Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Alguns Métodos Interessantes de Extração e Aproximação da Raiz Quadrada

Rubens Oliveira de Sousa

Teresina - 2013

Rubens Oliveira de Sousa

Dissertação de Mestrado

Alguns Métodos Interesssantes de Extração e Aproximação da Raiz Quadrada

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

Teresina - 2013

Sousa, R.O.

Alguns Métodos Interessantes de Extração e Aproximação da Raiz Quadrada

Rubens Oliveira de Sousa – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

1. Matemática

Dedico esse trabalho à minha esposa Tatiana, à minha mãe Mirian, aos meus filhos Tamires Rayanne e Rubens Anthony, às minhas irmãs Ana Patrícia e Lya Raquel, e a meu pai Raimundo Nonato de Sousa(In memoriam).

Resumo

No presente trabalho mostraremos aos professores e alunos da Educação Básica algumas maneiras de extração da raiz quadrada ou de aproximação por racionais no caso de raízes não-exatas, que representam números irracionais. Tentaremos mostrar que um tema, normalmente tido como desinteressante e mecânico, pode ser abordado de uma maneira construtiva e motivadora. Fazendo uma conexão com outros tópicos da Matemática. Faremos um resgate do uso do algoritmo tradicional de extração da raiz quadrada e depois mostraremos outros métodos alternativos e interessantes de serem trabalhados em sala de aula, tais como: Método Chinês, Método dos Babilônios e Aproximações por Frações Contínuas.

Palavras-chave: raiz quadrada, frações contínuas, método chinês, método dos babilônios.

Abstract

This work aims to show teachers and students of Basic Education a few ways of extracting the square root or approximation by rational in the case of non-exact roots, which represent irrational numbers. We will try to show a subject, it is usually seen as dull and mechanical subject, it can be approached in a constructive and motivating way. Making a connection with other topics of mathematics. We will remind students the use of a traditional algorithm for extracting the square root, and then we show alternative and interesting methods to be worked in the classroom, such as: Chinese Method, Babylonians Method and Approaches for Continuous Fractions.

Keywords: square root, continuous fractions, chinese method, babylonians method.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A raiz quadrada aparece em vários problemas estudados na educação básica, tais como: resolução das equações quadráticas; cálculo da distância entre dois pontos; determinação do lado de um quadrado conhecendo-se sua área, dentre outros.

Matematicamente falando, a raiz quadrada de um *número real não nulo* n é um número real não negativo x tal que quando multiplicado por si próprio (ou elevado ao quadrado) é igual a n. Simbolicamente: $\sqrt{n} = x, \quad x \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot x = x^2 = n$. Nesse caso, dizemos simplesmente que n é o radicando e x é a raiz quadrada de n.

Apesar da definição simples, o cálculo da raiz quadrada de n pode causar um desconforto nos adolescentes quando x não for um número racional. Ainda mais quando se trata de dar uma solução a um problema prático da vida real do qual se espera como resposta um número natural (ou uma fração dele).

Observa-se, segundo [9], que muitos alunos têm dificuldades em encontrar uma boa aproximação racional para o problema sem o uso de uma calculadora. Por isso, seria muito interessante se aprendêssemos na escola maneiras práticas e convincentes de resolver tal situação sem que seja necessária uma calculadora do lado.

Para a extração das raízes quadradas não-exatas, que representam números irracionais, professores e alunos não encontram a ajuda que procuram nos livros didáticos atuais. Esses, trazem apenas o **Método das Tentativas**, que é muito rudimentar, mas que funciona bem apenas para números com poucos algarismos decimais.

Funciona assim: suponhamos que se queira calcular $\sqrt{20}$. Como sabemos: $4^2 < 20 < 5^2$, logo $4 < \sqrt{20} < 5$, isto é, $\sqrt{20} = 4, \ldots$. Além disso, $4,4^2 < 20 < 4,5^2$, logo $\sqrt{20} = 4,4\ldots$. Ainda por tentativas, $4,47^2 < 20 < 4,48^2$, logo $\sqrt{20} = 4,47\ldots$. E assim prosseguimos até que se encontre uma aproximação satisfatória. Esse método é um processo de fácil compreensão. No entanto, observamos que, sem o uso de uma calculadora, o Método das Tentativas vai se tornando cada vez mais trabalhoso e lento à medida em que se consegue mais algarismos decimais.

Além disso, mesmo depois de obter vários algarismos decimais, o resultado sempre nos deixará dúvidas sobre qual será o próximo algarismo a ser encontrado, ou se sua representação decimal termina, ou se estamos diante de um decimal periódico.

O método descrito acima, bem como os que serão trabalhados a seguir, fazem uso de uma propriedade essencial do conjunto dos números reais, retirado de [6]. Tal propriedade nos diz que qualquer número real pode ser aproximado por números racionais com erro tão pequeno quanto se queira alcançar.

De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, existe k inteiro tal que $0 \leqslant x - k < 1$, onde poderiamos escrever sua representação decimal

$$x - k = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \qquad a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \text{ e } i \in \mathbb{N}^*,$$

o que significa que se definirmos

$$r_n = a_n + 10 \cdot a_{n-1} + 10^2 \cdot a_{n-2} + \cdots + 10^{n-2} a_2 + 10^{n-1} a_1,$$

$$\Rightarrow r_{n+1} = a_{n+1} + 10 \cdot a_n + 10^2 \cdot a_{n-1} + \cdots + 10^{n-1} a_2 + 10^n a_1$$

então

$$\frac{r_n}{10^n} \leqslant x - k < \frac{r_{n+1}}{10^n}.$$

Portanto,

$$\left| x - (k + \frac{r_n}{10^n}) \right| < \frac{1}{10^n}.$$

O que nos leva a concluir que $(k + \frac{r_n}{10^n})$ é uma boa aproximação racional de x, uma vez que o erro fica cada vez menor à medida que se aumenta n.

Nesse trabalho visamos mostrar algumas maneiras que consideramos interessantes de serem ensinadas na Educação Básica para aproximar os irracionais quadráticos por números racionais.

Começamos fazendo um resgate do uso do algoritmo tradicional de extração da raiz quadrada, exemplificando e justificando o método para um caso particular. E no capítulo seguinte mostraremos um método alternativo que pode ser aplicado principalmente no Ensino Fundamental por ser de fácil entendimento.

Depois, mostramos um método usado pelos Babilônios. Tal método possui uma convergência muito rápida. Ideal para ser trabalhado no Ensino Médio.

Finalizamos com as frações contínuas, tema pouco ou quase nunca explorado na Educação Básica, porém excelente para representar e dar uma boa aproximação por números racionais dos irracionais quadráticos. Estes métodos, pouco usuais em sala de aula, possuem inerentemente imensas potencialidades de exploração pedagógica, se levarmos em conta a estrutura da mente humana, pois permite que o pensamento aconteça livremente, tornando significativas as ideias e conceitos da matemática, sendo desta forma um poderoso instrumento de ensino para alcançar a compreensão e inspirar novas descobertas.

Capítulo 2

O Algoritmo da Raiz Quadrada

O algoritmo da raiz quadrada há muito deixou de ser ensinado na educação básica. Foi abolido dos livros didáticos , por ser considerado por muitos educadores (segundo [9]):

- um processo puramente mecânico no qual a maioria das pessoas (mesmo matemáticos profissionais), tendo aprendido tal algoritmo na escola, esquece-o pouco tempo depois;
- de difícil assimilação por parte dos alunos, principalmente no nível fundamental;
- de demonstração muito trabalhosa para que o professor pudesse desenvolvê-lo em sala de aula argumentando cada uma de suas passagens.

E foi tentando driblar sua justificação enfadonha e desinteressante para os alunos que procuramos construir o processo de extração da raiz quadrada junto com eles, além de lhes dar outras altenativas na hora da extração da raiz.
Vejamos, através de alguns exemplos, como é desenvolvido o processo em tal algoritmo, antes de mostrarmos os métodos alternativos.

2.1 Conhecendo o Algoritmo Tradicional

Exemplo 1. *Vamos mostrar como se usa o algoritmo tradicional para extrair a raiz quadrada de* 64516.

Primeiramente, agrupamos os algarismos da direita para a esquerda de dois em dois. Depois procuramos o maior natural a_n tal que $a_n^2 \leqslant 6$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{a_n} \\ & \\ & \end{array}$$

Nesse exemplo, $a_n = 2$. Agora subtraimos de 6 o quadrado de 2. Encontramos 2 como resposta.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{2} \\ \underline{-4} & 2^2 = 4 \\ 2 & \end{array}$$

Em seguida, "abaixamos" o 45 formando o número 245.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{2} \\ \underline{-4} & 2^2 = 4 \\ 245 & \end{array}$$

Para encontrarmos o próximo dígito da raiz, procedemos assim: dobramos o valor já encontrado ($2 \times 2 = 4$), multiplicamos o resultado por dez ($4 \times 10 = 40$) e procuramos por inspeção o maior natural $0 \leqslant a_{n-1} \leqslant 9$ tal que $(40 + a_{n-1})a_{n-1} \leqslant 245$.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{2}\ \underline{a_{n-1}} \\ \underline{-4} & 2^2 = 4 \\ 245 & 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4\underline{a_{n-1}} \times \underline{a_{n-1}} \leqslant 245 \end{array}$$

Nesse caso, $a_{n-1} = 5$, pois $45 \times 5 = 225$ e $46 \times 6 = 276 > 245$. Subtraimos de 245 o valor encontrado.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{2}\ \underline{5} \\ \underline{-4} & 2^2 = 4 \\ 245 & 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4\underline{5} \times \underline{5} = 225 \\ \underline{-225} & \\ 20 & \end{array}$$

Agora, “abaixamos” o 16 formando o número 2016.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{2}\ \underline{5} \\
\underline{-4} & 2^2 = 4 \\
245 & 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4\underline{5} \times \underline{5} = 225 \\
\underline{-225} & \\
2016 &
\end{array}
$$

Para encontrarmos o próximo dígito da raiz, repetimos o processo anterior: Dobramos o valor já encontrado ($25 \times 2 = 50$), multiplicamos o resultado por dez ($50 \times 10 = 500$) e procuramos por inspeção o maior natural $0 \leqslant a_{n-2} \leqslant 9$ tal que $(500 + a_{n-2})a_{n-2} \leqslant 2016$.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{2}\ \underline{5}\ \underline{a_{n-2}} \\
\underline{-4} & 2^2 = 4 \\
245 & 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4\underline{5} \times \underline{5} = 245 \\
\underline{-225} & 2 \times 25 = 50 \Rightarrow 50\underline{a_{n-2}} \times \underline{a_{n-2}} \leqslant 2016 \\
2016 &
\end{array}
$$

Nesse caso, $a_{n-2} = 4$, pois $504 \times 4 = 2016$ e $505 \times 5 = 2525 > 2016$. Subtraimos de 2016 o valor encontrado.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{2}\ \underline{5}\ \underline{4} \\
\underline{-4} & 2^2 = 4 \\
245 & 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4\underline{5} \times \underline{5} = 225 \\
\underline{-225} & 2 \times 25 = 50 \Rightarrow 50\underline{4} \times \underline{4} = 2016 \\
2016 & \\
\underline{-2016} & \\
0 &
\end{array}
$$

Logo, $\sqrt{64516} = 254$.

Exemplo 2. *Vejamos como proceder para encontrar a raiz quadrada de* 145924.

Já podemos observar que estamos atrás de um número de três dígitos.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{145924} & \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ } \\
 & \\
 &
\end{array}
$$

Agrupando de dois em dois da direita para a esquerda, vamos encontrar o primeiro algarismo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{14.59.24} & \underline{\downarrow}\ \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ } \\ & \\ & \end{array}$$

O maior natural que o quadrado é menor do que ou igual a 14 é 3. Elevando ao quadrado e subtraindo de 14 encontramos 5.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{14.59.24} & \underline{3}\ \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9}\qquad & 3^2 = 9 \\ 5\qquad & \end{array}$$

"Abaixamos" o 59 obtendo o número 559.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{14.59.24} & \underline{3}\ \underline{?}\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9}\qquad & 3^2 = 9 \\ 559\ \ & \end{array}$$

Dobramos o 3, multiplicamos por dez e procuramos o 2º algarismo conforme o exemplo anterior.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{14.59.24} & \underline{3}\ \underline{\downarrow}\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9}\qquad & 3^2 = 9 \\ 559\quad & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{\downarrow} \times \underline{\downarrow} \leqslant 559 \end{array}$$

Verificamos que 8 satisfaz às condições exigidas. Multiplicamos 68×8 e subtraimos de 559.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{14.59.24} & \underline{3}\ \underline{8}\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9}\qquad & 3^2 = 9 \\ 559\quad & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{8} \times \underline{8} = 544 \\ \underline{-544}\quad & \\ 15\quad & \end{array}$$

"Abaixamos" o 24 e obtemos o número 1524.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{14.59.\color{red}{24}} & \underline{3}\ \underline{8}\ \underline{\downarrow} \\
\underline{-9} & 3^2 = 9 \\
559 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{8} \times \underline{8} = 544 \\
\underline{-544} & \\
15\color{red}{24} &
\end{array}
$$

Dobramos o 38 já encontrado e investigamos o próximo algarismo.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{14.59.24} & \underline{3}\ \underline{8}\ \underline{?} \\
\underline{-9} & 3^2 = 9 \\
559 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{8} \times \underline{8} = 544 \\
\underline{-544} & 2 \times 38 = 76 \Rightarrow 76\underline{?} \times \underline{?} \leqslant \color{red}{1524} \\
\color{red}{1524} &
\end{array}
$$

Observamos que 2 satisfaz às condições exigidas para o próximo algarismo e repetimos o processo conforme o exemplo anterior.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{14.59.24} & \underline{3}\ \underline{8}\ \underline{\color{red}{2}} \\
\underline{-9} & 3^2 = 9 \\
559 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{8} \times \underline{8} = 544 \\
\underline{-544} & 2 \times 38 = 76 \Rightarrow 76\underline{\color{red}{2}} \times \underline{\color{red}{2}} = 1524 \\
\color{red}{1524} & \\
\underline{\color{red}{-1524}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Logo,

$$\sqrt{145924} = 382.$$

2.2 Aproximação por Racionais

O algoritmo tradicional de extração da raiz quadrada também pode ser usado para aproximações de irracionais quadráticos por números racionais, como no exemplo a seguir.

Exemplo 3. *Calcular com precisão de duas casas decimais, a raiz quadrada de* 10.

A essa altura, já deu para perceber pelos Exemplos (1) e (2) que a cada par de algarismos dentro do radicando gera um algarismo na raiz. Como queremos uma aproximação de duas casa decimais, então acrescentamos quatro zeros decimais no radicando. Temos $\sqrt{10} = \sqrt{10,0000}$. E procedemos de maneira totalmente análoga aos exemplos anteriores. Já sabemos que estamos atrás de um número de três dígitos (1 na parte inteira e 2 na parte decimal).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,0000} & \underline{\ ?\ }, \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ } \\ & \\ & \end{array}$$

Agrupando de dois em dois da direita para a esquerda, vamos encontrar o primeiro algarismo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{\ \downarrow\ }, \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ } \\ & \\ & \end{array}$$

O maior natural que o quadrado é menor do que ou igual a 10 é 3. Elevando ao quadrado e subtraindo de 10 encontramos 1.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3}, \underline{\ ?\ }\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9}\quad\ \ & 3^2 = 9 \\ 1\quad\ \ & \end{array}$$

"Abaixamos" o 00 obtendo o número 100.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3}, \underline{?}\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9}\quad\ \ & 3^2 = 9 \\ 100\ \ & \end{array}$$

Dobramos o 3, multiplicamos por dez e procuramos o 2º algarismo conforme os exemplos anteriores.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3},\ \underline{\downarrow}\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9} & 3^2 = 9 \\ 100 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{\downarrow} \times \underline{\downarrow} \leqslant 100 \end{array}$$

Verificamos que 1 satisfaz. Multiplicamos 61×1 e subtraimos de 100.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3},\ \underline{1}\ \underline{\ ?\ } \\ \underline{-9} & 3^2 = 9 \\ 100 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{1} \times \underline{1} = 61 \\ \underline{-61} & \\ 39 & \end{array}$$

"Abaixamos" o 00 e obtemos o número 3900.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3},\ \underline{1}\ \underline{\downarrow} \\ \underline{-9} & 3^2 = 9 \\ 100 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{1} \times \underline{1} = 61 \times 1 \\ \underline{-61} & \\ 3900 & \end{array}$$

Dobramos o 31 já encontrado e investigamos o próximo algarismo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3},\ \underline{1}\ \underline{?} \\ \underline{-9} & 3^2 = 9 \\ 100 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{1} \times \underline{1} = 61 \times 1 \\ \underline{-61} & 2 \times 31 = 62 \Rightarrow 62\underline{?} \times \underline{?} \leqslant 3900 \\ 3900 & \end{array}$$

Observamos que 6 satisfaz às condições exigidas para o próximo algarismo e repetimos o processo conforme os exemplos anteriores.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10,00.00} & \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{6} \\ \underline{-9} & 3^2 = 9 \\ 100 & 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 6\underline{1} \times \underline{1} = 61 \\ \underline{-61} & 2 \times 31 = 62 \Rightarrow 62\underline{6} \times \underline{6} = 3756 \\ 3900 & \\ \underline{-3756} & \\ 144 & \end{array}$$

Logo, com aproximação de duas casas decimais, $\sqrt{10} = 3,16$.

Note que nos Exemplos (1) e (2) o resto foi zero, então a raiz obtida em cada um deles foi exata. Já no Exemplo (3) o resto foi $0,0144 \neq 0$, pois

$$3,16^2 + 0,0144 = 9,9856 + 0,0144 = 10.$$

Caso quiséssemos encontrar mais uma casa decimal na raiz, bastava acrescentar mais um par de zeros à direita de 144 e continuar o processo.

2.3 Justificando os Passos do Algoritimo

Vamos detalhar a explicação do processo de extração da raiz quadrada realizado acima no caso particular de um número natural com cinco ou seis algarismos conforme os exemplos (1) e (2) vistos anteriormente, ficando claro que a justificativa é análoga para o caso geral, porém um pouco mais trabalhosa.

Seja, então, M um número inteiro positivo com cinco ou seis algarismos. Observe que M pode ser escrito na forma

$$M = 10^4A_1 + 10^2A_2 + A_3$$

onde A_1, A_2 e A_3 são inteiros tais que $0 \leqslant A_1, A_2, A_3 \leqslant 99$. Isto corresponde a separar os algarismos de M de dois em dois da direita para a esquerda, que é o primeiro passo do algoritmo. Para facilitar o raciocínio, suponhamos também que M seja um quadrado perfeito. Observe que $\sqrt{M}$ é um número formado por 3 algarismos. De fato, se $\sqrt{M}$ tivesse mais de três algarismos, então

$$\sqrt{M} \geqslant 10^3 \Longrightarrow M \geqslant 10^6 = 1.000.000,$$

absurdo, pois M tem, no máximo, seis algarismos.

Por outro lado, se $\sqrt{M}$ tivesse menos de três algarismos, então

$$\sqrt{M} \leqslant 99 < 10^2 \Longrightarrow M < 10^4 = 10.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \leqslant 9999,$$

absurdo, pois M tem, no mínimo, cinco algarismos.

Com isso, o problema de extrair a raiz quadrada de M fica resumido a encontrar os inteiros $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 9$ tais que

$$(10^2x_1^2 + 10x_2 + x_3)^2 = M = 10^4A_1 + 10^2A_2 + A_3.$$

Daí então, vem o segundo passo do algoritmo que corresponde a encontrar o maior inteiro x_1 tal que $x_1^2 \leqslant A_1$. Note que, dessa forma, x_1 está bem definido. De fato, se x_1 fosse tal que $x_1^2 > A_1$, então teríamos

$$x_1^2 > A_1 \Rightarrow x_1^2 \geqslant A_1 + 1 \Rightarrow x_1^2 - A_1 \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1^2 - A_1)10^4 \geqslant 10^4 > 9999 \geqslant 10^2A_2 + A_3 \Rightarrow$$

$$10^4x_1^2 - 10^4A_1 > 10^2A_2 + A_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^4x_1^2 > 10^4A_1 + 10^2A_2 + A_3 = M \Rightarrow$$

$$(10^2x_1^2 + 10x_2 + x_3)^2 \geqslant 10^4x_1^2 > M \Rightarrow$$

$$(10^2x_1^2 + 10x_2 + x_3)^2 > M, \quad \forall A_2, A_3 \in \mathbb{Z}_+.$$

Portanto, x_1^2 não pode ser maior que A_1.

Por outro lado, se houvesse y tal que $x_1 < y$ e $y^2 \leqslant A_1$, então

$$y \geqslant x_1 + 1 \Rightarrow y - x_1 \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y - x_1)10^2 \geqslant 10^2 > 99 \geqslant 10x_2 + x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^2y > 10^2x_1 + 10x_2 + x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10^2x_1 + 10x_2 + x_3)^2 < (10^2y)^2 =$$

$$= 10^4y^2 \leqslant 10^4A_1 \leqslant 10^4A_1 + 10^2A_2 + A_3 = M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10^2x_1^2 + 10x_2 + x_3)^2 < M.$$

Portanto, $\sqrt{M}$ não poderia começar com x_1. Logo, x_1 deve ser o maior inteiro tal que $x_1^2 \leqslant A_1$.

Conhecido x_1, vamos obter x_2 através do terceiro passo do algoritmo que consiste em:

- elevar x_1 ao quadrado e calcular a difernça $A_1 - x_1^2$;
- "Abaixar" A_2 e formar o número $(A_1 - x^2)10^2 + A_2$;
- Multiplicar x_1 por 2 e procurar o maior algarismo $0 \leqslant x_2 \leqslant 9$ tal que $[(2x_1)10 + x_2]x_2 \leqslant (A_1 - x_1^2)10^2 + A_2$. Conforme os Exemplos (1) e (2), vistos anteriormente.

Mostraremos que x_2, obtido dessa forma, está bem definido.

De fato, se

$$[(2x_1)10 + x_2]x_2 > (A_1 - x_1^2)10^2 + A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 10^2 + [(2x_1)10 + x_2]x_2 > A_1 10^2 + A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 10^2 + [(2x_1)10 + x_2]x_2 - (A_1 10^2 + A_2) \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_1^2 10^2 + [(2x_1)10 + x_2]x_2 - (A_1 10^2 + A_2)\}10^2 \geqslant 10^2 > 99 \geqslant A_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 10^4 + [(2x_1)10 + x_2]x_2 10^2 > A_1 10^4 + A_2 10^2 + A_3 = M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10^2 x_1^2 + 10x_2 + x_3)^2 \geqslant x_1^2 10^4 + [(2x_1)10 + x_2]x_2 10^2 > M,$$

qualquer que seja A_3. Absurdo!

Por outro lado, se existir $y > x_2$ tal que $[(2x_1)10 + y]y \leqslant (A_1 - x_1^2)10^2 + A_2$, então

$$x_1^2 10^2 + [(2x_1)10 + y]y \leqslant A_1 10^2 + A_2. \tag{2.1}$$

Além disso,

$$y \geqslant x_2 + 1 \Rightarrow y - x_2 \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$(y - x_2)10 \geqslant 10 > 9 \geqslant x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y > 10x_2 + x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 10^2 + y10 > x_1^2 10^2 + 10x_2 + x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1^2 10^2 + 10x_2 + x_3)^2 < (x_1^2 10^2 + y10)^2 = \{x_1^2 10^2 + [(2x_1)10 + y]y\}10^2. \tag{2.2}$$

Pelas Inequações (2.1) e (2.2), temos que

$$(x_1^2 10^2 + 10x_2 + x_3)^2 < A_1 10^2 + A_2 10^2 \leqslant A_1 10^4 + A_2 10^2 + A_3 = M,$$

assim, x_2 não deveria ser escolhido. Logo, $\boxed{0 \leqslant x_2 \leqslant 9}$ deve ser o maior inteiro tal que

$$[(2x_1)10 + x_2]x_2 \leqslant (A_1 - x_1^2)10^2 + A_2.$$

c.q.d.

Conhecidos x_1 e x_2, vamos obter x_3 através do quarto passo do algoritmo que consiste em:

- "Abaixar" A_3 e formar o número $[(A_1 - x^2)10^2 + A_2]10^2 + A_3$;
- Multiplicar $10x_1 + x_2$ por 2 e procurar o maior algarismo $0 \leqslant x_3 \leqslant 9$ tal que $[2(10x_1 + x_2)10 + x_3]x_3 \leqslant [(A_1 - x_1^2)10^2 + A_2 - (2x_1 10 + x_2)x_2]10^2 + A_3$. Conforme os Exemplos (1) e (2), vistos anteriormente.

Mostraremos que x_3, obtido dessa forma, está bem definido.

De fato, se

$$[2(10x_1 + x_2)10 + x_3]x_3 > [(A_1 - x_1^2)10^2 + A_2 - (2x_1 10 + x_2)x_2]10^2 + A_3 \Rightarrow$$

$$x_1^2 10^4 + (2x_1 10 + x_2)x_2 10^2 + [2(10x_1 + x_2)10 + x_3]x_3 > A_1 10^4 + A_2 10^2 + A_3 = M \Rightarrow$$

$$(x_1 10^2 + x_2 10 + x_3)^2 > M.$$

Absurdo!

Por outro lado, se existisse um inteiro positivo $z > x_3$ tal que

$$[2(10x_1 + x_2)10 + z]z \leqslant [(A_1 - x_1^2)10^2 + A_2 - (2x_1 10 + x_2)x_2]10^2 + A_3 \Rightarrow$$

$$x_1^2 10^4 + (2x_1 10 + x_2)x_2 10^2 + [2(10x_1 + x_2)10 + z]z \leqslant A_1 10^4 + A_2 10^2 + A_3 = M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 10^2 + x_2 10 + z)^2 \leqslant M. \tag{2.3}$$

Além disso,

$$x_3 < z \Rightarrow x_1 10^2 + x_2 10 + x_3 < x_1 10^2 + x_2 10 + z$$

$$\Rightarrow (x_1 10^2 + x_2 10 + x_3)^2 < (x_1 10^2 + x_2 10 + z)^2 \tag{2.4}$$

Das Inequações (2.3) e (2.4), concluimos que

$$(x_1 10^2 + x_2 10 + x_3)^2 < M.$$

Logo,

$$0 \leqslant x_3 \leqslant 9$$

deve ser o maior inteiro tal que

$$[2(10x_1 + x_2)10 + x_3]x_3 \leqslant [(A_1 - x_1^2)10^2 + A_2 - (2x_1 10 + x_2)x_2]10^2 + A_3.$$

c.q.d.

Para uma leitura complementar, recomendamos [2].

Como podemos observar, a explicação dada acima, mesmo para um caso particular (um número formado por cinco ou seis algarismos), não seria nem um pouco aconselhável que se faça em sala de aula (estamos nos referindo à Educação Básica). Não é à toa que não vem mais nos livros didáticos.

E foi refletindo sobre isso que surgiu a idéia mostrar métodos alternativos de extração da raiz quadrada aos alunos. Os quais passaremos a ver.

Capítulo 3

Método Chinês

Por experiência própria, no Nível Fundamental, o método que obtivemos mais sucesso foi o **Método Chinês** baseado nas **Equações de Pell**. Tal processo baseia-se no fato de que a soma dos n primeiros ímpares positivos é igual a n^2.

De fato, a sequência $a_n = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$, é uma Progressão Aritmética (P.A.) de razão $r = 2$ e primeiro termo $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$. A soma

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[1 + (2n - 1)]n}{2} = \frac{2n \times n}{2} = n^2. \tag{3.1}$$

c.q.d.

Por exemplo:

$$\underbrace{1}_{1 \quad parcela} = 1^2$$

$$\underbrace{1 + 3}_{2 \quad parcelas} = 4 = 2^2$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5}_{3 \quad parcelas} = 9 = 3^3$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{4 \quad parcelas} = 16 = 4^2$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + 19}_{10 \quad parcelas} = 10^2$$

Da Equação (3.1), conclui-se que

$$\boxed{n = \sqrt{S_n}}$$

Com isso, o aluno pode-se entender que para reverter o processo de adição basta utilizar a subtração dos n primeiros ímpares.

3.1 Conhecendo o Método

Para entender melhor como funciona, vamos mostrar alguns exemplos:

Exemplo 4. *Calcular* $\sqrt{64}$

1. $64 - 1 = 63$
2. $63 - 3 = 60$
3. $60 - 5 = 55$
4. $55 - 7 = 48$
5. $48 - 9 = 39$
6. $39 - 11 = 28$
7. $28 - 13 = 15$
8. $15 - 15 = 0$

Logo, $\sqrt{64} = 8$, pois realizamos 8 subtrações.

Exemplo 5. *Vamos agora calcular a* $\sqrt{529}$.

Observe que demoraria muito fazer a subtração dos ímpares positivos um a um. Então poderíamos ganhar tempo relizando a subtração de uma certa quantidade de ímpares. De preferência que seja fácil e rápido de se calcular. É nessa hora que o aluno fica à vontade para escolher sua melhor estratégia. E como vimos antes que a soma dos n primeiros ímpares positivos é n^2, então a maioria entende que é mais prático trabalhar com os múltiplos de 10. Vejamos:

$$S_{10} = 10^2 = 100$$

$$S_{20} = 20^2 = 400$$

$$S_{30} = 30^2 = 900 > 529,$$

então usaremos S_{20}.

Daí então, $529 - 400 = 129$.

Já adiantamos a subtração dos vinte primeiros ímpares positivos. O próximo ímpar é $2 \times 21 - 1 = 41$.

E continuando o processo de subtração, obtemos:

$$129 - 41 = 88,$$

$$88 - 43 = 45$$

e

$$45 - 45 = 0.$$

Perfazendo um total de $20 + 3 = 23$ subtrações. Logo, $\sqrt{529} = 23$.

3.2 Semelhanças com o Algoritmo Tradicional

Podemos observar que o Método Chinês serve, inclusive, para justificar as etapas do algoritmo tradicional da extração da raiz.
Antes de fazermos um paralelo entre os dois métodos, vamos relembrar como seria o procedimento para extrair $\sqrt{529}$ usando o Algoritmo tradicional:
Agrupamos 529 de dois em dois da direita para esquerda. Procuramos um número natural tal que elevado ao quadrado não ultrapasse 5. Encontramos 2. E fazemos $5 - 2^2 = 1$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5.29} & \underline{2} \\ \underline{-4} & 2^2 = 4 \\ 1 & \end{array}$$

Em seguida, “abaixamos” o 29 formando o número 129. Depois, dobramos o número 2 já encontrado e procuramos um natural $0 \leqslant y \leqslant 9$ tal que $(40 + y)y \leqslant 129$. Por inspeção, encontramos $y = 3$ e fazemos $129 - 43 \times 3 = 0$

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{5.\color{red}{29}} & \underline{2}\color{red}{3} \\
\underline{-4} & 2^2 = 4 \\
1\color{red}{29} & 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4\color{red}{3} \times \color{red}{3} = 129 \\
\underline{-129} & \\
0 &
\end{array}$$

Poderíamos ter procedido assim:

Como $\sqrt{529}$ não tem mais que 2 algarismos, então basta procurar n (múltiplo de dez) tal que $n^2 \leqslant 529$. Encontramos $n = 20$ e fazemos $529 - 20^2 = 129$, que corresponde a fazermos $5 - 4 = 1$, "abaixar" o 29 para formar o número 129. O próximo passo do algoritmo é dobrar o 2 já encontrado e procurar um natural $0 \leqslant y \leqslant 9$ tal que $(40 + y)y \leqslant 129$. Por inspeção, encontramos $y = 3$ e fazemos $129 - 43 \times 3 = 0$. Ora, dobrar o algarismo já encontrado é pelo fato dos ímpares formarem uma sequência de inteiros de dois em dois. O próximo ímpar é $2 \times 20 - 1 = 41$. Para entender a procura pelo y tal que $(40 + y)y$, vejamos:

1. $129 - 41 = 88$
2. $88 - 43 = 45$
3. $45 - 45 = 0$

Nesse caso, $y = 3$, pois

1. $41 = 40 + 1$
2. $42 = 40 + 2 \qquad +$
3. $43 = \underline{40 + 3}$

$$3 \times 40 + (1 + 3 + 5) = 3 \times 40 + 3^2 = (40 + 3)3$$

Exemplo 6. *Calcular a* $\sqrt{120409}$.

Como vimos na seção 2.3, a $\sqrt{120409}$ não tem mais que três algarismos, então procuraremos o maior n (múltiplo de 100 para ganharmos tempo) tal que $n^2 \leqslant 120000$. Encontramos $n = 300$. Fazemos $120409 - 300^2 = 120409 - 90000 = 30409$.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{120409} & \underline{\ 300\ } \\
\underline{-90000} & \\
30409 &
\end{array}$$

O próximo ímpar é $301.2 - 1 = 601$. Então faríamos

$$30409 - 601 = 29808$$

$$29808 - 603 = 29205$$

$$\vdots$$

Ou, para ganharmos tempo, como

$$601 = 600 + 1,$$

$$603 = 600 + 3,$$

$$\vdots$$

então poderíamos subtrair outros $\mathfrak{m}$ ímpares consecutivos a partir de 601.

$$+\begin{cases} 600 + 1 \\ 600 + 3 \\ \vdots \\ \underline{600 + (2\mathfrak{m} - 1)} \end{cases}$$
$$= (600)\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^2$$

Onde, $(600 + \mathfrak{m})\mathfrak{m} \leqslant 300409$.

Fazendo-se uma inspeção apenas com $\mathfrak{m}$ múltiplo de 10 encontramos $\mathfrak{m} = 40$. Daí então, $640 \times 40 = 25600$. E efetuando $30409 - 25600 = 4809$.

O próximo ímpar é $341 \times 2 - 1 = 681$. Finalizando

1. $4809 - 681 = 4128$
2. $4128 - 683 = 3445$
3. $3445 - 685 = 2760$
4. $2760 - 687 = 2073$
5. $2073 - 689 = 1384$
6. $1384 - 691 = 693$
7. $693 - 693 = 0$

Logo, $\sqrt{120409} = 300 + 40 + 7 = 347$.

Esquematizando como no algoritmo tradicional, teríamos

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{120409} & \underline{\ 300 + 40 + 7\ } \\
\underline{-90000} & n^2 \leqslant 120000 \Rightarrow n = 300 \Rightarrow 300^2 = 90000 \\
30409 &
\end{array}$$

Próxima etapa

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{120409} & \underline{\ 300 + 40 + 7\ } \\
\underline{-90000} & \underline{n^2 \leqslant 120000 \Rightarrow n = 300 \Rightarrow 300^2 = 90000} \\
30409 & \text{O próximo ímpar é } 2 \times 300 + 1 = 601 \\
\underline{-25600} & \Rightarrow (2 \times 300 + m)m = (600 + m)m \leqslant 30400 \\
4809 & \Rightarrow m = 40 \Rightarrow 640 \times 40 = 25600
\end{array}$$

E por fim

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{120409} & \underline{\ 300 + 40 + 7\ } \\
\underline{-90000} & \underline{n^2 \leqslant 120000 \Rightarrow n = 300 \Rightarrow 300^2 = 90000} \\
30409 & \text{O próximo ímpar é } 2 \times 300 + 1 = 601 \\
\underline{-25600} & \Rightarrow (2 \times 300 + m)m = (600 + m)m \leqslant 30400 \\
4809 & \underline{\Rightarrow m = 40 \Rightarrow 640 \times 40 = 25600} \\
\underline{-4809} & \text{O próximo ímpar é } 340 \times 2 + 1 = 681 \\
0 & \Rightarrow (680 + y)y \leqslant 4809 \Rightarrow y = 7
\end{array}$$

Note que, em meio às resoluções, dependendo da série em que se trabalhe ou do nível de conhecimento matemático dos alunos, poderíamos ter usado outros recursos para dar agilidade ao processo. Como por exemplo, usar soma dos termos de uma P.A. (Progressão aritmética) logo após ter descoberto o próximo ímpar a ser subtraído, bem como fazer uso das técnicas de resoluções de inequações envolvendo polinômios de primeiro e segundo graus.

Contudo, queremos enfatizar que a beleza desse método não está no algoritmo em si, mas sim, no desenvolvimento do processo, no envolvimento e nas descobertas feitas pelos alunos.

Além disso, é importante ressaltar também que esse é um processo bastante flexível, pois permite que cada aluno trace sua própria estratégia de encontrar a raiz procurada. Enquanto uns preferem subtrair termo a termo por considerarem mais fácil, outros não exitarão em ganhar tempo subtraindo de uma só vez uma certa quantidade de ímpares consecutivos.

Capítulo 4

Método dos Babilônios

Vimos na introdução deste trabalho que podemos aproximar um irracional quadrático por um racional através do *Método das tentativas.*
Entretanto, ficou claro também que tal método é aconselhável se o objetivo for conseguir apenas uma aproximação com poucas casas decimais corretas. Pois, caso contrário, teríamos que ter o auxílio de uma calculadora.

Daí, surge o seguinte questionamento:
É possível encontrar uma aproximação melhor sem ter que fazer tantas contas?

A resposta é: **Sim. É possível.** E melhor, sem a necessidade de usar a calculadora. Trata-se de um método iterativo, conhecido como método babilônico. Para um maior aprofundamento, recomendamos [1] e [4].
Antes de mostrarmos o método, vamos entender sua fundamentação (retirado de [1]):

Se x é um número real maior que zero e n é um número racional positivo que está "próximo" de x (escrevemos $n \approx x$), então $x + n$ está "próximo" de $2n$. Temos

$$x + n \approx 2n$$

que multiplicando por $(x - n)$ encontramos

$$x^2 - n^2 = (x + n)(x - n) \approx 2n(x - n).$$

Dividindo por $2n$, encontramos

$$\frac{x^2 - n^2}{2n} \approx x - n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - n^2}{2n} + n \approx x$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + n^2}{2n} \approx x$$

E concluimos que

$$x \approx \frac{1}{2} \cdot \left[n + \frac{x^2}{n} \right]$$

é válido para todo número real positivo x.

Em especial, se x for um irracional quadrático, então x^2 será um número racional e os cálculos acima serão de fácil manipulação. Isso motiva o uso do método a seguir. Pois além da simplicidade no desenvolvimento dos cálculos, é um processo que dá uma aproximação para a raiz quadrada não-exata de um número real positivo a por um número racional apresentando uma margem de erro tão pequena o quanto desejarmos. Para tanto:

Tome-se arbitrariamente um valor inicial $x_1 > \sqrt{a}$ e defini-se indutivamente

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} . \left[x_n + \frac{a}{x_n} \right]$$

Vamos mostrar que a sequência (x_n) assim obtida converge para $\sqrt{a}$.

Demonstração.
De fato, multiplicando a inequação $\sqrt{a} < x$ por $\dfrac{\sqrt{a}}{x} > 0$

$$\Longrightarrow \frac{a}{x} < \sqrt{a} \Longrightarrow \frac{a}{x} < \sqrt{a} < x \Longrightarrow \frac{a}{x} < x \Longrightarrow \frac{a}{x} + x < x + x = 2x$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} . \left[x + \frac{a}{x} \right] < x \qquad (*)$$

Além disso, note que

$M_A = \frac{1}{2}.\left[x + \frac{a}{x}\right]$ é a média aritmática entre os números x e $\frac{a}{x}$,

$M_G = \sqrt{x.\frac{a}{x}} = \sqrt{a}$ é a média geométrica entre os números x e $\frac{a}{x}$.

Como $M_A > M_G$ (a média aritmética entre dois números reais positivos e distintos é maior do que a média geométrica desses números), concluimos que

$$\sqrt{a} < \frac{1}{2}.\left[x + \frac{a}{x}\right] \tag{**}$$

De (*) e (**), tem-se

$$\sqrt{a} < \frac{1}{2}.\left[x + \frac{a}{x}\right] < x$$

Isso mostra que (x_n) é uma sequência decrescente $(x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots)$ cujos termos são todos maiores que $\sqrt{a} > 0$.

Daí então, (x_n) converge para um número real c (positivo).
Fazendo $n \to +\infty$ na igualdade

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}.\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]$$

obtemos

$$c = \frac{1}{2}.\left[c + \frac{a}{c}\right] \Longrightarrow c^2 = a \Longrightarrow c = \lim_{x_n \to +\infty} = \sqrt{a}$$

□

Como exemplo prático, vamos obter algumas aproximações para a $\sqrt{3}$.
Note que podemos iniciar com $x_1 = 2$ já que $2^2 = 4 > 3 \Longrightarrow 2 > \sqrt{3}$. Temos:

$$x_2 = \frac{1}{2}.\left[2 + \frac{3}{2}\right] = 1,75$$

$$x_3 = \frac{1}{2}.\left[1,75 + \frac{3}{1,75}\right] = \frac{97}{56} \approx 1,7321$$

$$x_4 = \frac{1}{2}.\left[\frac{97}{56} + \frac{3}{\frac{97}{56}}\right] = \frac{18817}{10864} \approx 1,73205081.$$

Observe ainda que: x_2, como aproximação de $\sqrt{3}$, está correta até a 1ª casa decimal; x_3 está correta até a 3ª casa decimal; x_4 está correta até a 7ª casa decimal.

Podemos ver na prática que o processo iterativo $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}.\left[x_n + \dfrac{a}{x_n}\right]$ fornece rapidamente boas aproximações para $\sqrt{a}$.

Mesmo que tivéssemos começado com $x_1 = 10$ que é um valor mais "distante" de $\sqrt{3}$, obteríamos: $x_2 = 5,15$; $x_3 \approx 2,8662621$; $x_4 \approx 1,95646$; $x_5 \approx 1,74492; x_6 \approx 1,7320; \ldots$. Já na 6ª iteração obtemos uma aproximação com quatro casas decimais exatas.

Por isso, dependendo dos objetivos, esse é um processo muito bem indicado para fazer tais aproximações. Para um melhor desempenho dos alunos em sala de aula, sugerimos que tal método seja apresentado e desenvolvido logo após o estudo sobre as médias.

Capítulo 5

Aproximações por Frações Contínuas

A teoria de fracões contínuas, um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje tema de pesquisa por ser muito rico e ter aplicações em várias ciências. Através dela é possível representar números racionais, irracionais e até mesmo resolver problemas de física, engenharia, astronomia, etc. Pode-se encontrar muitas aplicações em [5].

Vamos partir de um exemplo para introduzir o processo que será trabalhado aqui.

Exemplo 7. *Calcular* $\sqrt{6}$.

Primeiro passo é situar 6 entre dois *quadrados perfeitos*.
Assim,

$$2^2 < 6 < 3^2,$$

ou seja,

$$2 < \sqrt{6} < 3.$$

Portanto, podemos escrever

$$\sqrt{6} = 2 + h, \text{ onde, } 0 < h < 1,$$

ou, alternativamente,

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{x}, \text{ onde, } x > 1.$$

Então,

$$\frac{1}{x} = \sqrt{6} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 = \frac{2+2}{2} < x < \frac{3+2}{2} < 3.$$

Novamente, o fato de $2 < x < 3$ permite colocar $x = 2 + \frac{1}{y}$, onde $y > 1$, obtendo-se

$$\frac{1}{y} = x - 2 = \frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{6} + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 = 2 + 2 < y < 3 + 2 = 5.$$

Mais uma vez,

$$y = 4 + \frac{1}{z}, \text{ onde } z > 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{z} = y - 4 = \sqrt{6} - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = x$$

Resumindo o que temos até agora:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{x} \text{ onde } x = 2 + \frac{1}{y}$$

onde

$$y = 4 + \frac{1}{z} \text{ onde } z = x.$$

Como z repetiu x, então, a partir daí, o processo começa a repetir os mesmos resultados, isto é, estamos diante de um fenômeno periódico. Na realidade, o que descobrimos foi uma seqüência de aproximações racionais para $\sqrt{6}$, a saber

$$2 \qquad 2+\frac{1}{2} \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}} \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}} \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}} \qquad \cdots$$

que são respectivamente iguais a

$$2 \qquad \frac{5}{2} = 2,5 \qquad \frac{22}{9} = 2,\overline{4} \qquad \frac{49}{20} = 2,45 \qquad \frac{218}{89} \approx 2,4494 \qquad \cdots$$

Podemos sintetizar o resultado como

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

Denotamos $\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, \ldots]$ ou melhor ainda, $\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$ onde a barra indica que o padrão $2; 4$ se repetirá indefinidamente.

Vamos, então, à definição de frações contínuas, retirada de [6].

Definição 1. *Seja x um número real. Definimos recursivamente*

$$\alpha_0 = x, a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$

isto é, a_n é o maior inteiro menor do que ou igual a $\alpha_n \in \mathbb{R}$
e, se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se, para algum $n, \alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Senão, denotamos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

5.1 Expansão dos Racionais por Frações Contínuas

Se $\dfrac{p}{q}$ é um número racional, então ele possui uma expansão contínua dada por

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Podemos observar que não é difícil representar um número racional por uma fração contínua.

Por exemplo

Exemplo 8. $\dfrac{62}{27} = 2 + \dfrac{8}{27} = 2 + \dfrac{1}{\dfrac{27}{8}} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{3}{8}} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{\dfrac{8}{3}}} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{3}}} =$

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [2; 3, 2, 1, 2]$$

Exemplo 9. $\dfrac{62 \times 6}{27 \times 6} = \dfrac{372}{162} = 2 + \dfrac{48}{162} = 2 + \dfrac{1}{\dfrac{162}{48}} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{18}{48}} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{\dfrac{48}{18}}} =$

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{12}{18}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{18}{12}}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [2; 3, 2, 1, 2]$$

Os números racionais $\dfrac{62}{27}$ e $\dfrac{372}{162}$ são frações equivalentes, por isso têm a mesma representação por frações contínuas.

Poderíamos ter procedido usando o algoritmo da divisão:

$$\begin{aligned} 62 &= \boxed{\mathbf{2}} \times 27 + 8 \\ 27 &= \boxed{\mathbf{3}} \times 8 + 3 \\ 8 &= \boxed{\mathbf{2}} \times 3 + 2 \\ 3 &= \boxed{\mathbf{1}} \times 2 + 1 \\ 2 &= \boxed{\mathbf{2}} \times 1 + 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} 372 &= \boxed{\mathbf{2}} \times 162 + 48 \\ 162 &= \boxed{\mathbf{3}} \times 48 + 18 \\ 48 &= \boxed{\mathbf{2}} \times 18 + 12 \end{aligned}$$

$$18 = \boxed{\mathbf{1}} \times 12 + 6$$

$$12 = \boxed{\mathbf{2}} \times 6 + 0$$

Exemplo 10. $\dfrac{27}{62} = 0 + \dfrac{1}{\frac{62}{27}}$, *e pelo Exemplo 8,* $\dfrac{27}{62} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = [0; 2, 3, 2, 1, 2]$.

Procedendo de modo análogo, não é difícil observar que se a representação em fração contínua do racional positivo $\dfrac{p}{q} (p > q)$ *é dada por* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$*, então a representação de* $\dfrac{q}{p}$ *é dada por* $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Exemplo 11. $\dfrac{-69}{31} = -3 + \dfrac{14}{31} = -3 + \dfrac{1}{\frac{31}{14}} = -3 + \dfrac{1}{2 + \frac{3}{14}} = -3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{14}{3}}} =$

$$= -3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \frac{2}{3}}} = -3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

Como podemos observar, no processo de divisões sucessivas, somente o primeiro quociente pode ser negativo. Podemos deduzir daí que na fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ todo a_i (com i pertencente aos naturais não nulos) é inteiro positivo.

É fácil de ver que toda fração contínua simples finita $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ representa um número racional. Basta observar que a adição entre números racionais é um número racional, bem como a divisão de um racional por um racional não-nulo também é um racional, e o resultado segue.

A recíproca também é verdadeira, isto é, um número racional pode ser representado sob a forma de fração contínua finita. De fato, procedendo como em (5.1) e lembrando que o algoritmo de Euclides é um processo finito, pois trata-se de uma sequência decrescente de inteiros positivos, o resultado segue.

5.2 Irracionais Quadráticos em Frações Contínuas

Os irracionais quadráticos, isto é, os irracionais da forma

$$a + b\sqrt{c},$$

com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{c} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, podem ser representados por Frações Contínuas fazendo uso da Definição (1). Por exemplo:

Exemplo 12. $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots] = [1; \overline{2}]$ *pois,* $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \ldots$$

Exemplo 13. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$ *pois,* $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1) = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}} = \ldots$$

Exemplo 14. $\sqrt{8} = [2; 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots] = [2; \overline{1, 4}]$ *pois,* $2 < \sqrt{8} < 3 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sqrt{8} = 2 + (\sqrt{8} - 2) = 2 + \frac{4}{\sqrt{8}+2} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{8}+2}{4}}$$

E procedendo de modo análogo, encontramos

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{8}+2}{4}}}}}}$$

Do exemplo anterior e da definição (1), podemos observar que se x é um número irracional positivo, $\alpha_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$

$$\alpha_0 = a_0 + (\alpha_0 - a_0) = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\alpha_0 - a_0}} = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

e, claramente, α_1 é irracional e $\alpha_1 > 1$. Continuando com o mesmo raciocínio, podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \\ \alpha_2 &= a_2 + \frac{1}{\alpha_3} \\ &\vdots \\ \alpha_n &= a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \end{aligned}$$

onde todo $a_i (i \in \mathbb{N}^*)$ é inteiro maior do que ou igual a 1 e todo $\alpha_n (n \in \mathbb{N}^*)$ é irracional maior que 1. O fato de α_n ser irracional nos garante que este processo pode ser repetido um número qualquer de vezes. Isso nos dá uma prova de que $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são números irracionais; já que, como vimos anteriormente, se o processo fosse finito eles seriam racionais.

Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Sejam $p_n, \quad q_n \in \mathbb{Z}$ primos entre si com $q_n > 0$, tais que $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n], \quad n > 0$. Nesse caso, a fração $\dfrac{p_n}{q_n}$ é chamada de *n-ésima convergente da fração contínua de* α.

Por exemplo

A 1ª convergente de $\sqrt{8}$ é

$$\frac{p_1}{q_1} = [2; 1] = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

A 2ª convergente de $\sqrt{8}$ é

$$\frac{p_2}{q_2} = [2; 1, 4] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}} = \frac{14}{5}$$

A 3ª convergente de $\sqrt{8}$ é

$$\frac{p_3}{q_3} = [2; 1, 4, 1] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{5}} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$$

Chamamos de *frações contínuas periódicas* às frações contínuas em que uma sequência de números se repete periodicamente. Colocamos uma barra sobre a parte que se repete a qual é chamada de *período* da fração contínua.

Usando a definição (1) para $\sqrt{3}$ obtemos $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}]$.

Dada uma fração contínua periódica podemos reverter o processo acima para obtenção do número irracional representado por ela.
Observe

$$[1; \overline{1, 2}] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = 1 + \frac{1}{y} \tag{5.2}$$

com,

$$y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Daí então,

$$y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}} \Longrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0 \Longrightarrow y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \tag{5.3}$$

uma vez que $y > 0$. Substituindo (5.3) em (5.2), temos:

$$[1; \overline{1, 2}] = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} \tag{5.4}$$

É importante ressaltar que nem toda representação em fração contínua de um número irracional é periódica. O número π, por exemplo, possui a seguinte representação

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \ldots]$$

na qual não há qualquer período.

No Século XVIII, Lagrange caracterizou todos os irracionais possuidores de representação periódica quando expressos sob a forma de fração contínua e que a fração contínua infinita que representa um irracional é periódica, se e somente se, este irracional for raiz de um polinômio de 2º grau, ou seja, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são inteiros (para demonstração ver apêndice, Teorema 2). É justamente essa propriedade que torna o processo de representação das raízes quadradas por frações contínuas atraente, pois permite descrever, de forma completa, e apenas com um número finito de naturais, uma sequência infinita. E para encontrar o período que a descreve, basta proceder como nos exemplos anteriores (12, 13 e 14).

Há, porém, uma classe de naturais não quadráticos nos quais é muito fácil encontrar tal representação. Por exemplo:

1) Se $n = c^2 + 1$, onde c é um número natural não nulo, então

$$\sqrt{n} = [c; \overline{2c}] \tag{5.5}$$

De fato,

$$n = c^2 + 1, \quad c \in \mathbb{N}^*, \Rightarrow c^2 < n < c^2 + 2c + 1 =$$

$$(c+1)^2 \Rightarrow c < \sqrt{n} < c + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = c \text{ e } \sqrt{n} = c + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{n} - c} = \frac{1}{(\sqrt{n} - c)} \frac{\sqrt{n} + c}{(\sqrt{n} + c)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n} + c}{n - c^2} = \frac{\sqrt{n} + c}{c^2 + 1 - c^2} = \sqrt{n} + c =$$

$$= \sqrt{c^2 + 1} + c > \sqrt{c^2} + c = c + c = 2c \Rightarrow \boxed{x > 2c} \tag{5.6}$$

Por outro lado,

$$x = \sqrt{c^2 + 1} + c < \sqrt{c^2 + 2c + 1} + c =$$

$$= c + 1 + c = 2c + 1 \Rightarrow 2c + 1 \Rightarrow \boxed{x < 2c + 1} \tag{5.7}$$

De (5.6) e (5.7), segue que

$$2c < x < 2c + 1 \Rightarrow a_1 = 2c \text{ e } x = 2c + \frac{1}{y},$$

$$\text{com } y > 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x - 2c} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{n} - c} - 2c} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{n} + c - 2c(n - c^2)}{n - c^2}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{n} + c - 2c(c^2 + 1 - c^2)}{c^2 + 1 - c^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} - c} = x \Rightarrow a_1 = a_2$$

Logo,

$$\sqrt{n} = [c; \overline{2c}]$$

c.q.d.

Em particular,

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = [1; \overline{2}]$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} = [2; \overline{4}]$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} = [3; \overline{6}]$$

$$\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1} = [4; \overline{8}]$$

$$\sqrt{1025} = \sqrt{32^2 + 1} = [32; \overline{64}].$$

2) Se $n = c^2 - 1$, onde c é um número natural maior que 1, então

$$\sqrt{n} = [c - 1; \overline{1, 2(c - 1)}] \tag{5.8}$$

De fato,

$$n = c^2 - 1, \text{ com } c > 1 \Rightarrow c^2 - 2c + 1 < n < c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c - 1 < \sqrt{n} < c \Longrightarrow a_0 = c - 1 \text{ e } \sqrt{n} = (c - 1) + \frac{1}{x},$$

$$\text{com } x > 1 \Rightarrow \sqrt{n} - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{n} - c + 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} - (c - 1)} \frac{[\sqrt{n} + (c - 1)]}{[\sqrt{n} + (c - 1)]} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}+c-1}{n-(c^2-2c+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{n}+c-1}{2c-2} = \frac{\sqrt{c^2-1}+c-1}{2c-2} <$$

$$< \frac{c+c-1}{2c-2} < \frac{2c}{2(c-1)} = \frac{c}{c-1} \leqslant 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \Longrightarrow a_1 = 1 \text{ e } x = 1 + \frac{1}{y},$$

$$\text{com } y > 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{n}+c-1}{2c-2} - 1} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{n}-c+1}{2c-2}} = \frac{2c-2}{\sqrt{n}-c+1} >$$

$$> \frac{2c-2}{\sqrt{c^2}-c+1} = 2c-2$$

$$\Longrightarrow \boxed{y > 2c-2} \tag{5.9}$$

Por outro lado,

$$y = \frac{(2c-2)}{(\sqrt{c^2-1}-c+1)} \frac{(\sqrt{c^2-1}+c-1)}{(\sqrt{c^2-1}+c-1)} =$$

$$= \frac{(2c-2)(\sqrt{c^2-1}+c-1)}{c^2-1-(c^2-2c+1)} =$$

$$= \frac{(2c-2).(\sqrt{c^2-1}+c-1)}{(2c-2)} =$$

$$= \sqrt{c^2-1}+c-1 < \sqrt{c^2}+c-1 = 2c-1 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{y < 2c-1} \tag{5.10}$$

De (5.9) e (5.10) segue que

$$\Longrightarrow 2c-2 < y < 2c-1$$

$$\Longrightarrow a_2 = 2c-2 = 2(c-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2c-2+\frac{1}{z}, \text{ com } z > 1,$$

$$\Longrightarrow z = \frac{1}{y-2c+2} = \frac{1}{\dfrac{1}{x-1} - 2c + 2} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{n}+c-1}{2c-2} - 1} - 2c + 2} =$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{2c-2}{\sqrt{n}+c-1-2c+2}-2c+2} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}-c+1}{2\sqrt{n}(1-c)+2c(c-1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n}-c+1)}{2(c-1)(c-\sqrt{n})}\frac{(c+\sqrt{n})}{(c+\sqrt{n})} =$$

$$= \frac{c\sqrt{n}+n-c^2-c\sqrt{n}+c+\sqrt{n}}{2(c-1)[c^2-(c^2-1)]} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}+c-1}{2c-2} = x \Rightarrow z = x$$

e o processo será repetido, isto é, $a_3 = a_1, a_4 = a_2, a_5 = a_1, a_6 = a_2, \ldots$

Logo, $\sqrt{n} = \sqrt{c^2-1} = [(c-1); \overline{1, 2(c-1)}]$

c.q.d.

Em particular,

$$\sqrt{3} = \sqrt{2^2-1} = [1; \overline{1, 2}]$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{3^2-1} = [2; \overline{1, 4}]$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{4^2-1} = [3; \overline{1, 6}]$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{5^2-1} = [4; \overline{1, 8}]$$

$$\sqrt{1224} = \sqrt{35^2-1} = [34; \overline{1, 68}].$$

Para mais exemplos, e um melhor aprofundamento, recomendamos [3], [8] e [7]. Com isso, ganhamos mais uma ferramenta de fácil manipulação para aproximarmos os irracionais do tipo $a+\sqrt{b}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{b} \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, por fração de inteiros positivos. Assim, podemos encontrar uma solução alternativa para os problemas que envolvam razão entre incomensuráveis.

Uma Aplicação

Deseja-se construir um moedor de cana-de-açúcar utilizando dois tipos de rodas dentadas

na razão $1 : \sqrt{3}$. [Adaptado de [5]]

Para evitar que haja fragilidade entre as engrenagens, sabe-se que é melhor evitar que qualquer dessas rodas tenham mais de 20 dentes. Qual a quantidade de dentes que cada roda deve ter para que haja uma melhor aproximação da razão desejada?

<u>Uma solução</u>

Sejam: $\begin{cases} x \quad \text{a quantidade de dentes da engrenagem maior, e} \\ y \quad \text{a quantidade de dentes da engrenagem menor.} \end{cases}$

A razão procurada é $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, com $0 < x \leqslant 20$ e $0 < y \leqslant 20$.

Vimos em (5.8) que $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} = [1; \overline{1, 2}]$. E calculando seus primeiros convergentes,

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2 \qquad (1^{\text{a}} convergente)$$

$$\frac{p_2}{q_2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3} \qquad (2^{\text{a}} convergente)$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4} \qquad (3^{\text{a}} convergente)$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11} \qquad (4^{\text{a}} convergente)$$

$$\frac{p_5}{q_5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15} \qquad (5^{\text{a}}\mathit{convergente}),$$

não serve, pois $x = 26 > 20$.

Assim, pela *4ª convergente*, $x = 19$ e $y = 11$. O que nos dá uma aproximação $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{\frac{19}{11}} = \frac{11}{19} \approx 0,578$, o que é satisfatório para um par de engrenagens, pois proporciona uma aproximação até a ordem das centenas decimais ($\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,57735$).

Como vimos, as frações contínuas têm uma vasta atuação no campo da matemática. Neste trabalho mostramos como obter uma aproximação de um número irracional por um racional tão próximo quanto desejamos, bastando, para isso, escolher um de seus convergentes convenientemente. E isso pode ser feito, pois a representação em fração contínua de todo número irracional é infinita. Como no ensino médio, o exemplo mais comum de número irracional é uma raiz quadrada de um inteiro, temos aqui uma ótima maneira de calcular um valor aproximado para tal raiz.

Capítulo 6

Conclusão

Enfatizamos que cada um dos métodos mostrados aqui poderá ter sua eficácia aumentada ou diminuída, conforme os objetivos que pretendemos alcançar na resolução dos variados problemas. Além disso, para que haja uma melhor receptividade por parte dos educandos, é importante que o professor fique atento para decidir o momento oportuno de usar um ou outro método.

Levando em consideração o nível de escolaridade dos estudantes e por experiência própria, os métodos que obtivemos mais êxito e os que mais envolveram os alunos foram:

- 6º e 7º anos do Ensino Fundamental: O Método Chinês baseado nas Equações de Pell, por sua simplicidade nas operações;
- 8º e 9º anos do Ensino Fundamental: O Método dos Babilônios, por sua rápida convergência;
- Ensino Médio: O Método de Aproximação por Frações Contínuas, por dar-lhes uma melhor compreensão de números reais.

No entanto, observamos, na prática, que o Algoritmo Tradicional da Raiz Quadrada ainda é bastante aceito em todos os níveis escolares. Principalmente quando o radicando é formado por um número com mais de quatro algarismos decimais.

Existem outros métodos conhecidos de extração e de aproximação da raiz quadrada. Como, por exemplo, o Método Newton. Entretanto, consideramos que eles não teriam a mesma receptividade por parte do nosso público: alunos da Educação Básica.

Nesse nível de escolaridade, professores não têm uma ajuda eficaz dos livros didáticos na hora de definir, caracterizar ou trabalhar com os números irracionais junto a seus alunos.

Portanto, por sua linguagem bastante acessível e por interligar vários conceitos matemáticos elementares, acreditamos que este trabalho, além de contribuir com professores e alunos do Ensino Fundamental e Médio, possa, também, servir para impulsionar a pesquisa em Educação Matemática, pois utiliza como ferramenta de ensino uma estratégia em que se explora algumas das mais belas propriedades dos números reais em um nível que possam ser compreendidas e construídas com o aluno respeitando seu grau de maturidade matemática.

Referências Bibliográficas

[1] Bahiano, Carlos E.N. *Números Racionais e Irracionais.* Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2005.

[2] Barone Jr., M. O algoritmo da raiz quadrada, RPM 2, p. 23.

[3] Carneiro, José Paulo Q. *Um Processo Finito para Raiz Quadrada* Revista do Professor de Matemática N°34.

[4] Lima, Elon Lages. *Análise Real volume 1. Funções de uma variável.* Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[5] Machado, Nilson José. *Frações Contínuas no Ensino Médio?*, Seminários de Ensino de Matemática SEMA-FEUSP - setembro de 2009.

[6] Moreira, Carlos Gustavo. *Frações Contínuas: como aproximar bem números reais por números racionais.* IMPA. Projeto Klein

[7] Moreira, Carlos Gustavo. *Frações contínuas, representações de números e aproximações*, Revista Eureka! N°3, pp. 44-55.

[8] Santos, José Plínio de Oliveira *Introdução à teoria dos números. 3 ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2009. pp. 139-159.

[9] Rampazzo, Luciano. *A RAIZ QUADRADA SEM TABUS*, Revista de Ensino de Ciência N°14 - setembro de 1985. pp. 28-32.

[10] Silva, Vinicius Carvalho da. *Frações Contínuas e Aplicações*, UEMS, TCC - 2010.

Apêndice

Proposição 1. *sequência dos convergentes de uma expansão em frações contínuas satisfaz as seguintes propriedades (retirado de [10]):*

(i) $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1, q_0 = 1$ *e* $q_1 = a_1$;

(ii) $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$ *e* $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$, *para todo* $n \geqslant 2$;

(iii) $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, *para todo* $n \geqslant 0$.

Demonstração. O item (i) segue por definição. Para a prova de (ii) usaremos indução infinita sobre n. Seja $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente de uma expansão em frações contínuas.

Para n=2, temos

$$\frac{p_2}{q_2} = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} =$$

$$= \frac{a_2(a_0a_1 + 1) + a_0}{a_1a_2 + 1} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0}.$$

Suponha que a afirmação seja válida de $n = 2$ até $n = k$. Para $n = k + 1$ temos

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}] =$$

$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}]$$

E usando a Hipótese de Indução, temos

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} =$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} =$$

$$= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}. \qquad \text{c.q.d.}$$

Prova de (iii)

$$\text{Seja} \quad \Phi_{n+1} = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}, \qquad \text{para} \quad \text{todo} \qquad n \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Aplicando (ii) na equação (6.1) obtemos

$$\Phi_{n+1} = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - (a_{n+1}q_n + q_{n-1})p_n =$$

$$= -(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n) = -\Phi_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{n+1} = -\Phi_n, \text{ para todo } n \geqslant 0.$$

E como $\Phi_1 = p_1 q_0 - p_0 q_1$, segue que

$$\Phi_{n+1} = (-1)\Phi_n = (-1)^2\Phi_{n-1} = (-1)^3\Phi_{n-2} = \ldots = (-1)^n\Phi_1 =$$

$$= (-1)^n(p_1q_0 - p_0q_1) = (-1)^n[(a_0a_1 + 1) - a_0a_1] = (-1)^n$$

Logo

$$\Phi_{n+1} = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

$\square$

Definição 2. *Se* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *podemos escrever* $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]$, *onde* $\alpha_n = [0; a_n, a_{n+1}, \ldots]$

Corolário 1. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Onde

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}$$

Demonstração. Basta observar que as duas equações acima são equivalentes. Além disso, a demonstração da Proposição (1) independe de α_n ser inteiro ou não. $\square$

Proposição 2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, n fixo, temos*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q^2}$$

com

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1].$$

Demonstração. De fato,

$$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n} + \frac{q_{n-1}}{q_n} =$$
$$= \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n x - p_n)} =$$
$$= \frac{(-1)^n}{q_n(q_n x - p_n)}.$$

Logo,

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(q_n x - p_n)}{q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

□

Teorema 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Demonstração. Observerve que, pela proposição anterior, x pertence ao intervalo $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$ ou $\left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_n}{q_n}\right)$. Daí então,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

E como $q_{n+1} > q_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$,

Segue que

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Logo,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

□

Teorema 2 (Lagrange)**.** *x é uma irracionalidade quadrática (ou de grau 2) se, e somente se, sua representação em frações contínuas é periódica.*

Demonstração (retirado de [7])

($\Rightarrow$) Se a representação em frações contínuas de um número é periódica, então existem $i \geqslant 0$ e $k \geqslant 1$ tais que

$$a_{n+k} = a_n, \quad \forall \quad n \geqslant i.$$

Seja $\alpha_n = [0; a_n, a_{n+1}, \ldots]$. Daí então,

$$\alpha_{n+k} = [0; a_{n+k}, a_{n+k+1}, \ldots] = [0; a_n, a_{n+1}, \ldots] = \alpha_n$$

Portanto, também temos,

$$\alpha_{n+k} = \alpha_n, \quad \forall \quad n \geqslant i.$$

Segue daí e do Corolário (1) que

$$x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} = \frac{p_{n+k-1}\alpha_{n+k} + p_{n+k-2}}{q_{n+k-1}\alpha_{n+k} + q_{n+k-2}}. \tag{6.2}$$

Usando a periodicidade temos que, se $n \geqslant i$, então

$$\frac{p_{n+k-1}\alpha_{n+k} + p_{n+k-2}}{q_{n+k-1}\alpha_{n+k} + q_{n+k-2}} = \frac{p_{n+k-1}\alpha_n + p_{n+k-2}}{q_{n+k-1}\alpha_n + q_{n+k-2}} \tag{6.3}$$

Das equações (6.2) e (6.3), temos que

$$\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} = \frac{p_{n+k-1}\alpha_n + p_{n+k-2}}{q_{n+k-1}\alpha_n + q_{n+k-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0,$$

Onde

$A_n = p_{n-1}q_{n+k-1} - p_{n+k-1}q_{n-1}$

$B_n = p_{n-1}q_{n+k-2} - p_{n-2}q_{n+k-1} - (p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n+k-2}q_{n-1})$

$C_n = p_{n-2}q_{n+k-2} - p_{n+k-2}q_{n-2}$.

E portanto, α_n satisfaz uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. Para concluirmos a primeira parte da demonstração basta mostrarmos que $A_n \neq 0$. De fato, supondo por absurdo que $A_n = 0$, então

$$A_n = p_{n-1}q_{n+k-1} - p_{n+k-1}q_{n-1} = 0 \Rightarrow p_{n-1}q_{n+k-1} = p_{n+k-1}q_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n+k-1}}{q_{n+k-1}}$$

Absurdo, pois $k \geqslant 1 \Rightarrow q_{n+k-1} > q_{n-1}$ e, pela Proposição (1) (iii),
$p_{n+k}q_{n+k-1} - p_{n+k-1}q_{n+k} = (-1)^{n+k-1} \Rightarrow \dfrac{p_{n+k-1}}{q_{n+k-1}}$ é irredutível.
Portanto, $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \neq \dfrac{p_{n+k-1}}{q_{n+k-1}} \Rightarrow A_n \neq 0$
$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que x seja uma irracionalidade quadrática, isto é, x é irracional do tipo $r + \sqrt{s}$ com $r, s \in \mathbb{Q}, \quad s > 0$, então a fração contínua de x é periódica, que é o mesmo que mostrar que existem $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^*$ tais que $\alpha_{n+k} = \alpha_n$.

De fato, se x é uma irracionalidade quadrática, então existem a, b, c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. Pelo Corolário (1),

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

e portanto

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(\frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right) + c = 0$$
$$\Rightarrow A_n \alpha_n^2 + B_n \alpha_n + c = 0$$

onde

$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2$
$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}$
$C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2$.
Observe que

$$C_n = A_{n-1}$$

Provaremos que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
De fato, $A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$,
Onde x e $\overline{x}$ são as raízes de $aX^2 + bX + c = 0$.
Mas, pelo Teorema (1), temos

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$|A_n| = aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \leqslant$$
$$a\left(|\overline{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \leqslant$$
$$a\left(|\overline{x} - x| + 1\right) = M$$

Observe ainda que

$$B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac = \Delta, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

De fato,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac)$$

E pela Proposição (1) (iii),

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = (-1)^2(b^2 - 4ac) = \Delta.$$

Provamos assim que A_n, B_n e C_n são uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_nX^2+B_nX+C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n. Com isso, necessariamente temos

$$\boxed{\alpha_{n+k} = \alpha_n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*.$$

c.q.d.