Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O estudo da circunferência no Ensino Médio: uma proposta utilizando um *software* livre

Gabriel Rosaboni Vecchi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

2015

516 V397e

Vecchi, Gabriel Rosaboni

O estudo da circunferência no Ensino Médio: uma proposta utilizando um *software* livre/ Gabriel Rosaboni Vecchi- Rio Claro, 2015.

86 f.: il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira

1. Geometria. 2. Circunferência. 3. *Softwares* educacionais. 4. Comprimento de arco. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Gabriel Rosaboni Vecchi

O estudo da circunferência no Ensino Médio: uma proposta utilizando um *software* livre

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Orientadora

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE - UNESP - Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Maria Beatriz Ferreira Leite
CEATEC - PUC - Campinas (SP)

Rio Claro, 18 de novembro de 2015

Mas a vitalidade da Matemática deve-se também ao fato de que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica. Por outro lado, ciências como Física, Química e Astronomia têm na Matemática ferramenta essencial.

Parâmetros Curriculares Nacionais

Resumo

Este trabalho busca entender o que se espera do professor na sua prática, analisando os documentos oficiais e materiais de apoio (livros didáticos e outros), de modo a verificar o que eles oferecem na condução de aulas, com foco no estudo da circunferência. Junto com estes materiais, novas possibilidades são encontradas com o uso de tecnologias digitais, presentes e inseparáveis da vida diária da maioria dos estudantes nos níveis fundamental e médio. Assim, apresentamos uma proposta de utilização de um *software* educacional livre como motivação para o estudo da circunferência, especificamente o estudo de ângulos (em radianos), no segundo ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria, Circunferência, *Softwares* educacionais, Comprimento de arco.

Abstract

This paper seeks to understand what is expected of the teacher in his practice, analyzing official documents and material support (school and other books), checking what they can offer for lessons, focusing on the study of the circle. Along with these materials, new possibilities are found with the use of digital technologies, always present and inseparable from the daily lives of the majority of students in elementary and high school. Thus, we present a proposal to use a free educational software as motivation for the study of the circumference, specifically the study of angles (in radians) in the second year of high school.

Keywords: Geometry, Circumference, Educational softwares, Arc length.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

A escola sempre foi vista como um local de saberes e aprendizado. Ao deixarem seus filhos nas portas das escolas e colégios ao longo do território nacional (e em todo mundo), a perspectiva dos pais é que seus filhos aprendam e se capacitem como cidadãos conscientes, para que possam atuar em meio à sociedade em que vivem. Em um momento tão complexo da história, no qual as tecnologias estão juntas em todos os processos da vida humana — do comprar o pão na padaria ao voto na urna eletrônica — espera-se que a escola também faça bom uso de tais tecnologias no ensino, de forma a envolver os alunos no processo de aprendizagem e desenvolver suas capacidades e habilidades.

Dentre os saberes apresentados na escola, historicamente rico e de constante contextualização, o estudo da circunferência é sem dúvida relevante na prática docente. O aluno que o entende bem também compreenderá outros assuntos a este ligados direta ou indiretamente. Dada sua importância, é um conteúdo que aparece tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio e foi o tema escolhido para este trabalho.

Tendo em vista que o programa no qual essa dissertação está inserida (PROFMAT) se destina à professores que estão atuando na rede pública ou particular de ensino, ao longo deste texto serão verificados os principais meios norteadores que o professor deve ter ao preparar suas aulas: os temas que deve trabalhar, conforme exposto no Currículo Oficial; a maneira que deve trabalhar tais temas, levando em conta os conhecimentos prévios dos alunos, o desenvolvimento dos temas e as aplicações que pode fazer, tendo por base os livros didáticos; e uma ampliação dos temas, usando talvez novas tecnologias que busquem envolver o aluno no processo de aprendizagem, validando seus conhecimentos anteriores e criando curiosidade pelo novo.

O segundo capítulo, portanto, trata da Matemática conforme delineada nos *Parâmetros Curriculares Nacionais*[1], sempre tendo em mente que a educação tem como uma de suas finalidades garantir que, respeitadas as diversidades, o processo resulte em construção da cidadania, promovendo igualdade de direitos e fortalecendo os processos democráticos. Desta forma, a educação deve proporcionar aos educandos a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades, preparando-os para o trabalho e para o exercício consciente da cidadania. De fato, a educação deve promover sua inserção e atuação na sociedade. Também são feitos breves comentários sobre o *Currículo* *do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*, salientando as competências e habilidades que os alunos irão desenvolver ao longo de sua vivência escolar. Para tal finalidade é apresentado um resumo da fundamentação teórica explicitada em tal documento, que o professor deve conhecer e fazer uso como norteador na preparação de suas aulas.

No terceiro capítulo é ressaltada a importância do tema trabalhado neste texto: *O Estudo da Circunferência*. No percurso do capítulo é apresentado tal conteúdo a partir dos referenciais bibliográficos dos professores da Rede Estadual, em particular, do Estado de São Paulo. É verificada a maneira como tal conteúdo aparece nos *Cadernos do Aluno* (apresentados no capítulo) bem como nos livros didáticos, que podem ser usados como excelentes ferramentas para o trabalho do professor. Logicamente, contudo, todas essas ferramentas devem estar aliadas à boa preparação e formação do professor. Ainda sobre o estudo da circunferência, na parte final do texto, o Apêndice A traz a demonstração de dois resultados utilizados ao longo do texto, enquanto o Apêndice B apresenta como calcular o comprimento de uma circunferência usando as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral, embora não seja abordado dessa forma com alunos do Ensino Fundamental e Médio, mas que consideramos importantes para a formação do professor.

No quarto capítulo é apresentada uma proposta de utilização de um *software* para trabalhar o conteúdo proposto ao longo do texto. Não se trata de uma limitação, visto ser possível encontrar uma grande variedade de *softwares* disponíveis na *Internet*. O objetivo da apresentação deste é exemplificar as muitas possibilidades que o trabalho docente adquire ao inserir nas aulas outras ferramentas tecnológicas, tão usuais e por vezes tão poucas utilizadas. É apresentado tanto o *software* como o percurso que o aluno irá seguir no desenvolvimento da atividade. Também é apresentada a fundamentação teórica matemática que justifica os resultados encontrados, bem como observações para turmas avançadas. Complementando a apresentação, são citados alguns outros recursos disponíveis ao professor na *Internet*.

Ao longo do texto, a ideia é que o estudante deve desenvolver suas capacidades e habilidades a fim de entender como o mundo a sua volta "funciona", podendo promover mudanças e melhorando o meio em que vive. Os conhecimentos matemáticos podem desempenhar fundamental papel para tais mudanças. O conhecimento tecnológico em constante construção também se faz presente, como facilitador no processo de aprendizagem. O presente texto não busca ser um limitador, como que restringindo todas as possibilidades da prática docente; pelo contrário, visa ampliar as percepções do professor a respeito do tema, bem como apresentar novas possibilidades para um tema considerado de vital importância no cotidiano escolar.

2 A matemática nos documentos oficiais

Antes de entrar em uma sala de aula o professor precisa estar informado sobre o que se espera dele, e como deve agir com seus alunos. Apesar das muitas diferenças culturais existentes dentro do país, é esperado que todos os alunos tenham acesso ao mesmo conjunto de conhecimentos em todos os locais do Brasil. Com a finalidade de regulamentar e orientar o Ensino, documentos oficiais bem elaborados deixam claro as propostas básicas que devem ser seguidas por todos os professores, visando a capacitação dos estudantes para a vida em sociedade e para as realidades do ensino técnico ou superior e do mercado de trabalho.

De fundamental importância é entender sobre o que significa ensinar e aprender. Afinal, o que se espera do professor e do aluno? Ainda mais, o que se espera da escola? Nas seções que seguem, serão abordados pontos fundamentais de dois documentos oficiais: *Os Parâmetros Curriculares Nacionais* [1, 2] e o *Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e suas tecnologias* [3].

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais deixam claro que a educação se propõe a formar um cidadão completo, que tenha responsabilidade e autonomia para tomar decisões, intervir e participar na vida social. Como requisito para tal, é necessário que o estudante desenvolva durante sua vida escolar o domínio da língua falada e escrita, bem como os princípios do raciocínio matemático, de modo a organizar a sua concepção de mundo e do mundo contemporâneo. Em conjunto com o citado acima, espera-se que o aluno desenvolva suas habilidades e competências, em função dos novos saberes que serão requisitados com o progresso das tecnologias e linguagens, sendo capaz de responder a novos ritmos e processos, mesmo quando terminada a sua vivência escolar.

Digno de nota é a participação necessária e requerida do aluno no processo de aprendizagem, conforme salientado nos Parâmetros Curriculares Nacionais [1], na página 37: "é ele quem modifica, enriquece e, portanto, constrói novos e mais potentes instrumentos de ação e interpretação". Nesse enfoque os conteúdos são considerados como um meio para que o aluno atinja seu objetivo: a formação como cidadão, com a capacidade de relacionar seus conhecimentos na transformação e também na construção de relações sociais.

Um desafio presente e constante na escola envolve lidar com a demanda atual da sociedade, o que inclui mudanças em muitos níveis culturais e tecnológicos. Portanto, espera-se que a escola trate de questões que interfiram na vida dos alunos, que tenham ligação com a realidade vivenciada e que despertem a curiosidade pelo saber. Assim, o estudante poderá estabelecer relações entre o que já conhece e o que está aprendendo, bem como usar os instrumentos propostos pela escola para alcançar objetivos e realizações, tanto na esfera pessoal, quanto na vida em sociedade.

Visto o crescente uso de computadores pelos alunos, este pode ser útil como instrumento de aprendizagem escolar, para que os alunos estejam atualizados em relação às novas tecnologias da informação e instrumentalizados para as demandas sociais presentes e futuras.

2.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática

O propósito do Ministério da Educação e do Desporto, ao consolidar os Parâmetros, é apontar metas de qualidade que ajudem o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres.

Não é difícil constatar a importância da matemática: ela está presente na resolução de problemas cotidianos, tem aplicações no mundo do trabalho e na construção do conhecimento. Além de tudo, o *raciocínio matemático* contribui para a estruturação do pensamento e para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno. O início da vivência matemática ocorre muito cedo, quando se aprende a organizar, agrupar e enumerar. À medida que as capacidades cognitivas dos estudantes se desenvolvem, novos métodos são apresentados e desenvolvidos, criando diversas possibilidades de resolução de problemas e aplicações da matemática na realidade. Apesar disso, não é exagero dizer a solução de grande parte dos problemas propostos nas situações diárias são resolvidos por operações fundamentais.

Dentre os objetivos do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos desenvolvam habilidades que os capacitem para atuar e modificar de maneira consciente a sociedade na qual estão inseridos. Os alunos devem aprender a utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimento. Ainda mais, com este conhecimento, o aluno poderá questionar a realidade, levantar hipóteses, formular e resolver problemas por meio do raciocínio lógico, da criatividade, da intuição e da capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação, realizando testes e analisando os resultados obtidos.

Deste modo, ao ensinar Matemática, pretende-se que o estudante consiga relacionar suas observações do mundo real com representações deste (em linguagem matemática), bem como relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. É natural, portanto, que as atividades se desenvolvam em um contexto de resolução de problemas. Muitos recursos didáticos, como jogos, vídeos, livros, calculadoras e computadores podem desempenhar um importante papel no processo de ensino e aprendizagem. Utilizando estes recursos o estudante terá a oportunidade de se integrar às situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, levando, por sua vez, à estruturação do pensamento e ao desenvolvimento do raciocínio lógico. A calculadora, conforme sugerem os *Parâmetros Curriculares Nacionais* [1], poderá então ser usada como recurso, para ajudar o aluno a compreender o que está realizando; também fornecendo a validação do que foi realizado, e podendo promover a correção em caso de insucesso.

Tendo em vista o exposto anteriormente, cabe à Matemática, como a ciência que estuda as possíveis relações entre grandezas, utilizar um vasto campo de teorias, modelos, procedimentos e metodologias, de forma a coletar e interpretar dados. A Matemática torna-se a ciência que busca explicar a realidade, e os conteúdos matemáticos são veículos para o desenvolvimento de ideias fundamentais, sendo que tais ideias estão presentes em uma gama muito grande de disciplinas, saindo do campo exclusivo da matemática.

Assim, entende-se a matemática como uma das ferramentas para o processo de inserção do aluno na comunidade, permitindo que ele atue como elemento transformador. A compreensão e a tomada de decisões são questões fundamentais, que usam a matemática como instrumento, seja na análise de gráficos, de índices; seja para calcular, medir, raciocinar e argumentar questões das mais variadas. Lembrando que a formação integral do aluno visa também interagir com o mundo do trabalho, e este requer pessoas preparadas, a escola também busca ensinar a usar as ferramentas tecnológicas atuais, fazendo uso de diferentes linguagens, inclusive as computacionais, propondo e resolvendo problemas.

Com tal finalidade, a matemática deve estar próxima do universo escolar do aluno, produzindo conhecimento útil e utilizável na sociedade. Assim sendo, o início de toda atividade matemática pode ser o problema, surgindo da realidade, buscando na matemática os meios para resolvê-lo. A exploração da *situação problema* exige do aluno uma reflexão crítica, bem como novas maneiras de resolver problemas usuais. O aluno que se torna um "resolvedor" de problemas ganha tanto em conhecimento, quanto em maturidade, uma vez que toma posse do conhecimento e desenvolve sua própria reflexão crítica, também atuando como agente transformador.

A matemática então é utilizada para sistematizar as necessidades e preocupações da humanidade, sendo seus conceitos ferramentas com muitas finalidades, que o aluno pode perceber e aplicar. A aplicação, por sua vez, ganha mais valor à medida que está ligada à realidade. Nessa ligação muitos recursos podem ser úteis, em especial os que dizem respeito aos *softwares* educacionais e outros métodos interativos que visam desenvolver as habilidades cognitivas dos estudantes e seu pensamento abstrato.

De acordo com a análise dos Parâmetros foi possível notar que os currículos de

Matemática para o ensino fundamental devem trabalhar com o estudo dos números e das operações (Aritmética e Álgebra), o estudo do espaço e das formas (Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (interligando Aritmética, Álgebra e Geometria). Deste modo, espera-se que o aluno amplie seus conceitos de números, à medida que verifica como os números e as relações são fundamentais na sociedade atual. Também, trabalhando com os conceitos relacionados ao espaço e forma, o aluno pode desenvolver um pensamento que lhe permita compreender, descrever e representar o mundo em que vive. Complementando os anteriores e utilizando-se dos conceitos das grandezas e medidas, ele pode notar a intervenção humana no mundo, bem como participar mais ativamente na construção da sociedade.

Além das três grandes áreas de concentração dos conteúdos delineadas anteriormente, deve-se adicionar a importância do tratamento da informação, que é fundamental na compreensão da sociedade. As noções de estatística, probabilidade e combinatória auxiliam a interpretação de dados, bem como lidar com situações-problema, explorar e prever eventos cotidianos, acentuando cada vez mais a sua importância na escola.

A avaliação também é uma questão trabalhada nos Parâmetros, e é vista não com a função de punir, mas como parte do processo de aprendizagem, onde o erro é considerado uma oportunidade para buscar o acerto. Quando o aluno aprende com seus erros, cada tentativa de resolução resulta em uma aprendizagem, mesmo que não leve imediatamente ao resultado procurado. Também, quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele passa a planejar a intervenção adequada a fim de auxiliar o aluno a traçar o caminho adequado, conseguindo uma aprendizagem efetiva.

Diante dessa perspectiva, os conhecimentos que as crianças possuem e desenvolvem, juntamente com os que a escola amplia, formam um universo de saberes e dão condições para se estabelecerem vínculos entre o que os alunos conhecem e os novos conteúdos que vão desenvolver, possibilitando uma aprendizagem significativa.

O ensino da Matemática, bem como dos outros conteúdos escolares, ocorre respeitando ciclos, que por sua vez se baseiam no desenvolvimento cognitivo dos alunos. Em todos os momentos é de grande valor utilizar os conhecimentos que os alunos já adquiriram, ampliando-os com novos saberes. Contudo, isso não significa que o professor deve estar restrito ao que o aluno conhece, muito pelo contrário, ele deve dar a oportunidade de o aluno ampliar seu universo de conhecimentos e dar condições para que consiga estabelecer relações entre o que conhecem e os conteúdos abordados, possibilitando uma aprendizagem significativa. Deste modo, é necessária uma reflexão do professor sobre o papel que desempenham os conteúdos, e também como desenvolvê-los para atingir os objetivos desejados e propostos.

2.2 Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e suas tecnologias

Para o Estado de São Paulo preparou-se um caderno como referência ao ensino, que é o Currículo do Estado de São Paulo [3]. Segundo este currículo, dentre os objetivos da escola, destacam-se a importância dela desenvolver as competências fundamentais ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo atual. Portanto, dessa perspectiva, a escola deve contemplar as características da sociedade, a fim de que possa preparar o estudante para esse *novo tempo*.

A aprendizagem também é vista como um resultado das ações entre as disciplinas, bem como da vida cultural na escola e do fortalecimento de suas relações com a comunidade. A escola é um lugar privilegiado para o desenvolvimento do pensamento autônomo, sendo este necessário ao exercício da cidadania responsável. Assim, espera-se que o estudante aprenda a pensar, agir e atuar no mundo em que vive, construindo sua identidade, autonomia e liberdade. O professor, por outro lado, não deve se limitar a transmitir ao aluno um conjunto de saberes, mas é parceiro dele nos fazeres, inclusive os culturais, e promove o desejo de aprender.

Cabe ressaltar que o Currículo do Estado de São Paulo é baseado em competências, que devem articular as atividades escolares com o que se espera que os alunos aprendam ao longo dos anos. Tal raciocínio está em harmonia com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) nº 9394/96, que deslocou o foco do ensino (do professor) para a aprendizagem (do aluno). Assim, o currículo e a escola passam a se importar mais com o que o aluno vai efetivamente aprender.

Como foco principal do Currículo do Estado de São Paulo também está a competência linguística do aluno: a leitura e a escrita (em um primeiro momento a língua materna, em seguida os demais tipos de linguagem). Observe-se aqui que tal competência não envolve apenas dominar a língua em sua norma-padrão, mas também saber utilizar-se dela em situações cotidianas, gerando a correta comunicação, fundamental ao exercício da cidadania. Por seu caráter fundamental, o ensino da língua passa a todos os professores, que devem em suas respectivas áreas criar oportunidades nas quais os alunos possam aprender e consigam consolidar o uso da Língua Portuguesa e de outras linguagens que fazem parte da cultura.

O centro da atividade escolar é a aprendizagem do aluno. Assim, o professor é o profissional responsável por tal aprendizagem, apresentando e explicando conteúdos, organizando situações diversificadas que possibilitem a aprendizagem de conceitos, bem como os métodos que serão utilizados, promovendo os conhecimentos para desenvolver competências e habilidades que capacitem os alunos para a vivência no mundo contemporâneo. Mais do que ensinar, a escola precisa desenvolver no aluno a competência de continuar aprendendo durante a vida, fazendo de cada experiência uma aprendizagem.

As competências e habilidades envolvidas no Currículo do Estado de São Paulo são as mesmas do referencial teórico do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM, 1998). Dentre essas podemos citar:

- Ter domínio da norma-padrão da Língua Portuguesa, bem como conhecer e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica, atribuindo significado ao que se lê e produzindo textos em diferentes contextos.
- Desenvolver e aplicar os conceitos de diferentes áreas a fim de compreender a realidade: dos fenômenos naturais, processos histórico-geográficos, até as produções tecnológicas e manifestações artísticas.
- Trabalhar com dados em diferentes formatos: selecionando, organizando, relacionando e interpretando, a fim de tomar decisões ponderadas e enfrentar as situações-problemas propostas.
- Relacionar informações e conhecimentos em situações concretas, para argumentar de maneira consistente.
- Com base no que foi desenvolvido na escola, propor intervenções solidárias e construtivas na sociedade, respeitando os direitos de cada cidadão, formulando planos, levantando hipóteses e tomando decisões ponderadas.

Todas as habilidades anteriormente destacadas buscam relacionar a teoria com a prática, de forma que o aluno consiga ver nos temas trabalhados na escola uma utilidade para modificar a realidade. Conseguir isso em sala de aula pode ser um desafio. Uma possibilidade para se atingir esse efeito é reproduzir o que levou a determinada descoberta, fórmula ou situação, trazendo o contexto histórico à situação atual, retomando o que levou ao desenvolvimento de determinado raciocínio ou método. Além disso, para compreender a realidade é necessário o uso de diferentes linguagens. Por exemplo, ao fazer uma verificação de uma conta corrente em um banco, um consumidor irá fazer uso dos conteúdos estudados na disciplina de Português e Matemática. Ao decidir em um mercado sobre a alimentação saudável, estará utilizando os conceitos aprendidos nas Ciências da Natureza (leia-se Biologia e Química). De fato, os conteúdos não estão fracionados nas situações cotidianas, mas estão em um todo complexo e aplicado. Portanto, a escola que visa formar cidadãos completos, também deve levar o aluno a adquirir discernimento e conhecimentos pertinentes à tomada de decisões em diferentes momentos.

Na sociedade da tecnologia, espera-se que a escola trabalhe com a tecnologia também. No currículo oficial o domínio dos princípios científicos e tecnológicos deve estar entre as competências desenvolvidas pelos alunos durante a educação básica. Além disso, não é necessária muita argumentação quando se verifica o papel que a tecnologia desempenha no cotidiano, na produção de bens e serviços.

A escola, além de transmitir conhecimentos, é também um espaço de formação para o mundo do trabalho. Contudo, entende-se por trabalho não o mero ato de repetir, uma vez que trabalhos rotineiros são realizados por robôs em linhas de produção. Por trabalho entende-se a capacidade de associar a concepção e a execução de determinada tarefa, resolvendo problemas resultantes e tomando decisões acertadas. Todas essas são habilidades que podem ser previstas e desenvolvidas no contexto escolar. Assim, espera-se que na escola o aluno desenvolva as habilidades necessárias para o trabalho e para a cidadania, e possa continuar aprendendo em um ambiente dinâmico e interdisciplinar tal qual o atual.

2.2.1 A concepção do ensino na área de Matemática e suas tecnologias

A escola era anteriormente concebida como lugar para *ler, escrever e contar*. Hoje trabalha-se com uma multiplicidade de linguagens, desde a língua materna, a linguagem matemática, até as linguagens usadas nas tecnologias da informação.

Dentro de tal metodologia, como descrita pelo Currículo do Estado de São Paulo, concebeu-se que a escola deveria estar organizada em três grandes áreas:

- Linguagens e Códigos;
- Ciências Humanas;
- Ciências da Natureza e Matemática.

Observa-se que a Matemática encontra-se em conjunto com as Ciências da Natureza. Certamente faria sentido a Matemática estar incluída na grande área de Linguagens e Códigos, uma vez que é composta de sistemas simbólicos para leitura e interpretação do mundo. Do mesmo modo faria sentido estar junto às Ciências da Natureza, em vista de sua proximidade em modelar fatos cotidianos, e estar historicamente ligada às Ciências. De fato, a Matemática acabou por ficar junto a grande área de Ciências da Natureza.

Certamente pode-se afirmar que a Matemática em conjunto com a língua materna forma um par, no sentido de comunicar: com precisão (como na matemática) ou com sentimento (como na Língua Portuguesa). De fato, não é possível reduzir um sistema simbólico ao outro, uma vez que na Matemática deseja-se uma expressão tão exata e fácil de controlar quanto possível, enquanto a flexibilidade da Língua Materna possibilita comunicar e mexer com os sentimentos de quem lê. Ainda mais, a Matemática oferece a possibilidade de representar, estudar e analisar dados, na busca para transformar informação em conhecimento; em especial quando se junta a informática ao contexto, a Matemática combina-se de forma quase perfeita com essa, tendo em vista sua natureza, às vezes, algorítmica. O computador em si, como máquina de calcular, é uma ferramenta para a comunicação, à serviço das linguagens e da informação; porém, jamais substituirá a capacidade de análise exclusiva da raça humana.

A matemática se faz fundamental por sua importância enquanto disciplina aplicada, seja nas ações de um consumidor, nas medidas, leitura e interpretação de gráficos, entre outros. Por tais fatos, a contextualização ganha cada vez mais espaço nos conteúdos escolares. Junto com a contextualização, também aparece a instrumentação crítica para o mundo do trabalho, pensando em educar cidadãos atuantes para o benefício da sociedade.

O professor, enquanto agente guia para a situação de aprendizagem, deve ter em mente desenvolver em seus alunos especialmente três pares de competências norteadoras: a expressão em conjunto com a compreensão, a argumentação seguida da tomada da decisão (com base em um raciocínio lógico, de análise racional) e a contextualização em conjunto com a abstração. O trabalho do professor torna-se muito mais rico quando consegue propor situações-problema em que os alunos tenham de sintetizar e tomar decisões, diagnosticando, argumentando, propondo e decidindo sobre os tópicos abordados. Desse modo, aprende-se a resolver na Matemática e com a Matemática.

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo, um meio para tratar os temas é explorá-los do ponto de vista histórico, onde a cultura matemática desenvolvida ao longo dos séculos traz elementos que possibilitam uma compreensão e abertura para o novo, ultrapassando as barreiras do que já foi aprendido. Isso ocorre pois, apesar do compreensível fascínio pelo que é novo, na Matemática se valoriza muito o que foi construído como conhecimento ao longo da história. Alguns saberes matemáticos que contribuíram para o desdobramento de muitas das tecnologias atuais continuam inquestionavelmente válidos e aplicados, saberes tais que foram *provados matematicamente*, inquestionáveis dentro de um contexto específico.

Assim, pode-se dizer que a Matemática, em seus muitos desdobramentos e aplicações, possibilita uma quantificação da realidade, que algumas vezes resume e simplifica a situação estudada a dados passíveis de análise, facilitando a posterior intervenção e transformação da realidade.

Entendendo-se a Matemática como saberes, o Currículo então salienta que o uso de máquinas calculadoras (onde o computador está compreendido também) pode ser útil, uma vez que tarefas mecânicas cotidianas são realizadas por tais. Ao aluno cabe então fazer projetos, ponderar sobre valores, desenvolver ideias: tarefas tais que não podem ser delegadas às máquinas. Diante do exposto, fica claro que o *Tratamento da informação* (entenda-se tal como análise de porcentagens, médias, tabelas, gráficos, entre outros) ganha expressiva importância, uma vez que faz-se necessário para entender fenômenos diários, bem como inferir e programar eventos presentes ou futuros. Ainda mais, o *Tratamento da Informação* está presente em todas as disciplinas, sendo muito rica a sua exploração, sem prejudicar, contudo, os demais conteúdos igualmente importantes.[1]

O Currículo traz a atenção o fato de que nem sempre basta enumerar tópicos a serem trabalhados, mas é necessário visualizar as ideias que surgem por trás de tais tópicos. Uma ideia fundamental em determinada disciplina é aquela que é trabalhada em diversos conteúdos e tópicos da disciplina, e ainda mais, aquela que ultrapassa os limites da disciplina e é aplicada em outras disciplinas do currículo.

O Currículo do Estado de São Paulo apresenta uma simplificação na maneira de ver os conteúdos básicos, agrupando-os em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. É importante observar que cada um dos blocos temáticos está presente direta ou indiretamente nos temas a serem trabalhados em todos os anos escolares. Segue uma breve explicação dos três grandes blocos temáticos:

- Números: considera as noções de contagem, medidas e representações, fazendo grande uso dos símbolos e operações matemáticas. As ideias fundamentais são a equivalência e a ordem entre os números.

- Geometria: envolve a percepção das formas e relações entre os elementos de figuras planas e espaciais, bem como sua concepção, representação e construção. É especialmente útil à representação da realidade.

- Relações: diz respeito às medidas e aproximações, bem como às relações métricas em geral. Envolve as ideias de interdependência e de proporcionalidade, a fim de comparar e analisar.

Em todos os blocos temáticos, o objetivo é representar e realizar o tratamento das informações propostas na situação-problema, levando à construção do conhecimento. Ainda mais, tendo em vista as possibilidades cotidianas, espera-se uma incorporação das tecnologias da informação e comunicação disponíveis, sempre sendo tal incorporação crítica, de modo a desenvolver as habilidades daquele que aprende.

Além dos aspectos citados anteriormente, não se pode esquecer que *conhecer envolve entender o significado*, ou seja, que o conteúdo deve ter significado para o aluno. Um meio para se conseguir isso é desenvolvendo um contexto, real ou fictício, em que se use o conceito. Nesse aspecto, pode ser muito útil recorrer à história e estudar o desenvolvimento de dado conceito, procurando entender o significado do que está sendo trabalhado. Igualmente interessante pode ser a problematização, ou construção de situações-problema, que permitam o estudo de determinado conceito de forma direta ou indireta, por meio de questionamentos a serem respondidos e analisados. À medida que faz perguntas, o aluno desenvolve sua própria inteligência, no sentido que se torna um investigador, procurando também as respostas, desenvolvendo suas habilidades

[1] Lembre-se aqui que as disciplinas visam desenvolver as competências de cada estudante, como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação, trabalhando-as em diferentes temas e conteúdos, com o mesmo objetivo comum: a formação do cidadão.

(exatamente o objetivo da escola: o desenvolvimento das habilidades). Problemas desafiadores, como os de otimização, podem levar os alunos a desenvolver interesse no assunto abordado, desafiando-se a encontrar a melhor solução.

Para auxiliar o professor em sua prática, os docentes do Estado de São Paulo contam com os *Cadernos do Professor*, que apresentam orientações didáticas para a realização dos trabalhos, em conjunto com os *Cadernos do Aluno*. O foco de tais ferramentas é tornar a escola como uma oficina de articulação e produção de ideias, de criação. Claramente, então, o aluno poderá desenvolver suas competências pessoais, como as capacidades para se expressar, compreender, argumentar, propor, contextualizar e abstrair. Ao desenvolver tais competências pessoais, espera-se que os alunos se tornem cidadãos investigativos e argumentativos, prontos para atuar e modificar a realidade.

Finalizando essa série de observações, cabe ressaltar que o Currículo trata de uma orientação geral, em especial no que se refere a princípios e valores envolvidos, mas a efetiva ação na sala de aula depende da mediação do professor, da prática docente planejada antecipadamente e posteriormente executada em sala de aula.

3 Estudo da circunferência

A Matemática faz uso de muitos conhecimentos adquiridos ao longo da história da humanidade, fruto de sua curiosidade e necessidade. Tais conhecimentos são tantos que podem ser utilizados diferentes métodos para ensiná-los aos estudantes, mobilizando-os a aprender. Dessa forma, para o presente trabalho, escolhemos como tema central o estudo da circunferência, tema historicamente rico e com inúmeras aplicações às mais variadas situações.

O estudo inicial da circunferência dá-se no Ensino Fundamental, apenas com uma apresentação breve do conteúdo e de "fórmulas" para calcular alguns itens solicitados. No Ensino Médio o conteúdo volta a aparecer, em geral no segundo ano, na área de Geometria. Pelo Currículo do Estado de São Paulo [3], o estudo da Matemática no segundo ano do Ensino Médio deve contemplar a Geometria Espacial Métrica, apresentando os estudos dos elementos da geometria de posição, dos poliedros, prismas e pirâmides, bem como o estudo dos cilindros, cones e esferas. Note-se aqui que o estudo da circunferência aparece, portanto, de forma indireta ao estudar-se os tópicos citados.

Como tal conteúdo é trabalhado nos livros didáticos? Na seções a seguir apresentam-se as formas como os conteúdos são trabalhados juntos aos materiais de referência que são mais amplamente utilizados pelos professores da rede pública[1], a saber os *Cadernos do Aluno*[2] [4] e os livros didáticos selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) [5, 6]. Também é apresentado um breve resumo do PNLD e os livros selecionados para 2015 por este programa, tendo em vista os alunos de Ensino Médio. Na sequência apresentamos alguns pontos que julgamos especialmente interessantes em algumas das coleções, ponderando sobre uma abordagem significativa do tema, bem como a formação completa do aluno como cidadão disposto para o exercício da cidadania.

Porém, antes de descrever os conteúdos como trabalhados nos materiais de apoio, a primeira parte deste capítulo é destinada a situar o leitor sobre o tema proposto,

[1]Tomando como referência os materiais disponíveis na rede pública do Estado de São Paulo em 2015.

[2]Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, parte do Programa *São Paulo Faz Escola*, distribuído gratuitamente a todos os alunos matriculados em escolas da rede pública do Estado de São Paulo.

apresentando as definições necessárias ao conteúdo deste texto.

3.1 Conceitos básicos

São apresentadas a seguir algumas definições básicas presentes no estudo da circunferência, visando um melhor entendimento dos conteúdos citados nos livros didáticos e *Cadernos do Aluno.*

Inicia-se esta apresentação colocando-se o círculo como definido por Muniz Neto [7] a partir da ideia de lugar geométrico:

Definição 3.1. *Dada uma propriedade* **P** *relativa a pontos do plano, o* lugar geométrico *(abreviado por LG) dos pontos que possuem a propriedade* **P** *é o subconjunto* Λ *do plano que satisfaz as condições a seguir:*
(a) Todo ponto de Λ *possui a propriedade* **P**.
(b) Todo ponto do plano que possui a propriedade **P** *pertence a* Λ.

Definição 3.2. *Dados um real positivo* r *e um ponto* O *do plano, o* LG *dos pontos do plano que estão à distância* r *do ponto* O *é o círculo de centro* O *e raio* r.

De maneira concreta, o círculo de centro O e raio r é a *curva plana* obtida quando posicionamos a ponta de um compasso sobre o ponto O e fixamos sua abertura como igual ao comprimento r. O livro do *Projeto Araribá* [8] destinado aos alunos do 8º ano define da seguinte forma a circunferência:

> **Circunferência** é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano. O ponto fixo é denominado **centro da circunferência** e a distância constante é a **medida do raio**.

De maneira equivalente é a definição de outros autores, como ocorre no livro do *Projeto Teláris* [9], também no volume destinado aos alunos do 8º ano. É bastante comum entre os autores de livros para Ensino Fundamental e Médio colocar nas definições que ***círculo*** *é a região plana formada por uma circunferência e sua região interna* [8], *círculo é a região plana limitada por uma circunferência* e que *o centro não faz parte da circunferência* [9]. De modo que nos livros didáticos a circunferência é entendida como o contorno, enquanto círculo é a região delimitada por este contorno.

Retomando as definições conforme Muniz Neto [7], temos que o complemento de círculo no plano consiste de duas regiões:

- *Limitada*: que é denominada *interior* do círculo. Esta região é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é *menor* que r, ou seja, $\overline{OP} < r$.

- *Ilimitada*: denominada *exterior* do círculo. Esta região é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é *maior* que r, ou seja, $\overline{OP} > r$.

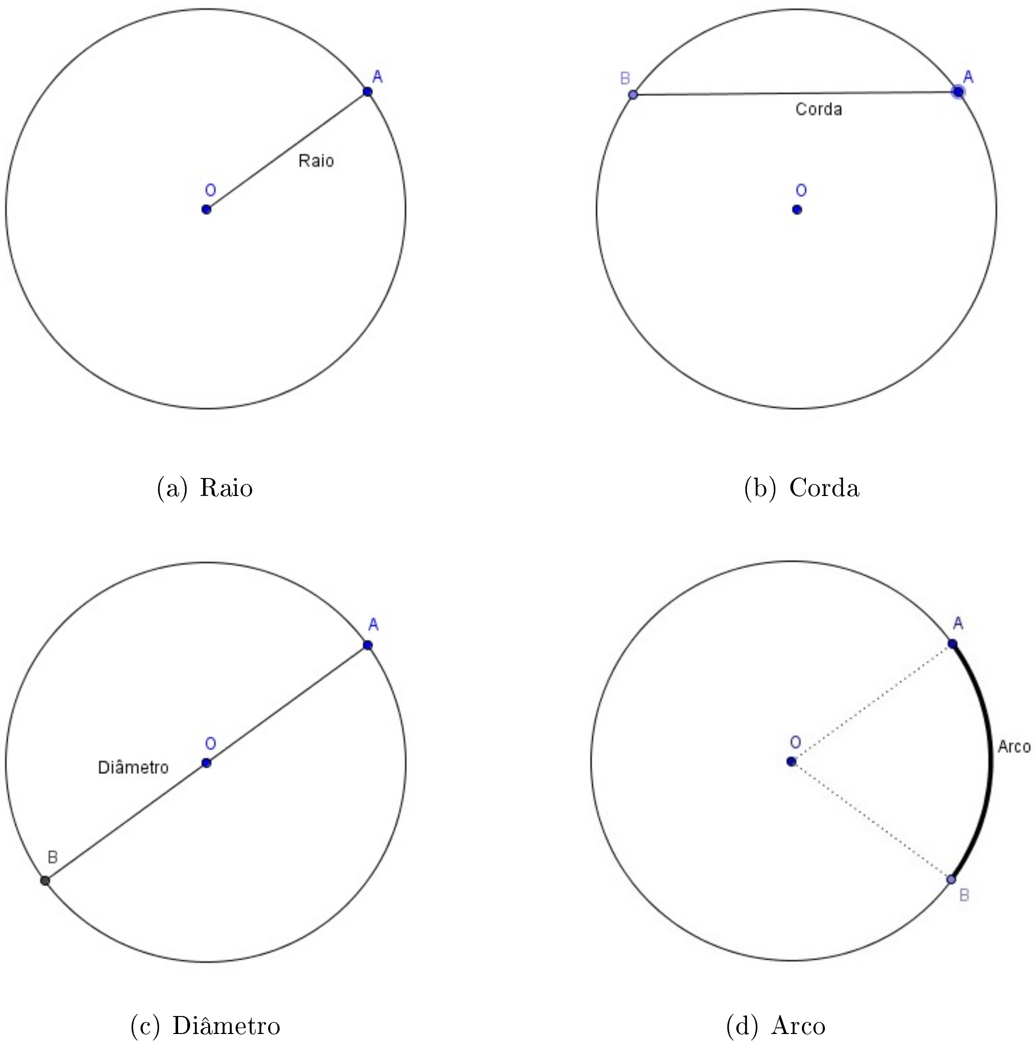
Definição 3.3. *Dado um círculo* Γ *de centro* O *e raio* r*, é denominado por* raio *do círculo a todo segmento que une o centro* O *a um de seus pontos.*

Como consequência imediata da Definição 3.2, cabe notar que para qualquer ponto escolhido do círculo o valor do raio sempre será o mesmo.

Definição 3.4. *Uma* corda *de* Γ *é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo. O* diâmetro *de* Γ *é uma corda que passa pelo centro do círculo.*

Todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, denominadas *semicírculos*. Reciprocamente, se uma corda de um círculo o divide em duas partes iguais, então tal corda deve, necessariamente, ser um diâmetro do círculo.

Definição 3.5. *Uma porção de um círculo delimitada por dois de seus pontos corresponde a um* arco *de círculo. Tomando-se dois pontos sobre um círculo* Γ *sempre são encontrados dois arcos, denominados* arco maior *e* arco menor.



(a) Raio (b) Corda

(c) Diâmetro (d) Arco

Figura 3.1: Ilustrações de raio, corda, diâmetro e arco.

Nos livros didáticos para o Ensino Fundamental já citados, são encontrados os equivalentes às definições 3.3 a 3.5, mostradas na Figura 3.1.

- **Raio** é um segmento cujas extremidades são o centro e um ponto qualquer da circunferência. De modo equivalente, todo segmento que liga um ponto da circunferência ao centro é chamado de raio da circunferência. Além disso, todos os raios têm a mesma medida de comprimento.

- **Corda** é um segmento cujas extremidades são dois pontos distintos quaisquer da circunferência.

- **Diâmetro** é uma corda que passa pelo centro da circunferência, e todo diâmetro mede o dobro do raio.

- Dois pontos sobre uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada uma delas é denominada **arco de circunferência**.

Um conceito fundamental para este texto é a definição de ângulo central. Nos livros didáticos de Ensino Fundamental:

Definição 3.6. *Chamamos de **ângulo central** de uma circunferência todo e qualquer ângulo que tem como vértice o centro dessa circunferência.*

Durante o Ensino Fundamental os livros didáticos estão trabalhando com ângulos em graus. É no Ensino Médio que o estudo dos ângulos passa a ser feito também em radianos, em especial quando se trata do ciclo trigonométrico, ou circunferência trigonométrica. Então o estudo do comprimento da circunferência (ou perímetro da circunferência) e comprimento do arco são vistos com mais atenção.

As definições apresentadas por Muniz Neto não são usuais nos textos da Educação Básica ou do Ensino Superior consultados. Dessa forma, ao longo desse texto usaremos a mesma terminologia dos livros didáticos.

Na sequência apresentamos três resultados envolvendo o comprimento da circunferência de especial importância para o uso no *software* que será apresentado. As demonstrações desses resultados estão nos Apêndices A e B.

Teorema 3.1. *Seja uma circunferência de centro em* O *e raio* r*. Então o perímetro, ou comprimento* C *desta circunferência é dado por:* $C = 2\pi r$.

Corolário 3.1. *Seja uma circunferência de centro em* O *e raio* r*. O comprimento de um arco cujo ângulo central vale* θ *(radianos) é dado por* θr.

Teorema 3.2. *Em uma circunferência de centro* O *e raio* r*, o comprimento* C_c *de uma corda delimitada por um ângulo central* θ *é dado por:*

$$C_c = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

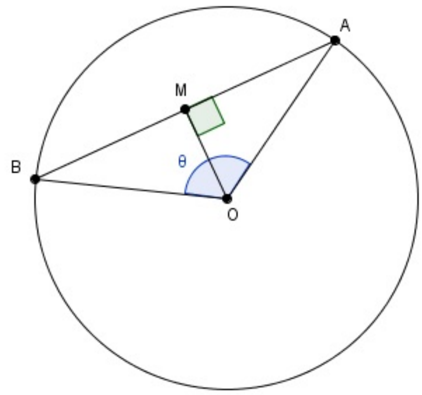


Figura 3.2: O comprimento C_c de uma corda delimitada por um ângulo central θ.

3.2 Estudo da circunferência: Ensino Fundamental

O material de referência principal para os professores da rede pública do Estado de São Paulo quanto ao ensino de Matemática é o *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias* [3]. Características relevantes desse material já foram citadas no capítulo anterior.

Com relação à organização dos conteúdos ao longo dos anos, é possível observar que o estudo da Geometria já aparece no 6º ano, com o estudo das formas geométricas (planas e espaciais), bem como o cálculo de perímetro e área das figuras planas. Mas é no segundo bimestre do 7º ano que o estudo da Geometria vai sendo exposto em mais detalhes. De acordo com o currículo, o aluno deve desenvolver como habilidade a compreensão da ideia de medida de um ângulo (em graus), e saber operar com medidas de ângulos, bem como usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos. No terceiro bimestre do 7º ano é apresentado o número π como uma "razão constante na Geometria", que é trabalhado em meio às atividades de proporcionalidade. Como habilidade espera-se que o aluno conheça o significado do número π como uma razão constante da Geometria, e também que ele saiba como utilizá-lo para resolver questões envolvendo o cumprimento da circunferência e suas partes. A maior ênfase no estudo da circunferência está no quarto bimestre do 9º ano, onde o aluno irá trabalhar com "corpos redondos", incluindo os conceitos do número π, da circunferência, de círculo e área do círculo. Como habilidade, o aluno deve conhecer a circunferência, seus principais elementos, características e suas partes. Além disso, deve compreender o número π como uma razão, e saber utilizá-lo para o cálculo do perímetro e da área da circunferência.

Na sequência é apresentado como estes assuntos são abordados pelas referências didáticas disponíveis: os *Cadernos do Aluno* e os livros didáticos.

3.2.1 Os *Cadernos do Aluno*

O estudo da circunferência tem seu primeiro aspecto importante apresentado já no 7º ano, onde o aluno começará a ter contato com os ângulos, compreendendo a ideia de medida de um ângulo (em grau), e sabendo operar com medidas de ângulos, além de usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos.

A atividade inicial proposta pelo *Caderno do Aluno*[3] envolve a experimentação por meio da construção de um "transferidor de papel": o aluno deve recortar um quadrado de papel e dividí-lo em 16 partes por segmentos que passem pelo "centro" do quadrado, por meio de dobradura (como mostrado na Figura 3.3).

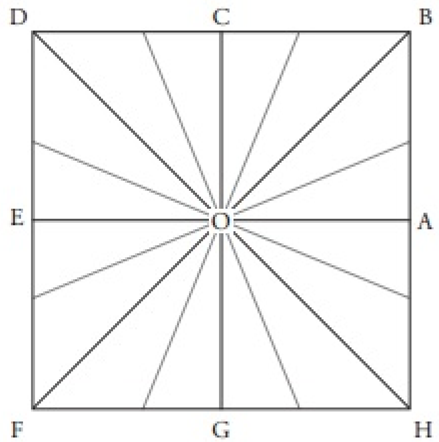


Figura 3.3: *Cadernos do Aluno*: apresentação do conceito de ângulos.

Cada uma das 16 subdivisões do "transferidor" quadrado de papel é chamado de *tuti* (nome escolhido pelos autores dos *Cadernos do Aluno*), cuja abreviação seria 1 t. Utilizando-se desse transferidor de papel, o aluno é convidado a medir diversos ângulos que aparecem nos exercícios propostos (medidas em *tutis*). Utilizando a medida em *tutis* o aluno deve investigar os ângulos de quadrados e triângulos, buscando reconhecer padrões para as somas internas dos ângulos nestas formas geométricas.

Na atividade de número 10 é solicitado ao aluno que compare seu transferidor em *tutis* com um transferidor tradicional, indicando que as subdivisões em um transferidor convencional recebe o nome de "grau", como mostrado na Figura 3.4.

A finalização da atividade ocorre com a apresentação dos ângulos agudo, reto e obtuso, bem como uso do transferidor usual.

Ainda nesse ano é apresentado o conceito de proporcionalidade, e como adicional à esse conceito, é apresentado o conteúdo "Razões constantes na Geometria: π". É esperado que o aluno venha a conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, posteriormente sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes.

[3] *Caderno do Aluno* [4] volume 1 para 6ª série/7ºano. Edição 2014-2017.

Transferidor convencional	Transferidor *tuti*
90°	
	2 *t*
135°	
	1 *t*
30°	
	5 *t*
4,5°	

Figura 3.4: *Cadernos do Aluno*: transformando medidas de *tutis* para ângulos.

Atividade para investigação!

Proporcionalidade na circunferência

Uma das características mais importantes de uma circunferência é a equidistância de seus pontos em relação ao centro. Por essa razão, ela é considerada a figura geométrica mais perfeita em termos de simetria. Além disso, qualquer que seja a circunferência, sua forma é sempre a mesma. Uma circunferência maior é uma ampliação perfeita de uma menor. Será, então, que há proporcionalidade entre suas partes? É o que vamos verificar a seguir.

Material necessário: objetos circulares, por exemplo, um CD, uma lata de leite condensado, uma moeda etc.; fita métrica; régua; compasso; folha de papel sulfite.

Figura 3.5: *Cadernos do Aluno*: apresentação do comprimento da circunferência e do número π.

Observe a Figura 3.5[4], que introduz a ideia do comprimento da circunferência por meio da noção de proporcionalidade. Nesse caso, como é comum nos livros de Ensino fundamental, os alunos são convidados a fazer uma série de medições em objetos circulares, utilizando fitas métricas, bem como representar esses objetos em papel e calcular o diâmetro deles. O centro da circunferência é encontrado ao se traçar o contorno dos objetos em papel e tomar quatro pontos sobre tal contorno: o encontro das mediatrizes traçadas a partir de dois pontos quaisquer tomados será o centro da circunferência. Sabendo o centro da circunferência, o aluno deve calcular o diâmetro, e apresentar de forma resumida, em uma tabela, os resultados encontrados, como exemplificado na Figura 3.6.

Logo a seguir, após a apresentação de alguns exercícios semelhantes à atividade

[4] *Caderno do Aluno* [4] volume 2, 6ª série/7ºano. Edição 2014-2017.

Registre as medidas do comprimento da circunferência (C) e do diâmetro (D) do objeto circular na tabela. Em seguida, calcule a razão entre C e D. Registre também as medidas e as razões obtidas por quatro colegas que tenham escolhido um objeto diferente do seu.

Objeto circular	**Comprimento C (cm)**	**Diâmetro D (cm)**	**Razão $\frac{C}{D}$**
Média			

Figura 3.6: *Cadernos do Aluno*: Tabela dos resultados encontrados nas medições.

experimental, os alunos encontram a questão:

> *Para uma circunferência perfeita, o valor da razão entre seu comprimento e seu diâmetro se aproxima de um valor constante, que vale aproximadamente 3,14. A essa razão foi dado o nome de* pi, *representado pela letra do alfabeto grego π. O valor da média que você calculou ficou acima, igual ou abaixo do valor de π? Se não foi igual, a que você atribuiria essa diferença?*

A conclusão das ideias é feita algumas perguntas depois, onde o "método" para calcular o comprimento da circunferência a partir do diâmetro é explicado:

> *Se a razão entre o comprimento da circunferência (C) e seu diâmetro (D) é constante e vale, aproximadamente, 3,1, isso significa que podemos calcular C multiplicando D por esse valor. Ou seja, $C = 3{,}1 \cdot D$. Da mesma forma, conhecendo o comprimento C de uma circunferência, podemos obter seu diâmetro dividindo C por 3,1.*

Segue uma seleção de cinco problemas contextualizados sobre o conteúdo apresentado, encerrando-se o tópico.

Ao final do 9º ano, os alunos voltam a trabalhar com os tópicos envolvendo a circunferência, com o estudo dos "corpos redondos", que inclui os conceitos do número π, a circunferência, o círculo e suas partes e a área do círculo. Após este estudo, conforme o currículo, o estudante deve conhecer a circunferência, bem como seus principais elementos, características e suas partes; além de compreender o significado do π e utilizá-lo no cálculo do perímetro e da área da circunferência.

O importância dos ângulos e da circunferência é ampliada quando são propostas medições de distâncias inacessíveis. Como exemplo, o *Caderno do Aluno* do 9º ano, Volume 2, na *Situação de Aprendizagem 4: Razões trigonométricas dos ângulos agudos*[5] propõe como “Atividade de investigação” a construção de um teodolito caseiro, fazendo uso de um transferidor, um copo plástico, arame e o tubo de uma caneta. A Figura 3.7 mostra como ficará o teodolito.

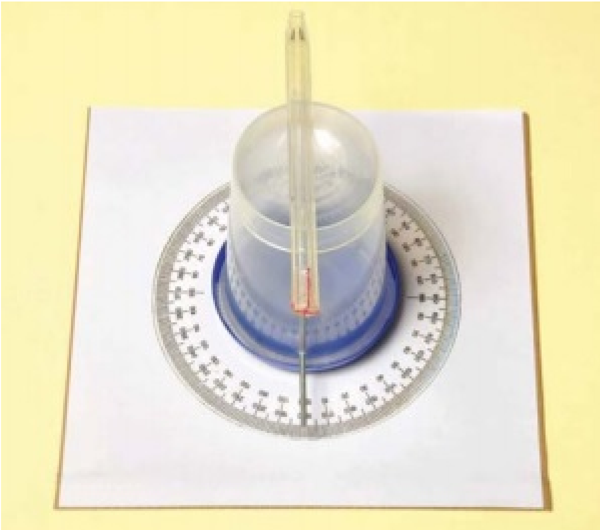


Figura 3.7: *Cadernos do Aluno*: exemplo da contrução de um teodolito caseiro.

A instrução de utilização é bastante clara e simples, como descreve o *Caderno do Aluno*:

> *A versão simplificada funciona como o aparelho verdadeiro. Com ele, é possível medir, a partir de uma posição qualquer, o ângulo formado entre dois outros pontos. Na horizontal ou na vertical, basta alinhar a indicação 0° do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará de quantos graus é a variação.*

Seguem diversos exercícios de medição de distâncias inacessíveis, sendo que o professor poderá utilizá-los como referência para atividades diferenciadas fora da sala de aula. Por exemplo, o exercício de número 10 convida o aluno a determinar a largura de uma rua com uso do teodolito para medir o grau α e uma fita métrica para tomar as medidas de m e n, como exemplificado na Figura 3.8.

Ainda no 9º ano, o *Caderno do Aluno*, em sua *Situação de Aprendizagem 5: A natureza do número π* traz uma investigação mais profunda do tema, com leituras e análise de textos sobre o tema e uma apresentação do “cálculo de π ao longo da história”:

> *Arquimedes resolveu fazer aproximações por meio de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência. A medida do comprimento da circunferência estaria entre o perímetro do polígono inscrito e o perímetro*

[5]Os *Cadernos do Aluno* são divididos em Situações de Aprendizagens, e não em capítulos.

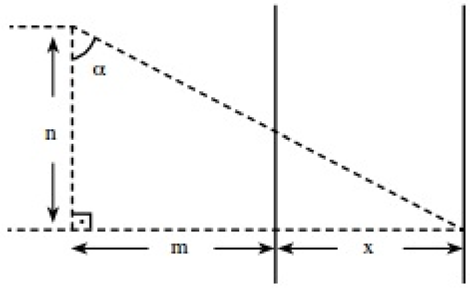


Figura 3.8: *Cadernos do Aluno*: determinação da largura de uma rua com o teodolito.

> *do polígono circunscrito. Quanto maior o número de lados do polígono, mais ele se aproximaria da circunferência, por dentro e por fora. (...) Muitos outros matemáticos aplicaram o método de Arquimedes para obter aproximações cada vez mais precisas do valor de π.*

Além disso, o texto também traz a explicação para uma curiosidade muito comum entre os estudantes:

> *Embora essa razão seja conhecida desde a Antiguidade, o nome e o símbolo usados para representá-la só surgiram no século XVIII. A letra π, do alfabeto grego, foi escolhida por ser a primeira letra da palavra* peripheria, *cujo significado é circunferência, ou seja, o contorno de um círculo. Também foi nessa época que se fez uma das descobertas mais importantes sobre o π. O matemático francês Johann Lambert conseguiu provar que não há nenhuma razão de números inteiros cujo resultado seja igual a π. Ou seja, π é um número irracional, cuja representação decimal é infinita e não periódica.*

Na sequência verifica-se a *Situação de Aprendizagem 6: a razão π no cálculo do perímetro e da área do círculo.* Logo de início a atividade apresenta o comprimento da circunferência como o "desenrolar" da mesma, por meio de desenhos (veja a Figura 3.9) seguida da aplicação com a roda de um automóvel, calculando quantos metros o carro percorre em um giro completo da roda e outras situações semelhantes.

Ainda na mesma *Situação de Aprendizagem* é apresentada historicamente a área do círculo com base no *Papiro de Rhind*:

> *Um dos documentos mais importantes do antigo Egito é o Papiro de Rhind, encontrado no templo do faraó Ramsés II. Ele foi copiado pelo escriba Ahmés, por volta do ano 1650 a.C., e contém uma série de problemas matemáticos. Ao que tudo indica, era uma espécie de manual de matemática egípcia, transmitido de geração em geração. Acredita-se que esses conhecimentos existam desde a construção das grandes pirâmides, há quase 5 mil anos.*

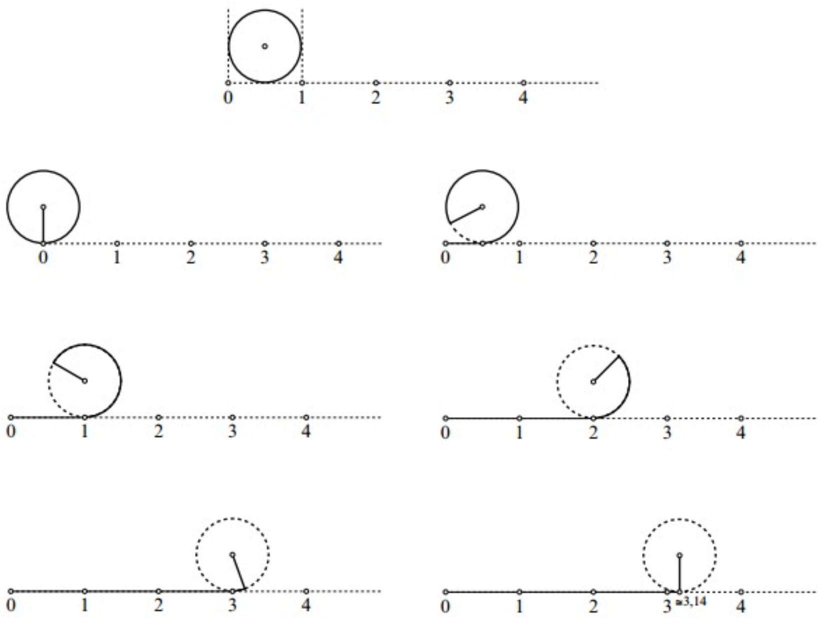


Figura 3.9: *Cadernos do Aluno*: "desenrolando" a circunferência.

> *Um dos problemas desse papiro tratava do cálculo da área de um círculo. (...) A estratégia adotada consistia em aproximar a área do círculo por meio da área de um octógono inscrito dentro do quadrado (...)*

A seguir, o estudante é convidado a repetir o processo apresentado, encontrando por meio de malhas quadriculadas, por excesso e por falta, a área de determinadas circunferências apresentadas. Finalmente, a fórmula para a área do círculo é deduzida da forma usual (como apresentada na maioria dos livros didáticos), dividindo-se o círculo em n triângulos e calculando-se a soma das áreas dos mesmos, como ilustração na Figura 3.10.

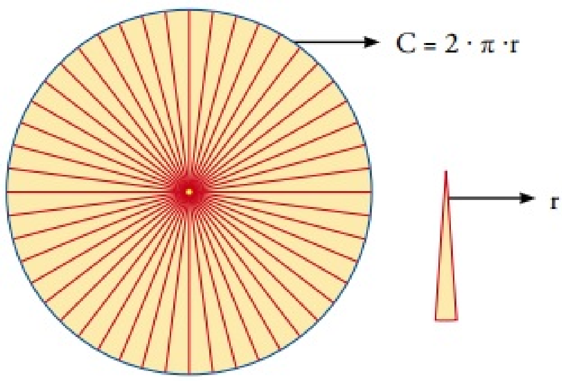


Figura 3.10: *Cadernos do Aluno*: deduzindo a fórmula para a área do círculo.

Logo após o tópico é encerrado com algumas questões envolvendo as ideias relacionadas ao setor circular.

3.2.2 Ensino Fundamental: livros didáticos

Durante o processo de aprendizagem, o livro didático faz uma ligação entre a fala do professor e os conteúdos abordados. É interessante notar que, por melhor que seja o professor, ou por mais bem preparado que esteja, nem todas as informações que o professor oferece em aula são plenamente compreendidas e memorizadas pelos estudantes. Portanto, um material adicional é relevante para que o aluno compreenda os conteúdos mais a fundo, muitas vezes de perspectivas diferentes da proposta pelo professor. Neste contexto o livro didático oferece um recurso de grande valor para o aluno em seus estudos; também para o professor ao preparar suas aulas.

Dentre as muitas funções desempenhadas pelo livro didático, destacam-se o desenvolvimento de competências cognitivas e a ampliação dos conhecimentos adquiridos, auxiliando na aprendizagem. É também excelente instrumento para o professor, auxiliando o planejamento das aulas, a condução metodológica escolhida e norteando as atividades desenvolvidas. Contudo, cabe ao professor manter-se atento e utilizar o livro didático em conformidade com sua proposta, complementando os conteúdos apresentados no livro com outras informações e atividades, tendo em vista a diversidade de suas turmas e as necessidades específicas de cada uma.

Verificando os livros aprovados para o PNLD há excelentes opções. Tendo em mente o tema escolhido para este texto, é interessante notar que na maior parte dos livros didáticos a abordagem segue basicamente a mesma ideia do *Caderno do Aluno*, apresentado anteriormente.

Uma das coleções que é bastante conhecida pelos professores de Matemática é a de autoria de Luiz Roberto Dante: *Projeto Teláris - Matemática* [9]. As observações a seguir são deste livro, embora existam outras opções, também de excelente qualidade, disponíveis aos docentes.

Já no primeiro livro da coleção, para o 6º ano, no capítulo três, os alunos terão contato com a Geometria por meio do estudo dos sólidos geométricos, envolvendo os poliedros e os corpos redondos. No mesmo capítulo também é apresentada a ideia de ângulo.

Para a apresentação dos corpos redondos, o autor explica de maneira bastante sucinta:

> *Corpos redondos são sólidos geométricos que têm pelo menos uma superfície não plana, arredondada, e que por isso rolam. Os principais corpos redondos são: esfera, cilindro e cone.*

São apresentados desenhos nos três casos e a planificação no caso do cilindro e do cone. Segue uma interessante observação para uma discussão em duplas:

> *É impossível fazer a planificação da esfera. Converse com um colega sobre isso.*

Utilizando-se desta observação, o professor poderá incentivar reflexões adicionais sobre as propriedades mais simples da esfera. O capítulo do livro segue com a apresentação dos conceitos de ponto, reta e plano. Inicia-se então o estudo dos ângulos. Por meio de imagens de situações cotidianas, como a vela de um barco, os ponteiros de um relógio analógico, uma escada, entre outras; os alunos são incentivados a pensar em objetos da sala de aula onde ângulos podem aparecer. A definição formal é dada logo a seguir:

> *Em Matemática, consideramos ângulo a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.*

Os ângulos também são interpretados como "giros" em uma pista circular ou o giro dos ponteiros em um relógio analógico. A apresentação segue com a explanação dos ângulos reto, agudo e obtuso.

O estudo da Geometria volta a aparecer no segundo livro da coleção, voltado à alunos de 7º ano. No segundo capítulo o estudo dos sólidos geométricos, regiões planas e contornos retoma os conceitos trabalhados no ano anterior. Logo na introdução do capítulo o autor segue por uma abordagem histórica para o cálculo de áreas, citando brevemente o *papiro de Rhind* e os cálculos babilônicos. Na sequência é feita uma diferenciação entre as figuras espaciais (ou sólidos geométricos), as figuras planas, os contornos (linhas fechadas) e as linhas abertas. O capítulo segue com a apresentação dos poliedros, planificações e simetrias.

Ainda no livro voltado aos alunos de 7º ano, o capítulo seis apresenta o tema: *Geometria: ângulos e polígonos.* Como motivação inicial para o estudo das formas geométricas e ângulos é apresentado o exemplo da fachada da Torre do Banco da China, em Hong Kong, onde são evidentes as figuras geométricas em seu *design.* O capítulo segue com a apresentação dos conceitos de ângulos, em particular com a indicação dos ângulos formados pela posição dos ponteiros em um relógio analógico. A definição é apresentada da mesma forma como no volume anterior. Após a apresentação dos tipos de ângulos (raso, reto, agudo, obtuso e nulo) o estudante encontrará uma variedade de exercícios sobre o tema; o capítulo também apresenta o transferidor e orienta seu uso. Outros temas trabalhados envolvem as operações com as medidas dos ângulos, conceitos de ângulos congruentes, adjacentes, complementares e suplementares, opostos pelo vértice e bissetriz de um ângulo.

No terceiro volume da coleção, voltado a alunos do 8º ano, já no primeiro capítulo, que trata de conjuntos numéricos, é apresentado o número π como um "número irracional notável". Com o tópico "Fazendo a gente aprende" o autor faz o convite para que os alunos meçam o diâmetro (**b**) e o comprimento da circunferência (**C**) de alguns objetos circulares com uma fita métrica, registrando os resultados obtidos em uma tabela, como a mostrada na Tabela 3.1.

Usando uma calculadora o aluno deve encontrar o quociente de **C** por **d** para cada objeto. A conclusão aparece como segue:

Objeto	Comprimento da Circunferência (C) em cm	Diâmetro (d) em cm	C : d
copo	22,9 cm	7,3 cm	
pires	47,7 cm	15,2 cm	
relógio			
DVD			

Tabela 3.1: Atividade do livro didático.

*O resultado da divisão de **C** por **d** dá sempre um número próximo de 3, qualquer que seja a circunferência. Fazendo medições com muita precisão, o quociente passa um pouquinho de 3.*

Na sequência, concluindo o processo de experimentação é apresentado que:

π *(pi) = Comprimento da circunferência(**C**) : medida do diâmetro (**d**)*

Portanto:

*Comprimento da circunferência (**C**) =* π *(pi) · medida do diâmetro (**d**)*

A mesma conclusão anterior é registrada na forma algébrica e o autor salienta também que "a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio", resultando na conhecida fórmula C=2 π r. São propostos exercícios de fixação e o conteúdo continua com a apresentação de outros números irracionais.

O estudo dos ângulos é retomado no capítulo três por meio dos triângulos e quadriláteros, calculando seus ângulos internos e externos e a soma destes. Contudo, é no capítulo seis, por meio do estudo da circunferência e círculo, que o estudo dos ângulos aparece de forma mais próxima ao necessário para a proposta deste texto, trazendo as definições de ângulo central, ângulo inscrito e ângulo de segmento em uma circunferência. O capítulo seis começa com a apresentação da roda ao longo da história, como poderosa ferramenta ao longo dos tempos. A definição de ângulo central é bastante útil:

O ângulo central em uma circunferência é todo ângulo que tem como vértice o centro dessa circunferência.

Logo em seguida também é apresentado a medida do arco delimitado por um ângulo central, bem como exercícios sobre os conteúdos trabalhados.

No capítulo sete do mesmo volume destinado aos alunos do 8º ano, são trabalhados os conceitos envolvendo perímetros, áreas e volumes. Os conceitos que levam ao comprimento da circunferência são retomados com outros exemplos, levando à fixação da fórmula que será amplamente utilizada na resolução dos exercícios.

Para o quarto volume da coleção, este destinado aos alunos do 9º ano, o conteúdo aparece junto com o conceito de proporcionalidade, quando são retomadas as ideias de razão e proporção. Os conceitos fundamentais são apresentados em caixas amarelas logo no início do capítulo:

> *Razão entre dois números, com o segundo diferente de zero, é o quociente do primeiro pelo segundo.*
>
> *Duas razões de mesmo valor formam uma proporção.*

O valor de π é relembrado então como a proporcionalidade na circunferência:

> *Considerando duas ou mais circunferências, a razão entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro em quaisquer delas é sempre a mesma.*

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \pi$$

Seguem exercícios utilizando o comprimento da circunferência, raio e diâmetro. O capítulo seis do mesmo volume trata do estudo das relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência. De particular interesse é o tópico sobre as relações métricas na circunferência. Tal parte do capítulo inicia-se relembrando os conceitos fundamentais de *raio, diâmetro, corda, segmento secante* e *segmento tangente*, fazendo bom uso de ilustrações para cada situação. Observações complementares ajudam os estudantes a memorizar cada item com facilidade, relacionando-os, como segue:

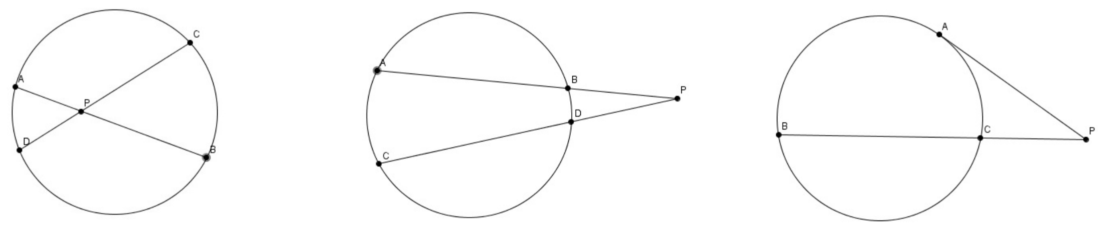
- *O diâmetro mede o dobro do raio.*
- *O diâmetro é a corda de maior medida.*
- *Todos os raios tem a mesma medida.*
- *Segmento secante: uma de suas extremidades é um ponto fora da região circular. Esse segmento tem dois pontos comuns com a circunferência, sendo um deles a outra extremidade.*
- *Segmento tangente: segmento que está sobre uma reta tangente à circunferência e o ponto de tangência é uma de suas extremidades.*

São apresentadas as relações entre duas cordas de uma circunferência, entre dois segmentos secantes a uma circunferência e entre um segmento secante e um segmento tangente a uma circunferência, como mostrado na Figura 3.11.

Resumindo as relações métricas temos que:

(a) Relação entre duas cordas de uma circunferência (Figura 3.11.a): em toda circunferência, quando duas cordas se cruzam, o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes de outra.

(b) Relação entre dois segmentos secantes a uma circunferência (Figura 3.11.b): em toda circunferência, se traçamos dois segmentos secantes a partir de um mesmo ponto, o produto da medida de um deles pela medida de sua parte externa é igual ao produto da medida do outro pela medida de sua parte externa.



(a) AP · BP = CP · DP (b) PA · PB = PC · PD (c) $(\mathrm{PA})^2 = \mathrm{PB} \cdot \mathrm{PC}$

Figura 3.11: Relações métricas na circunferência.

(c) Relação entre um segmento secante e um segmento tangente a uma circunferência (Figura 3.11.c): em toda circunferência, se traçamos, a partir de um mesmo ponto, um segmento tangente e um segmento secante, o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto da medida do segmento secante pela medida de sua parte externa.

Seguem exercícios de aplicação dos conceitos. No capítulo oito do mesmo volume, sob o tópico de *perímetro de uma circunferência*, a relação entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro volta a aparecer. Por meio da abordagem histórica, o autor vai explicando os esforços realizados por diferentes povos a fim de encontrar uma aproximação para o número π. Ao final da explicação o autor salienta:

> *Como você já estudou no 8º ano, hoje sabemos que π é um número irracional. Entretanto, para efetuar cálculos, usamos valores aproximados para π como 3,14.*

O estudo segue com o comprimento de um arco de uma circunferência e o perímetro de um setor circular. Também é apresentada a área do círculo, calculada de duas maneiras diferentes: dividindo o círculo em setores e usando aproximações por polígonos regulares. Para a divisão do círculo por setores é usada uma ilustração muito usual, próxima a apresentada anteriormente, agora representada na Figura 3.12.

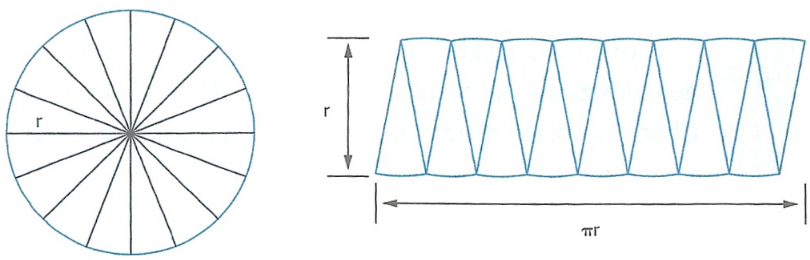


Figura 3.12: Deduzindo a fórmula para a área do círculo.

Um aspecto bastante interessante é o cálculo feito por meio das aproximações por polígonos regulares. O livro retoma o fato (calculado nos capítulos anteriores do livro) de que a área da região determinada por um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$ em que a é a medida do apótema e P é o perímetro. Deste modo, observando a sequência de ilustrações do livro, como mostrada na Figura 3.13, é bastante lógico concluir que à medida que o polígono se aproxima de um círculo, seu apótema[6] se aproxima do raio do círculo. Ainda mais, o perímetro do polígono passa a ser o comprimento da circunferência, e a conclusão é imediata:

$$A = \frac{aP}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2$$

Então: $A = \pi r^2$.

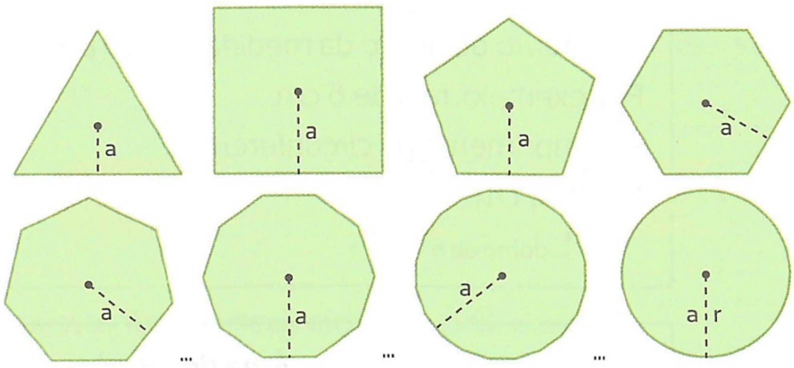


Figura 3.13: Deduzindo a fórmula para a área do círculo.

Um quadro resumo apresenta os conceitos básicos sobre a circunferência e o círculo, bem como suas fórmulas. Segue uma variedade de exercícios contextualizados.

Como conclusão, cabe salientar que o apresentado aqui para esta coleção também aparece de forma bastante próxima em outras coleções consultadas, tornando evidente que os alunos tem muitas oportunidades de realizar o estudo da circunferência ao longo do ensino fundamental. Mais ainda, estão preparados para o Ensino Médio a fim de aprofundar seus conhecimentos básicos.

Na Tabela 3.2 apresentamos um resumo das informações consideradas ao longo desta seção com respeito ao Estudo da Circunferência presentes no Currículo do Estado de São Paulo, *Cadernos do Aluno* e no livro didático de Dante [9].

[6]Considerando um círculo e um polígono inscrito de n lados, definimos como apótema de uma figura poligonal o segmento de reta que parte do centro da figura formando com o lado um ângulo de 90º. O apótema é perpendicular ao lado do polígono.

Ano	Currículo do Estado de São Paulo	Cadernos do Aluno	Livro didático de referência: Dante
6º ano	É feito o estudo das formas geométricas (planas e espaciais).	No volume 2 a Situação de Aprendizagem 4 trata do tema: "Perímetro, área e arte usando malhas geométricas".	O capítulo 3 tem por tema "Geometria: sólidos geométricos, ângulos e polígonos".
7º ano	Em geometria são estudados os ângulos (em graus) e a circunferência. Também, é feito o uso de instrumentos geométricos para construir e medir ângulos. Em proporcionalidade, aparece o tópico: "razões constantes na Geometria (π)".	O volume 1, na Situação de Aprendizagem 5 tem o tema "A geometria dos ângulos". No volume 2, a Situação de Aprendizagem 3 tem por tema "Razões na Geometria".	O capítulo 2 traz o tema "Geometria: sólidos geométricos, regiões planas e contornos". No capítulo 6 é apresentado o tema "Geometria: ângulos e polígonos".
8º ano			O capítulo 1 trata de "Conjuntos numéricos", onde aparece o quadro "Números irracionais notáveis: o notável número π". O capítulo 6 trata do estudo da "Circunferência e círculos", e o capítulo 7 tem por tema "Perímetros, áreas e volumes".
9º ano	O estudo dos corpos redondos retoma o número π, a circunferência, o círculo e suas partes e a área do círculo.	No volume 2 as Situações de Aprendizagem 4 a 7 tratam dos temas: "Razões trigonométricas dos ângulos agudos", "A natureza do número Pi (π)", "A razão π no cálculo do perímetro e da área do círculo" e "Cilindros".	O capítulo 4 tem por tema "Proporcionalidade em Geometria", enquanto os capítulos 6 e 7 trazem os temas "Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência" e "Introdução à Trigonometria" (com polígonos regulares inscritos em uma circunferência). Já o capítulo 8 tem por tema "Perímetros, áreas e volumes".

Tabela 3.2: O estudo da circunferência no Ensino Fundamental.

A próxima seção apresenta o conteúdo conforme abordagem dos materiais disponíveis para o Ensino Médio.

3.3 Estudo da circunferência: Ensino Médio

O Ensino Médio apresenta um aprofundamento dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental, resultando em uma preparação para o mundo do trabalho ou a continuidade dos estudos em nível superior. Do aluno ingressante no Ensino Médio espera-se que tenha cumprido de forma satisfatória os conteúdos propostos para o Ensino Fundamental, de forma que possa prosseguir com os estudos, aprofundando os temas anteriores e aprendendo novos. Deste modo, os materiais de referência para o Ensino Médio apresentam uma continuação lógica do apresentado anteriormente, continuando a "construção" do conhecimento do aluno. Ao professor cabe avaliar o quanto sua turma efetivamente aprendeu e compreendeu os conteúdos anteriores e adaptar seu trabalho à realidade da turma à qual leciona.

3.3.1 Os *Cadernos do Aluno*

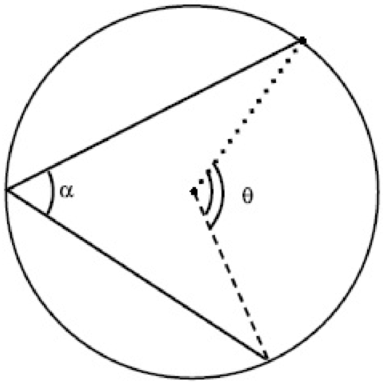
Como salientado anteriormente, o Governo do Estado de São Paulo fornece aos alunos da rede pública estadual os *Cadernos do Aluno*, material que está de acordo com o Currículo Estadual e serve como norteador no trabalho do professor.

As ideias relacionadas ao estudo da circunferência aparecem já no primeiro ano, em conjunto com o estudo do triângulo retângulo. No segundo semestre do primeiro ano do Ensino Médio, o *Caderno do Aluno* [3] apresenta a *Situação de Aprendizagem 6: Dos triângulos à circunferência: vamos dar uma volta?* O objetivo da unidade é apresentar o círculo trigonométrico, com as relações do seno, cosseno e tangente para os diversos ângulos existentes. Na *Situação de Aprendizagem 7: Polígonos e circunferências: regularidades na inscrição e circunscrição* os estudantes tem a oportunidade de verificar os ângulos mais utilizados por meio da inscrição de polígonos, facilitando a compreensão dos mesmos. O conceito fundamental trabalhado tem a ver com o ângulo central, uma vez que o aluno já possui este conhecimento de seus estudos no Ensino Fundamental.

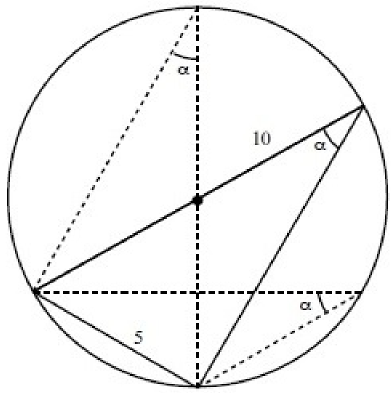
Na *Situação de Aprendizagem 8: A hora e a vez dos triângulos não retângulos*, o estudo torna-se bastante próximo do tema deste texto. Logo na primeira questão, o aluno é convidado a ponderar sobre a relação entre um ângulo inscrito e um ângulo central:

> *Mostre que, se um ângulo α é inscrito em uma circunferência, sua medida é igual à metade da medida do ângulo central θ correspondente.* (Veja a Figura 3.14.a).

Seguem exercícios sobre a Lei dos Senos e propriedades gerais de triângulos retângulos. Contudo, logo a seguir, na questão de número quatro, o aluno irá exercitar seus conhecimentos sobre ângulos inscritos e ângulo central, como segue:



(a) Questão 1: Trabalhando com ângulos inscritos e ângulo central.



(b) Questão 4: Trabalhando com ângulos inscritos e ângulo central.

Figura 3.14: *Cadernos do Aluno*: 1º ano do Ensino Médio.

> *Um ângulo α inscrito em uma circunferência de diâmetro 10 m subentende uma corda de 5 m. Determine a medida de α em graus.* (Veja a Figura 3.14.b).

Assim, é esperado que o aluno retome seus conhecimentos anteriores em preparação para os conteúdos abordados no segundo ano do Ensino Médio.

O estudo da circunferência aparece de forma direta ou indireta em vários momentos, ajudando no desenvolvimento de diversos conteúdos, ainda que não seja o assunto em questão. Por exemplo, tomando-se o *Caderno do Aluno* para o primeiro semestre do segundo ano, em sua *Situação de Aprendizagem 2*, o estudo da periodicidade passa pelo modelo da circunferência trigonométrica. Nesta *Situação de Aprendizagem* a ideia de unidade é apresentada com *uma volta completa do Sol em torno da circunferência, que corresponderá ao período de um ano e, desenhando uma escala sobre o eixo vertical, será possível associar ângulos de giro do Sol a medidas de segmentos* (Veja a Figura 3.15). O conteúdo é trabalhado como proposta para o estudo da circunferência trigonométrica, e dirigido para tal finalidade.

A razão entre o comprimento e o diâmetro, e entre o comprimento e o raio são relembrados. Na mesma sequência o conceito de *radianos* aparece de modo bastante simples:

> *"Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência."*

A Figura 3.16 ilustra a situação. O estudante é convidado a ponderar sobre quantos radianos equivalem a meia circunferência e também a um arco. Ângulos centrais e arcos também são analisados partindo das medidas em radianos, finalizando o tópico com a construção de gráficos com eixos marcados em radianos.

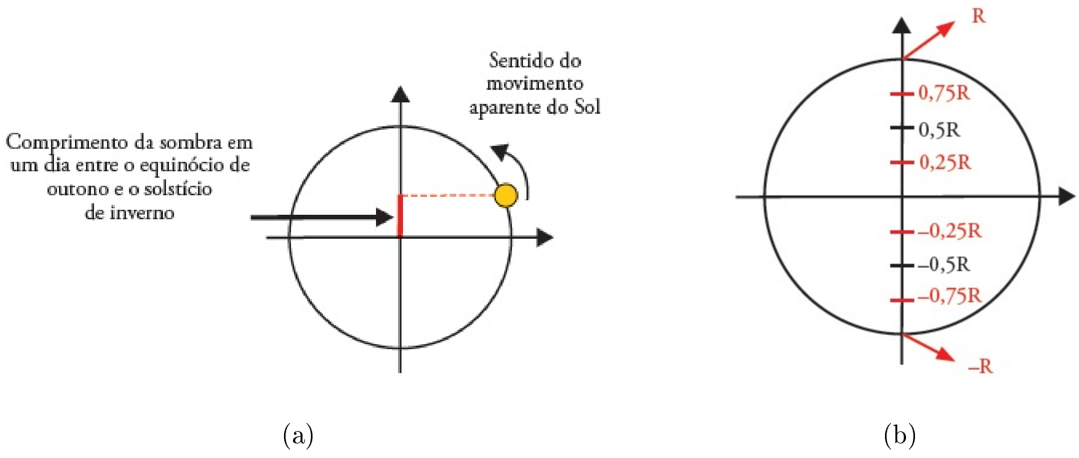


Figura 3.15: *Cadernos do Aluno*: uma volta completa do Sol implementada em uma escala simplificada no eixo vertical, medida em frações do raio da circunferência (R).

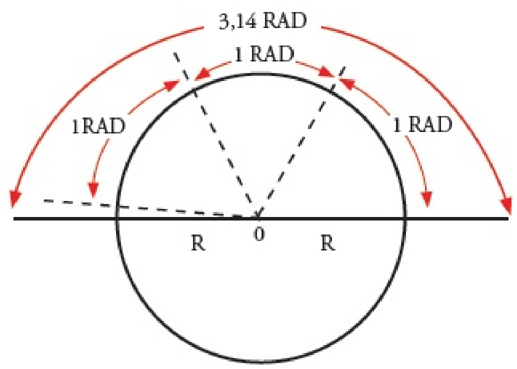
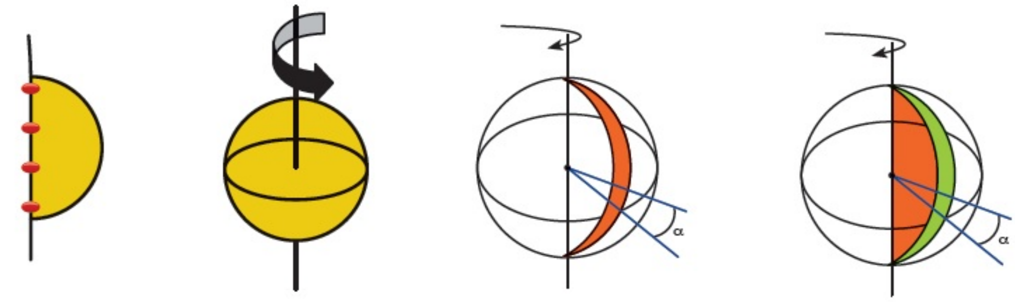


Figura 3.16: *Cadernos do Aluno*: a ideia de radianos.

Novamente de forma indireta, o estudo da circunferência volta a aparecer com o estudo do cilindro, no segundo semestre do segundo ano. No contexto da *Situação de Aprendizagem 6* o estudante irá calcular o volume do cilindro, conhecidas a área da base (portanto um círculo) e a altura do cilindro. Na *Situação de Aprendizagem 7*, no estudo dos cones, a área do círculo também está presente.

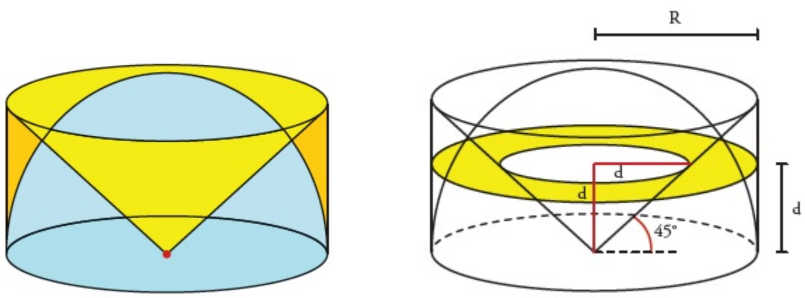
É na *Situação de Aprendizagem 8*, com o título *Esfera: conhecendo a forma do mundo*, que o estudo da circunferência aparece de modo mais significativo. A esfera é apresentada como o resultado da *revolução de um círculo ou semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro*. Assim, a superfície esférica guarda muitas aproximações com a circunferência, sendo que ela representa o conjunto de pontos do espaço que equidistam do centro. Também são apresentadas as noções de *fuso esférico* e *cunha esférica*, como pode ser visto na Figura 3.17.

Na mesma *Situação de Aprendizagem* também é apresentado o volume da esfera, tendo por base a dedução a partir dos volumes do cilindro e do cone, como mostrado na Figura 3.18.

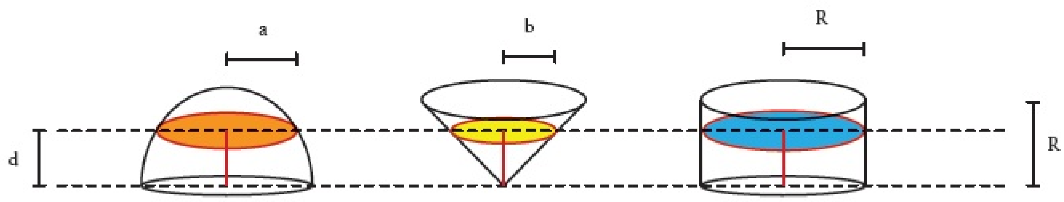


(a) (b) (c)

Figura 3.17: *Cadernos do aluno*: apresentação da esfera, fuso e cunha esférica.



(a) (b)



(c)

Figura 3.18: *Cadernos do aluno*: cálculo do volume da esfera.

Observando atentamente a primeira da sequência de Figuras 3.18.c é possível perceber que, para o hemisfério mostrado é clara a relação $R^2 = d^2 + a^2$, e assim $a^2 = R^2 - d^2$. Ainda mais, como mostrado na Figura 3.18.b o ângulo que o cone faz com a base do cilindro é de 45°, deste modo $b = d$ visto que estes foram um triângulo retângulo isósceles com a lateral do cone. De posse de tais informações, é possível calcular as áreas na seção do hemisfério, do cilindro e do cone. Chamando-as respectivamente de A_1, A_2 e A_3 temos que:

$$A_1 = \pi \cdot a^2$$

$$A_2 = \pi \cdot R^2$$

$$A_3 = \pi \cdot b^2$$

Comparando as expressões anteriores, é possível perceber que:

$$A_1 = A_2 - A_3$$

$$A_1 = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot d^2$$

Como o valor de d é arbitrário, o resultado pode ser generalizado. Utilizando as fórmulas para o volume do cilindro e do cone, bem como as áreas obtidas anteriormente, obtêm-se que:

$$V_{hemisf\acute{e}rio} = V_{cilindro} - V_{cone}$$

$$V_{hemisf\acute{e}rio} = \pi \cdot R^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$$

$$V_{hemisf\acute{e}rio} = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$$

Lembrando que o volume da esfera é o dobro do volume do hemisfério temos que:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Para a área da superfície esférica, o material em questão aplica o método da decomposição em pequenas regiões, "aproximadamente" planas, que formam pequenas pirâmides, sendo a base de cada uma delas uma pequena área da superfície esférica e a altura da pirâmide é o raio da esfera. Sabe-se, então, que o volume total destas pequenas pirâmides resulta no volume total da esfera. Usando S_i para a base de cada pequena pirâmide, lembrando que sua altura será R, segue da fórmula para o volume de pirâmides que:

$$V = \frac{1}{3}R \cdot (S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n)$$

Também, o volume da esfera calculado anteriormente é: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Igualando as expressões é fácil notar que a soma das áreas $S_1, S_2, \cdots, S_n$, agora chamada apenas de S, vale:

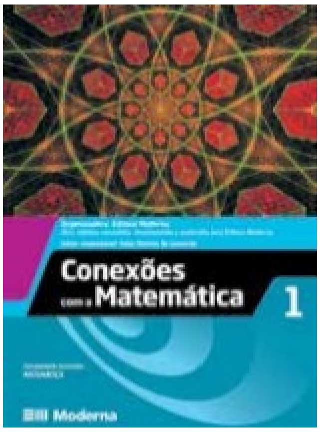
$$S = 4\pi R^2.$$

Exercícios complementares finalizam o conteúdo proposto para o ano.

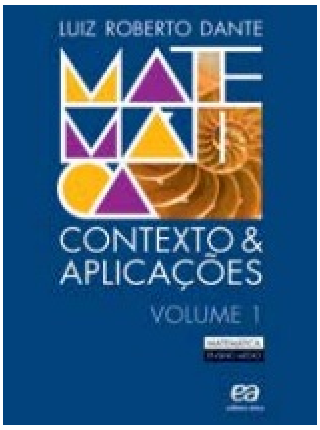
Para o terceiro ano do Ensino Médio, os alunos passam por uma breve introdução à Geometria Analítica Plana, tendo no *Caderno do Aluno* do primeiro semestre um contato com as fórmulas para a circunferência e cônicas, bem como os traçados dos gráficos e seus principais elementos.

3.3.2 Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)

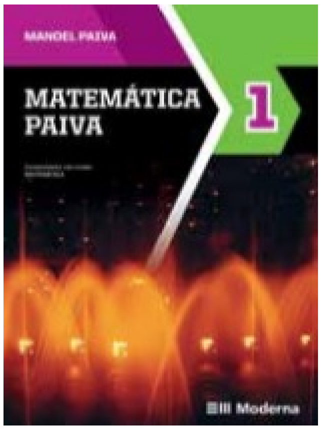
Como acontece no Ensino Fundamental, os professores do Ensino Médio também têm à sua escolha uma série de coleções que podem ser adotadas para o uso em sala de aula. A avaliação das obras inscritas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) podem ser encontradas no *Guia de livros didáticos PNLD 2015: Ensino Médio*. Para o PNLD 2015/Ensino Médio foram seis as coleções aprovadas. A escolha do livro didático por parte do docente visa ampliar suas ferramentas na apresentação dos conteúdos propostos, sempre tendo como objetivo desenvolver as habilidades dos alunos. Para os professores da rede pública do Estado de São Paulo, trata-se de uma ferramenta adicional a ser utilizada em conjunto com os *Cadernos do Aluno*.



(a) Leonardo, F. M. [10]



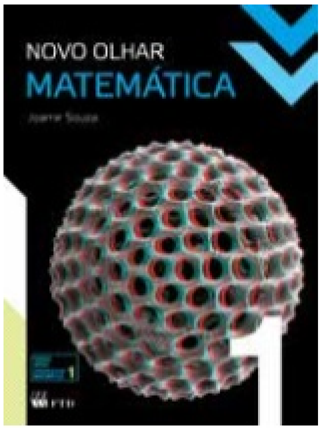
(b) Dante, L. R. [11]



(c) Paiva, M. [12]

(d) Iezzi, G. *et al.* [13]

(e) Smole K. C. S. *et al.* [14]



(f) Souza, J. R. [15]

Figura 3.19: Coleções indicadas no PNLD.

Ao comentar as propostas dos livros didáticos, deve-se ter em mente o papel que desempenham junto aos estudos no Ensino Médio, lembrando o disposto pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em seu artigo 35, a saber, que o educando consiga *consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos, preparar-se para o trabalho e a cidadania, desenvolver sua formação ética e a autonomia intelectual e do pensamento crítico, bem como compreender os fundamentos dos processos produtivos.*

Portanto, o livro didático pode ser para o aluno uma ferramenta de consolidação, ampliação e aprofundamento de seus conhecimentos, contribuindo para sua autonomia. Do mesmo modo, pode contribuir à prática docente, auxiliando o professor no planejamento de suas aulas, favorecendo sua formação didático-pedagógica, e constituindo referência na gestão das aulas.

Que a matemática é de importância fundamental já foi explicitado em diversos momentos no presente texto, e é ressaltado com grande ênfase no *Guia de livros didáticos PNLD 2015*. Assim, o ensino da matemática não pode deixar de capacitar os estudantes para planejar ações e projetar soluções, argumentar, interpretar, avaliar e estimar, empregando seus conhecimentos e conceitos fundamentais para resolver problemas e situações. Pela proposta do PNLD 2015, os autores também foram convidados a incluir em suas obras *Objetos Educacionais Digitais* (OEDs), sendo tais recursos multimídias integrados à proposta da obra. Estes, por sua vez, devem desempenhar um papel suplementar à proposta didático-pedagógica da coleção, possibilitando a exploração de seus aspectos e conteúdos. Com bom planejamento, o docente pode fazer do livro didático uma ferramenta útil em sua realização diária, tendo em vista o projeto pedagógico da escola, e o objetivo maior de desenvolver as habilidades necessárias para que seus alunos se capacitem como cidadãos conscientes.

Os livros que fazem parte do PNLD 2015 são mostrados na Figura 3.19. Na sequência são feitos alguns comentários gerais sobre esses livros e como os mesmos abordam o tema escolhido. Não se trata de julgamento, mas de considerações sobre aspectos positivos presentes nos livros.

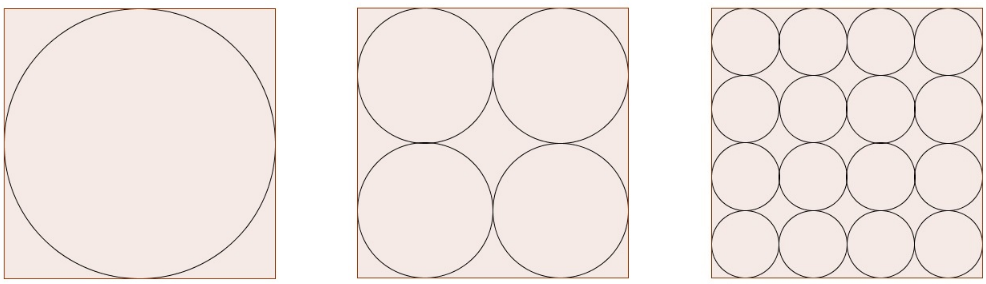
3.3.3 Estudo da circunferência: propostas dos livros didáticos

As propostas dos autores dos livros didáticos aprovados pelo PNLD são levemente diferentes quando se diz respeito à apresentação dos conteúdos, ainda que o conteúdo trabalhado seja o mesmo. Também há mudanças na sequência em que estes aparecem, bem como nos conhecimentos que cada autor pressupõe que os estudantes tenham. Aqui é apresentado um breve resumo da forma como os livros apresentam o estudo da circunferência.

Os autores de *Conexões com a Matemática*, por exemplo, tomam por pressuposto que o aluno teve um bom desenvolvimento no Ensino Fundamental, e já tem mentalizadas as fórmulas para a área da circunferência, pois são utilizadas em alguns exercícios logo no primeiro volume da coleção, antes de haver uma explicação ou revisão do tema. O mesmo ocorre com a coleção *Matemática: Contexto e Aplicações*, onde o autor Luiz Roberto Dante também faz uso da ideia de circunferência dentro do capítulo dois, sob o tópico de *funções*. Na subseção que trata de coordenadas cartesianas é apresentada ao aluno a equação de uma circunferência, dados o ponto do centro e o raio. Logo em seguida é explicado que o gráfico de uma circunferência não representa uma função (uma vez que a explicação está no capítulo que estuda funções).

Por outro lado, outros autores optam por fazer uma revisão dos conteúdos anteriormente trabalhados e aprofundar o tema. É o caso encontrado na Coleção *Matemática Paiva*, onde o autor Manoel Paiva escolhe o quarto capítulo do primeiro volume para realizar o estudo da circunferência, do círculo e o cálculo de áreas. O início do capítulo traz uma abordagem histórica de como Eratóstenes calculou com bastante precisão o comprimento da terra por volta de 240 a.C., utilizando ferramentas bastantes próximas às que serão abordadas ao longo do capítulo. Na sequência o autor retoma a diferença entre circunferência e círculo, as noções de arcos e cordas, bem como as posições relativas entre reta e circunferência, e entre duas circunferências. São propostos três exercícios ao estudante e o capítulo segue com a apresentação do ângulo central de uma circunferência, do ângulo inscrito em uma circunferência e do ângulo de segmento. O perímetro da circunferência recebe então especial atenção por meio da abordagem histórica, retomando os feitos de Arquimedes de Siracusa e suas aproximações para o número π. Após a apresentação do cálculo de áreas de outras figuras planas, o livro chega à explanação da área do círculo, feita de modo bastante próximo ao relatado anteriormente: partindo da aproximação do círculo por um polígono regular com n lados, formando então n triângulos isósceles e calculando a área destes n triângulos. As áreas do setor circular, segmento circular e coroa circular também recebem atenção. Dentre os vários exercícios propostos aos alunos, vale ressaltar um exercício extraído do ENEM 2004 como segue:

> *Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura 3.20. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:*



(a) (b) (c)

Figura 3.20: Ilustração para a questão do ENEM.

> *(a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.*
>
> *(b) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.*

(c) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

(d) as entidades I e II recebem juntas, menos material do que a entidade III.

(e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

A resolução é bastante imediata: a tampa grande possui raio de $1m$, a média possui raio de $0,5m$ e a pequena raio de $0,25m$. Os quadrados possuem área de $A = (2) \cdot (2) = 4m^2$. Para calcular a área do que sobra em cada chapa, retira-se da área da chapa as áreas das tampas circulares. Para cada entidade, obtêm-se:

Entidade I:

$$4 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi$$

Entidade II:

$$4 - 4\left[\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4 - \pi$$

Entidade III:

$$4 - 16\left[\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = 4 - \pi$$

Logo as três entidades recebem *iguais quantidades de material.*

Cabe ressaltar que por haver pequenas variações no modo como o conteúdo é abordado nas diferentes coleções, alguns exercícios aparecem em outros momentos nos textos didáticos. Exemplo disto é o exercício anterior, que também aparece no livro de Joamir Souza [15], em seu segundo volume, no capítulo sete, destinado ao estudo das áreas de figuras planas.

Apesar das variações existentes em cada coleção no tocante à forma como os conteúdos são abordados, é fato que no início do segundo ano, as coleções indicadas trazem de forma bastante satisfatória o estudo de arcos envolvendo a *circunferência trigonométrica* (ou ciclo trigonométrico, conforme cada coleção). De um modo geral os autores trazem as explicações dos ângulos tanto em graus quanto em radianos, em conjunto com o estudo das funções trigonométricas. Nas coleções onde os conteúdos envolvendo o comprimento da circunferência e a área do círculo não foram tratados no primeiro volume, o estudo é feito no segundo volume. O comprimento da circunferência em geral é apresentado a partir de sua visão histórica, com o estudo da evolução do número π. A área do círculo também é apresentada de maneira bastante próxima ao já comentado anteriormente: aproximando-se o círculo por meio de polígonos regulares inscritos, fazendo sua divisão em triângulos e tomando-se a soma das áreas destes triângulos. O estudo da área da coroa circular, setor circular e segmento circular também estão presentes em algumas das coleções indicadas. Além destes, o estudo dos corpos redondos retoma boa parte dos conteúdos trabalhados com o círculo e a circunferência.

Para exercitar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes, exercícios resolvidos e propostos de boa qualidade estão presentes nas coleções, alguns deles com muitas indicações de exercícios de vestibulares. Um bom exemplo aparece logo no primeiro capítulo do livro *Conexões com a Matemática*, obra coletiva cujo editor responsável é Fábio Martins Leonardo. Ali, em exercícios complementares, marcado como "desafio" aparece uma interessante questão da FUVEST, como segue:

> *A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4cm$ e $R_2 = 1cm$, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}cm$, determinar o comprimento da correia.* (A situação está ilustrada na Figura 3.21).

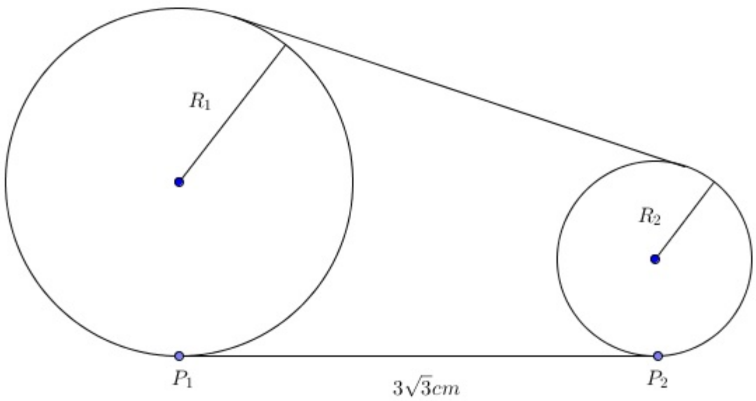


Figura 3.21: *Conexões com a Matemática*: questão do vestibular FUVEST 2004.

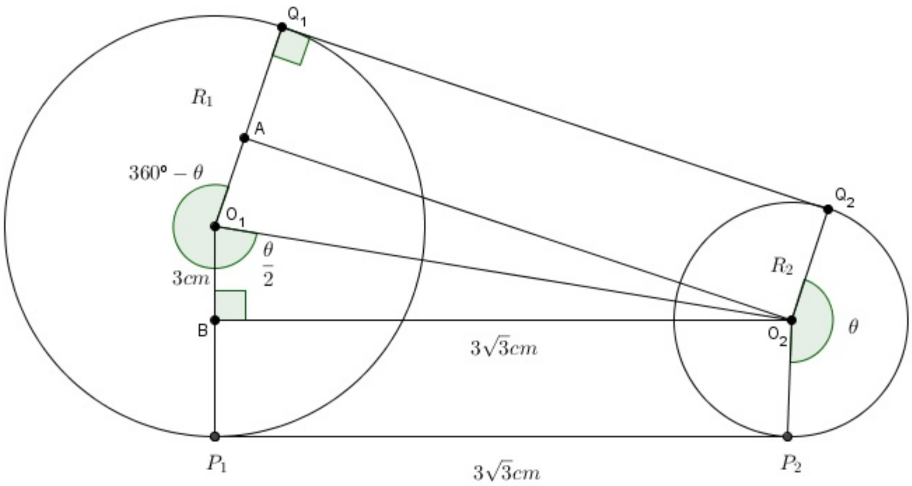


Figura 3.22: Ilustração da resolução da questão do vestibular FUVEST 2004.

Como é verificado na Figura 3.22, o comprimento total L das partes da correia que estão sobre a polia é dado por:

$$\text{Polia } C_1 : L_1 = \frac{(360^o - \theta)}{360^o} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4$$

$$\text{Polia } C_2 : L_2 = \frac{\theta}{360^o} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1$$

Do enunciado, o comprimento entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$. Tomando novamente como referência a Figura 3.22, notemos que os triângulos BO_1O_2 e AO_1O_2 são semelhantes, portanto os comprimentos P_1P_2 e Q_1Q_2 são iguais. Assim, os comprimentos das partes da correia que não estão em contato com a polia somam $6\sqrt{3}cm$. Para determinar θ observe que $tg\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ e $0^o < \theta < 180^o$. Assim: $\frac{\theta}{2} = 60^o$, e portanto $\theta = 120^o$. O comprimento total da correia é dado pela soma de L_1, L_2 e da parte da correia que não está em contato com as polias:

$$L = \frac{(360^o - 120^o)}{360^o} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 + \frac{120^o}{360^o} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 + 6\sqrt{3}$$

$$L = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 + 6\sqrt{3}$$

$$L = 6(\pi + \sqrt{3})cm$$

Cabe observar que por ser uma questão de segunda fase de vestibular, o raciocínio é mais complexo e não tão imediato. Apesar disso, é apresentado como exercício "desafio" proposto aos alunos com maior interesse, ou à sala toda, conforme critério do professor. Outros exercícios semelhantes aparecem nas demais coleções.

Os terceiros volumes das coleções encerram os conteúdos propostos para o Ensino Médio, por vezes apresentando o estudo da circunferência com algum rigor adicional. A circunferência é trabalhada na maior parte das coleções a partir de sua representação na Geometria Analítica, bem como suas equações geral e reduzida. Também são apresentados aos estudantes os conceitos de posição relativa entre ponto e circunferência, reta e circunferência, bem como a posição relativa entre duas circunferências.

Da importância dos conteúdos abordados, são apresentados diversos momentos de contextualização, em geral trazendo atenção aos satélites de posicionamento global (GPS), métodos para detecção de *tsunamis*, e até mesmo obras de arte, como as de Victor Vasarely[7]. Como atividade complementar o docente tem muitos textos de apoio e pode fazer uso das tecnologias digitais durante as aulas. O livro *Conexões com a Matemática* ainda traz a foto de uma cena do filme *Tempos modernos*, onde Charles Chaplin protagoniza um operário, em uma crítica à massificação do ser humano com o advento da era industrial, agora como que fazendo parte de uma engrenagem no sistema - a circunferência movendo os tempos e promovendo a evolução das máquinas.

Outros tópicos trabalhados usualmente no terceiro ano do Ensino Médio tem a ver com o estudo dos corpos redondos e das secções cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Na Tabela 3.3 apresentamos um resumo das informações consideradas ao longo desta seção com respeito ao estudo da circunferência no Ensino Médio presentes no Currículo do Estado de São Paulo, *Cadernos do Aluno* e nos livros didáticos.

[7]Coleção *Novo olhar - Matemática*, de Joamir Souza, volume três, capítulo seis.

Ano	Currículo do Estado de São Paulo	Cadernos do Aluno	Livros didáticos
1ª série	São estudados os polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies.	No volume 2 as Situações de Aprendizagem 6 a 8 têm os temas: "Dos triângulos à circunferência: vamos dar uma volta?", "Polígonos e circunferências: regularidades na inscrição e na circunscrição" e "A hora e a vez dos triângulos não retângulos".	Matemática Paiva: O capítulo 4 realiza o estudo da circunferência. As áreas do setor circular, segmento circular e coroa circular também recebem atenção.
2ª série	Em trigonometria estuda-se a adição de arcos. Já em geometria métrica espacial são estudados os cilindros, cones e esferas.	No volume 1 a Situação de Aprendizagem 2 trata do tema "A periodicidade e o modelo da circunferência Trigonométrica". O volume 2, nas Situações de Aprendizagem 6 a 8 abordam os temas: "Cilindros: uma mudança de base", "O movimento de ascensão: pirâmides e cones" e "Esfera: conhecendo a forma do mundo".	Nas coleções onde os conteúdos envolvendo o comprimento da circunferência e a área do círculo não foram tratados no primeiro volume, o estudo é feito no segundo volume.
3ª série	Os tópicos são vistos a partir da Geometria analítica, com a equação da circunferência, posições relativas entre retas e circunferência e noções de cônicas.	No volume 1 a Situação de Aprendizagem 4 tem o tema "Circunferências e cônicas: significados, equações, aplicações".	A circunferência é trabalhada na maior parte das coleções a partir de sua representação na Geometria analítica, bem como suas equações geral e reduzida.

Tabela 3.3: O estudo da circunferência no Ensino Médio.

Das observações anteriores é possível notar que os conteúdos envolvendo o estudo da circunferência aparecem em quase todos os anos finais do Ensino Fundamental (de 6º a 9º ano) e Ensino Médio. O aluno que não compreender o conteúdo proposto em um primeiro momento terá a oportunidade de retomar este conteúdo ao longo de sua vivência escolar, o que visa gerar uma aprendizagem significativa. Seguindo a mesma ideia, exercícios contextualizados buscam aproximar o que o estudante está aprendendo em sala de aula da realidade, mostrando que a Matemática é aplicável em muitos aspectos da vida cotidiana. Por fim, exercícios selecionados de acordo com as propostas dos livros didáticos buscam assegurar que o aluno desenvolva suas habilidades e competências, à medida que ele pode verificar o que estudou e quais conhecimentos precisa aprofundar ainda.

Mas não são apenas os livros didáticos que podem fornecer uma útil ferramenta para o docente em sala de aula. Com as novas tecnologias digitais cada vez mais presentes em todos os aspectos da vida cotidiana, estas podem se tornar ferramentas para uso em sala de aula. O capítulo seguinte abordará este assunto.

4 Uma proposta usando recursos multimídias

É indiscutível a presença constante de computadores nas mais variadas áreas de pesquisa e conhecimento. Outrora restrito a poucos, nos últimos anos presenciou-se a expansão das tecnologias a todos. Na atual sociedade, é muito comum que os alunos tenham (e tragam à escola) aparelhos como telefones celulares (muitas vezes do tipo *smartphone*), *tablets* ou mesmo *notebooks*. Pela legislação vigente, o uso de tais aparelhos (em especial os aparelhos celulares) é restrito durante as aulas. Inegável, contudo, é o fato de que tais itens chamam a atenção dos alunos, trazendo atenção à quanto estes são interessados em tecnologias digitais.

O professor, por outro lado, tem a tendência de continuar a utilizar-se dos meios anteriormente concebidos para a realização do seu trabalho, digam-se a lousa e o giz. Não se trata de modificar ou invalidar as concepções de ensino-aprendizagem propostas, pelo contrário, aqui apresenta-se uma proposta para incorporar conteúdos digitais às aulas, buscando motivar o aluno ao inserir tecnologias no contexto da sala de aula. Tal atitude é justificável, tendo em vista as tecnologias existentes, bem como o acesso às mesmas nas salas de informática ou por meio de projetores (conectados a um computador) na sala de aula.

Muitas são as possibilidades para se incorporar as tecnologias à aula. Mesmo procurando em quaisquer *sites* de busca na *Internet* é possível encontrar uma variedade de atividades a serem realizadas em aula. Muitos docentes, inclusive, tem criado suas páginas pessoais de *Internet* expondo suas experiências com tais atividades, a fim de ajudar e motivar outros a fazerem o mesmo.

O *site* *m3.ime.unicamp.br* contém a coleção M^3 Matemática Multimídia, com recursos educacionais multimídia para uso em aula (sua tela inicial é mostrada na Figura 4.1). Tais recursos foram desenvolvidos pela Unicamp com incentivo federal. O *site* contém mais de 350 recursos educacionais digitais, entre vídeos, áudios, experimentos e *softwares*. A distribuição não comercial é livre, uma vez que os recursos estão sob uma licença *Creative Commons*.

Já na página inicial do *site* é possível procurar por recursos educacionais, navegar pelas mídias existentes (experimentos, vídeos, *softwares* e áudios) ou pelos temas: aná-

Figura 4.1: Tela inicial do *site m3.ime.unicamp.br*.

lise de dados e probabilidade, geometria e medidas ou números e funções. No presente trabalho será utilizado o recurso educacional "Corrida no lago" para motivar o estudo da circunferência e assuntos relacionados. Neste aspecto, pode-se dizer que a proposta deste texto difere da proposta do *software*, que pretende usar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos para resolver um problema de otimização.

4.1 Objetivos da proposta

Como descrito anteriormente, muitos conteúdos envolvendo o estudo da circunferência são vistos no Ensino Fundamental e Médio. Um destes conteúdos envolve a medição de ângulos em *radianos*. No Ensino Fundamental o aluno já teve contato com os conceitos de comprimento da circunferência e ângulos (medidos em graus). Como é possível observar nos livros didáticos e demais materiais de referência, o estudo da medida dos ângulos em radianos é proposto como tema no Ensino Médio, em geral no início do segundo ano. Por exemplo, o *Caderno do Aluno*, volume 1, destinado ao 2º ano do Ensino Médio, traz em sua *Situação de Aprendizagem 2* o tema *A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica*, sendo que o conceito de radianos aparece em especial a partir do exercício 13. Nos livros didáticos também é comum o estudo de ângulos em radianos ser trabalhado em conjunto com a circunferência trigonométrica, no início do segundo ano do Ensino Médio.

O recurso educacional (*software*) apresentado na sequência tem por objetivo relembrar ao aluno os conceitos já aprendidos no Ensino Fundamental sobre a circunferência, e apresentar a ideia de ângulos medidos em radianos. Por envolver conceitos simples da disciplina de Física e algumas noções de gráficos de funções, um bom momento para ser utilizado é no início do segundo ano do Ensino Médio, possibilitando também um trabalho em conjunto com a disciplina de Física, cujas noções são necessárias à realização da atividade.

4.2 Descrição do recurso educacional: *software* “Corrida no lago”

Utilizando o *site* anteriormente citado, após verificação de diversos recursos disponíveis, o escolhido foi o jogo “Corrida no Lago”[1]. Na Figura 4.2 podemos notar as características do *software*, conforme apresentadas no *site*. Observe-se que o objetivo do *software* é utilizar conceitos já adquiridos para resolver um problema de otimização. Ao longo do texto, porém, será apresentado o *software* como recurso para retomar o estudo da circunferência, com a finalidade de motivar o cálculo dos ângulos medidos em radianos.

Figura 4.2: Bloco inicial contendo informações do *software*.

[1] Os créditos cabem ao autor do recurso: Leonardo Barichello [16].

Clicando no título da atividade "Corrida no lago", encontramos a tela de informações iniciais contemplando o guia do professor e o *link* para a atividade. Clicando no *link* para a atividade, encontramos a tela mostrada na Figura 4.3.

Figura 4.3: Página inicial da atividade "Corrida no lago".

No mesmo *site* é possível encontrar informações para o desenvolvimento da atividade no *Guia do Professor*. Segundo o *Guia do Professor* e a apresentação inicial ao aluno, o *software* propõe um problema de otimização baseado em uma corrida em um lago circular com raio igual a 50 metros. Cada competidor poderá escolher como realizará o trajeto de um lado a outro diametralmente oposto: apenas correndo, apenas nadando, ou correndo até certo ponto (definido em graus, a partir da largada) e depois nadando. O *software* se mostra bastante completo no que diz respeito aos conteúdos, pois envolve Geometria Plana, problemas de otimização, funções e análise de gráficos, bem como conceitos básicos de Física. O objetivo é encontrar a melhor solução para chegar ao ponto diametralmente oposto do lago, sendo, portanto, um problema de otimização. Segundo o Guia do Professor, a recomendação é que a atividade seja realizada em duplas, por um período de duas aulas.

Clicando em "Inicar *software*", após uma breve introdução, o aluno poderá escolher a atividade em que deseja começar pelo "Mapa de atividades", como mostrado nas Figuras 4.4, 4.7 e 4.9. Na primeira atividade, serão realizadas simulações simples, onde ele poderá "treinar sua intuição" sobre o que acontece para cada ângulo de salto escolhido, compreendendo como a disputa funciona e levantando suas primeiras hipóteses. Na segunda atividade o aluno encontrará uma proposta para algebrizar o problema, podendo escolher os valores para as velocidades dos competidores, e descobrir qual é a melhor estratégia para vencer. Na terceira atividade é feita a análise da estratégia vencedora, generalizando os resultados anteriores e possibilitando a experimentação do mesmo a partir da análise de gráficos gerados pelo *software*, com os dados de entrada escolhidos pelos alunos.

É importante observar que o professor poderá utilizar com seus alunos apenas uma atividade se desejar contemplar um aspecto único do *software*, como por exemplo é o caso do gráfico da função, analisado na Atividade 3. Contudo, para uma melhor compreensão do estudante, bem como desenvolvimento completo da atividade, é altamente recomendável que todas as atividades sejam feitas com atenção.

Selecionando o número 1, e clicando em “Fazer atividade” o estudante é levado à página da primeira atividade, onde encontrará as regras para a atividade, instruções e três questões a serem respondidas com uso do *software* dinâmico presente na página[2].

4.2.1 Atividade 1: Primeiras simulações

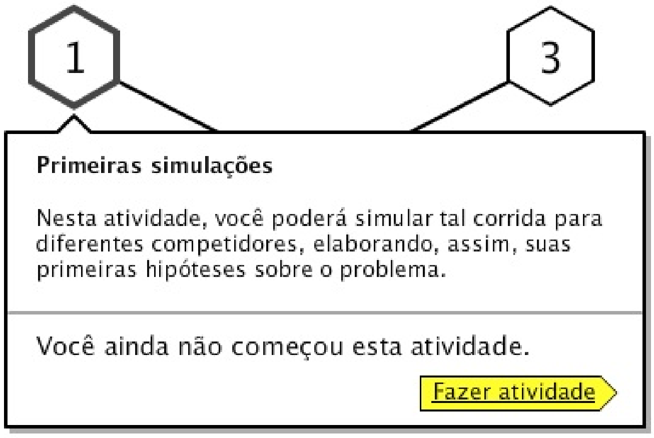


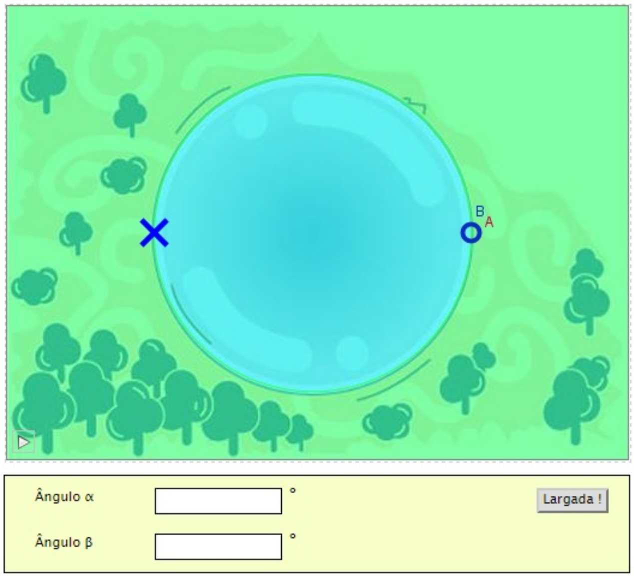
Figura 4.4: Mapa de atividades: primeiras simulações.

O quadro inicial da Atividade 1 (parte 1) apresenta as regras da corrida, enfatizando que os competidores possuem o mesmo desempenho, ou seja, as velocidades quando correndo são as mesmas para os dois competidores, bem como as velocidades nadando. Os competidores terão a opção de correr em volta do lago circular (de raio 50 metros) e então nadar a partir do ponto que saltarem. Ambos iniciam em terra e podem saltar no lago a qualquer momento, terminando o percurso nadando. O objetivo é encontrar o melhor momento para saltar no lago e terminar a competição nadando, sendo que o salto no ângulo 0^o indica realizar todo o percurso nadando, e o salto no ângulo 180^o indica realizar todo o percurso correndo. Como é bastante usual, vence o competidor que chegar antes ao destino, ou seja, procura-se o menor tempo possível.

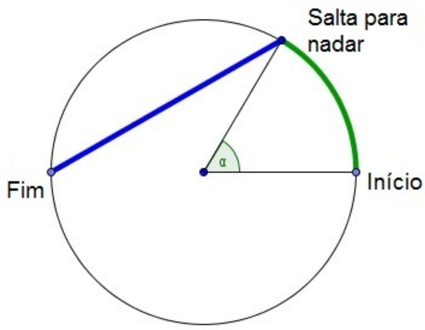
Ao estudante é indicado que neste primeiro momento os dois competidores correm a 10 m/s e nadam a 2 m/s. Com ajuda do recurso presente na página, o estudante é convidado é realizar simulações, conforme mostrado na Figura 4.5.a, onde o ângulo α se refere ao ponto em que o competidor A salta para a água, e o ângulo β ao ponto

[2]O *software* requer o Java instalado no computador, pois trata-se de um programa desenvolvido no Geogebra. Além disso, em determinados sistemas operacionais, como ocorre no Windows 10, o usuário precisará utilizar um navegador de *Internet* compatível com o Java e fazer confirmações adicionais em janelas de sistema.

em que o competidor B salta (ângulos em graus). A Figura 4.5.b mostra a situação no caso do competidor A, exemplificando o ângulo α e o percurso por terra e nadando em destaque.



(a)



(b)

Figura 4.5: Recurso para a realização da primeira atividade.

Ao realizar as simulações, o aluno também deve responder as três questões propostas, indicando quem é o vencedor para cada caso. Ao final, a página traz a indagação: "Você já tem alguma hipótese sobre a melhor estratégia nessa disputa?". Se tiver respondido corretamente as três questões, o aluno poderá continuar a atividade, caso contrário, será convidado a responder novamente a questão que errou.

Seguindo para a parte 2 da Atividade 1, o aluno deve escolher as velocidades que deseja usar para os competidores correndo e nadando. A velocidade correndo é a mesma para os competidores A e B, e o mesmo acontece com a velocidade nadando. Inicialmente é feita a observação de que os valores utilizados para as velocidades na parte anterior são próximos das velocidades de corredores e nadadores olímpicos, portanto espera-se que os alunos indiquem velocidades menores que essas. Ao escolher as velocidades, o aluno deve responder à questão 4, realizando cinco disputas entre os competidores, escolhendo os ângulos em que devem saltar na água, por meio do mesmo recurso ilustrado na Figura 4.5. Durante a realização da disputa, é construída automaticamente uma tabela comparativa dos valores de salto dos competidores e do vencedor, como ilustrado na Figura 4.6.

Durante essa primeira atividade o aluno tem a oportunidade de exercitar seu raciocínio lógico dedutivo, por meio de testes e simulações. Do ponto de vista matemático, ele precisa utilizar as ideias de ângulo central para determinar o ângulo em que o competidor irá saltar e começar a nadar. Na atividade seguinte a parte matemática aparece com maior ênfase. A primeira atividade se encerra com a questão: "Para essas

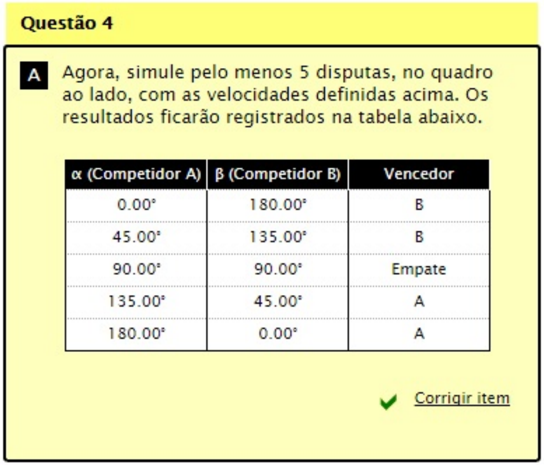


Figura 4.6: Atividade 1, questão 4: um exemplo da realização de cinco simulações.

velocidades, você conseguiu encontrar a melhor estratégia?".

4.2.2 Atividade 2: Resolvendo o problema

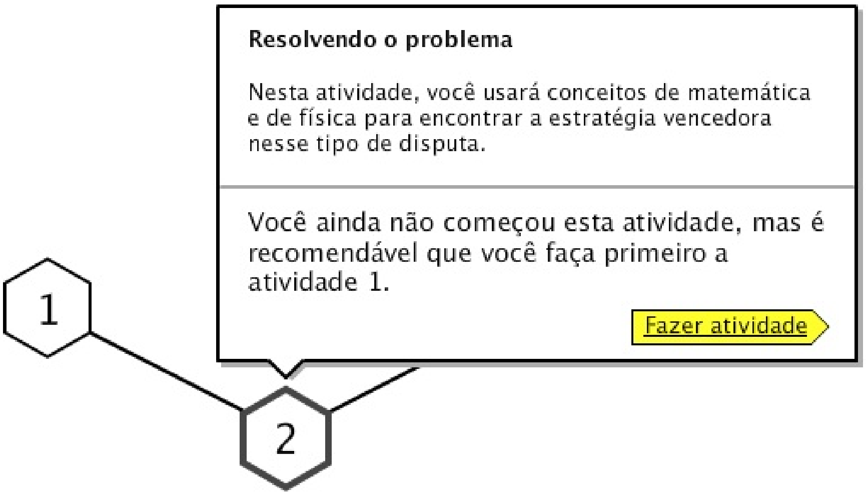


Figura 4.7: Mapa de atividades: resolvendo o problema.

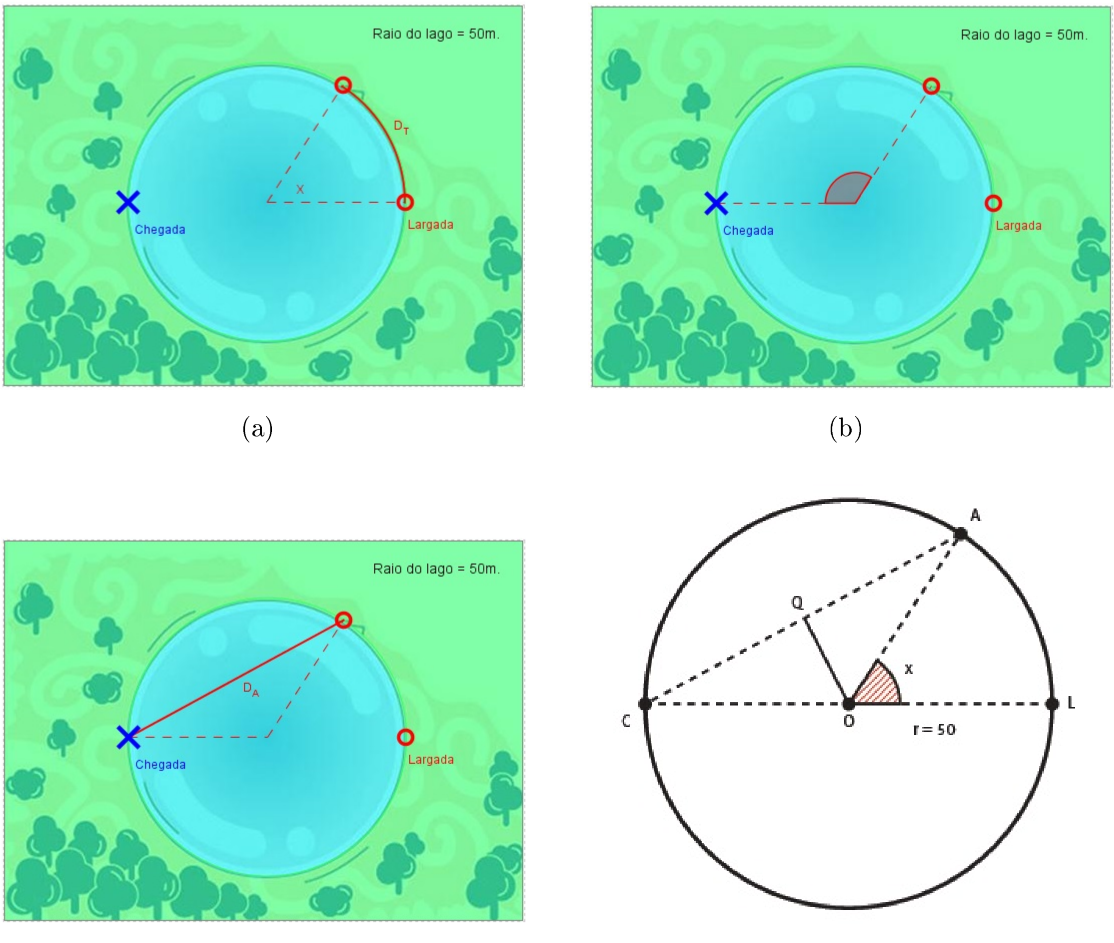
O objetivo da atividade 2 envolve algebrizar o problema para valores de velocidades escolhidos pelos aluno e, então, descobrir qual a melhor estratégia para vencer. Além disso, nesta atividade os alunos devem encontrar uma função do tempo total em termos do ângulo em que o competidor salta para a água.

No *software* há perguntas para cada etapa da algebrização, de modo que esta possa ser confirmada até a elaboração do resultado. Além disso, há recursos visuais mostrando os elementos geométricos envolvidos, bem como "dicas" para os estudantes resolverem as questões propostas. Para a realização da atividade o professor deve introduzir os conceitos envolvidos em medida de ângulos em radianos, uma vez que o aluno precisa responder algumas questões que envolvem tal conceito. O conteúdo pode ser apresentado diretamente pelo professor, ou com uso do material didático disponível (*Caderno do Aluno* e livro didático). O Guia do Professor traz o desenvolvimento algébrico esperado. Contudo, o desenvolvimento apresentado a seguir é do ponto de vista do aluno.

A primeira questão indaga sobre a medida do arco D_T em função do ângulo x, dado agora em radianos, conforme mostra a Figura 4.8.a. Conforme a definição proposta na maior parte dos livros didáticos: *a medida angular do arco é igual à medida do ângulo central correspondente.* Agora o comprimento do arco D_T pode ser encontrado por uma simples regra de três, lembrando que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi R$, onde R é o raio. Então resolvemos a seguinte "regra de três":

Ângulo	Comprimento
2π	$2\pi R$
x	D_T

Logo, $D_T = \frac{2x\pi R}{2\pi} = xR$. Tomando $R = 50m$ temos $D_T = 50x$.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 4.8: Atividade 2, parte 1: resolvendo o problema.

Já a segunda questão indaga sobre o valor do ângulo indicado na Figura 4.8.b. É evidente que se trata do ângulo suplementar ao ângulo x, portanto seu valor é $\pi - x$. Ainda na segunda questão o aluno deve responder a medida da corda D_A, conforme mostrada na Figura 4.8.c. A dica que aparece se o aluno "errar" a questão é que, com essa corda, é possível formar um triângulo isósceles com dois raios do círculo. A situação é mostrada na Figura 4.8.d. Utilizando os pontos indicados, note-se que o ângulo $A\hat{O}C = \pi - x$, e o triângulo AOC é isósceles. Traçando uma altura a partir de O, esta divide o ângulo $A\hat{O}C$ e o segmento AC ao meio, criando dois triângulos retângulos. Aplicando-se as relações trigonométricas para o triângulo OQA encontra-se:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{\overline{QA}}{50} \Rightarrow \overline{QA} = 50.\,\text{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$$

Então:

$$\overline{CA} = 100.\,\text{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$$

Do resolvido anteriormente, pode-se notar que o aluno deverá lembrar conceitos de trigonometria, o que é importante para o desenvolvimento geral das atividades do segundo ano do Ensino Médio, uma vez que os ângulos em radianos são apresentados em conjunto com o ciclo trigonométrico (ou circunferência trigonométrica).

Partindo para a terceira questão, é necessário que o aluno relembre um pouco de Física (não mais que o básico, que é apresentado no último ano do Ensino Fundamental e trabalhado de modo suficiente no primeiro ano do Ensino Médio):

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$$

Visto que a terceira questão envolve encontrar o tempo gasto pelo competidor correndo e saltando em função de x, é mais conveniente utilizar a fórmula anterior no formato[3]:

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade média}}$$

Cabe observar que os valores para a velocidade correndo ou nadando foram pré-fixados pelo aluno no início da atividade, sendo um valor numérico. Chamando de V_C a velocidade do competidor correndo, e V_N a velocidade do competidor nadando, tem-se que os tempos gastos são:

$$T_C = \tfrac{50x}{V_C} \text{ e } T_N = \tfrac{100.\,\text{sen}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)}{V_N}$$

Prosseguindo para a parte 2 da Atividade 2, é apresentada pelo *software* a fórmula para o tempo total do percurso, em função de x, para o competidor correndo e depois pulando na água no ângulo x para continuar nadando a partir de então (observe que desde o início desta atividade, x está sendo medido em radianos):

[3]Nos dois casos, consideramos os denominadores diferentes de zero.

$$T_{total} = \frac{50x}{V_C} + \frac{100.\operatorname{sen}(\frac{\pi - x}{2})}{V_N}$$

Junto à fórmula, é apresentado o gráfico da função e são feitas perguntas de interpretação do gráfico: o máximo da função (maior tempo de percurso possível), o ângulo para esse maior tempo (valor em radianos no gráfico, e sua conversão em graus), o tempo se o competidor optar por apenas nadar ou apenas correr, e o menor tempo possível do percurso, bem como o momento em que deveria "saltar na água" para obter esse tempo.

A conclusão da atividade traz uma pergunta curiosa, levando naturalmente o aluno à atividade seguinte: "Será que essa resposta é válida para qualquer situação, ou seja, para quaisquer velocidades do competidor?"

4.2.3 Atividade 3: Generalizando o resultado

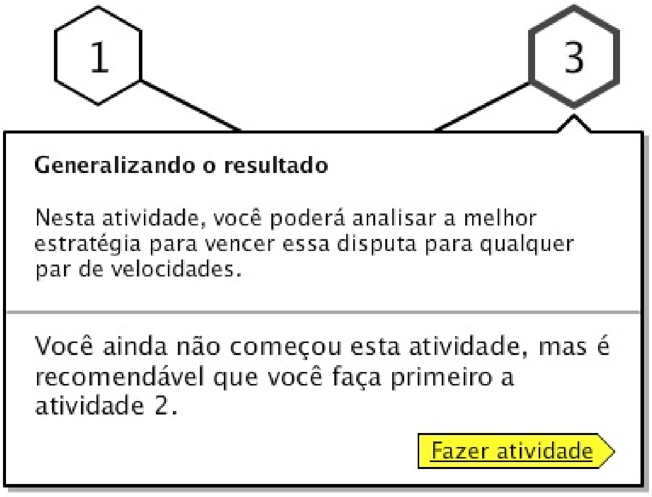


Figura 4.9: Mapa de atividades: generalizando o resultado.

A atividade 3 do *software* visa generalizar a solução apresentada do problema. Nesta atividade o aluno irá trabalhar com gráficos dinâmicos. Com base nesses, é possível verificar uma diversidade de combinações das velocidades (correndo e nadando) e seus resultados, simplesmente movendo os seletores que determinam a velocidade quando o competidor está em terra e em água, como mostrado na Figura 4.10 e observando o gráfico resultante.

O estudo do gráfico e sua interpretação física levam o aluno a compreender a importância de uma análise mais profunda do problema. Por exemplo, o aluno irá facilmente notar que os pontos de mínimo da função obtida ocorrem nos seus extremos (considerando o intervalo do domínio), ou seja, a melhor estratégia de disputa é fazer todo o caminho correndo ou andando, conforme a velocidade em cada caso.

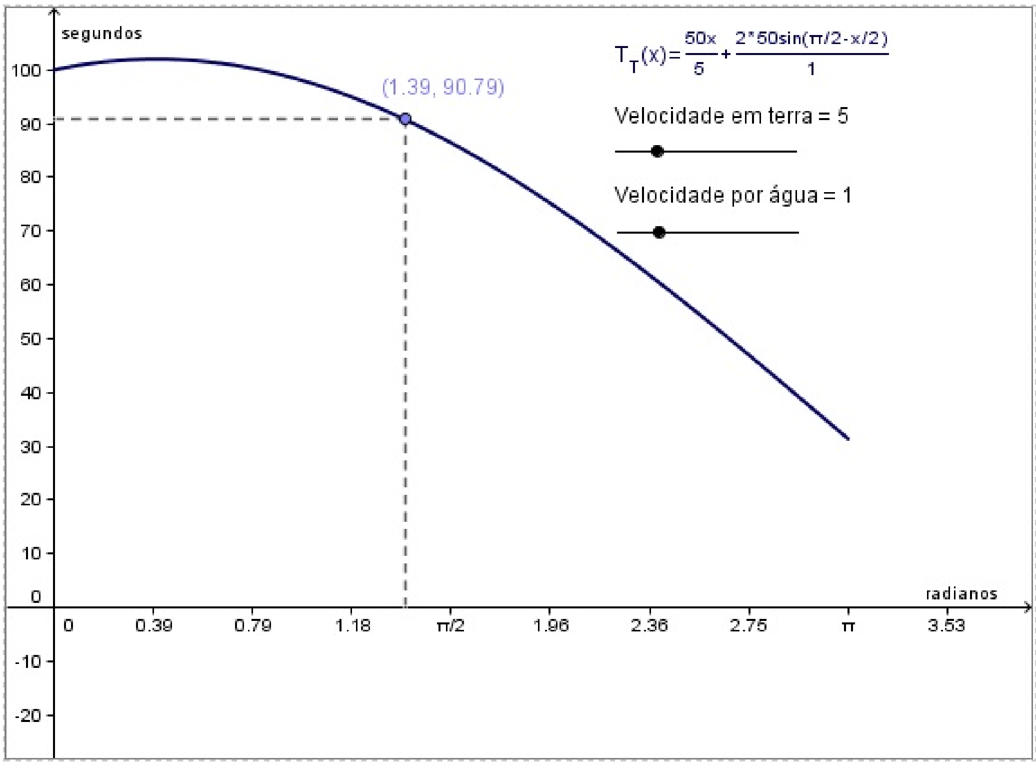


Figura 4.10: Atividade 3: Simulações no gráfico "tempo" e "ângulo de salto".

O professor pode "se convencer" deste fato por fazer uma análise mais profunda da função, por exemplo, verificando que no intervalo dado a função possui apenas um ponto crítico, e a segunda derivada é sempre negativa (concavidade sempre para baixo, logo os menores valores ocorrerão em um dos extremos, e nunca no interior do intervalo). Esta análise, porém, é para a compreensão do professor, uma vez que tais conteúdos não estão previstos para o Ensino Médio.

A atividade 3, portanto, pode ser considerada "adicional", ao passo que aprofunda os conhecimentos desenvolvidos pelos estudantes mais atentos. As questões propostas são apenas duas: a primeira questiona a melhor estratégia se as velocidades em terra e em água são iguais, enquanto a segunda questiona sobre a velocidade necessária em água para que os tempos nos casos extremos sejam iguais, dado que a velocidade por terra é de 3 m/s.

Finalizando a terceira atividade, o aluno deve dar um exemplo (no caderno) de uma maneira para haver empate entre os competidores quando estes escolhem momentos diferentes para trocar de meio (o que equivale a encontrar um contra-exemplo para verificar que a função não é injetora).

4.3 Observações adicionais para o professor

Como comentado anteriormente, é possível fazer uma demonstração mais aprofundada das características do gráfico da função "tempo total" por meio de derivadas.

É fato que a maior parte das turmas de Ensino Médio não fará o desenvolvimento a seguir, contudo, aqui é apresentado como resolução adicional para o professor.

Primeiramente, considere a função

$$T_{total} = \frac{50x}{V_C} + \frac{100.\operatorname{sen}(\frac{\pi - x}{2})}{V_N}$$

Para os casos extremos do intervalo trabalhado temos que:

$$T_{total}(0) = \frac{50 \cdot 0}{V_C} + \frac{100.\operatorname{sen}(\frac{\pi - 0}{2})}{V_N} = \frac{100}{V_N}$$

$$T_{total}(\pi) = \frac{50 \cdot \pi}{V_C} + \frac{100.\operatorname{sen}(\frac{\pi - \pi}{2})}{V_N} = \frac{50\pi}{V_C}$$

Ainda mais, derivando com relação a x encontra-se:

$$\frac{d}{dx}T_{total} = \frac{50}{V_C} - \frac{50.\cos(\frac{\pi - x}{2})}{V_N} = 50\left[\frac{1}{V_C} - \frac{\cos(\frac{\pi - x}{2})}{V_N}\right]$$

Como a função é diferenciável, temos que o ponto crítico é encontrado tomando $\frac{d}{dx}T_{total} = 0$. Nesse caso:

$$\frac{d}{dx}T_{total} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{V_C} - \frac{50.\cos(\frac{\pi - x}{2})}{V_N} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{50.\cos(\frac{\pi - x}{2})}{V_N} = \frac{50}{V_C}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{V_N}{V_C}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \arccos\left(\frac{V_N}{V_C}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \pi - 2.\arccos\left(\frac{V_N}{V_C}\right)$$

Dado que o intervalo é $[0, \pi]$, então obtêm-se apenas um valor para x quando dados os valores de V_N e V_C, assim temos apenas um ponto crítico. Verificando os intervalos de crescimento e decrescimento da função é possível concluir se esse ponto crítico se refere a um máximo ou mínimo local. De fato:

$$\frac{d}{dx}T_{total} = 50\left[\frac{1}{V_C} - \frac{\cos(\frac{\pi - x}{2})}{V_N}\right]$$

Analisando a derivada:

$$\frac{1}{V_C} - \frac{\cos(\frac{\pi-x}{2})}{V_N} > 0$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}{V_N} < \frac{1}{V_C}$$

$$\cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right) < \frac{V_N}{V_C}$$

$$\frac{\pi-x}{2} > \arccos\left(\frac{V_N}{V_C}\right)$$

$$\frac{-x}{2} > \arccos\left(\frac{V_N}{V_C}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{V_N}{V_C}\right)$$

$$x < \pi - 2\arccos\left(\frac{V_N}{V_C}\right)$$

Deste modo, a derivada é positiva até o momento descrito pelo ponto crítico, sendo negativa a partir de então. Então é possível concluir que o ponto crítico é um ponto de máximo local. A mesma conclusão é obtida ao se verificar a segunda derivada de T_{total}:

$$\frac{d^2}{dx^2}T_{total} = -\frac{25.\,\mathrm{sen}(\frac{\pi-x}{2})}{V_N}$$

A função seno é sempre positiva no domínio escolhido, de modo que a segunda derivada é sempre negativa.[4] Visto a função ser "suave" e seu ponto crítico ser um máximo local, conclui-se que a função irá apresentar seu ponto de mínimo em uma das extremidades, conforme os valores de $T_{total}(0)$ e $T_{total}(\pi)$.

4.4 O papel do professor

Na seção anterior foram descritas as características do *software*, mas o modo como será utilizado em sala de aula dependerá muito do professor. Em seu plano de aula o professor poderá utilizar o recurso como uma introdução ao estudo da circunferência no Ensino Médio para o cálculo de ângulos em radianos. Nesse caso, o professor utilizaria o *software* em conjunto com o material didático, sempre realizando intervenções construtivas à medida que os alunos resolvem as propostas do recurso educacional. Cabe salientar, porém, que como requisito, os alunos já devem ter uma noção de funções e

[4] Lembrando que $V_N > 0$.

também de Física, visto serem temas que aparecem como auxílio na resolução do problema. Desta forma, a atividade proposta é bastante completa, onde o professor poderá verificar quais conteúdos, competências e habilidades seus alunos já desenvolveram, e quais merecem maior atenção nas aulas.

Ainda, ao preparar o conteúdo para a aula, é importante pensar nas possíveis dificuldades que os alunos podem encontrar durante o experimento. Possivelmente a primeira parte será a mais simples, visto envolver "tentativa e erro", enquanto a segunda e terceira partes podem demandar um pouco mais de trabalho por parte do professor e alunos. Como condutor das aulas, cabe ao professor inferir de modo construtivo ao verificar as dificuldades dos alunos.

Apesar do uso de um recurso multimídia, não se exclui o uso da lousa e das anotações no caderno. O professor pode incentivar os alunos a fazerem anotações em seus cadernos ao longo do desenvolvimento da atividade, suas hipóteses e como estas se confirmam ou como precisam ser revistas. A sugestão do autor da atividade também leva em conta possíveis dificuldades, salientando que o trabalho pode ser realizado em duplas, sempre a critério do professor, de acordo com as dificuldades da turma.

Mas o *software* apresentado é apenas um, dentre os muitos disponíveis no *site*, e mesmo na rede mundial de computadores. Na sequência são apresentados mais algumas opções para o docente ao preparar suas aulas.

4.5 Outras possibilidades para o tema usando o *site* M^3

No acesso ao *site m3.ime.unicamp.br*, pesquisando na coleção M^3 Matemática Multimídia, pelo conteúdo "circunferência" encontramos mais alguns recursos à disposição do professor, que podem ser utilizados de acordo com o objetivo da aula e do conteúdo trabalhado. A Tabela 4.1 apresenta alguns dos recursos do *site*, bem como uma breve descrição dos mesmos. Além de *softwares*, também há recursos em áudio, vídeo e experimentos. Assim, o professor pode avaliar qual ferramenta será mais produtiva de acordo com o material disponível em sua escola e das habilidades desenvolvidas pelos seus alunos.

Cabe lembrar que de acordo com o conteúdo a ser trabalhado, é possível encontrar muitos outros recursos disponíveis no *site*. Além disso, em uma busca simples na *Internet* é possível encontrar outras possibilidades para aplicação em sala de aula. Lembramos também que todo recurso encontrado na *Internet* deve ser analisado pelo professor para posterior aplicação em sala de aula, levando em conta sua qualidade e pertinência aos conteúdos estudados.

Na sequência apresentamos um recurso bastante interessante existente no mesmo *site* já citado.

Tipo	Título	Descrição
Áudio	Tudo começa em pizza	Donatello e Michelangelo conversam sobre a relação do diâmetro e a área de um círculo para fazer as pizzas de seu novo empreendimento.
Áudio	Inveja dos anéis de Saturno	Apresenta a resolução de um problema de geometria usando os conteúdos de Comprimento da Circunferência.
Áudio	Tamanho da Terra	Ptolomeu, Cristóvão Colombo e Eratóstenes discutem um dos maiores feitos da ciência da Antiguidade: calcular a circunferência da Terra.
Vídeo	As aventuras do Geodetetive 1: A circunferência da Terra	Apresenta o método de Eratóstenes para o cálculo da circunferência da Terra.
Vídeo	Medindo a Terra	Uma professora explica sobre a universalização do sistema métrico. Para isso faz uso da Geometria.
Experimento	Montanhas geométricas	Neste experimento o aluno construirá diversos polígonos usando papelão e areia. Então aplicará conceitos básicos de geometria plana e espacial para elaborar hipóteses sobre o que observa.
Experimento	Polígonos e circunferência	O problema proposto envolve a soma das áreas delimitadas por duas figuras geométricas: um polígono regular e uma circunferência. O conteúdo trabalhado inclui o estudo da função quadrática.

Tabela 4.1: Alguns recursos disponíveis no *site*.

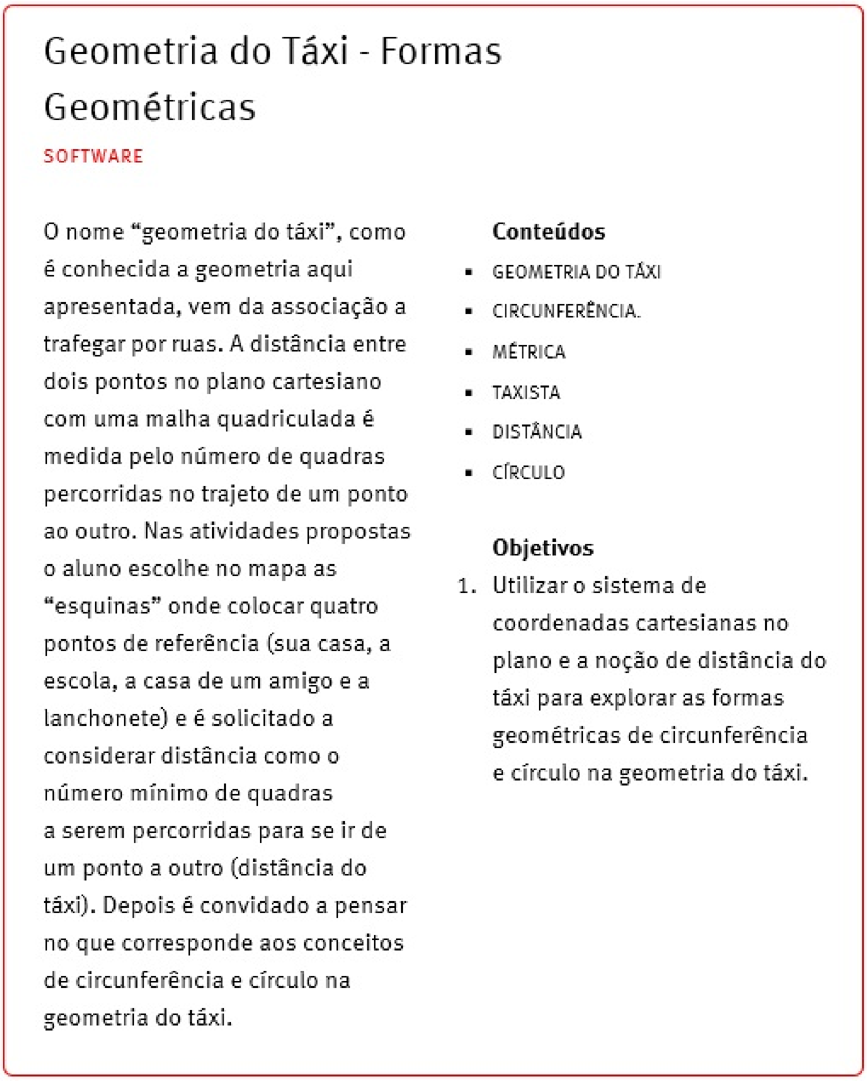
4.5.1 *Software*: "Geometria do Táxi – Formas Geométricas"

Aqui destacamos outro *software*: "Geometria do Táxi – Formas Geométricas" [17]. O objetivo deste *software* é utilizar o sistema de coordenadas cartesianas no plano e a noção de "distância do táxi" para explorar as formas geométricas de circunferência e círculo na "geometria do táxi". A Figura 4.11 apresenta a tela inicial do *software*.

É bastante interessante que nesse *software* o aluno pode exercitar seu raciocínio por "sair" das questões usuais, verificando geometrias com as quais não está acostumado. Por exemplo, a Figura 4.12 apresenta o conceito de circunferência na "geometria do táxi". A página do *software* explica:

> *Todos os pontos que você marcou estão à mesma distância da casa do amigo. Estes pontos fazem parte do que podemos considerar, na Geometria do Táxi, como uma circunferência com centro na casa do amigo.*

Perguntas bem elaboradas questionam os alunos sobre a possibilidade de fórmulas gerais na "geometria do táxi":



Geometria do Táxi - Formas Geométricas

SOFTWARE

O nome "geometria do táxi", como é conhecida a geometria aqui apresentada, vem da associação a trafegar por ruas. A distância entre dois pontos no plano cartesiano com uma malha quadriculada é medida pelo número de quadras percorridas no trajeto de um ponto ao outro. Nas atividades propostas o aluno escolhe no mapa as "esquinas" onde colocar quatro pontos de referência (sua casa, a escola, a casa de um amigo e a lanchonete) e é solicitado a considerar distância como o número mínimo de quadras a serem percorridas para se ir de um ponto a outro (distância do táxi). Depois é convidado a pensar no que corresponde aos conceitos de circunferência e círculo na geometria do táxi.

Conteúdos

- GEOMETRIA DO TÁXI
- CIRCUNFERÊNCIA.
- MÉTRICA
- TAXISTA
- DISTÂNCIA
- CÍRCULO

Objetivos

1. Utilizar o sistema de coordenadas cartesianas no plano e a noção de distância do táxi para explorar as formas geométricas de circunferência e círculo na geometria do táxi.

Figura 4.11: Tela inicial do *software*: "Geometria do Táxi – Formas Geométricas".

Com base nessas observações, responda: quantos pontos têm uma circunferência de raio R?

- $3.R - 1$
- $2.R + 2$
- $4.R$
- R^2

Na sequência pergunta-se pela "expressão que dê a quantidade de esquinas que podem ser alcançadas, a partir de um determinado ponto, percorrendo-se uma distância menor ou igual a R quadras". Aqui é apresentado o conceito de círculo na "geometria do táxi".

O *software* é bastante dinâmico, e o aluno pode marcar os pontos na tela para responder as questões. Como acontece com o *software* apresentado anteriormente,

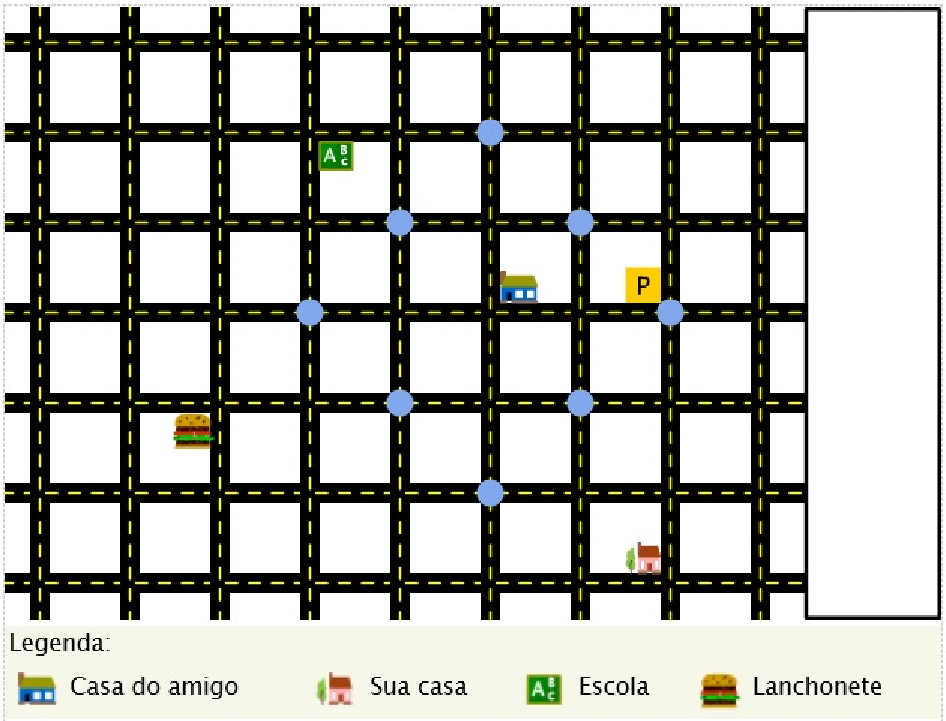


Figura 4.12: "Geometria do Táxi – Formas Geométricas": o conceito de circunferência.

aqui também se faz uso do caderno para anotações ao longo do desenvolvimento das atividades. É uma ferramenta muito interessante, que pode complementar os estudos de acordo com a programação do professor para a turma.

Das ferramentas apresentadas, cabe lembrar que de vital importância é que os conteúdos matemáticos fiquem claros aos estudantes, sendo que estes possibilitem aos alunos desenvolverem suas habilidades. Portanto, ao escolher a ferramenta de apoio (*software*, áudio, vídeo ou experimento), o conteúdo não pode estar excessivamente além dos conhecimentos já adquiridos pelos estudantes, uma vez que geraria desinteresse. Saber o momento certo da aplicação da atividade não é algo que possa ser determinado em um texto, mas é algo dinâmico, sendo que o momento ideal pode diferir mesmo entre duas turmas de um mesmo ano. Assim, cabe ao professor o papel de mediador, com bom planejamento das aulas, tendo em vista as possibilidades e dificuldades de cada turma, concluindo com um bom desenvolvimento das atividades, resultando em conhecimento.

5 Conclusão

Ao longo do texto procurou-se fornecer informações úteis ao docente, fazendo uso de ferramentas ao seu alcance para a prática didática em sala de aula. Logicamente, contudo, cada docente irá planejar suas aulas de acordo com sua turma, do tempo disponível e das ferramentas que deseja utilizar. Assim, entende-se que a prática docente não pode estar limitada a um ou mais textos, uma vez que é dinâmica por lidar com pessoas, estas últimas em constante transformação, movidas pela cultura, pelas tecnologias, pela mídia, entre outros.

Nesse contexto, sem se esquecer do conteúdo, o professor é o profissional do ensino que tem o desafio de transmitir seus conhecimentos, tendo como objetivo construir e desenvolver as habilidades de seus alunos. Para cumprir com tal desafio, o professor deve ter em mente o que se espera de sua atuação, cumprindo suas aulas de acordo com as propostas oficiais, conforme comentadas anteriormente neste texto. Afinal, se trabalhar de modo independente da sociedade, o professor pode facilmente deixar de transmitir uma coleção de saberes que futuramente será cobrado de seus estudantes, prejudicando-os.

Além de conhecer as propostas oficiais relativas ao ensino, o docente precisa conhecer bem a bibliografia disponível para suas aulas, fazendo bom uso do livro didático. É reconhecida a presença de muitos materiais de qualidade disponíveis ao professor, mas estes não terão nenhum efeito se o professor não tomar tempo para estudá-los e programar seu uso. Um método por vezes utilizado é o de comparar diversos materiais, buscando extrair atividades de todos eles, de modo que se complementem. Ao longo deste texto foram mostrados diversos materiais de qualidade, que podem contribuir em muito para o fazer do docente em sala.

Vindo a complementar os anteriores, sem ter a capacidade de substituir quaisquer um deles, estão as ferramentas digitais, por meio dos muitos *sites* e jogos didáticos tão amplamente disponíveis. Cabe observar que muitos destes estão registrados sob licenças livres, permitindo sua cópia e distribuição (desde que sem fins comerciais). Durante seu planejamento o professor encontrará sugestões de ferramentas digitais em muitas das Coleções que foram citadas durante o texto. Outros objetos digitais podem ser encontrados em uma pesquisa na *Internet*. Como salientado, os objetos digitais não têm a finalidade de substituir as demais ferramentas de ensino, mas devem ser bem articulados pelo professor de modo a complementá-los.

Em seu planejamento antecipado, o professor encontrará outros temas que não foram abordados neste texto, como a realidade de cada aluno em sua sala de aula e na comunidade, as habilidades desenvolvidas anteriormente pelos alunos, o interesse (ou a falta deste) por parte dos alunos, entre outros. Na realidade, cada tema alistado anteriormente tem o potencial para a escrita de um texto exclusivo, tão abrangentes que são. Entendendo que este texto não esgota as possibilidades em sala de aula, cabe ao docente explorar possibilidades na formulação e execução das aulas, por vezes errando e sentindo a frustração resultante, por vezes acertando, e sentindo grande alegria e satisfação por ensinar: compartilhar seus saberes!

A Comprimento de uma circunferência, de um arco e de uma corda

Neste Apêndice A apresentamos alguns resultados que foram utilizados ao longo do texto.

Teorema A.1. *Seja uma circunferência de centro em* O *e raio* r*. Então o perímetro, ou comprimento* C *desta circunferência é dado por:* $C = 2\pi r$.

A demonstração aparece no Apêndice B, utilizando ferramentas de Cálculo.

Corolário A.1. *Seja uma circunferência de centro em* O *e raio* r*. O comprimento de um arco cujo ângulo central vale* θ *(radianos) é dado por* θr.

Demonstração: Pelo resultado do Teorema A.1, temos que o comprimento de uma circunferência de centro O e raio r vale $2\pi r$. Tomando-se um arco cujo ângulo central vale θ radianos e usando o conceito de proporcionalidade, sendo x o comprimento do arco, temos que:

Ângulo	Comprimento
2π	$2\pi r$
θ	x

Então,

$$x = \frac{2\pi r\theta}{2\pi} \Rightarrow x = \theta r.$$

Teorema A.2. *Em uma circunferência de centro* O *e raio* r*, o comprimento* C_c *de uma corda delimitada por um ângulo central* θ *é dado por:*

$$C_c = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

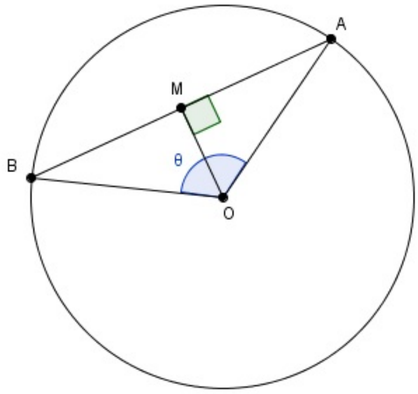


Figura A.1: Demonstração do Teorema A.2.

Demonstração: Seja Γ uma circunferência de centro em O e raio r. Tomando-se dois pontos sobre a circunferência, digamos A e B, temos a corda AB. Como é possível verificar na Figura A.1, o triângulo ABO é isósceles, de base AB. Assim, o ponto médio de AB constitui a altura do triângulo, dividindo-o em dois triângulos retângulos. Seja M tal ponto médio. A altura também dividiu o ângulo central θ em dois ângulos iguais a $\frac{\theta}{2}$. Aplicando os conceitos de trigonometria:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{AM}}{r}$$

$$\overline{AM} = r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como M é ponto médio de AM, é imediato que $\overline{AB} = 2\overline{AM}$. Deste modo:

$$C_c = 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

B O estudo da circunferência por meio do Cálculo Diferencial e Integral

É apresentado a seguir como o conceito de comprimento de curva é abordado no Ensino Superior, sendo este tópico de grande importância na formação do professor, apesar de tal conceito não ser apresentado desta maneira no Ensino Fundamental ou Médio.

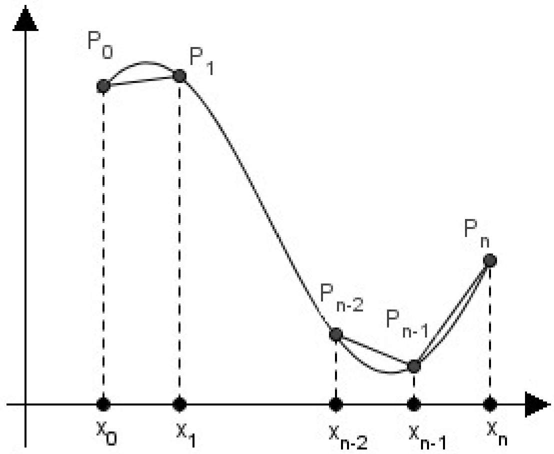


Figura B.1: Aproximação por um polígono.

Tratando o problema de forma geral, consideramos uma curva C definida pela equação $y = f(x)$, onde f é contínua em um intervalo $a \leq x \leq b$. Seja P uma partição de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. E denotaremos por $P_i(x_i, f(x_i))$ os pontos do gráfico de f relativos à partição P. Unindo cada P_{i-1} a P_i por um segmento de comprimento $|P_{i-1}P_i|$ temos que o comprimento L da curva C é aproximadamente o mesmo da poligonal com vértices P_1, P_2, ... , P_n e a aproximação fica melhor quando n aumenta. Portanto, pode-se definir o *comprimento* L da curva C com a equação $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, como o limite dos comprimentos desses polígonos inscritos (se o limite existir):

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

A definição dada pela equação anterior não é muito prática, mas é possível obter uma fórmula integral para L no caso onde f tem derivada contínua (geralmente f é então chamada de função *suave*, onde uma pequena mudança em x produz uma pequena mudança em $f'(x)$).

Tomando $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, então

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, observa-se que existe um número x_i^* entre x_{i-1} e x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$
$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

Assim,

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Retomando a definição inicial:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x$$

Então, usando a definição de integral definida, temos:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Observe que essa integral existe porque a função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua.

Portanto, a fórmula do comprimento de arco para a curva $y = f(x)$, se f' for contínua em $[a, b]$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

De posse dessa fórmula, é possível calcular o comprimento da circunferência. É conhecido que uma circunferência com centro na origem e raio r é gerada pela equação $x^2 + y^2 = r^2$. Como ela é simétrica em relação aos eixos, então o comprimento total da circunferência é quatro vezes o comprimento do gráfico pertencente ao primeiro quadrante. Nesse caso: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Então:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Assim:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$L = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

Resolvendo a integral indefinida:

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)} dx = \int \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \left(\frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)} dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx$$

Substituindo: $x = r \operatorname{sen} \theta$ e $dx = r \cos \theta d\theta$, onde θ está no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, obtêm-se:

$$L = r \int \frac{r \cos \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2}} = r \int \frac{r \cos \theta d\theta}{\sqrt{r^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}} = r \int \frac{r \cos \theta d\theta}{r \cos \theta}$$

$$= r \int d\theta = r\theta + C = r \cdot \operatorname{arcsen} \frac{x}{r} + C,$$

pois $x = r \operatorname{sen} \theta$.

Tomando-se os limites de integração, temos:

$$L = \left[r \cdot \operatorname{arcsen} \frac{x}{r}\right]_0^r = \left[r \cdot \operatorname{arcsen} \frac{r}{r}\right] - \left[r \cdot \operatorname{arcsen} \frac{0}{r}\right] =$$

$$[r \cdot \operatorname{arcsen} 1] - [r \cdot \operatorname{arcsen} 0] \Rightarrow L = r\frac{\pi}{2}.$$

Lembre-se aqui que o comprimento encontrado se refere apenas ao primeiro quadrante. Denotando o comprimento total da circunferência por L_T temos:

$$L_T = 4 \cdot L \Rightarrow L_T = 2\pi r.$$

Também é possível encontrar a área da circunferência usando ferramentas do Cálculo. Novamente, tomando uma circunferência com centro na origem e raio r, gerada pela equação $x^2 + y^2 = r^2$, toma-se a função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Como a circunferência é simétrica em relação aos eixos, então a área total da circunferência é quatro vezes a área do gráfico pertencente ao primeiro quadrante, dada por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, no intervalo $[0, r]$. Como salientado por Guidorizzi [18], definimos a área entre o gráfico e o eixo x como sendo a integral $\int_a^b f(x)dx$ no caso em que $f(x)$ é uma função integrável qualquer, com $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$. Então, a área de um quarto da circunferência é dada por:

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

Calculando a integral indefinida anterior, substituindo $x = r \operatorname{sen} \theta$ e $dx = r \cos \theta d\theta$, onde θ está no intevalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, obtêm-se:

$$\int \sqrt{r^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2} \cdot r \cos \theta d\theta = \int r\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot r \cos \theta d\theta$$

$$= \int r^2 \sqrt{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta = \int r^2 \cos^2 \theta d\theta = r^2 \int \cos^2 \theta d\theta$$

Para resolver esta última integral usamos as identidades:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

temos

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

Isolando $\cos^2 \alpha$ temos:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2}$$

Retomando a integral anterior, temos:

$$r^2 \int \cos^2 \theta d\theta = r^2 \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta = r^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right).$$

Colocando os limites de integração na transformação temos que a integral está no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Assim, a área calculada será:

$$A = \left[r^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[r^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left[r^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\frac{\pi}{2})}{4} \right) \right] - \left[r^2 \left(\frac{0}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 0)}{4} \right) \right] = \frac{\pi r^2}{4}$$

Multiplicando o resultado para os quatro quadrantes, chega-se à resposta esperada: πr^2.

A resposta esperada confirma os métodos anteriores utilizados e amplia os conhecimentos do professor.

Referências

[1] BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. 1. ed. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

[2] BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. 1. ed. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

[3] SÃO PAULO (Estado). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. 1. ed. São Paulo: Secretaria da Educação, 1997.

[4] SÃO PAULO (Estado). *Cadernos do Programa São Paulo faz Escola: Matemática (Cadernos do Aluno)*. 1. ed. São Paulo: Secretaria da Educação, 2014.

[5] BRASIL. *Guia de livros didáticos: PNLD 2014: Matemática: Ensino Fundamental*. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica,, 2013.

[6] BRASIL. *Guia de livros didáticos: PNLD 2015: Matemática: Ensino Médio*. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica,, 2014.

[7] MUNIZ NETO, A. C. *Geometria - Coleção PROFMAT*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[8] LEONARDO, F. M. *Coleção Projeto Araribá: Matemática - Volumes 1 a 4 (para alunos do 6º ao 9º anos)*. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna Ltda., 2013.

[9] DANTE, L. R. *Coleção Projeto Teláris: Matemática - Volumes 1 a 4 (para alunos do 6º ao 9º anos)*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática S.A., 2013.

[10] LEONARDO, F. M. *Coleção Conexões com a Matemática - Volumes 1 a 3 (para alunos do 1º ao 3º anos do Ensino Médio)*. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna Ltda., 2014.

[11] DANTE, L. R. *Coleção Matemática: contexto e aplicações - Volumes 1 a 3 (para alunos do 1º ao 3º anos do Ensino Médio)*. 2. ed. São Paulo: Editora Ática S.A., 2013.

[12] PAIVA, M. *Coleção Matemática Paiva - Volumes 1 a 3 (para alunos do 1º ao 3º anos do Ensino Médio)*. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna Ltda., 2013.

[13] IEZZI, G. et al. *Coleção Matemática Ciência e aplicações - Volumes 1 a 3 (para alunos do 1º ao 3º anos do Ensino Médio)*. 7. ed. São Paulo: Editora Saraiva S.A., 2013.

[14] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Coleção Matemática Ensino Médio - Volumes 1 a 3 (para alunos do 1º ao 3º anos do Ensino Médio)*. 8. ed. São Paulo: Editora Saraiva S.A., 2013.

[15] SOUZA, J. R. *Coleção Novo Olhar: Matemática - Volumes 1 a 3 (para alunos do 1º ao 3º anos do Ensino Médio)*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD S.A., 2013.

[16] BARICHELLO, L. *Software Corrida no Lago*. Disponível em: <http://www.m3.ime.unicamp.br/recursos/1225>, acesso em: outubro de 2015.

[17] BARICHELLO, L.; RODRIGUES, C. I.; COSTA, S. I. R. *Software Geometria do Táxi – Formas Geométricas*. Disponível em: <http://www.m3.ime.unicamp.br/recursos/1248>, acesso em: outubro de 2015.

[18] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.

[19] ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo - Volume 1*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman Editora S.A., 2014.

[20] STEWART, J. *Cálculo - Volume 1*. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

[21] SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1*. 2. ed. São Paulo: Makron *Books* do Brasil Editora Ltda., 1994.