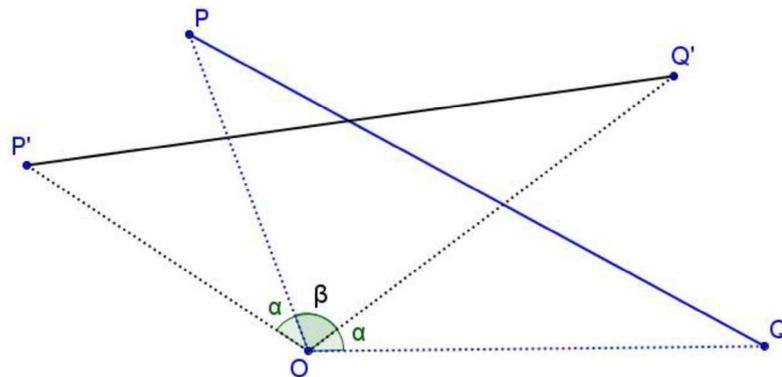


Figura 23 - Toda rotação é uma isometria.

## 2.2.6 REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO

A reflexão com deslizamento é um dos casos de isometria que não possui ponto fixo, devido ser a composta de uma reflexão  $R_r$  e uma translação  $T_v$ , já que a translação, como visto antes, não possui ponto fixo.

**Definição 2.2.6.1.** Sejam o vetor  $v$  e uma reta  $r$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . A reflexão com deslizamento é a isometria  $T = T_v \circ R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , obtida fazendo a translação  $T_v$  seguir-se à reflexão  $R_r$ , isto é,  $T(X) = T_v(R_r(X)) = X'$ . Veja exemplo na Figura 24.

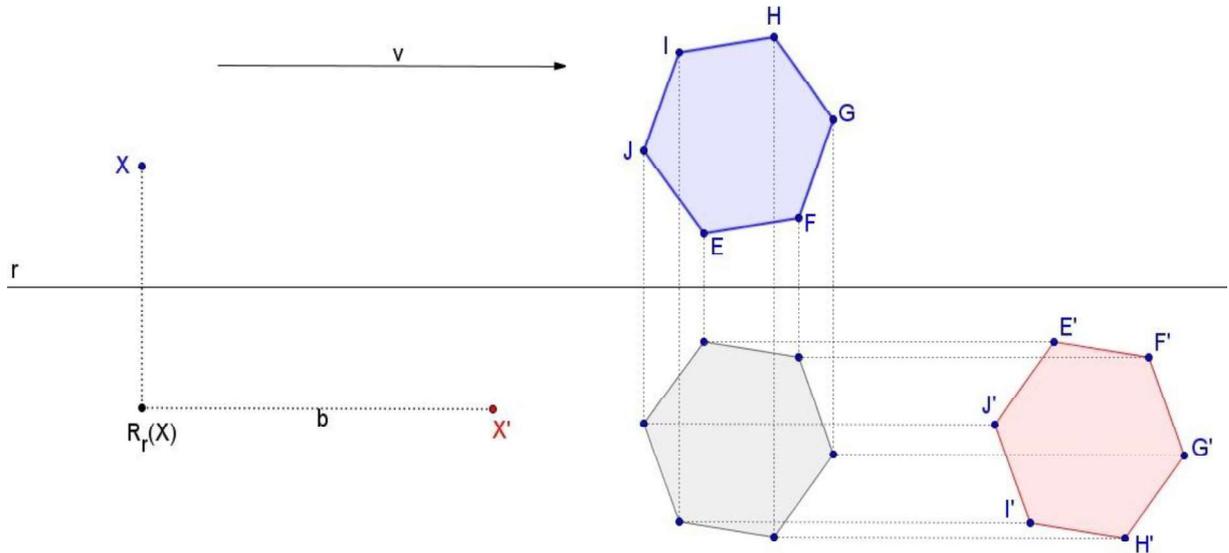


Figura 24 - Reflexão com deslizamento.

Levando em conta que  $v$  é paralelo a  $r$ , é fácil ver que  $T_v \circ R_r = R_r \circ T_v$ .

### 2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE AS ISOMETRIAS

Neste estudo sobre as isometrias, considera-se de fundamental importância o teorema a seguir, cuja prova seguirá a demonstração apresentada por LIMA (1995, p. 25 a 29).

**Teorema 2.3.1.** *Existem apenas quatro tipos de isometrias no plano, além da identidade, a saber: reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento.*

**Prova:** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria diferente da identidade. Existe um ponto  $A \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $A' = T(A) \neq A$ . Seja  $A'' = T(A')$ . Consequentemente,  $\overline{A'A''} = \overline{AA'} > 0$ . Há três casos a considerar.

1º caso:  $A, A'$  e  $A''$  são não-colineares.

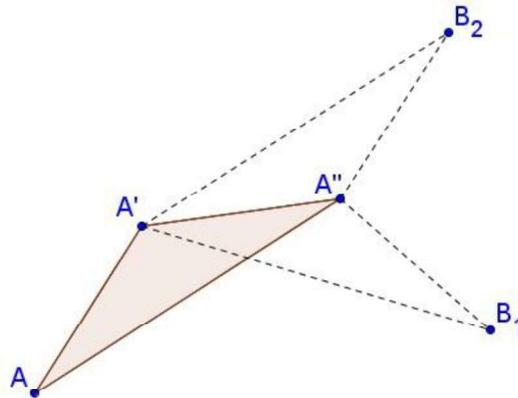


Figura 25 -  $A, A'$  e  $A''$  são não-colineares.

A imagem do triângulo  $AA'A''$  pela isometria  $T$  é um triângulo que tem  $A'A''$  como vértices. Como os lados desse triângulo têm medias iguais às dos lados do triângulo  $AA'A''$ , existem duas posições possíveis para o terceiro vértice,  $B_1$  e  $B_2$ , conforme ele e o ponto  $A$  estejam ou não no mesmo semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{A'A''}$ .

Na primeira hipótese  $A$  e  $B_1$  estão no mesmo semiplano, onde ponto  $B_1 = T(A'')$  forma com os pontos  $A, A'$  e  $A''$  a poligonal convexa  $AA'A''B_1$ , na qual os lados têm a mesma medida e os ângulos  $\widehat{AA'A''}$  e  $\widehat{A'A''B_1}$  são congruentes, logo ela pode ser inscrita em uma circunferência de raio  $\overline{OA}$ , cujo centro  $O$  é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos  $AA', A'A''$  e  $A''B_1$ .

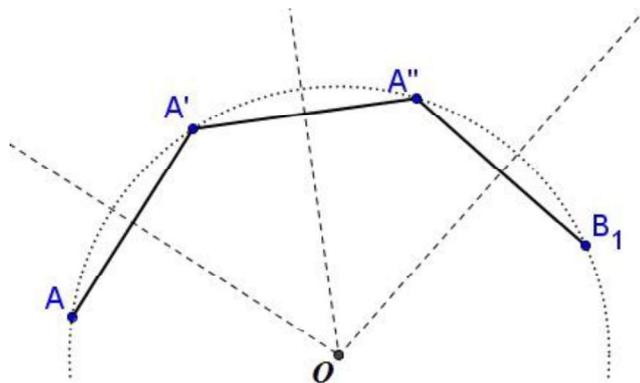


Figura 26 -  $A$  e  $B_1$  estão no mesmo semiplano.

Seja  $O' = T(O)$ . Então, como  $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$ , temos  $\overline{O'A'} = \overline{O'A''} = \overline{O'B_1}$ , logo  $O'$  pertence às mediatrizes dos segmentos  $A'A''$  e  $A''B_1$ , donde  $O' = O$ . Assim, considerando a rotação  $\rho$  de centro em  $O$  e ângulo  $\widehat{AA'A'}$ , tem-se

$$\rho(A) = A' = T(A), \rho(A') = A'' = T(A') \text{ e } \rho(A'') = B_1 = T(A'')$$

Portanto, pela *Proposição 2.2.2.15*, segue-se que  $T = \rho$  é uma rotação.

Na segunda hipótese  $A$  e  $B_2$  estão semiplanos opostos. Assim, tem-se um paralelogramo no qual  $AA'$  e  $A''B_2$  são lados opostos e  $A'A''$  é uma diagonal.

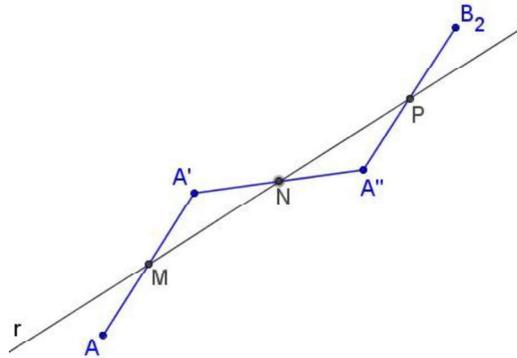


Figura 27 -  $A$  e  $B_2$  estão em semiplanos opostos.

Segue-se que os pontos médios  $M$ ,  $N$  e  $P$  desses três segmentos estão sobre uma reta  $r$ . Seja a isometria  $S = T_{MN} \circ R_r$ , a composta da translação  $T_{MN}$  com a reflexão  $R_r$ , observa-se que  $S$  e  $T$  coincidem nos pontos não colineares  $A$ ,  $A'$  e  $A''$ . Logo, pela *Proposição 2.2.2.15*,  $T = S$ . Portanto,  $T$  é uma *reflexão com deslizamento*. Isso encerra a discussão do primeiro caso.

2º caso:  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são pontos distintos e colineares.

Como  $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$ , o triângulo  $AA'A''$  é isósceles, onde  $A'$  é o ponto médio do segmento  $AA''$ . A reta  $r$ , que contém os três pontos dados, é transformada em si mesma pela isometria  $T$ . Além disso,  $T$  coincide nos pontos  $A$  e  $A'$  com a translação  $T_{AA'}: r \rightarrow r$ . Segue-se da definição *Definição 2.2.3.1*, em todos os pontos de  $r$ ,  $T$  coincide com esta translação. Considerando um ponto  $B$  fora da reta  $r$ .

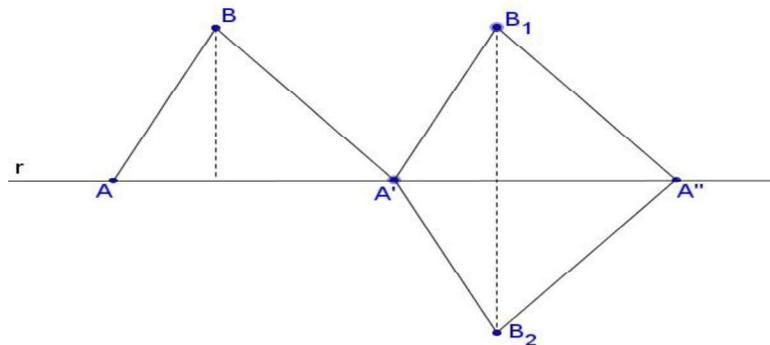


Figura 28 -  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são pontos distintos e colineares.

O triângulo  $AA'B$  é transformado pela isometria  $T$  em outro triângulo que tem  $A'$  e  $A''$  como vértices e lados com as mesmas medidas que os de  $AA'B$ . Neste caso, existem duas posições possíveis para o terceiro vértice desse triângulo,  $B_1$  e  $B_2$ , conforme esteja ou não no mesmo semiplano que  $B$ , determinado pela reta  $r$ .

Na primeira hipótese,  $AB$  e  $A'B_1$  são lados opostos de um paralelogramo. Considerando a translação  $T_{AA'}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , observa-se que ela coincide como a isometria  $T$  nos pontos não colineares  $A$ ,  $A'$  e  $B$ . Pela *Proposição 2.2.2.16*, segue-se que  $T = T_{AA'}$ , logo  $T$  é uma *translação*.

Na segunda hipótese, como o ponto  $B_2$  é o simétrico de  $B_1$  em relação à reta  $r$ , considerando a reflexão com deslizamento  $S = T_{AA'} \circ R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tem-se

$$S(A) = T(A) = A', \quad S(A') = T(A') = A'' \text{ e } S(B) = T(B) = B_2$$

Logo, pela *Proposição 2.2.2.16*,  $S = T$ . Portanto,  $T$  é uma *reflexão com deslizamento*.

Isso encerra a discussão do segundo caso.

3º caso:  $A'' = A$ .

Neste último caso, a isometria  $T$  transforma o segmento de reta  $AA'$  em si mesmo. Se  $M$  é o ponto médio de  $AA'$ , então  $T(M) = M$ . Desse modo, a mediatriz  $s$  desse segmento é transformada em si mesma por  $T$ .

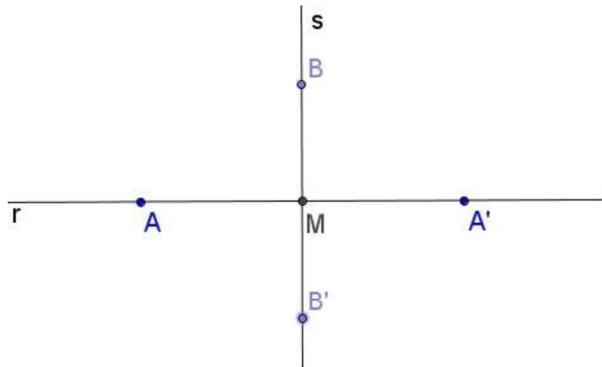


Figura 29 -  $T$  é uma translação ou uma rotação de  $180^\circ$ .

Seja  $B \neq M$  um ponto dessa mediatriz. Há duas possibilidades:  $T(B) = B$  ou  $T(B) = B'$ , ponto simétrico de  $B$  relativamente à reta  $r$ .

Na primeira possibilidade,  $T$  coincide com a reflexão  $R_s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , nos pontos  $A$ ,  $A'$  e  $B$ , logo  $T = R_s$ .

Na segunda possibilidade,  $T$  coincide com a rotação  $\rho_{M,180^\circ}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , isto é, a rotação em torno do ponto  $M$ , com um ângulo de  $180^\circ$ , nos pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $M$ . Logo,  $T = \rho$ . Portanto, neste terceiro caso,  $T$  é uma *translação* ou uma *rotação de  $180^\circ$*  (simetria em torno de um ponto). ■

Com o conhecimento do teorema apresentado, classifica-se qualquer caso de isometria como sendo uma das cinco possibilidades: *identidade*, *reflexão*, *translação*, *rotação* ou *reflexão com deslizamento*.

### 3 SIMULAÇÃO DE ISOMETRIAS NO GEOGEBRA

#### 3.1 GEOGEBRA

O *GeoGebra*<sup>1</sup> é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Disponível em vários idiomas, inclusive em português, para milhões de usuários ao redor do mundo, possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. Por ser feito em *Java*<sup>2</sup> ele é multiplataforma, pode ser executado em diversos sistemas operacionais. Software de código aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais. O GeoGebra tornou-se um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. É ganhador dos prêmios: *Microsoft Partner of the Year Award 2015* (Finalist, Public Sector: Education - Redmond, WA, USA) e *MERLOT Classics Award 2013* (Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching - Las Vegas, Nevada, USA). (GEOGEBRA, 2015a)

O Geogebra foi utilizado neste trabalho para criar um *Objeto de Aprendizagem*<sup>3</sup> (OA) capaz de auxiliar professores e alunos em uma melhor compreensão no estudo das isometrias. Os passos para construção do OA serão descritos na próxima seção.

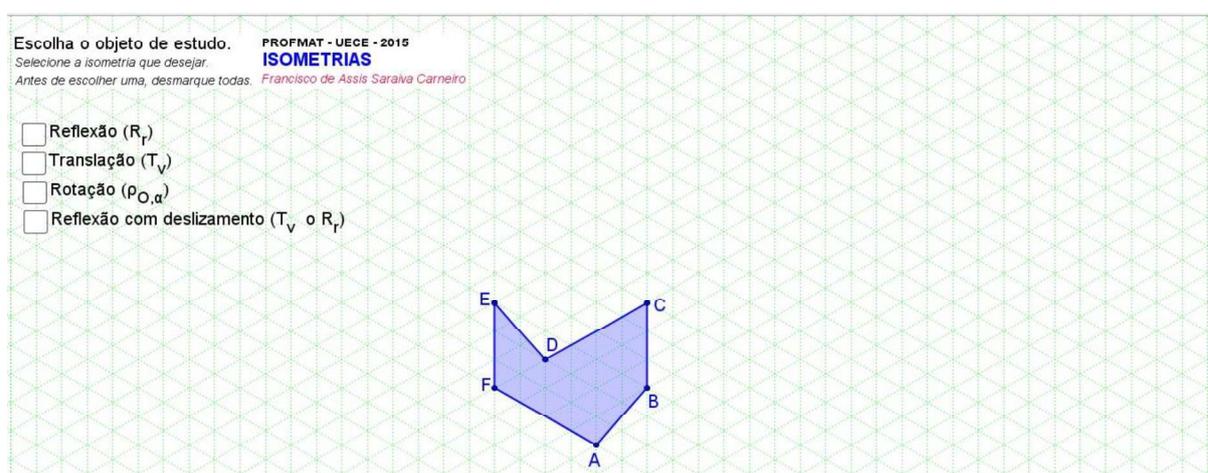


Figura 30 - Tela inicial do Objeto de Aprendizagem construído.

#### 3.2 DETALHES DA CONSTRUÇÃO

Para construir o objeto de aprendizagem foi utilizada a versão 5.0.164.0-3D de 19/10/2015, conforme *Figura 31*.

<sup>1</sup> Site do Geogebra: <http://www.geogebra.org/about>

<sup>2</sup> Java é uma linguagem de programação multiplataforma interpretada orientada a objetos.

<sup>3</sup> OA é qualquer entidade, digital ou não digital, que possa ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o aprendizado suportado por tecnologias.

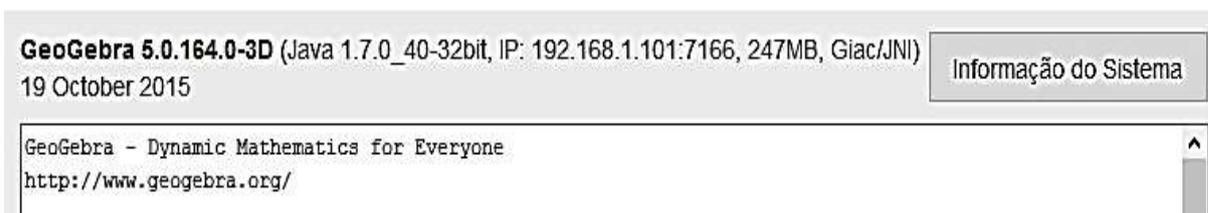


Figura 31 - Tela sobre a versão do GeoGebra utilizado.

Os passos da construção serão descritos tomando-se como referência a tela inicial do software, *Figura 32*, utilizando-se a *Barra de Menus*, a *Barra de Ferramentas* e o *Campo de Entrada* para execução de comandos e inclusão de objetos na composição do aplicativo.

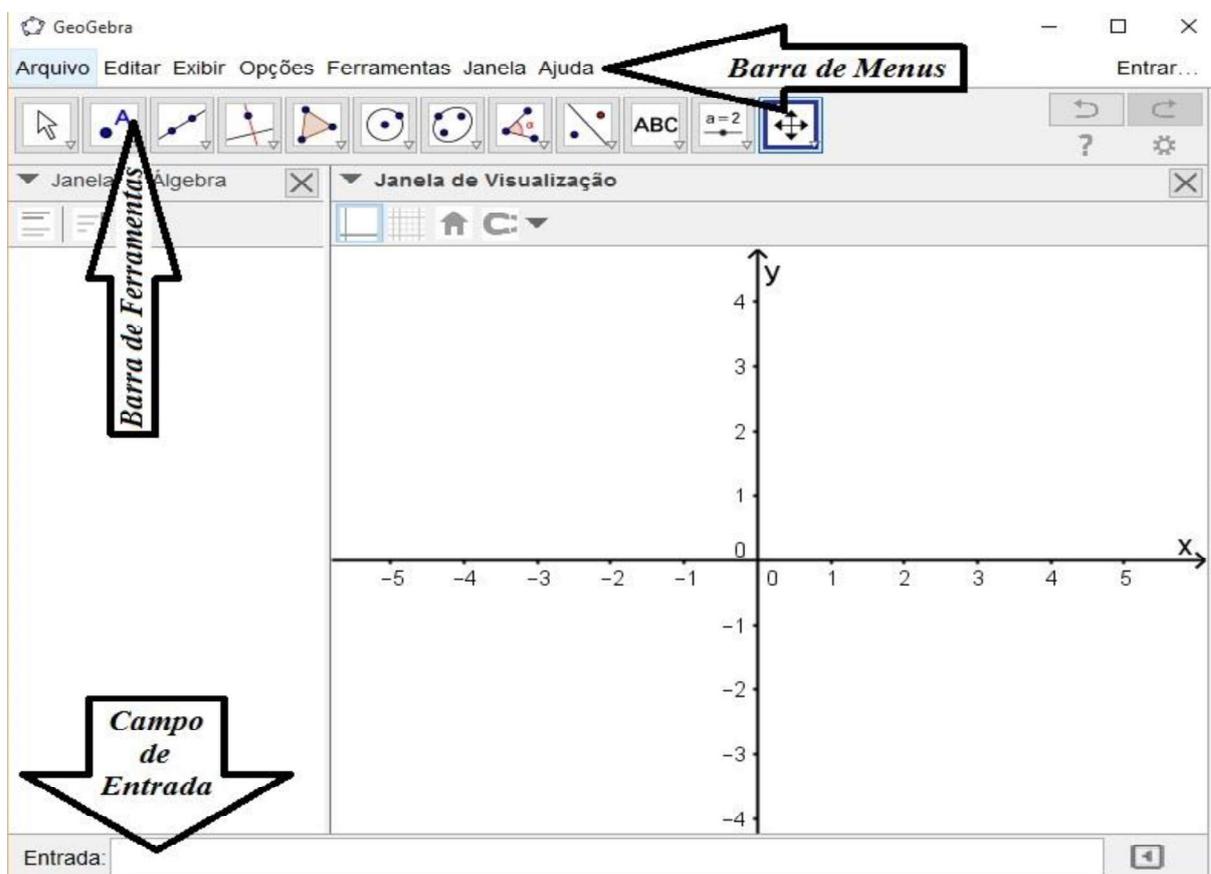


Figura 32 - Tela inicial do Geogebra (versão 5.0)

Para facilitar a visualização dinâmica dos detalhes das propriedades das isometrias, nas quais, sua principal característica no plano é preservar distâncias, foi utilizado um hexágono qualquer, podendo ser côncavo ou convexo, de acordo com a intenção do usuário, sobre o qual serão apresentadas possibilidades de manipulá-lo através de transformações no plano (reflexões, translações, rotações e reflexões com deslizamento).

Com o objetivo de melhor organizar os passos para a construção do aplicativo, o desenvolvimento da ferramenta foi dividido em quatro etapas:

1ª etapa: Construção do Objeto de Aprendizagem para visualização das Reflexões sobre a reta  $r$  no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Observe a *Tabela 1* que contém os comandos e/ou descrições dos passos.

Nº	Nome	Comando / Procedimento	Valor
1.	Texto Orientação1	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Escolha o objeto de estudo.
2.	Texto Orientação2	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Selecione a isometria que desejar. Antes de escolher uma, desmarque todas.
3.	Texto Instituição	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	PROFMAT - UECE - 2015
4.	Texto TítuloTrabalho	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	ISOMETRIAS NO PLANO
5.	Texto Autor	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Francisco de Assis Saraiva Carneiro
6.	Ponto A	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	A
7.	Ponto B	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	B
8.	Ponto C	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	C
9.	Ponto D	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	D
10.	Ponto E	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	E
11.	Ponto F	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	F
12.	Hexágono poll	Na barra de ferramentas clicar no botão  , ou digite no campo de entrada: Polígono[A, B, C, D, E, F]	Hexágono de vértices A, B, C, D, E, F.
12.	Segmento a	Segmento[A, B, poll]	a (ocultar rótulo)
12.	Segmento b	Segmento[B, C, poll]	b (ocultar rótulo)
12.	Segmento c	Segmento[C, D, poll]	c (ocultar rótulo)
12.	Segmento d	Segmento[D, E, poll]	d (ocultar rótulo)
12.	Segmento e	Segmento[E, F, poll]	e (ocultar rótulo)
12.	Segmento f	Segmento[F, A, poll]	f (ocultar rótulo)

13.	Ponto G	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	G (ocultar rótulo)
14.	Ponto H	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	H (ocultar rótulo)
15.	Reta r	Reta[G, H]	R
16.	Ponto A'	Reflexão[A, r]	A'
17.	Ponto B'	Reflexão[B, r]	B'
18.	Ponto C'	Reflexão[C, r]	C'
19.	Ponto D'	Reflexão[D, r]	D'
20.	Ponto E'	Reflexão[E, r]	E'
21.	Ponto F'	Reflexão[F, r]	F'
22.	Hexágono pol1'	Polígono[A', B', C', D', E', F']	Hexágono de vértices A', B', C', D', E', F'.
22.	Segmento a'	Segmento[A', B', pol1']	a' (ocultar rótulo)
22.	Segmento b'	Segmento[B', C', pol1']	b' (ocultar rótulo)
22.	Segmento c'	Segmento[C', D', pol1']	c' (ocultar rótulo)
22.	Segmento d'	Segmento[D', E', pol1']	d' (ocultar rótulo)
22.	Segmento e'	Segmento[E', F', pol1']	e' (ocultar rótulo)
22.	Segmento f'	Segmento[F', A', pol1']	f' (ocultar rótulo)
23.	Segmento a''	Segmento[A, A']	a'' (ocultar rótulo)
24.	Segmento b''	Segmento[B, B']	b'' (ocultar rótulo)
25.	Segmento c''	Segmento[C, C']	c'' (ocultar rótulo)
26.	Segmento d''	Segmento[D, D']	d'' (ocultar rótulo)
27.	Segmento e''	Segmento[E, E']	e'' (ocultar rótulo)
28.	Segmento f''	Segmento[F, F']	f'' (ocultar rótulo)

Tabela 1 - Comandos para construção da Tela das Reflexões. (Elaborada pelo autor)

Após a execução dos comandos descritos na Tabela 1, o resultado será a tela das Reflexões, conforme Figura 33.

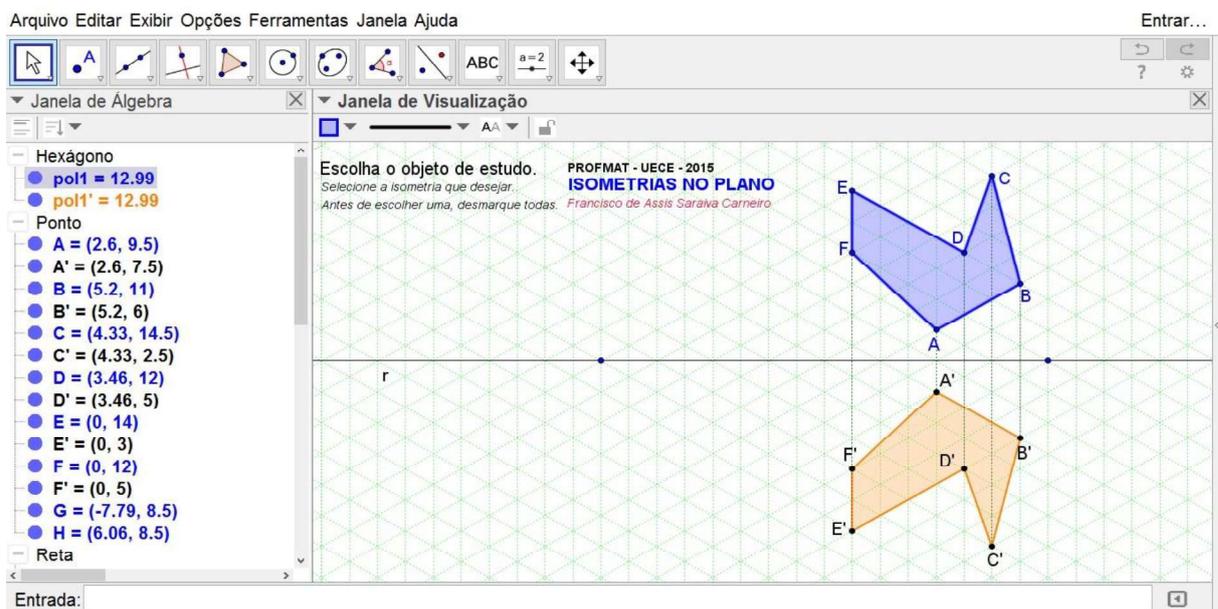


Figura 33 - Tela das Reflexões.

2ª etapa: Construção do Objeto de Aprendizagem para visualização das Translações dadas por um vetor  $v$  no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Observe a *Tabela 2* que contém os comandos e/ou descrições dos passos.

Nº	Nome	Comando / Procedimento	Valor
Observação: os passos de 1 a 14 foram omitidos por serem os mesmos da <i>Tabela 1</i> .			
15.	Vetor $v$	Vetor[G, H]	R
16.	Ponto $A'$	Transladar[A, $v$ ]	$A'$
17.	Ponto $B'$	Transladar[B, $v$ ]	$B'$
18.	Ponto $C'$	Transladar[C, $v$ ]	$C'$
19.	Ponto $D'$	Transladar[D, $v$ ]	$C'$
20.	Ponto $E'$	Transladar[E, $v$ ]	$E'$
21.	Ponto $F'$	Transladar[F, $v$ ]	$F'$
22.	Hexágono pol1'	Polígono[ $A'$ , $B'$ , $C'$ , $D'$ , $E'$ , $F'$ ]	Hexágono de vértices $A'$ , $B'$ , $C'$ , $D'$ , $E'$ , $F'$ .
22.	Segmento $a'$	Segmento[ $A'$ , $B'$ , pol1']	$a'$ (ocultar rótulo)
22.	Segmento $b'$	Segmento[ $B'$ , $C'$ , pol1']	$b'$ (ocultar rótulo)
22.	Segmento $c'$	Segmento[ $C'$ , $D'$ , pol1']	$c'$ (ocultar rótulo)
22.	Segmento $d'$	Segmento[ $D'$ , $E'$ , pol1']	$d'$ (ocultar rótulo)
22.	Segmento $e'$	Segmento[ $E'$ , $F'$ , pol1']	$e'$ (ocultar rótulo)
22.	Segmento $f'$	Segmento[ $F'$ , $A'$ , pol1']	$f'$ (ocultar rótulo)
23.	Segmento $a''$	Segmento[A, $A'$ ]	$a''$ (ocultar rótulo)
24.	Segmento $b''$	Segmento[B, $B'$ ]	$b''$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $c''$	Segmento[C, $C'$ ]	$c''$ (ocultar rótulo)
26.	Segmento $d''$	Segmento[D, $D'$ ]	$d''$ (ocultar rótulo)
27.	Segmento $e''$	Segmento[E, $E'$ ]	$e''$ (ocultar rótulo)
28.	Segmento $f''$	Segmento[F, $F'$ ]	$f''$ (ocultar rótulo)

Tabela 2 - Comandos para construção da Tela das Translações. (Elaborada pelo autor)

Após seguir os passos descritos na *Tabela 2* obtém-se o resultado será semelhante ao da *Figura 34*.

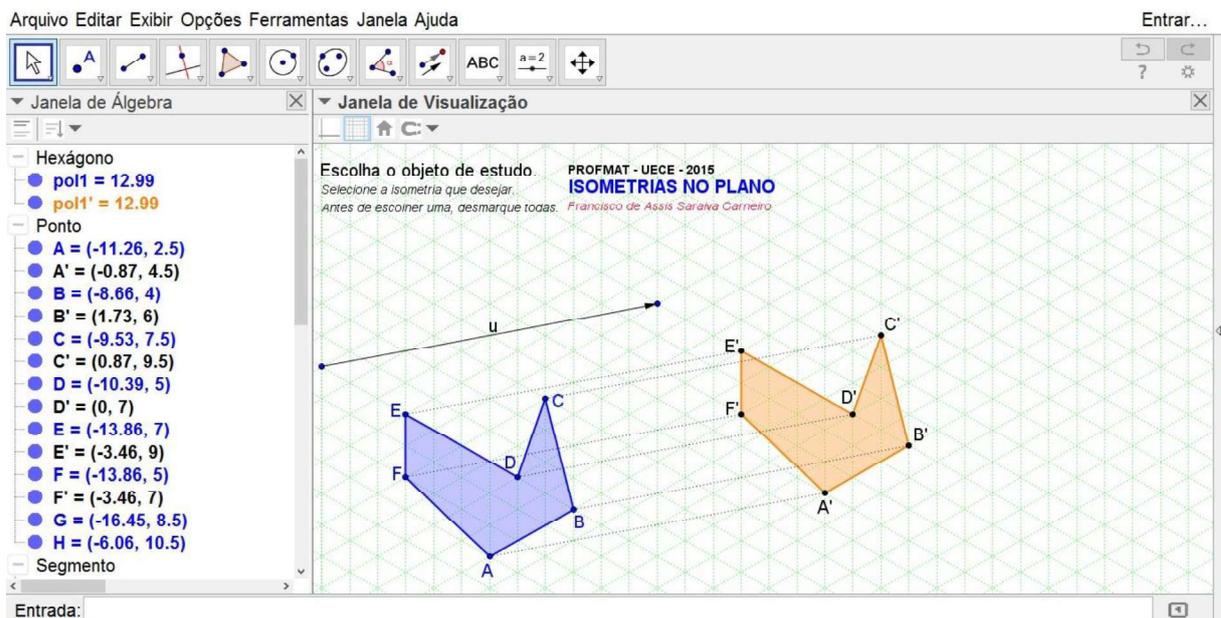


Figura 34 - Tela das Translações.

3ª etapa: Construção da aplicação para simulação das Rotações de ângulo  $\alpha$  no plano  $\mathbb{R}^2$  em torno de um ponto  $O$ .

Observe a *Tabela 3* que contém os comandos e/ou descrições dos passos.

Nº	Nome	Comando / Procedimento	Valor
Observação: os passos de 1 a 12 foram omitidos por serem os mesmos da <i>Tabela 1</i> .			
13.	Ponto $O$	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	$O$
14.	Ângulo $\alpha$	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	$\alpha$ (Controle deslizante)
15.	Ponto $A'$	Na barra de ferramentas clicar no botão  e seguir as instruções ou no Campo de entrada digitar Girar[ $A, \alpha, O$ ]	$A'$
16.	Ponto $B'$	Girar[ $B, \alpha, O$ ]	$B'$
17.	Ponto $C'$	Girar[ $C, \alpha, O$ ]	$C'$
18.	Ponto $D'$	Girar[ $D, \alpha, O$ ]	$C'$
19.	Ponto $E'$	Girar[ $E, \alpha, O$ ]	$E'$
20.	Ponto $F'$	Girar[ $F, \alpha, O$ ]	$F'$
21.	Hexágono $poll'$	Polígono[ $A', B', C', D', E', F'$ ]	Hexágono de vértices $A', B', C', D', E', F'$ .
21.	Segmento $a'$	Segmento[ $A', B', poll'$ ]	$a'$ (ocultar rótulo)
21.	Segmento $b'$	Segmento[ $B', C', poll'$ ]	$b'$ (ocultar rótulo)
21.	Segmento $c'$	Segmento[ $C', D', poll'$ ]	$c'$ (ocultar rótulo)
21.	Segmento $d'$	Segmento[ $D', E', poll'$ ]	$d'$ (ocultar rótulo)
21.	Segmento $e'$	Segmento[ $E', F', poll'$ ]	$e'$ (ocultar rótulo)
21.	Segmento $f'$	Segmento[ $F', A', poll'$ ]	$f'$ (ocultar rótulo)
23.	Segmento $a_1$	Segmento[ $A, O$ ]	$a_1$ (ocultar rótulo)
24.	Segmento $b_1$	Segmento[ $B, O$ ]	$b_1$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $c_1$	Segmento[ $C, O$ ]	$c_1$ (ocultar rótulo)
26.	Segmento $d_1$	Segmento[ $D, O$ ]	$d_1$ (ocultar rótulo)
27.	Segmento $e_1$	Segmento[ $E, O$ ]	$e_1$ (ocultar rótulo)
28.	Segmento $f_1$	Segmento[ $F, O$ ]	$f_1$ (ocultar rótulo)
29.	Segmento $a_1'$	Segmento[ $O, A'$ ]	$a_1'$ (ocultar rótulo)
30.	Segmento $b_1'$	Segmento[ $O, B'$ ]	$b_1'$ (ocultar rótulo)
31.	Segmento $c_1'$	Segmento[ $O, C'$ ]	$c_1'$ (ocultar rótulo)
32.	Segmento $d_1'$	Segmento[ $O, D'$ ]	$d_1'$ (ocultar rótulo)
33.	Segmento $e_1'$	Segmento[ $O, E'$ ]	$e_1'$ (ocultar rótulo)
34.	Segmento $f_1'$	Segmento[ $O, F'$ ]	$f_1'$ (ocultar rótulo)

*Tabela 3 - Comandos para construção da Tela das Rotações. (Elaborada pelo autor)*

Ao concluir os passos descritos na *Tabela 3*, o Geogebra apresentará a tela com o Objeto de Aprendizagem, conforme *Figura 35*, utilizado para simular transformações isométricas no plano caracterizadas por *Rotações* em torno de um ponto  $O$ .

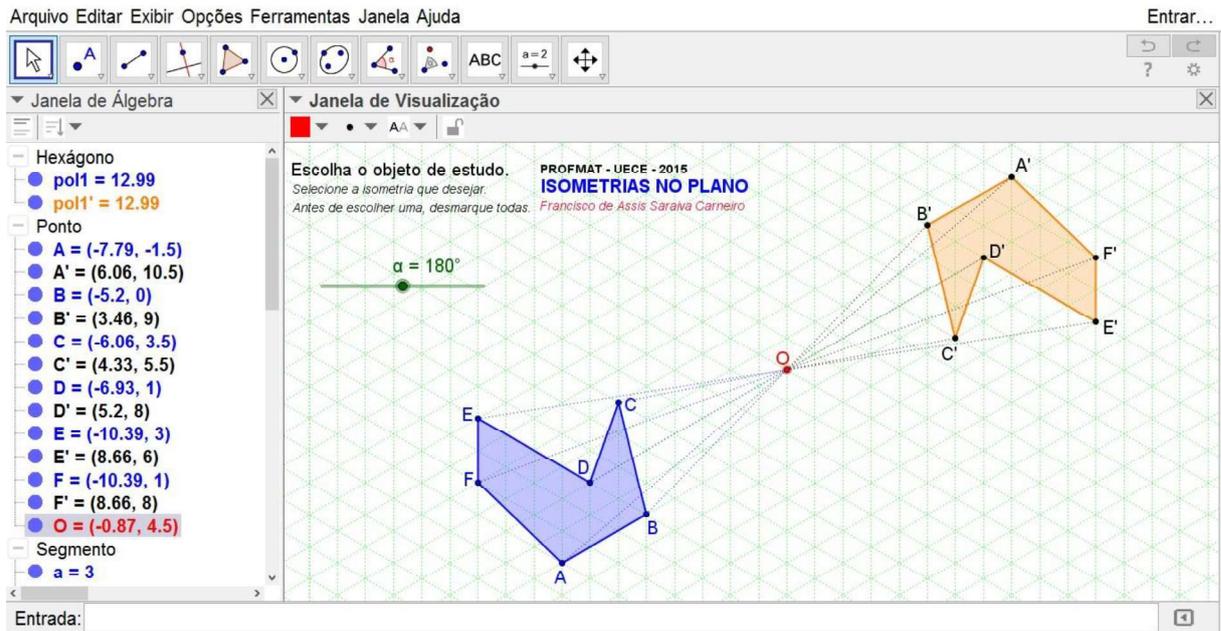


Figura 35 - Tela das Rotações.

4ª etapa: Nesta última etapa a construção necessita de uma reta  $r$  e um vetor  $v$  por se tratar de uma composta de duas transformações no plano  $\mathbb{R}^2$ , isto é, uma *Translação* de uma *Reflexão*.

Observe a *Tabela 4* que contém os comandos e/ou descrições dos passos.

Nº	Nome	Comando / Procedimento	Valor
Observação: os passos de 1 a 14 foram omitidos por serem os mesmos da <i>Tabela 1</i> .			
15.	Reta $r$	Reta[G, H]	$r$
16.	Ponto I	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	I (ocultar rótulo)
17.	Ponto J	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	J (ocultar rótulo)
18.	Vetor $v$	Vetor[I, J]	$v$
19.	Ponto $A_1$	Reflexão[A, $r$ ]	$A_1$
20.	Ponto $B_1$	Reflexão[B, $r$ ]	$B_1$
21.	Ponto $C_1$	Reflexão[C, $r$ ]	$C_1$
22.	Ponto $D_1$	Reflexão[D, $r$ ]	$D_1$
23.	Ponto $E_1$	Reflexão[E, $r$ ]	$E_1$
24.	Ponto $F_1$	Reflexão[F, $r$ ]	$F_1$
25.	Hexágono $poll'$	Polígono[ $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ ]	Hexágono de vértices $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ .
25.	Segmento $a'$	Segmento[ $A_1, B_1, poll'$ ]	$a'$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $b'$	Segmento[ $B_1, C_1, poll'$ ]	$b'$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $c'$	Segmento[ $C_1, D_1, poll'$ ]	$c'$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $d'$	Segmento[ $D_1, E_1, poll'$ ]	$d'$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $e'$	Segmento[ $E_1, F_1, poll'$ ]	$e'$ (ocultar rótulo)
25.	Segmento $f'$	Segmento[ $F_1, A_1, poll'$ ]	$f'$ (ocultar rótulo)
26.	Ponto $A'$	Transladar[ $A_1, v$ ]	$A'$
27.	Ponto $B'$	Transladar[ $B_1, v$ ]	$B'$

28.	Ponto C'	Transladar[C <sub>1</sub> , v]	C'
29.	Ponto D'	Transladar[D <sub>1</sub> , v]	C'
30.	Ponto E'	Transladar[E <sub>1</sub> , v]	E'
31.	Ponto F'	Transladar[F <sub>1</sub> , v]	F'
32.	Hexágono pol1''	Polígono[A', B', C', D', E', F']	Hexágono de vértices A', B', C', D', E', F'.
32.	Segmento a''	Segmento[A', B', pol1'']	a'' (ocultar rótulo)
32.	Segmento b''	Segmento[B', C', pol1'']	b'' (ocultar rótulo)
32.	Segmento c''	Segmento[C', D', pol1'']	c'' (ocultar rótulo)
32.	Segmento d''	Segmento[D', E', pol1'']	d'' (ocultar rótulo)
32.	Segmento e''	Segmento[E', F', pol1'']	e'' (ocultar rótulo)
32.	Segmento f''	Segmento[F', A', pol1'']	f'' (ocultar rótulo)
33.	Segmento a <sub>1</sub>	Segmento[A, A <sub>1</sub> ]	a <sub>1</sub> (ocultar rótulo)
34.	Segmento b <sub>1</sub>	Segmento[B, B <sub>1</sub> ]	b <sub>1</sub> (ocultar rótulo)
35.	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento[C, C <sub>1</sub> ]	c <sub>1</sub> (ocultar rótulo)
36.	Segmento d <sub>1</sub>	Segmento[D, D <sub>1</sub> ]	d <sub>1</sub> (ocultar rótulo)
37.	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento[E, E <sub>1</sub> ]	e <sub>1</sub> (ocultar rótulo)
38.	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento[F, F <sub>1</sub> ]	f <sub>1</sub> (ocultar rótulo)
33.	Segmento a <sub>2</sub>	Segmento[A <sub>1</sub> , A']	a <sub>2</sub> (ocultar rótulo)
34.	Segmento b <sub>2</sub>	Segmento[B <sub>1</sub> , B']	b <sub>2</sub> (ocultar rótulo)
35.	Segmento c <sub>2</sub>	Segmento[C <sub>1</sub> , C']	c <sub>2</sub> (ocultar rótulo)
36.	Segmento d <sub>2</sub>	Segmento[D <sub>1</sub> , D']	d <sub>2</sub> (ocultar rótulo)
37.	Segmento e <sub>2</sub>	Segmento[E <sub>1</sub> , E']	e <sub>2</sub> (ocultar rótulo)
38.	Segmento f <sub>2</sub>	Segmento[F <sub>1</sub> , F']	f <sub>2</sub> (ocultar rótulo)

Tabela 4 - Comandos para construção da Tela das Reflexões com deslizamento. (Elaborada pelo autor)

O resultado destas informações, após introduzidas no Geogebra, será uma visualização de três polígonos, sendo o segundo (é uma sombra na *Figura 36*) uma reflexão do polígono original em torno da reta  $r$ , e o terceiro (de vértices  $A'B'C'D'E'F'$ ) é uma translação sobre o segundo através do vetor  $v$ , isto é, uma composta  $T_v \circ R_r$ .

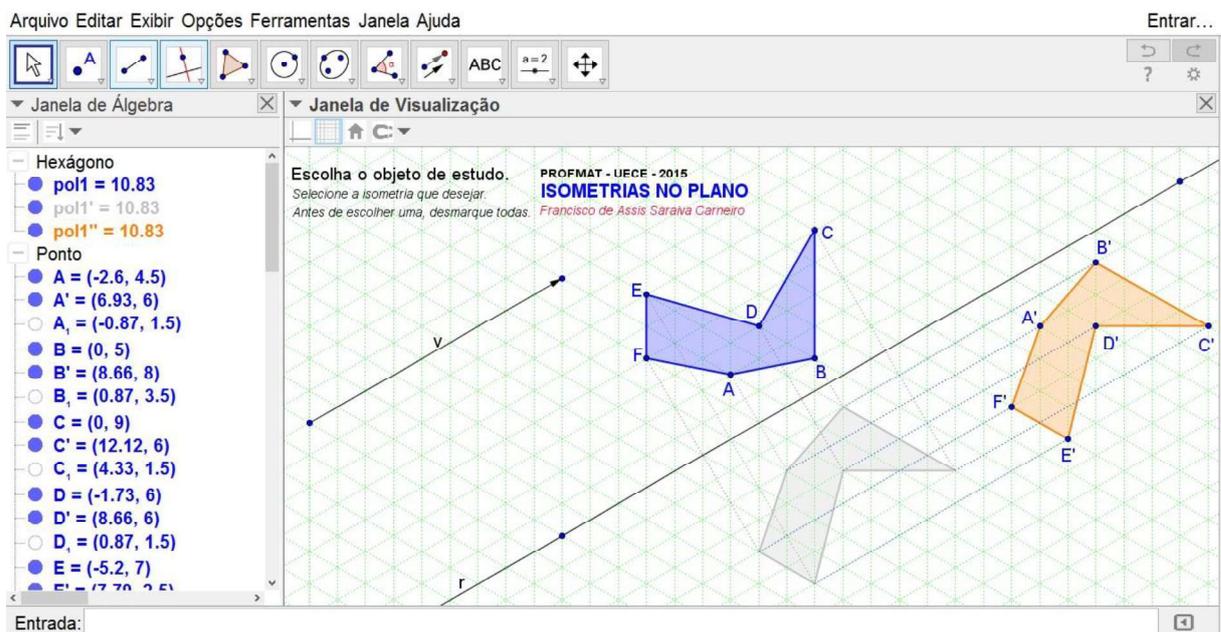


Figura 36 - Tela das Reflexões com deslizamento.

Com a *Tabela 4* conclui-se a construção estrutural do *OA*, ficando a critério do usuário uma personalização da tela de visualização, melhorando a aparência.

O resultado final das quatro etapas foi consolidado em uma única tela, através de caixas de seleção, da barra de ferramentas, para exibir ou esconder os objetos que se desejar. Em seguida foi publicado no portal do Geogebra ([https://tube.geogebra.org/?lang=pt\\_BR](https://tube.geogebra.org/?lang=pt_BR)), de fácil acesso através do link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/1895357>, onde qualquer usuário poderá utilizá-lo.

## 4 HOMOTETIAS

Antes da abordagem detalhada sobre o conceito de *homotetia*, na próxima seção, será apresentado um conteúdo clássico ministrado no colégio aos alunos do ensino básico, semelhança de triângulos. Esse conteúdo será o ponto de referência ao um estudo mais detalhado sobre *semelhança*, ampliado pela sistematização de transformações homotéticas, agregado ao que já foi estudado sobre transformações isométricas no plano  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.1 ELEMENTOS DA SEMELHANÇA

A palavra semelhança é de uso cotidiano e para muitos expressa a ideia de objetos parecidos, cujo critério seja apenas o aspecto visual. Já na Matemática, o conceito de *semelhança* é bem definido através de propriedades e características específicas, sem deixar margens a dúvidas ou falsos conceitos. Nesta perspectiva, serão apresentados alguns elementos que servirão de base para a definição de semelhança e algumas das suas propriedades.

#### 4.1.1 PROPORCIONALIDADE E ALGUMAS PROPRIEDADES

O conceito de proporcionalidade é um dos mais abordados no ensino básico, aproximadamente, desde as séries finais do ensino fundamental atual (6º ao 9º ano) até a série final do ensino médio atual (3º ano). Esse conteúdo é utilizado em várias disciplinas, além da Matemática, como ferramenta na explicação de vários conteúdos como densidade demográfica (Geografia) e escalas termométricas (Física); ainda em diversas situações do cotidiano como dosagem de um medicamento (Medicina) e receita de um bolo (Culinária). Apesar disso, ainda há algumas confusões em torno deste assunto. Assim, contribuindo para o seu uso adequado, será apresentada uma definição bem clara deste conceito.

Na página 142 do seu livro *Meu professor de Matemática e outras histórias*, LIMA utiliza-se da seguinte definição:

**Definição 4.1.1.1:** “Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. (...) No primeiro caso a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. ”

**Proposição: 4.1.1.2:** Se  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$  para todo  $x > 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$  para todo número racional  $r = \frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$ .

**Prova:** Pela hipótese, tem-se que

$$q \cdot f(r \cdot x) = f(q \cdot r \cdot x) = f\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x\right) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x).$$

$$\text{Assim, } f(r \cdot x) = \frac{p \cdot f(x)}{q} = \frac{p}{q} f(x) = r \cdot f(x). \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.1.1.3:** Proporcionalidade direta. Sejam  $x$  e  $y$  duas grandezas, tais que  $y$  é função de  $x$ , isto é,  $y = f(x)$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja,  $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii$ :

- i)  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ ;
- ii) para todo número real  $c > 0$ , tem-se  $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ ;
- iii) existe um número  $k$ , chamado constante de proporcionalidade entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = k \cdot x$  para todo  $x$ .

**Prova:** Esta prova será desenvolvida na seguinte ordem  $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow i$ .

Para mostrar que  $i \Rightarrow ii$ , supõe-se, por absurdo, que  $y = f(x)$  seja diretamente proporcional a  $x$ , mas que se consiga um número real  $c$ , tal que  $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$ . Sem perda de generalidade, seja  $f(c \cdot x) < c \cdot f(x) \Rightarrow \frac{f(cx)}{f(x)} < c$ . Como entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional, pode-se achar um número racional  $r$ , de modo que  $\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c$  implicando que  $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$ . Pela *Proposição: 4.1.1.2*, pode-se reescrever esta desigualdade da seguinte forma  $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$ . Tomando a desigualdade  $f(cx) < f(rx)$  e a informação anterior  $r < c$ , chega-se numa contradição da hipótese de  $y$  ser diretamente proporcional a  $x$ .

Da mesma forma se mostra a invalidade das desigualdades  $f(cx) < c \cdot f(x)$  e  $f(cx) > c \cdot f(x)$ . Portanto,  $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ , mostrando que  $i \Rightarrow ii$ .

Para mostrar que  $ii \Rightarrow iii$ , sem perda de generalidade, seja  $k > 0$ , calcula-se  $f(1)$ . Assim,  $f(1) = k \cdot 1 = k$ . Considerando (ii), tem-se  $f(c \cdot 1) = c \cdot f(1)$ , e fazendo  $c = x$  o resultado será  $f(x \cdot 1) = x \cdot k \Rightarrow f(x) = xk \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = k$ , concluindo que  $ii \Rightarrow iii$ .

A etapa final é mostrar que  $iii \Rightarrow i$ . Utilizando a informação anterior  $k > 0$ , isto é, serão tratadas grandezas cujas medidas são positivas, então  $k = f(1) > 0$ , tal que  $x < x' \Rightarrow k \cdot x < k \cdot x'$ , isto é,  $f(x) < f(x')$ . E ainda,  $f(n \cdot x) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$ . Portanto,  $f(x)$  é uma função crescente, conseqüentemente  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ .  $\blacksquare$

Para o estudo das semelhanças matemáticas, em particular o estudo das homotetias, o conceito de proporcionalidade direta é suficiente. Caso seja necessário o uso de proporcionalidades inversas, isto é,  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ , basta lembrar que equivale dizer que  $y$  é diretamente proporcional a  $\frac{1}{x}$ .

Uma das aplicações imediatas das proporcionalidades é o Teorema de Tales que será visto da próxima seção.

#### 4.1.2 TEOREMA DE THALES

Devido ao grande uso do Teorema de Tales, apenas será definido. Seu enunciado é bem claro: Se duas ou mais retas paralelas são cortadas por duas retas transversais os segmentos determinados pelas intersecções formam uma proporção. Outros enunciados são conhecidos, como o apresentado por MUNIZ NETO (2013, p. 141):

**Teorema 4.1.2.1 (Thales):** *Sejam  $r, s, t$  retas paralelas. Escolhemos pontos  $A, A' \in r, B, B' \in s$  e  $C, C' \in t$ , de modo que  $A, B, C$  e  $A', B', C'$  sejam dois ternos de pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Este teorema será necessário para as demonstrações dos casos de semelhança de triângulos apresentados a seguir.

#### 4.1.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são ditos *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes estejam em uma proporção.

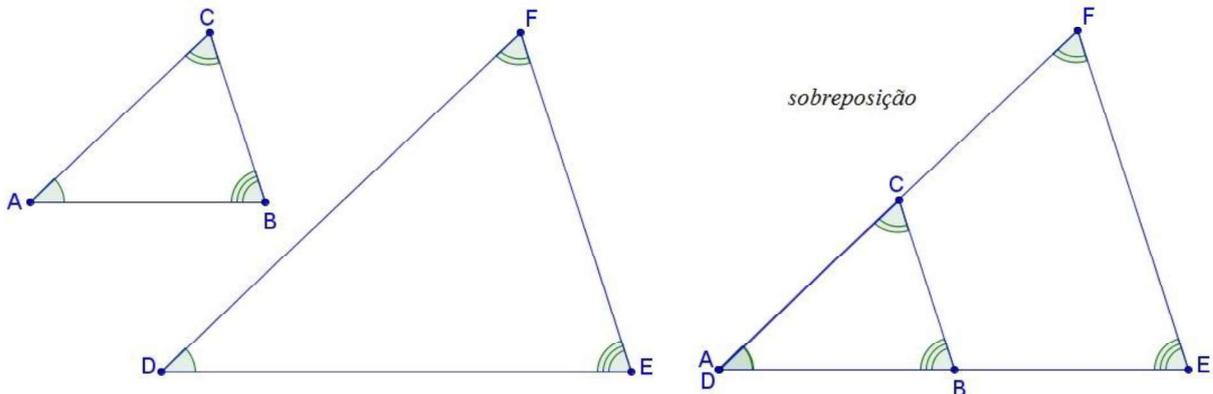
Em outras palavras, dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ , então os dois triângulos são semelhantes, denotando-se por  $ABC \sim DEF$ . E o quociente entre as medidas dos lados correspondentes é chamado *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

A seguir, serão apresentados três casos de semelhança de triângulos em forma de proposições com suas respectivas provas.

**Proposição 4.1.3.1 (caso AA):** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}$ , então  $ABC \sim DEF$ .*

**Prova:** Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$  e  $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$ , mas  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ , então  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{F}$ , implicando  $\hat{C} = \hat{F}$ .

Sem perda de generalidade, supondo que a área do triângulo  $ABC$  seja menor que a área do triângulo  $DEF$  e sobrepondo os triângulos de forma que o vértice  $A$  coincida com o vértice  $D$ , conforme *Figura 37*.

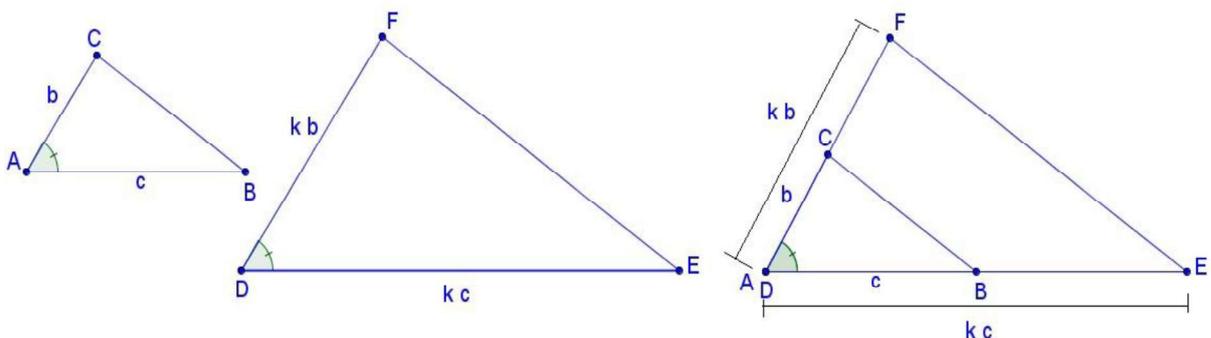


*Figura 37 - Semelhança de triângulos (caso AA).*

Observe que os ângulos  $\hat{A}CB$  e  $\hat{A}FE$  são congruentes, conseqüentemente os segmentos  $BC$  e  $EF$  são paralelos, recaindo no Teorema de Tales, tal que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ . Alterando a sobreposição para que os vértices  $B$  e  $E$  coincidam implicará  $AC$  paralelo a  $DF$ , tem-se novamente a aplicação do *Teorema 4.1.2.1*, conseqüentemente  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ . Assim, por transitividade,  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$  finalizando o que se queria demonstrar. ■

**Proposição 4.1.3.2 (caso LAL):** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ , então  $ABC \sim DEF$ .

**Prova:** Sem perda de generalidade, supondo que a área do triângulo  $ABC$  seja menor que a área do triângulo  $DEF$  e sobrepondo os triângulos de forma que o vértice  $A$  coincida com o vértice  $D$ . Sendo  $\hat{A} = \hat{D}$ , garante-se que os vértices  $B$  e  $C$  estão, respectivamente, sobre os lados  $DE$  e  $DF$  do triângulo  $DEF$ . Confira exemplo na *Figura 38*.



*Figura 38 - Semelhança de triângulos (caso LAL).*

Por hipótese, tem-se que  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ . Reescrevendo a proporção, fica  $\frac{k \cdot c}{c} = \frac{k \cdot b}{b} = k$ , conseqüentemente, pelo Teorema de Thales, os segmentos  $BC$  e  $EF$  estão paralelos, implicando que os ângulos  $\hat{ACB}$  e  $\hat{AFE}$  são congruentes, recaindo na *Proposição 4.1.3.1 (caso AA)*. Portanto,  $ABC \sim DEF$ . ■

**Proposição 4.1.3.3 (caso LLL):** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ , então  $ABC \sim DEF$ .

**Prova:** Construindo o triângulo  $GHI$  de modo que  $\hat{G} = \hat{A}$ ,  $\overline{GH} = \overline{DE}$  e  $\overline{GI} = \overline{DF}$  e comparando os triângulos  $ABC$  e  $GHI$ , tem-se, pelo caso *LAL*,  $ABC \sim GHI$ . Assim, conforme ilustração da *Figura 39*,  $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HI}}$ , implicando  $\overline{HI} = \overline{EF} = k \cdot a$ .

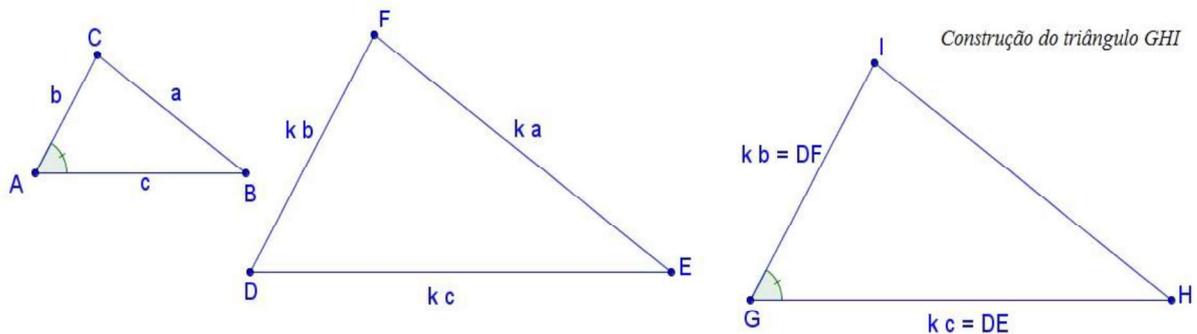


Figura 39 - Semelhança de triângulos (caso LLL).

Portanto, os triângulos  $GHI$  e  $DEF$  são congruentes, valendo a seguinte transitividade  $ABC \sim GHI \cong DEF \Rightarrow ABC \sim DEF$ . ■

## 4.2 HOMOTETIAS E ALGUMAS PROPRIEDADES

Ampliando conceitos de semelhança, esta seção destaca o detalhamento das homotetias como parte importante no estudo de semelhança. Serão apresentadas a definição e algumas de suas propriedades, conseqüências da definição.

### 4.2.1 DEFINIÇÃO

**Definição 4.2.1.1:** Dados um ponto  $O$  e um número real  $k$ , chama-se homotetia de centro  $O$  e razão  $k$ , e escreve-se  $H_{(O,k)}$ , à transformação geométrica no plano  $H_{(O,k)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que faz corresponder a cada ponto  $P$  um ponto  $P'$  tal que  $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ . Observe ilustração abaixo.

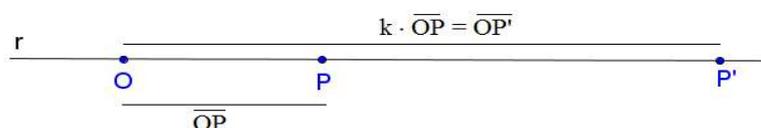


Figura 40 - Definição de homotetia.

#### 4.2.2 PROPRIEDADES

**Proposição 4.2.2.1:** A imagem de uma homotetia do centro  $O$  é o próprio  $O$ , então  $k = 0$ .

**Prova:** De fato  $H_{(O,k)}(O) = O'$ , com  $\overline{OO'} = 0$ , consequentemente  $k = 0$ . ■

**Proposição 4.2.2.2 (Paralelismo):** Em uma homotetia  $H_{(O,k)}$ , o transformado de um segmento orientado é um segmento orientado paralelo e de mesmo sentido (se  $k > 0$ ) ou de sentido contrário (se  $k < 0$ ), tal que a razão entre os dois é igual ao módulo da razão da homotetia.

Em outras palavras  $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'} = \overline{H_{(O,k)}(P)H_{(O,k)}(Q)}$ , tal que  $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = |k|$ , considerando  $\overline{P'Q'} > \overline{PQ}$ , sem perda de generalidade.

**Prova:** Seja a homotetia  $H_{(O,k)}$ , de modo que  $H_{(O,k)}(P) = P'$  e  $H_{(O,k)}(Q) = Q'$ . Pela definição, os segmentos  $OP$ ,  $OP'$ ,  $OQ$  e  $OQ'$  estão em uma proporção, isto é  $\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ}$ , então os triângulos  $OPQ$  e  $OP'Q'$  são semelhantes, pelo caso *LAL*, consequentemente  $\overline{P'Q'} = k \cdot \overline{PQ}$ , recaindo no *Teorema de Thales*. Portanto, os segmentos  $\overline{P'Q'}$  e  $\overline{PQ}$  são paralelos e de mesma orientação com razão igual a  $|k|$ . Veja *Figura 41*. ■

**Proposição 4.2.2.3 (Colinearidade):** Dada uma homotetia de centro  $O$  que transforma  $P$  em  $P'$ , então os pontos  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares, para todo  $P$ .

**Prova:** Seja a homotetia  $H_{(O,k)}$ , de modo que  $H_{(O,k)}(P) = P'$  e  $H_{(O,k)}(Q) = Q'$ . Pela proposição do *Paralelismo*, os triângulos  $OPQ$  e  $O'P'Q'$  são semelhantes pelo caso *LAL*. Assim,  $\widehat{POQ} = \widehat{P'O'Q'}$  e  $\widehat{OQP} = \widehat{O'Q'P'}$ , de modo que a única localização possível para o ponto  $Q'$  é sobre a reta  $\overline{OQ}$ , do contrário os segmentos  $P'Q'$  e  $PQ$  não seriam paralelos.

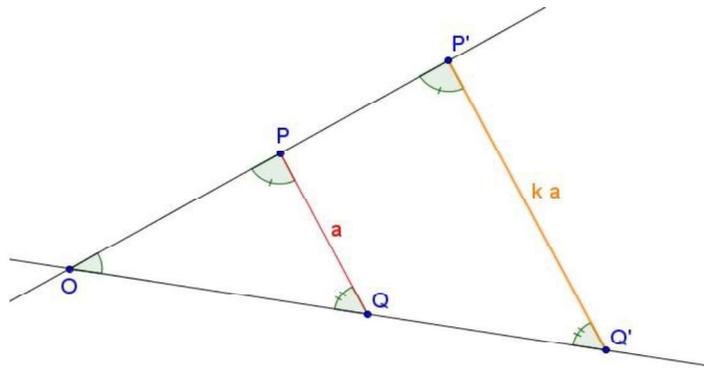


Figura 41 - Em uma homotetia os pontos de  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares.

Portanto os pontos  $O$ ,  $Q$  e  $Q'$  são colineares. Analogamente, os pontos  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares, como se queria demonstrar. ■

**Proposição 4.2.2.4 (Concorrência):** Em uma homotetia, o centro  $O$  da homotetia pertence a todas as retas que ligam pontos a seus transformados. Em outras palavras,  $O$  é o ponto de concorrência das retas do tipo  $\overleftrightarrow{PP'}$ .

**Prova:** Seja a homotetia  $H_{(O,k)}$ , de modo que  $H_{(O,k)}(P) = P'$ . Pela proposição da *Colinearidade*, os pontos  $O$ ,  $P$  e  $P'$  estão sobre a mesma reta. Portanto, todas as retas do tipo  $\overleftrightarrow{PP'}$  concorrem em um único ponto  $O$ . ■

**Proposição 4.2.2.5:** Em uma homotetia, dados um ponto  $P$ , seu transformado  $P'$  e o centro  $O$ , então é possível determinar a razão  $k$  da homotetia.

**Prova:** Dados  $d(O, P') = \overline{OP'}$  e  $d(O, P) = \overline{OP}$ , então por consequência da definição,  $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$  é a razão de homotetia  $k$ . De fato, sem perda de generalidade, considerando  $O = (0,0)$  e  $P = (a, 0)$ , isto é, o segmento  $OP$  sobre o eixo das abscissas, então  $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{k \cdot a}{a} = k$ . ■

**Proposição 4.2.2.6:** Dados um ponto  $P$ , o seu transformado  $P'$  e a razão  $k$  da homotetia, então é possível determinar o centro  $O$  da homotetia.

**Prova:** Sejam  $O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x, y)$  e  $P' = (x', y')$ . Tome dois pontos  $A$  e  $B$  de modo que a reta  $\overline{OB}$  seja paralela ao eixo  $Ox$  e os pontos  $O, A, B$  sejam colineares. Pela semelhança de triângulos (caso AA), os triângulos  $OPA$  e  $OP'B$  são semelhantes com razão de semelhança  $k$ .

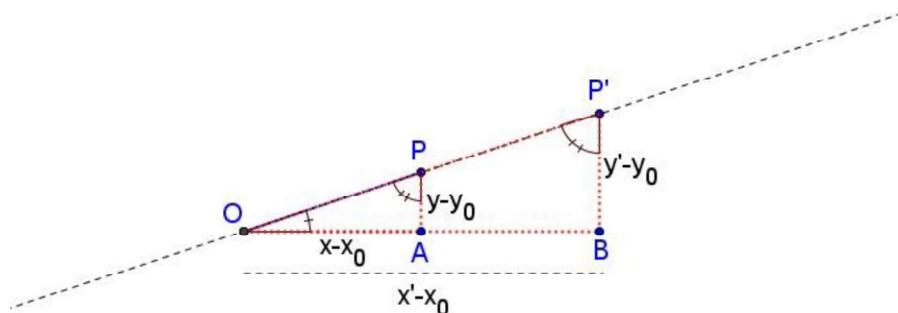


Figura 42 - Determinação do centro da homotetia.

Sabendo que  $k = \frac{x'-x_0}{x-x_0}$  e desenvolvendo a expressão, tem-se  $k(x-x_0) = x'-x_0$ , implicando  $x_0 = \frac{kx-x'}{k-1}$ . De modo análogo,  $y_0 = \frac{ky-y'}{k-1}$ .

Assim, as coordenadas do centro  $O = \left(\frac{kx-x'}{k-1}, \frac{ky-y'}{k-1}\right)$  são determinadas em função das coordenadas dos pontos  $P$  e  $P'$  e da razão homotética  $k$ . ■

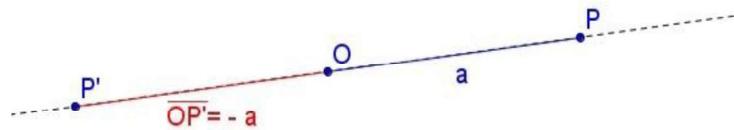
**Proposição 4.2.2.7:** Uma homotetia de razão  $k = 1$  é a identidade.

**Prova:** Dada homotetia  $H_{(O,k)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e um ponto  $P$ , tal que  $H_{(O,k)}(P) = P'$ , onde  $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = k$ .

Sendo  $k = 1$ , tem-se  $OP = OP'$ . Logo,  $P' = H_{(O,k)}(P) = P$ . ■

**Proposição 4.2.2.8:** Uma homotetia de razão  $k = -1$  é a simetria em torno do centro  $O$ .

**Prova:** Os pontos  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares. Seja  $d(O, P) = a$ , tal que  $a \cdot k = d(O, P')$ , conforme *Figura 43*.

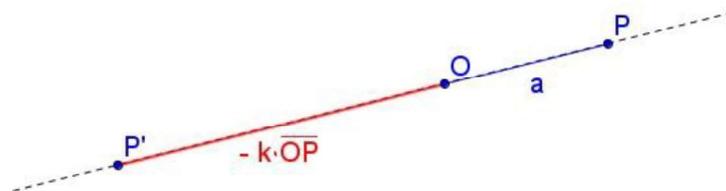


*Figura 43 - O é o centro de simetria de uma homotetia de razão  $k = -1$ .*

Dado  $k = -1$ , tem-se  $d(O, P') = -a$ , concluindo que os segmentos  $OP$  e  $OP'$  são simétricos, tal que  $O$  é ponto médio de  $PP'$ , conseqüentemente, o centro da simetria na reta  $\overleftrightarrow{PP'}$ . ■

**Proposição 4.2.2.9:** A aplicação inversa da homotetia  $H_{(O,k)}$  é a homotetia  $H_{(O,-k)}$ .

**Prova:** Pela *Proposição 4.2.2.6*, quando  $k = -1$  a imagem  $P'$  será projetada do outro lado de  $P$ . Então, para  $k < 0$ ,  $|k| = 1 \Rightarrow k = -1$ . Assim,  $k < 0 \Rightarrow k = -|k|$ . ■



*Figura 44 - Homotetia inversa.*

Na seção 4.2.4 será detalhado o estudo sobre as homotetias inversas, ou negativas.

Sobre as homotetias de razão  $k = 0$  há pouco a se detalhar. Assim, nas próximas seções serão abordadas as homotetias de razão  $k \neq 0$ . Para estes casos será convencionado um valor relativo para  $k$  em relação aos segmentos orientados de origem na extremidade centro  $O$ . Se o segmento  $OP'$  for do mesmo sentido de  $OP$ , então  $k$  é *positivo*, caso contrário  $k$  é *negativo*. Assim, a homotetia será direta para  $k > 0$  e inversa para  $k < 0$ .

### 4.2.3 HOMOTETIA DIRETA (POSITIVA)

Estudando as homotetias de razão  $k > 0$ , chamadas de homotetias diretas (ou positivas), serão observados três casos possíveis:

**Proposição 4.2.3.1. (1º caso:  $k = 1$ )** Uma homotetia de razão  $k$  igual a 1 é a identidade.

A prova para esta proposição já foi apresentada na Proposição 4.2.2.7.

**Proposição 4.2.3.2. (2º caso:  $k > 1$ )** A imagem obtida por uma transformação homotética no plano  $\mathbb{R}^2$  de razão maior do que a unidade é uma ampliação direta da figura original na proporção  $k$ .

**Prova:** Sejam os pontos  $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{PQ} = d$  e a homotetia  $H_{(O,k)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $H_{(O,k)}(P) = P'$ , onde  $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k$ . Assim, a imagem  $\overline{P'Q'} = k \cdot d$ , conforme exemplificado na Figura 45.

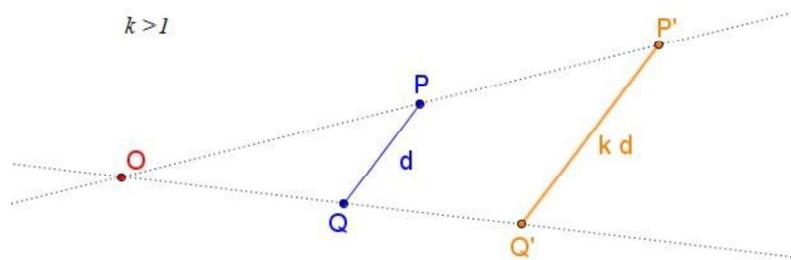


Figura 45 - Ampliação direta. ( $k > 1$ )

Portanto o segmento  $P'Q'$  é uma ampliação positiva do segmento  $PQ$ , na proporção  $k > 1$ . ■

**Proposição 4.2.3.3. (3º caso:  $0 < k < 1$ )** A imagem obtida por uma transformação homotética no plano  $\mathbb{R}^2$  de razão entre 0 e 1 é uma redução direta da figura original na proporção  $\frac{1}{k}$ .

**Prova:** Sejam os pontos  $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{PQ} = d$  e a homotetia  $H_{(O,k)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $H_{(O,k)}(P) = P'$ , onde  $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{k}$ . Assim, a imagem  $\overline{P'Q'} = \frac{\overline{PQ}}{k} = \frac{d}{k}$ .

Veja exemplo na Figura 46, próxima página.

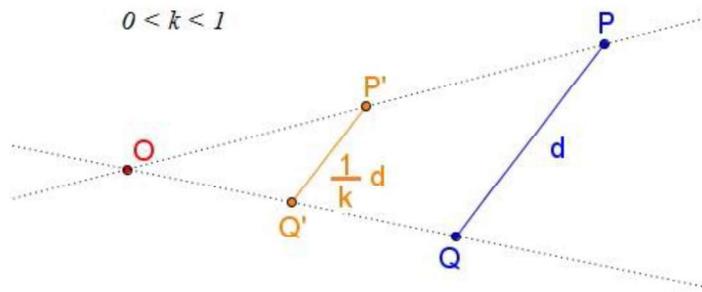


Figura 46 - Redução direta. ( $0 < k < 1$ )

Portanto o segmento  $P'Q'$  é uma redução positiva do segmento  $PQ$ , na proporção  $\frac{1}{k} > 0$ . ■

#### 4.2.4 HOMOTETIA INVERSA (NEGATIVA)

O estudo das homotetias de razão  $k < 0$ , chamadas de homotetias inversas (ou negativas), é análogo ao das homotetias diretas, em que são observadas em três casos possíveis.

**Proposição 4.2.4.1. (1º caso:  $k = -1$ )** Uma homotetia de razão  $k$  igual a  $-1$  é uma simetria de centro  $O$ .

A prova para esta proposição já foi apresentada na Proposição 4.2.2.8.

**Proposição 4.2.4.2. (2º caso:  $k < -1$ )** A imagem obtida por uma transformação homotética no plano  $\mathbb{R}^2$  de razão menor do que  $-1$  é uma ampliação inversa (ou negativa) da figura original na proporção  $|k| > 1$ .

**Prova:** Sejam os pontos  $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{PQ} = d$  e a homotetia  $H_{(O,k)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $H_{(O,k)}(P) = P'$ , onde  $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = |k|$ . Assim, a imagem  $\overline{P'Q'} = |k| \cdot d$ . Veja Figura 47.

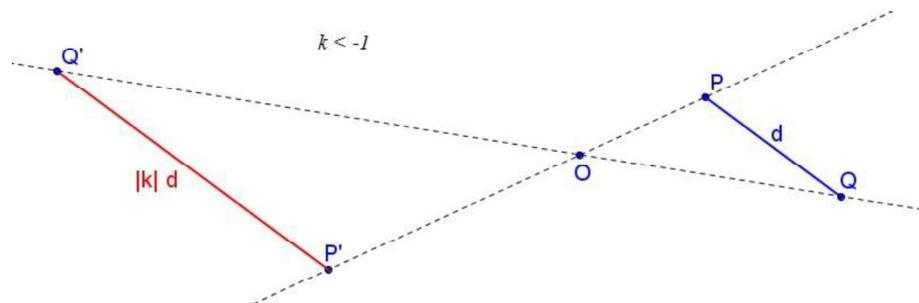


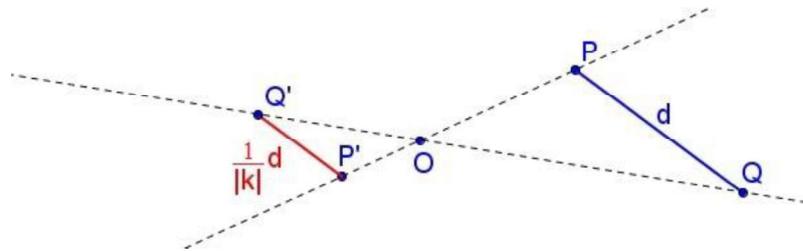
Figura 47 - Ampliação inversa. ( $k < -1$ )

Sendo  $k < -1 \Rightarrow |k| > 1$ , então  $\overline{P'Q'} > \overline{PQ}$ . Logo  $P'Q'$  é uma ampliação de  $PQ$  com  $k < 0$ . Portanto, o segmento  $P'Q'$  é uma ampliação inversa (ou negativa) do segmento  $PQ$ , na proporção  $|k| > 1$ . ■

**Proposição 4.2.4.3. (3º caso:  $-1 < k < 0$ )** A imagem obtida por uma transformação homotética no plano  $\mathbb{R}^2$  de razão entre 0 e 1 é uma redução direta da figura original na proporção  $\frac{1}{|k|} < 1$ .

**Prova:** Sejam os pontos  $P, Q \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{PQ} = d$  e a homotetia  $H_{(O,k)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $H_{(O,k)}(P) = P'$ , onde  $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{|k|}$ . Assim, a imagem  $\overline{P'Q'} \cdot |k| = \overline{PQ}$ .

Observe exemplo na *Figura 48*.



*Figura 48 - Redução inversa (ou negativa). ( $-1 < k < 0$ )*

Sendo  $-1 < k < 0 \Rightarrow 0 < |k| < 1$ , então  $\overline{P'Q'} < \overline{PQ}$ . Logo  $P'Q'$  é uma redução de  $PQ$  com  $k < 0$ . Portanto, o segmento  $P'Q'$  é uma redução inversa (ou negativa) do segmento  $PQ$ , na proporção  $\frac{1}{|k|} < 1$ . ■

### 4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE AS HOMOTETIAS

Após a apresentação dos elementos da semelhança, iniciando na proporcionalidade, passando pelo Teorema de Tales e os casos de semelhança de triângulos, até as propriedades e os tipos de homotetias, tem-se argumentos conclusivos de que a homotetia garante a preservação da razão de semelhança em qualquer polígono gerado por uma transformação homotética.

Portanto, somente através de homotetias, isometrias ou da composta de duas ou mais destas haverá semelhança entre figuras planas.

## 5 SIMULAÇÃO DE HOMOTETIAS NO GEOGEBRA

No capítulo 3, especificamente na seção 3.1, foi apresentado o software *Geogebra* utilizado, seção 3.2, na construção do Objeto de Aprendizagem (*OA*) para as simulações interativas dos conceitos de *isometrias*. Na próxima seção, 5.1, serão detalhados os passos para construção de um novo *OA*, este com o objetivo de ser um instrumento facilitador ao estudo das *homotetias*. Neste *OA*, através de simulações interativas, o usuário poderá ter contato dinâmico com as homotetias apresentadas.

Ao final do processo de construção o resultado esperado será a tela apresentada na *Figura 49*, abaixo:

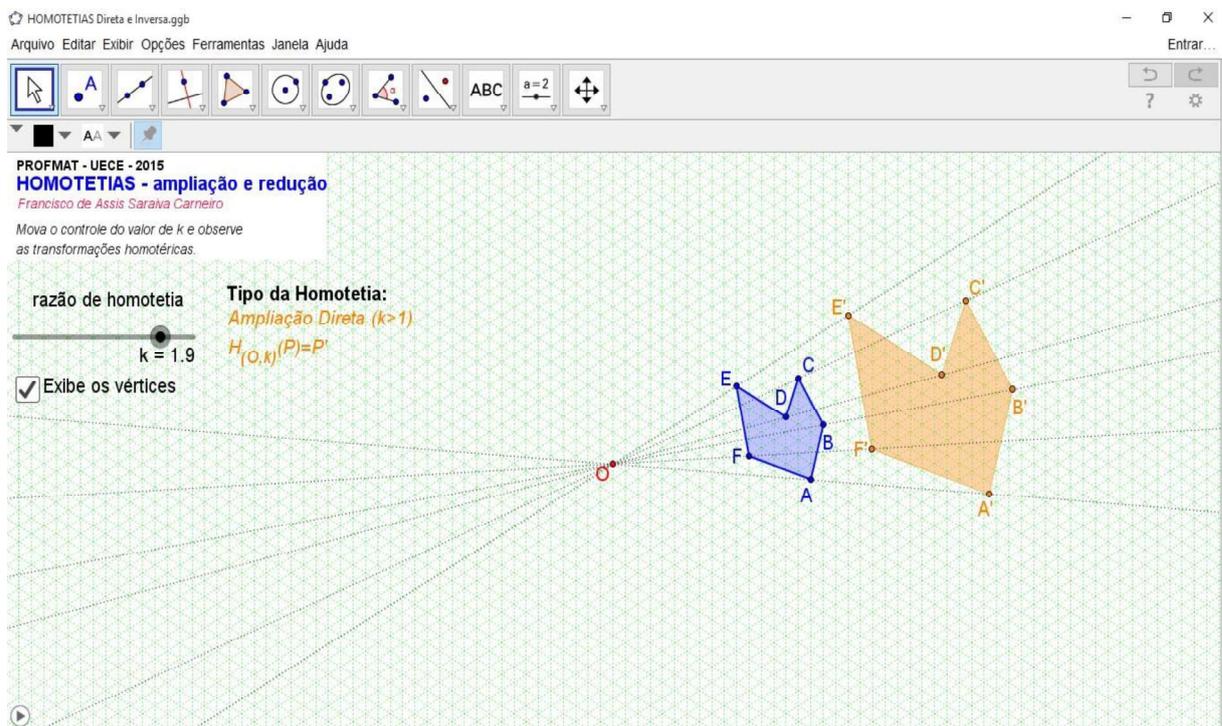


Figura 49 - Tela das Homotetias no Geogebra.

### 5.1 DETALHES DA CONSTRUÇÃO

A versão do Geogebra utilizada nesse processo já foi apresentada na *Figura 31*, seção 3.2, bem com o seu layout na *Figura 32*. A seguir será apresentada a *Tabela 5* que organiza a sequência dos comandos utilizados.

Para facilitar a visualização dinâmica dos detalhes nas propriedades homotéticas, em que, sua principal característica no plano é a proporcionalidade das distâncias, foi utilizado um hexágono qualquer, podendo ser côncavo ou convexo, de acordo com a intenção do usuário, sobre o qual serão apresentadas possibilidades de manipula-lo através de transformações no

plano (ampliação direta, redução direta, identidade, redução inversa, ampliação inversa, simetria em torno de um ponto e homotetia do centro).

Observe a *Tabela 5* que contém os comandos e/ou descrições dos passos.

Nº	Nome	Comando / Procedimento	Valor
1.	Texto Instituição	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	PROFMAT - UECE - 2015
2.	Texto Título Trabalho	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	HOMOTETIAS - ampliação e redução
3.	Texto Autor	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Francisco de Assis Saraiva Carneiro
4.	Texto Observação1	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Mova o controle do valor de k e observe as transformações homotéticas.
5.	Texto Razão	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Razão de homotetia
6.	Ponto A	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	A
7.	Ponto B	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	B
8.	Ponto C	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	C
9.	Ponto D	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	D
10.	Ponto E	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	E
11.	Ponto F	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	F
12.	Hexágono poll	Na barra de ferramentas clicar no botão  , ou digite no campo de entrada: Polígono[A, B, C, D, E, F]	Hexágono de vértices A, B, C, D, E, F.
12.	Segmento a	Segmento[A, B, poll]	a (ocultar rótulo)
12.	Segmento b	Segmento[B, C, poll]	b (ocultar rótulo)
12.	Segmento c	Segmento[C, D, poll]	c (ocultar rótulo)
12.	Segmento d	Segmento[D, E, poll]	d (ocultar rótulo)
12.	Segmento e	Segmento[E, F, poll]	e (ocultar rótulo)
12.	Segmento f	Segmento[F, A, poll]	f (ocultar rótulo)
13.	Ponto O	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	O (centro das homotetias)

14.	Número k	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	k (razão de homotetia)
15.	Reta r	Reta[O, A]	r (ocultar)
16.	Reta s	Reta[O, B]	s (ocultar)
17.	Reta t	Reta[O, C]	t (ocultar)
18.	Reta w	Reta[O, D]	w (ocultar)
19.	Reta y	Reta[O, E]	y (ocultar)
20.	Reta z	Reta[O, F]	z (ocultar)
21.	Ponto A'	Homotetia[A, k, O]	A'
22.	Ponto B'	Homotetia[B, k, O]	B'
23.	Ponto C'	Homotetia[C, k, O]	C'
24.	Ponto D'	Homotetia[D, k, O]	D'
25.	Ponto E'	Homotetia[E, k, O]	E'
26.	Ponto F'	Homotetia[F, k, O]	F'
27.	Hexágono poll'	Polígono[A', B', C', D', E', F']	Hexágono de vértices A', B', C', D', E', F'.
27.	Segmento a'	Segmento[A', B', poll']	a' (ocultar rótulo)
27.	Segmento b'	Segmento[B', C', poll']	b' (ocultar rótulo)
37.	Segmento c'	Segmento[C', D', poll']	c' (ocultar rótulo)
27.	Segmento d'	Segmento[D', E', poll']	d' (ocultar rótulo)
27.	Segmento e'	Segmento[E', F', poll']	e' (ocultar rótulo)
27.	Segmento f'	Segmento[F', A', poll']	f' (ocultar rótulo)
28.	Texto Tipo	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Tipo da Homotetia:
29.	Texto Centro	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização. Em propriedades > avançado > condições para exibição: k=0	Homotetia do Centro (k=0) $H(O, k)(O)=O$
30.	Texto Identidade	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização. Em propriedades > avançado > condições para exibição: k=1	Identidade (k=1) $H(O, k)(P)=P$
31.	Texto Simetria	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização. Em propriedades > avançado > condições para exibição: k=-1	Inversa da Identidade (k=-1) Simetria em torno de O $\rho(O, \pi)$
32.	Texto Ampliação Direta	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização. Em propriedades > avançado > condições para exibição: k>1	Ampliação Direta (k>1) $H(O, k)(P)=P'$
33.	Texto Redução Direta	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Redução Direta (0<k<1) $H(O, k)(P)=P'$

		Em propriedades > avançado > condições para exibição: $0 < k < 1$	
34.	Texto Ampliação Inversa	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização. Em propriedades > avançado > condições para exibição: $k < -1$	Ampliação Inversa ( $k < -1$ ) $H(O, k) (P) = P'$
35.	Texto Redução Inversa	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização. Em propriedades > avançado > condições para exibição: $-1 < k < 0$	Redução Inversa ( $-1 < k < 0$ ) $H(O, k) (P) = P'$
36.	Valor Booleano vértices	Na barra de ferramentas clicar no botão  , em seguida posicioná-lo na Janela de Visualização.	Exibe os vértices ou oculta os vértices dos Pol1 e Pol1'

Tabela 5 - Comandos para construção da Tela das Homotetias no Geogebra. (Elaborada pelo autor)

Após a execução dos comandos descritos na *Tabela 5*, o resultado será a tela das Homotetias, conforme *Figura 49*, que foi publicada no portal do Geogebra ([https://tube.geogebra.org/?lang=pt\\_BR](https://tube.geogebra.org/?lang=pt_BR)), sendo de fácil acesso através do link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/1954553> , onde qualquer usuário poderá utilizá-lo.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Do objetivo inicial ao resultado final obtido após a pesquisa, bem como a consolidação dos conhecimentos registrados, foi um longo processo. A prioridade pautou-se em sistematizar o produto final de maneira que sua leitura seja prazerosa, seu conteúdo seja relevante e sua aplicação seja possível em sala de aula, em especial nos colégios do atual Ensino Médio, contribuindo para a formação dos professores e o aprendizado dos alunos.

Neste trabalho foram considerados três aspectos importantes. O primeiro foi o ponto de partida ser um conteúdo bem conhecido, mas com necessário detalhamento na abordagem de seu ensino, por vezes tendo sua importância esquecida pelos professores do colégio. O segundo aspecto se relaciona com a necessidade de se vivenciar o princípio da empatia, procurando perceber e apresentar as demonstrações e explicações acompanhadas de exemplos geométricos e ilustrações que contribuam para a aprendizagem do estudante, seja ele aluno ou professor em formação, agregando o auxílio de dois objetos de aprendizagem virtuais, interativos e *on line*. O último se refere a continuidade da pesquisa, pois não é objetivo desta concluir o estudo sobre o tema, mas sim apresentar uma contribuição que possa incentivar outros a continuarem pesquisando e apresentando outras abordagens.

Uma das principais fontes de pesquisa foi o livro *Isometrias* do professor Elon Lages Lima, parte da Coleção do Professor de Matemática, publicado pela SBM em 1995. O contato inicial com o Prof. Elon foi através de participações no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), em 2009, através de videoconferências, e na disciplina Números e Funções Reais (MA11) do PROFMAT, em 2013, despertando o interesse pelas obras deste autor.

Outro ponto relevante, também como referencial, foi o conhecimento sobre o software Geogebra, para o qual foi necessário um estudo minucioso sobre suas ferramentas, formatações e configurações. Estudo estimulado pelo Prof. M.e Leandro Barbosa Paz, egresso do PROMAT/UECE, turma de 2011, através de sua dissertação, relacionada nas referências deste trabalho. E o resultado conseguindo é *OA* de fácil utilização, flexível nas simulações de polígonos dinâmicos com no mínimo 3 e no máximo 6 vértices, de acesso democratizado, sem ônus para o usuário, disponibilizado virtualmente, de forma *on line* ou *off line*, conforme a necessidade e/ou desejo do utilizador.

Os capítulos foram organizados objetivando construir uma sequência lógica e progressiva, partindo de algumas informações elementares necessárias, acrescentado conteúdos

mais específicos como isometrias e homotetias, resultando em algumas conclusões fundamentadas sobre o estudo de semelhanças.

Na introdução das isometrias foi realizada uma revisão de alguns conceitos básicos sobre funções, imprescindíveis à compreensão das transformações isométricas e homotéticas no plano euclidiano,  $\mathbb{R}^2$ .

Iniciando as homotetias, seguiu-se o mesmo princípio através da apresentação e estudo de alguns elementos fundamentais da semelhança como o conceito de proporcionalidade, teorema de Thales e os casos de semelhança de triângulos. A título de aplicação da homotetia apresenta-se o Pantógrafo, anexo A, como um instrumento lúdico utilizado para ampliação e redução de figuras planas.

Como parte conclusiva da pesquisa tem-se que, somente através de homotetias, isometrias ou da composta de duas ou mais destas, haverá semelhança entre figuras planas. Ficando como sugestão a outros pesquisadores e professores de Matemática ampliem este estudo, detalhando as diversas abordagens das isometrias e homotetias.

## REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática(SBM), 1995.

LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. Coleção do Professor de Matemática. 3.ed. - Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática(SBM), 2007.

LIMA, Elon Lages. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática. 6.ed. - Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.

PAZ, Leandro Barbosa. *Caracterização das Isometrias no plano através do estudo das Transformações de Möbius*. Fortaleza: UECE, 2013. 71f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual do Ceará, 2013.

FLORENCIO, Mariele Parteli. *Transformações no Plano e Grupos de Simetria*. São Carlos: UFSCAR, 2011. 48f. TCC (Curso de Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de São Carlos – SP, 2011.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. Coleção do Professor de Matemática. 11.ed. – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

## ANEXO A – PANTÓGRAFO

O pantógrafo (*do grego pantos = tudo + graphein = escrever*) é um aparelho utilizado para fazer transferir e redimensionar figuras e que pode ser regulado de modo a executar também ampliações e reduções nas proporções desejadas.

O pantógrafo foi inventado em 1603 pelo astrónomo e jesuíta alemão *Christoph Scheiner*. É constituído por quatro barras (geralmente de madeira) articuladas, duas maiores e duas menores, que se mantêm paralelas duas a duas. As duas réguas menores estão por baixo e são articuladas entre si (sendo essa intersecção o pivô que traça por cima da imagem original) e às maiores nas extremidades; as maiores são colocadas sobre estas, com as articulações às menores situadas ao longo do seu comprimento (podendo ser regulada a sua posição para obter as proporções desejadas), e articuladas uma à outra numa das extremidades, conforme pode ser visto na imagem da FFFFF. A extremidade oposta de uma das barras maiores é fixa num ponto, neste caso o centro da homotetia, e a outra é onde fica o lápis que vai desenhar a reprodução da imagem, pela homotetia.

Pantógrafo - ilustração

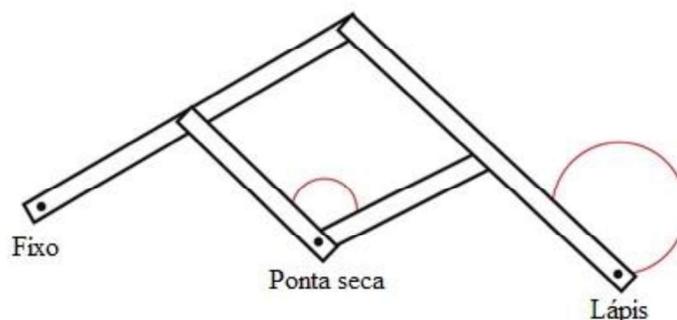


Figura 50 - Pantógrafo (ilustração)

O pantógrafo é uma aplicação das propriedades apresentadas neste trabalho sobre as homotetias, garantido que a figura originada pelo instrumento seja semelhante à original.

Fonte: Wikipédia, <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pant%C3%B3grafo>, acessado em 25/11/2015.