



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPQ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

ANTONIO FURTADO LANDIM NETO

TÓPICOS DA GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES

FORTALEZA – CEARÁ
2015

ANTONIO FURTADO LANDIM NETO

TÓPICOS DA GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

**FORTALEZA – CEARÁ
2015**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Landim Neto, Antonio Furtado.

Tópicos da geometria fractal e aplicações [recurso eletrônico] / Antonio Furtado Landim Neto. - 2015.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 95 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro.

1. Fractais. 2. Geometria. 3. Matemática. 4. Inovação. 5. Ensino. I. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PROPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



ATA

Sessão de apresentação e defesa de Dissertação de Mestrado

Aos trinta dias do mês de Novembro de 2015, reuniu-se a Banca Examinadora de Dissertação de Mestrado composta pelos professores TIAGO CAÚLA RIBEIRO (Dr., PROFMAT/UECE), Presidente, MARCELO FERREIRA DE MELO (Dr., UFC), membro externo, e ULISSES LIMA PARENTE (Dr., PROFMAT/UECE), perante a qual ANTONIO FURTADO LANDIM NETO, aluno regularmente matriculado no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, ministrado na Universidade Estadual do Ceará – UECE, apresentou e defendeu a Dissertação de Mestrado intitulada TÓPICOS DA GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES, seguindo-se os pronunciamentos dos membros da Banca interpellando o Mestrando e apreciando e destacando pontos específicos da versão impressa e da apresentação oral da Dissertação. Em continuação, a Banca reuniu-se em separado, para avaliar o Trabalho e analisar e acordar as alterações e os aperfeiçoamentos do texto do Trabalho, concluindo pela APROVAÇÃO da Dissertação de Mestrado, com média 9,3, condicionada à apresentação das modificações diretamente indicadas ao Mestrando. Finalmente, o Presidente da Banca convocou o Mestrando e as pessoas que assistiram à Sessão e anunciou publicamente o resultado da avaliação, comunicando as alterações finais (no texto) requeridas pela Banca Examinadora, as quais deverão ser providenciadas em conformidade com as determinações formais das legislações da UECE e do PROFMAT, num prazo máximo de 30 (trinta) dias. A presente Sessão transcorreu das 09:00 às 10:15 no auditório do Centro de Ciências e Tecnologia, no Campus do Itaperi, em Fortaleza, Ceará. Eu, Tiago Caúla Ribeiro (Presidente da Banca Examinadora) assino a presente Ata, juntamente com os demais membros, e dou fé.

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (PROFMAT/UECE)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (UFC)

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente (PROFMAT/UECE)

Aos meus pais Landim e Raimunda e minha tia Maria que, mesmo com dificuldades, foram os grandes incentivadores e mecenas dos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, inteligência suprema, causa primeira de todas as coisas.

Aos meus pais, pelo incansável incentivo aos estudos e à boa educação dispensada.

À minha tia Maria, pelos esforços na formação de meu caráter.

À minha esposa Lorainne, pela sempre compreensão de minha ausência nesta fase de estudos.

À minha filha Sofia, pelos dias floridos de minha vida.

Aos meus irmãos pelo amor fraterno e indissolúvel.

A todos os mestres que cruzaram meu caminho desde a tenra idade até hoje.

Aos companheiros Maciel, Eliete e Socorro pelo sempre apoio e ajuda nas horas de dificuldade.

Aos amigos e companheiros de profissão, pelo apoio constante.

Aos meus alunos, razão maior pela minha busca incansável por mais conhecimento.

Ao saudoso Professor Cleiton Batista por todos os ensinamentos e pelo exemplo de amor e dedicação ao ensino público.

À Universidade Estadual do Ceará, responsável pela minha formação profissional desde a graduação.

À SBM pela oportunidade de capacitação.

À CAPS pelo incentivo e fomento a pesquisa e o desenvolvimento das ciências em todo Brasil.

Aos colegas do PROFMAT, pela união, força e perseverança na conclusão deste curso.

“...E também o mundo,
Com tudo aquilo que contém,
Com tudo aquilo que nele se desdobra
E afinal é a mesma coisa variada em cópias iguais.”
(Fernando Pessoa – Poesias de Álvaro de Campos)

RESUMO

Este trabalho apresenta, através de vasta pesquisa bibliográfica, uma análise histórica, matemática e pedagógica da geometria dos fractais, seus conceitos e aplicações nas mais diversas áreas das ciências. Oferece também, uma amostra das obras de famosos matemáticos como: Cantor, Peano, Hilbert, Koch, Sierpinski, Menger, Fatou e Julia, todas estas analisadas pelo matemático Benoit Mandelbrot que, ao compilar tais estudos, foi responsável por desenvolver vasta teoria que culminou na elaboração desta nova geometria denominada, por ele, como Geometria Fractal. O seu potencial em criar algoritmos que modelam estruturas aparentemente caóticas, como as produzidas pela natureza, proporcionam uma previsibilidade e uma explicação mais próximas do real de tais fenômenos e apresenta para o leitor uma visão fractal do mundo. Este trabalho oferece, ainda, a apresentação de aplicações de conceitos dos fractais em áreas como: análise de imagens geradas por satélite, arquitetura, biologia, economia, geologia, medicina e tecnologia. É posta, ainda, uma análise do que a geometria fractal representa para o desenvolvimento humano nas suas diversas interações com o mundo. O uso dos conceitos desenvolvidos por essa nova geometria é apresentado, no decorrer dos capítulos, como ferramenta para auxiliar na construção do aprendizado de tópicos da matemática como: geometria plana e espacial, progressão geométrica, área de figuras planas, volume de sólidos, logaritmo, noções de limite e outros conceitos atrelados a estes tópicos, sempre reforçando a ideia de se experimentar novos caminhos mais dinâmicos e criativos para se construir os conhecimentos matemáticos e observar seus resultados e aplicações.

Palavras-chave: Fractais. Geometria. Matemática. Inovação. Ensino.

ABSTRACT

This paper presents a historical analysis, through an extensive literature search about mathematics and the teaching of geometry of fractals, concepts and applications in several areas of science. It also offers a sample of the famous mathematicians works as Cantor, Peano, Hilbert, Koch, Sierpinski, Menger, Fatou and Julia. It was analyzed by the mathematician Benoit Mandelbrot that compiled such studies and he was responsible for developing the broad theory that culminated in the preparation of this new geometry named for him as “Fractal Geometry”. Its potential to create algorithms that model apparently chaotic structures, such as those produced by nature, It provided predictability and closer to the real explanation of such phenomena and It presents to the reader a fractal view of the world. This work also offers the presentation of applications of the fractals’ concepts in areas such as the satellite imagery analysis, architecture, biology, economics, geology, medicine and technology. It is also an analysis of the fractal geometry for human development in its various interactions with the world. The use of the concepts developed by this new geometry is presented in the chapters as a tool to assist in the construction of mathematical topics of learning as flat and spatial geometry, geometric progression, area of planning figures, solid volumes, logarithm, notions of limit and other concepts linked to these topics. It is reinforcing the idea of trying out the new more dynamic and the creative ways of building mathematical knowledge and observing their results and applications.

Keywords: Fractals. Geometry. Mathematics. Innovation. Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Queda da água, 1961.....	18
Figura 2 - Mãos desenhando-se, 1948.....	18
Figura 3 - Limite Circular III, 1959.....	18
Figura 4 - Cada vez menor, 1956.....	18
Figura 5 - Correspondência entre número complexo e um ponto no plano.....	22
Figura 6 - Representação geométrica de um número complexo no plano.....	23
Figura 7 - Conjunto de Cantor até a iteração 5.....	30
Figura 8 - Curva de Peano até a iteração 5.....	33
Figura 9 - Passos para a construção do Nível 01 da Curva de Hilbert.....	35
Figura 10 - Passos para a construção do Nível 02 da Curva de Hilbert.....	36
Figura 11 - Passos para a construção do Nível 03 da Curva de Hilbert.....	36
Figura 12 - Níveis 4, 5, 6, e K da Curva de Hilbert.....	36
Figura 13 - Nível 01 da Curva de Koch.....	38
Figura 14 - Níveis 0, 1, 2, 3 e 4 da Curva de Koch.....	38
Figura 15 - Nível 01 da Ilha de Koch.....	40
Figura 16 - Níveis 0, 1, 2 e 3 da Ilha de Koch.....	41
Figura 17 - Nível 01 do Triângulo de Sierpinski.....	44
Figura 18 - Níveis 0, 1, 2, 3 e 4 do Triângulo de Sierpinski.....	44
Figura 19 - Etapas da construção do Tapete de Sierpinski até o Nível 3.....	46
Figura 20 - Etapas da construção da Pirâmide de Sierpinski até o Nível 4.....	47
Figura 21 - Formato do volume omitido de cada cubo restante após cada iteração da Esponja de Menger.....	49
Figura 22 - Etapas da construção da Esponja de Menger até o Nível 3.....	49
Figura 23 - Triângulo de Sierpinski e em detalhe uma parte de sua auto-semelhança.....	51
Figura 24 - Tapete de Sierpinski e em detalhe uma parte de sua auto-semelhança.....	52
Figura 25 - Brócolis e em detalhe uma parte de sua auto-semelhança aproximada.....	52
Figura 26 - Folha e em detalhe uma parte de sua auto-semelhança aproximada.....	53
Figura 27 - Floco de Koch na sua 5ª iteração.....	53
Figura 28 - Segmento de reta.....	58
Figura 29 - Quadrado.....	58
Figura 30 - Cubo.....	58
Figura 31 - Conjunto de Cantor.....	60

Figura 32 - Curva de Koch.....	61
Figura 33 - Floco de Koch.....	61
Figura 34 - Triângulo de Sierpinski.....	61
Figura 35 - Tapete de Sierpinski.....	62
Figura 36 - Pirâmide de Sierpinski.....	62
Figura 37 - Esponja de Menger.....	63
Figura 38 - Curva de Peano.....	64
Figura 39 - Curva de Hilbert.....	64
Figura 40 - Cálculo da Dimensão Fractal utilizando o método <i>Box counting</i>	66
Figura 41 - Conjunto de Julia para $c = 0$	69
Figura 42 - Conjunto de Julia ao variar o parâmetro c	70
Figura 43 - Conjunto de Julia com pequenas variações do parâmetro c	70
Figura 44 - Conjunto de Mandelbrot.....	71
Figura 45 - Conjunto de Mandelbrot e, em destaque, oito conjuntos de Julia.....	72
Figura 46 - Conjunto de Mandelbrot e, em destaque, cinco conjuntos de Julia.....	72
Figura 47 - Conjunto de Mandelbrot gerado pela recorrência $Z_{n+1} = Z_n^K + c$	73
Figura 48 - Ampliações do Conjunto de Mandelbrot.....	73
Figura 49 - Bacia do Rio Amazonas.....	75
Figura 50 - Igreja de São Francisco, Salvador-BA.....	76
Figura 51 - Igreja barroca em Sicília cidade de Noto.....	76
Figura 52 - Wexner Center for the Arts, Ohio, EUA.....	77
Figura 53 - Memorial do Holocausto, Berlim, Alemanha.....	77
Figura 54 - Árvore natural e árvore construída por processo recursivo.....	78
Figura 55 - Etapas de construção da Samambaia de Barnsley.....	79
Figura 56 - Vasos sanguíneos de um pulmão humano.....	80
Figura 57 - Detecção de núcleos atípicos.....	82
Figura 58 - Paisagem criada a partir de conceitos fractais.....	83
Figura 59 - Antena Fractal.....	84
Figura 60 - Memória para celular.....	85
Figura 61 - Triângulo de Sierpinski criado a partir de material reciclado.....	88
Figura 62 - Mapa da Ilha de Fernando de Noronha em diversas malhas quadriculadas.....	89
Figura 63 - Curva de Koch em diversas malhas quadriculadas.....	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores das n iterações do Conjunto de Cantor.....	31
Tabela 2 - Valores das n iterações da Curva de Peano.....	34
Tabela 3 - Valores das n iterações da Curva de Hilbert.....	37
Tabela 4 - Valores das n iterações da Curva de Koch.....	39
Tabela 5 - Valores das n iterações do floco de Koch.....	41
Tabela 6 - Valores das n iterações do Triângulo de Sierpinski.....	45
Tabela 7 - Volumes das n iterações da Pirâmide de Sierpinski.....	47
Tabela 8 - Valores das n iterações da Esponja de Menger.....	50
Tabela 9 - Evolução da dimensão fractal com aplicação do método <i>Box counting</i>	67
Tabela 10 - Explorando o Triângulo de Sierpinski.....	88
Tabela 11 - Explorando a Dimensão fractal.....	90

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 BASES TEÓRICAS.....	17
2.1 O INFINITO	17
2.2 CARDINALIDADE.....	19
2.2.1 Conjuntos finitos e infinitos.....	19
2.2.2 Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis	19
2.3 NÚMEROS COMPLEXOS.....	20
2.3.1 Forma algébrica.....	21
2.3.2 Forma trigonométrica.....	22
2.3.3 Algumas propriedades e operações.....	23
2.4 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.).....	23
2.4.1 Soma dos termos de uma P.G. finita.....	24
2.4.2 Soma dos N termos de uma P.G. infinita	25
2.5 LOGARITMO.....	26
2.5.1 Propriedades operatórias.....	26
2.6 BENOIT MANDELBROT – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS.....	26
3 DEFINIÇÕES DE FRACTAL	28
4 FRACTAIS CLÁSSICOS	29
4.1 O CONJUNTO DE CANTOR.....	29
4.2 A CURVA DE PEANO	33
4.3 A CURVA DE HILBERT.....	35
4.4 A CURVA DE KOCH	37
4.4.1 A ilha ou floco de Koch	40
4.5 O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI.....	43
4.5.1 O tapete de Sierpinski	45
4.5.2 A pirâmide de Sierpinski	46
4.6 A ESPONJA DE MENGER	48
5 CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS.....	51
5.1 AUTO-SEMELHANÇA, ESCALA, E COMPLEXIDADE	51
5.2 DIMENSÃO.....	54
5.2.1 Dimensão Euclidiana.....	55
5.2.2 Dimensão Topológica	56
5.2.3 Dimensão Fractal.....	57

5.2.4	Dimensão Fractal pelo método <i>box counting</i>	64
6	FRACTAIS EM SISTEMAS DINÂMICOS	67
6.1	CONJUNTO DE FATOU E JÚLIA	68
6.2	CONJUNTO DE MANDELBROT	70
7	ALGUMAS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL	74
7.1	ANÁLISE DE IMAGENS GERADAS POR SATÉLITE.....	74
7.2	ARQUITETURA	75
7.3	BIOLOGIA	78
7.4	ECONOMIA	80
7.5	GEOLOGIA	81
7.6	MEDICINA.....	82
7.7	TECNOLOGIA.....	83
8	USANDO OS FRACTAIS EM SALA DE AULA	85
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
	REFERÊNCIAS	94

1 INTRODUÇÃO

Durante o final o século XIX e início do século XX, alguns matemáticos desenvolveram trabalhos que contrariavam as noções comuns de infinito e que, para a época, não havia aplicação imediata. Esses trabalhos traziam objetos que foram rotulados de “monstros matemáticos” dado o seu caráter, para a época, não intuitivo. Contemporâneo a isso, alguns estudos apontavam para a necessidade de outros padrões geométricos que não fossem os euclidianos. Trabalhar com formas geradas pela natureza foi uma das motivações que fizeram grandes matemáticos pensarem que havia ordem no caos e que esta ordem poderia ser descrita por funções e ideias matemáticas bem definidas.

Compilada e difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1924-2010), a geometria fractal ou geometria da natureza tem sido objeto de vários estudos cujas aplicações se dão em vários campos como: ciências, artes, educação, tecnologia, medicina, engenharia e arquitetura. O interesse científico se volta a ela pois, os fractais, exercem um verdadeiro fascínio quanto à versatilidade na aplicação de sua teoria e quanto à beleza de suas formas.

Basicamente a geometria dos fractais é um ramo da matemática que faz estudo de objetos gerados a partir de padrões de repetições com processos recorrentes ou iterativos. Esses padrões se repetem em qualquer escala de observação do objeto, ou seja: cada parte é uma representação semelhante do objeto original. Alguns artistas como M.C. Escher, Dan Carlo Ferrari, Kerry Mitchell e outros, já se aproveitam destes conceitos para criar suas obras, provando que a geometria dos fractais não está presa apenas a números e definições matemáticas e que existe muito mais a ser descoberto deste novo ramo.

Após rica pesquisa bibliográfica, constatou-se o quanto o desenvolvimento deste ramo matemático é promissor para a ciência moderna e para o ensino da matemática em salas de aula no ensino básico. Neste sentido, a geometria dos fractais surge como ferramenta promissora à introdução de conceitos matemáticos relativos à proporção, área, volume, perímetro, teoria dos números, trigonometria, álgebra linear e geometria euclidiana, dado seu caráter inovador capaz de despertar a curiosidade e o espírito investigativo no aluno.

O presente trabalho encontra-se dividido em oito capítulos nos quais serão abordados um recorte dos fractais, suas características, propriedades e aplicações.

No capítulo 1 daremos uma breve introdução ao que se propõe este trabalho e as partes que o constituem.

O capítulo 2 apresenta uma base conceitual de temas como: o infinito, conjuntos, cardinalidade, números complexos, progressão geométrica e logaritmo; além de breves considerações sobre Benoit Mandelbrot, conhecido como pai da geometria fractal. A importância desse capítulo limita-se a difusão de conceitos básicos a serem trabalhados nos capítulos subsequentes, não tendo por objetivo o aprofundamento de tais temas, a isso sugere-se, conforme interesse do leitor, um estudo mais aprofundado.

No decorrer do capítulo 3, definimos formalmente o que é fractal, apresentando alguns conceitos desenvolvidos por três matemáticos que darão uma maior robustez teórica a este trabalho.

O capítulo 4 tratará dos fractais clássicos, frutos do trabalho de grandes matemáticos, como: o conjunto de Cantor, a curva de Peano, a curva de Hilbert, a curva e a ilha de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski. E para fractais cujo objeto inicial se encontra na terceira dimensão apresentaremos a pirâmide de Sierpinski e a esponja de Menger, considerados verdadeiras obras de arte dado seu caráter visual. Alguns desses, caracterizados como “entes patológicos” dentro da matemática por trazerem em seu corpo conceitos belíssimos acerca do infinito e de estruturas que à primeira vista parecem não existir.

Apresentaremos no capítulo 5, características básicas que identificam um fractal, cuja abordagem volta-se aos conceitos de auto-semelhança, escala e complexidade; dispensando uma atenção especial ao cálculo das dimensões euclidiana, topológica e fractal, sendo este último uma revolução no que se refere à aceitação de dimensões não inteiras.

O capítulo 6 retoma as ideias de Mandelbrot e apresenta, dentro de um sistema dinâmico, os conjuntos de Fatou e Julia que inspiraram um dos mais belos fractais já gerados. Dando ênfase ao fato de que esses conjuntos, criados pelos matemáticos Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) e Gaston Maurice Julia (1893-1978), apenas puderam ter suas formas observadas, tempos depois, com o advento da computação gráfica.

No capítulo 7, trazemos para este trabalho, algumas aplicações da geometria dos fractais em diversas áreas como: análise de imagens geradas por satélite, arquitetura, biologia, economia, geologia, medicina, tecnologia e outras que consideramos essenciais para a compreensão da importância do desenvolvimento deste ramo da matemática.

Para o capítulo 8, foi reservada a aplicação dos conceitos desenvolvidos em partes da geometria fractal e voltando-os a sua utilização em sala de aula, através de exemplos práticos e sugestões de atividades que desenvolvam no aluno um olhar diferenciado para a matemática. Tornar esta disciplina atraente, sem perder seu rigor e sua beleza original, é o

desafio para todo professor que se lance a lecioná-la e, neste sentido, esse estudo aponta uma ferramenta a mais no leque de opções e metodologias didático-pedagógicas essenciais a uma boa aprendizagem.

Ao final, encontram-se algumas considerações acerca das atividades desenvolvidas, das dificuldades enfrentadas, das aprendizagens e das expectativas vivenciadas durante a elaboração deste trabalho.

2 BASES TEÓRICAS

As ideias aqui apresentadas alicerçam-se em alguns conceitos, teoremas e definições visando um melhor entendimento acerca do assunto. As concepções teóricas serão abordadas em tópicos que fundamentam a essência e o significado de cada tema trabalhado, enfatizando o que é essencial e necessário para o entendimento deste recorte do mundo dos fractais.

2.1 O INFINITO

Desde a civilização babilônica e egípcia, com o advento de um sistema numérico posicional que permitiu a existência de sequências de números ilimitados; passando pela Grécia antiga, com o pensamento aristotélico que se contrapôs à ideia da existência real do infinito, afirmando ser isso algo além da razão, que o infinito é motivo de discussão, investigação, observação e conjectura humana através dos tempos.

A arte, por sua vez, também se apropriou de alguns conceitos matemáticos na busca de retratar subjetivamente o infinito. A exemplo disso, tem-se a obra creditada ao artista M.C. Escher que, dentre outros trabalhos, conseguiu reproduzir esta ideia através de gravuras em escalas cada vez menores de uma mesma figura, seguindo uma lei de formação análoga a uma progressão geométrica.

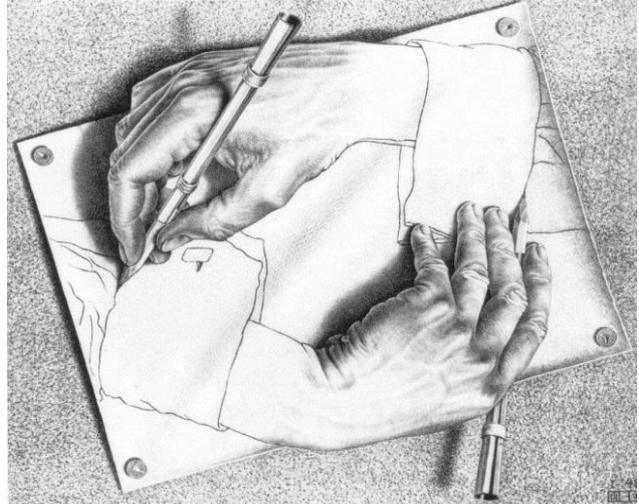
M.C. Escher tentou retratar o infinito em suas obras usando três tipos de interações. Segundo Freitas (2008), o artista se utiliza, em suas obras, de ciclos sem fim, preenchimento de superfícies e limites. As obras que retratam ciclo sem fim, nos dão a impressão de movimentos cíclicos que desrespeitam a força gravitacional e causam a ilusão de um movimento infinito como, por exemplo, o da Figura 1; esta, quando bem observada, transmite a ideia de um ciclo de água que nunca cessa. Por preenchimento de superfícies encontramos a Figura 2, que retrata a confluência entre duas e três dimensões que se desenham na obra, causando a impressão de um auto desenho mútuo de duas mãos. E por limite temos a Figura 3, onde o artista tenta se utilizar o máximo da fronteira física imposta pelas dimensões da obra, diminuindo cada vez mais as figuras, dando a impressão que a margem real do papel nunca será alcançada. Já na Figura 4, o artista inverte o sentido e passa a buscar não mais a margem e sim o centro da obra com a diminuição escalonada das figuras iniciais.

Figura 1 – Queda da água, 1961



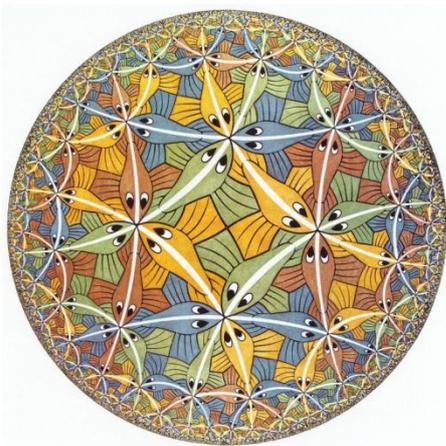
Fonte: www.google.com.br

Figura 2 – Mãos desenhando-se, 1948



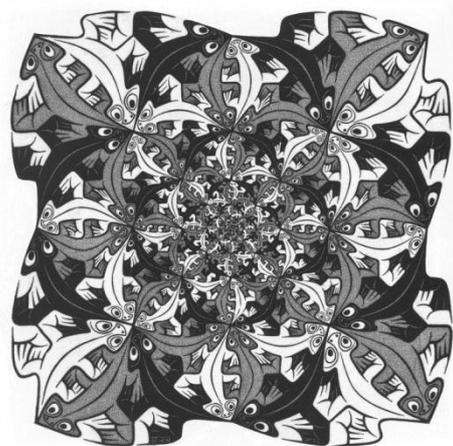
Fonte: www.google.com.br

Figura 3 – Limite Circular III, 1959



Fonte: www.google.com.br

Figura 4 – Cada vez menor, 1956



Fonte: www.google.com.br

Esta forma intuitiva da noção de infinito é imprescindível para o entendimento subsequente de outros importantes conceitos matemáticos que, embora não sejam peças de estudo neste trabalho, servirão como ponto de partida numa compreensão mais ampla acerca do que se define como conceito de limite matemático.

2.2 CARDINALIDADE

Durante o final do século XIX, o matemático Georg Cantor (1845-1918) aprofundou pesquisas no ramo matemático teórico, desenvolvendo muito dos conceitos que hoje conhecemos como Teoria dos Conjuntos. Segundo Lima (2006), “[...] a maior contribuição de Cantor não foi a adoção da linguagem e da notação dos conjuntos e sim suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos infinitos.”

Outra contribuição significativa do trabalho de Cantor será destacada nos próximos capítulos intitulada como Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor, catalogada na ocasião como uma patologia matemática por não conter aplicações práticas e por apresentar desalinhos com conceitos matemáticos aceitos na época.

2.2.1 Conjuntos finitos e infinitos

Seja I_n o conjunto dos n primeiros números naturais. Um conjunto \mathbf{X} é finito se é vazio ou se existe um número natural n tal que exista uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow \mathbf{X}$. Caso o conjunto \mathbf{X} seja vazio, dizemos que ele tem zero elementos; caso \mathbf{X} seja não-vazio, observamos a bijeção φ e dizemos que n é o número de elementos de \mathbf{X} . Intuitivamente, a função φ é uma contagem dos elementos de \mathbf{X} .

Um conjunto \mathbf{X} é considerado infinito quando ele não é vazio e para qualquer n pertencente aos números naturais, não existe uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow \mathbf{X}$, ou seja, um conjunto \mathbf{X} é infinito quando não é finito, segundo a definição.

2.2.2 Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

Em duas situações podemos caracterizar um conjunto \mathbf{X} como enumerável: se \mathbf{X} for finito ou se existe uma bijeção $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{X}$, onde \mathbf{N} é o conjunto dos números naturais. Neste último caso, percebe-se que \mathbf{X} é um conjunto infinito. Pondo $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, ..., $x_n = f(n)$, ..., temos $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ e a bijeção $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{X}$ é chamada de enumeração dos elementos de \mathbf{X} .

Cantor, demonstrou que o conjunto dos números reais (\mathbf{R}) tem cardinalidade maior que a cardinalidade de (\mathbf{N}); ou seja: não existe $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ bijetiva. Com isso ele afirmou que o conjunto dos números reais (\mathbf{R}) não é enumerável.

Partindo desse entendimento, vamos mostrar que o intervalo $[0,1]$ contido nos números reais (\mathbf{R}) já não é enumerável. Tal prova é intitulada de Diagonal de Cantor.

Sabe-se que qualquer número do intervalo $[0,1]$ pode ser representado por: $0,d_1d_2d_3\dots$ onde cada dígito d_n é um número inteiro no intervalo $[0,9]$. É sabido também que todo número real no intervalo $[0,1]$ pode ter representação com infinitos dígitos, por exemplo: $0,27 = 0,2699999\dots$ e $1 = 0,999\dots$

Vamos supor a correspondência biunívoca $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ onde \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais. Com isso podemos construir a lista abaixo que, por hipótese, deve conter todos os números reais no intervalo $[0,1]$:

$$\varphi(1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$\varphi(2) = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

$$\varphi(3) = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

...

$$\varphi(n) = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$

...

A partir desta lista, podemos construir o número $d = 0,d_1d_2d_3\dots$ onde:

$$d_1 = a_{11} + 1$$

$$d_2 = a_{22} + 1$$

$$d_3 = a_{33} + 1$$

...

Caso $a_{ii} = 9$, faremos $d_i = 1$.

Gerou-se então um número real d que não é $\varphi(1)$, por entender que o primeiro dígito de $\varphi(1)$ é a_{11} e o primeiro dígito de d é $a_{11} + 1$. Não é $\varphi(2)$, já que o segundo dígito de $\varphi(2)$ é a_{22} e o segundo dígito de d é $a_{22} + 1$ e assim por diante. Conclui-se, pois, que o número real d não está na lista proposta. O que prova que não existe a correspondência biunívoca $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ e que justifica o fato de o intervalo $[0,1]$ nos reais não ser enumerável.

A partir deste argumento, Cantor prova a existência de infinitos de diferentes tamanhos.

2.3 NÚMEROS COMPLEXOS

Em 1545, o italiano Gerônimo Cardano apresentou um método para resolver equações do terceiro grau intitulado de “Fórmula de Cardano”. Seu discípulo, Rafael

Bombelli, aplicando tal fórmula em algumas equações encontrou, como resultados, raízes quadradas de números negativos. Mesmo não se sentindo à vontade em relação a estes resultados, continuou a operar tais raízes aplicando-lhes as regras usuais da álgebra. Somente após Bombelli ter trabalhado com a ideia da existência de $\sqrt{-1}$, foi que os matemáticos da época, mesmo desconfortáveis, passaram a aceitar e a usar o resultado $\sqrt{-1}$, hoje chamado de unidade imaginária representada por i .

Segundo Lima (2006), “Apenas no século XIX, quando Gauss (1787-1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece.” Fato que resultou na criação de um novo conjunto de números, o conjunto dos números complexos. Esses números apresentam duas representações: a representação algébrica e a trigonométrica.

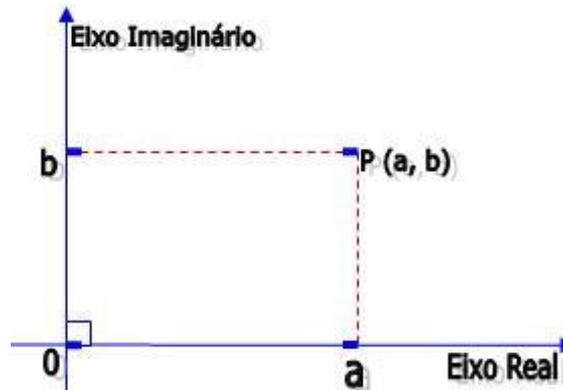
Muitas outras considerações caberiam aqui para exemplificar o assunto ora tratado, todavia por não ser o objetivo primeiro deste capítulo o aprofundamento teórico de alguns temas, como dito anteriormente, o pensamento aqui exposto limitou-se apenas a abordagem de tópicos relevantes para o entendimento deste trabalho.

2.3.1 Forma algébrica

Na representação algébrica, o número complexo se apresenta sob a forma de: $z = a + bi$, onde a é parte real de z : $a = \text{Re}(z)$ e b é o coeficiente da parte imaginária de z : $b = \text{Im}(z)$ com a e b pertencentes aos números reais e $i = \sqrt{-1}$. Quando $a=0$ e $b \neq 0$, diz-se que z é um número imaginário puro; quando $b=0$, o número z restringe-se apenas à parte real; assim, os números reais se tornam um subconjunto dos números complexos, pois todo número real pode ser escrito na forma $z = a + bi$ com $b=0$.

Os números complexos podem ser representados num sistema de coordenadas no plano (Figura 5), isto é: $z = a + bi$ é associado a um, e apenas um, ponto $P(a,b)$ do plano, que é chamado de imagem do complexo z e, reciprocamente, a cada ponto $P'(a',b')$ é associado a um, e apenas um, complexo $z = a' + b'i$. Assim temos uma correspondência biunívoca entre os complexos e os pontos de um plano.

Figura 5 - Correspondência entre número complexo e um ponto no plano



Fonte: Próprio autor

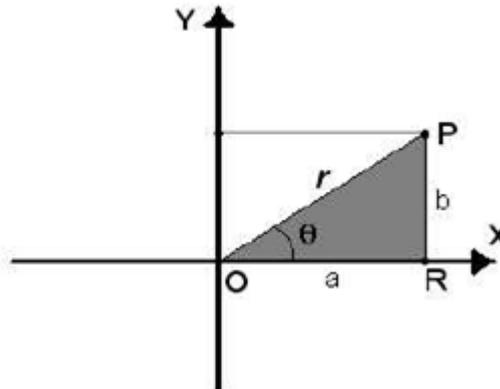
Por definição, dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais forem iguais e os coeficientes de suas partes imaginárias também. Por sua vez, $z = 0$ se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

2.3.2 Forma trigonométrica

Fixado um sistema de coordenadas no plano, o presente estudo volta-se então a representação do número complexo $z = a + bi$, pelo vetor $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ (Figura 6). Considerando o triângulo retângulo OPR da Figura 6, temos que $\overline{OR} = a = r \cdot \cos\theta$ e que $\overline{RP} = b = r \cdot \sin\theta$. Usando o teorema de Pitágoras, dizemos que $\overline{OP} = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por definição, temos que o módulo do número complexo z é o módulo do vetor \overrightarrow{OP} , ou seja, é a distância de $P(a, b)$ à origem. Assim temos: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e por consequência $z = r \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta i = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$, onde o ângulo θ é o ângulo formado pelo vetor \overrightarrow{OP} com o semieixo positivo dos x e é chamado de argumento de z ou seja $\theta = \arg(z)$.

Isso permite que escrevamos o número complexo $z = a + bi$ agora de forma trigonométrica ou polar, ou seja, podemos dizer que $z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$.

Figura 6 - Representação geométrica de um número complexo no plano



Fonte: www.google.com.br

2.3.3 Algumas propriedades e operações

Um número complexo $z = a + bi$, quando rotacionado 180° em torno da origem, gera o que chamamos de simétrico do número complexo z , ou seja $-z = -a - bi$. Caso haja uma reflexão de z em relação ao eixo das abscissas, ou seja: $\bar{z} = a - bi$, chamamos o novo número gerado a partir desta reflexão de conjugado de z .

Para as operações envolvendo números complexos, daremos alguns exemplos e aplicações. Tais propriedades apresentadas a seguir ajudarão à compreensão de tópicos da geometria fractal que serão desenvolvidos, mais adiante, neste trabalho.

$$\text{Soma: } (a+bi) + (c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

$$\text{Produto: } (a+bi).(c+di) = a(c+di)+bi(c+di) = ac+adi+cbi+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\text{Potenciação: } (a+bi)^n = \overbrace{(a+bi).(a+bi).(a+bi)...(a+bi)}^n, \text{ para } n \text{ inteiro e positivo.}$$

$$\text{Potenciação: } (a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n}, \text{ para } n \text{ inteiro e negativo.}$$

$$\text{Fórmula de Moivre (Radiciação): } \sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} . \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i . \text{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

onde k é um inteiro qualquer.

2.4 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

De acordo com Iezzi (1977) “ Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in N, n \geq 2 \end{cases}$$

Onde a e q são números reais dados.”

Assim, uma P.G. é a sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do anterior por uma constante q que chamaremos de razão da P.G.

Utilizando a definição de P.G. e admitindo $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$ temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

...

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Multiplicando essas igualdades temos: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2.4.1 Soma dos termos de uma P.G. finita

Dada uma P.G., vamos definir a soma dos n primeiros termos (S_n) ou seja:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros de (1) por q , obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2) obtemos:

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$S_n \cdot (q-1) = a_1q^n - a_1$$

$$\text{Logo, } S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}, \text{ para } q \neq 1.$$

Caso $q=1$, temos uma P.G. onde todos os termos são iguais, portanto: $S_n = n \cdot a_1$

2.4.2 Soma dos N termos de uma P.G. infinita

Seja uma sequência dada pelo termo geral $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ para n natural. Vamos listar os valores para n .

$$a_1 = \left(\frac{1}{5}\right) = 0,2$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{25}\right) = 0,04$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{125}\right) = 0,008$$

...

$$a_{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 0,0000001024$$

...

Trata-se de uma P.G. cuja razão é $q = \left(\frac{1}{5}\right)$. Percebemos que, à medida que o valor de n aumenta, o valor de a_n se aproxima de zero. Dizemos, então, que o limite de a_n , quando n tende ao infinito, vale zero e é representado por: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

De acordo com (LIMA, 2003) de maneira geral, podemos mostrar que, se q pertence aos reais e $-1 < q < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Vamos calcular a soma de todos os termos de uma P.G. infinita, cuja razão q é tal que $-1 < q < 1$. Para tal, iremos analisar o que ocorre quando somamos seus n primeiros termos, com n tendendo ao infinito, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \right)$$

Levando em conta que: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \left(\frac{a_1 \cdot (-1)}{q - 1} \right) = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Gostaríamos de ressaltar aqui o limite das sequências monótonas crescentes de potências cuja base seja maior que 1 e o limite das sequências monótonas decrescentes de

potências cuja base encontra-se no intervalo $] -1, 1[$ quando o valor do expoente destas potências tende ao infinito. Segundo (LIMA, 2003):

$$\text{Para } -1 < q < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ e para } q > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty.$$

2.5 LOGARITMO

Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$, diz-se logaritmo de b na base a o valor x tal que $a^x = b$, ou seja:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

De acordo com Iezzi (2010), com $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, garantimos a existência e a unicidade de $\log_a b$.

2.5.1 Propriedades operatórias

Com $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, temos:

- 1) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;
- 2) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
- 3) $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$, com r pertencentes aos reais;
- 4) $\log_a c = \left(\frac{\log_b c}{\log_b a}\right)$, para $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$ e $c > 0$.

2.6 BENOIT MANDELBROT – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Em 1958, os engenheiros do Centro de Pesquisa Tomas Watson (IBM) enfrentavam um sério problema que ameaçava a qualidade dos sinais nas linhas telefônicas utilizadas nas redes de computadores para transmissão de informações. O ruído, segundo os engenheiros, não havia como ser eliminado dado o seu teor aleatório e irregular.

Benoit Mandelbrot, um cientista aeroespacial contratado para trabalhar com problemas de ordem econômica da IBM, após estudar tais ruídos, resolveu o problema

empregando as teorias apresentadas no trabalho intitulado Poeira de Cantor do famoso matemático Georg Cantor que mais tarde serviria como base para uma de suas primeiras publicações intitulada *The Fractal Geometry of Nature* (1977).

Mandelbrot nasceu em Varsóvia (1924). Durante boa parte de sua infância e adolescência, em virtude da perseguição Nazista e por pertencer a uma família judia, foi obrigado a se refugiar na França. Foi nesta condição e influenciado pelo tio, o matemático Szolem Mandelbrot, que ele demonstrou seu apreço pelos números. Estudou na Escola Politécnica de Paris, em 1952 tornou-se Doutor pela Universidade de Paris; foi professor em Harvard e na Faculdade Einstein de Medicina.

Apresentados pelo tio, os conjuntos de Fatou e Julia, de início, não despertaram o interesse de Mandelbrot, todavia a impressão foi desfeita quando os referidos trabalhos deram-lhe suporte ao desenvolvimento de uma nova geometria, que trouxe à tona trabalhos renomados de matemáticos famosos como: Helge von Kock, Walclaw Sierpinski, George Cantor, David Hilbert, Giuseppe Peano, Félix Hausdorff, Abram Samoilovitch, Karl Menger, Pierre Fatou e Gaston Julia. Durante muito tempo, alguns desses matemáticos tiveram seus trabalhos denominados de “peças patológicas” ou “monstros matemáticos” frente ao caráter incompreensível à época conforme o contexto matemático vigente.

Utilizando-se desses casos, Mandelbrot ressignificou uma parte das ideias de modelagem geométrica das formas, quebrando parâmetros clássicos que buscavam moldar a natureza com formas pré-estabelecidas, e introduziu novos conceitos que foram absorvidos por diversas áreas do conhecimento como a medicina, computação, economia, botânica, estatística, arquitetura e antropologia.

A oportunidade de trabalhar na IBM permitiu-lhe, com o auxílio da computação e da utilização de programas geradores de gráficos, a primeira visualização, em 1970, dos trabalhos de Fatou e Júlia. Mandelbrot, tomado por estas motivações e inquietações, formata uma nova geometria denominada por ele mesmo de Geometria Fractal.

Segundo Moreira (2003), a origem do termo *fractal*, criado por Mandelbrot, tem sua base no radical *fractus*, derivado do verbo latino *frangere*, que significa quebrar, produzir pedaços irregulares; o verbo fragmentar, em português, também se utiliza desta mesma origem.

Para Mandelbrot, as formas apresentadas pela natureza não podiam, simplesmente, ser representadas pelas figuras geométricas pré-estabelecidas na geometria tradicional e, para tanto, havia a necessidade de novos parâmetros, estatísticos ou não, que possibilitassem a representação dessas formas que agora, mais do que nunca, lhes saltavam

aos olhos e à mente, trazendo consigo elementos novos que iremos detalhar nos próximos capítulos.

3 DEFINIÇÕES DE FRACTAL

Matemáticos conceituados, do final do século XIX e início do século XX, começaram a investigar algumas formas, construções e objetos e perceberam que suas características e propriedades não podiam ser completamente explicadas pela geometria euclidiana. Mais tarde, Mandelbrot sintetizou estas composições, denominando-as de fractais. Apesar dos esforços de grandes matemáticos contemporâneos terem contribuído para esta nova geometria, ainda não se chegou a uma definição única ou exata para denominar os fractais. Segundo Barbosa (2005) “O conceito de fractal ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal (...)”.

Alguns matemáticos desenvolveram estudos e sintetizaram definições acerca dos fractais, como citado antes, estas definições não são exatas, porém se completam no que se refere ao objetivo deste trabalho. Vejamos algumas:

Para Jens Feder: “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”.

Para Mandelbrot: “Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff excede estritamente a dimensão topológica”.

Para o matemático Kenneth John Falconer: “um conjunto F é um fractal se:

- I. F possui alguma forma de auto-similaridade, ainda que aproximada ou estatística;
- II. A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;
- III. O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.”

Durante as observações e estudos que compõem este trabalho, apresentamos exemplos de fractais que tem em sua estrutura, imagens reduzidas si mesmas, ou seja, suas partes lhes são semelhantes; que estas formas podem ser obtidas através de processos recursivos que geram, a cada nova iteração, uma melhor aproximação do fractal visto; que cada construção somente poderá ser alcançada no limite deste processo, ou seja, quando o número de etapas geradoras deste fractal tender ao infinito.

4 FRACTAIS CLÁSSICOS

A matemática, ciência historicamente construída, ao longo do seu desenvolvimento sempre foi o foco da atenção de grandes pensadores que no decorrer de suas vidas deram contribuições fundamentais para novas descobertas com a quebra e a criação de novos paradigmas. Por vezes, tais contribuições não eram bem vistas dentro da sociedade científica por destoarem de conceitos consolidados e por apresentarem, em suas conclusões, objetos matemáticos ditos “patológicos” para a época. Alguns desses estudos, assinados por grandes matemáticos, formaram a base ou foram exemplos para a estruturação da geometria dos fractais.

Este capítulo apresentará algumas estruturas geradas no final do século XIX e início do século XX que foram consagradas, por Mandelbrot e outros matemáticos, como clássicas. Para um melhor entendimento, traçaremos um breve histórico, relatando o autor e obra de acordo com o ano de publicação de seus trabalhos.

- 1883 – o matemático russo George Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845-1918) desenvolve seu “monstro matemático” intitulado de “Conjunto ou poeira de Cantor”.
- 1890 – o italiano Giuseppe Peano(1858-1932) cria, proposta para cobrir a superfície plana de um quadrado, a curva intitulada de “Curva de Peano.”
- 1891 – o alemão David Hilbert (1862-1943) publica a “Curva de Hilbert” cujo objetivo também era o de percorrer a superfície plana de um quadrado. Este trabalho é hoje utilizado em técnicas de compressão de imagem.
- 1904 o sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) cria a forma que conhecemos como “Curva de Koch”.
- 1916 – o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) estrutura o que chamamos de “Triângulo de Sierpinski.”.
- 1926 – o matemático austríaco Karl Menger (1902-1985) apresenta a “Esponja de Menger”, um fractal construído a partir de uma figura em três dimensões.

4.1 O CONJUNTO DE CANTOR

O Conjunto de Cantor, desenvolvido em 1883, é um subconjunto de infinitos pontos no intervalo unitário $[0,1]$. A sua construção algébrica permite-nos à ideia de um subconjunto fechado de números reais e a sua construção geométrica, que recebe o nome de Poeira de Cantor, permite-nos uma melhor compreensão deste conceito.

Tal fractal é obtido pelo método simples de iteração ou seja: por um processo de repetições indefinidas de uma ou mais etapas de construção. Iniciado por um segmento de reta de comprimento unitário e seguimos os seguintes processos:

1. Considere um segmento de reta de medida unitária;
2. Divida o seguimento em três partes iguais e omita o terço médio;
3. Divida os seguimentos restantes em três partes iguais e omita os terços médios;
4. Repita o passo 3 indefinidamente.

O processo de retirada dos termos centrais e de nova divisão dos segmentos restantes em três partes iguais deverá ser repetido, fazendo com que o número de etapas ou níveis N tenda ao infinito. O conjunto de cantor é obtido quando $N \rightarrow \infty$. Na figura 2.1 temos o conjunto de Cantor até a 5ª iteração, ou seja: $N=5$. Representaremos o segmento por uma barra para facilitar a compreensão.

Figura 7 - Conjunto de Cantor até a iteração 5



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

A Tabela 1 relaciona o número de iterações N , o número de segmentos gerados n_N , o comprimento de cada segmento c e o comprimento total do conjunto C_t que é a soma dos comprimentos de todos os intervalos.

Tabela 1 – Valores das n iterações do Conjunto de Cantor

ITERAÇÕES (N)	NÚMERO DE SEGMENTOS GERADOS (n _N)	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO (c)	COMPRIMENTO TOTAL DO CONJUNTO (C _t)
1	2 ¹	$\left(\frac{1}{3}\right)$	2 ¹ · $\left(\frac{1}{3}\right)$
2	2 ²	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	2 ² · $\left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	2 ³	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	2 ³ · $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
4	2 ⁴	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	2 ⁴ · $\left(\frac{1}{3}\right)^4$
...
n	2 ⁿ	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	2 ⁿ · $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor

É fácil observar que, na n-ésima iteração, obteremos um conjunto \mathbf{K}_n sendo este o resultado da união disjunta dos 2ⁿ intervalos fechados tendo por comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ cada.

Percebemos que quando $n \rightarrow \infty$, o comprimento $c = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$, o que nos garante que, no limite das iterações, o comprimento dos intervalos que compõe o conjunto de Cantor (\mathbf{K}) é zero, ou seja: não contém intervalos.

Os extremos dos intervalos omitidos nas etapas de construção do conjunto de Cantor constituem um conjunto enumerável \mathbf{E} , subconjunto de \mathbf{K} , já que a cada iteração são retirados apenas os pontos interiores de cada terço médio dos segmentos.

Sabendo que o conjunto \mathbf{E} é enumerável, vamos agora provar a existência de pontos não pertencentes a \mathbf{E} que pertencem a \mathbf{K} , ou seja, que o conjunto de Cantor não é formado apenas pelos extremos dos intervalos omitidos.

Seja \mathbf{X} pertencente a $[0,1]$, vamos representar \mathbf{X} na base 3, ou seja: $\mathbf{X}=0,X_1X_2X_3\dots$ onde cada \mathbf{X}_n é igual 0, 1 ou 2. Temos então que:

$$\mathbf{X} = \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{3^2} + \frac{X_3}{3^3} + \dots + \frac{X_n}{3^n} + \dots$$

Na primeira iteração do conjunto de Cantor, retiramos do intervalo $[0,1]$ o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ficando excluído assim todos os números X cuja representação na base 3 tem $X_1=1$ com exceção de $\frac{1}{3}=0,1$. Na segunda iteração retiramos os intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, ou seja, retiramos os números X cuja representação na base 3 tem $X_2=1$ com exceção de $\frac{1}{9}=0,01$ e $\frac{7}{9}=0,21$.

Sem perca da generalidade, podemos afirmar que o conjunto de Cantor é formado por números \mathbf{X} no intervalo $[0,1]$, cuja representação na base 3 ($X=0,X_1X_2X_3\dots$) apresenta apenas algarismos $X_n=0$ ou $X_n=2$. Os extremos à esquerda dos intervalos omitidos, ou seja, $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \dots\}$ cuja representação na base 3 apresentam algarismos 1, admitem uma outra representação, vejamos:

$$\frac{1}{3}=0,1=0,0222\dots$$

$$\frac{1}{9}=0,01=0,00222\dots$$

$$\frac{7}{9}=0,21=0,20222\dots$$

...

Segundo Lima (2011), com esta nova representação podemos afirmar, sem exceção, que os elementos do conjunto de Cantor são os número do intervalo $[0,1]$ cuja representação na base 3 apresenta apenas os algarismos 0 e 2. Deste modo, observamos que o número $\frac{1}{4}$ cuja representação na base 3 é $0,020202\dots$ pertence ao Conjunto \mathbf{K} mas não é extremo de nenhum intervalo omitido.

Podemos dizer, então, que todo elemento do conjunto \mathbf{K} representado na base 3 é da forma $0,X_1X_2X_3\dots$ em que $X_n=0$ ou $X_n=2$. Utilizando o argumento da Diagonal de Cantor para estes números, podemos concluir que o conjunto \mathbf{K} não é enumerável.

4.2 A CURVA DE PEANO

Segundo Mandelbrot (1991), “a expressão curva de Peano aplica-se genericamente a toda uma família de curvas patológicas que, entre 1890 e 1925, desempenharam um papel decisivo na elaboração do conceito de dimensão topológica”.

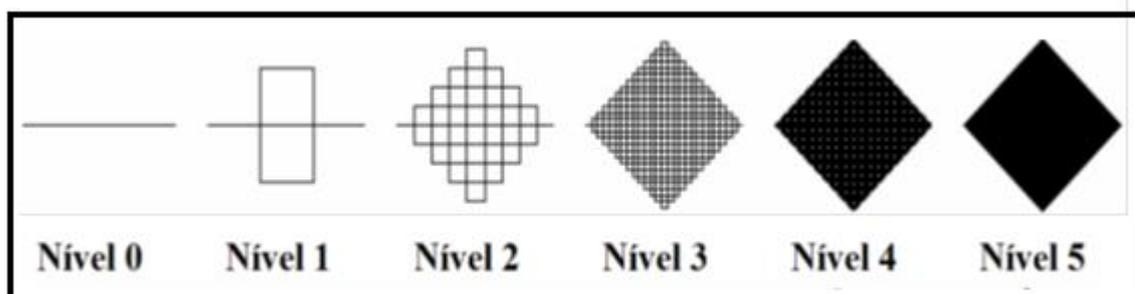
Idealizada em 1890, com a proposta de percorrer todos os pontos de uma superfície plana quadrangular, a curva de Peano foi apontada como um “monstro matemático” por proporcionar uma percepção intuitiva de que uma parte de um plano (bidimensional) seria “coberto” por uma curva (unidimensional) que encontraria, pelo menos uma vez, os pontos desse plano durante esta cobertura. A partir de então, todas as curvas com esta característica passaram a ser referenciadas como Curvas de Peano.

A curva de Peano é construída a partir da seguinte função iterada:

1. Considere um segmento de reta;
2. Divida o segmento em três partes iguais e, tomando a parte central como medida, construa dois quadrados em lados opostos deste terço médio central;
3. Considere todos os segmentos de reta gerados e repita indefinidamente o passo 2.

Este processo de iteração deverá ser repetido fazendo o número de etapas ou níveis N tender ao infinito. Na Figura 8 apresentaremos a curva de Peano até o nível 5. Observe que, na construção desta curva, sempre se substitui um segmento por outros nove segmentos reduzidos pelo fator $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Figura 8 – Curva de Peano até a iteração 5



Pela rapidez, com que a construção ocupa o espaço, percebemos, ao observar a escala apresentada na Figura 8, que a partir do nível 5 temos praticamente o espaço preenchido de um quadrado de diagonal igual ao segmento tomado no nível 0.

Na Tabela 2, apresentaremos uma relação entre os níveis de construção da curva de Peano \mathbf{N} , o número de segmentos de reta gerados \mathbf{n}_N , o tamanho de cada segmento \mathbf{c} e o comprimento desta curva \mathbf{C}_t .

Tabela 2 – Valores das n iterações da Curva de Peano

ITERAÇÕES (N)	NÚMERO DE SEGMENTOS GERADOS (\mathbf{n}_N)	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO (\mathbf{c})	COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA (\mathbf{C}_t)
1	9^1	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$9^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
2	9^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$9^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	9^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$9^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
4	9^4	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$9^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$
...
N	9^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor

Repetindo indefinidamente o processo de iteração gerador da curva de Peano, ou seja: quando $N \rightarrow \infty$ temos que, embora o comprimento dos segmentos gerados tenda a zero, o perímetro da curva tenderá ao infinito.

Podemos caracterizar as Curvas, que preenchem o espaço, como uma aplicação contínua $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde \mathbf{I} é o intervalo $[0,1]$ da reta real do plano euclidiano e $\mathbf{c}(\mathbf{I})$ é a imagem desta aplicação, ou seja: o traço da curva contínua \mathbf{c} . Sabendo que $\mathbf{I}^2 = [0,1] \times [0,1]$, temos que, para cada ponto \mathbf{P} de \mathbf{I}^2 , existe um número real \mathbf{t} pertencente a $[0,1]$, tal que $\mathbf{c}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}$, ou seja: temos uma maneira ordenada da curva \mathbf{c} percorrer todos os pontos \mathbf{P} de \mathbf{I}^2 .

O propósito de Peano era construir um mapeamento contínuo de um intervalo unitário (\mathbf{I}^1) para um quadrado unitário (\mathbf{I}^2), tal propósito tem como motivação as teorias de

Cantor que afirmavam ter a mesma cardinalidade um número infinito de pontos em um intervalo unitário e uma infinidade de pontos de qualquer dimensão finita.

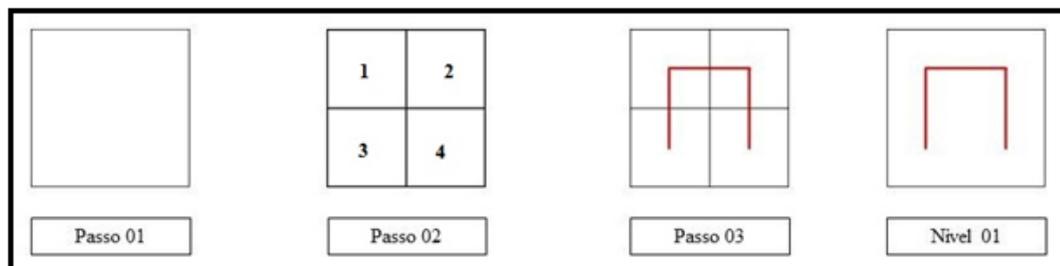
4.3 A CURVA DE HILBERT

Um ano após a publicação da curva de Peano, o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) propôs, também, um método de se percorrer os pontos de uma superfície (bidimensional) através de uma curva (unidimensional). A novidade trazida por Hilbert era a não interseção dos pontos da curva durante esta cobertura. Embora Peano tenha sido o primeiro a apresentar curvas com esta característica, foi Hilbert o grande responsável pela difusão desse ramo da geometria que vem sendo utilizada hoje em técnicas de compressão de imagens computacionais.

A curva de Hilbert é construída a partir da seguinte função iterada:

1. Dado um quadrado de lado unitário;
2. Divida-o em quatro quadrados de mesma área; nomeando-os de 1º, 2º, 3º e 4º quadrante, de acordo com o desenho gerado no passo 2 da Figura 9;
3. Construa três segmentos consecutivos partindo do ponto central de cada quadrante, como mostrado no passo 3 da figura 2.3;

Figura 9 – Passos para a construção do Nível 01 da Curva de Hilbert



Fonte: Elaborado pelo autor

4. Reduza a área da imagem gerada no passo 3 pelo fator $\left(\frac{1}{4}\right)$ e reproduza-o nos 4 quadrantes do passo 2;
5. Rotacione 90° à direita o quadrante 3 e 90° à esquerda o quadrante 4;
6. Una os segmentos de acordo com o desenho mostrado no passo 6 da Figura 10;

Na Tabela 3, apresentaremos uma relação entre os níveis de construção da curva de Hilbert N , o número de segmentos de reta gerados n_N , o tamanho de cada segmento c e o comprimento total desta curva C_t .

Tabela 3 – Valores das n iterações da Curva de Hilbert

NÍVEL (N)	NÚMERO DE SEGMENTOS GERADOS (n_N)	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO (c)	COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA (C_t)
1	3	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$
2	$4^2 - 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$(4^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$4^3 - 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$(4^3 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
4	$4^4 - 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$(4^4 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$
...
N	$4^n - 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$2^n - \frac{1}{2^n}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Repetindo indefinidamente o processo de iteração gerador da curva de Hilbert, ou seja: quando $N \rightarrow \infty$, temos que, embora o comprimento dos segmentos gerados tenda a zero, o perímetro da curva tenderá ao infinito, tal como a curva de Peano. A cada passo, o traço da curva passa através de pontos de uma malha formada por quadrados cada vez menores até alcançar, no seu limite, todos os infinitos pontos de uma região plana quadrada.

4.4 A CURVA DE KOCH

Elaborada pelo matemático sueco Helge von Koch, a curva que leva seu nome também foi caracterizada como patológica por suas peculiaridades matemáticas. Outras derivações desta curva foram apresentadas sob o título de ilha ou floco de Koch, que obedecem os mesmos processos recursivos, diferenciando-se apenas quanto ao fato de a curva de Koch se iniciar com um segmento de reta unitário e a ilha ou floco de Koch ter como figura inicial um triângulo equilátero de lado unitário.

Mandelbrot, ao sintetizar e exemplificar conceitos fractais, questionava-se qual o real comprimento da linha da costa da Grã-Bretanha. Tal pergunta levanta questões acerca dos métodos de medida, do erro ao tentar calcular, dos agrimensores de tal linha e da “rugosidade” existente nela. A curva de Koch se torna necessária para compreender o dimensionamento fractal das linhas costeiras e de tantas outras envolvendo medidas na natureza. Mandelbrot também afirmava que esta curva apontava um meio de ocupar com eficiência o espaço.

A curva de Koch é construída a partir da seguinte função iterada:

1. Seja um segmento de reta unitário;
2. Divida-o em três partes congruentes;
3. Construa, utilizando como medida o terço médio do segmento, um triângulo equilátero e omita a sua base de acordo com a Figura 13. Observe que a nova figura terá quatro segmentos de reta.

Figura 13 – Nível 01 da Curva de Koch

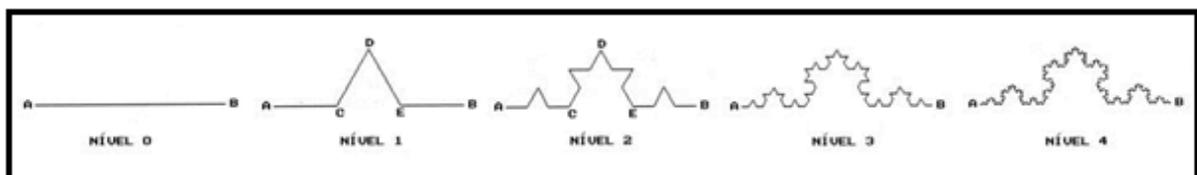


Fonte: Próprio autor

4. Repita indefinidamente os passos 2 e 3 para os segmentos de reta gerados, como mostrado na Figura 14

Na Figura 14, podemos observar os 4 primeiros níveis da curva de Koch que será obtida no limite deste processo recursivo.

Figura 14 – Níveis 0,1,2,3 e 4 da Curva de Koch



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

Ao realizarmos uma análise algébrica, podemos observar, de acordo com a Tabela 4, que após as n iterações temos $n_N = 4^n$ segmentos de reta medindo $c = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ cada e que o comprimento total desta curva será $C_t = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Tabela 4 – Valores das n iterações da Curva de Koch

NÍVEL (N)	NÚMERO DE SEGMENTOS GERADOS (n_N)	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO (c)	COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA (C_t)
1	4	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
2	4^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	4^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
4	4^4	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$
...
n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor

A curva de Koch é um exemplo de uma curva contínua em todo o seu intervalo e que não é diferenciável em nenhum ponto. Observamos ainda que no limite das iterações, esta curva terá o comprimento infinito. Tais características creditam à curva de Koch, parâmetro para estudos topográficos, ramificações, processos estatísticos, entre outros.

Ao analisarmos a linha n da Tabela 4, observamos que o número de segmentos, o comprimento de cada um deles e o comprimento total da curva é dado em função do número n . O número de segmentos da curva $n_N = 4^n$ é uma sucessão monótona crescente de potências cuja base é maior que 1, a medida de cada segmento $c = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma sucessão monótona decrescente de potências cuja base encontra-se no intervalo $] -1, 1[$, e o comprimento total

desta curva $C_t = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ é uma sucessão monótona crescente de potências cuja base é maior que 1, o que nos leva a concluir que: se $n \rightarrow \infty$, as sucessões $n_{N \rightarrow \infty}$, $c \rightarrow 0$ e $C_t \rightarrow \infty$ ou seja: a curva de Koch terá perímetro infinito.

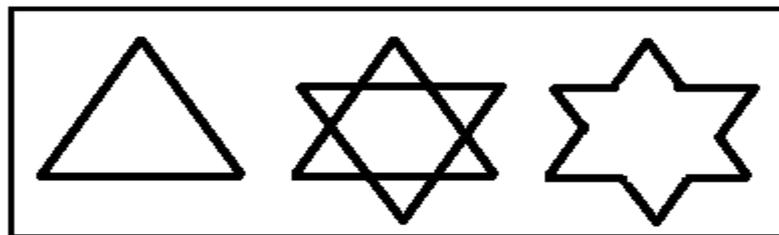
4.4.1 A ilha ou floco de Koch

Construída a partir de uma derivação da curva de Koch e conhecida por floco de neve ou ilha de Koch, esta construção se utiliza de um triângulo equilátero como figura inicial e segue os passos análogos à construção da curva de Koch.

Iniciamos a construção a partir da seguinte função iterada:

1. Seja um triângulo equilátero de lado unitário;
2. Divida cada lado em três partes congruentes;
3. Construa, utilizando o terço médio de cada lado, um triângulo equilátero e omita a sua base de acordo com a Figura 15. Observe que a nova figura terá doze segmentos de reta;

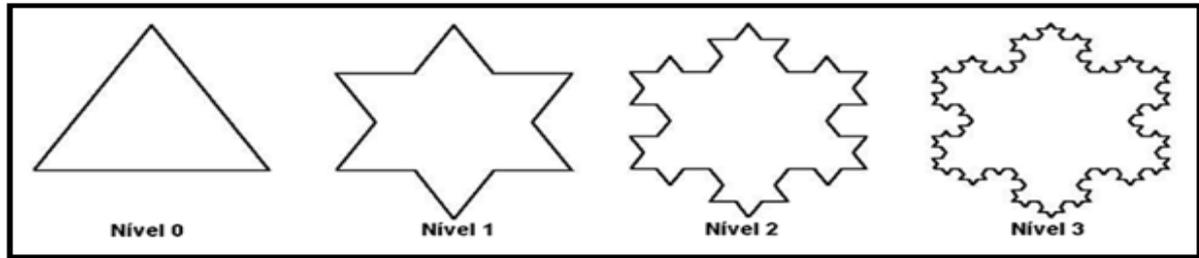
Figura 15 – Nível 01 da Ilha de Koch



Fonte: elaborado pelo autor

4. Repita indefinidamente os passos 2 e 3 para os segmentos de reta gerados, como mostrado na Figura 16;

Figura 16 – Níveis 0,1,2 e 3 da Ilha de Koch



Fonte: elaborado pelo autor

Ao analisarmos a Figura 16, identificamos a construção de uma forma geométrica fechada e, se continuarmos a observar a evolução desta forma a cada nível, indefinidamente, perceberemos que, a cada iteração, estes lados ficam menores na razão de $\left(\frac{1}{3}\right)$ do nível anterior.

Observemos a evolução desta forma geométrica na Tabela 5:

Tabela 5 – Valores da n iterações do floco de Koch

NÍVEL (N)	NÚMERO DE SEGMENTOS GERADOS (n_N)	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO (c)	PERÍMETRO DO FLOCO DE KOCH (C_i)
1	$3 \cdot 4^1 = 12$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
2	$3 \cdot 4^2 = 48$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$48 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	$3 \cdot 4^3 = 192$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$192 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
4	$3 \cdot 4^4 = 768$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$768 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$
...
n	$3 \cdot 4^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisarmos a linha n da Tabela 5, observamos que o número de segmentos, o comprimento de cada um deles e o perímetro do floco de Koch são obtidos em função do

número n . O número de segmentos da curva $n_N = 3 \times 4^n$ é uma sucessão monótona crescente de potências cuja base é maior que 1; a medida de cada segmento $c = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma sucessão monótona decrescente de potências cuja base encontra-se no intervalo $] -1, 1[$ e o perímetro desta figura $C_t = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ é uma sucessão monótona crescente de potências cuja base é maior que 1; o que nos faz concluir que: se $n \rightarrow \infty$, as sucessões $n_N \rightarrow \infty$, $c \rightarrow 0$ e $C_t \rightarrow \infty$, ou seja: o floco de Koch terá um perímetro infinito.

Deste modo o floco de Koch é uma figura geométrica fechada delimitando, portanto, uma área.

Vamos observar a possibilidade de se determinar a área delimitada pelo floco de Koch:

Primeiro analisemos a área do nível zero da Figura 16, como se trata de um triângulo equilátero de lado medindo uma unidade, temos que sua área é:

$$A_0 = \left(\frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

O nível 1 da Figura 16 é composto pela área do nível 0, acrescida da área de três triângulos oriundos do processo recursivo. Tais triângulos têm seus lados medindo $\left(\frac{1}{3}\right)$ da medida do lado do triângulo do nível anterior, portanto:

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \right)$$

Do mesmo modo, o nível 2 da Figura 16 é composto pela área do nível 1, acrescida de doze triângulos oriundos do processo recursivo, estes triângulos possuem, lados medindo $\left(\frac{1}{3}\right)$ da medida do lado do triângulo do nível anterior, ou seja, $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)$, portanto:

$$A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \right) + 12 \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \right)$$

O nível 3 da Figura 16 é composto pela área do nível 2, acrescida de quarenta e oito triângulos oriundos do processo recursivo, tais triângulos têm seus lados medindo $\left(\frac{1}{3}\right)$ da

medida do lado do triângulo do nível anterior, ou seja, $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{27}\right)$, portanto:

$$A_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) + 48 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$$

Se observarmos a área do nível n da construção do floco de Koch, teremos a soma de $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ acrescida dos n primeiros termos de uma P.G. cujo primeiro termo é $\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ e a razão é $\left(\frac{4}{9}\right)$, ou seja:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}$$

Como o floco de Koch é obtido no limite das iterações, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, teremos então que $A_n = \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5}\right) \cong 0,69 u.a.$

Podemos dizer então que temos uma área finita circundada por um perímetro infinito.

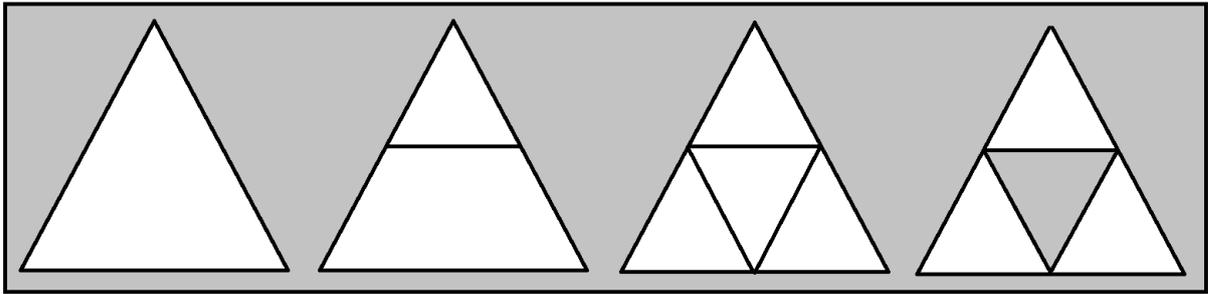
4.5 O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Produzida a partir dos estudos do matemático Waclav Sierpinski, a figura que recebe seu nome é obtida no limite de um processo recursivo que se inicia com um triângulo equilátero de lado unitário.

Iniciamos a construção do triângulo de Sierpinski a partir da seguinte função iterada:

1. Dado um triângulo equilátero de lado unitário;
2. Construa suas bases médias;
3. Determine 4 triângulos congruentes;
4. Omita o triângulo central como mostrado na Figura 17;

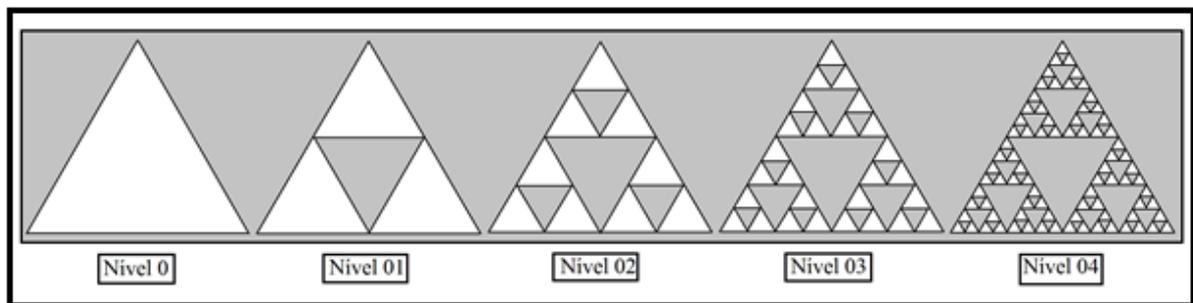
Figura 17 – Nível 01 do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborado pelo autor

5. Dos triângulos restantes, repita indefinidamente os passos 2, 3 e 4 (Figura 18).

Figura 18 – Níveis 1,2,3 e 4 do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 6, retrata a evolução da área e do perímetro do triângulo de Sierpinski, ao observarmos, percebemos que a área da figura no nível 0 é $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e que, a cada iteração, esta

área é reduzida pelo fator $\frac{3}{4}$, o que nos faz concluir que na iteração n teremos $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

S_n é uma sequência monótona decrescente de potências cuja base encontra-se no intervalo $] -1, 1[$ o que nos faz concluir que: se $n \rightarrow \infty$, teremos $S_n \rightarrow 0$.

Ao analisarmos o perímetro de tal figura, notamos que, a cada nova iteração, temos o perímetro da iteração anterior acrescida pelo fator $\frac{3}{2}$, o que nos faz perceber que como resultado da iteração n teremos $2P = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Portanto, $2P$ é uma sequência monótona crescente de potências cuja base é maior que 1, o que nos leva a concluir que, se $n \rightarrow \infty$, teremos $2P \rightarrow \infty$.

Tabela 6 – Valores das n iterações do Triângulo de Sierpinski

NÍVEL (N)	ÁREA (S)	PERÍMETRO (2P)
0	$1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 1 = 3$
1	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{9}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{27}{4} + 27 \cdot \frac{1}{8} = \frac{81}{8}$
4	$\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{81}{8} + 81 \cdot \frac{1}{16} = \frac{243}{16}$
...
n	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor

Como o triângulo de Sierpinski é alcançado no limite das iterações, teremos uma figura cuja área é zero e seu perímetro infinito.

4.5.1 O tapete de Sierpinski

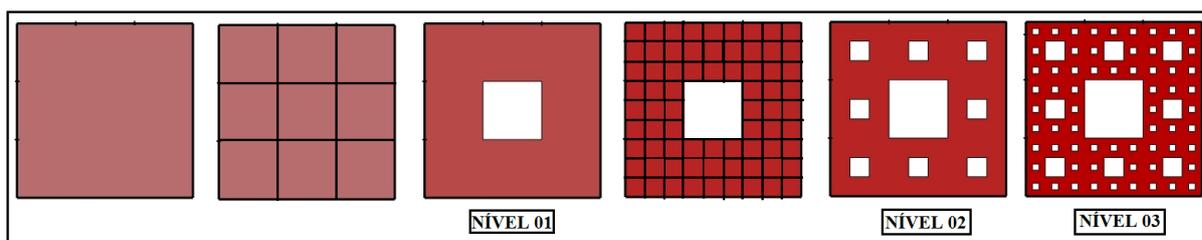
Com processo análogo ao da criação do triângulo de Sierpinski, foi desenvolvido, modificando a figura inicial, um novo fractal que – também tem como característica - o fato

de ser alcançado no limite do seu processo de iteração e tem sua área igual a zero e seu perímetro infinito.

Iniciamos a construção do Tapete de Sierpinski a partir da seguinte função iterada:

1. Dada a superfície, limitada por um quadrado de lado unitário;
2. Divida, cada um dos lados, em três partes congruentes e construa segmentos paralelos aos lados, de modo que se obtenha nove quadrados congruentes de acordo com a Figura 19;
3. Omite a região quadrada central;
4. Realize os passos 2 e 3 nos quadrados restantes;
5. Repita, indefinidamente, os passos 2, 3 e 4.

Figura 19 - Etapas da construção do Tapete de Sierpinski até o Nível 3



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

4.5.2 A pirâmide de Sierpinski

Obtida a partir de um tetraedro, a pirâmide de Sierpinski pode ser considerada como uma generalização do triângulo de Sierpinski para uma terceira dimensão.

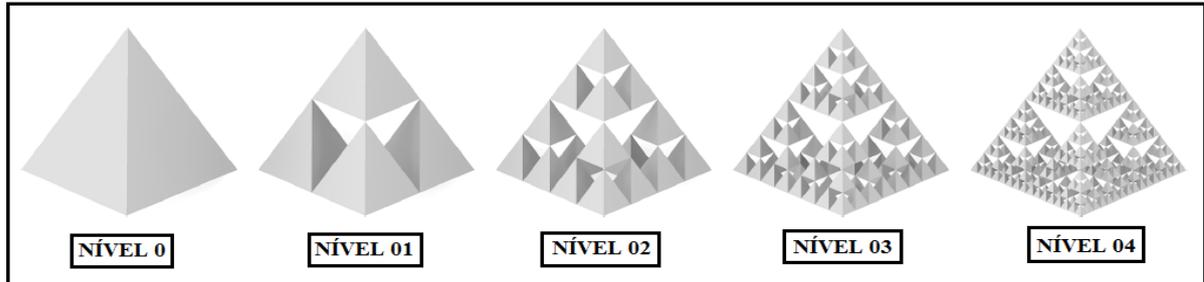
A construção da pirâmide de Sierpinski utiliza-se de planos paralelos às bases de um tetraedro (tridimensional) que passam pelos pontos médios das arestas, enquanto o triângulo de Sierpinski se utiliza das bases médias de um triângulo equilátero (bidimensional)

Iniciamos, pois, a construção da pirâmide de Sierpinski a partir da seguinte função iterada:

1. Dado um tetraedro regular de aresta unitária;
2. Construa planos fazendo-os passar pelos pontos médios das arestas e os paralelos a cada uma das bases;

3. Omita o poliedro central, restando 4 tetraedros;
4. Repita, indefinidamente, os passos 2 e 3 em cada um dos tetraedros restantes (Figura 20).

Figura 20 - Etapas da construção da Pirâmide de Sierpinski até o Nível 4



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

A pirâmide de Sierpinski é, pois, obtida no limite do processo de iteração, ou seja, quando o nível N da construção desta figura tender ao infinito. A Tabela 7 mostra a evolução do volume nos níveis de iteração da construção deste fractal.

Tabela 7 - Volumes das n iterações da Pirâmide de Sierpinski

NÍVEL (N)	VOLUME (V)
0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
1	$\frac{\sqrt{2}}{3.8} = \frac{\sqrt{2}}{24}$
2	$\frac{\sqrt{2}}{3.8^2} = \frac{\sqrt{2}}{192}$
3	$\frac{\sqrt{2}}{3.8^3} = \frac{\sqrt{2}}{1536}$
4	$\frac{\sqrt{2}}{3.8^4} = \frac{\sqrt{2}}{12288}$
...	...
n	$\frac{\sqrt{2}}{3.8^n}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a tabela 2.6, percebemos que o volume no nível 0 desta pirâmide corresponde a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e, que a cada iteração, este volume é reduzido pelo fator $\frac{1}{8}$. O que nos faz concluir que na iteração n teremos $V_n = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 8^n}$. Sendo V_n uma sequência monótona decrescente de potências cuja base encontra-se no intervalo $] -1, 1[$, portanto quando $n \rightarrow \infty$, teremos $V_n \rightarrow 0$, ou seja: quando fazemos o número de iterações tender ao infinito, o volume restante da pirâmide converge para zero. Outro raciocínio que nos remete a mesma conclusão consiste em operar a soma dos volumes retirados a cada iteração, ou seja: sabendo que V_{r_n} é o volume retirado no nível n , temos $V_{r_1} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{24}$, $V_{r_2} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{192}$, ..., $V_{r_n} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 8^n}$ uma P.G. cujo $A_1 = V_{r_1}$ e a razão $q = \frac{1}{8}$. Calculando a soma dos infinitos termos desta P.G. chegaremos ao resultado $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Ou seja: o volume retirado equivale ao volume inicial da pirâmide, portanto a pirâmide de Sierpinski tem volume igual a zero.

Analisando a área das faces triangulares geradas a cada nova iteração, percebemos que a cada face removida uma nova face é gerada; fazendo concluir, que embora o volume tenda a zero, a soma das áreas triangulares é sempre a mesma; ou seja, a área do tetraedro de Sierpinski se mantém a mesma independente do número de iterações.

4.6 A ESPONJA DE MENGER

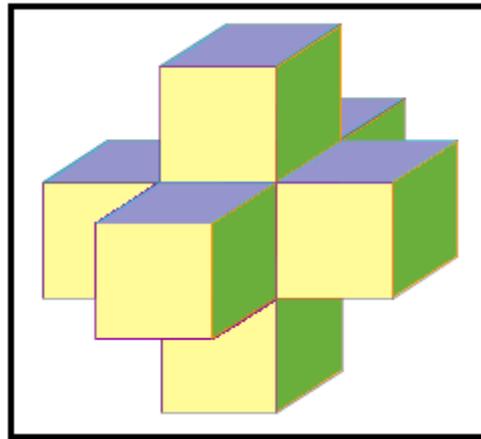
Desenvolvido a partir dos estudos conceituais de dimensão topográfica, realizados pelo matemático Karl Menger (1902-1985), o fractal que leva seu nome foi apresentado por ele em 1926 e é obtido a partir da expansão tridimensional do Tapete de Sierpinski. Assim como a Pirâmide de Sierpinski, a Esponja de Menger é obtida a partir de um processo de iteração que consiste na retirada sistemática de poliedros pré-estabelecidos.

A construção da Esponja de Menger é formada a partir da seguinte função iterada:

1. Dado um cubo de aresta unitária;
2. Divida, cada uma das arestas do cubo, em três partes congruentes. Obtendo assim 27 cubos;

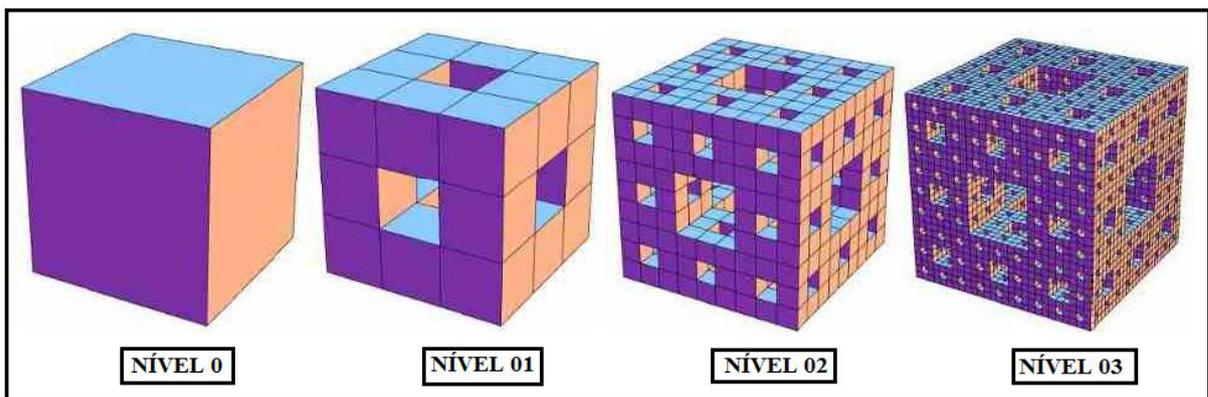
3. Omita o cubo central do sólido e os cubos que contêm a área central de cada face do nível anterior. A Figura 21 mostra o formato do volume omitido.
4. Nos cubos restantes, repita indefinidamente os passos 2 e 3 como mostrado na Figura 22, até o nível 03.

Figura 21 - Formato do volume omitido de cada cubo restante após cada iteração da Esponja de Menger



Fonte: www.google.com.br

Figura 22 - Etapas da construção da Esponja de Menger até o Nível 3



Fonte: www.google.com.br

Cada face da Esponja de Menger, como mostrado na Figura 22, mostra o Tapete de Sierpinski, cujas linhas centrais representam o Conjunto de Cantor e, por isso, este fractal é considerado uma expansão tridimensional dos outros já citados. Observamos, ainda, que de cada cubo que é gerado em cada uma das iterações este é dividido novamente em 27 cubos

menores e retirados os 7 cubos centrais (Figura 21) sobrando 20 novos cubos de cada cubo original a cada iteração

A Tabela 8, apresenta a evolução da área (S_n) e do Volume (V_n) da esponja de Menger que, assim como os outros fractais aqui apresentados, são alcançados no limite da iteração, ou seja: quando o nível dessas iterações n tender ao infinito.

Tabela 8 – Valores das n iterações da Esponja de Menger

NÍVEL (N)	NÚMERO DE CUBOS	ÁREA DE CADA FACE	ÁREA TOTAL	VOLUME DE CADA CUBO	VOLUME TOTAL
0	1	F	$6.F=S$	V	V
1	20	$\left(\frac{1}{9}\right).F$	$\left(\frac{4}{3}\right).S$	$\left(\frac{1}{27}\right).V$	$\left(\frac{20}{27}\right).V$
2	20^2	$\left(\frac{1}{9}\right)^2.F$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2.S$	$\left(\frac{1}{27}\right)^2.V$	$\left(\frac{20}{27}\right)^2.V$
3	20^3	$\left(\frac{1}{9}\right)^3.F$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3.S$	$\left(\frac{1}{27}\right)^3.V$	$\left(\frac{20}{27}\right)^3.V$
...
n	20^n	$\left(\frac{1}{9}\right)^n.F$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n.S$	$\left(\frac{1}{27}\right)^n.V$	$\left(\frac{20}{27}\right)^n.V$

Fonte: Elaborado pelo autor

A análise da Tabela 8 nos remete ao fato de que a área da figura no nível 0 é S e, que a cada iteração, esta área é aumentada pelo fator $\left(\frac{4}{3}\right)$. Trazendo-nos a percepção de que na iteração n teremos $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n .S$, ou seja: S_n é uma sequência monótona crescente de potências cuja base é maior que 1. O que nos faz concluir que, se $n \rightarrow \infty$, teremos $S_n \rightarrow \infty$.

Ao analisarmos o volume desta figura, temos que o volume no nível 0 é V e que, a cada nova iteração, teremos o volume da iteração anterior reduzido pelo fator $\left(\frac{20}{27}\right)$ e que, na iteração n , teremos $V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n .V$, que é uma sequência monótona decrescente de potências cuja base encontra-se no intervalo $] -1, 1[$. O que nos leva a concluir que, se $n \rightarrow \infty$, teremos

$V_n \rightarrow 0$; ou seja: caso o número de iterações tenda ao infinito, teremos um objeto de área infinita e volume igual a zero.

5 CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS

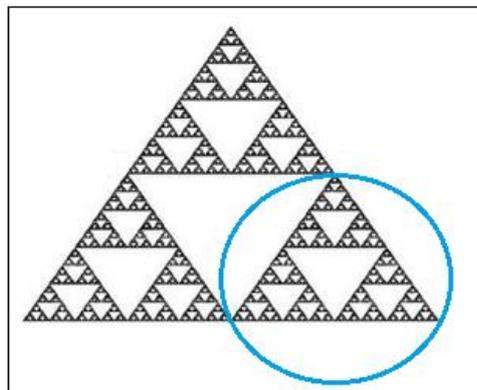
Os fractais trazem em si características como auto-similaridade, complexidade infinita e dimensão fractal. Particularidades que iremos tratar com maior detalhe nesta seção.

5.1 AUTO-SEMELHANÇA, ESCALA, E COMPLEXIDADE

A auto-semelhança ou auto-similaridade é uma característica dos fractais perceptível durante sua construção ou em uma observação mais detalhada de sua estrutura. Trata-se do fato em se ter uma parte definida do fractal, respeitando as escalas, igual ao todo de onde ela foi retirada, ou seja, em qualquer escala de ampliação obtemos cópias do objeto inicial. Uma figura que tenha esta característica apresenta sempre o mesmo aspecto visual em qualquer escala podendo ser observada de duas maneiras:

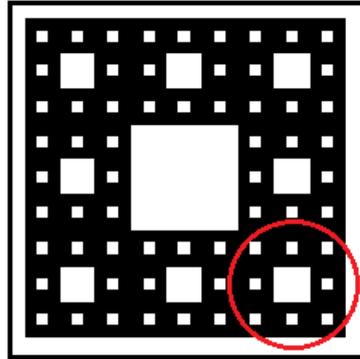
- 1) Auto-semelhança exata, estrutura própria das figuras geradas por processos matemáticos cujo objeto final se forma por infinitas réplicas perfeitas, em diferentes escalas, através de processos recursivos. Tal iteração, durante a construção da figura, garante a exatidão da auto-semelhança, visto que, a mesma regra de construção será aplicada durante todo o processo. A exemplo disso, temos as Figuras 23 e 24.

Figura 23 - Triângulo de Sierpinski e, em detalhe, uma parte de sua auto-semelhança.



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

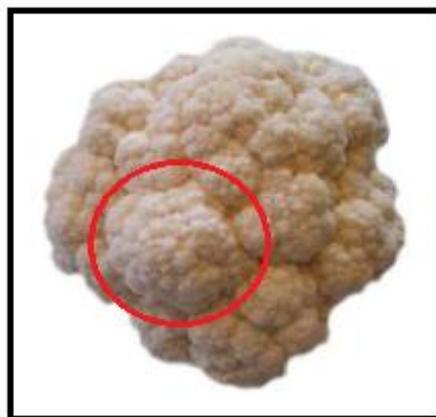
Figura 24 - Tapete de Sierpinski e, em detalhe, uma parte de sua auto-semelhança.



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

- 2) Auto-semelhança aproximada ou estatística, particularmente observadas nas figuras e objetos que se aproximam similarmente as suas partes, ou seja, apresentam alguma semelhança mas que, em diferentes escalas, e observadas rigorosamente não são iguais em seu todo. Alguns autores como Janos (2008) e Barbosa (2005) consideram que determinadas forma e objetos como as folhas de algumas árvores, as nuvens, o brócolis, a couve-flor e outros mais, trazem como característica a auto-semelhança aproximada e, por isso, podem ser denominados de fractais naturais. A exemplo, temos as Figuras 25 e 26.

Figura 25 – Brócolis e, em detalhe, uma parte de sua auto-semelhança aproximada.



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

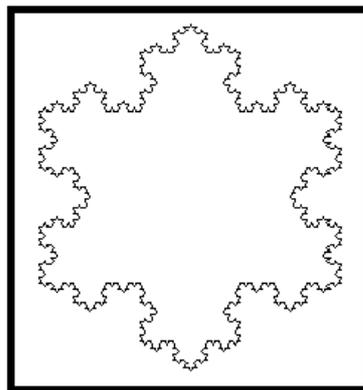
Figura 26 – Folha e, em detalhe, uma parte de sua auto-similaridade aproximada.



Fonte: adaptado de www.google.com.br

Dizemos que um fractal, gerado a partir de uma função iterativa, descreve objetos de complexidade infinita; já que, na prática, não há como representar por completo um objeto fractal, visto que sua criação é fruto de um processo recursivo infinito, por isso, quanto maior o número de iterações, maior será a riqueza de detalhes observada na representação; tornando impossível uma reprodução completa desses infinitos detalhes, por exemplo o Floco de Koch, representado na Figura 27.

Figura 27 - Floco de Koch na sua 5ª iteração.



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

Os fractais obtidos através desses processos, só serão alcançados no limite do processo iterativo, por isso são dotados desta complexidade infinita.

5.2 DIMENSÃO

Durante a evolução do homem, e frente a necessidade de se autolocalizar posicionalmente no globo terrestre e de localizar pontos e lugares, foram desenvolvidos e aprimorados métodos que sempre possibilitavam, marcado um referencial, determinar a localização que se desejava.

A abóbada celeste foi por muito tempo o “mapa” que guiou viajantes e navegantes aos seus destinos. Com o advento da bússola e a criação da rosa-dos-ventos, as relativizações dessas localizações se tornaram mais usuais e passamos então a encontrar regiões e lugares tomando como referencia o posicionamento e a orientação desses instrumentos cartograficos. Por exemplo: se centrarmos a rosa dos ventos em Brasília e quisermos observar qual a localização do estado do Ceará, veremos que fica à nordeste de Brasília.

Todavia, a precisão de uma localização, obtida somente através deste tipo de referência, não se mostra suficiente, visto que a ação de fixar a rosa dos ventos fica a cargo do localizador; não sendo, pois, bastante dizer apenas – por exemplo - que alguém está no sul do Ceará, para que possamos precisar sua localização.

Para anular a interferência do localizador, foi necessário criar um sistema absoluto de localização que através de coordenadas geográficas precisas, fosse capaz de identificar locais tomando como base referenciais oficiais para estas coordenadas. Foram escolhidas então duas linhas, a Linha do Equador e o Meridiano de Greenwich. A localização de qualquer ponto na terra fica restrita à distância angular entre o local e estes referenciais. Tais distâncias produzem um par de números que chamamos de latitude e longitude, este par ordenado é o suficiente para determinarmos a localização de qualquer ponto na superfície do globo. Dizemos, então, que a superfície terrestre tem apenas duas dimensões, pois é preciso apenas dois números para localizar qualquer ponto com exatidão.

A localização de algo que esteja fora desta superfície, compreende o mesmo princípio acrescido de uma terceira medida: a altura deste objeto em relação a sua projeção na superfície terrestre. Com isto, o objeto passa a se utilizar de três coordenadas para a sua localização.

Para a localização de um objeto que se movimenta ao longo do tempo, por exemplo, um avião num determinado percurso; será necessário além de sua latitude, longitude e altura, uma quarta dimensão, o tempo. Precisamos identificar a que horas este avião estará sobrevoando esta latitude, longitude e a sua altura.

Um espaço quadri-dimensional é algo naturalmente definido pela matemática, dentro das contribuições do matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) que afirmava a existência de espaços conceituais cujas dimensões poderiam variar de zero a infinito.

Durante muito tempo, após Euclides de Alexandria (330 a.C-260 a.C), três medidas - altura, largura e comprimento - determinaram o conceito de dimensão se utilizando de valores inteiros positivos para quantificá-la. Todavia, logo após a descoberta de entes patológicos como, por exemplo, as curvas que preenchem um espaço e as formas de perímetro infinito que delimitam uma área, esta definição de dimensão inteira positiva se tornou insuficiente. E foi, pois, com este cenário que surgiram novas definições para dimensão matemática.

5.2.1 Dimensão Euclidiana

De acordo com Commandino (1855), tradutor da versão latina dos livros intitulado Os elementos, Euclides de Alexandria em seu primeiro livro, lista 23 definições das quais destacamos:

- I) Ponto é o que não tem partes ou o que não tem grandeza alguma.
- II) Linha é o que tem comprimento sem largura.
- III) As extremidades da linha são pontos.
- IV) Superfície é o que tem comprimento e largura.
- V) As extremidades da superfície são linhas.
- VI) Superfície plana é aquela, sobre a qual, assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

Somente o livro 11, Euclides trata de uma terceira dimensão, explicitando a definição de sólido como sendo o que tem comprimento, largura e profundidade. Neste conjunto de livros, ele trata de Geometria Linear Plana e Espacial e não cita nenhuma dimensão maior que 3.

A dimensão trabalhada por Euclides é observada levando em consideração o espaço no qual os objetos estão inseridos. Sendo assim, pontos têm dimensão 0, retas têm dimensão 1, planos têm dimensão 2 e sólidos tem dimensão 3. Esta forma de se trabalhar as dimensões é confrontada quando apresentamos, por exemplo, linhas que têm dimensão 1 preencherem uma parte do plano que tem dimensão 2.

Os conceitos euclidianos de dimensão tiveram de ser ampliados e novos conceitos foram desenvolvidos para atender aos objetos que estavam surgindo. Paralelo a estas descobertas, estudos se voltam ao desenvolvimento de uma extensão da geometria, definida como topologia.

5.2.2 Dimensão Topológica

A dimensão topológica foi discutida por Poincaré em 1911 e por Brouwer, em 1913 e basicamente pode ser entendida como: dado um conjunto contínuo, ele terá n dimensões quando pudermos dividi-lo por meio de cortes que sejam eles próprios contínuos de $(n-1)$ dimensões. Considera-se que o ponto possui dimensão zero. Por essa definição, a reta terá dimensão 1 (porque pode ser separada por um ponto), o plano terá dimensão 2 (porque pode ser separado por uma reta), o espaço usual terá três dimensões (porque pode ser separado por um plano), e assim, sucessivamente, podemos imaginar conjuntos contínuos com um número crescente de dimensões. Um objeto com dimensão topológica tem propriedades que o fazem manter-se invariável sobre transformações contínuas por homeomorfismos. Como, por exemplo, a curva de Koch e uma linha reta que topologicamente são as mesmas.

Quando Cantor encontrou uma transformação f que fazia uma correspondência biunívoca entre o intervalo unitário $[0,1]$ e o quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$, percebeu-se que não se tratava de um homeomorfismo visto não ser uma transformação contínua. Mais tarde, com as construções oriundas dos trabalhos de Peano e Hilbert para a construção das curvas que preenchem o espaço, esta aplicação do intervalo unitário $[0,1]$ no quadrado $[0,1] \times [0,1]$, passou a ser contínua. Todavia, tal correspondência não pode ser biunívoca pois se assim fosse, definiria um homeomorfismo, contrariando a invariância da dimensão topológica. Ou seja, nos trabalhos de Cantor temos a correspondência biunívoca, porém não temos continuidade e nos trabalhos de Peano e Hilbert para que se ganhasse a continuidade destas curvas, perdeu-se a relação biunívoca.

Frente as dificuldades em encontrar uma definição que caracterizasse por completo a dimensão de um fractal por um número inteiro positivo ou zero, foram surgindo outras noções de dimensão que se utilizavam de valores não inteiros para tais características.

5.2.3 Dimensão Fractal

Como citamos, ao contrário do que acontece na geometria euclidiana, a dimensão fractal não é caracterizada, necessariamente, por um número inteiro. Esta medida irá representar sua estrutura, o grau de ocupação e a irregularidade; bem como, o seu comportamento, sendo ele uma figura ou a representação de um fenômeno biológico, físico ou social.

Como exemplo, podemos pensar na Esponja de Menger (Figura 22). Levando em conta os espaços vazios, as reentrâncias e a rugosidade, podemos facilmente perceber que a dimensão fractal deste objeto deve estar localizada entre 2 e 3. Observando estes conceitos, perceberemos que fica mais fácil compreender as estruturas dos objetos produzidos pela natureza e assim aproximar modelos matemáticos do real.

Outro exemplo que caracteriza a dimensão não inteira de um fractal é citada por Mandelbrot, quando este destaca a ideia de se ter um novelo com 10 cm de diâmetro feito com um fio de 1 mm de diâmetro. Ao observarmos tal novelo com a resolução de 10 m, perceberíamos sua representação apenas por um ponto (adimensional); numa resolução de 10 cm, o mesmo novelo seria representado por uma bola (tridimensional); numa resolução de 10 mm, seria um conjunto de fios (unidimensional); numa resolução de 0,1 mm, seria representado por colunas (tridimensional); ampliando mais ainda a resolução, encontraríamos um conjunto de fibras (unidimensional) e assim sucessivamente.

Iniciaremos o cálculo da dimensão fractal por objetos com auto-semelhança e para isso, utilizaremos os conceitos frutos do trabalho dos matemáticos Felix Hausdorff (1868-1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) cujos estudos em topologia e em conjuntos de dimensões não inteiras contribuíram para os trabalhos de Mandelbrot.

Utilizando uma abordagem didática, primeiramente trabalharemos com exemplos básicos cujos conceitos serão aplicados e, a posteriori, iremos calcular a dimensão fractal dos objetos já apresentados neste trabalho. Vamos a eles:

Considere um segmento de reta e divida-o em 3 partes geometricamente iguais (Figura 28), ou seja, cada novo segmento de reta terá o comprimento igual ao comprimento original do segmento reduzido por um fator de $\left(\frac{1}{3}\right)$. Ficamos então com 3^1 partes iguais.

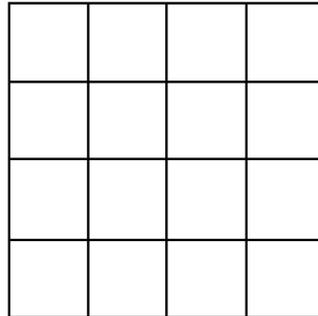
Figura 28 – Segmento de reta



Fonte: Elaborado pelo autor

Considere um quadrado e divida cada lado em 4 partes iguais (Figura 29), ou seja, os novos $4^2 = 16$ quadrados gerados, terão lados medindo $\left(\frac{1}{4}\right)$ do lado do quadrado original.

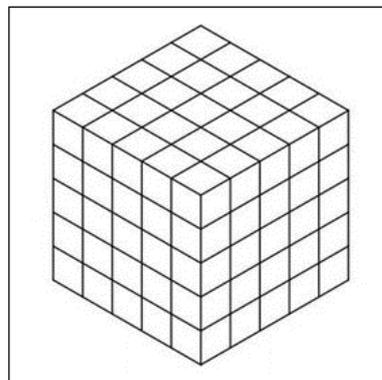
Figura 29 – Quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor

Considere um cubo e divida cada aresta em 5 partes iguais (Figura 30), ou seja, os novos $5^3 = 125$ cubos gerados, terão arestas medindo $\left(\frac{1}{5}\right)$ da aresta do cubo original.

Figura 30 – Cubo



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

Observe que a quantidade de partes semelhantes ao objeto original corresponde ao inverso do fator de redução elevado à dimensão do objeto. Vamos adotar a seguinte nomenclatura para estes cálculos: **N** para o número de partes semelhantes, **F** para o fator de redução e **D** para a dimensão do objeto, ou seja:

$$N = \left(\frac{1}{F}\right)^D \rightarrow \log N = \log \left(\frac{1}{F}\right)^D \rightarrow \log N = D \cdot \log \left(\frac{1}{F}\right)$$

Logo:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{F}}$$

As Figuras 28, 29 e 30 nos permitem concluir que:

Dimensão do segmento de reta (Figura 28):

$$D = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 3}{\log 3} = 1$$

Dimensão do quadrado (Figura 29):

$$D = \frac{\log 16}{\log \frac{1}{\frac{1}{4}}} = \frac{\log 16}{\log 4} = 2$$

Dimensão do cubo (Figura 30):

$$D = \frac{\log 125}{\log \frac{1}{\frac{1}{5}}} = \frac{\log 125}{\log 5} = 3$$

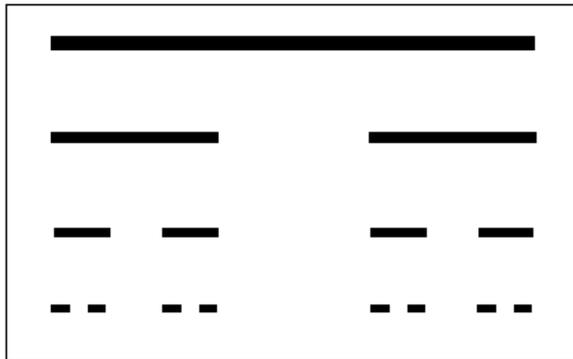
Utilizaremos agora o mesmo raciocínio para o cálculo da dimensão de alguns objetos fractais. Vale ressaltar que este conceito de dimensão apenas pode ser aplicado a

objetos que tenham a auto-semelhança exata como propriedade, ou seja, tal cálculo só poderá ser efetuado em fractais que tenham em cada uma das suas partes uma cópia reduzida de si mesmo.

Iniciaremos com o Conjunto de Cantor (Figura 31). Durante a construção deste fractal, a cada nova iteração são gerados dois novos segmentos de reta, semelhantes ao segmento original, multiplicado pelo fator de redução $\left(\frac{1}{3}\right)$. Ou seja: $N = 2$ e $F = \left(\frac{1}{3}\right)$, cuja dimensão será:

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,631$$

Figura 31 – Conjunto de Cantor

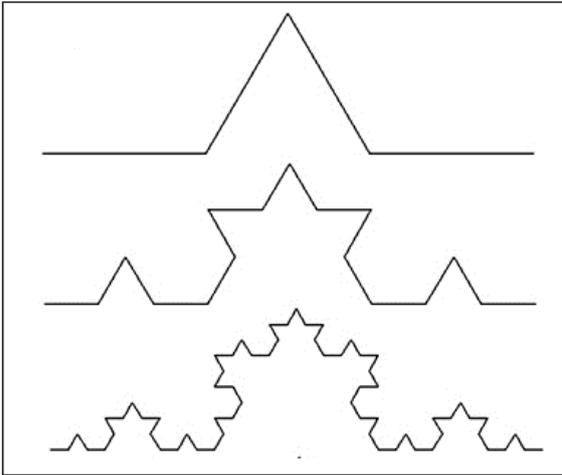


Fonte: Adaptado de www.google.com.br

Na Curva de Koch (Figura 32), assim como no Floco de Koch (Figura 33), a cada nova iteração durante seu processo de construção, são gerados quatro novos segmentos de reta, semelhantes ao segmento original, multiplicado pelo fator de redução $\left(\frac{1}{3}\right)$. Ou seja: $N = 4$ e $F = \left(\frac{1}{3}\right)$, portanto sua dimensão fractal será:

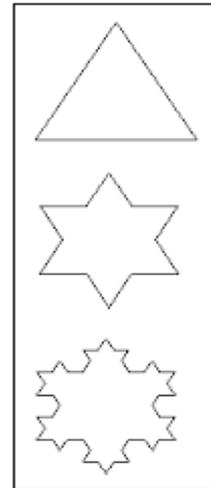
$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,262$$

Figura 32 – Curva de Koch



Fonte: Adaptada de www.google.com.br

Figura 33 – Floco de Koch



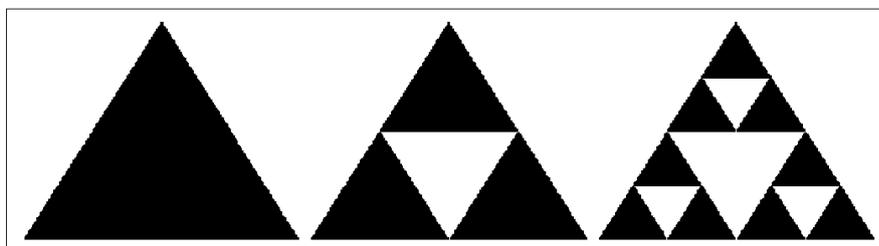
Fonte: Adaptada de www.google.com.br

Quanto ao triângulo de Sierpinski (Figura 34), sabendo que a cada nova iteração são produzidos três novos triângulos de lados medindo $\left(\frac{1}{2}\right)$ do lado original, ou seja: $N = 3$ e

$F = \left(\frac{1}{2}\right)$. Teremos então:

$$D = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,585$$

Figura 34 - Triângulo de Sierpinski

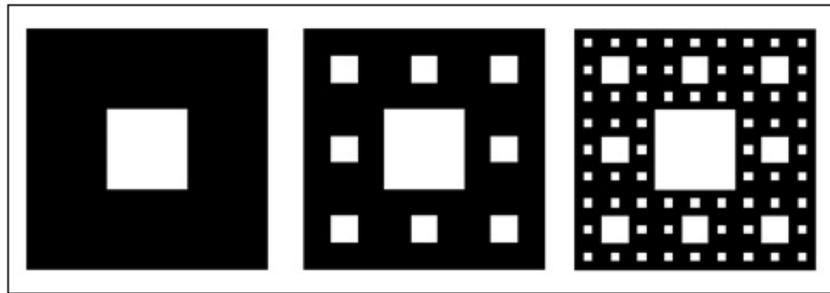


Fonte: Adaptada de www.google.com.br

Durante a construção do Tapete de Sierpinski (Figura 35) são produzidos oito novos triângulos de lados, cada um medindo $\left(\frac{1}{3}\right)$ do lado original, ou seja: $N = 8$ e $F = \left(\frac{1}{3}\right)$, então temos:

$$D = \frac{\log 8}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1,893$$

Figura 35 – Tapete de Sierpinski

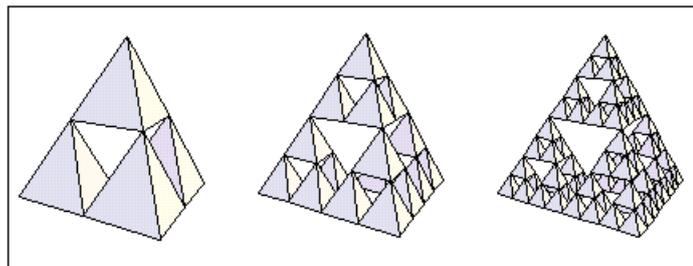


Fonte: Adaptada de www.google.com.br

A Pirâmide de Sierpinski (Figura 36) apresenta quatro novas pirâmides a cada iteração, cujas arestas são obtidas a partir da redução em $\left(\frac{1}{2}\right)$ da aresta original, ou seja: $N = 4$ e $F = \left(\frac{1}{2}\right)$, portanto apresenta dimensão fractal igual a:

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

Figura 36 – Pirâmide de Sierpinski

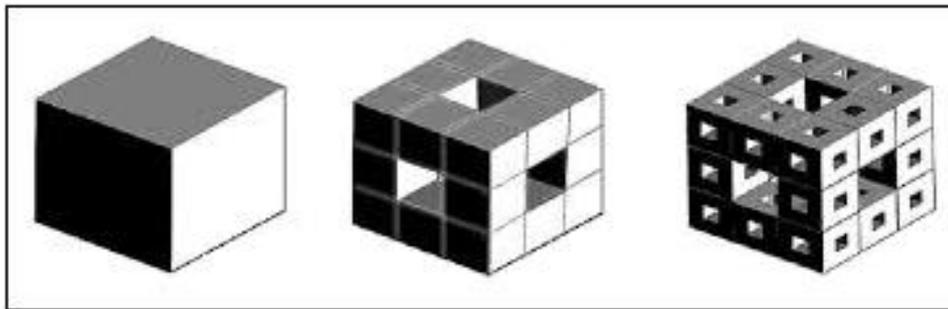


Fonte: Adaptada de www.google.com.br

A Esponja de Menger (Figura 37) utiliza o fator de redução de $\left(\frac{1}{3}\right)$ em suas arestas, produzindo 20 novos cubos a cada iteração, ou seja: $N = 20$ e $F = \left(\frac{1}{3}\right)$, o que nos faz concluir que sua dimensão fractal é:

$$D = \frac{\log 20}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 20}{\log 3} \cong 2,727$$

Figura 37 – Esponja de Menger



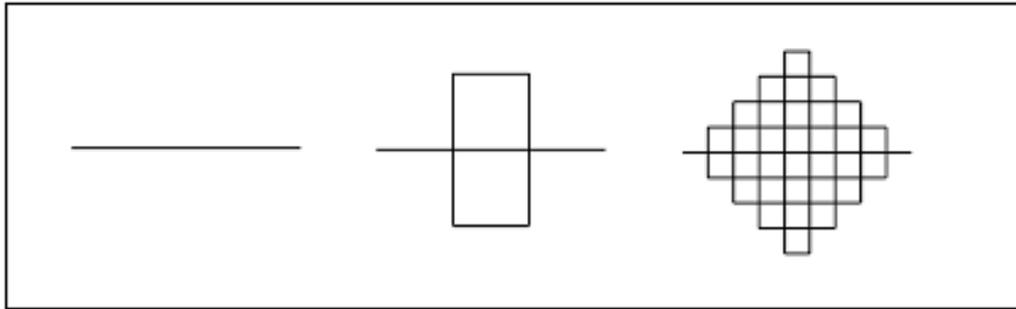
Fonte: Adaptada de www.google.com.br

Os próximos cálculos de dimensão serão relacionados às curvas que preenchem o espaço, como a Curva de Peano e a Curva de Hilbert. Muito embora topologicamente equivalham a uma linha, os seus formatos e percursos as obrigam a ocupar a área de um quadrado; fazendo-as, então, se comportarem como um objeto bidimensional.

Para o cálculo da dimensão da Curva de Peano (Figura 38), sabemos que o coeficiente de redução de cada segmento é $\left(\frac{1}{3}\right)$ e que a cada nova iteração 9 segmentos são gerados, ou seja: $N = 9$ e $F = \left(\frac{1}{3}\right)$; o que nos faz concluir que :

$$D = \frac{\log 9}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

Figura 38 – Curva de Peano

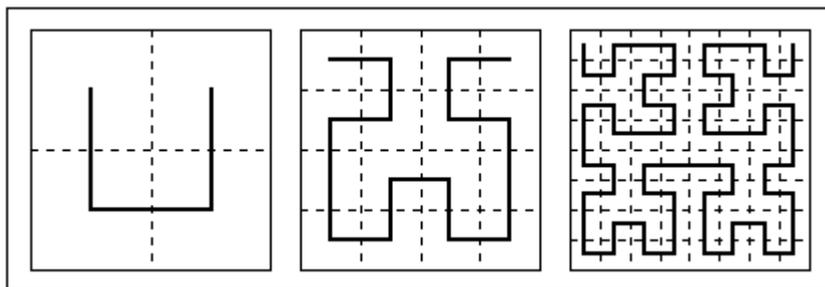


Fonte: Adaptada de www.google.com.br

Para a Curva de Hilbert (Figura 39), sabemos que o coeficiente de redução de cada segmento (lado do quadrado) é $\left(\frac{1}{2}\right)$ e que a cada nova iteração podemos formar, com os segmentos gerados, 4 quadrados semelhantes ao inicial, ou seja: $N = 4$ e $F = \left(\frac{1}{2}\right)$, o que nos faz concluir que :

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

Figura 39 – Curva de Hilbert



Fonte: Adaptada de www.google.com.br

5.2.4 Dimensão Fractal pelo método *box counting*

A dimensão de Hausdorff, citada por Mandelbrot ao definir fractal, refina o conceito de dimensão topológica e basicamente pode ser vista como: tendo um conjunto X,

considera-se o número $N(r)$ de coberturas de raio menor ou igual a r que são precisas para cobrir X por completo. Se formos fazendo r menor, $N(r)$ será cada vez maior. De modo aproximado, podemos dizer que, d é o modo que $N(r)$ cresce à medida que r tende para zero, então dizemos que X tem uma dimensão d .

Para a dimensão fractal de sinais, imagens, fractais com auto-semelhança exata e auto-semelhança estatística foi desenvolvido por Voss (1985), como alternativa para o cálculo da dimensão Hausdorff, um método para este cálculo, conhecido como método **Box counting** ou método de contagem das caixas. Segundo Falconer (2003), o método *box counting*, é um dos mais utilizados em várias ciências pela simplicidade dos cálculos matemáticos envolvidos e a possibilidade de estimativa empírica. Tal método resulta uma aproximação para os valores da dimensão de Hausdorff e sua implementação computacional é mais acessível.

Os passos para este cálculo são:

- 1) Cubra todo o fractal, ou a parte que se pretende calcular a dimensão, com uma “grade” formada por quadrados em escala de **1: R₁**;
- 2) Conte o número de quadrados **N₁**, da grade, capazes de cobrir todo fractal;
- 3) Calcule a dimensão inicial com a fórmula:

$$D_1 = \frac{\log N_1}{\log R_1}$$

- 4) Reduza o tamanho do lado do quadrado pela metade, ou seja: na escala **1: R₂** com **R₂ = 2R₁** e conte novamente o número de quadrados **N₂** da grade capaz de cobrir todo fractal;
- 5) Calcule **D₂** como sendo:

$$D_2 = \frac{\log N_2}{\log R_2}$$

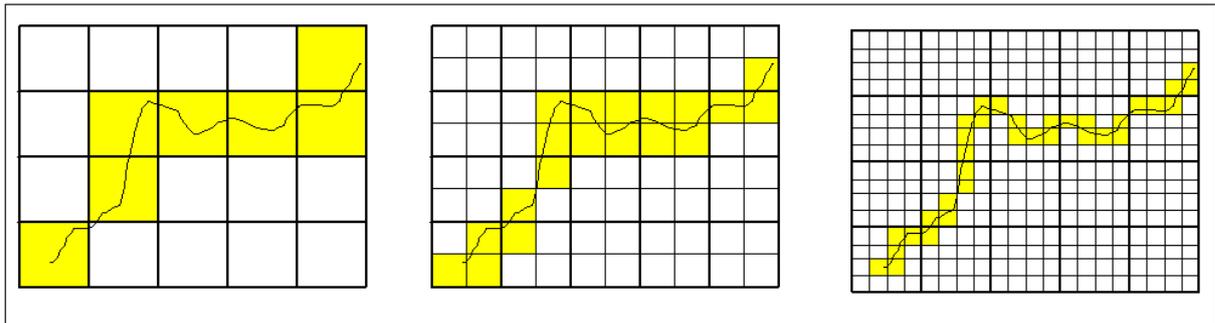
À medida que calculamos as dimensões D_n , repetindo os passos 4 e 5, mais próximo do real será o valor da dimensão do objeto pesquisado.

Outra maneira de realizar este cálculo é construir, numa escala logarítmica, os pontos (**N_n, R_n**) e calcular o coeficiente angular da reta que melhor se encaixe nesses pontos. Este coeficiente angular será uma estimativa para o valor da dimensão fractal do objeto estudado.

Esse método não se limita apenas a objetos no plano, podendo ser estendido para objetos fractais de alta dimensão usando hipercubos d-dimensionais para esta contagem.

Utilizando o método de contagem das caixas, vamos calcular uma estimativa para a dimensão fractal do objeto mostrado na Figura 40.

Figura 40 – Cálculo da Dimensão Fractal utilizando o método *Box counting*



Fonte: Adaptada de www.google.com.br

Na primeira parte deste cálculo, construímos uma malha na escala 1:2 (Figura 40) e a curva passa por 7 quadrados, ou seja: $R_1 = 2$ e $N_1 = 7$, portanto:

$$D_1 = \frac{\log 7}{\log 2} \cong 2,807$$

Para a segunda parte, construímos uma malha na escala 1: 4 (Figura 40) e a curva passa por 19 quadrados, ou seja: $R_2 = 4$ e $N_2 = 19$, portanto:

$$D_2 = \frac{\log 19}{\log 4} \cong 2,124$$

Já para o terceiro quadro da Figura 40, construímos uma malha na escala 1: 8 e a curva passa por 34 quadrados, ou seja: $R_3 = 8$ e $N_3 = 34$, portanto:

$$D_3 = \frac{\log 34}{\log 8} \cong 1,696$$

A Tabela 9 mostra a evolução do valor da dimensão fractal do objeto destacado na Figura 40, inserido em “grades” de escalas 1:2, 1:4, 1:8, 1:16, 1:32 e 1:64. Perceba que, nos

dados coletados, aos poucos a dimensão fractal calculada vai estabilizando seus valores entorno de 1,3. Apenas estas observações não garantem que este número seja, de fato, uma boa aproximação da dimensão fractal e que para um valor exato, deveríamos analisar o limite destas iterações

Tabela 9 – Evolução da dimensão fractal com aplicação do método *Box counting*

Escala 1:R	Número de quadrados N	log N	log R	$D = \frac{\log N}{\log R}$
2	7	0,845098	0,30103	2,807355
4	19	1,278754	0,60206	2,123964
8	34	1,531479	0,90309	1,695821
16	57	1,755875	1,20412	1,458223
32	114	2,056905	1,50515	1,366578
64	225	2,352183	1,80618	1,302297

Fonte: Elaborada pelo autor

6 FRACTAIS EM SISTEMAS DINÂMICOS

O estudo de sistemas dinâmicos é desenvolvido a partir da necessidade de se formalizar, em termos conceituais, um modelo que evolui ao longo do tempo, ou seja, surge da exigência, com base no comportamento passado de determinado fenômeno, justificar seu estado presente e lançar olhos para o seu estado futuro tendo como base uma análise matemática. Vários ramos da ciência, como a meteorologia, economia, astronomia, fenômenos sociais e outros têm seus trabalhos fundados na teoria dos sistemas dinâmicos dado seu objetivo em, ao estudar um conjunto de variáveis, projetar uma lei de evolução do fenômeno analisado.

Esta lei de evolução geralmente é transcrita por uma função ou por uma equação diferencial. Geralmente a ferramenta computacional é utilizada nestas análises, visto a sua capacidade de trabalhar grandes volumes de variáveis em um curto intervalo de tempo e à capacidade de representação gráfica destes fenômenos.

Sistemas dinâmicos que analisam uma grande quantidade de variáveis, aparentemente, se tornam imprevisíveis em virtude da complexidade dos processos envolvidos nessa análise, por outro lado, sistemas com poucas variáveis se tornam mais

previsíveis. No entanto, depreende-se que a existência de processos simples de iteração que resultam em comportamentos aparentemente aleatórios e imprevisíveis dão aos sistemas dinâmicos a característica de encontrar no aparente caos, uma ordem regida por leis bem definidas.

Um sistema dinâmico pode ser exemplificado, matematicamente, como sendo uma função f determinada em um certo conjunto X , ou seja:

$$f: X \rightarrow X$$

Como a análise proposta será feita no decorrer das iterações desta função, se começarmos por um ponto $x \in X$ e este corresponder ao instante zero, ao aplicarmos a função teremos $f(x)$ como o instante 1, $f(f(x))$ como o instante 2 e assim sucessivamente. O conjunto dessas iterações é conhecido como a órbita do ponto $O(x)$ e um dos objetivos desta teoria é saber se essa órbita tem algum limite ou pontos de acumulação.

Para exemplificar os fractais definidos em sistemas dinâmicos, iremos descrever os conjuntos de Julia e de Mandelbrot por serem fractais baseados em recorrências em um plano complexo.

6.1 CONJUNTO DE FATOU E JÚLIA

Em 1918 e em 1919, foram publicados respectivamente os trabalhos de dois matemáticos franceses, Gaston Julia (1893-1978) e Pierre Fatou (1878-1929) que, por limitações tecnológicas, não chegaram a ver seus trabalhos diagramados através de representações gráficas; sendo isso feito mais tarde, por Mandelbrot, durante a criação de ferramentas computacionais que implementaram tais estudos e, pela primeira vez, foi visualizado o formato que estes conjuntos apresentam.

É importante ressaltar que Fatou e Júlia, embora contemporâneos, não elaboraram seus trabalhos em conjunto e que, segundo Barbosa (2005), esses estudos ficaram completamente esquecidos até serem alçados aos holofotes novamente por Mandelbrot ao usá-los como base para o desenvolvimento do que conhecemos hoje como Conjunto de Mandelbrot, cuja representação gráfica se tornou símbolo da geometria dos fractais.

Gaston Julia, soldado do exército francês na primeira grande guerra, desenvolveu boa parte de seu trabalho durante um internamento hospitalar para tratar de um grave ferimento que lhe extirpara o nariz enquanto combatia. Escreveu 199 páginas, aos 25 anos, e

contribuiu para o desenvolvimento de sistemas dinâmicos complexos com o estudo de iterações de funções.

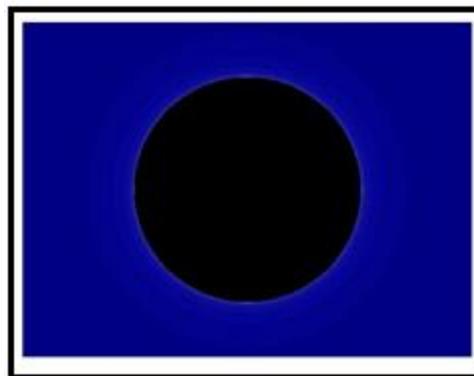
Em suma, foi estudado o que acontece com a imagem, no plano complexo, quando aplicamos iteradamente a função $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ com Z um complexo inicial e c um complexo constante; ou seja: um ponto fixo no plano complexo ou um parâmetro das curvas geradas pelas n iterações sobre o ponto (x, y) com $Z_0 = x + iy$.

Para cada ponto Z_0 inicial, geramos uma sequência de números complexos $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ a partir da função iterada $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, que é a órbita de Z_0 . Se esta órbita convergir para o infinito, então Z_0 não pertence a nenhum conjunto de Julia e dizemos, então, que Z_0 é ponto de escape e todos os pontos Z formam um conjunto repulsor de c . No entanto, se esta órbita convergir para um círculo em torno da origem, então Z_0 pertence a algum conjunto de Júlia.

O Conjunto de Julia separa, pois, o plano dos complexos em duas partes: a primeira, em pontos cujas órbitas convergem para a origem e a segunda, quando estes pontos apresentam orbitas que tendem ao infinito.

A Figura 41 representa o conjunto de Julia para $c = 0$, nela podemos perceber um círculo plotado no plano dos complexos de raio unitário. Vale ressaltar que, o conjunto de Julia não apresenta auto-semelhança exata nas diferentes escalas de ampliação.

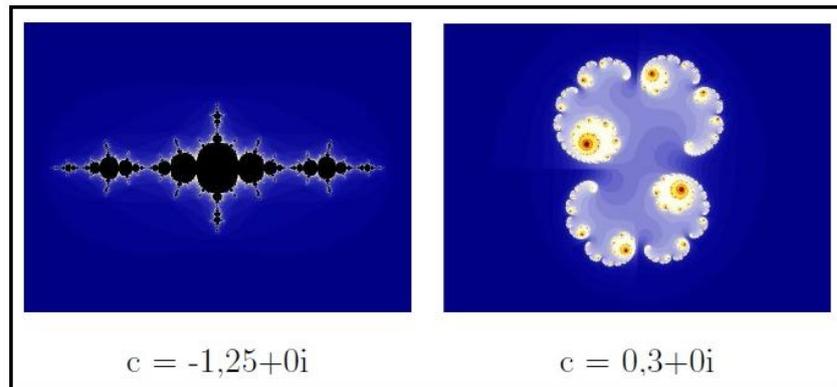
Figura 41 – Conjunto de Julia para $c = 0$



Fonte: Programa Ultrafractal

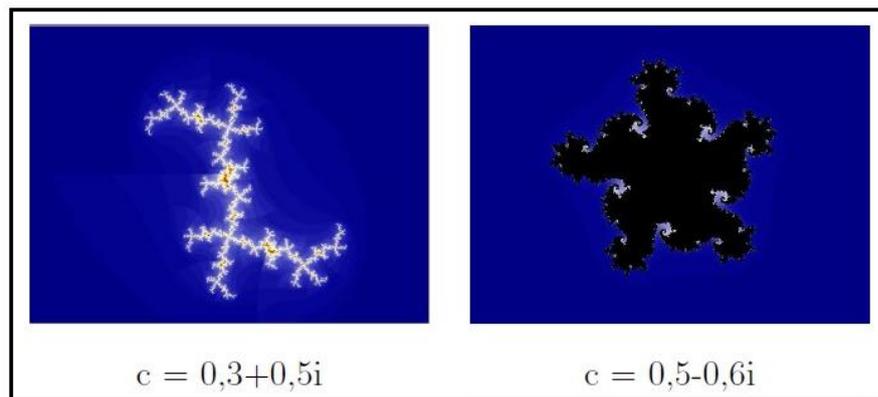
As Figuras 42 e 43, trazem variações do parâmetro c

Figura 42 – Conjunto de Julia ao variar o parâmetro c



Fonte: Programa Ultrafractal

Figura 43 – Conjunto de Julia com pequenas variações do parâmetro c



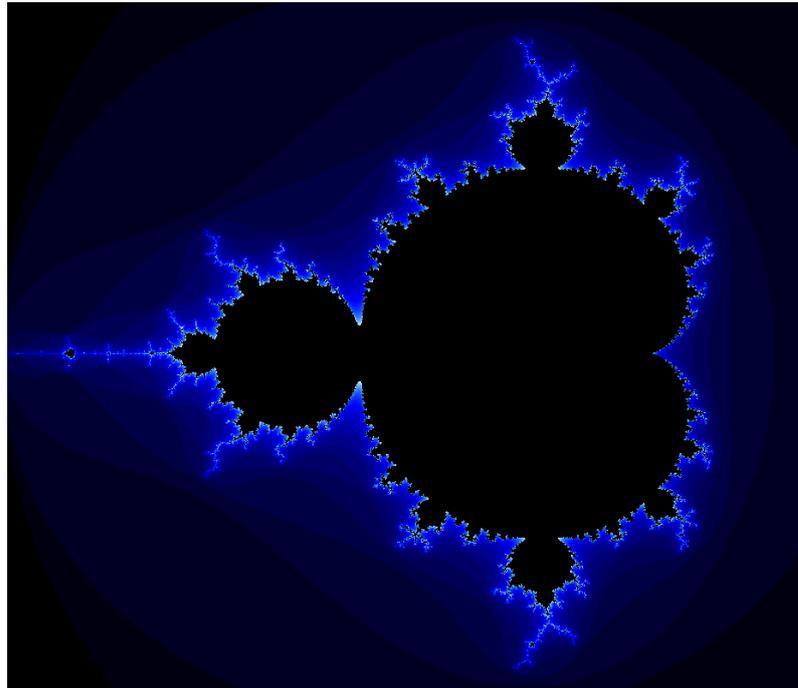
Fonte: Programa Ultrafractal

6.2 CONJUNTO DE MANDELBROT

Ao tentar elaborar uma forma de generalizar os conjuntos de Julia, em 1979, Mandelbrot conseguiu criar uma imagem, no plano dos complexos, que reunia todos esses conjuntos. Os pontos do conjunto de Mandelbrot nos fornecem conjuntos de Julia conexos e os pontos que não pertencem ao conjunto de Mandelbrot correspondem a conjuntos de Julia desconexos.

Mandelbrot, ao idealizar a representação deste conjunto, passa a marcar no plano complexo as constantes c pertencentes aos conjuntos de Julia (Figura 44), ou seja, os valores de c , para que a sequência convergisse para o centro.

Figura 44 – Conjunto de Mandelbrot



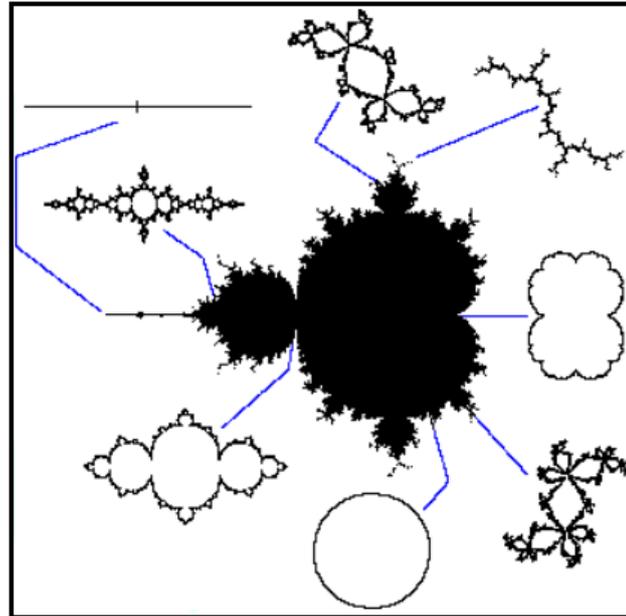
Fonte: www.google.com.br

O conjunto de Mandelbrot é criado a partir do conjunto de Julia, fazendo $Z_0 = 0$. e é conhecido também como Diagrama de Constelações de Fractais por conter todos os conjuntos de Julia conectados.

Segundo Nunes (2006), “O conjunto de Mandelbrot é então definido como sendo o conjunto de todos os números complexos c , tais que após um certo número de iterações de $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, Z não tende para o infinito.” Iterando esta função para cada ponto c , temos a sequência: $c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$

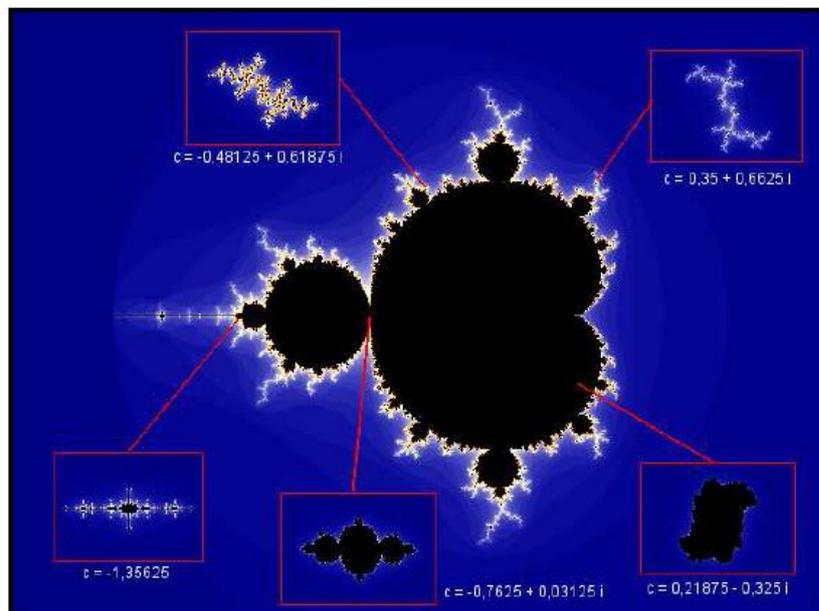
Como dissemos, podemos encontrar os conjuntos de Julia no conjunto de Mandelbrot, bastando para isso que façamos variar os valores do ponto c , como observados nas Figuras 45 e 46, onde destacamos no, conjunto de Mandelbrot, alguns conjuntos de Julia.

Figura 45 – Conjunto de Mandelbrot e, em destaque, oito conjuntos de Julia.



Fonte: Adaptado de www.google.com.br

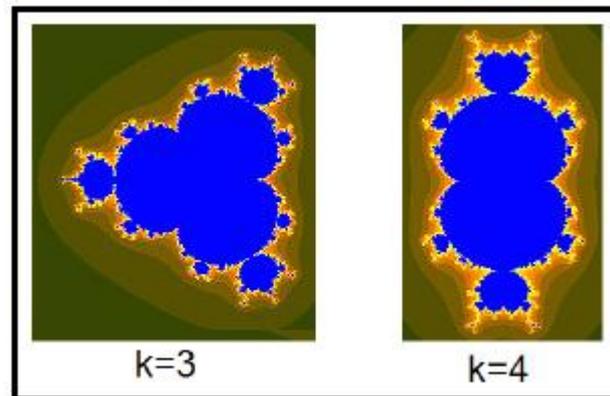
Figura 46 – Conjunto de Mandelbrot e, em destaque, cinco conjuntos de Julia.



Fonte: NUNES (2005)

Além dos conjuntos gerados a partir da recorrência $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, podem ser criados outros conjuntos a partir da recorrência $Z_{n+1} = Z_n^K + c$, como mostrado na Figura 47.

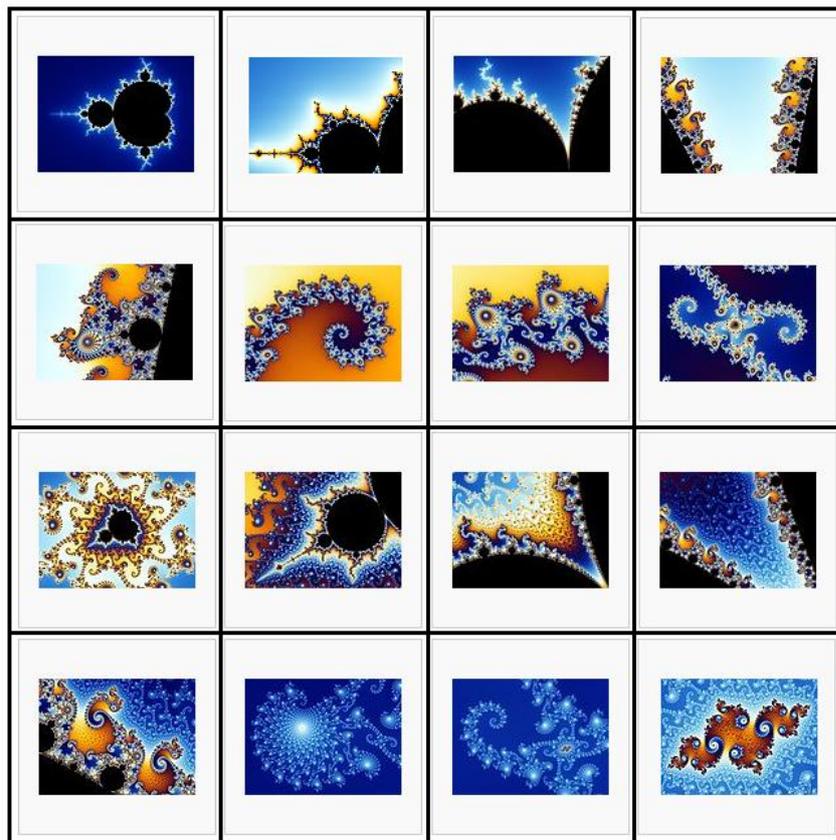
Figura 47 – Conjunto de Mandelbrot gerado pela recorrência $Z_{n+1} = Z_n^k + c$



Fonte: RABAY (2013)

Podemos verificar a auto-semelhança aproximada, ao fazermos algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot, como mostrado na Figura 48.

Figura 48 – Ampliações do Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Adaptada de www.google.com.br

7 ALGUMAS APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL

Os estudos principados por Mandelbrot e a publicação de suas primeiras obras nas décadas de 70 e 80, oportunizaram ao homem uma nova forma de pensar, projetar, desenhar e analisar comportamentos, objetos, fenômenos e reações.

Trazer à tona trabalhos, como já citados, que se configuraram em uma nova forma de ver o mundo, foi de grande valia para a geometria dos fractais e para os conceitos a ela agregados, despertando a curiosidade de pesquisadores e estudiosos que, a partir dessa nova ferramenta, possibilitaram grandes avanços em áreas como:

- ✓ Análise de imagens geradas por satélite;
- ✓ Arquitetura;
- ✓ Biologia;
- ✓ Economia;
- ✓ Geologia;
- ✓ Medicina;
- ✓ Tecnologia;

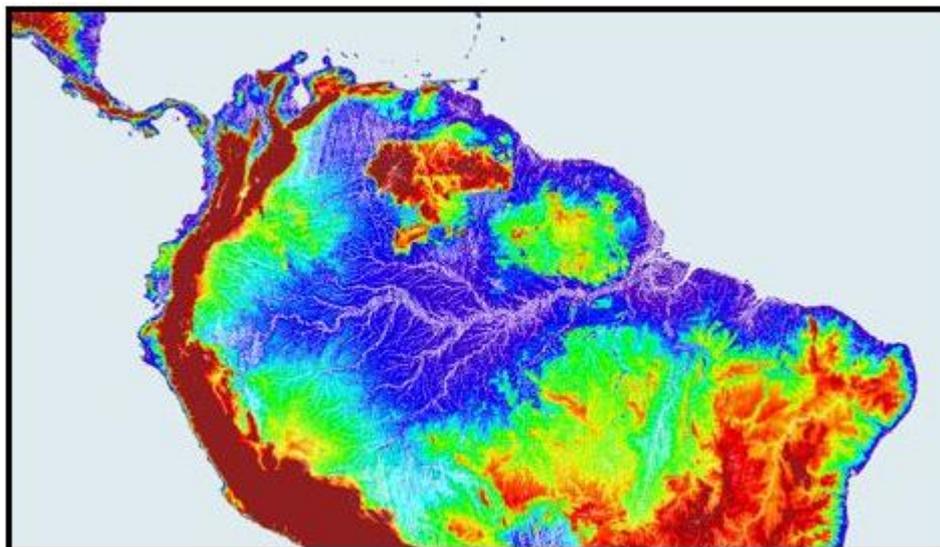
É certo que, além dessas, outras áreas e ramos das ciências modernas também se apropriam dos conceitos explorados pela geometria dos fractais, todavia a ênfase dessa pesquisa se voltará apenas às áreas acima citadas.

7.1 ANÁLISE DE IMAGENS GERADAS POR SATÉLITE

Citaremos algumas das várias possibilidades de análise de imagens geradas por satélite. Ao analisarmos uma determinada região pelas lentes das câmeras de um satélite, algumas formas podem ser alvo de estudos dada a evolução temporal de sua forma, contornos ou expansão de sua área e densidade, por exemplo: florestas, campos agricultáveis ou não, rios e afluentes, cidades entre outros.

Apesar dessa diversidade paisagística, o estudo de qualquer um desses elementos, precisa estar relacionado com o todo que circunvizinha a forma analisada, tornando imprescindível a compreensão dos padrões que compõe tal paisagem. Por se tratar de formas irregulares descritas pela natureza ou modificadas pelo homem, a teoria dos fractais passa a ser uma ferramenta eficiente para a diminuição da subjetividade na avaliação e entendimento das fragmentações paisagísticas impressas através do tempo ou pela ação do homem retratadas em imagens captadas por satélite, por exemplo, a Figura 49 .

Figura 49 – Bacia do Rio Amazonas



Fonte: Fotografia obtida pelo radar de altimetria ERS-1

Para Janos (2008) ao analisar a dimensão fractal de dois trechos do Rio Amazonas, conclui que a dimensão de um rio, depende de sua idade, ou seja, com o passar do tempo, novos afluentes vão surgindo e a dimensão do rio cresce. Neste sentido, a análise da dimensão fractal de fotografias feitas por satélites utilizando o método de contagem das caixas, como é o caso, nos apresenta informações sobre o processo de evolução pelo qual passou esse rio e, de forma similar, nos permite a análise de outras formas encontradas na geologia terrestre.

7.2 ARQUITETURA

Mesmo só podendo utilizar o termo “Fractal” após 1975, ano em que foi criado, ao longo do tempo, várias construções trazem características fractais que, de forma consciente e deliberada foram projetadas com um padrão arquitetônico que priorizava características como a auto-semelhança e que se observa, por exemplo, nas igrejas barrocas representadas nas Figuras 50 e 51, cujas construções são baseadas na ideia da complexidade geométrica infinita.

Figura 50 – Igreja de São Francisco, Salvador-BA



Fonte: www.google.com.br

Figura 51 – Igreja barroca em Sicília cidade de Noto



Fonte: www.google.com.br

A Torre Eiffel, ícone arquitetônico da cidade de Paris na França, é apontada por Mandelbrot como uma obra que incorpora a ideia de uma curva fractal cheia de pontos ramificados. É notória a semelhança entre o triângulo de Sierpinski e o princípio de construção desta torre, ao ser composta por quatro níveis no formato da letra “A” interconectada por estruturas autossimilares que vão decrescendo à medida que a torre ganha altura.

Nos dias de hoje, as características e conceitos atrelados aos fractais - ainda que gerando polêmicas e discussões entre arquitetos - são aplicados constantemente em projetos arquitetônicos, a exemplo disso, temos as obras de Peter Eisenman observadas na Figuras 52 e 53, que se utilizam da ideia de desconstrução das formas para criar seus modelos e projetos.

Figura 52 - Wexner Center for the Arts, Ohio, EUA



Fonte: www.google.com.br

Figura 53 - Memorial do Holocausto, Berlim, Alemanha



Fonte: www.google.com.br

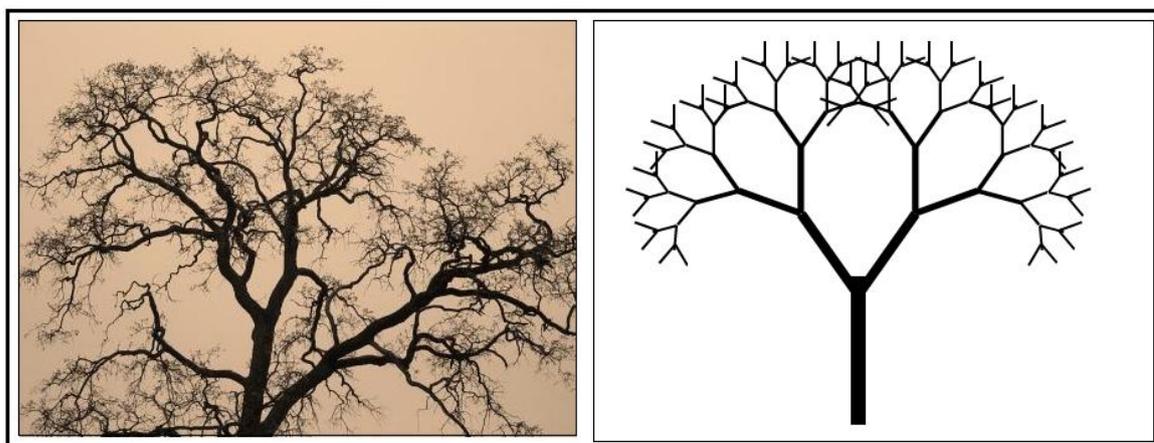
Fica fácil então perceber que a geometria fractal pode trazer formas aplicáveis ao nosso universo, que vão desde as edificações até à construções de cidades inteiras; E que os novos padrões estéticos foram criados a partir de obras clássicas dos objetos e das formas fractais.

7.3 BIOLOGIA

Sendo a biologia a ciências cujo objeto de estudo são os seres vivos e seus aspectos, características, composição, evolução, metabolismo, organização, crescimento, interações e todas as outras manifestações vitais, mostram-se promissores para os estudos que relacionam funções de desenvolvimento destas características com peculiaridades intrinsecamente ligadas à geometria dos fractais. Tal correspondência consegue imprimir, nas análises biológicas de alguns indivíduos, certo rigor matemático justificando determinadas formas e processos.

A formação da copa, em árvores típicas, começa pelas ramificações iniciais do tronco e de forma análoga, as primeiras ramificações de cada ramo principal sofrem novas ramificações e este processo se sucede até que as ramificações terminais façam surgir folhas como se a árvore fosse composta por milhares de árvores em escalas cada vez menores, como mostrado no comparativo feito da Figura 54.

Figura 54 – Árvore natural e árvore construída por processo recursivo

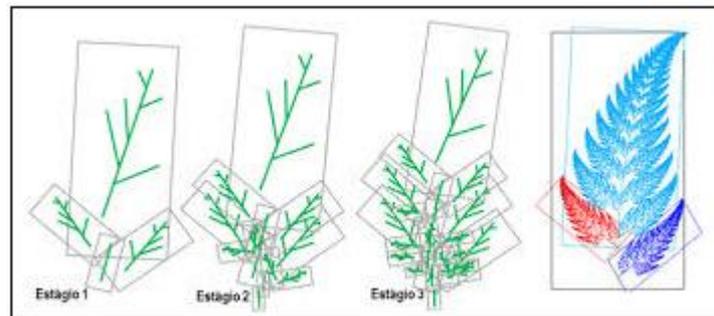


Fonte: Adaptado de www.google.com.br

A disposição fractal das folhas em uma árvore, potencializa e maximiza a exposição de folhas ao sol, proporcionando uma maior eficiência na captação da luz.

O método de crescimento destas espécies é análogo à criação de muitos fractais, seus processos iterativos formam objetos cuja semelhança física o aproxima do produzido pela natureza. A exemplo: uma folha de samambaia que tem estrutura aproximada ao fractal intitulado Samambaia de Barnsley, criada pelo do matemático britânico Michael Barnsley (1946), representada na Figura 55.

Figura 55 - Etapas de construção da Samambaia de Barnsley



Fonte: www.google.com.br

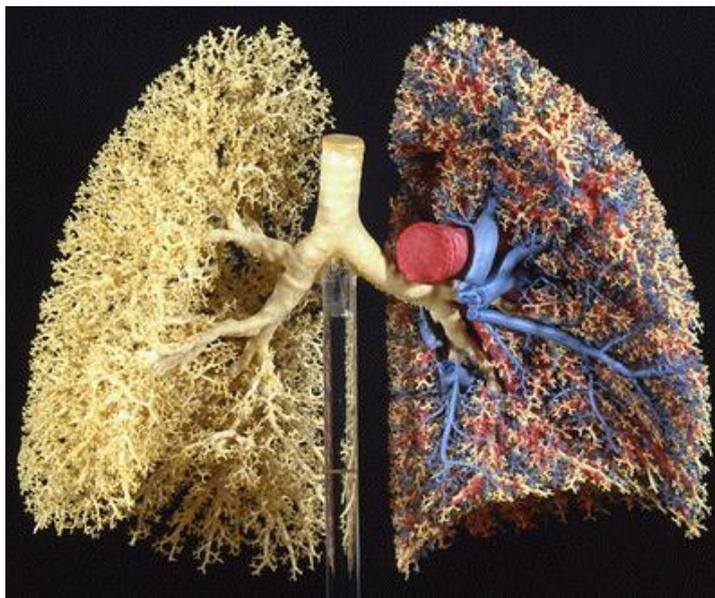
A analogia acima permite a produção de um modelo computacional, portanto algorítmico, semelhante ao objeto natural, o que facilita o entendimento de suas características e explica – com base no rendimento máximo de suas funções – o motivo de tal estrutura ter determinado formato.

Vários órgãos do corpo, bem como a atividade de algumas partes das plantas, estão relacionadas diretamente ao formato adquirido ao longo da evolução dessas espécies. As células do intestino, por exemplo, possuem microvilosidades que se mostram semelhantes a alguns fractais, como a curva de Koch. O modo de como estas microvilosidades intestinais estão dispostas, potencializa o nível de absorção de nutrientes para o interior da célula devido à relação entre o volume ocupado pelo órgão e a área potencializada, por esta rugosidade, em contato com as substâncias a serem absorvidas.

Analisando os vasos sanguíneos e toda sua capilaridade, observamos em sua estrutura a natureza fractal de suas ramificações e, como tal, aparentemente tendendo a um crescimento infinito; assim, apesar do sangue ocupar pouco volume, se comparado ao corpo todo, girando em torno dos 5 %, a maioria das células mantêm uma distância mínima de um vaso sanguíneo como forma de garantir uma máxima eficiência durante essa irrigação.

Numa analogia, o mapa destas ramificações sanguíneas, por exemplo de um pulmão, como mostrado na Figura 56, segue os mesmos princípios de eficiência da esponja de Menger, cuja superfície tende seu valor ao infinito e o seu volume a zero

Figura 56 – Vasos sanguíneos de um pulmão humano



Fonte: www.google.com.br

7.4 ECONOMIA

O mercado financeiro é outro campo de aplicação da geometria fractal, iniciado a partir da descoberta, por Mandelbrot, de que as flutuações do preço do algodão, por exemplo, obedeciam a uma lei de potência. Tal ideia descreditava dois dos maiores dogmas da economia ortodoxa: as variações dos preços como estatisticamente independentes e a ideia da obediência a uma distribuição normal.

Mandelbrot (2004) afirma que um objeto ou padrão fractal é algo cujas partes ecoam do todo, mudando de escala – para cima ou para baixo – com base numa razão ou potência constante. Partindo disso, ele observa que o mercado possui memória de curto e longo prazo e que experiências anteriores exercem influência sobre as decisões presentes servindo de subsídios para avaliações quanto aos riscos de investimentos futuros. Sob o ponto de vista dos fractais, é correto considerar que a análise de gráficos sob esta ótica busca antecipar movimentos de alta ou baixa das cotações, com a avaliação tendo como base comportamentos passados que se replicam ao serem analisadas as linhas de tendência dessas cotações.

De forma resumida, esta análise contrapõe-se à hipótese do mercado eficiente que defende, baseado na não homogeneidade dos investimentos, um desequilíbrio e uma volatilidade desse mesmo mercado; o que afirma que os interesses mercadológicos por serem heterogêneos, exercem impactos diferentes no resultado de cotações.

Ao fazer a análise de mercado sob a ótica fractal, Mandelbrot (2004) instrui que, para a construção dessa análise, é necessário estabelecer um indicador através de uma forma geométrica simples; a seguir, criar um gerador pelo qual o fractal será formatado e definir uma regra de recursão que irá projetar dados ou parâmetros para essas projeções; o autor sugere que tais indicadores apresentam uma turbulência, na maioria das vezes, destrutiva.

A principal conclusão a que se chega ao analisarmos alguns trabalhos como os de Mendonça Neto (2014) é que estudos mercadológicos que se utilizam de ideias e conceitos fractais para gerar uma previsibilidade ou uma justificativa para seus resultados mostram que existem evidências suficientes para acreditar na fractalidade da economia, em especial a do mercado financeiro, principalmente quando o objetivo é fazer análises de séries temporais.

7.5 GEOLOGIA

Tendo por característica primeira, permitir uma descrição e um modelo matemático para formas complexas produzidas pela natureza, a geometria fractal é ferramenta fundamental para uma análise mais concreta acerca de objetos geológicos como redes hidrográficas, fraturas, lineamentos, estruturas de minerais, elaboração de mapas, mensuração de superfícies irregulares – como linhas costeiras e outras – cujas descrições se darão com maior propriedade mediante à utilização dos termos e dimensão fractais – conceitos estes mais indicados para tais análises.

Dentro da geologia, encontramos especialidades que trabalham com maior frequência os conceitos fractais; como a sedimentologia que ao fazer análises nas medidas sedimentológicas, devido à dificuldade de encontrar formas pré-definidas que se encaixem às formas produzidas pela natureza, acabam por utilizar a modelagem fractal destes segmentos valendo-se do cálculo de sua dimensão, técnica que se mostrou muito apropriada e cuja contribuição trouxe avanços significativos para estudos e comparações das classes morfológicas dessas estruturas.

O estudo das Deformações Crustais, por sua vez, mostra-se promissor à luz dos fractais; pois, é possível agora entender, com uma maior riqueza de detalhes, o deslocamento numa zona de uma falha principal, bem como a sua distribuição por toda uma região vizinha; podendo assim, traçar um paralelo entre a dimensão fractal da fratura principal e a dimensão fractal das outras geradas por ela e assim estabelecer uma previsibilidade de comportamento de tais fenômenos.

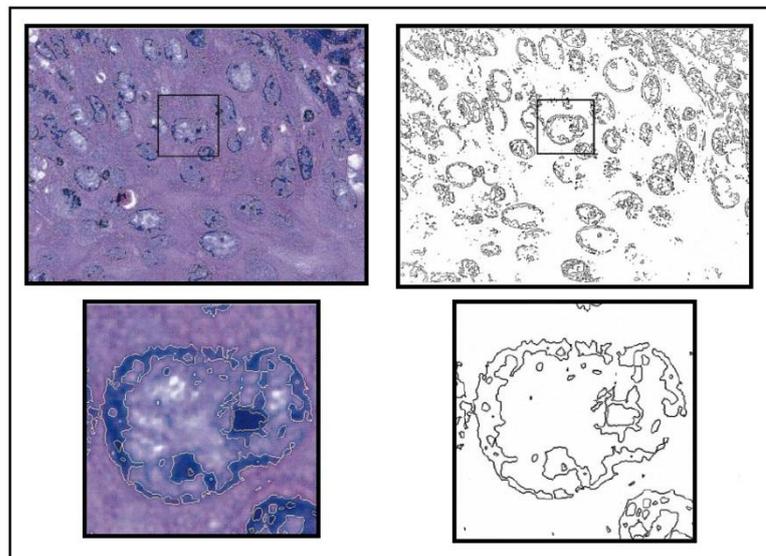
Muitos outros exemplos, conforme os acima citados, poderiam ser encontrados em áreas afins como geofísica, geoquímica, geoestatística; na análises de redes de fraturas e estudo dos solos; todos eles tendo seus objetos estudados à luz das teorias fractais.

7.6 MEDICINA

Em medicina, a geometria fractal é utilizada principalmente na análise morfológica celular, para a identificação de oncogêneses ou células que apresentem qualquer dismorfismo com as demais. Tal análise tem por base o cálculo da dimensão fractal de uma amostra de tecido, cuja imagem passa por um tratamento até a possível visualização de forma monocromática e sua dimensão fractal possa ser calculada através do método da contagem de caixas, comparando-a com a dimensão de células sadias do mesmo tecido.

De acordo com Sedivy (1999), as evidências observadas sugerem que os tumores cancerosos têm dimensão fractal superior à dos tecidos normais, como mostrado na Figura 57.

Figura 57 - Detecção de núcleos atípicos



Fonte: SEDIVY (1999)

Para a amostra em questão, foi observado que os núcleos atípicos têm dimensão fractal 1,47 e que os núcleos de controle apresentaram dimensão 0,97, tal discrepância é apresentada na maioria das amostras.

Percebe-se que o conhecimento das estruturas fractais dos vários tecidos e sistemas do corpo humano ainda é um campo muito amplo e promissor, aberto a novas pesquisas; porém, os resultados desse estudo já nos permite caracterizar o homem e sua

estrutura física como um ser fractal e dizer que tais estudos estão cada vez mais próximos de unir as experiências *in vitro* dos resultados *in vivo*.

7.7 TECNOLOGIA

Loren Carpenter, um dos fundadores da Pixar, trabalhava no departamento de computação da Boeing, em Seattle, na década de 70 e recebeu a missão de elaborar uma paisagem 3D para ilustrar como aviões ficam durante o voo. Loren e a equipe de engenharia da Boeing estavam frustrados com o padrão de animação existente, pois não lhes permitia a possibilidade de fazer um cenário montanhoso realista.

Em 1978, durante uma visita a uma loja de livros, Loren se deparou com uma obra que mudaria para sempre a computação gráfica: o trabalho publicado por Benoit Mandelbrot intitulado de “Objetos Fractais, Formas, Acaso e Dimensão”. Na obra, o autor dizia ser possível criar um fractal a partir de uma figura, partindo-a em pedaços repetidas vezes. Durante três dias ininterruptos, Loren dedicou-se a compreender as teorias contidas no livro de Mandelbrot; e, a partir delas, construiu os cenários gráficos para a publicidade da Boeing utilizando-se de formas de iterações de imagens, seguindo os princípios de construção dos fractais (Figura 58)

Figura 58 – Paisagem criada a partir de conceitos fractais



Fonte: www.google.com.br

Mais tarde, Loren foi convidado a trabalhar na divisão de computação gráfica da Lucas filme, onde criou a paisagem do planeta Genesis do filme “Jornada nas estrelas II, A Ira de Khan”. Foi o primeiro filme futurista criado por computador.

A geometria fractal tem servido de suporte para muitos avanços tecnológicos. A exemplo disso, citamos um problema que só cresce com o desenvolvimento da comunicação sem fio: a antena. Objeto de simples aparência que, teoricamente, com o desenvolvimento de várias tecnologias acopladas a um único aparelho, torna-se ferramenta indispensável a uma boa comunicação.

Mesmo as mais modernas antenas, eram dependentes de apenas um único fio condutor capaz de absorver uma infinidade de frequências, desde a recepção de sinais de operadoras diferentes, sinais de internet, GPS, Rádios AM e FM, dentre outros.

Para solucionar esse problema, empresas de telefonia móvel investiram em tecnologia capaz de implantar, em uma única antena, a recepção de todos os sinais necessários aos novos aplicativos e funções a que se propunha o equipamento. O resultado destes investimentos resultou em um novo formato de antena que conseguiu absorver esta gama de sinais e que, para a surpresa de muitos, tinha o formato fractal como mostra a Figura 59.

As antenas em formato fractal têm seguido padrões de figuras já conhecidas como: fios dobrados seguindo a forma da curva de Koch ou triângulos e tapetes de Sierpinski. A sua forma “irregular” gera capacitância e indutância adicional, proporcionando um aumento da largura de banda de frequências processadas pelo equipamento. Além disso, o desempenho da antena fractal é 25 % maior se comparado ao das antenas comuns.

Figura 59 – Antena Fractal

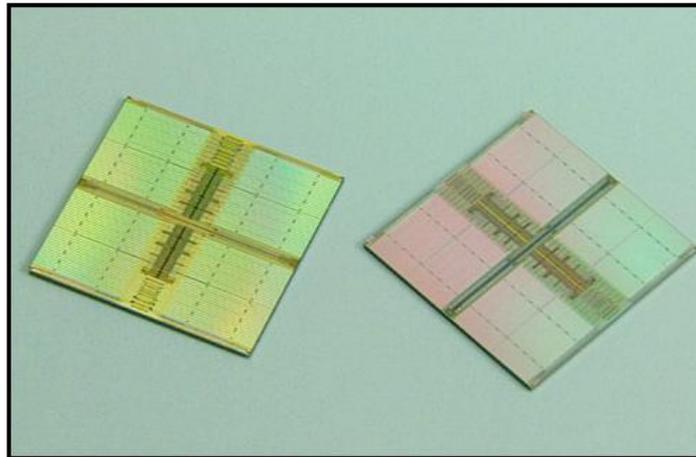


Fonte: www.google.com.br

As memórias para aparelhos de telefonia móvel, também ganharam em sua estrutura, uma distribuição de seus circuitos que se assemelha ao tapete de Sierpinski (Figura 60). Este formato garante uma maior velocidade de comunicação entre os núcleos que

compõem esta peça, passando dos antigos 12.8 Gbps para 102,4 Gbps. Isso significa um aumento na velocidade de, aproximadamente, nove vezes mais do que a suportada pelas memórias antigas, a explicação disso é que as memórias modernas possuem 512 conectores e as antigas, apenas 32. Outro fator positivo é que essa disposição entre núcleos, otimiza a transferência de dados e consome em média 87% a menos de energia.

Figura 60 - Memória para celular com



Fonte: www.google.com.br

Outro exemplo é o misturador de fluidos que, com um consumo mínimo de energia, mistura dois fluidos diminuindo a turbulência e potencializando o resultado do processo.

Encontramos na meteorologia a contribuição dos fractais na classificação de nuvens, quanto ao tipo de precipitação que se forma, apenas observando sua dimensão fractal.

Além dos exemplos aqui apresentados, poderíamos ainda citar suas aplicações na astrofísica, física, estatística, urbanismo, engenharia, compressão de imagens, arte visual, música e outras.

Enfim, como percebemos, a aplicação da geometria dos fractais ainda é um campo cuja aplicabilidade total ainda não foi medida, dado o seu grande potencial nas mais heterogêneas áreas.

8 USANDO OS FRACTAIS EM SALA DE AULA

O processo de investigação tem sido uma ferramenta essencial à eficácia da aprendizagem de conceitos matemáticos. A educação matemática, por muito tempo, baseou-se

apenas em treinos de algoritmos; geralmente sem ocupar-se de discussões ou reflexões acerca dos motivos que levaram os procedimentos adotados à exatidão de seus resultados, de modo que, os professores restringiam-se apenas à comunicação dos resultados sem realizar uma análise crítica ao método aplicado ou aos valores obtidos por ele.

O aluno, por sua vez, mantinha-se passivo durante essa “transferência” de informações, sujeito a uma relação hierárquica onde o mestre detinha o conhecimento e o método, cabendo a ele, estudante, ser relegado ao posto de mero receptáculo de tais conhecimentos; fazendo jus a palavra a que era chamado: aluno, do latim *alumnus*, que significa “criança de peito, lactente”. A ideia do termo sugere “aquele que está sendo nutrido ou criado”, visto que *alumnus* é o particípio substantivado do verbo latino *alere*, que quer dizer “alimentar” ou “nutrir” o que absorve o sentido de “discípulo”. De qualquer maneira, o termo aluno sugere o ato de ser alimento com sabedoria por outro que possui este conhecimento, no caso, o professor, figura inquestionável e inabalável em seus métodos.

Os exercícios propostos por esses professores desempenhavam apenas o papel de repetição de procedimentos gerando assim uma extrema preocupação com a eliminação do erro: ao aluno, não lhe era permitido discutir a questão, pois ou a mesma estava certa em absoluto ou errada por completo. O uso contínuo e repetitivo de métodos como esse acarreta prejuízos irreparáveis ao ensino da matemática, castrando o espírito investigativo do aluno e, ao podar-lhe isso, impede o desenvolvimento e a elaboração de diferentes estratégias e raciocínios.

Nessa perspectiva, torna-se necessária a existência de novos métodos e estratégias que oportunizem ao aluno o protagonismo de sua própria aprendizagem; usando, para isso, métodos investigativos, experimentais, tecnológicos e inovadores que despertem no estudante a curiosidade e, por conseguinte, o interesse em aprender cada vez mais. Nessa ótica, o professor assume funções outras que vão além do simples papel de facilitador. Sua maior incumbência agora é a de problematizar, é a de propor desafios que levem o aluno a participar ativamente da construção do conhecimento; sua atuação passa a ser, então, vital na condução da investigação e na “produção” do conhecimento.

Segundo Brasil (2001), é objetivo do ensino da matemática “identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática.” A leitura destaca ainda a importância de aspectos que estimulem, no aluno, o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver situações que envolvam problemas matemáticos.

O uso da investigação como ferramenta para o desenvolvimento de conceitos, é estudado por autores como Ponte, Mason, Ernest e Godenber; todos defensores da importância de métodos como esse para garantir o protagonismo necessário à aprendizagem. Ponte (2005) cita que “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações”.

Sendo assim, com o objetivo de desenvolver o raciocínio dedutivo e intuitivo através da experimentação e investigação, utilizaremos esta parte de nosso trabalho para apresentar sugestões de aulas referentes a tópicos da matemática estudados que ora encontram-se inseridos no currículo da Educação Básica, cuja ferramenta principais para o desenvolvimento das habilidades propostas sejam atividades desenvolvidas com objetos e conceitos fractais em parte adaptadas de Gomes (2010) e Barbosa (2005) e outras elaboradas no decorrer deste trabalho.

O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos - teorias matemáticas - evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso a Estatística e a Probabilidade e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais. (BRASIL, 1998)

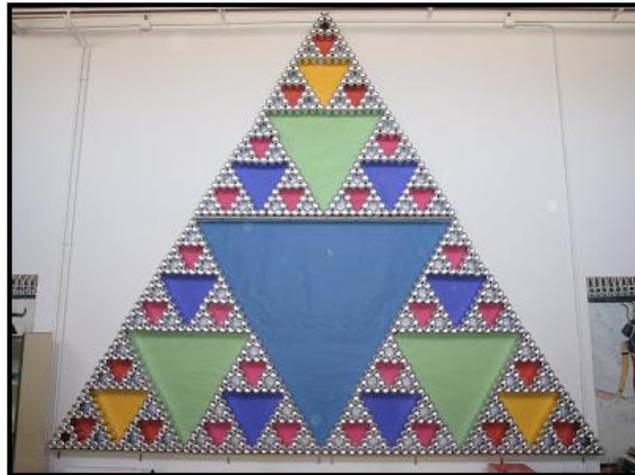
De início, sugerimos que, ao propor uma atividade que envolva a geometria dos fractais, o professor aproxime dos seus alunos o conteúdo a ser visto através de uma contextualização histórica dos fatos matemáticos envolvidos na criação dessa nova geometria.

Após uma rica aula que apresente ao estudante a importância dos fatos inerentes à essa teoria, podemos passar a explorar cada um dos “monstros matemáticos” como: conjunto de Cantor, a curva de Peano, a curva de Hilbert, a curva e a ilha de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski, a pirâmide de Sierpinski e a esponja de Menger.

Para as séries finais do ensino fundamental II, podemos trabalhar a construção geométrica do conjunto de Cantor, a ilha de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski até determinada iteração. O exercício, do ato de desenhar essas figuras em papel milimetrado, proporciona o desenvolvimento de outras aptidões como o controle da coordenação motora fina, o uso correto da régua e suas medidas, a projeção geométrica de uma regra de recorrência, dentre outras habilidades.

A Criação de modelos, utilizando cartolina colorida e outros materiais (Figura 61), é outra atividade que podemos exercitar com turmas do ensino básico para desenvolver ideias e temas como: reciclagem de material, arte matemática, observação da recorrência que cria tal figura, escala e complexidade do objeto e outras mais.

Figura 61 - Triângulo de Sierpinski criado a partir de material reciclado



Fonte: www.google.com.br

Após a construção dessas figuras, podemos passar a explorar conceitos de perímetro e área na elaboração, por parte dos alunos, de uma tabela que informe, com o passar das iterações (níveis), o valor pedido como, por exemplo, a Tabela 10 que servirá de ferramenta para explorarmos o triângulo de Sierpinski até o nível 3, podendo ainda ser utilizada para explorar a ilha de Koch e o tapete de Sierpinski.

Tabela 10 – Explorando o Triângulo de Sierpinski

Nível	Número de triângulos	Comprimento de cada lado do triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total	Área de cada triângulo	Área total
0	1	1	3	3	$1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1						
2						
3						

Fonte: Elaborado pelo autor

Em séries do ensino médio, ao explorar a Tabela 10 (perímetro e área), podemos sugerir ao aluno que tente generalizar uma regra para a obtenção de tais medidas para um nível N qualquer, observando a série de resultados experimentais.

Realizada essa atividade, outra sugestão seria a de promover uma discussão acerca dos limites das funções; questionando aos alunos, por exemplo, sobre o comportamento dessa série de observações a partir do crescimento do número de iterações apresentadas e, a posteriori, concluir o estudo com uma reflexão que suscitasse outros questionamentos, até que os alunos percebessem, na atividade, a ideia de infinito.

Para a aplicação dos logaritmos, podemos utilizar em sala, o cálculo da dimensão fractal pelo método da contagem das caixas. Antes, é preciso que o professor faça um breve apanhado dos conceitos de dimensão euclidiana e dimensão fractal; explicando o que representa essa dimensão não inteira, seu significado e suas aplicações. Podemos pedir ainda que os alunos criem objetos fractais e procedam o cálculo da dimensão com a construção de grades em escalas diferentes ou podemos predefinir algum objeto, como por exemplo: apresentar ao aluno a Figura 62 que representa o mapa da ilha de Fernando de Noronha em diversas malhas quadrículas de diferentes escalas ou a Curva de Koch utilizando o mesmo princípio (Figura 63).

Figura 62 – Mapa da Ilha de Fernando de Noronha em diversas malhas quadriculadas

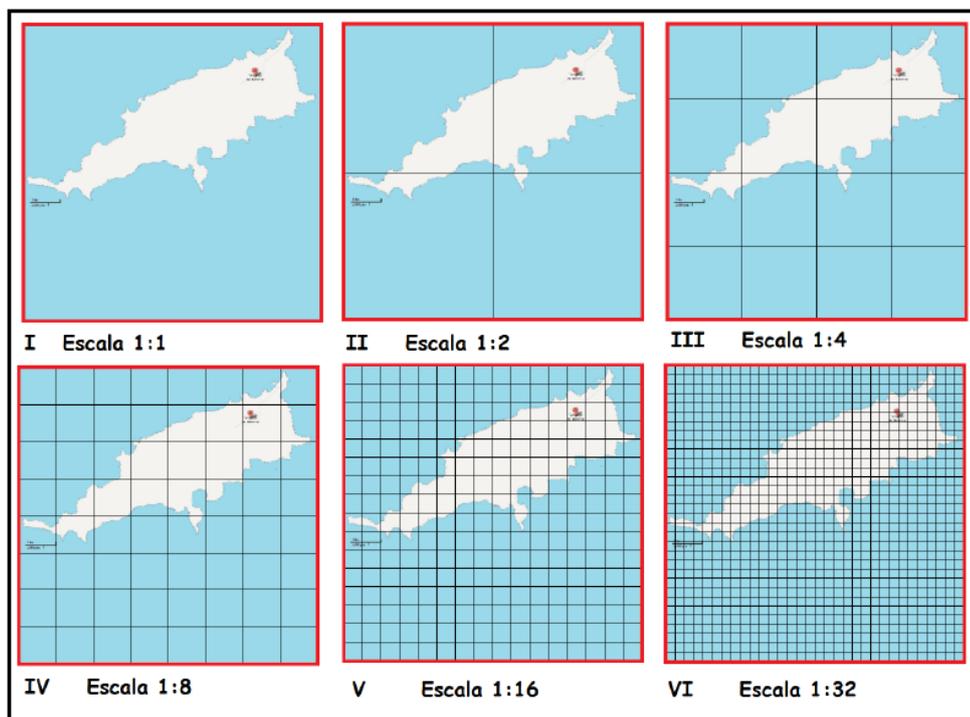
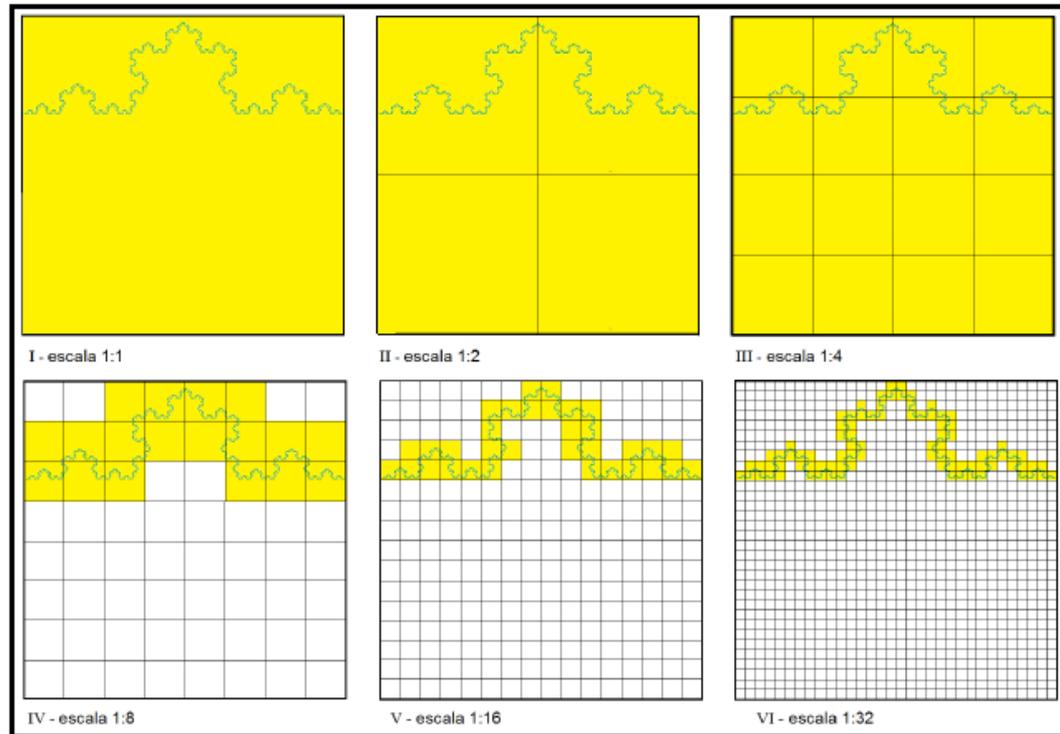


Figura 63 – Curva de Koch em diversas malhas quadriculadas



Fonte: RABAY (2013)

Após explicar o método para obtenção do valor da dimensão fractal dessas figuras, podemos sugerir a construção da Tabela 11.

Tabela 11 – Explorando a Dimensão Fractal

Escala 1:R	Log R	Quantidade de Quadrados com alguma parte do mapa (N)	Log N	$D = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}R}$
2				
4				
8				
16				
32				

Fonte: Elaborada pelo autor

Vários aplicativos e programas para a geração e análises de fractais foram desenvolvidos nos últimos anos, essa ferramenta pode ser incorporada às aulas como meio de

proporcionar uma maior aplicabilidade dos recursos tecnológicos ofertados à construção do conhecimento.

Outras atividades, envolvendo a geometria fractal, podem ser aplicadas especificamente para o ensino médio por tratarem de tópicos como probabilidade, progressão geométrica, progressão aritmética e volume de sólidos; sempre utilizando os fractais clássicos ou fractais criados pelos próprios alunos.

Das sete competências e 30 habilidades descritas na Matriz de Referência do novo ENEM, a partir de 2009, referentes à matemática e suas tecnologias, podemos observar que, em muitas delas, pode-se utilizar a geometria fractal e seus conceitos como ferramenta de construção e significação destes conhecimentos. Tomando como exemplo apenas as competências, nota-se que boa parte dos objetivos traçados para elas, geram habilidades a serem desenvolvidas nos exercícios de tópicos da geometria dos fractais.

Competência 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela. Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação. Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. (ENEM, 2009)

Ao iniciar o trabalho com os fractais, o professor perceberá que muitos outros conteúdos podem e devem ser trabalhados aplicando esses conceitos e que a apresentação de fatos curiosos voltados à aplicabilidade destes tópicos deve despertar no aluno um maior interesse por esses e outros fatos matemáticos.

A propagação de ideias como essa, precisa se dá com maior veemência, afim de que a matemática possa se reinventar em si mesma sem, no entanto, perder o rigor dos seus métodos e sem deixar de buscar uma abordagem mais construtivista, tornando-se assim mais acessível e atualizada aos novos padrões de qualidade educacional.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos este trabalho, buscando alcançar dois objetivos: o primeiro deles, com o intuito de apresentar – de forma didática – o resultado de uma extensa pesquisa bibliográfica acerca do tema; e o segundo, cuja finalidade era a de mostrar as possibilidades de aplicação dos conceitos da geometria dos fractais em diversas áreas do conhecimento, inclusive na área educacional.

Por tratar de conceitos relativamente novos, a apresentação da geometria dos fractais, em sala de aula, revela ao aluno e ao professor que a matemática, apesar de ser uma ciência exata, não está totalmente acabada; evidenciando a cada nova descoberta ou advento a sua capacidade de surpreender e inovar. De um modo especial, ao tratar do tema em questão quando a facilidade em compreender os conceitos ou perceber a semelhança existente entre os diversos elementos gerados a partir de sua forma natural aponta que a matemática estudada tem sua aplicação, provocando, em quem a estuda, uma ampliação da sua visão de mundo.

Concluimos ao observar que o estímulo ao uso de novas tecnologias é capaz de produzir no aluno um maior interesse para os tópicos estudados; que a geometria dos fractais abre novas portas a esses estímulos e que, por isso, devemos ousar e propor, durante as reformas curriculares, a inserção dessa ferramenta organizada de forma didática, com o objetivo pedagógico de ampliar o estudo da matemática básica.

Ao estudar os fractais clássicos e todo contexto que permeava tais descobertas, percebemos o quanto é importante uma contextualização histórica para o entendimento dos fatos e o quanto essa narrativa despertou em nós um interesse em estudá-los. O mesmo deslumbramento pode ser percebido no olhar do aluno quando o situamos historicamente a cerca dos conteúdos explorados.

Algumas dificuldades foram encontradas no decorrer do percurso da elaboração deste trabalho. Dentre elas, citamos as dificuldades relacionadas à aquisição de material bibliográfico, em virtude da escassez de obras escritas em língua materna, fato superado, em parte, com pesquisas em literatura estrangeira.

É preciso ressaltar que, muito embora se tenha uma quantidade significativa de trabalhos acadêmicos relacionados ao tema, muitos deles se detêm à apenas a parte clássica da geometria dos fractais, sem apontar um aprofundamento maior de sua aplicabilidade, principalmente quando o objetivo é adequar o tema à sala de aula.

Outro desafio vivido na construção desta pesquisa foi a dificuldade em encontrar orientadores que tivessem certa vivência com os conceitos a serem trabalhados, dado o tema ser relativamente novo.

Esperamos seguir nesta linha de pesquisa com o objetivo de descobrir novos recursos e aplicações da geometria dos fractais nas diversas ciências, bem como seu uso em sala de aula. Acreditamos ter contribuído para a difusão do tema, acrescentando pormenores a uma área que ainda carece de muita pesquisa e interesse, principalmente do setor acadêmico educacional. Esperamos com este trabalho ter somado ideias e servido de ponto de apoio para outros estudiosos que venham a desenvolver tal tema ou temas correlatos a esse.

Ao final, conseguimos absorver a essência do pensamento de Barnsley (1988), quando este afirma que “A geometria fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma.”

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, R. M. **Descobrimos a Geometria Fractal - Para a sala de aula**. Autêntica, Belo Horizonte, 2005.
- BARNESLEY, M. **Fractals everywhere**. Academic Press, Nova York, 1988.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília, 1997.
- _____, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. MEC/SEF, Brasília, 2001.
- COMMANDINO, F. **Elementos de Euclides**. Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1855.
- ENEM 2009 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <<http://www.enem.inep.gov.br/>>. Acessado em outubro de 2015.
- FALCONER, K. **Fractal geometry – mathematical foundations and applications**. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.
- FREITAS, C. **O infinito. Technical report, Popularização da matemática**. Núcleo de estágio da EB 2,3, Rio Grande do Sul, 2008.
- GOMES, Antônio do Nascimento. **Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhança de Figuras Planas**. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.
- IEZZI, G, et al. **Fundamentos da matemática elementar. Volume 4**. Atual, São Paulo, 1977.
- JANOS, M. **Geometria Fractal**. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008.
- LIMA, E. L, et al. **A matemática do ensino médio: volume 1** - Coleção professor de matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- _____, E. L, et al. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- _____, E. L. **Análise real: volume 1** – Coleção matemática universitária. 11ª ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. Freeman. New York, 1982.
- _____, B. P. **Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão**. Gradiva, Lisboa, 1991.

_____. B. B.; HUDSON, R. **Mercados financeiros fora de controle: a teoria dos fractais explicando o comportamento dos mercados**. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. Elsevier, Rio de Janeiro, 2004.

MENDONÇA NETO, J. N. **Fractais e redes neurais artificiais aplicados a previsão de retorno de ativos financeiros brasileiros**. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014

MOREIRA, I. C. **Fractais. Complexidade e Caos. Rio de Janeiro**. Editora UFRJ/COPEA, Rio de Janeiro, 2003.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto 2006.

PONTE, J. P., BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.: Autêntica, Belo Horizonte, 2005.**

RABAY, Y. S. F. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2013.

SEDIVY R, WINDISCHBERGER C.H, SVOZIL K.et al: **Fractal analysis: an objective method for identifying atypical nuclei in dysplastic lesions of the cervix uteri**. Gynecol Oncol, 1999.

VOSS, R. **Random Fractals: Characterization and measurement**. R. Pynn and A. Skjeltorps, **Scaling Phenomena in Disordered Systems**. Plenum, New York, 1985.