



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

JOÃO HELTON MENDONÇA GONÇALVES

**A IGUALDADE DO PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO ENTRE LINHAS E
COLUNAS DOS QUADRADOS MÁGICOS INVARIANTES**

FORTALEZA - CEARÁ

2015

JOÃO HELTON MENDONÇA GONÇALVES

A IGUALDADE DO PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO ENTRE LINHAS E COLUNAS
DOS QUADRADOS MÁGICOS INVARIANTES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

FORTALEZA - CEARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Gonçalves, João Helton Mendonça.

A igualdade do produto escalar euclidiano entre linhas e colunas dos quadrados mágicos invariantes [recurso eletrônico] / João Helton Mendonça Gonçalves. 2015.

1 CD-ROM: il.; 4 $\frac{3}{4}$ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 77 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Quadrados Mágicos. 2. Álgebra. 3. Espaços Vetoriais. 4. Matrizes. 5. Produto Escalar. I. Título.


JOÃO HELTON MENDONÇA GONÇALVES

A IGUALDADE DO PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO ENTRE LINHAS E
COLUNAS DOS QUADRADOS MÁGICOS INVARIANTES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 03/12/2015

AVALIAÇÃO



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
(Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Alberto Flávio Alves Aguiar
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes
Universidade Federal do Ceará – UFC

Aos que sentem necessidade de entender como as coisas funcionam.

AGRADECIMENTOS

Aos professores deste mestrado pela paciência e dedicação ao curso.

Ao meu orientador pela sábia experiência e pela visão crítica do trabalho.

Aos demais professores, amigos e familiares, pois seus ensinamentos foram a base para que eu fizesse este curso.

Aos colegas de curso pelo incentivo mútuo e pela valorosa ajuda nas resoluções de questões.

“Duas coisas são infinitas: o universo e a estupidez humana. Mas, no que diz respeito ao universo, ainda não adquiri a certeza absoluta.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Os *quadrados mágicos* têm sido objeto de estudo dos matemáticos ao redor do mundo por muito tempo. Esta dissertação faz uma breve contextualização histórica do assunto no primeiro capítulo, chegando a abordar definições iniciais, alguns métodos de obtenção e o uso dos *quadrados mágicos* como método de criptografia. No segundo capítulo, são estabelecidas as definições formais de alguns tipos especiais de *quadrados mágicos*, são demonstradas algumas propriedades algébricas e aritméticas sob a visão da *Álgebra Linear* e da *Teoria dos Números*. A definição de quadrado mágico invariante é então estabelecida. Além disso, como objetivo principal, são demonstradas as proposições envolvendo a igualdade do produto escalar euclidiano entre linhas ou colunas dos quadrados mágicos invariantes de ordem n .

Palavras-chave: Quadrados Mágicos. Álgebra. Espaços Vetoriais. Matrizes. Produto Escalar.

ABSTRACT

Magic Squares has been studied by mathematicians around the world since a long time ago. This paper makes a brief historical background of the subject in the first chapter, coming to approach initial definitions, some filling methods and the use of *magic squares* as the encryption method. In the second chapter, formal definitions of some special types of magic squares are shown, some algebraic and arithmetic properties are demonstrated in the view of *Linear Algebra* and *Number Theory*. The definition of invariant magic square is settled down. Furthermore, as main object, propositions about the equality of Euclidean scalar product between rows and columns of the invariant order n *magic square* are demonstrated.

Keywords: Magic Squares. Algebra. Vector Spaces. Matrices. Scalar Product.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Lo-shu: um dos primeiros quadrados mágicos que se tem registro	15
Figura 2	Chaves do alfabeto maçônico	23
Figura 3	Palavra "quadrado" usando alfabeto maçom	24
Figura 4	Chaves do alfabeto maçônico com senha	25
Figura 5	Palavra "quadrado" usando alfabeto maçom com senha	25
Figura 6	Palavra "quadrado" disposta em um quadrado mágico	25
Figura 7	Visualização da forma gráfica da simetria do corolário 1	34
Figura 8	Ângulo θ formado entre os vetores das duas primeiras linhas de A	59
Figura 9	Ângulo θ' formado entre os vetores das duas últimas linhas de A	60
Figura 10	Triângulo determinado pela origem O e pelos vetores u e v	60
Figura 11	Triângulo determinado pela origem O e pelos vetores u' e v	61
Figura 12	Triângulo formado pelos pontos cujas coordenadas são as colunas de A	64
Figura 13	Triângulo formado pelos pontos cujas coordenadas são as linhas de A	64
Figura 14	Centro de massa - CM para duas partículas	71
Figura 15	Quadrado mágico de ordem n disposto no plano cartesiano	72

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 CONTEXTO HISTÓRICO	15
2.1 UM BREVE LEVANTAMENTO HISTÓRICO	15
2.2 ALGORITMOS DE GERAÇÃO DE QUADRADOS MÁGICOS	17
2.2.1 Geração de quadrados mágicos normais de ordem ímpar	17
2.2.2 Geração de quadrados mágicos normais de ordem par não divisível por 4	19
2.2.3 Geração de quadrados mágicos normais de ordem par divisível por 4	22
2.2.4 O alfabeto maçônico e a codificação de mensagens usando quadrados mágicos .	23
3 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DOS QUADRADOS MÁGICOS	27
3.1 PROPRIEDADES DOS QUADRADOS MÁGICOS	27
3.1.1 Quadrado mágico de ordem n	27
3.1.2 Lema 1	27
3.1.3 Lema 2	28
3.1.4 Corolário	29
3.1.5 Teorema 1	29
3.2 PROPRIEDADES DO QUADRADO MÁGICO NORMAL	30
3.2.1 Teorema 2	30
3.2.2 Quadrado mágico normal de ordem n	32
3.2.3 Teorema 3	33
3.2.4 Lema 3	33
3.2.5 Corolário 1	34
3.3 PROPRIEDADES DO QUADRADO MÁGICO INVARIANTE	35
3.3.1 Quadrado mágico simétrico de ordem n	35
3.3.2 Quadrado mágico invariante ordem n	37
3.4 PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO ENTRE LINHAS E COLUNAS DE UM QUADRADO MÁGICO	41
3.4.1 Proposição 1	41
3.4.2 Proposição 2	43
3.4.3 Demonstração da Proposição 1	46
3.4.4 Proposição 3	50

3.4.5 Demonstração da Proposição 3	52
3.4.6 Proposição 4	54
3.4.7 Demonstração da Proposição 4	55
3.4.8 Corolário 2	57
3.4.9 Corolário 3	62
3.4.10 Corolário 4	63
4 APLICAÇÕES E CORRELAÇÕES DO TEMA	68
4.1 APLICAÇÃO DO TEMA EM SALA DE AULA	68
4.2 CORRELAÇÃO DO TEMA COM A FÍSICA	70
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

Embora se conheça o que é *quadrado mágico* há mais de 4.000 anos, ainda hoje são encontradas novas relações ou propriedades matemáticas envolvendo seus elementos, assim como novos métodos de obtenção de *quadrados mágicos* ainda são desenvolvidos. A validade dessas relações merece uma abordagem matemática objetiva do ponto de vista de demonstrações. Esta dissertação sugere uma demonstração para uma dessas propriedades que conjectura a igualdade do produto escalar euclidiano, ou produto interno, entre duas linhas, ou colunas, e suas duas respectivas linhas, ou colunas, de índice simétrico de *quadrados mágicos* de ordem n . Também é mostrado um resultado análogo envolvendo o produto escalar euclidiano entre uma linha e uma coluna e suas respectivas linha e coluna simétricas. Para tal, as definições dos tipos de *quadrados mágicos*, índices simétricos, além de outros pontos importantes para as principais demonstrações, serão abordados no decorrer desta dissertação. Inicialmente, esta conjectura foi observada e proposta por Stephens (1993) em seu trabalho, que chegou a apresentar alguns exemplos da sua validade, mas não uma demonstração formal.

A grosso modo, um *quadrado mágico* é uma matriz quadrada de ordem qualquer, onde a soma de cada coluna, cada linha e das duas diagonais é uma mesma constante. Como é um assunto antigo, vários tópicos envolvendo *quadrados mágicos* foram sendo desenvolvidos ao longo da história e hoje seus resultados já são conhecidos. Um primeiro aspecto diz respeito à descoberta de novos algoritmos de obtenção dos *quadrados mágicos*. Conforme explicado por Brumgnach (2007), os *quadrados mágicos* podem ser divididos de acordo com sua ordem: existem os de ordem ímpar, os de ordem par divisíveis por 4, e os de ordem par não divisíveis por 4. Ele destaca que, ao longo da história, diversos métodos para se obter *quadrados mágicos* foram desenvolvidos, geralmente funcionando para algum dos três tipos citados. Além disso, Brumgnach (2007) desenvolveu um novo método de geração de *quadrados mágicos* de ordem ímpar chamado de *Gamma plus two*. Ele ainda generalizou um procedimento, proposto por Ralph Strachey em 1918, para gerar *quadrados mágicos* de ordem par não divisível por 4. A este novo método, ele denominou de *Gamma plus two swap* ou método de Brumgnach-Strachey. Para gerar *quadrados mágicos* de ordem par divisível por 4, pode-se usar o método desenvolvido por Albrecht Dürer em 1514. Esta dissertação usará parte da contextualização histórica feita por Brumgnach (2007).

Buscando resultados sobre o tema obtidos a partir da base de conhecimentos do Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, encontram-se duas pesquisas que trabalham o tema sobre *quadrados mágicos* diretamente. Cahu (2013) estudou o algoritmo siamês, ou De La Loubère, que gera *quadrados mágicos* normais de ordem ímpar. Do ponto de vista algébrico, conforme apontado por ele, Euler, em 1782, demonstrou que a soma de dois *quadrados latinos ortogonais* de ordem n geram um *quadrado semimágico* de ordem n . É dito *quadrado*

semimágico, pois a soma das diagonais não é igual à constante mágica. Como resultado principal de seu trabalho, ele mostra que os *quadrados mágicos* de ordem 3 podem ser gerados utilizando a soma de dois desses *quadrados latinos ortogonais*. O trabalho também demonstra como obter o valor da constante mágica dos *quadrados mágicos* normais de ordem n , resultado que novamente será demonstrado e usado nesta dissertação.

Por sua vez, Machado (2013) formaliza o conjunto dos *quadrados mágicos* de ordem n utilizando a estrutura de *espaço vetorial* e mostra como se obter uma base e dimensão para esse tipo de espaço. Ele mostra que, para a ordem $n \geq 3$, o espaço vetorial dos *quadrados mágicos* de ordem n terá dimensão $d = n^2 - 2n$. Por último, ele utiliza o resultado para apresentar uma base para os exemplos onde $n = 3$ ou $n = 4$. Este é um importante resultado, pois sabe-se, da álgebra linear, que qualquer vetor de um espaço vetorial é uma combinação linear dos vetores desta base. Logo, conhecida uma base do espaço vetorial dos *quadrados mágicos* de ordem n , qualquer *quadrado mágico* de ordem n poderá ser determinado através de uma combinação linear dos *quadrados mágicos* desta base. A formalização do conjunto dos *quadrados mágicos* de ordem n como um espaço vetorial também será realizada neste trabalho.

Outra linha de pesquisa sobre o tema é o desenvolvimento de algoritmos de obtenção de *quadrados mágicos*. Assim, nas bases de conhecimento em matemática dos principais centros ou universidades, é comum encontrar referências a trabalhos sobre melhorias nos algoritmos de obtenção existentes, ou sobre a criação de novos métodos. Analisando as informações fornecidas pelo banco de dados de teses e artigos Arxiv (2015), foram encontradas 31 referências sobre o assunto *quadrados mágicos* nas áreas de Matemática ou Ciências da Computação entre os anos de 2003 a 2014. Entre os temas, pode-se observar 6 trabalhos envolvendo algoritmos de construção de *quadrados mágicos*. Outro fato bastante estudado é o problema combinatório da demonstração do quantitativo de *quadrados mágicos* existentes com uma determinada propriedade. Nesse contexto, foram relatados outros 6 trabalhos. Os demais trabalhos tratam de outras interessantes propriedades sobre o assunto.

Partindo do contexto acadêmico e chegando ao cotidiano escolar, é até comum que os alunos já tenham tido contato com *quadrados mágicos* na vida letiva, mesmo que na forma de jogos matemáticos recreativos passados pelo professor. Entretanto, dificilmente são verificadas as demonstrações das propriedades dos *quadrados mágicos*, tampouco são discutidos os diferentes métodos de preenchimento, o que cria uma lacuna no entendimento do motivo dessas propriedades parecerem tão mágicas assim. Dessa forma, a necessidade de demonstrar de maneira formal as propriedades existentes, incluindo a propriedade do título desta dissertação, é evidente. Esse é o ponto de partida, ou principal elemento motivador desta dissertação.

Assim, destaca-se como objeto geral demonstrar algumas das principais propriedades aritméticas e algébricas dos *quadrados mágicos* envolvendo o produto escalar euclidiano. Além disso, para atingir o objetivo geral, ainda podem-se definir como objetivos especí-

ficos desta dissertação: a) formalizar matematicamente algumas definições iniciais importantes acerca do tema; b) propor uma demonstração das propriedades elencadas a respeito do produto escalar euclidiano entre linhas e colunas dos *quadrados mágicos*; e c) discutir formas de possíveis aplicações deste conteúdo em sala de aula como efeito motivador para os alunos.

Como requisito para o entendimento dos conceitos apresentados, é necessário um conhecimento básico sobre matrizes e suas operações, além do conhecimento prévio de progressões aritméticas e geométricas em nível de ensino fundamental. Também será preciso um conhecimento básico de *Álgebra Linear*, sobre o conceito de espaços vetoriais, vetores e produto escalar euclidiano em nível de graduação. Referências para esses temas serão sugeridas como leitura e outras necessidades mais elaboradas serão mostradas de forma mais detalhada no decorrer do próprio texto.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

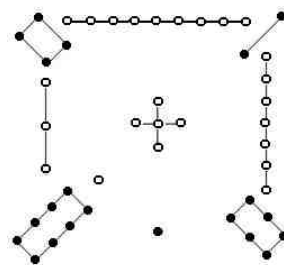
Desde que os homens começaram a desenvolver seu conhecimento científico, seja por necessidade ou por maravilhar-se diante das suas descobertas científicas, houve uma vinculação desses novos conhecimentos ao misticismo ou à religião. Um exemplo bastante apropriado pode ser encontrado na escola pitagórica que, dispensando maiores apresentações de seu mentor, Pitágoras, possuía um caráter quase místico associado ao conhecimento matemático desenvolvido. Assim, conforme aponta Eves (2002, p. 97), os pitagóricos interessavam-se pelos números e suas representações e implicações na natureza, onde a harmonia do universo estaria intrinsecamente ligada às relações entre os números.

É bem verdade que ainda hoje é fácil se vislumbrar com curiosas e instigantes questões matemáticas, muitas das vezes de fáceis definição e entendimento, mas que ainda não possuem demonstrações formais. A área da Matemática conhecida como *Teoria dos Números* está repleta de desafios seculares, por vezes milenares, sem que haja uma sólida resposta para os problemas levantados para o assunto abordado. Entre os vários assuntos antigos que ainda necessitam de mais estudos rigorosos, encontra-se um tipo especial de matrizes conhecido como *quadrado mágico*.

2.1 UM BREVE LEVANTAMENTO HISTÓRICO

Historicamente, tem-se os primeiros registros dos *quadrados mágicos* a partir da matemática chinesa antiga. Conforme destaca Eves (2002, p. 268), o *Livro das Permutações*, ou *I-King*, é um dos livros clássicos antigos chineses. Nele é mostrado um diagrama muito antigo, no qual, por meio de nós em cordas representando os números, é denotado um dos primeiros *quadrados mágicos* que se tem registro. Segundo a lenda, o imperador Yu, em torno de 2200 a.C., viu o casco de uma tartaruga, animal sagrado à época, que lhe havia surgido às margens do rio Amarelo. No casco da tartaruga estava desenhado o diagrama a seguir, conhecido como *Lo-shu*:

Figura 1 – Lo-shu: um dos primeiros quadrados mágicos que se tem registro



Fonte: Elaborado pelo autor.

A imagem acima, onde os números são representados por nós em cada corda, representa o quadrado mágico de ordem 3 a seguir:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

De um modo geral, depois de ver alguns exemplos, tem-se uma ideia intuitiva do que seja um *quadrado mágico*. A seguinte definição é dada por (STEPHENS, 1993, p. 2) para um *quadrado mágico de ordem n*:

"Um *quadrado mágico de ordem n* é uma matriz quadrada de ordem n ou arranjo de n^2 números tal que a soma dos elementos de cada linha e coluna, assim como a diagonal principal e a diagonal secundária, é o mesmo número, chamada de *constante mágica* (ou soma mágica, ou soma-linha), às vezes denotada por $\sigma(M)$. Geralmente, são usados os números naturais de 1, 2, ..., n^2 para os elementos da matriz onde cada número é usado uma única vez; estes quadrados mágicos serão denominados de quadrados mágicos normais."

Com o passar dos séculos e as definições sobre o tema se consolidando, demais povos e culturas se interessaram a respeito dos *quadrados mágicos*, cada uma contribuindo com o avanço nas descobertas de suas propriedades ou apropriando seu uso de acordo com sua cultura. O misticismo, por conta das muitas propriedades matemáticas dos *quadrados mágicos*, também acompanhou o assunto por muito tempo. Destaca-se o seguinte resgate histórico:

Quadrados mágicos aparecem em escrituras gregas de 1300 a.C. No século IX, astrólogos árabes usavam quadrados mágicos na construção de horóscopos. Escrituras indianas do século XI também mencionam que quadrados mágicos foram utilizados para a produção de perfumes e remédios médicos. Por volta de 1300 d.C., o matemático grego Manuel Moschopoulos escreveu um livro sobre a matemática do matemático árabe Al-Buni, através do qual ele introduziu quadrados mágicos para o Ocidente. O médico alemão e teólogo Cornelius Agrippa utilizou quadrados mágicos na astrologia no início de 1500. (BRUMGNACH, 2007)

Entre os matemáticos, cientistas e artistas importantes que trabalharam com *quadrados mágicos*, podem-se destacar, conforme Brumgnach (2007): Claude Gaspar Bachet (1581-1638), Simon de la Loubère (1642-1729), John Faulhaber (1604-1683), Albrecht Dürer (1471-1528) e Benjamin Franklin (1706-1790). Leonhard Euler (1707-1783) também mostrou interesse sobre o tema, chegando até a publicar um trabalho utilizando *quadrados mágicos* que hoje são conhecidos como *quadrados mágicos greco-latinos*.

Ainda observado por Brumgnach (2007), depois de mais de quatro mil anos após o aparecimento do Lo-shu, vários métodos de obtenção foram desenvolvidos, mesmo recentemente, como seu método para se obter *quadrados mágicos* de ordem ímpar conhecido como

método *Gamma plus two*. Segundo Eves (2002, p. 268) e Hospel (2002), atribui-se aos indianos um dos primeiros e mais conhecidos métodos de geração dos *quadrados mágicos* de ordem ímpar, conhecido como método siamês ou método de Loubère. Como exemplo, tais métodos serão descritos a seguir em forma de algoritmo.

2.2 ALGORITMOS DE GERAÇÃO DE QUADRADOS MÁGICOS

2.2.1 Geração de quadrados mágicos normais de ordem ímpar

Adaptando o procedimento descrito por Eves (2002, p. 269) do método siamês ou método de Loubère, tem-se: seja A uma matriz quadrada de ordem n ímpar. Como A é uma matriz quadrada ordem n , logo A terá n^2 elementos. Como deseja-se obter um *quadrado mágico* dito *normal*, a matriz A será preenchida com os inteiros de $1, 2, \dots, n^2$. Dessa maneira, o algoritmo indiano de obtenção de *quadrados mágicos* normais de ordem n ímpar consiste nos passos a seguir:

- a) Na primeira linha de A , localize exatamente o elemento $a_{1,j}$ do meio da linha, onde o índice j será $j = \frac{n+1}{2}$. Nele, preencha o valor 1, como foi feito no exemplo abaixo;

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- b) Então, repita exatamente o procedimento a seguir até que todos os $n^2 - 1$ números restantes tenham sido dispostos: o próximo número a ser preenchido sempre será o elemento logo acima e a direita do último elemento que foi preenchido;
- c) Algumas situações podem ocorrer. Como primeira situação, caso o último elemento que foi preenchido esteja na primeira linha, não se pode ir para um elemento acima deste último, pois o último elemento preenchido já se encontra na primeira linha, então o próximo elemento deverá ser preenchido na última linha. Note que esse caso já acontece logo no preenchimento do número 2, pois o número 1 foi preenchido na primeira linha, conforme passo 1. Nesse caso, o número 2 ficará, lembrando que o segundo movimento é a direita, conforme abaixo;

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

- d) Pode ocorrer também como segunda situação, visto que neste algoritmo, para que um elemento seja posicionado, são sempre necessários dois movimentos (acima e a direita), que o último elemento que foi preenchido se encontre na última coluna de A. Como não existe elemento a direita deste, então o próximo elemento será preenchido na primeira coluna. Esse caso já acontece no preenchimento do número 3, caso A seja uma matrix 3x3. Como o 2 está na última coluna, o 3 será preenchido acima e a direita do 2, indo ser alocado na primeira coluna, como no exemplo:

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \\ 3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

- e) O último caso pode ocorrer quando o local onde for ser preenchido o próximo número já estiver ocupado. Nesse caso, para resolver o problema, deve-se preencher o próximo número diretamente abaixo do último número posicionado anteriormente. Note que esse caso acontece quando se vai preencher o número 4 onde A é uma matrix 3x3. Como o termo acima e a direita do número 3 já está preenchido com o número 1, deve-se localizar o termo abaixo 3 e preencher o número 4, conforme exemplo a seguir;

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \\ 3 & \dots & \dots \\ 4 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

- f) Repetindo os passos a partir do passo c e atentando sempre para as 3 situações descritas, pode-se preencher qualquer matrix A de ordem n ímpar, gerando assim um *quadrado mágico* normal de ordem n. Complementando o preenchimento da matrix 3x3 a partir do número 4, preenchido anteriormente, obtém-se o resultado que se segue.

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \\ 3 & 5 & \dots \\ 4 & \dots & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots & 1 & 6 \\ 3 & 5 & \dots \\ 4 & \dots & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & \dots & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & \dots & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Hospel (2002) apresenta uma análise matemática da validade dos passos descritos no algoritmo de Loubère. Ele também apresenta, como resultado do estudo matemático do algoritmo, uma função que descreve o termo geral a_{ij} para os elementos da matrix de um *quadrado mágico* de ordem n ímpar. Segundo Hospel (2002), o termo geral a_{ij} do método de Loubère pode ser calculado como:

$$a_{ij} = n \cdot ((i + j - 1 + \frac{n-1}{2}) \bmod n) + ((i + 2j - 2) \bmod n) + 1$$

Aproveitando o exemplo da matriz Lo-shu, para verificar a função anterior, seguem duas checagens:

$$a_{31} = 3 \cdot ((3 + 1 - 1 + \frac{3-1}{2}) \bmod 3) + ((3 + 2 \cdot 1 - 2) \bmod 3) + 1 = 3 + 0 + 1 = 4$$

$$a_{33} = 3 \cdot ((3 + 3 - 1 + \frac{3-1}{2}) \bmod 3) + ((3 + 2 \cdot 3 - 2) \bmod 3) + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$$

2.2.2 Geração de quadrados mágicos normais de ordem par não divisível por 4

A construção de *quadrados mágicos* de ordem n par é mais complexa que a de ordem ímpar. Existem métodos específicos para a construção quando a ordem par é divisível ou não por 4. Primeiramente, será mostrado a construção dos *quadrados mágicos* normais de ordem n quando n é da forma $n = 4 \cdot p + 2 = 2, 6, 10, \dots$ com $p = 0, 1, 2, 3, \dots$

Existem vários métodos que podem ser empregados, mas o método escolhido nesta dissertação é creditado a Ralph Strachey. Ele foi escolhido por ser um dos mais simples e usar internamente o método de Loubère, que já foi relatado anteriormente. Assim, segue descrição do método de Ralph Strachey adaptada da descrição de Pickover (2002):

- a) Para $n = 2$, note que não é possível criar um *quadrado mágico* normal de ordem 2. Os números a serem posicionados são 1, 2, 3 e 4. Por exaustão, verificamos a impossibilidade desta construção;
- b) Para $n = 6$, tem-se que a matriz resultante será preenchida com os $n^2 = 36$ primeiros números naturais, pois a matriz é um *quadrado mágico* normal. Segundo o método de Strachey, divide temporariamente de forma gráfica a matriz 6×6 em 4 matrizes quadradas menores de ordem igual a 3×3 . Sejam A, B, C e D tais matrizes. Cada uma dessas 4 matrizes 3×3 será preenchida individualmente pelo método de Loubère, uma vez que possuem ordem ímpar. A matriz A será preenchida com os números de 1 a 9, B de 10 a 18, C de 19 a 27 e D de 28 a 36. Logo as matrizes resultantes ficarão como as seguintes;

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 15 \\ 12 & 14 & 16 \\ 13 & 18 & 11 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 24 \\ 21 & 23 & 25 \\ 22 & 27 & 20 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 35 & 28 & 33 \\ 30 & 32 & 34 \\ 31 & 36 & 29 \end{pmatrix}$$

- c) O próximo passo é compor novamente o *quadrado mágico* de ordem 6×6 juntando as matrizes A, B, C e D. Segundo o método, para juntar essas matrizes, deve-se usar exatamente a disposição seguinte;

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

d) Assim, a matriz Q' de ordem 6×6 gerada será conforme o exemplo que segue;

$$Q' = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\ 3 & 5 & 7 & 21 & 23 & 25 \\ 4 & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\ 35 & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \\ 30 & 32 & 34 & 12 & 14 & 16 \\ 31 & 36 & 29 & 13 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

e) Checando rapidamente a matriz Q' , nota-se que ela não é um *quadrado mágico*. Portanto, ainda existe mais um passo a ser feito. Os elementos mostrados abaixo entre colchetes devem ser permutados de acordo com o próximo passo;

$$Q' = \begin{pmatrix} [8] & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\ 3 & [5] & 7 & 21 & 23 & 25 \\ [4] & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\ [35] & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \\ 30 & [32] & 34 & 12 & 14 & 16 \\ [31] & 36 & 29 & 13 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

f) A permutação será feita de maneira a trocar os elementos correspondentes entre colchetes vermelhos com os elementos entre colchetes verdes. Realizando a troca dos elementos correspondentes, o *quadrado mágico* normal de ordem 6 e constante mágica $\sigma(Q') = 111$ resultante será:

$$\begin{pmatrix} 35 & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\ 3 & 32 & 7 & 21 & 23 & 25 \\ 31 & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\ 8 & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \\ 30 & 5 & 34 & 12 & 14 & 16 \\ 4 & 36 & 29 & 13 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

Repetindo os passos descritos por este método, geram-se *quadrados mágicos* normais para as demais ordens $n = 10, 14, 18, \dots$, mas deve-se tomar cuidado com o último passo referente à permutação de elementos da matriz. A partir de $n = 10$ aparece um padrão adicional na troca de elementos.

No caso $n = 10$, são dois elementos por linha da primeira metade da matriz que são afetados e, além disso, todos os elementos da última coluna são permutados seguindo o mesmo critério de correspondência. Repetindo os mesmos passos iniciais do método para $n = 10$, chega-se à matrix Q'' abaixo, já mostrada com os elementos do padrão de troca demarcados pelos colchetes:

$$Q'' = \begin{pmatrix} [17] & [24] & 1 & 8 & 15 & 67 & 74 & 51 & 58 & [65] \\ [23] & [5] & 7 & 14 & 16 & 73 & 55 & 57 & 64 & [66] \\ 4 & [6] & [13] & 20 & 22 & 54 & 56 & 63 & 70 & [72] \\ [10] & [12] & 19 & 21 & 3 & 60 & 62 & 69 & 71 & [53] \\ [11] & [18] & 25 & 2 & 9 & 61 & 68 & 75 & 52 & [59] \\ [92] & [99] & 76 & 83 & 90 & 42 & 49 & 26 & 33 & [40] \\ [98] & [80] & 82 & 89 & 91 & 48 & 30 & 32 & 39 & [41] \\ 79 & [81] & [88] & 95 & 97 & 29 & 31 & 38 & 45 & [47] \\ [85] & [87] & 94 & 96 & 78 & 35 & 37 & 44 & 46 & [28] \\ [86] & [93] & 100 & 77 & 84 & 36 & 43 & 50 & 27 & [34] \end{pmatrix}$$

Novamente, a permutação será feita de maneira a trocar os elementos correspondentes entre colchetes vermelhos com os elementos entre colchetes verdes. O mesmo será feito com os elementos entre colchetes laranjas e seus correspondentes entre colchetes azuis. O *quadrado mágico* normal de ordem 10 e constante mágica $\sigma(Q'') = 505$ resultante será:

$$\begin{pmatrix} 92 & 99 & 1 & 8 & 15 & 67 & 74 & 51 & 58 & 40 \\ 98 & 80 & 7 & 14 & 16 & 73 & 55 & 57 & 64 & 41 \\ 4 & 81 & 88 & 20 & 22 & 54 & 56 & 63 & 70 & 47 \\ 85 & 87 & 19 & 21 & 3 & 60 & 62 & 69 & 71 & 28 \\ 86 & 93 & 25 & 2 & 9 & 61 & 68 & 75 & 52 & 34 \\ 17 & 24 & 76 & 83 & 90 & 42 & 49 & 26 & 33 & 65 \\ 23 & 5 & 82 & 89 & 91 & 48 & 30 & 32 & 39 & 66 \\ 79 & 6 & 13 & 95 & 97 & 29 & 31 & 38 & 45 & 72 \\ 10 & 12 & 94 & 96 & 78 & 35 & 37 & 44 & 46 & 53 \\ 11 & 18 & 100 & 77 & 84 & 36 & 43 & 50 & 27 & 59 \end{pmatrix}$$

Este padrão, referente à quantidade de elementos por linha e número de colunas do fim de Q'' afetados pelo passo da permutação, permanece o mesmo para as demais ordens. Se $n = 4 \cdot p + 2 = 2, 6, 10, \dots$ com $p = 0, 1, 2, 3, \dots$, é a ordem do *quadrado mágico*, o número de elementos por linha afetados pelo passo da permutação na primeira metade de Q' será $p = \frac{n-2}{4}$ e o número de colunas do fim de Q' que terão seus elementos completamente permutados será de $p - 1$.

De fato, tem-se que para o primeiro exemplo, onde a ordem era 6, alterou-se $p = \frac{6-2}{4} = 1$ elemento em cada linha e não houve nenhuma alteração de uma coluna completa de Q'' , pois $p - 1 = 0$. Para ordem igual a 10, houve permutação de 2 elementos por linha de Q' , e uma coluna inteira também foi permutada.

2.2.3 Geração de quadrados mágicos normais de ordem par divisível por 4

O segundo método para a construção dos *quadrados mágicos* normais de ordem n par será feito quando n é da forma $n = 4 \cdot p = 4, 8, 12, \dots$ com $p = 1, 2, 3, \dots$

Novamente, existem vários métodos que podem ser empregados, mas o método escolhido nesta dissertação é o método conhecido como método da diagonal. Assim, seguem os passos do método adaptado de Pickover (2002, p. 53).

- a) Para a ordem $n = 4$, tem-se que a matriz resultante será preenchida com os 16 primeiros números naturais, pois deseja-se um *quadrado mágico* normal. Será usado este exemplo como ilustração, embora o método seja o mesmo para as demais ordens onde $n = 4 \cdot p$. Assim, segundo o método, escreva a estrutura da matriz do *quadrado mágico* de modo que todos os elementos fiquem em branco, conforme abaixo;

- b) Serão gerados agora 5 sub matrizes quadradas dentro da matriz principal. As 4 primeiras sub matrizes terão ordem $\frac{n}{4}$ e serão demarcadas a partir dos quatro vértices da matriz principal. No caso $n = 4$, essas matrizes terão ordem 1. A quinta sub matriz terá ordem $\frac{n}{2}$ e será demarcada a partir do centro da matriz principal. No caso $n = 4$, a quinta matriz terá ordem 2 e possuirá 4 células. Os elementos de cada matriz estão representados abaixo em formato de X;

X			X
	X	X	
	X	X	
X			X

- c) O próximo passo diz respeito ao posicionamento dos números das células. Comece da maneira usual como se escreve: escrevendo na primeira linha e da esquerda para direita. Conte 1 para a primeira célula, 2 para a segunda e assim

sucessivamente até que a última célula da última linha receba n^2 , mas, neste passo, serão escritos os números apenas nas células internas as 5 sub matrizes, ou seja, as que possuem X preenchido. As demais células devem ficar em branco. Como exemplo para $n = 4$, seguindo o resultado do posicionamento;

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

- d) O último passo visa obter os números referentes às células restantes em branco. Novamente, comece da maneira usual como se escreve. Agora, os números serão contados de n^2 até 1. Preencha as células em branco com os números que ainda não foram usados de n^2 até 1 em ordem decrescente. No exemplo para $n = 4$, note que o número 16 já foi usado, logo a segunda célula da primeira linha receberá o 15, a terceira receberá o 14, e assim sucessivamente. O resultado deste último passo gerará o *quadrado mágico* a seguir:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

2.2.4 O alfabeto maçônico e a codificação de mensagens usando quadrados mágicos

Como outro uso histórico bem peculiar dos *quadrados mágicos*, pode-se apresentar a codificação maçônica de mensagens. Durante certo tempo, os maçons usaram uma representação própria do alfabeto com o intuito de codificar mensagens que queriam esconder seu conteúdo de pessoas não autorizadas. O conjunto desses símbolos, conforme Boucher J. e Barros (1948, p. 80) ficou conhecido como alfabeto maçônico. Uma ilustração da convenção utilizada entre as letras e os símbolos é mostrada abaixo:

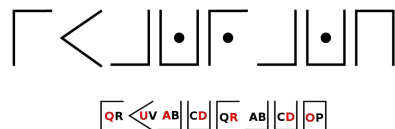
Figura 2 – Chaves do alfabeto maçônico

AB	CD	EF		ST
GH	IJ	KL	YZ	UV
MN	OP	QR		WX

Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, para saber como usar a imagem acima, define-se que cada letra da mensagem que se quer codificar será transcrita pelo desenho do formato do quadrante onde ela se encontra na imagem mostrada anterior. Dessa maneira, como exemplo, pode-se escrever a palavra "quadrado" como sendo a sequência de símbolos a seguir:

Figura 3 – Palavra "quadrado" usando alfabeto maçom



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que cada letra da palavra *quadrado* foi substituída pelo desenho do formato do quadrante onde a letra se localiza na figura 2. Ainda na figura 2, cada quadrante da figura em formato # de está preenchido com duas letras sucessivas. Dessa maneira, para representar a segunda letra de um mesmo quadrante, utiliza-se um ponto dentro do desenho do quadrante, como foi feito para representar as letras *d* e *r* do nome *quadrado* na figura 3. Assim, sabe-se exatamente a que letra o símbolo se refere.

Conforme apontado por Boucher J. e Barros (1948, p. 79), com o passar dos anos, os símbolos do alfabeto maçônico ficaram conhecidos. Logo, a motivação de codificar alguma mensagem a fim de esconder seu conteúdo por este método começou a falhar.

Para resolver o problema, conforme destacado por Brumgnach (2009), foram introduzidos dois novos recursos no processo. O primeiro recurso, combinado ainda com os símbolos do alfabeto maçônico, consistia na adoção de uma senha previamente escolhida entre o emissor e o receptor.

Tal senha tem o intuito de causar aleatoriedade através do deslocamento da disposição dos símbolos adotados, uma vez que ela muda de posição as letras no diagrama em relação ao diagrama original. A ideia consiste em colocar a senha no início do alfabeto, complementado com as demais letras que ainda não foram usadas na senha. Para visualizar este efeito, suponha, por exemplo, que a senha previamente combinada entre um emissor e um receptor seja a palavra "numero" e se deseje transmitir novamente a palavra "quadrado" utilizando a nova codificação. Dessa maneira, o novo diagrama de símbolos é mostrado a seguir:

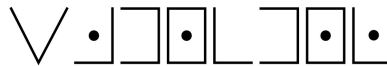
Figura 4 – Chaves do alfabeto maçônico com senha

NU	ME	RO	X	QS	
AB	CD	FG		YZ	TV
HI	JK	LP		WX	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando os caracteres do novo alfabeto maçom com senha, a mensagem "quadrado" é então representada a seguir:

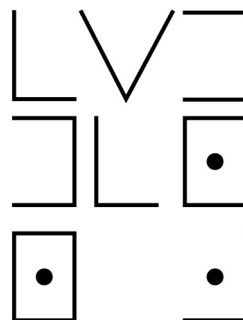
Figura 5 – Palavra "quadrado" usando alfabeto maçom com senha



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além da adoção de uma senha preestabelecida, o segundo fator de complicação para a nova representação da mensagem é dispor seus caracteres em uma matriz cujos elementos são preenchidos na sequência de preenchimento dos elementos de um *quadrado mágico*. Isso é feito através do método indiano de preenchimento. Assim, além dos símbolos e da senha previamente combinados, alguém que intercepte a mensagem teria que saber o algoritmo de preenchimento dos *quadrados mágicos* para poder obter novamente a mensagem.

Figura 6 – Palavra "quadrado" disposta em um quadrado mágico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, seja q a quantidade de caracteres da mensagem que se quer transmitir. Para realizar esta tarefa, precisa-se de um *quadrado mágico* de ordem n , onde n é o primeiro inteiro maior ou igual a raiz quadrada de q . Do exemplo, "quadrado" possui 8 caracteres, logo tem-se

que q é igual a 8 e a raiz quadrada de q é $2\sqrt{2}$, logo o menor número n que será necessário será $n = 3$. Preenchendo o *quadrado mágico* com os caracteres da mensagem do exemplo anterior, mas dispendo-os na sequência de preenchimento dos elementos de um *quadrado mágico*, obtem-se a matriz 3x3 resultante mostrada na figura anterior.

3 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DOS QUADRADOS MÁGICOS

No *Capítulo 2*, foco desta dissertação, são apresentadas as demonstrações de algumas propriedades interessantes sobre o tema, além das definições necessárias para tais provas. Dentre as propriedades demonstradas, encontra-se a mais interessante que diz respeito ao produto escalar envolvendo linhas ou colunas de um *quadrado mágico* de ordem n . Também serão mostrados alguns corolários destas propriedades.

3.1 PROPRIEDADES DOS QUADRADOS MÁGICOS

3.1.1 Quadrado mágico de ordem n

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n . A será dita um *quadrado mágico de ordem n* se respeitar todas as seguintes propriedades:

- a) O somatório de elementos de qualquer linha é uma constante denominada $\sigma(A)$;
- b) O somatório de elementos de qualquer coluna é igual a constante $\sigma(A)$;
- c) O somatório de elementos da diagonal principal é igual a constante $\sigma(A)$;
- d) O somatório de elementos da diagonal secundária é igual a constante $\sigma(A)$;

Em notação matemática, para todo $i = 1 \cdots n$ e $j = 1 \cdots n$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{i(n-i+1)} = \sigma(A) \quad (3.1)$$

A constante $\sigma(A)$ será denominada *constante mágica* da matriz A . Esse padrão de simbologia será adotado no restante desta dissertação, dispensando a apresentação das constantes mágicas das matrizes que aparecem nas demonstrações.

3.1.2 Lema 1

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n . Seja p um escalar pertencente ao conjunto dos \mathbb{R} . A matriz $B = p \cdot A$ é um *quadrado mágico* de ordem n .

Demonstração:

Seja $A = (a_{ij})$ um *quadrado mágico* de ordem n . Seja B a matriz $p \cdot A = (p \cdot a_{ij})$. De B , para todo $i = 1..n$ e para todo $j = 1..n$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n (p \cdot a_{ij}) = p \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = p \cdot \sigma(A)$$

$$\sum_{i=1}^n (p \cdot a_{ij}) = p \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = p \cdot \sigma(A)$$

$$\sum_{i=1}^n (p \cdot a_{ii}) = p \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) = p \cdot \sigma(A)$$

$$\sum_{i=1}^n p \cdot a_{i,(n-i+1)} = p \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,(n-i+1)} = p \cdot \sigma(A)$$

Logo, verificam-se acima as 4 propriedades da definição de *quadrado mágico* em (3.1) para a matriz B . Logo, B é um *quadrado mágico* de ordem n onde sua constante mágica $\sigma(B) = p \cdot \sigma(A)$.

■

3.1.3 Lema 2

Sejam A e B *quadrados mágicos* de ordem n . A matriz $C = A + B$ é um *quadrado mágico* de ordem n .

Demonstração:

Como $C = A + B$, isto é, $(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Para todo $i = 1..n$ e para todo $j = 1..n$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} = \sigma(A) + \sigma(B)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} = \sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{ij} = \sigma(A) + \sigma(B)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sigma(A) + \sigma(B)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{i,(n-i+1)} = \sum_{i=1}^n a_{i,(n-i+1)} + b_{i,(n-i+1)} = \sum_{i=1}^n a_{i,(n-i+1)} + \sum_{i=1}^n b_{i,(n-i+1)} = \sigma(A) + \sigma(B)$$

Logo, pela definição (3.1), a matriz $C = A + B$ é um *quadrado mágico* de ordem n cuja constante mágica é $\sigma(A) + \sigma(B)$.

■

3.1.4 Corolário

Seja $V = M(n, n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n . Como a matriz nula de qualquer ordem é um *quadrado mágico* e pelos lemas 1 e 2, o conjunto dos *quadrados mágicos* de ordem n é um subespaço vetorial de $M(n, n)$.

Observação T.1.1.

(MACHADO, 2013) apresenta em sua dissertação de mestrado, *Quadrados mágicos com aplicações*, uma construção similar. Entre outras coisas, ele demonstra que a dimensão do subespaço dos *quadrados mágicos* de ordem n é $n^2 - 2 \cdot n$, apresentando exemplos de bases para onde a ordem é $n = 3$ ou $n = 4$.

3.1.5 Teorema 1

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n . A matriz transposta de A , A^T , é um *quadrado mágico* de ordem n de constante mágica $\sigma(A)$.

Demonstração:

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n . Seja (b_{ij}) a matriz transposta (a_{ji}) de A , isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. Dessa maneira, para todo i e j entre $1..n$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sigma(A)$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ji} = \sigma(A)$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sigma(A)$$

$$\sum_{i=1}^n b_{i(n-i+1)} = \sum_{i=1}^n a_{(n-i+1)i} = \sum_{i=1}^n a_{i(n-i+1)} = \sigma(A)$$

Logo, pela definição (3.1), a matriz transposta de A , A^T , é um *quadrado mágico* de ordem n cuja constante mágica é $\sigma(A)$.

■

3.2 PROPRIEDADES DO QUADRADO MÁGICO NORMAL

3.2.1 Teorema 2

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n cujos elementos são os n^2 primeiros termos da uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_0 . A constante mágica de A é:

$$\sigma(A) = (2 \cdot a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n}{2} \quad (3.2)$$

Exemplos:

Sejam A e B os *quadrados mágicos* de ordem 3 abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 25 & 4 & 19 \\ 10 & 16 & 22 \\ 13 & 28 & 7 \end{pmatrix}$$

Nota-se que os elementos de A são os 9 primeiros termos da P.A. de razão 1 e termo inicial 1. Logo, usando a tese do *Teorema 2*:

$$(2 \cdot a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n}{2} = (2 \cdot 1 + (3^2 - 1) \cdot 1) \cdot \frac{3}{2} = 15$$

E, de fato, $\sigma(A) = 15$. Para a matriz B , verifica-se que ela é composta pelos 9 primeiros termos da P.A. de razão 3 e termo inicial 4. Novamente usando a tese do *Teorema 2*:

$$(2 \cdot a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n}{2} = (2 \cdot 4 + (3^2 - 1) \cdot 3) \cdot \frac{3}{2} = 48$$

E, de fato, $\sigma(B) = 48$.

Uma observação importante é que, conforme exemplo abaixo, nem todo *quadrado mágico* é formado por termos de uma P. A.:

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 22 & 26 & 12 \\ 25 & 13 & 18 & 23 \\ 14 & 28 & 20 & 17 \\ 21 & 16 & 15 & 27 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Do *quadrado mágico* C acima, tem-se que $\sigma(C) = 79$ e, ordenando os seus elementos, encontra-se a seguinte lista: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, onde claramente falta-se o número 24 para a composição de uma P. A.

Demonstração do Teorema 2:

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n cujos elementos são os n^2 primeiros termos da uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_0 . Então, por definição, tem-se a seguinte propriedade:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sigma(A), \text{ para todo } i = 1..n;$$

Escrevendo de outra maneira os somatórios acima para todo i entre 1 e n:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} &= \sigma(A) \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} &= \sigma(A) \\ &\dots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} &= \sigma(A) \end{aligned}$$

Somando ambos os membros, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} + \sum_{j=1}^n a_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^n a_{nj} = \sigma(A) + \sigma(A) + \dots + \sigma(A) = \sigma(A) \cdot n \quad (3.4)$$

Como o primeiro membro da equação acima representa a soma S de todos os n^2 elementos da matriz A, tem-se:

$$S = \sigma(A) \cdot n \quad (3.5)$$

Além disso, da hipótese, tem-se que os termos da matriz A são os n^2 primeiros termos de uma progressão aritmética. Logo, o somatório do primeiro membro da equação (3.4) representa a soma S dos n^2 primeiros termos da progressão aritmética. Logo, S pode ser calculado de outra forma:

$$S = (a_0 + a_n) \cdot \frac{n_t}{2} \quad (3.6)$$

Onde a_0 representa o termo inicial da P.A., a_n é o último termo e n_t é o número de termos. Além disso, tem-se que o p -ésimo termo da progressão aritmética é obtido da seguinte maneira:

$$a_p = a_0 + (p - 1) \cdot r \quad (3.7)$$

Como o número de termos $n_t = n^2$, o último termo a_{n^2} é obtido:

$$a_{n^2} = a_0 + (n^2 - 1) \cdot r \quad (3.8)$$

Substituindo o resultado anterior e o número de termos $n_t = n^2$ na equação (3.6):

$$S = (a_0 + a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (3.9)$$

Da equação (3.5), tem-se que $S = \sigma(A) \cdot n$. Assim:

$$S = (a_0 + a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n^2}{2} = \sigma(A) \cdot n \therefore \quad (3.10)$$

$$\sigma(A) = (2 \cdot a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n}{2} \quad (3.11)$$

■

3.2.2 Quadrado mágico normal de ordem n

Um *quadrado mágico* de ordem n será dito **normal** se seus elementos forem os n^2 primeiros números naturais.

3.2.3 Teorema 3

Seja A um *quadrado mágico* normal de ordem n . A constante mágica de A é:

$$\sigma(A) = \frac{n^3 + n}{2} \quad (3.12)$$

Demonstração:

Como A é um *quadrado mágico* de ordem n e os n^2 primeiros naturais formam uma progressão aritmética de razão 1, pode-se usar o resultado do *Teorema 2* em (3.11):

$$\sigma(A) = (2 \cdot a_0 + (n^2 - 1) \cdot r) \cdot \frac{n}{2}$$

Como o termo inicial $a_0 = 1$ e a razão $r = 1$,

$$\sigma(A) = (2 \cdot 1 + (n^2 - 1) \cdot 1) \cdot \frac{n}{2} = (2 + n^2 - 1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{(n^3 + n)}{2} \quad (3.13)$$

■

Cahu (2013) apresenta uma demonstração semelhante chegando ao mesmo resultado. Embora este seja um resultado simples, ele é fundamental para o relacionar as definições de alguns tipos específicos de *quadrados mágicos* que serão definidos no decorrer desta dissertação.

3.2.4 Lema 3

Conforme Stephens (1993, p. 15), no século XIX, François Édouard Anatole Lucas, um importante matemático francês, mostrou que, dados a , b e c inteiros onde $a < b < c - a$ e $b \neq 2a$, pode-se gerar um *quadrado mágico* de ordem 3 com a disposição a seguir:

$$B = \begin{pmatrix} c+a & c-a-b & c+b \\ c-a+b & c & c+a-b \\ c-b & c+a+b & c-a \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Note que B realmente é um *quadrado mágico* de ordem 3 e sua constante mágica $\sigma(B) = 3 \cdot c$.

Reciprocamente, dado $A = (a_{ij})$, um *quadrado mágico* de ordem 3, pode-se achar os números correspondentes a , b e c que o geram a partir da igualdade matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a & c-a-b & c+b \\ c-a+b & c & c+a-b \\ c-b & c+a+b & c-a \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

3.2.5 Corolário 1

Seja $A = (a_{ij})$ um *quadrado mágico* de ordem 3. Os elementos de A possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot a_{21} + a_{31} \cdot a_{32} &= a_{13} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{32} \\ a_{31} \cdot a_{32} + a_{33} \cdot a_{23} &= a_{11} \cdot a_{12} + a_{13} \cdot a_{23} \\ a_{33} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{12} &= a_{31} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot a_{13} \\ a_{13} \cdot a_{12} + a_{11} \cdot a_{21} &= a_{33} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

Representado a matriz A de forma gráfica, podem-se destacar os elementos envolvidos com as propriedades do corolário acima. Assim, formam-se disposições simétricas em formato de L :

Figura 7 – Visualização da forma gráfica da simetria do corolário 1

a11	a12	a13	a11	a12	a13	a11	a12	a13	a11	a12	a13
a21	a22	a23	a21	a22	a23	a21	a22	a23	a21	a22	a23
a31	a32	a33	a31	a32	a33	a31	a32	a33	a31	a32	a33

Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração:

Será demonstrada a validade da primeira das quatro equações do *Corolário 1*. Assim, desenvolvendo o primeiro membro da equação em função da algebrização realizada por Lucas em (3.15), tem-se que:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot a_{21} + a_{31} \cdot a_{32} &= (c+a)(c-a+b) + (c-b) \cdot (c+a+b) = \\ &= c^2 - ac + bc + ac - a^2 + ab + c^2 + ac + bc - bc - ab - b^2 \therefore \end{aligned}$$

$$a_{11} \cdot a_{21} + a_{31} \cdot a_{32} = -a^2 - b^2 + 2 \cdot c^2 + bc + ac \quad (3.16)$$

Por outro lado, desenvolvendo o segundo membro da equação do item 1:

$$\begin{aligned} a_{13} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{32} &= (c + a + b)(c - a) + (c + a - b) \cdot (c + b) = \\ &= c^2 - ac + ac - a^2 + bc - ab + c^2 + bc + ac + ab - bc - b^2 \therefore \end{aligned}$$

$$a_{13} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{32} = -a^2 - b^2 - 2 \cdot c^2 + bc + ac \quad (3.17)$$

Assim, de (3.16) e (3.17), verifica-se que:

$$a_{11} \cdot a_{21} + a_{31} \cdot a_{32} = a_{13} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{32} \quad (3.18)$$

■

As outras equações deste corolário são demonstradas de forma análoga à demonstração da primeira equação.

Observação C.1.1:

Embora sejam relações simples envolvendo especificamente a ordem 3, a simetria das relações parece sugerir ou trazer a indagação se existem relações parecidas para ordens maiores que 3. Nesta linha de raciocínio, serão demonstradas algumas propriedades envolvendo o produto escalar Euclidiano entre linhas e colunas de quadrados mágicos de ordem n na próxima seção.

3.3 PROPRIEDADES DO QUADRADO MÁGICO INVARIANTE

3.3.1 Quadrado mágico simétrico de ordem n

Para se compreender melhor algumas definições que serão apresentadas, será primeiramente explicado o que se chamará de *centro* de uma matriz quadrada de ordem n . Considere uma matriz quadrada cujos elementos estão escritos dentro de um quadrado subdividido em formato de tabuleiro. Una agora os vértices do quadrado mais exterior. O ponto de interseção destas diagonais será chamado centro da matriz. Considere Q um *quadrado mágico* de ordem

n. Assim, dois elementos de Q , q_{ij} e $q_{i'j'}$, serão ditos *simetricamente dispostos em relação ao centro de Q* se seus índices respeitarem ambas as condições de que $i + i' = n + 1$ e $j + j' = n + 1$

Caso a ordem n da matriz Q seja ímpar, o centro da matriz coincidirá com um elemento central q_{ij} de índices $i = j = \frac{n+1}{2}$. Neste caso, este elemento central será simetricamente disposto a ele mesmo. Destaca-se um exemplo abaixo, onde os pares de elementos simetricamente dispostos estão coloridos com a mesma cor:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	9	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Caso a ordem n seja par, não teremos no centro da matriz um elemento central, mas ainda assim este será o ponto de referência para a definição dos elementos simetricamente dispostos:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Conforme Weisstein (2014), um *quadrado mágico Q* de ordem n será dito *simétrico* se a soma de cada par de elementos opostos simetricamente em relação ao centro da matriz de Q for constante e igual a $n^2 + 1$.

Exemplo:

Utilizando a matriz A abaixo, conhecida como Lo-shu,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculando a soma de cada par de elementos simetricamente dispostos, verifica-se que esta soma é constante e igual a 10, conforme visto abaixo:

$$4 + 6 = 9 + 1 = 2 + 8 = 3 + 7 = 10$$

Observa-se acima que a soma de cada par é constante e igual $n^2 + 1$. Logo, por definição, tem-se que A é um *quadrado mágico simétrico*. Segundo Weisstein (2014), os *quadrados mágicos* simétricos de ordem n são também chamados de *associativos* ou *regulares*. Outro ponto interessante, conforme Stephens (1993, p. 3), é que todo *quadrado mágico* obtido pelo método indiano é simétrico, além de normal por construção.

Entretanto, nem todo *quadrado mágico* é simétrico, conforme constata-se no exemplo da matriz V abaixo onde $\sigma(V) = 35$, onde as somas dos elementos simetricamente dispostos claramente não coincidem.

$$V = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 15 & 1 \\ 14 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 17 & 9 & 6 \\ 10 & 5 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

3.3.2 Quadrado mágico invariante ordem n

Esta dissertação introduzirá o conceito de *quadrado mágico* invariante. Um *quadrado mágico* A de ordem n será dito *invariante* se, para cada par de elementos opostos simetricamente em relação ao centro, sua soma for:

$$a_{ij} + a_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.20)$$

Observação D.4.1.

Todo *quadrado mágico* normal de ordem n obtido pelo método indiano é invariante. De fato, seja A um *quadrado mágico* normal de ordem n obtido pelo método indiano. Por Stephens (1993, p. 3), A também é simétrico, e a soma de cada par de elementos simetricamente dispostos é $(a_{ij} + a_{i'j'}) = n^2 + 1$. Além disso, se A é normal, pela equação (3.12) do *Teorema 3*, sua constante mágica é:

$$\sigma(A) = \frac{(n^3 + n)}{2} = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2} = \frac{n \cdot (a_{ij} + a_{i'j'})}{2} \quad (3.21)$$

Então, isolando $a_{ij} + a_{i'j'}$, obtem-se:

$$a_{ij} + a_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.22)$$

Logo, por definição, A é um *quadrado mágico* invariante.

Observação D.4.2.

A matriz A nula de ordem n é invariante. De fato, sua constante mágica é igual 0 e, para cada par de elementos simetricamente dispostos, sua soma também será zero. Portanto, tem-se que:

$$a_{ij} + a_{i'j'} = 0 = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.23)$$

Proposição D.4.3.

A soma de *quadrados mágicos* invariantes é um *quadrado mágico* invariante.

Demonstração:

Sejam A e B *quadrados mágicos* invariantes de ordem n. Portanto, cada par de elementos simetricamente dispostos de A e de B, respectivamente, terá soma:

$$a_{ij} + a_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.24)$$

$$b_{ij} + b_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(B)}{n} \quad (3.25)$$

Seja $C = A + B$. Tem-se que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j entre 1 e n. Pode-se representar a soma de cada par de elementos simetricamente dispostos de C como:

$c_{ij} + c_{i'j'}$, onde $i + i' = n + 1$ e $j + j' = n + 1$. Logo,

$$c_{ij} + c_{i'j'} = a_{ij} + b_{ij} + a_{i'j'} + b_{i'j'} = (a_{ij} + a_{i'j'}) + (b_{ij} + b_{i'j'}) \quad (3.26)$$

Como A e B são *quadrados mágicos* invariantes de ordem n, pela definição de *quadrado mágico* invariante, tem-se que:

$$a_{ij} + a_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.27)$$

$$b_{ij} + b_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(B)}{n} \quad (3.28)$$

Logo, substituindo (3.27) e (3.28) em (3.26):

$$c_{ij} + c_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} + \frac{2 \cdot \sigma(B)}{n} = \frac{2 \cdot (\sigma(A) + \sigma(B))}{n} \quad (3.29)$$

Pelo *Lema 2*, tem-se que a constante mágica de C, é

$$\sigma(c) = \sigma(A) + \sigma(B) \quad (3.30)$$

Logo,

$$c_{ij} + c_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(C)}{n} \quad (3.31)$$

Logo, C é um *quadrado mágico* invariante. ■

Proposição D.4.4.

O resultado da multiplicação de um *quadrado mágico* invariante de ordem n por um escalar p é um *quadrado mágico* invariante.

Demonstração:

Sejam A um *quadrado mágico* invariante de ordem n e p um escalar pertencente aos \mathbb{R} . Logo, cada par de elementos simetricamente dispostos de A terá soma:

$$a_{ij} + a_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.32)$$

Seja $C = p \cdot A$, então $(c_{ij}) = p \cdot (a_{ij}) = (p \cdot a_{ij})$, para todo i e j entre 1 e n. Assim, cada par de elementos simetricamente dispostos de C terá soma igual a $c_{ij} + c_{i'j'}$, onde $i + i' = n + 1$ e $j + j' = n + 1$. Assim,

$$c_{ij} + c_{i'j'} = p \cdot a_{ij} + p \cdot a_{i'j'} = p \cdot (a_{ij} + a_{i'j'}) = p \cdot \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \therefore \quad (3.33)$$

$$c_{ij} + c_{i'j'} = \frac{2 \cdot p \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.34)$$

Pelo *Lema 1*, tem-se que a constante mágica de C é:

$$\sigma(C) = p \cdot \sigma(A) \quad (3.35)$$

Logo:

$$c_{ij} + c_{i'j'} = \frac{2 \cdot p \cdot \sigma(A)}{n} = \frac{2 \cdot \sigma(C)}{n} \quad (3.36)$$

Portanto, C é um *quadrado mágico* invariante. ■

Assim, segue-se que o conjunto dos *quadrados mágicos* invariantes de ordem n é um subespaço vetorial dos *quadrados mágicos*. Machado (2013) demonstrou que a dimensão para o espaço vetorial dos *quadrados mágicos* de ordem n é $d = n^2 - 2n$. Para $n = 3$, ele apresenta a seguinte base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Pela Álgebra Linear, tem-se que todo *quadrado mágico* de ordem 3 poderá ser obtido como uma combinação linear das matrizes acima. Note que todas as matrizes desta base são *quadrados mágicos* invariantes. Como o espaço dos *quadrados mágicos* invariantes é fechado para soma e multiplicação por escalar, todo *quadrado mágico* obtido como uma combinação linear das matrizes acima também será invariante. Como elas são linearmente independentes, tem-se que esta também será uma base para o espaço dos *quadrados mágicos* invariantes de ordem 3.

Proposição D.4.5.

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n onde a soma de cada par de elementos simetricamente dispostos é constante. A é necessariamente um *quadrado mágico* invariante.

Demonstração:

Seja A um *quadrado mágico* de ordem n onde a soma de cada par de elementos simetricamente dispostos é constante. Se A tem ordem n, logo A possuirá n^2 elementos. Seja S a soma de todos esses elementos. Logo,

$$S = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{n,n-1} + a_{nn} \quad (3.37)$$

Da hipótese, temos que a soma de cada elemento com seu elemento simetricamente disposto é constante. Seja p esta constante. Logo, para n^2 elementos, existirão $\frac{n^2}{2}$ pares cuja soma é p . Logo,

$$S = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{n,n-1} + a_{nn} = \frac{n^2}{2} \cdot p \quad (3.38)$$

Por outro lado, S é a soma de todos os elementos de todas as linhas do *quadrado mágico*. A soma de cada linha é $\sigma(A)$. Como existem n linhas em A :

$$S = a_{1,1} + a_{1,2} + \dots + a_{n,n-1} + a_{n,n} = n \cdot \sigma(A) \quad (3.39)$$

Como $S = \frac{n^2}{2} \cdot p$, tem-se:

$$\frac{n^2}{2} \cdot p = n \cdot \sigma(A) \therefore p = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \quad (3.40)$$

Logo, A é um *quadrado mágico* invariante. ■

3.4 PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO ENTRE LINHAS E COLUNAS DE UM QUADRADO MÁGICO

3.4.1 Proposição 1

Considerando as linhas e colunas de um *quadrado mágico* normal como vetores, apresenta-se um resultado conjecturado a respeito do produto escalar entre as linhas, ou colunas, de um *quadrado mágico* normal.

Conjectura 3.3. Se M é um *quadrado mágico* de ordem n (onde n é um número natural ímpar maior que 1) construído pelo método indiano, então o produto escalar de qualquer duas linhas (ou colunas) a e b , de M , onde $a < n$, $b < n$, e $a \neq b$ será igual desde que os índices do primeiro par sejam a e b , e os índices do segundo par sejam $(n+1-b)$ e $(n+1-a)$, respectivamente. Se $a+b = n+1$, então o produto escalar das linhas a e b , não será geralmente igual ao produto de outras duas linhas (ou colunas). (STEPHENS, 1993, p. 19)

Sobre a conjectura acima, exibe-se um exemplo usado por Stephens (1993, p. 19), para o *quadrado mágico* de ordem 9 explicitado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 47 & 58 & 69 & 80 & 1 & 12 & 23 & 34 & 45 \\ 57 & 68 & 79 & 9 & 11 & 22 & 33 & 44 & 46 \\ 67 & 78 & 8 & 10 & 21 & 32 & 43 & 54 & 56 \\ 77 & 7 & 18 & 20 & 31 & 42 & 53 & 55 & 66 \\ 6 & 17 & 19 & 30 & 41 & 52 & 63 & 65 & 76 \\ 16 & 27 & 29 & 40 & 51 & 62 & 64 & 75 & 5 \\ 26 & 28 & 39 & 50 & 61 & 72 & 74 & 4 & 15 \\ 36 & 38 & 49 & 60 & 71 & 73 & 3 & 14 & 25 \\ 37 & 48 & 59 & 70 & 81 & 2 & 13 & 24 & 35 \end{pmatrix}$$

Ele observa o seguinte resultado para linhas L (ou colunas C), conforme transcrição do texto original:

$$\begin{aligned} \langle L_1, L_2 \rangle &= \langle L_8, L_9 \rangle, \langle L_1, L_3 \rangle = \langle L_7, L_9 \rangle, \langle L_1, L_4 \rangle = \langle L_6, L_9 \rangle \\ \langle L_1, L_5 \rangle &= \langle L_5, L_9 \rangle, \langle L_1, L_6 \rangle = \langle L_4, L_9 \rangle, \langle L_1, L_7 \rangle = \langle L_3, L_9 \rangle \\ \langle L_1, L_8 \rangle &= \langle L_2, L_9 \rangle, \langle L_2, L_3 \rangle = \langle L_7, L_8 \rangle, \langle L_2, L_4 \rangle = \langle L_6, L_8 \rangle \\ \langle L_2, L_5 \rangle &= \langle L_5, L_8 \rangle, \langle L_2, L_6 \rangle = \langle L_4, L_8 \rangle, \langle L_2, L_7 \rangle = \langle L_3, L_8 \rangle \\ \langle L_3, L_4 \rangle &= \langle L_6, L_7 \rangle, \langle L_3, L_5 \rangle = \langle L_5, L_7 \rangle, \langle L_3, L_6 \rangle = \langle L_4, L_7 \rangle \\ &\langle L_4, L_5 \rangle = \langle L_5, L_6 \rangle \end{aligned}$$

Além disso, em seu texto, ele afirma que não há resultados coincidentes para o produto entre as linhas $\langle L_2, L_8 \rangle, \langle L_4, L_6 \rangle, \langle L_3, L_7 \rangle, \langle L_1, L_9 \rangle$.

Verificando o padrão do produto escalar acima, a título de exemplo, seguem os cálculos para a primeira igualdade observada por ele:

$$\begin{aligned} \langle L_1, L_2 \rangle &= 47 \cdot 57 + 58 \cdot 68 + 69 \cdot 79 + 80 \cdot 9 + 1 \cdot 11 + 12 \cdot 22 + 23 \cdot 33 + 34 \cdot 44 + 45 \cdot 46 = 17394 \\ \langle L_8, L_9 \rangle &= 36 \cdot 37 + 38 \cdot 48 + 49 \cdot 59 + 60 \cdot 70 + 71 \cdot 81 + 73 \cdot 2 + 3 \cdot 13 + 14 \cdot 24 + 25 \cdot 35 = 17394 \end{aligned}$$

As demais igualdades podem ser verificadas de forma análoga a de cima. As mesmas relações são verificadas também para as colunas.

Observação P.1.1.

De fato, a conjectura descrita por Stephens (1993, p. 19) é uma importante observação do ponto de vista da simetria. Entretanto, existem outros produtos escalares que poderiam ser descritos, a fim de observar um padrão ainda mais geral, principalmente no que tange o produto escalar de colunas ou linhas quando os índices somam $n + 1$. Após análise, verificam-se que as seguintes igualdades também são válidas:

$$\langle L_1, L_1 \rangle = \langle L_9, L_9 \rangle, \langle L_2, L_2 \rangle = \langle L_8, L_8 \rangle, \langle L_3, L_3 \rangle = \langle L_7, L_7 \rangle, \langle L_4, L_4 \rangle = \langle L_6, L_6 \rangle$$

Novamente como exemplo, verificando a primeira igualdade da afirmação anterior:

$$\langle L_1, L_1 \rangle = 47 \cdot 47 + 58 \cdot 58 + 69 \cdot 69 + 80 \cdot 80 + 1 \cdot 1 + 12 \cdot 12 + 23 \cdot 23 + 34 \cdot 34 + 45 \cdot 45 = 20589$$

$$\langle L_9, L_9 \rangle = 37 \cdot 37 + 48 \cdot 48 + 59 \cdot 59 + 70 \cdot 70 + 81 \cdot 81 + 2 \cdot 2 + 13 \cdot 13 + 24 \cdot 24 + 35 \cdot 35 = 20589$$

E as demais igualdades podem ser verificadas de forma análoga a de cima. Mais uma vez, as mesmas relações são verificadas também para as colunas.

Observação P.1.2.

Seja $\langle a, b \rangle$ o produto escalar euclidiano entre os vetores a e b . Para casos elencados na conjectura onde é citado que: "Não há resultados para o produto entre as linhas $\langle L_2, L_8 \rangle$, $\langle L_4, L_6 \rangle$, $\langle L_3, L_7 \rangle$, ou $\langle L_1, L_9 \rangle$ ", embora seja trivial, estes produtos escalares podem ser vistos como as seguintes igualdades:

$$\langle L_2, L_8 \rangle = \langle L_8, L_2 \rangle, \langle L_4, L_6 \rangle = \langle L_6, L_4 \rangle, \langle L_3, L_7 \rangle = \langle L_7, L_3 \rangle, \langle L_1, L_9 \rangle = \langle L_9, L_1 \rangle$$

A *Observação P.1.1* e a *Observação P.1.2* permitem fazer uma conjectura mais generalizada sobre o produto escalar euclidiano entre linhas (ou colunas) de um *quadrado mágico*.

Usando uma definição mais formal, pode-se enunciar a conjectura como sendo a *Proposição 1*:

Seja A um *quadrado mágico* invariante de ordem n . Sejam u e v vetores do \mathbb{R}^n tais que u e v são obtidos da p -ésima linha (ou coluna) e da q -ésima linha (ou coluna) de A . Sejam u' e v' vetores do \mathbb{R}^n tais que u' e v' são obtidos da p' -ésima linha (ou coluna) e q' -ésima linha (ou coluna) de A , onde $p' = n - p + 1$ e $q' = n - q + 1$. Tem-se que:

$$\langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle \quad (3.41)$$

De maneira simplificada, a nova conjectura diz que o produto escalar euclidiano entre duas linhas (ou colunas) quaisquer de um *quadrado mágico* invariante de ordem n será igual ao produto escalar das linhas (ou colunas) de índices simétricos ao centro do *quadrado mágico*. Antes de apresentar a demonstração para esta proposição, será proposto um caso particular da mesma na próxima seção.

3.4.2 Proposição 2

Seja A um *quadrado mágico* invariante de ordem n . Seja B a matriz tal que $(b_{ij}) = (a_{ij})^2$. A *Proposição 2* afirma que:

A soma dos termos da matriz B da p -ésima linha (ou coluna) é igual a soma dos

termos da matriz B da q -ésima linha (ou coluna), onde $p = 1, 2, \dots, n$ e $q = (n - p + 1)$. De outra forma, sejam L_p e L_q linhas de A, pode-se escrever:

$$\sum_{j=1}^n (b_{pj}) = \sum_{j=1}^n (b_{qj}) \therefore \sum_{j=1}^n (a_{pj})^2 = \sum_{j=1}^n (a_{qj})^2 \therefore \langle L_p, L_p \rangle = \langle L_q, L_q \rangle \quad (3.42)$$

Demonstração:

Sejam A e B as matrizes da *Proposição 2*. Seja S_p a soma da p -ésima linha de B:

$$S_p = \sum_{j=1}^n (b_{pj}) = \sum_{j=1}^n (a_{pj})^2 = \langle L_p, L_p \rangle \quad (3.43)$$

Seja S_q a soma da q -ésima linha de B:

$$S_q = \sum_{j'=1}^n (b_{qj'}) = \sum_{j'=1}^n (a_{qj'})^2 = \langle L_q, L_q \rangle \quad (3.44)$$

Onde $q = n - p + 1$. Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n, para todo $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$, tem-se que:

$$a_{pj} + a_{qj'} = m_a \therefore a_{qj'} = m_a - a_{pj} \quad (3.45)$$

Onde m_a na equação acima é $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$. Logo, S_q pode ser escrito:

$$S_q = \sum_{j'=1}^n (b_{qj'}) = \sum_{j'=1}^n (a_{qj'})^2 = \sum_{j'=1}^n (m_a - a_{pj})^2 \quad (3.46)$$

Expandindo o produto notável abaixo:

$$(m - a_{pj})^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot a_{pj} + a_{pj}^2 \quad (3.47)$$

Usando o resultado do produto acima em S_q :

$$S_q = \sum_{j'=1}^n (m_a - a_{pj})^2 = \sum_{j'=1}^n (m_a^2) - \sum_{j'=1}^n (2 \cdot m_a \cdot a_{pj}) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj}^2) \quad (3.48)$$

Como m_a é constante para a matriz A, ele pode sair dos somatórios acima, restando:

$$S_q = n \cdot m_a^2 - 2 \cdot m_a \cdot \left(\sum_{j'=1}^n a_{pj} \right) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj}^2) \quad (3.49)$$

O próximo passo visa manipular os somatórios com índice j' na equação anterior transformando-os em somatórios usando o índice j , lembrando que $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$. Assim:

$$\sum_{j'=1}^n (a_{pj}) = \sum_{j=n}^1 (a_{pj}) = \sum_{j=1}^n (a_{pj}) \quad (3.50)$$

Como A é um *quadrado mágico* de ordem n , tem-se que:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj}) = \sigma(A) \quad (3.51)$$

Além disso, novamente manipulando o índice j' , mas agora para o último termo do produto notável:

$$\sum_{j'=1}^n (a_{pj}^2) = \sum_{j=n}^1 (a_{pj}^2) = \sum_{j=1}^n (a_{pj}^2) = S_p \quad (3.52)$$

Utilizando os resultados das transformações em S_q , tem-se:

$$S_q = n \cdot m_a^2 - 2 \cdot m_a \cdot \sigma(A) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj}^2) = n \cdot m_a^2 - 2 \cdot m_a \cdot \sigma(A) + S_p \quad (3.53)$$

Substituindo o valor de $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$, tem-se:

$$S_q = n \cdot \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n^2} - 2 \cdot \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \cdot \sigma(A) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj}^2) = \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n} - \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n} + S_p \therefore \quad (3.54)$$

$$S_q = S_p \therefore \langle L_p, L_p \rangle = \langle L_q, L_q \rangle \quad (3.55)$$

■

A demonstração usando as colunas do *quadrado mágico* é análoga. Outro fato é que o resultado da *Proposição 2* é um corolário da *Proposição 1*. Como o resultado da *Proposição*

I é mais geral, foi realizada primeiramente a demonstração de um caso mais específico. Agora, pode-se demonstrar *Proposição 1* usando o mesmo método.

3.4.3 Demonstração da Proposição 1

Seja $S_{px} = \langle L_p, L_x \rangle$ onde L_p e L_x são a p -ésima linha e a x -ésima linha, respectivamente, da matriz A da *Proposição 1*. Logo:

$$S_{px} = \langle L_p, L_x \rangle = \sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{xj}) \quad (3.56)$$

Seja $S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle$ onde L_q e L_y são a q -ésima linha e a y -ésima linha, respectivamente, da matriz A da *Proposição 1*, onde $q = n - p + 1$ e $y = n - x + 1$ Logo:

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = \sum_{j'=1}^n (a_{qj'} \cdot a_{yj'}) \quad (3.57)$$

Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n , tem-se que $a_{pj} + a_{qj'} = m_a$ para todo $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$ $\therefore a_{qj'} = m_a - a_{pj}$. Logo, S_{qy} pode ser escrito:

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = \sum_{j'=1}^n (a_{qj'} \cdot a_{yj'}) = \sum_{j'=1}^n [(m_a - a_{pj}) \cdot (m_a - a_{xj})] \quad (3.58)$$

Realizando o produto interno ao somatório, tem-se:

$$(m_a - a_{pj}) \cdot (m_a - a_{xj}) = m_a^2 - m_a \cdot (a_{pj} + a_{xj}) + a_{pj} \cdot a_{xj} \quad (3.59)$$

Substituindo o resultado anterior em S_{qy} , tem-se:

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = \sum_{j'=1}^n [m_a^2 - m_a \cdot (a_{pj} + a_{xj}) + a_{pj} \cdot a_{xj}] \quad (3.60)$$

Como $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$ é constante para a matriz A , ele pode sair dos somatórios acima, restando:

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \sum_{j'=1}^n (a_{pj} + a_{xj}) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj} \cdot a_{xj}) \therefore \quad (3.61)$$

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j=1}^n (a_{pj}) + \sum_{j'=1}^n (a_{xj}) \right) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj} \cdot a_{xj}) \quad (3.62)$$

O próximo passo visa manipular os somatórios com índice j' na equação anterior transformando-os em somatórios usando o índice j , lembrando que $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$. Assim, manipulando o índice j' :

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j=n}^1 (a_{pj}) + \sum_{j=n}^1 (a_{xj}) \right) + \sum_{j=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{xj}) \therefore \quad (3.63)$$

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j=1}^n (a_{pj}) + \sum_{j=1}^n (a_{xj}) \right) + \sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{xj}) \quad (3.64)$$

Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n , tem-se que $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$ e os dois primeiros somatórios acima são justamente o somatório da p -ésima linha e da x -ésima linha de A, tornando-se:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj}) = \sum_{j=1}^n (a_{xj}) = \sigma(A) \quad (3.65)$$

Além disso, verifica-se abaixo que o último somatório da equação é justamente o termo S_{px} que está sendo procurado nesta demonstração, pois:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{xj}) = \langle L_p, L_x \rangle = S_{px} \quad (3.66)$$

Realizando agora todas as substituições:

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot (2 \cdot \sigma(A)) + \langle L_p, L_x \rangle \therefore \quad (3.67)$$

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n} - \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n} + \langle L_p, L_x \rangle \therefore \quad (3.68)$$

$$S_{qy} = \langle L_q, L_y \rangle = \langle L_p, L_x \rangle = S_{px} \quad (3.69)$$

■

A demonstração utilizando as colunas da matriz A é análoga à demonstração realizada acima.

Observação DP.1.1.

Não foi feita nenhuma restrição quanto a paridade da ordem n para o resultado demonstrado da *Proposição 1*, logo ela é válida para ordens pares e ímpares.

Observação DP.1.2.

Note a validade da *Proposição 1* está ligada ao fato do *quadrado mágico* ser invariante. Se o *quadrado mágico* não é invariante, a *Proposição 1* não funciona para qualquer linha ou coluna. Como exemplo, seja A o *quadrado mágico* não invariante de ordem 4 a seguir extraído de Townsend (2004):

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 & 26 & 12 \\ 25 & 13 & 18 & 23 \\ 14 & 28 & 20 & 17 \\ 21 & 16 & 15 & 27 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Verifica-se, entre outros, que os seguintes produtos escalares euclidianos **não verificam igualdade**:

$$\langle L_1, L_1 \rangle = 19 \cdot 19 + 22 \cdot 22 + 26 \cdot 26 + 12 \cdot 12 = 1665$$

$$\langle L_4, L_4 \rangle = 21 \cdot 21 + 16 \cdot 16 + 15 \cdot 15 + 27 \cdot 27 = 1651$$

$$\langle L_2, L_2 \rangle = 25 \cdot 25 + 13 \cdot 13 + 18 \cdot 18 + 23 \cdot 23 = 1647$$

$$\langle L_3, L_3 \rangle = 14 \cdot 14 + 28 \cdot 28 + 20 \cdot 20 + 17 \cdot 17 = 1669$$

$$\langle L_1, L_3 \rangle = 19 \cdot 14 + 22 \cdot 28 + 26 \cdot 20 + 12 \cdot 17 = 1606$$

$$\langle L_4, L_2 \rangle = 21 \cdot 25 + 16 \cdot 13 + 15 \cdot 18 + 27 \cdot 23 = 1624$$

Observação DP.1.3.

Como exemplo de verificação da propriedade demonstrada, segue um exemplo de um *quadrado mágico* invariante de ordem 3 composto apenas por primos não repetidos:

$$P = \begin{pmatrix} 17 & 89 & 71 \\ 113 & 59 & 5 \\ 47 & 29 & 101 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

O *quadrado mágico* possui constante mágica $\sigma(P) = 177$. Para constatar que ele é realmente invariante, a soma de pares de elementos simetricamente dispostos deve ser $p_{ij} + p_{i'j'} = \frac{2 \cdot \sigma(P)}{n} = \frac{2 \cdot 177}{3} = 118$. Note que somando os números simetricamente dispostos, tem-se:

$$17 + 101 = 89 + 29 = 71 + 47 = 5 + 113 = 118 \quad (3.72)$$

O que prova sua invariância. Logo, pela *Proposição 1*, estão válidas e constatadas todas as igualdades abaixo:

$$\langle L_1, L_1 \rangle = 17 \cdot 17 + 89 \cdot 89 + 71 \cdot 71 = 47 \cdot 47 + 29 \cdot 29 + 101 \cdot 101 = \langle L_3, L_3 \rangle = 13251$$

$$\langle C_1, C_1 \rangle = 17 \cdot 17 + 113 \cdot 113 + 47 \cdot 47 = 71 \cdot 71 + 5 \cdot 5 + 101 \cdot 101 = \langle C_3, C_3 \rangle = 15267$$

$$\langle L_1, L_2 \rangle = 17 \cdot 113 + 89 \cdot 59 + 71 \cdot 5 = 47 \cdot 113 + 29 \cdot 59 + 101 \cdot 5 = \langle L_3, L_2 \rangle = 7527$$

$$\langle C_1, C_2 \rangle = 17 \cdot 89 + 113 \cdot 59 + 47 \cdot 29 = 71 \cdot 89 + 5 \cdot 59 + 101 \cdot 29 = \langle C_3, C_2 \rangle = 9543$$

Observação DP.1.4.

A invariância do exemplo acima poderia ser verificada usando-se de uma regra mais geral: todo *quadrado mágico* de ordem 3 é invariante.

Demonstração:

Usando-se do critério de Lucas descrito no *Lema 4*, pode-se calcular a constante m hipotética para um *quadrado mágico* de ordem 3 qualquer. Usando-se da algebrização dos termos do quadrado mágico de ordem 3 e calculando a soma de cada par de termos simetricamente dispostos, tem-se que:

$$(c+a) + (c-a) = (c-a-b) + (c+a+b) = (c+b) + (c-b) = (c-a+b) + (c+a-b) = 2 \cdot c \quad (3.73)$$

Como a constante mágica da algebrização feita por Lucas é $\sigma(A) = 3 \cdot c$ e a ordem $n = 3$, tem-se que $m = 2 \cdot c = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$. Logo, todo *quadrado mágico* de ordem 3 é invariante.

Exemplo:

Será mostrado o *quadrado mágico* de ordem 3 composto pelos menores primos consecutivos. Conforme Pickover (2005, p. 184), o exemplo a seguir é creditado a Harry Nelson:

$$\begin{pmatrix} 1480028201 & 1480028129 & 1480028183 \\ 1480028153 & 1480028171 & 1480028189 \\ 1480028159 & 1480028213 & 1480028141 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Para o *quadrado mágico* acima, note que a soma de dois termos simetricamente dispostos é:

$$1480028201 + 1480028141 = 1480028129 + 1480028213 = 1480028183 + 1480028159 = \\ 1480028153 + 1480028189 = 2960056342$$

A constante mágica é $\sigma(A) = 4440084513$. Mas,

$$m = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} = \frac{2 \cdot 4440084513}{3} = 2960056342 \quad (3.75)$$

Logo, por definição ele é invariante, conforme previsto pela demonstração anterior.

■

3.4.4 Proposição 3

Observando o resultado da *Proposição 1*, que envolve o produto escalar euclidiano entre duas linhas ou duas colunas de um mesmo *quadrado mágico*, e ainda considerando a estrutura dos *quadrados mágicos* invariantes de ordem n , pode-se tentar verificar se existe algum resultado similar envolvendo o produto escalar euclidiano entre a p -ésima linha e a q -coluna de um mesmo *quadrado mágico*.

Antes de enunciar a nova proposição, será necessário introduzir um conceito e uma notação auxiliar. Seja v um vetor qualquer do \mathbb{R}^n tal que $v = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Por definição, seja a transformação $Inv(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $Inv(v) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$ é a transformação que leva o vetor v no vetor de coordenadas de ordens inversas.

Para simplificar a notação, será usado o seguinte padrão: $Inv(v) = v^*$. Como exemplo, sejam u e v vetores tais que $u = (x, y, w, z)$ e $v = (a, b, c)$. Logo, por definição, tem-se $Inv(u) = u^* = (z, w, y, x)$ e $Inv(v) = v^* = (c, b, a)$. Agora pode-se enunciar a **Proposição 3**:

Seja A um *quadrado mágico* invariante de ordem n . Sejam u e v vetores do \mathbb{R}^n tais que u e v são obtidos da p -ésima linha e q -ésima coluna de A . Sejam u' e v' vetores do \mathbb{R}^n tais que u' e v' são obtidos da p' -ésima linha e q' -ésima coluna de A , onde $p' = n - p + 1$ e $q' = n - q + 1$. Tem-se que:

$$\langle u, v \rangle = \langle u'^*, v'^* \rangle \quad (3.76)$$

Novamente, antes da demonstração, sugere-se a verificação através de um exemplo.

Seja A o mesmo *quadrado mágico* de ordem 9 usado na *Proposição 1*:

$$\begin{pmatrix} 47 & 58 & 69 & 80 & 1 & 12 & 23 & 34 & 45 \\ 57 & 68 & 79 & 9 & 11 & 22 & 33 & 44 & 46 \\ 67 & 78 & 8 & 10 & 21 & 32 & 43 & 54 & 56 \\ 77 & 7 & 18 & 20 & 31 & 42 & 53 & 55 & 66 \\ 6 & 17 & 19 & 30 & 41 & 52 & 63 & 65 & 76 \\ 16 & 27 & 29 & 40 & 51 & 62 & 64 & 75 & 5 \\ 26 & 28 & 39 & 50 & 61 & 72 & 74 & 4 & 15 \\ 36 & 38 & 49 & 60 & 71 & 73 & 3 & 14 & 25 \\ 37 & 48 & 59 & 70 & 81 & 2 & 13 & 24 & 35 \end{pmatrix}$$

Segundo a *Proposição 3*, para A, são válidas todas as seguintes igualdades envolvendo o produto escalar euclidiano:

$$\begin{aligned} \langle C_1, L_n \rangle &= \langle C_9^*, L_{10-n}^* \rangle; \langle C_2, L_n \rangle = \langle C_8^*, L_{10-n}^* \rangle; \langle C_3, L_n \rangle = \langle C_7^*, L_{10-n}^* \rangle \\ \langle C_4, L_n \rangle &= \langle C_6^*, L_{10-n}^* \rangle; \langle C_5, L_n \rangle = \langle C_5^*, L_{10-n}^* \rangle; \langle C_6, L_n \rangle = \langle C_4^*, L_{10-n}^* \rangle \\ \langle C_7, L_n \rangle &= \langle C_3^*, L_{10-n}^* \rangle; \langle C_8, L_n \rangle = \langle C_2^*, L_{10-n}^* \rangle; \langle C_9, L_n \rangle = \langle C_1^*, L_{10-n}^* \rangle \end{aligned}$$

Em todos os casos acima, para todo $n = 1, 2, \dots, 9$. Como exemplo, seguem verificações de algumas dessas igualdades:

$$\langle C_1, L_1 \rangle = 47 \cdot 47 + 57 \cdot 58 + 67 \cdot 69 + 77 \cdot 80 + 6 \cdot 1 + 16 \cdot 12 + 26 \cdot 23 + 36 \cdot 34 + 37 \cdot 45 = 19983$$

$$\langle C_9^*, L_9^* \rangle = 35 \cdot 35 + 25 \cdot 24 + 15 \cdot 13 + 5 \cdot 2 + 76 \cdot 81 + 66 \cdot 70 + 56 \cdot 59 + 46 \cdot 48 + 45 \cdot 37 = 19983$$

$$\langle C_1, L_9 \rangle = 47 \cdot 37 + 57 \cdot 48 + 67 \cdot 59 + 77 \cdot 70 + 6 \cdot 81 + 16 \cdot 2 + 26 \cdot 13 + 36 \cdot 24 + 37 \cdot 35 = 16833$$

$$\langle C_9^*, L_1^* \rangle = 35 \cdot 45 + 25 \cdot 34 + 15 \cdot 23 + 5 \cdot 12 + 76 \cdot 1 + 66 \cdot 80 + 56 \cdot 69 + 46 \cdot 58 + 45 \cdot 47 = 16833$$

$$\langle C_5, L_2 \rangle = 1 \cdot 57 + 11 \cdot 68 + 21 \cdot 79 + 31 \cdot 9 + 41 \cdot 11 + 51 \cdot 22 + 61 \cdot 33 + 71 \cdot 44 + 81 \cdot 46 = 13179$$

$$\langle C_5^*, L_8^* \rangle = 81 \cdot 25 + 71 \cdot 14 + 61 \cdot 3 + 51 \cdot 73 + 41 \cdot 71 + 31 \cdot 60 + 21 \cdot 49 + 11 \cdot 38 + 1 \cdot 36 = 13179$$

$$\langle C_9, L_3 \rangle = 45 \cdot 67 + 46 \cdot 78 + 56 \cdot 8 + 66 \cdot 10 + 76 \cdot 21 + 5 \cdot 32 + 15 \cdot 43 + 25 \cdot 54 + 35 \cdot 56 = 13422$$

$$\langle C_1^*, L_7^* \rangle = 37 \cdot 15 + 36 \cdot 4 + 26 \cdot 74 + 16 \cdot 72 + 6 \cdot 61 + 77 \cdot 50 + 67 \cdot 39 + 57 \cdot 28 + 47 \cdot 26 = 13422$$

Todas as outras igualdades podem ser verificadas de forma análoga as de cima. De fato, o padrão conjecturado pela *Proposição 3* se mantém. Segue-se com a demonstração.

3.4.5 Demonstração da Proposição 3

Seja $S_{px} = \langle L_p, C_x \rangle$ onde L_p e C_x são a p -ésima linha e a x -ésima coluna, respectivamente, da matriz A da Proposição 1. Logo:

$$S_{px} = \langle L_p, C_x \rangle = \sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{xj}) \quad (3.77)$$

Seja $S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle$ onde L_q^* e C_y^* são a q -ésima linha e a y -ésima coluna, respectivamente, da matriz A da Proposição 1, onde $q = n - p + 1$ e $y = n - x + 1$. Logo:

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = \sum_{j'=n}^1 (a_{qj'} \cdot a_{j'y}) \quad (3.78)$$

Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n , tem-se que $a_{pj} + a_{qj'} = m_a$ e $a_{jx} + a_{j'y} = m_a$ para todo $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$ $\therefore a_{qj'} = m_a - a_{pj}$ e $a_{j'y} = m_a - a_{jx}$. Logo, S_{qy} pode ser escrito:

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = \sum_{j'=n}^1 (a_{qj'} \cdot a_{j'y}) = \sum_{j'=n}^1 [(m_a - a_{pj}) \cdot (m_a - a_{jx})] \quad (3.79)$$

Realizando primeiramente o produto existente dentro do somatório da equação acima, tem-se:

$$(m_a - a_{pj}) \cdot (m_a - a_{jx}) = m_a^2 - m_a \cdot (a_{pj} + a_{jx}) + a_{pj} \cdot a_{jx} \quad (3.80)$$

Substituindo o resultado acima em S_{qy} e, logo após, separando os somatórios:

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = \sum_{j'=n}^1 [m_a^2 - m_a \cdot (a_{pj} + a_{jx}) + a_{pj} \cdot a_{jx}] \therefore \quad (3.81)$$

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = \sum_{j'=n}^1 m_a^2 - \sum_{j'=n}^1 (m_a \cdot (a_{pj} + a_{jx})) + \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jx}) \quad (3.82)$$

Como $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$ é constante, ele pode sair dos somatórios acima, restando:

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} + a_{jx}) + \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jx}) \quad \therefore \quad (3.83)$$

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j'=n}^1 a_{pj} + \sum_{j'=n}^1 a_{jx} \right) + \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jx}) \quad (3.84)$$

O próximo passo visa manipular os somatórios com índice j' na equação anterior transformando-os em somatórios usando o índice j , lembrando que $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$. Assim:

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j'=1}^n a_{pj'} + \sum_{j'=1}^n a_{j'x} \right) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj'} \cdot a_{j'x}) \quad \therefore \quad (3.85)$$

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j=n}^1 a_{pj} + \sum_{j=n}^1 a_{jx} \right) + \sum_{j=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jx}) \quad (3.86)$$

Como o somatório é comutativo para os números reais, ou seja, $\sum_{j=n}^1 (x_n) = \sum_{j=1}^n (x_n)$, para x_n real, realiza-se o último passo de transformação dos índices j e j' :

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot m^2 - m \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{pj} + \sum_{j=1}^n a_{jx} \right) + \sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{jx}) \quad (3.87)$$

Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n , tem-se que $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$ e os dois primeiros somatórios acima são justamente o somatório da p -ésima linha e da x -ésima coluna de A , tornando-se:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj}) = \sum_{j=1}^n (a_{jx}) = \sigma(A) \quad (3.88)$$

Além disso, verifica-se abaixo que o último somatório da equação é justamente o termo S_{px} que está sendo procurado nesta demonstração, pois:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{jx}) = \langle L_p, C_x \rangle = S_{px} \quad (3.89)$$

Realizando agora todas as substituições em S_{qy} :

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot (2 \cdot \sigma(A)) + \langle L_p, C_x \rangle. \quad (3.90)$$

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = n \cdot \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n^2} - \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \cdot (2 \cdot \sigma(A)) + \langle L_p, C_x \rangle. \quad (3.91)$$

$$S_{qy} = \langle L_q^*, C_y^* \rangle = \langle L_p, C_x \rangle = S_{px} \quad (3.92)$$

■

Observação DP.3.1.

Novamente, não foi feita nenhuma restrição quanto a paridade da ordem n para o resultado demonstrado da *Proposição 3*, logo ela é válida para ordens pares e ímpares.

3.4.6 Proposição 4

Já demonstrados os resultados das proposições 1 a 3 desta dissertação e, ainda considerando a estrutura dos *quadrados mágicos* invariantes de ordem n , pode-se também demonstrar a existência da simetria do produto escalar euclidiano envolvendo a *Diagonal Principal* - D_p ou a *Diagonal Secundária* - D_s de um mesmo *quadrado mágico*. Assim, segue-se a **Proposição 4**:

Seja A um *quadrado mágico* invariante de ordem n . Sejam u e v vetores do \mathbb{R}^n tais que u é obtido da p -ésima linha (ou coluna) de A , enquanto v é uma das diagonais D_p ou D_s . Seja u' um vetor do \mathbb{R}^n tal que u' é obtido da p' -ésima linha (ou coluna) de A , onde $p' = n - p + 1$. Tem-se que:

$$\langle u, D_p \rangle = \langle u', D_p \rangle \quad (3.93)$$

$$\langle u, D_s \rangle = \langle u', D_s \rangle \quad (3.94)$$

Mais uma vez, antes da demonstração, sugere-se a verificação através de um exemplo. Utilizando o mesmo *quadrado mágico* de ordem 9 usado na *Proposição 1* e *Proposição 3*, encontram-se válidos, entre outros, os seguintes produtos:

$$\langle C_1, D_p \rangle = 47 \cdot 47 + 57 \cdot 68 + 67 \cdot 8 + 77 \cdot 20 + 6 \cdot 41 + 16 \cdot 62 + 26 \cdot 74 + 36 \cdot 14 + 37 \cdot 35 = 13122$$

$$\langle C_9, D_p \rangle = 45 \cdot 47 + 46 \cdot 68 + 56 \cdot 8 + 66 \cdot 20 + 76 \cdot 41 + 5 \cdot 62 + 15 \cdot 74 + 25 \cdot 14 + 35 \cdot 35 = 13122$$

$$\langle L_1, D_p \rangle = 47 \cdot 47 + 58 \cdot 68 + 69 \cdot 8 + 80 \cdot 20 + 1 \cdot 41 + 12 \cdot 62 + 23 \cdot 74 + 34 \cdot 14 + 45 \cdot 35 = 12843$$

$$\langle L_9, D_p \rangle = 37 \cdot 47 + 48 \cdot 68 + 59 \cdot 8 + 70 \cdot 20 + 81 \cdot 41 + 2 \cdot 62 + 13 \cdot 74 + 24 \cdot 14 + 35 \cdot 35 = 12843$$

$$\langle C_1, D_s \rangle = 47 \cdot 45 + 57 \cdot 44 + 67 \cdot 43 + 77 \cdot 42 + 6 \cdot 41 + 16 \cdot 40 + 26 \cdot 39 + 36 \cdot 38 + 37 \cdot 37 = 15375$$

$$\langle C_9, D_s \rangle = 45 \cdot 45 + 46 \cdot 44 + 56 \cdot 43 + 66 \cdot 42 + 76 \cdot 41 + 5 \cdot 40 + 15 \cdot 39 + 25 \cdot 38 + 35 \cdot 37 = 15375$$

$$\langle L_1, D_s \rangle = 47 \cdot 45 + 58 \cdot 44 + 69 \cdot 43 + 80 \cdot 42 + 1 \cdot 41 + 12 \cdot 40 + 23 \cdot 39 + 34 \cdot 38 + 45 \cdot 37 = 15369$$

$$\langle L_9, D_s \rangle = 37 \cdot 45 + 48 \cdot 44 + 59 \cdot 43 + 70 \cdot 42 + 81 \cdot 41 + 2 \cdot 40 + 13 \cdot 39 + 24 \cdot 38 + 35 \cdot 37 = 15369$$

Todas as outras igualdades podem ser verificadas de forma análoga as de cima. De fato, mantendo a simetria, o padrão conjecturado pela *Proposição 4* se mantém. Segue-se com a demonstração.

3.4.7 Demonstração da Proposição 4

Seja $S_{pd} = \langle L_p, D_p \rangle$ onde L_p e D_p são a p -ésima linha (ou coluna) e a diagonal principal, respectivamente, da matriz A da *Proposição 1*. Logo:

$$S_{pd} = \langle L_p, D_p \rangle = \sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{jj}) \quad (3.95)$$

Seja $S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle$ onde L_q e D_p são a q -ésima linha (ou coluna) e a diagonal principal, respectivamente, da matriz A da *Proposição 1*, onde $q = n - p + 1$. Logo:

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = \sum_{j'=n}^1 (a_{qj'} \cdot a_{j'j'}) \quad (3.96)$$

Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n, tem-se que $a_{pj} + a_{qj'} = m_a$ e $a_{jj} + a_{j'j'} = m_a$ para todo $j = 1..n \therefore a_{qj'} = m_a - a_{pj}$ e $a_{j'j'} = m_a - a_{jj}$. Logo, S_{qd} pode ser escrito:

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = \sum_{j'=n}^1 a_{qj'} \cdot a_{j'j'} = \sum_{j'=n}^1 [(m_a - a_{pj}) \cdot (m_a - a_{jj})] \quad (3.97)$$

Realizando primeiramente o produto existente dentro do somatório da equação acima, tem-se:

$$(m_a - a_{pj}) \cdot (m_a - a_{jj}) = m_a^2 - m_a \cdot (a_{pj} \cdot a_{jj}) + a_{pj} \cdot a_{jj} \quad (3.98)$$

Substituindo o resultado acima em S_{qd} e, logo após, separando os somatórios:

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = \sum_{j'=n}^1 [m_a^2 - m_a \cdot (a_{pj} + a_{jj}) + a_{pj} \cdot a_{jj}] \therefore \quad (3.99)$$

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = \sum_{j'=n}^1 m_a^2 - \sum_{j'=n}^1 (m_a \cdot (a_{pj} + a_{jj})) + \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jj}) \quad (3.100)$$

Como $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$ é constante para a matriz A, ele pode sair dos somatórios acima, restando:

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} + a_{jj}) + \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jj}) \therefore \quad (3.101)$$

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j'=n}^1 a_{pj} + \sum_{j'=n}^1 a_{jj} \right) + \sum_{j'=n}^1 (a_{pj} \cdot a_{jj}) \quad (3.102)$$

O próximo passo visa manipular os somatórios com índice j' na equação anterior transformando-os em somatórios usando o índice j , lembrando que $j = 1..n$ e $j' = n - j + 1$. Assim:

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j'=1}^n a_{pj'} + \sum_{j'=1}^n a_{j'j'} \right) + \sum_{j'=1}^n (a_{pj'} \cdot a_{j'j'}) \therefore \quad (3.103)$$

Neste momento, realiza-se o último passo de transformação dos índices j e j' :

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{pj} + \sum_{j=1}^n a_{jj} \right) + \sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{jj}) \quad (3.104)$$

Como A é um *quadrado mágico* invariante de ordem n, tem-se que $m_a = \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n}$ e os dois primeiros somatórios acima são justamente o somatório da p-ésima linha e da diagonal principal linha de A, tornando-se:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj}) = \sum_{j=1}^n (a_{jj}) = \sigma(A) \quad (3.105)$$

Além disso, verifica-se abaixo que o último somatório da equação é justamente o termo S_{pd} que está sendo procurado nesta demonstração, pois:

$$\sum_{j=1}^n (a_{pj} \cdot a_{jj}) = \langle L_p, D_p \rangle = S_{pd} \quad (3.106)$$

Realizando agora todas as substituições em S_{qd} :

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = n \cdot m_a^2 - m_a \cdot (2 \cdot \sigma(A)) + \langle L_p, D_p \rangle \therefore \quad (3.107)$$

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = n \cdot \frac{4 \cdot \sigma(A)^2}{n^2} - \frac{2 \cdot \sigma(A)}{n} \cdot (2 \cdot \sigma(A)) + \langle L_p, D_p \rangle \therefore \quad (3.108)$$

$$S_{qd} = \langle L_q, D_p \rangle = \langle L_p, D_p \rangle = S_{pd} \quad (3.109)$$

■

Observação DP.4.1.

Novamente, não foi feita nenhuma restrição quanto a paridade da ordem n para o resultado demonstrado da *Proposição 4*, logo ela é válida para ordens pares e ímpares.

Observação DP.4.2.

A demonstração usando a diagonal secundária de A , D_s , é análoga a de cima.

3.4.8 Corolário 2

Seja A um *quadrado mágico* invariante de ordem n . Sejam u e v vetores do \mathbb{R}^n tais que u e v são obtidos da p -ésima e da q -ésima linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária), respectivamente, de A .

O ângulo θ , formado entre os vetores u e v , terá medida igual ao do ângulo θ' entre os vetores u' e v' , onde u' e v' são os vetores do \mathbb{R}^n obtidos da p' -ésima e q' -ésima linhas (ou

colunas, ou diagonal principal ou secundária), respectivamente, de A, onde $p' = n - p + 1$ e $q' = n - p + 1$.

Em outras palavras, pares de vetores obtidos de linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária) de um *quadrado mágico* invariante de qualquer ordem formam um ângulo entre si de medida igual ao do ângulo do par de linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária) de índice simétricos ao primeiro par.

Demonstração:

Sabe-se, dá Álgebra Linear, que:

$$\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\theta) \therefore \cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} \quad (3.110)$$

Mas, usando o resultado demonstrado das proposições 1 a 4, tem-se que:

$$\langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle \quad (3.111)$$

Além disso,

$$|u| = (\langle u, u \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle u', u' \rangle)^{\frac{1}{2}} = |u'| \quad (3.112)$$

$$|v| = (\langle v, v \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle v', v' \rangle)^{\frac{1}{2}} = |v'| \quad (3.113)$$

Logo,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{\langle u', v' \rangle}{|u'| \cdot |v'|} = \cos(\theta') \therefore \cos(\theta) = \cos(\theta') \quad (3.114)$$

Como θ e θ' estão entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, tem-se que $\theta \equiv \theta'$.

■

Exemplo:

Embora a demonstração acima seja válida para qualquer dimensão n, pode-se visualizar geometricamente este resultado para o caso de *quadrados mágicos* ordem 3, pois os mesmos geram vetores no espaço \mathbb{R}^3 . Seja A o *quadrado mágico* de ordem 3 abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 93 & 51 & 147 \\ 151 & 97 & 43 \\ 47 & 143 & 101 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

Cada linha, coluna ou diagonal de A será um vetor do \mathbb{R}^3 . Como já foi demonstrado, todo *quadrado mágico* de ordem 3 é invariante, logo o resultado anterior pode ser aplicado.

Sejam $u = (93, 51, 147)$, $v = v' = (151, 97, 43)$ e $u' = (47, 143, 101)$ vetores correspondentes às linhas de A.

Logo, calculando os cossenos dos ângulos entre os vetores:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{\langle (93, 51, 147), (151, 97, 43) \rangle}{|(93, 51, 147)| \cdot |(151, 97, 43)|} = \frac{25311}{(32859)^{1/2} \cdot (34059)^{1/2}} \quad (3.116)$$

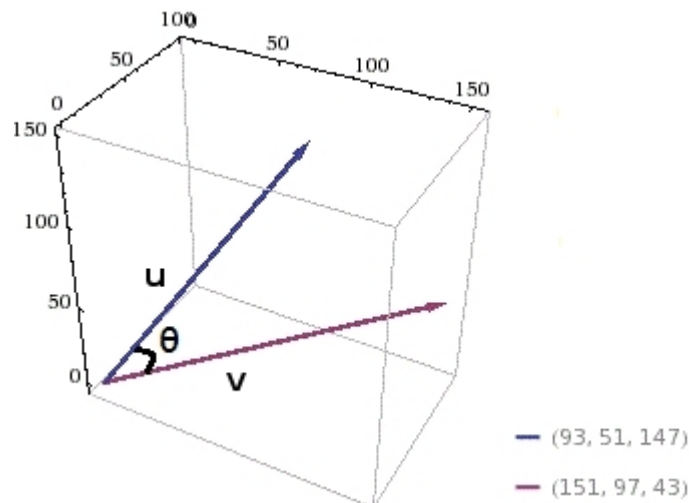
$$\cos(\theta') = \frac{\langle u', v' \rangle}{|u'| \cdot |v'|} = \frac{\langle (47, 143, 101), (151, 97, 43) \rangle}{|(47, 143, 101)| \cdot |(151, 97, 43)|} = \frac{25311}{(32859)^{1/2} \cdot (34059)^{1/2}} \quad (3.117)$$

Logo,

$$\theta \equiv \theta' = 0,71269912 \text{ rad} = 40,83465168 \text{ graus}$$

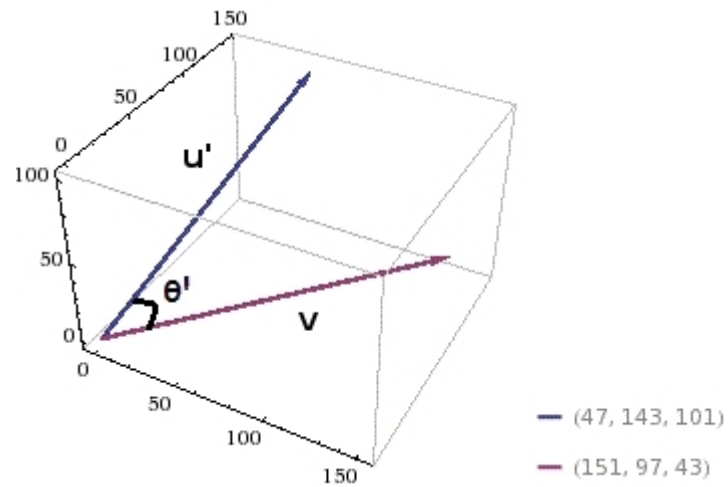
Utilizando a ferramenta de geração de gráficos fornecido por Alpha (2015), pode-se representar graficamente os ângulos θ e θ' conforme a figura abaixo:

Figura 8 – Ângulo θ formado entre os vetores das duas primeiras linhas de A



Fonte: Elaborado pelo autor.

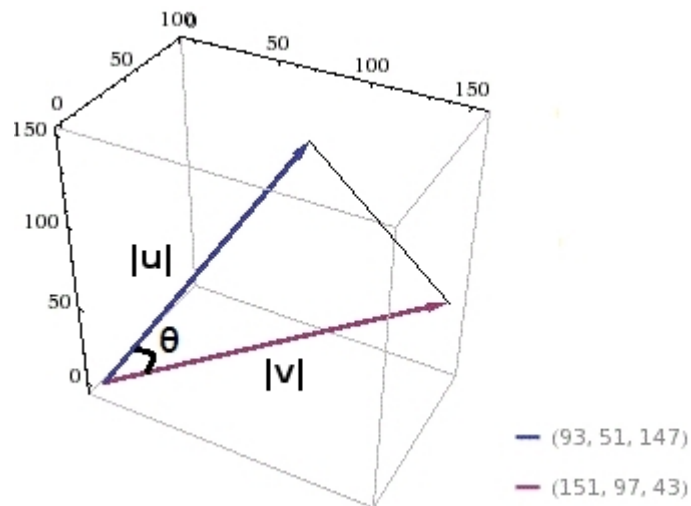
Figura 9 – Ângulo θ' formado entre os vetores das duas últimas linhas de A



Fonte: Elaborado pelo autor.

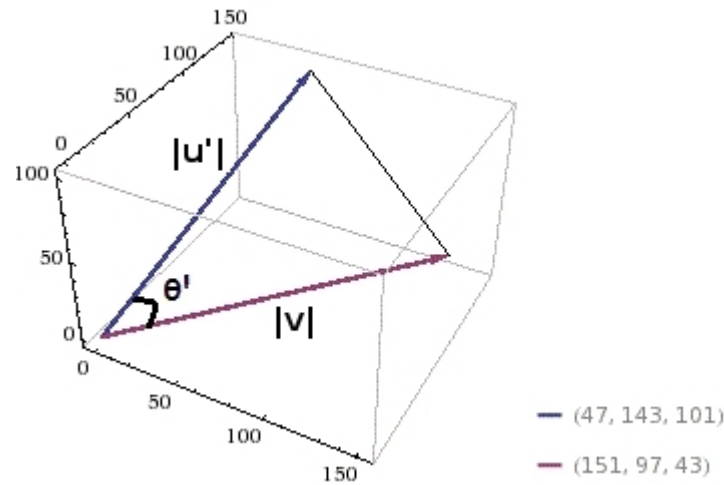
O resultado obtido usando-se colunas ou diagonais de A é análogo. Além disso, ainda se pode demonstrar a congruência entre o triângulo determinado pela origem dos eixos O e os segmentos de reta associados aos vetores u e v com o triângulo determinado por O e os segmentos de reta associados aos vetores u' e v .

Figura 10 – Triângulo determinado pela origem O e pelos vetores u e v



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Triângulo determinado pela origem O e pelos vetores u' e v



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como já visto antes, os comprimentos dos segmentos associados a $|u|$ e $|u'|$ são os mesmos, pois $|u| = (\langle u, u \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle u', u' \rangle)^{\frac{1}{2}} = |u'|$. Além disso, ambos os triângulos possuem um ângulo correspondente congruente, pois $\theta \equiv \theta'$, e possuem o segmento associado a $|v|$ em comum. Assim, usando-se o caso de congruência LAL, ambos os triângulos são congruentes.

Existe outra maneira de demonstrar que os triângulos acima possuem mesma área. Como θ e θ' estão entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e $\theta \equiv \theta'$, tem-se que $\sin(\theta) = \sin(\theta')$. Os comprimentos dos segmentos associados a $|u|$ e $|u'|$ são os mesmos e seja $|v|$ o comprimento do segmento associado ao vetor v .

Pode-se utilizar o produto vetorial entre dois vetores para calcular área do triângulo. Sabe-se que o módulo produto vetorial entre u e v é:

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin(\theta) \quad (3.118)$$

A área do triângulo de lados $|u|$ e $|v|$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$A = \frac{|u \times v|}{2} \quad (3.119)$$

Seja A a área do triângulo associado a u e v , e A' a área do triângulo associado a $|u'|$ e $|v|$. Logo:

$$A = \frac{|u \times v|}{2} = \frac{|u| \cdot |v| \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{|u'| \cdot |v| \cdot \sin(\theta')}{2} = \frac{|u' \times v|}{2} = A' \quad (3.120)$$

3.4.9 Corolário 3

Seja A um *quadrado mágico* invariante de ordem n . Sejam U e V pontos do \mathbb{R}^n tais que U e V são obtidos da p -ésima e da q -ésima linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária), respectivamente, de A .

A distância $d(U, V)$, entre os pontos U e V , terá medida igual a distância $d(U', V')$ entre os pontos U' e V' , onde U' e V' são os pontos do \mathbb{R}^n obtidos da p' -ésima e q' -ésima linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária), respectivamente, de A , onde $p' = n - p + 1$ e $q' = n - q + 1$.

Em outras palavras, pares de pontos obtidos de linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária) de um *quadrado mágico* invariante de qualquer ordem distam entre si de medida igual à distância do par de linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária) de índice simétricos ao primeiro par.

Demonstração:

Pode-se entender a distância entre dois pontos U e V como $d(U, V) = |u - v|$, em que o u e v são os vetores associados aos pontos U e V . Assim, usando os resultados já conhecidos das propriedades de norma e de produto escalar, tem-se:

$$d(U, V) = |u - v| \quad \therefore \quad (3.121)$$

$$d(U, V)^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u - v \rangle - \langle v, u - v \rangle \quad \therefore \quad (3.122)$$

$$d(U, V)^2 = \langle u - v, u \rangle - \langle u - v, v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \quad \therefore \quad (3.123)$$

$$d(U, V)^2 = \langle u, u \rangle - 2 \cdot \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \quad \therefore \quad (3.124)$$

Mas, novamente usando o resultado demonstrado das proposições 1 a 4, tem-se que:

$$\langle u, u \rangle = \langle u', u' \rangle, \langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle, \langle v, v \rangle = \langle v', v' \rangle \quad (3.125)$$

Em que o u' e v' são os vetores associados a U' e V' . Logo:

$$d(U, V)^2 = \langle u, u \rangle - 2 \cdot \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u', u' \rangle - 2 \cdot \langle u', v' \rangle + \langle v', v' \rangle = d(U', V')^2 \therefore \quad (3.126)$$

$$d(U, V) = d(U', V') \quad (3.127)$$

■

3.4.10 Corolário 4

Seja A um *quadrado mágico* de ordem 3. Sejam $U, V=V'$ e U' pontos do espaço tais que $U, V=V'$ e U' são obtidos das 3 linhas (ou colunas, ou diagonal principal ou secundária) de A . Seja T o triângulo cujos vértices são $U, V=V'$ e U' . T será sempre um triângulo isóceles e terá seu baricentro no ponto:

$$B = \frac{\sigma(A)}{3} \cdot (1, 1, 1) \quad (3.128)$$

Demonstração:

Usando diretamente o resultado do corolário anterior, tem-se que $d(U, V) = d(U', V)$, o que garante que o triângulo $T = UVU'$ é isóceles de base UU' .

Sejam (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) as coordenadas dos pontos $U, V=V'$ e U' , respectivamente. Seja $B = (x_b, y_b, z_b)$ o baricentro de T . Pode-se calcular as coordenadas x_b, y_b e z_b , em função dos vértices de T , da seguinte maneira:

$$x_b = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\sigma(A)}{3} \quad (3.129)$$

$$y_b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\sigma(A)}{3} \quad (3.130)$$

$$z_b = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{\sigma(A)}{3} \quad (3.131)$$

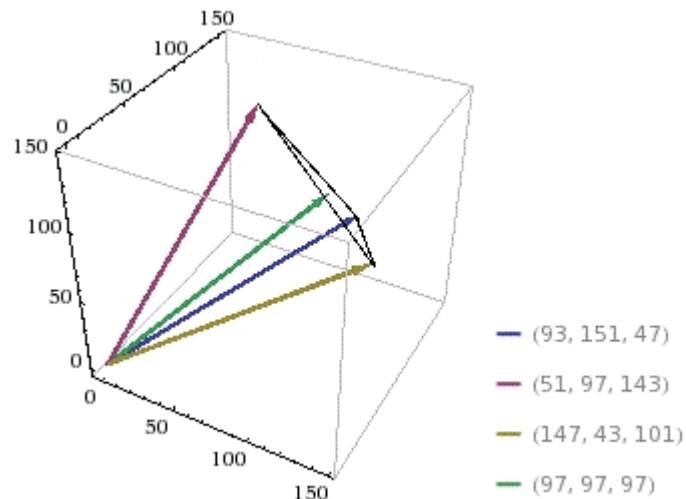
Logo, o baricentro B do triângulo T :

$$B = (x_b, y_b, z_b) = \left(\frac{\sigma(A)}{3}, \frac{\sigma(A)}{3}, \frac{\sigma(A)}{3} \right) = \frac{\sigma(A)}{3} \cdot (1, 1, 1) \quad (3.132)$$



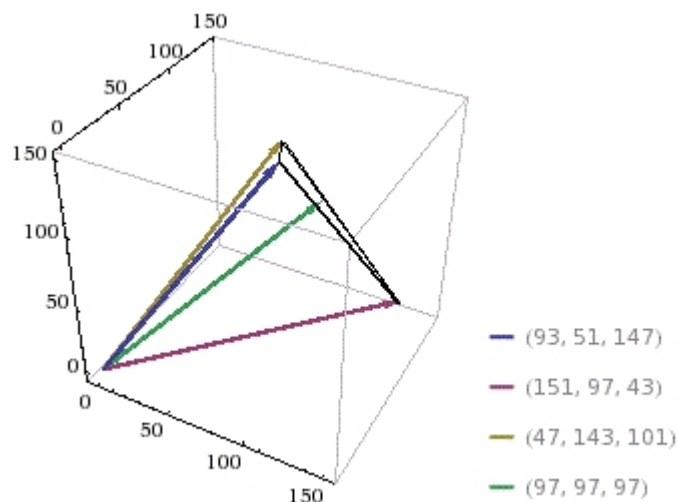
Usando o exemplo (3.115), pode-se representar T e seu baricentro graficamente no ponto $(97,97,97)$:

Figura 12 – Triângulo formado pelos pontos cujas coordenadas são as colunas de A



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – Triângulo formado pelos pontos cujas coordenadas são as linhas de A



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além dos dois triângulos anteriores cujo baricentro está em $\frac{\sigma(A)}{3} \cdot (1, 1, 1)$, existem outros triângulos isóceles que podem ser construídos a partir de coordenadas formadas pelos elementos das linhas ou colunas de um *quadrado mágico* de ordem 3. Considerando o *quadrado mágico* Lo-shu, podem-se observar os seguintes resultados:

$$Ls_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) $\{ C_2, C_1, C_3 \} = \{ (1,5,9), (8,3,4), (6,7,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(5, 5, 5)$;
- b) $\{ C_2^*, C_1, C_3 \} = \{ (9,5,1), (8,3,4), (6,7,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(23/3, 5, 7/3)$;
- c) $\{ D_p, C_1, C_3 \} = \{ (8,5,2), (8,3,4), (6,7,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(22/3, 5, 8/3)$;
- d) $\{ D_p^*, C_1, C_3 \} = \{ (2,5,8), (8,3,4), (6,7,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(16/3, 5, 14/3)$;
- e) $\{ D_s, C_1, C_3 \} = \{ (6,5,4), (8,3,4), (6,7,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(20/3, 5, 10/3)$;
- f) $\{ D_s^*, C_1, C_3 \} = \{ (4,5,6), (8,3,4), (6,7,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(6, 5, 4)$;
- g) $\{ L_2, L_1, L_3 \} = \{ (3,5,7), (8,1,6), (4,9,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(5, 5, 5)$;
- h) $\{ L_2^*, L_1, L_3 \} = \{ (7,5,3), (8,1,6), (4,9,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(19/3, 5, 11/3)$;
- i) $\{ D_p, L_1, L_3 \} = \{ (8,5,2), (8,1,6), (4,9,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(20/3, 5, 10/3)$;
- j) $\{ D_p^*, L_1, L_3 \} = \{ (2,5,8), (8,1,6), (4,9,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(14/3, 5, 16/3)$;
- k) $\{ D_s, L_1, L_3 \} = \{ (6,5,4), (8,1,6), (4,9,2) \} \rightarrow$ Segmento de reta, $B=(6, 5, 4)$;
- l) $\{ D_s^*, L_1, L_3 \} = \{ (4,5,6), (8,1,6), (4,9,2) \} \rightarrow$ Tr. isóceles, $B=(16/3, 5, 14/3)$.

Onde C_i representa a coluna de índice i ; L_i representa a linha de índice i ; D_p representa a diagonal principal; D_s representa a diagonal secundária; * indica que a linha, coluna ou diagonal é lida com as coordenadas posicionadas em ordem inversa; B é baricentro do triângulo gerado.

Uma primeira observação reside no fato de que, se for considerada a matriz transposta de Ls_1 , serão obtidos os mesmos triângulos acima, mas aparecerão primeiramente os triângulos de letra g a l , e depois aparecerão os de letra a a f , resultado previsto que remete à ideia da transposição realizada em Ls_1 . O caso k acima resulta em um segmento de reta cujo ponto médio é um dos vértices do suposto triângulo k , que pode ser compreendido como um caso degenerado de triângulo isóceles. Os pontos de k são linearmente dependentes.

Entretanto, considere agora a troca de posição entre a primeira e a terceira linhas de Ls_1 , gerando o *quadrado mágico* Ls_2 :

$$Ls_2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

A partir deste novo *quadrado mágico* Ls_2 , também podem ser formados 12 triângulos isóceles, 6 deles serão novos em relação aos encontrados em Ls_1 e 6 serão repetidos, conforme vistos abaixo.

Destacam-se os novos triângulos:

$$\text{a) } \{ C_2, C_1, C_3 \} = \{ (9,5,1), (4,3,8), (2,7,6) \};$$

$$\text{b) } \{ C_2^*, C_1, C_3 \} = \{ (1,5,9), (4,3,8), (2,7,6) \};$$

$$\text{c) } \{ D_p, C_1, C_3 \} = \{ (4,5,6), (4,3,8), (2,7,6) \};$$

$$\text{d) } \{ D_p^*, C_1, C_3 \} = \{ (6,5,4), (4,3,8), (2,7,6) \};$$

$$\text{e) } \{ D_s, C_1, C_3 \} = \{ (2,5,8), (4,3,8), (2,7,6) \},$$

$$\text{f) } \{ D_s^*, C_1, C_3 \} = \{ (8,5,2), (4,3,8), (2,7,6) \}.$$

Destacam-se os triângulos repetidos:

$$\text{g) } \{ L_2, L_1, L_3 \} = \{ (3,5,7), (4,9,2), (8,1,6) \};$$

$$\text{h) } \{ L_2^*, L_1, L_3 \} = \{ (7,5,3), (4,9,2), (8,1,6) \};$$

$$\text{i) } \{ D_p, L_1, L_3 \} = \{ (4,5,6), (4,9,2), (8,1,6) \};$$

$$\text{j) } \{ D_p^*, L_1, L_3 \} = \{ (6,5,4), (4,9,2), (8,1,6) \};$$

$$\text{k) } \{ D_s, L_1, L_3 \} = \{ (2,5,8), (4,9,2), (8,1,6) \};$$

$$\text{l) } \{ D_s^*, L_1, L_3 \} = \{ (8,5,2), (4,9,2), (8,1,6) \}.$$

Considere, então, a troca de posição entre a primeira e a terceira colunas de Ls_1 , gerando o *quadrado mágico* Ls_3 :

$$Ls_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Novamente, a partir deste novo *quadrado mágico* Ls_3 , podem ser encontrados outros 12 triângulos isóceles, 6 repetidos em relação a Ls_1 ou Ls_2 , e 6 sem que haja repetição. São eles:

Destacam-se triângulos repetidos:

- a) $\{ C_2, C_1, C_3 \} = \{ (1,5,9),(6,7,2),(8,3,4) \};$
 b) $\{ C_2^*, C_1, C_3 \} = \{ (9,5,1),(6,7,2),(8,3,4) \};$
 c) $\{ D_p, C_1, C_3 \} = \{ (6,5,4),(6,7,2),(8,3,4) \};$
 d) $\{ D_p^*, C_1, C_3 \} = \{ (4,5,6),(6,7,2),(8,3,4) \};$
 e) $\{ D_s, C_1, C_3 \} = \{ (8,5,2),(6,7,2),(8,3,4) \};$
 f) $\{ D_s^*, C_1, C_3 \} = \{ (2,5,8),(6,7,2),(8,3,4) \}.$

Destacam-se os novos triângulos:

- g) $\{ L_2, L_1, L_3 \} = \{ (7,5,3),(6,1,8),(2,9,4) \};$
 h) $\{ L_2^*, L_1, L_3 \} = \{ (3,5,7),(6,1,8),(2,9,4) \};$
 i) $\{ D_p, L_1, L_3 \} = \{ (6,5,4),(6,1,8),(2,9,4) \};$
 j) $\{ D_p^*, L_1, L_3 \} = \{ (4,5,6),(6,1,8),(2,9,4) \};$
 k) $\{ D_s, L_1, L_3 \} = \{ (8,5,2),(6,1,8),(2,9,4) \};$
 l) $\{ D_s^*, L_1, L_3 \} = \{ (2,5,8),(6,1,8),(2,9,4) \}.$

Como resultado, estas três constatações anteriores indicam que, dado um *quadrado mágico* de ordem 3, podem ser gerados até 24 triângulos isóceles diferentes se considerados os pontos formados pelos elementos das linhas e colunas da matriz do *quadrado mágico*. Como um *quadrado mágico* de ordem 3 pode ser gerado usando 9 termos consecutivos de qualquer P.A., pode-se dizer que esses termos geram 24 triângulos isóceles no espaço \mathbb{R}^3 se dispostos com em um *quadrado mágico* de ordem 3. Para ordens maiores que 3, tem-se um resultado análogo: estruturas do \mathbb{R}^n em que dois pontos distam igualmente de um terceiro, quando escolhidos apropriadamente.

4 APLICAÇÕES E CORRELAÇÕES DO TEMA

4.1 APLICAÇÃO DO TEMA EM SALA DE AULA

Do ponto de vista da aplicação didática em sala de aula, como a parte bem introdutória referente às propriedades matemáticas dos *quadrados mágicos* é de fácil constatação prática, embora nem sempre de fácil demonstração, pode-se apresentá-las aos alunos desde o ensino fundamental ou médio e mesmo aplicar desafios como descobrir novas propriedades não mostradas pelo professor. Através do uso dos quadrados mágicos, poderia-se até criar um contexto para uma breve introdução ao conceito de matrizes no ensino fundamental, ainda que apenas introduzindo a definição do que é uma matriz $m \times n$, soma de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar, no caso, um valor real.

Outro ponto interessante, após definir o conceito de ordem de uma matriz, é mostrar alguns dos algoritmos de obtenção dos quadrados mágicos de ordem par e ímpar. Novamente, após mostrar o caso clássico de obtenção de um quadrado mágico normal de ordem 3, onde a constante mágica é 15, poder-se-ia começar com o desafio de obter um quadrado mágico de ordem 5, o que já é bem difícil sem o uso de um algoritmo conhecido. Isso criaria a ambiência para o interesse em aprender os métodos descritos nesta dissertação. Além de conseguir mostrar o tema propriamente dito, o professor implicitamente estaria desenvolvendo nos alunos a habilidade das operações de soma e multiplicação, além do estabelecimento do conceito intuitivo de algoritmo: um conjunto passos bem determinados e finitos para se chegar a um objetivo. Essa experiência é factível e relata-se a constatação de duas professoras que aplicaram o tema *quadrado mágico* em sala de aula:

"Por meio da utilização do quadrado mágico exploramos operações de adição e subtração considerando diferentes estratégias de cálculos usadas pelos alunos. Essa atividade estimulou o trabalho em equipe e o espírito competitivo saudável nas duas turmas. Durante a realização da aula com o quadrado mágico as professoras P1 e P2 identificaram a potência matemática dessa tarefa de compor um quadrado com soma mágica. O trabalho serviu para que os alunos revissem conceitos e estratégias de cálculo mental e de fatos fundamentais de adição e subtração. Além disso, percebemos a empolgação e satisfação dos alunos em trabalhar com o quadrado mágico. Essa atividade lúdica funciona para os alunos como um jogo de estratégia mental."(PALMEIRA C. A. E PRANE, 2012, p. 44)

Cita-se um segundo relato positivo a respeito da aplicação do conteúdo em sala de aula. Conforme Ferreira (2013, p. 40), em outra aplicação para o ensino fundamental em uma classe, 27 dos 32 alunos compreenderam o conceito e resolveram o problema passado pela professora. Os demais foram um pouco mais lentos, mas obtendo êxito também no trabalho.

Caso essa abordagem fosse realizada, conforme visto nestes dois exemplos, de forma muito segura, o professor no ensino médio teria bem mais facilidade quando fosse apresentar o conteúdo de matrizes. No ensino médio, os quadrados mágicos e suas propriedades podem-se ser apresentados logo após o conceito formal de matrizes e todas as suas propriedades comumente estudadas, o que atrairia mais a atenção dos alunos para matéria, pois muitos a acham abstrata demais. É comum ouvir perguntas do tipo: "Para quê na vida prática vou aplicar as matrizes e suas propriedades?". Os *quadrados mágicos* surgem, então, como um exemplo especial e curioso da aplicação do conteúdo de matrizes.

Com o intuito de despertar o interesse dos alunos, desafios sobre novas propriedades e mesmo demonstrações do valor da constante mágica de um *quadrado mágico* normal poderiam ser apresentados. Isso ajudaria inclusive como exemplo de aplicação de progressões aritméticas. Outros desafios, pelo menos a título de exemplo, poderiam ser lançados pelo professor. Como sugestão, foram elaboradas 10 perguntas sobre o tema que poderiam ser aplicadas diretamente em sala de aula, mas é certo que o conteúdo pode ser muito mais explorado através de outras perguntas ou atividades lúdicas como nos trabalhos desenvolvidos por Palmeira C. A. e Prane (2012) e Ferreira (2013). As perguntas sugeridas para despertar o interesse dos alunos por matrizes são:

- a) Será que um quadrado mágico multiplicado por um valor real qualquer gera um outro quadrado mágico? Explique.
- b) Será que se somarmos um valor real qualquer a cada elemento de um quadrado mágico teremos outro quadrado mágico? Cite exemplos.
- c) No caso anterior, qual será o valor da constante mágica do novo quadrado mágico?
- d) Podemos gerar um quadrado mágico com n^2 termos de uma progressão aritmética? Cite um exemplo usando uma progressão aritmética com razão maior que 1.
- e) A soma ou subtração de dois quadrados mágicos de mesma ordem geram um novo quadrado mágico? Exemplifique.
- f) Podem existir quadrados mágicos formados apenas por números negativos? Justifique sua resposta.
- g) E quanto a multiplicação de dois quadrados mágicos de mesma ordem, o resultado é necessariamente um quadrado mágico? Explique.
- h) A matriz formada pelo quadrado dos elementos de um quadrado mágico de ordem n é um quadrado mágico? Cite dois exemplos em que isso ocorre.

- i) Sabendo que uma matriz é um quadrado mágico normal de ordem n , como podemos prever o valor de sua constante mágica?
- j) Existem quadrados mágicos formados apenas por números primos? Pesquise exemplos e traga para sala de aula.
- k) Cite exemplos de quadrados mágicos usando números complexos com parte imaginária diferente de zero.
- l) Cite exemplos de quadrados mágicos formados apenas por inteiros gaussianos.
- m) Cite exemplos de quadrados mágicos formados apenas por números fracionários.
- n) Tente obter exemplos de quadrados mágicos formados apenas por números irracionais.

Ainda no ensino médio, os alunos já tem um contato com o conceito de vetor, geralmente introduzido pelo fato do estudo da física. Acontece que o conceito vetorial utilizado pela física do ensino médio é puramente geométrico. A título de expandir o horizonte de conhecimento dos alunos, caso o professor tivesse tempo e ambiência para abordar o tema, poderia dar outra definição mais algébrica do conceito de vetor, uma vez que os alunos já tem um conhecimento em 2 dimensões a respeito de pares ordenados no plano cartesiano. Caso o professor consiga introduzir o conceito de vetor para n dimensões, após uma breve introdução ao conceito de produto escalar euclidiano, ele poderia apresentar o resultado provado no *Capítulo 2* do produto escalar euclidiano entre linhas ou colunas de um *quadrado mágico* simétrico de ordem n . Isso daria possibilidade inclusive para que a demonstração dessa propriedade fosse feita, visto que o restante do conhecimento necessário seria todo abordado no ensino médio.

Caso o professor não quisesse introduzir o conceito algébrico de vetor e produto escalar, ainda assim, a propriedade poderia ser mostrada como curiosidade. O professor também poderia criar um trabalho para os alunos pesquisarem outras propriedades na *Internet* e trazê-las para sala de aula. Todos esses pontos têm a função de, entre outros objetos, despertar o interesse do aluno pela estudo da matemática.

4.2 CORRELAÇÃO DO TEMA COM A FÍSICA

Os modelos matemáticos são importantes para vários campos do conhecimento humano. Dentre esses campos, a Física sempre teve um relacionamento muito forte com a Matemática a fim de aferir ou prever os fenômenos naturais e os *quadrados mágicos* parecem servir de modelo hipotético para certas simetrias encontradas em alguns desses fenômenos estudados

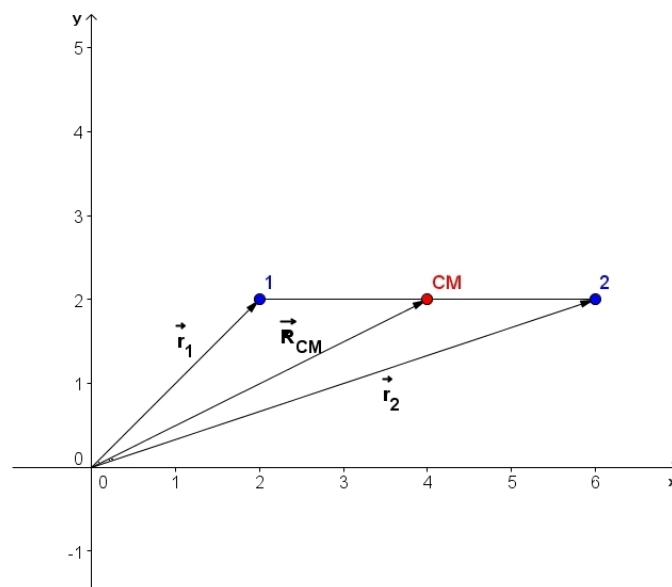
pela Física. Abiyev (2011, p. 33) destaca que muitas vezes prefere-se usar o termo *quadrado balanceado* ao termo *quadrado mágico*. Parte da justificativa reside no fato de que, dado um *quadrado mágico*, se no lugar de cada elemento deste *quadrado mágico* for considerado uma partícula de massa igual ao número que ela substituiu, o centro de massa desse arranjo coincidirá com o centro geométrico dessa matriz. Conforme Abiyev (2011, p. 33), essa é uma das principais propriedades dos *quadrados mágicos* ou, como ele sugere, *quadrados balanceados*.

Conforme Araujo (2011), o centro de massa de um conjunto discreto de p partículas pode ser obtido pela média das distâncias de cada partícula a um mesmo referencial ponderada pela massa localizada em cada ponto. Assim, representando vetorialmente a definição, tem-se:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^p (m_i \cdot \vec{r}_i) \quad (4.1)$$

Onde \vec{R}_{CM} é o vetor que aponta para o centro de massa; M é o somatório da massa de todas as partículas do sistema; m_i é massa da partícula de índice i e \vec{r}_i é o vetor que aponta para a posição da partícula de índice i . Uma visão esquemática do vetor centro de massa extraída de Araujo (2011) para duas partículas pode ser vista abaixo:

Figura 14 – Centro de massa - CM para duas partículas



Fonte: Extraído de Araujo (2011).

Uma maneira usual de calcular o centro de massa é fazê-lo em termos da decomposição vetorial dos \vec{r}_i nos eixos coordenados. Assim, cada vetor posição poderá ser obtido agora pela leitura da coordenada do ponto da partícula em um determinado eixo.

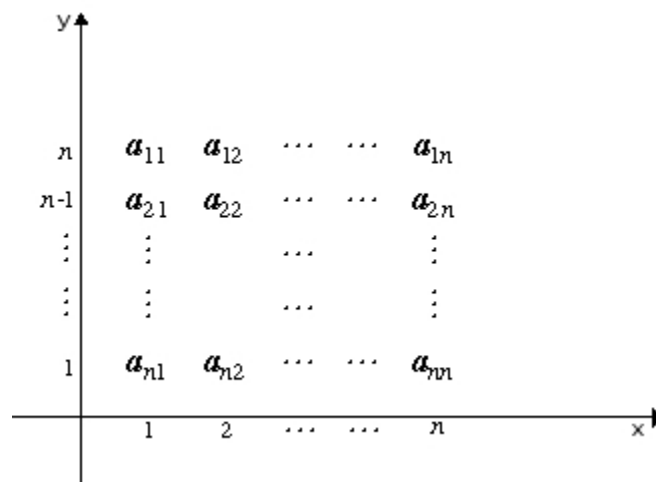
Para constatar o fato do centro de massa coincidir com o centro geométrico do *quadrado mágico*, conforme descrito por Abiyev (2011, p. 33), será calculado agora a posição

no eixo das abscissas do ponto relativo ao centro de massa. Assim, tem-se:

$$CM_x = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^p (m_i \cdot x_i) \quad (4.2)$$

Dispondo os elementos de um *quadrado mágico* de ordem n no plano cartesiano exatamente nas respectivas posições dos índices de seus elementos, pode-se montar a seguinte figura:

Figura 15 – Quadrado mágico de ordem n disposto no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, expandindo o somatório (4.2) para cada coluna da matriz, tem-se:

$$CM_x = \frac{1}{M} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (1 \cdot a_{j1}) + \sum_{j=1}^n (2 \cdot a_{j2}) + \dots + \sum_{j=1}^n (n \cdot a_{jn}) \right) \therefore \quad (4.3)$$

$$CM_x = \frac{1}{M} \cdot (1 \cdot \sigma(A) + 2 \cdot \sigma(A) + \dots + n \cdot \sigma(A)) = \frac{1}{M} \cdot \sigma(A) \cdot (1 + 2 + \dots + n) \therefore \quad (4.4)$$

$$CM_x = \frac{1}{M} \cdot \sigma(A) \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} \quad (4.5)$$

Mas M é o somatório das massas de todas as partículas, que é o mesmo que somar as n linhas separadamente do *quadrado mágico*. Assim, $M = n \cdot \sigma(A)$. Então:

$$CM_x = \frac{1}{n \cdot \sigma(A)} \cdot \sigma(A) \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{n+1}{2} \quad (4.6)$$



De fato, $\frac{n+1}{2}$ é a coordenada no eixo das abscissas do ponto referente ao centro da matriz, conforme previsto. Repetindo o mesmo processo para o eixo y, a solução seria análoga. Assim, o centro de massa do arranjo de partículas coincidirá com o centro geométrico dessa matriz. Esse mesmo resultado pode ser estendido para três dimensões caso se estivesse trabalhando com *cubos mágicos* de ordem n.

Além desta propriedade ligada ao centro de massa, Abiyev (2011) faz uma relação entre a disposição de cargas elétricas nos elementos da matriz de um *quadrado mágico*, calculando o vetor momento elétrico em seu centro. Assim, ele estabelece as condições em que este vetor é nulo no centro do *quadrado mágico*, expandindo a noção de *quadrado balanceado* para o caso elétrico.

Abiyev (2011) também conjectura a possibilidade de existir uma correlação entre os termos de certas sequências que aparecem no estudo do vetor momento elétrico quando cargas estão dispostas como em um *quadrado mágico*. Estas sequências sugerem uma vinculação com algumas propriedades da tabela periódica, inclusive conjecturando a existência de outros elementos superpesados que ainda não constam na tabela periódica atual.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se pode constatar nesta dissertação, os quadrados mágicos, mesmo sendo estudados há muito tempo, possuem uma série de propriedades ainda não exploradas em sua totalidade. Além da compreensão e da descobertas de novas propriedades, existem, por exemplo, mais métodos de obtenção de quadrados mágicos, ou mesmo variações dos métodos existentes, que podem ser explorados ainda por muito tempo.

Ao longo do *Capítulo 2*, algumas importantes propriedades para o tema foram demonstradas, o que serve de material inicial sobre o assunto para quem quer aplicar tais conhecimentos em sala de aula, ou mesmo para quem deseja verificar as demonstrações por interesse puramente matemático. Do ponto de vista da aplicação didática em sala de aula, conforme discutido no *Capítulo 3*, os *quadrados mágicos* representam uma fonte importante de exemplos, muitas vezes curiosos, que atraem a atenção do aluno para o estudo da matemática. Cabe ao professor e aos autores dos livros do ensino fundamental e médio abordarem o tema com mais ênfase na sala de aula. Certamente o uso do tema facilitaria o entendimento sobre matrizes, à medida em que atrairia a atenção dos alunos para a matéria.

Como continuação deste trabalho, agora no âmbito do ensino superior e demais graus de pesquisa como mestrado e doutorado, os *quadrados mágicos* representam ainda um campo muito maior a ser explorado, com muitas lacunas de demonstrações que devem ser buscadas e compreendidas, ainda mais sob a visão da *Álgebra* e da *Teoria dos Números*. A título de exemplo, Stephens (1993, p. 35), relata a propriedade a respeito dos autovalores calculados a partir dos *quadrados mágicos* de ordem n , onde a constante mágica $\sigma(A)$ aparece novamente como sendo o autovalor de maior valor absoluto. Mattingly (2000) usou este fato, demonstrado com o auxílio do *Teorema de Oskar Perron*, para provar a singularidade de *quadrados mágicos* regulares de ordem par não divisível por 4, deixando ainda pontos para exploração da condição de singularidade nos outros tipos de *quadrados mágicos*.

Além disso, entre outras questões sobre o tema, existem demais tipos de *quadrados mágicos* com propriedades específicas que merecem tratamento atencioso, como os *quadrados mágicos imperfeitos ou defeituosos*, *quadrados hiper-mágicos*, *quadrados mágicos diabólicos*, entre outros. Os *quadrados mágicos aditivos*, onde a constante mágica é o somatório de uma linha, coluna ou diagonal, é comumente estudado, mas existem também os *quadrados mágicos multiplicativos*, onde no lugar de da operação de soma dos elementos das linhas, colunas ou diagonais, é executada a operação de multiplicação. Este tipo particular de *quadrado mágico* também não foi abordado nesta dissertação. Pode-se tentar buscar algum padrão de formação ou de operação para este tipo de *quadrado mágico*, assim como foi feito para os *quadrados mágicos aditivos invariantes*.

Essa mesma linha de pesquisa também deve ser aplicada aos *cubos mágicos de ordem e dimensão n* , que consiste de uma generalização ainda maior que os *quadrados mágicos*, que embora apresentem ordem n , são matrizes bidimensionais. Os *cubos mágicos de ordem e dimensão n* apresem, em uma componente adicional ao *quadrado mágico*, outros $n - 1$ *quadrados mágicos* superpostos, formando assim um cubo. Em avaliações iniciais, a propriedade da igualdade do produto escalar Euclidiano parece valer também para os *cubos mágicos de ordem e dimensão n* , desde que estes também sejam invariantes. Todos esses pontos são extensões que podem e devem ser abordadas em outros trabalhos futuros.

À medida em que se conhece mais a Natureza, os fenômenos parecem respeitar cada vez mais a ideia de simetria, o que faz com que modelos matemáticos simétricos ou com propriedades simétricas sejam mais requisitados. Abiyev (2011) mostrou que fenômenos físicos podem ser modelados em propriedades pertinentes aos *quadrados mágicos*. O entendimento dessas propriedades, como a do produto escalar entre linhas ou colunas, servirá certamente como ferramental para o desenvolvimento de teorias e explicações de fenômenos que ainda não conseguimos prever no momento.

REFERÊNCIAS

- ABIYEV, A. A. *Recent Researches in Applied Mathematics and Informatics*. [S.l.]: World Scientific and Engineering Academy and Society, Praga, República Checa, 2011. ISBN: 978-1-61804-034-3.
- ALPHA, Wolfram. *Coleta de dados*. Wolfram Alpha LLC, EUA, 2015. Acesso em: 15 jan. 2015. Disponível em: <<http://www.wolframalpha.com/>>.
- ARAUJO, M. *Centro de Massa*. Wiki Ciencias, 2011. Acesso em: 21 nov. 2015. Disponível em: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Centro_de_massa>.
- ARXIV. *Coleta de dados*. Cornell University, Nova York, EUA, 2015. Acesso em: 15 jan. 2015. Disponível em: <http://arxiv.org/find/grp_cs,grp_math/1/ti:+AND+magic+squares/0/1/0/all/0/1>.
- BOUCHER J. E BARROS, F. P. *Simbólica Maçonica*. [S.l.]: Dervy-Livres, Paris, França, 1948.
- BRUMGNACH, E. *The Gamma plus two method for generating odd order magic squares*. Queensborough Community College, Nova York, EUA, 2007. Acesso em: 23 dez. 2014. Disponível em: <http://www.qcc.cuny.edu/engtech/ET_Faculty/Brumgnach/Magic_Squares/Gamma_plus_two_method_for_odd_magic_squares.pdf>.
- BRUMGNACH, E. *The Lost Symbol - Magic Squares and the Masonic Cipher*. Queensborough Community College, Nova York, EUA, 2009. 43'14". Acesso em: 23 dez. 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=6fedjvyRt5w>>.
- CAHU, R. D. *Quadrados mágicos de ordem ímpar a partir de quadrados latinos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife-PE, 2013.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. [S.l.]: Unicamp, Campinas-SP, Brasil, 2002.
- FERREIRA, A. G. Laboratório de matemática: resultados de um diagnóstico feito em sala de aula. *Revista Espaço Acadêmico*, v. 01, n. 140, 2013.
- HOSPEL, T. *The math behind the Siamese method of generating magic squares*. 2002. Acesso em: 07 jan. 2015. Disponível em: <<http://thospel.home.xs4all.nl/siamese.html>>.
- MACHADO, J. S. *Quadrados mágicos com aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza-CE, 2013.
- MATTINGLY, R. B. Even order regular magic squares are singular. *The American Mathematical Monthly*, v. 107, n. 9, 2000.
- PALMEIRA C. A. E PRANE, B. Z. D. O quadrado mágico: Experiências no ensino fundamental. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, v. 01, n. 02, 2012.
- PICKOVER, C. A. *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, New Jersey, EUA, 2002.

PICKOVER, C. A. *A Passion for Mathematics, Numbers, Puzzles, Madness, Religion, and the Quest for Reality*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, EUA, 2005.

STEPHENS, D. L. *Matrix properties of magic squares*. Dissertação (Mestrado) — Texas Woman's University, Denton-Texas, EUA, 1993.

TOWNSEND, C. B. *O livro dos desafios 2*. [S.l.]: Ediouro, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2004.

WEISSTEIN, E. W. *Associative Magic Square*. MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2014. Acesso em: 07 jan. 2015. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/AssociativeMagicSquare.html>>.