SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA – UNIR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

IRLAN CORDEIRO DE SOUZA

APLICAÇÕES TEÓRICAS E PRÁTICAS DA TRIGONOMETRIA PARA UM ENSINO SIGNIFICATIVO E INTERDISCIPLINAR

PORTO VELHO
2015

IRLAN CORDEIRO DE SOUZA

APLICAÇÕES TEÓRICAS E PRÁTICAS DA TRIGONOMETRIA PARA UM ENSINO SIGNIFICATIVO E INTERDISCIPLINAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob orientação do professor Dr. **Marinaldo Felipe da Silva**.

PORTO VELHO

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

S729a

Souza, Irlan Cordeiro de.
Aplicações teóricas e práticas da trigonometria para um ensino significativo e interdisciplinar / Irlan Cordeiro de Souza. -- Porto Velho, Rondônia, 2015.
168 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR.

1. Trigonometria – Teoria e prática. 2. Topografia – Teoria e prática. I. Silva, Marinaldo Felipe da. II. Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR. III. Título.

CDU:514.116

Bibliotecária Responsável: Edoneia Sampaio CRB 11/947

Irlan Cordeiro de Souza

Aplicações teóricas e práticas da trigonometria para um ensino significativo e interdisciplinar

Este trabalho foi julgado e aprovado para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Campus de Porto Velho - RO.

Porto Velho, 04 de novembro de 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Orientador/Presidente
PROFMAT / UNIR

Profª. Ms. Marizete Nink de Carvalho
PROFMAT / UNIR

Profª. Drª. Maria das Graças Viana de Sousa
UNIR

Dedico esta dissertação às minhas amadas, mãe e avó (Vilma Cordeiro e Miris Narciso Cordeiro), pelo incondicional apoio e orações.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, o centro e o fundamento de tudo em minha vida, socorro presente na hora da angústia. Agradeço por me mostrar que sou protegido, guiado e iluminado pela sua presença divina no mais íntimo do meu ser. Agradeço Senhor, por todas as dificuldades que passei nesse Mestrado em Matemática, elas foram grandes adversárias, mas que tornaram minha vitória muito mais saborosa.

Agradeço imensamente a minha querida Avó materna, Miris Narciso Cordeiro (Dona Sinhá), que acreditou no meu potencial, arcando por muitos anos com minhas despesas de estudos. Que Deus há abençoe cada dia mais. Que eu possa tê-la sempre comigo, me dando amor, me ouvindo com carinho, me orientando e me aconselhando sempre com muita paciência. Você é para mim, um grande exemplo de experiência, de trabalho, de honestidade e de fé. Deus lhe deu capacidade para amar, cuidar, educar e ser o coração da nossa família. Muito obrigado por tudo, amo você.

Agradeço imensamente a minha querida Mãe, Vilma Cordeiro, por todos os momentos dedicados a mim, pelas palavras, pelos conselhos, pelo amor, pela honestidade, pelo afeto e pela amizade. Quero agradecer-te por tudo, pelos momentos em que chorei você me fez sorrir. Pelos momentos em que perdi a paciência, você veio com palavras doces e me acalmou. Pelos momentos de alegria, que fez questão de dividir comigo. Pelos momentos que, com muita esperança, pensou junto comigo no nosso futuro.

Essa vitória só foi possível de concretizar, graças à sua presença em todos os momentos de minha vida. Sou muito grato por tudo o que você tem realizado por minha pessoa. Hoje, depois de todos os momentos, bons ou ruins, que passamos juntos, olho para trás e vejo que tenho uma pessoa em quem posso me apoiar sempre que estiver necessitando de amor e compreensão. Muito mais do que mãe, você é uma heroína, sendo meu escudo contra todas as coisas ruins e me poupando do mal. Muito obrigado por tudo, amo você.

A minha querida irmã pelo exemplo de garra e perseverança, e a todos os meus familiares e amigos, que não foram citados, mas que contribuíram de alguma forma para o término dessa jornada.

Ao professor Dr. Marinaldo Felipe da Silva**,** meus profundos agradecimentos à sua orientação, disponibilidade no atendimento às dúvidas, parceria na pesquisa e nobreza em passar os conhecimentos. Obrigado por me ensinar a escutar e a entender que ninguém consegue nada sozinho. Tudo isso permitiu mais do que uma brilhante orientação em um estudo de pós-graduação, mas uma referência de profissional que se preocupa tanto na formação do pesquisador como na formação do ser humano.

Ao Professor Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodrigues, pelos ensinamentos transmitidos ao longo destes semestres e pela amizade demonstrada. Tive com o Senhor a possibilidade de enxergar os vários caminhos que o conhecimento pode nos proporcionar. Obrigado professor, por acreditar em cada um de nós e pelo esforço, de todos os encontros, transmitir não só o que estava no planejamento, mas também o que considerava importante para nossa vida profissional. Pessoa no qual, oportunamente, faço meus agradecimentos aos demais professores do programa.

Aos professores Dr. Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz, Dr. Adeilton Fernandes da Costa, Dr. Flávio Batista Simão, Me. Ronaldo Chaves Cavalcanti, do Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, pela dedicação. Registro aqui minha gratidão.

Aos colegas de mestrado Aldo Brasil de Souza, Ângela Maria Santos de Souza, Antônio Júnior Evangelista, Antônio Sérgio Florindo dos Santos, Dândara Linhares Batista Barbosa, Edinalcio Fernandes Syryczyk, Jair Feliciano Rodrigues, Jesiel Souza da Rocha, Luciano Pinto da Silva, Silmara Matos de Nascimento, Telma Ferreira da Silva Regis e Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior. O valor de nossa amizade não foi provado apenas nos momentos de alegria, mas principalmente nos momentos de dificuldades e tristezas, quando até as lágrimas por terem sido compartilhadas, foram bem menos dolorosas.

Percorremos um longo trajeto, entre nós ficará a lembrança de nossos encontros e desencontros, lutas e decepções. Fica a certeza de que cada um de nós contribuiu para o crescimento do outro. Obrigado a vocês que compartilharam os prazeres e dificuldades desta jornada com os quais convivemos durante tantas horas e carregamos a marca de experiências comuns que tivemos.

Aos idealizadores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional-PROFMAT e pelo material didático rico em informação e detalhes que com certeza será utilizado como material de apoio e pesquisa.

A Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa de estudos a qual trouxe uma melhor condição para participar do programa.

"A teoria sem a prática vira verbalismo, assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade".

Paulo Freire

RESUMO

Ao ensinar trigonometria, no curso Técnico em Agropecuária do Instituto Federal de Rondônia (Campus Ariquemes), detectamos dificuldades causadas pela falta de metodologias adequadas e a ausência de recursos que facilitem a aprendizagem. Muitos alunos alegaram que a Trigonometria é algo complicado e sem utilidade, mas isso se deve ao fato de não entenderem seus fundamentos mais básicos e por não perceberem sua utilidade em nossa vida cotidiana. A partir da observação das dificuldades apresentadas por uma turma de vinte estudantes, foram elaboradas atividades que se diferenciam da memorização de fórmulas e da reprodução de algoritmos. Destacamos duas atividades realizadas pelos alunos; construção e utilização de um Clinômetro para calcular alturas e distâncias inacessíveis e o cálculo da área útil da Instituição por meio do processo de triangulação usado na Topografia, fazendo uso de um Teodolito Eletrônico. A percepção de que a trigonometria possui uma ampla aplicação na topografia, disciplina do curso, constituiu uma nova metodologia capaz de despertar o interesse dos estudantes tornando a aula mais atrativa. Por fim, pudemos verificar uma considerável ampliação dos conhecimentos de trigonometria, em especial, no que diz respeito ao cálculo de distâncias e áreas inacessíveis, obtendo assim, uma aprendizagem significativa. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo apresentar, relatar e analisar os resultados da proposta de se ter trabalhado a trigonometria com atividades práticas e interdisciplinares.

Palavras-chave: Trigonometria. Prática. Interdisciplinar. Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

To teach trigonometry, the Agricultural Technical Course at the Federal Institute of Rondônia (Campus Ariquemes), detected difficulties caused by the lack of appropriate methodologies and the lack of resources that facilitate learning. Many students argued that the Trigonometry is complicated and useless, but this is due to the fact understand its most basic fundamentals and they do not realize its usefulness in our daily lives. From the observation of the difficulties presented by a group of twenty students, activities were developed which differ from memorizing formulas and reproduction algorithms. We highlighted two activities carried out by students; construction and use of a Clinometer to calculate inaccessible heights and distances and calculate the floor area of the institution through the process of triangulation used in Topography, making use of an electronic theodolite. The perception that trigonometry has a wide application in the topography, the course discipline, was a new methodology able to arouse the interest of students making the most attractive class. Finally, we observed a considerable expansion of trigonometry knowledge, in particular with regard to the calculation of distances and inaccessible areas, thus obtaining a significant learning. In this sense, this work aims to present report and analyze the results of the proposal to have worked trigonometry with practical and interdisciplinary activities.

Keywords: Trigonometry. Practice. Interdisciplinary. Meaningful Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Trigonometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, ela começou com uma matemática eminentemente prática para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente, chamando a atenção dos sábios, fossem eles sacerdotes, alquimistas, matemáticos, físicos, astrônomos ou navegadores, devido às inúmeras contribuições que os conhecimentos trigonométricos oferecem à prática cotidiana do homem.

Sem a trigonometria o homem não teria feito as grandes viagens marítimas na época das caravelas, pois, com ela, e mais a posição das estrelas, os navegadores podiam se orientar. Mais tarde, a Astronomia, estudada por egípcios e gregos, deu um grande impulso ao desenvolvimento da trigonometria, tanto que o astrônomo grego Hiparco de Nicéia (190 A.C – 125 A.C) ficou conhecido como "o pai da Trigonometria" por seus trabalhos de sistematização de algumas relações entre elementos de um triângulo.

O desenvolvimento da trigonometria era bastante ligado à Astronomia**,** porém, somente a partir do século XIII é que a Trigonometria foi considerada diferente da Astronomia, quando se iniciou uma interação dela com a análise numérica e geometria, além dos aspectos algébricos que só foram introduzidos por volta do século XVI. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V A.C. obtiveram várias informações que foram transmitidas para os gregos, foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria.

Atualmente, a trigonometria possui inúmeras aplicações em diversas áreas, e não se limita a estudar apenas os triângulos. Encontramos aplicações na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Música, na Medicina, na Astronomia, na Engenharia, enfim, em muitos outros campos da atividade humana. Essas aplicações envolvem conceitos que dificilmente lembram os triângulos, que deram origem à trigonometria, mas sem dúvida não existiriam sem o seu estudo.

Apesar de sua importância, a trigonometria no cotidiano escolar, quando apresentada, é tida como conteúdo complexo e isolado. Isso se justifica, pois se dá ênfase, quase que exclusivamente a aplicação de fórmulas e a demonstrações puramente teóricas e distantes da realidade, não oferecendo condições para interação com as demais disciplinas.

Para Mendes (2013, p.12)[1] a trigonometria é um dos tópicos da Matemática mais rico em aplicações práticas nas diversas áreas de atuação humana. Pode ser utilizada para enriquecer as aulas com atividades práticas que permitam compreender a importância dos conteúdos de trigonometria para o desenvolvimento de algumas profissões, além de proporcionar a integração de outros componentes curriculares.

Essa interação traduz-se em um processo de modificação mútua tanto da estrutura cognitiva inicial como do conteúdo que é preciso aprender, constituindo o núcleo da aprendizagem significativa, o que é crucial para entender as propriedades e as potencialidades.

Para Ausubel (1963, p. 58) [2], aprendizagem significativa é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva à estrutura cognitiva do aprendiz. Segundo a teoria de Ausubel:

> Na aprendizagem significativa há três vantagens essenciais em relação à aprendizagem memorística. Em primeiro lugar, o conhecimento que se adquire de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo. Em segundo, aumenta a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida. E, em terceiro, uma vez esquecida, facilita a aprendizagem seguinte – a “reaprendizagem”, para dizer de outra maneira. A explicação dessas vantagens está nos processos específicos por meio dos quais se produz a aprendizagem significativa onde se implica, como um processo central, a interação entre a estrutura cognitiva prévia do aluno e o conteúdo de aprendizagem. (1982, p. 58)[3].

A aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento.

Para Micotti (1999, p.153 -167)[4], a Matemática a partir da utilização de material concreto torna as aulas mais interativas, assim como incentiva a busca, criação de hipóteses, o interesse e o espírito de investigação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000, p.58)[5] também destacam o emprego de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante expressivo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

O ensino da Matemática quando vinculado às circunstâncias da vida permite superar o caráter abstrato, que surpreende especialmente os alunos, pois as ideias, procedimentos e representações parecem muito distantes daquelas utilizadas na experiência prática ou na vida diária.

Destaca-se ainda a importância de usar diferentes metodologias na busca de soluções para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, em conformidade com o que propõem os PCN(1998) :

> "Não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática." (1998, p.42) [6]

Neste sentido, o presente estudo nos permite dizer que, no que se refere ao ensino da trigonometria, é possível abordá-la associando a teoria e suas aplicações, a fim de favorecer o interesse e a aprendizagem dos alunos, contribuindo para uma formação mais ampla e desenvolvendo as habilidades e competências ao ensino da matemática.

A escolha do tema surgiu em uma aula de matemática no segundo ano do curso Técnico em Agropecuária do Instituto Federal de Rondônia, campus Ariquemes, onde a disciplina de topografia faz parte da grade curricular. Um grupo de alunos precisava medir a altura de uma palmeira a pedido do professor de topografia, e poderiam usar qualquer tipo de instrumento ou técnica. Os alunos tinham toda a teoria de semelhança de triângulos e de trigonometria necessária para o cálculo em mãos, mas não sabiam como aplicar, pois até então os exercícios ensinados nas aulas de matemática não faziam referência à prática, eram simplesmente mecânicos.

Assim sendo, fica difícil para o professor, preocupado com a aprendizagem de seus alunos, ignorar tal deficiência. Isso fez com que um trabalho interdisciplinar com a disciplina de Topografia fosse iniciado, afim de que estimulássemos a pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento. Em lugar de simplesmente imitar, repetir e seguir o que o professor fez e ensinou.

Usamos para os cálculos um Clinômetro (aparelho usado para medir ângulos verticais), construído pelos alunos, e um Teodolito Eletrônico (aparelho usado por Topógrafos para medir ângulos verticais, horizontais).

Desta forma, acreditamos que atividades práticas ajudam a tornar a aula mais atraente, diversificada, ilustrada e, consequentemente, mais produtiva.

A avaliação destes alunos teve que indicar se são capazes de executar a atividade proposta com confiança e eficiência; de justificar os passos de um procedimento; reconhecer se ele é adequado ou não a determinada situação e, sobretudo, se são capazes de criar novos procedimentos corretos e simples.

Motivado pela necessidade de se realizar aulas mais significativas, práticas e dinâmicas é que elaboramos essa proposta de atividades para o ensino de Trigonometria, priorizando como metodologia, o trabalho de forma prática e interdisciplinar, de modo que o estudante possa concretizar e absorver o conhecimento, partindo de construções sólidas capazes de perdurar ao longo de seu aprendizado escolar.

Além da presente introdução, os capítulos deste trabalho encontram-se assim estruturados:

A seção 1 tem por objetivo refletir sobre as Teorias da Aprendizagem, apresentando a diferença entre a Aprendizagem Significativa e a Aprendizagem Mecânica. Apresentaremos também um estudo sobre a Trigonometria nos documentos oficiais.

Na seção 2 apresentaremos um pouco da história da trigonometria e as ideias básicas que surgem das aplicações de conceitos como o Teorema de Tales e semelhança de polígonos. Desenvolveremos também os cálculos efetuados na antiguidade para encontrar o comprimento da circunferência da Terra e a distância da Terra a Lua.

Na seção 3 (Fundamentação Teórica) formalizaremos a ideia de proporção feita por Tales, que é considerado por muitos o primeiro filósofo da história, e seu teorema é uma das primeiras grandes descobertas científicas, definindo um conceito fundamental: O de semelhança. Terminado o estudo das semelhanças, o próximo passo é estudar o triângulo retângulo. Antes de entrar na trigonometria propriamente dita, estudaremos suas relações métricas. Todo esse estudo das semelhanças e das relações métricas no triângulo retângulo fornece a base para iniciarmos o estudo da trigonometria.

Dando sequência, trabalharemos o conceito de relações trigonométricas no triângulo retângulo, definindo seno, cosseno e tangente por meio da semelhança de triângulos. Apresentaremos também algumas relações entre Seno, Cosseno e Tangente e trabalharemos os ângulos notáveis com alguns problemas, pois estes merecem uma atenção especial. Apresentaremos a tabela das razões trigonométricas e a lei dos senos, útil para resolver situações em que temos o valor de dois ângulos e de um lado. Em seguida, a lei dos cossenos, usada para situações em que se conhecem o valor de dois lados e de um ângulo.

Iniciaremos o estudo dos conceitos trigonométricos básicos abordando uma introdução histórica. Recordaremos conceitos já conhecidos, tais como arcos e ângulos na circunferência, unidades para medir arcos de circunferência, relações entre unidades para medir arcos e a circunferência trigonométrica.

Na seção 4 vamos apresentar o Teodolito Eletrônico, identificando as divisões da topografia e seus conceitos, conhecendo os principais tipos de equipamentos, acessórios e de levantamentos topográficos.

Na seção 5 vamos descrever as atividades realizadas. Dá-se destaque a duas atividades; construção e utilização de um Clinômetro e o cálculo da área útil do Instituto Federal de Rondônia, Campus Ariquemes, utilizando-se de um Teodolito Eletrônico, relatando a experiência.

Na seção 6 apresentar-se-á os resultados.

1 TEORIAS DE APRENDIZAGEM E A TRIGONOMETRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Essa seção tem como objetivo sintetizar algumas teorias de aprendizagem e explicitar algumas de suas implicações para o ensino. Esta discussão está baseada no pressuposto de que a qualidade do ensino em sala de aula está intimamente relacionada ao conhecimento de referenciais teóricos que orientem o planejamento, a implementação e a avaliação de práticas educacionais.

1.1 Aprendizagem Significativa

A aprendizagem significativa desenvolvida por Ausubel (psiquiatra norte-americano, que dedicou vinte e cinco anos à psicologia educacional) propõe-se a explicar o processo de assimilação que ocorre com a criança na construção do conhecimento a partir do seu conhecimento prévio. Ausubel considera que a assimilação do conhecimento ocorre sempre que uma nova informação interage com outra existente na estrutura cognitiva, mas não com ela como um todo; o processo contínuo da aprendizagem significativa acontece apenas com a integração de conceitos relevantes.

Segundo Alsubel esta possibilidade não está colocada para o aprendiz,

> (...) as ideias ancoradas na estrutura cognitiva, não só manifestam, inicialmente, pouca força de dissociabilidade, como também a perdem muito rapidamente, pois estas novas ideias podem representar-se, de forma adequada, pelas que estão mais estabelecidas, para fins de memória. Por outras palavras, pressupõe-se que apenas as variantes categóricas discrimináveis de ideias anteriormente apreendidas possuem potencialidades de retenção a longo prazo (AUSUBEL, 2003, p. 170)[7].

Nesse processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de “conceito subsunçor” existente na estrutura cognitiva de quem aprende. No entanto, deve-se frisar que a aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação de uma informação a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do sujeito, não a qualquer aspecto.

Ou, como resume Moreira (2006, p. 38)[8]: “a aprendizagem significativa é o processo por meio dos quais novas informações adquirem significado por interação (não associação) com aspectos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva”. É importante ressaltar que o novo conteúdo deve ser significativo e que o aluno manifeste disposição para aprender.

Santos apresenta as sete atitudes recomendadas nos ambientes de aula:

> 1. Dar sentido ao conteúdo: toda aprendizagem parte de um significado contextual e emocional.
> 2. Especificar: após contextualizar o educando precisa ser levado a perceber as características específicas do que está sendo estudado.
> 3. Compreender: é quando se dá a construção do conceito, que garante a possibilidade de utilização do conhecimento em diversos contextos.
> 4. Definir: significa esclarecer um conceito. O aluno deve definir com suas palavras, de forma que o conceito lhe seja claro.
> 5. Argumentar: após definir, o aluno precisa relacionar logicamente vários conceitos e isso ocorre por meio do texto falado, escrito, verbal e não verbal.
> 6. Discutir: nesse passo, o aluno deve formular uma cadeia de raciocínio pela argumentação.
> 7. Levar para a vida: o sétimo e último passo da (re) construção do conhecimento é a transformação. O fim último da aprendizagem significativa é a intervenção na realidade. Sem esse propósito, qualquer aprendizagem é inócua. (SANTOS, 2008, p. 73-74)[9].

Dessa forma, para que ocorra uma aprendizagem significativa é necessário: disposição do sujeito para relacionar o conhecimento; material a ser assimilado com “potencial significativo”; e existência de um conteúdo mínimo na estrutura cognitiva do indivíduo, com subsunçores em suficiência para suprir as necessidades relacionadas.

Segundo Pontes Neto destaca que,

> entre as vantagens da aprendizagem significativa sobre a aprendizagem mecânica estão: permitir maior diferenciação e enriquecimento dos conceitos integradores favorecendo assimilações subsequentes; retenção por mais tempo; redução do risco de impedimento de novas aprendizagens afins; facilitação de novas aprendizagens; favorecimento do pensamento criativo pelo maior nível de transferibilidade do conteúdo aprendido; favorecimento do pensamento crítico e da aprendizagem como construção do conhecimento (PONTES NETO, 2001, p. 13-37)[10].

Pontes Neto (1988, p. 62)[11] também destaca no pensamento ausubeliano que cabe ao professor identificar os conceitos de maior poder explicativo que constituem a estrutura cognitiva prévia dos estudantes. Identificar esses subsunçores significa caracterizar variáveis da estrutura cognitiva como a discriminalidade das ideias relevantes, abrangência, disponibilidade, estabilidade e clareza.

Ausubel (2003, p.11)[12], afirma que as variáveis da estrutura cognitiva são explicitações daquilo que os alunos já sabem e, da forma como o sabem, influenciam a capacidade de aprendizagem significativa. Quanto mais evidenciadas, mais facilitada será a aprendizagem.

Quando uma informação não é aprendida de forma significativa, quando não há "fios" na rede cognitiva de conhecimentos do aprendiz, então ela é aprendida de forma mecânica. Ao contrário da aprendizagem significativa, nesse tipo de aprendizagem, as informações são aprendidas praticamente sem interagir com informações relevantes presentes na teia de saberes. Desse modo a nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal.

No entanto, de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980)[13], não há oposição entre a aprendizagem mecânica e a aprendizagem significativa, elas representam na verdade uma sequência. Segundo ele, a aprendizagem mecânica é inevitável no caso de conceitos inteiramente novos para o aluno, mas posteriormente ela se transformará em significativa. Por exemplo, ao se apresentar ao aluno o conceito de área, ele só terá sentido, à medida que for relacionado com alguma ideia relevante, que esteja clara e organizada na sua estrutura cognitiva. Caso contrário, a princípio será armazenado de forma mecânica. O conhecimento anterior sobre medidas de comprimento, unidades de medida de comprimento, entre outros, facilitarão a construção do conceito de "área", uma vez que podem funcionar como ancoradouros para o novo conceito.

Gasparin também apresenta uma alternativa de ação docente-discente na qual o professor não trabalha pelo aluno, mas com o aluno e, para tanto, sugere:

> a) Descobrir aquilo que é aprendizagem significativa para os alunos, pois se interessarão por aquilo que, de alguma maneira, os afetar diretamente;
> b) Envolver, através de técnicas variadas de ensino-aprendizagem, os educandos na reconstrução ativa do conhecimento sistematizado;
> c) Trabalhar com os alunos (e não pelos alunos);
> d) Adotar, como forma de trabalho, o método dialético: prática-teoria-prática, onde o primeiro passo – a prática – consiste em conhecer, através de um diálogo com os alunos, qual a vivência cotidiana do conteúdo, antes que este que lhes seja ensinado em aula. O segundo passo – a teoria – inicia-se por uma breve discussão sobre o conteúdo, buscando identificar as razões pelas quais ele merece ou precisa ser aprendido. Em seguida, transforma-se esse conhecimento em questões problematizadas, levando em conta as suas dimensões científica, conceitual, cultural, histórica, social, política, ética, etc. Então, o conteúdo formal, abstrato é

> apresentado e contrastado com a vivência cotidiana desse mesmo conhecimento, a fim de que os alunos elaborem uma síntese e assumam uma nova postura mental, reunificando o cotidiano com o científico numa nova totalidade concreta. A terceira fase – a prática – se expressa nas intenções dos alunos sobre a possível aplicação do conteúdo aprendido e quais ações se propõem a realizar para que isso aconteça (GASPARIN 2001, p.8)[14].

Para Coll,

> (...) a significância da aprendizagem não é uma questão de tudo ou nada e sim de grau; em consequência, em vez de propormo-nos que os alunos realizem aprendizagens significativas, talvez fosse mais adequado tentar que as aprendizagens que executam sejam, a cada momento da escolaridade, o mais significativa possível (COLL 1995, p. 149)[15].

A teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel é uma teoria de sala de aula, com um potencial de aplicabilidade muito grande, e em uma de suas frases mais citadas que sua teoria pode ser resumida “Se tivesse que resumir toda a psicologia educacional a um só principio, diria o seguinte: o fator mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo”.

É notório que, para Ausubel, os subsunçores são fundamentais. O conhecimento prévio do aluno é fundamental para que o professor possa organizar estratégias didáticas potencialmente significativas. Conhecer o que nosso aluno já sabe não é tão simples, mas podemos lançar mão de elementos que podem nos indicar a direção de nossas estratégias instrucionais. Não podemos, simplesmente, não nos preocupar com aquilo que nosso aluno já conhece.

Em sala de aula, nossa prática docente deve permear tais princípios, a fim de que possamos, concretamente, contribuir para uma desejada aprendizagem significativa por parte de nossos alunos.

Ausubel (1980, p.137)[16] considera duas as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa:

- Que o material instrucional seja potencialmente significativo.
- Que exista a pré-disposição do aprendiz para aprender.

Todo o material instrucional deve ter um potencial significativo para o aprendiz. Aqui, quando falamos em todo material instrucional, estamos nos referindo a figuras, gravuras, simulações, textos, exemplos, aula de laboratório e, até mesmo, a aula expositiva (condenada por muitos).

Um professor pode preparar uma aula repleta de elementos bem elaborados; porém, se estes elementos não tiverem nenhuma relação com aquilo que o aluno já conhece, o material não tem potencial significativo. Isto é, se ocorrer uma aprendizagem nesta situação, é bem provável que esta seja meramente uma relação arbitrária de conceitos, uma memorização, uma aprendizagem dita mecânica.

1.2 Aprendizagem Mecânica

Na Aprendizagem Mecânica os novos dados e informações possuem pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes já disponíveis na estrutura mental, não sendo possível a interação entre eles. O conhecimento assim adquirido será arbitrariamente distribuído pela estrutura cognitiva, sem "ligar-se" (associar-se) a conceitos subsunçores específicos nesta estrutura.

Ausubel também sugere a utilização desta aprendizagem (Mecânica) quando não existirem subsunçores (ideias-âncoras) estabelecidos na estrutura cognitiva do aprendiz, sendo seu conhecimento inicial memorizado.

Após a retenção mecânica deste conhecimento, o mesmo passaria a ser utilizado como ideia-âncora, gradativamente esclarecida e generalizada "inclusivamente" na estrutura mental, de forma a propiciar uma estrutura relevante de conhecimento sobre o conteúdo considerado. Assim, a aprendizagem mecânica auxiliaria na conexão entre a estrutura mental do aprendiz e os novos dados com informações almejados para a assimilação.

1.3 O ensino de trigonometria em documentos oficiais

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96)[17], o currículo do Ensino Médio é composto por um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada, de acordo com as peculiaridades locais. Essa parte diversificada atende aos aspectos sociais e históricos da clientela escolar.

O documento apresenta mais outro aspecto que merece destaque: refere-se ao aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de competências para dar continuidade aos estudos.

Em 1999, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), lançou os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999)[18], com a proposta de mudança no Ensino Médio que, com a LDB, tornou esta modalidade de ensino como etapa final da Educação Básica, completando o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental.

Os PCNEM (BRASIL, 1999)[19] estabelecem que a Matemática, a Biologia, a Física e a Química integram uma mesma área do conhecimento, a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pois compartilham linguagens para representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos. Esta área tem como três grandes competências a serem desenvolvidas: a representação e comunicação, a investigação e compreensão e a contextualização sociocultural.

A proposta de Matemática dos PCNEM (BRASIL, 1999)[19] aborda um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências relevantes, que foram sistematizados em três eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos ao mesmo tempo nas três séries de Ensino Médio. São eles: Álgebra: números e funções, Geometria e medidas e Análise de dados. A Trigonometria está proposta no primeiro eixo, junto com funções.

Este documento apresenta uma proposta interdisciplinar com uma relevância muito grande em relação à Matemática, em razão de seu caráter universal, esta disciplina está presente em quase todas as atividades da vida na sociedade atual:

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 1999, p. 21)[20].

O documento sugere como critério central a contextualização e a interdisciplinaridade, ou seja, o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções:

> O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente (BRASIL, 1999, p. 43)[20].

Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na solução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos, além de compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais (BRASIL, 1999, p. 44)[20].

O documento descreve ainda as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas pela disciplina. Dentre elas:

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).

> - Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.
> - Exprimir com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
> - Produzir textos matemáticos adequados.
> - Utilizar corretamente instrumentos de medição e desenho.
> - Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.).
> - Formular hipóteses e prever resultados.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
> - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> - Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade (BRASIL, 1999, p. 46)[20].

Na aprendizagem de Matemática, é importante que os alunos conheçam essas habilidades, para que possam desempenhá-las sempre que precisarem tanto na vida escolar como no exercício de sua cidadania.

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (2002, p. 07) apresentam, entre seus objetivos centrais, a necessidade de facilitar a organização do trabalho da escola. Destacam que a "área de Ciências da Natureza e Matemática não pode mais ser encarada desvinculada das Linguagens e Códigos das Ciências Humanas". No que se refere à Matemática, especificamente, nos faz refletir sobre quais os objetivos principais dos conteúdos dessa disciplina no Ensino Médio e propõem, nessa perspectiva, uma abordagem curricular centrada na integração de conteúdos.

> Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço dos conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber [...] (BRASIL, 2002, p. 07)[21].

A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do Ensino Fundamental para todos os brasileiros:

- Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade do enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização de conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- Contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

O conteúdo de Trigonometria é apontado nas competências: Investigação e compreensão e Contextualização sociocultural, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas, com exemplos que procuram auxiliar a compreensão de como, nessa disciplina, é possível desenvolver as competências eleitas na área.

A proposta de Matemática dos PCNEM é que cada escola e grupo de professores proponham um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almejadas. Fazem parte dessa elaboração diversos fatores mais diretamente ligados ao planejamento, entre eles a escolha de temas relativos ao conteúdo específico da disciplina, a análise dos recursos de ensino e dos métodos de abordagem desse conhecimento, o cuidado com os tempos de ensino e de aprendizagem e dos espaços para que isso ocorra.

Para evitar a quantidade excessiva de informações, é preciso fazer um recorte, usando alguns critérios orientadores deste processo de seleção de temas. Um primeiro critério, é que os conteúdos ou temas escolhidos devem permitir ao aluno desenvolver as competências que constem nos PCN's, avançando a partir do ponto em que se encontra.

Os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem, possibilitar ao aluno o estabelecimento de relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção às competências da área e, até mesmo, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível.

É importante ressaltar que esta é uma escolha possível e compatível com a proposta dos PCNEM, que contempla os critérios apontados e que não reproduz o modelo curricular de "listas de assuntos", mas não é necessariamente a única.

O conteúdo de Trigonometria é apresentado no primeiro tema: Álgebra, números e funções. Esse tema se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. No Ensino Médio, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos. Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria.

Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. Esse tema possui fortemente o caráter de linguagem com seus códigos (números e letras) e regras (as propriedades das operações), formando os termos desta linguagem que são as expressões que, por sua vez, compõem as igualdades e desigualdades.

Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

Resumidamente, em relação às competências a ser desenvolvida pela Matemática, a abordagem proposta para esse tema permite ao aluno usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático.

Na unidade temática de Trigonometria, são propostos os conteúdos do triângulo retângulo; do triângulo qualquer e da primeira volta, no qual serão desenvolvidas as seguintes habilidades:

- Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
- Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Assim, segundo os PCN(2002), os temas específicos não são suficientes para o desenvolvimento de todas as competências pretendidas, mas a cuidadosa articulação entre conteúdo e forma pode organizar o ensino para que ele se aperfeiçoe e constitua de fato uma proposta de formação dos jovens do Ensino Médio.

Em 2006, o MEC lançou um documento intitulado Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), que vem complementar os Parâmetros Curriculares Nacionais lançados anteriormente. Neste documento, os conteúdos estão mais explícitos, pois propõe ideias para trabalhar os temas e relacioná-los com outras áreas e com a própria Matemática.

Quanto às OCEM, visando à contribuição aos documentos anteriores e com a intenção de promover um debate sobre as orientações curriculares, contempla três aspectos: a escolha dos conteúdos; a forma de abordagem dos conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. No que se refere aos conteúdos, destacam que o professor deve ter em mente ao selecionar seus conteúdos que, ao final do Ensino Médio, o aluno deva ter construído algumas competências em relação ao conhecimento matemático:

> Ao final do Ensino Médio espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam

> apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 70)[22].

Assim, divide a Matemática em quatro blocos, a saber: Números e Operações; Funções; geometria; Análise de dados e Probabilidade. Portanto, nosso objeto de estudo encontra-se no bloco funções:

> No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a Trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos do ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre 0º e 90º, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90º e 180º. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida 30°, 45° e 60º. A importância do estudo da Trigonometria é ressaltada nesse documento, que fala da sua relevância para a resolução de problemas, e como instrumento para outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2006, p. 73)[22].

As OCEM (BRASIL, 2006) recomendam a determinação de elementos de um triângulo, utilizando as leis do seno e do cosseno. Por exemplo, conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da Trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola.

Sugerem que alguns tópicos usualmente presentes no estudo da Trigonometria sejam dispensados, como, por exemplo, as fórmulas para $\text{sen}(a + b)$ e $\cos(a + b)$, além das outras três razões trigonométricas cotangente, cossecante e secante, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.

No documento, há um parágrafo que chama atenção, pois mostra a importância de compreender a transição das relações trigonométricas no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus) para o círculo trigonométrico, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos.

As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões dessas razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0° e 180°. O aluno deve ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, entendendo que, quando se escreve f(x) = sen(x), usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associados aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano.

O estudo da Geometria é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a Geometria que leva à Trigonometria e a Geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no Ensino Fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras.

2 BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

O desenvolvimento histórico e cultural da humanidade é marcado por estudos e investigações nos quais o conhecimento matemático é um deles. A trigonometria, por exemplo, desenvolveu-se a partir das necessidades existentes nos estudos de Astronomia, navegação e Geografia, que interagindo com as teorias matemáticas já existentes, puderam ser aplicadas aos problemas práticos evidenciados em tais atividades.

Suas raízes perderam-se na pré-história, pois os tipos de registros da época não resistiram às ações do tempo, embora haja alguma identificação inicial com as medições de sombras ao longo das horas do dia e das estações do ano, entre outros fatores que evidenciaram o caráter empírico dessa produção de saber. Pode-se, entretanto, salientar que o conhecimento geométrico existente, nesse período, teve importância fundamental no desenvolvimento das primeiras teorias ligadas a astronomia e que mais tarde originaram a trigonometria.

A construção da trigonometria começa com uma matemática eminentemente prática para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente chamando a atenção dos sábios, fossem eles sacerdotes, alquimistas, matemáticos, físicos, astrônomos ou navegadores, devido ás inúmeras contribuições que os conhecimentos trigonométricos oferecem á prática cotidiana do homem. Sem a trigonometria o homem não teria feito as grandes viagens marítimas na época das caravelas, pois, com ela, e mais a posição das estrelas, os navegadores podiam se orientar.

Mais tarde, a Astronomia, estudados por egípcios e gregos, deu um grande impulso ao desenvolvimento da trigonometria. Para Guelli (1993, p.6), dentre os diversos nomes da história, destaca-se o grego Hiparco de Nicéia (190 a.C – 125 a.C), considerado pai da trigonometria, nascido em Nicéia, na Bitínia, foi astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático. À partir dos 30 anos, Hiparco viveu em Alexandria e em Rodes, e se dedicou ao estudo das estrelas até a sua morte. Ele usou e introduziu na Grécia a divisão da circunferência em 360º dos Babilônicos, ao invés da divisão grega em 60 graus. Estabeleceu uma tabela de cordas para facilitar os cálculos astronômicos.

Quase todas suas obras se perderam, o que hoje se sabe sobre Hiparco advém de historiadores ou outros astrônomos. Seu único trabalho que sobreviveu ao tempo é um comentário sobre “Fenômenos”, um tratado de astronomia escrito por Eudoxio de Cnido, contemporâneo de Platão. Fora esse trabalho menor, o único conhecimento que se tem da obra de Hiparco está em escritos posteriores, especialmente nos de Ptolomeu, nomeadamente no Almagesto. Segundo Guelli (1993, p.6)[23] no Almajesto encontra-se uma tabela trigonométrica bem mais completa que a de Hiparco. Nela, são fornecidas as medidas das cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau entre zero a cento e oitenta graus.

Segundo Boyer (1974, p. 118)[24], até o final da vida, Hiparco dedicou-se ao estudo da Lua e elaborou a previsão de eclipses futuros, por 600 anos. Ficou conhecido como "o Pai da Trigonometria" por seus trabalhos de sistematização de algumas relações entre elementos de um triângulo.

Para Galvão (2008, p.167)[25], Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande Cláudio Ptolomeu. Este estudioso grego viveu em Alexandria em torno de 150 d.C, seus antepassados lutaram ao lado de Alexandre Magno, no século IV a.C, herdando o Egito, que seria governado até à anexação romana pela dinastia ptolomaica, após a morte de Alexandre 323 a.C. Muitos historiadores afirmam ter sido Ptolomeu quem escreveu que "a soma de dois catetos elevados ao quadrado é igual ao quadrado da hipotenusa".

Ptolomeu ficou conhecido por seus trabalhos em astrologia, astronomia e cartografia e foi um dos primeiros cartógrafos, se não o primeiro, a usar escala em mapas. Foi autor da mais importante obra da trigonometria da Antiguidade, surgida no século dois de nossa era, em Alexandria. Composta de treze volumes ela ficou conhecida como Almagesto, que significa em árabe "a maior = Al magest" , pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época, em Astronomia. As obras de Autolico, Euclides, Ipsicle e Aristóteles em Astronomia, juntas formavam a Coleção Menor de Astronomia. A obra de Ptolomeu era indispensável para se entender o legado astronômico da Antiguidade grega.

Para Eves (2004)[26], o Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até Copérnico, no século XVI. Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho de Hiparco.

Guelli (1993)[23], afirma que, apesar do amplo domínio do Almajesto, no final do século IV, surgiu na Índia, o Siddhanta (sistema de astronomia). Enquanto o Almajesto relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, o Siddhanta apresentava uma trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central.

Na história da meia corda que mudou a história, os hindus foram buscar, no interior do círculo, um triângulo retângulo. Mas, somente "entre os anos 850 e 929, o matemático árabe Al-Battani, adotou a trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação: O círculo de raio unitário" (Guelli, 1993, p.57)[23]. Assim, nessas novas tabelas trigonométricas o valor da meia corda podia ser interpretado como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, do triângulo retângulo, construído no interior do círculo, pelos hindus.

A revolução, entretanto, surge no momento em que a trigonometria se desvincula da astronomia, criando seu espaço próprio como um tópico da matemática, se desligando de sua origem histórica e ganhando vida própria, oportunizando assim, a realização de variadas aplicações inesperada nos diversos campos do conhecimento.

Para Boyer (1974)[24], outro matemático grego também se destacou: Eratóstenes (276 – 196 a.C)**.** Natural de Cirene, Eratóstenes viveu parte da juventude em Atenas, sendo um atleta bastante popular, destacou-se em várias modalidades esportivas. Também foi autor de muitos livros de Astronomia, Geometria, poesias e textos para teatros.

Nenhuma de suas obras, porém, chegou até nós. Tudo o que sabemos sobre Eratóstenes é através de outros autores. No entanto, apesar de seus múltiplos interesses, ele não conseguiu ser pioneiro em nenhuma das atividades que desenvolveu, nas Ciências ou nas Letras.

Mas nenhum matemático ou astrônomo se igualou a Eratóstenes nos cálculos para medir a circunferência da terra.

Atualmente, a trigonometria possui inúmeras aplicações em diversas áreas, e não se limita a estudar apenas os triângulos.

Destaca-se a seguir algumas aplicações clássicas da trigonometria.

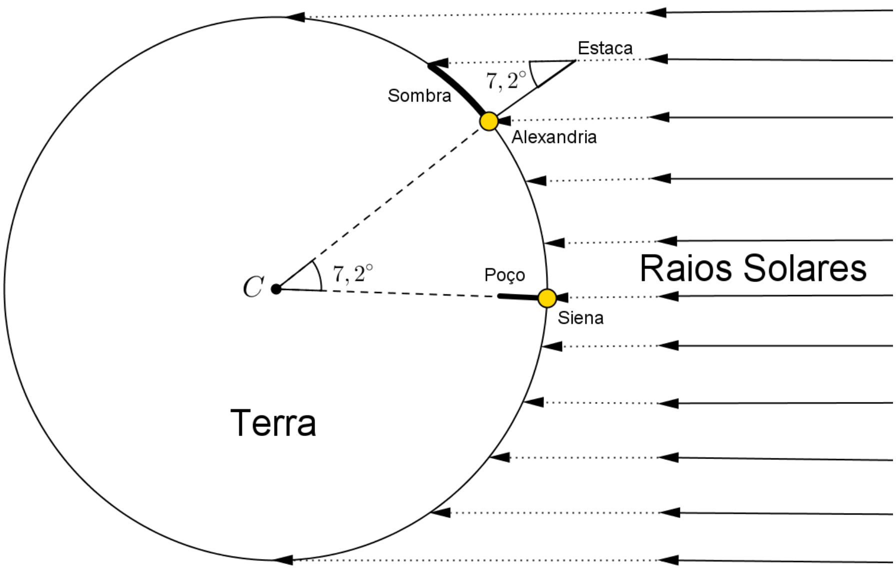
2.1 Medida da Circunferência da Terra

Uma das questões que desafiaram os matemáticos e astrônomos da antiguidade foi à determinação do tamanho do sol e da lua. Para chegar a essas medidas, era necessário conhecer o tamanho da circunferência da terra, e foi Eratóstenes que fez a demonstração mais interessante e que se aproxima mais da medida da circunferência da terra.

Erastóstenes sabia o dia exato em que iria ocorrer o solstício de verão na cidade de Siena, às margens do rio Nilo. Nesse dia especial, ao meio dia, o sol ficava completamente a pino. Desse modo, uma vareta fincada verticalmente no solo não fazia nenhuma sombra nesse horário, e o fundo de um poço ficava completamente iluminado.

Aproveitando-se desse fato, Erastóstenes dirigiu-se á cidade de Alexandria e, aproximadamente no mesmo horário em que o Sol ficava a pino em Siena, fincou verticalmente uma vareta no chão. A seguir, mediu o ângulo formado pela vareta e pelo segmento formado pela ponta da vareta com a extremidade da sombra.

Figura 1 – Circunferência da Terra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- C é o centro da Terra;
- A é vareta em Siena não forma sombra;
- a é o ângulo formado pela vareta e sua sombra, em Alexandria;
- b é o ângulo com vértice no centro da terra, cujos lados são formados pelos prolongamentos das varetas fincadas em Alexandria e Siena.

Como os raios de sol são aproximadamente paralelos, as retas r e s são paralelas e os ângulos a e b são congruentes. Eratóstenes descobriu que o ângulo a media $1/50$ da circunferência da Terra e a distância aproximada entre Siena e Alexandria era de 5000 $Stadium$. O stadium, antiga medida grega, valia: $1\ Km = 6{,}3\ Stadiuns$.

Erastóstenes concluiu, então, que a circunferência da terra era aproximadamente igual a: $50.5000 = 250000\ Stadiuns$**.** Em quilômetros, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{6{,}3}{250000} \Rightarrow 6{,}3x = 250000 \Rightarrow x = \frac{250000}{6{,}3} \cong 39682\ Km$$

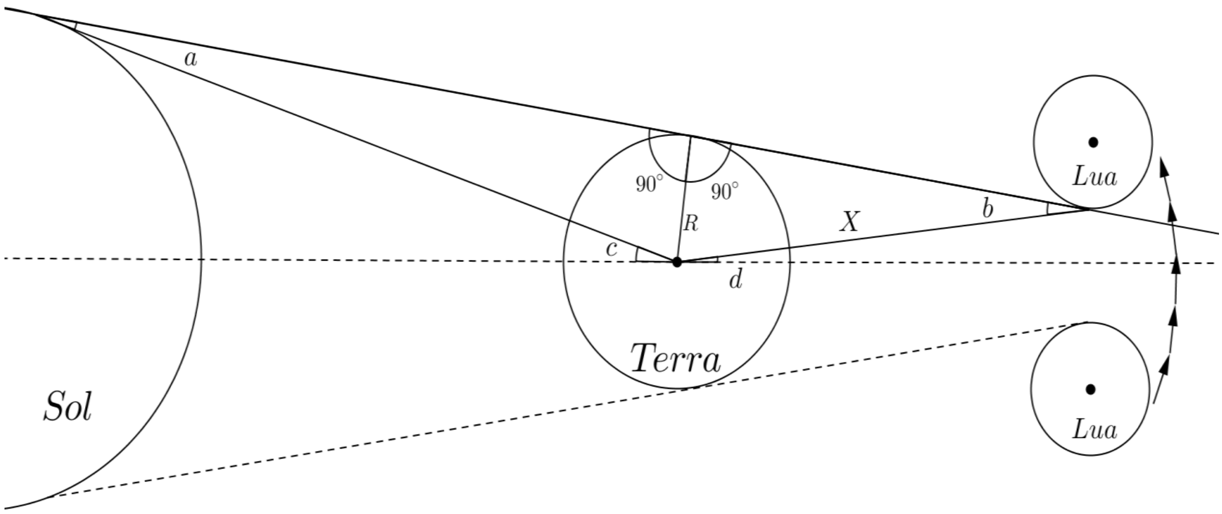
Sem dúvida, determinar a medida da circunferência da terra foi a grande façanha de Eratóstenes, e com isso ouve um grande avanço na trigonometria.

2.2 Distância da Terra a Lua

Hiparco foi um dos maiores astrônomos gregos e entre suas muitas contribuições estão os “Fundamentos da trigonometria”. Aliás, sua construção geométrica baseia-se justamente na medida de ângulos.

Uma de suas contribuições foi a medida da distância da terra à lua. Para isso não precisou nem mesmo do diâmetro da Terra. Ele imaginou uma geometria com a qual, durante um eclipse lunar, isto é, quando a Terra fica exatamente entre o Sol e a Lua, seria possível fazer o cálculo.

Figura 2 – Distância da Terra a Lua.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Hiparco imaginou dois triângulos retângulos, cujas hipotenusas ligariam o centro da Terra às bordas do disco solar e lunares, por ocasião de um eclipse da Lua. Podemos notar que a duração de um eclipse lunar é equivalente a duas vezes o ângulo d. Vamos escrever nossa primeira equação: $2.d = T_1$. O período orbital da Lua, ou seja, o tempo que ela gasta para completar uma volta (360°) em torno da Terra já era conhecido, vamos representá-lo como T_2 e escrever a segunda equação: $360° = T_2$.

Como podemos medir o tempo T_1, a única variável é d, obtida com as duas equações numa regra de três simples e direta.

O ângulo c é chamado semi-diâmetro do Sol, ou seja, a metade do ângulo pelo qual vemos o disco solar. O ângulo a é tão pequeno que pode ser desprezado, ele representa a metade do ângulo pelo qual um observador no Sol veria a Terra. Dos estudos de trigonometria básica extraímos a propriedade pela qual $a + b = c + d$. Como a é muito pequeno basta-nos escrever $b = c + d$.

Mas, Hiparco queria mesmo era o valor de X. Note que o seno de b será R/X. Se ele calculasse b obteria o seu seno, consultando as velhas tábuas trigonométricas. Sobraria R, o raio da Terra. Hiparco também poderia expressar o resultado como uma função de R, isto é, quantos raios da Terra existem até a Lua, o que já seria um excelente resultado. O resultado de Hiparco foi um valor de X entre 62 e 74 vezes R. O valor real fica entre 57 e 64, mas seu erro é justificável face à precisão requerida nas medidas angulares.

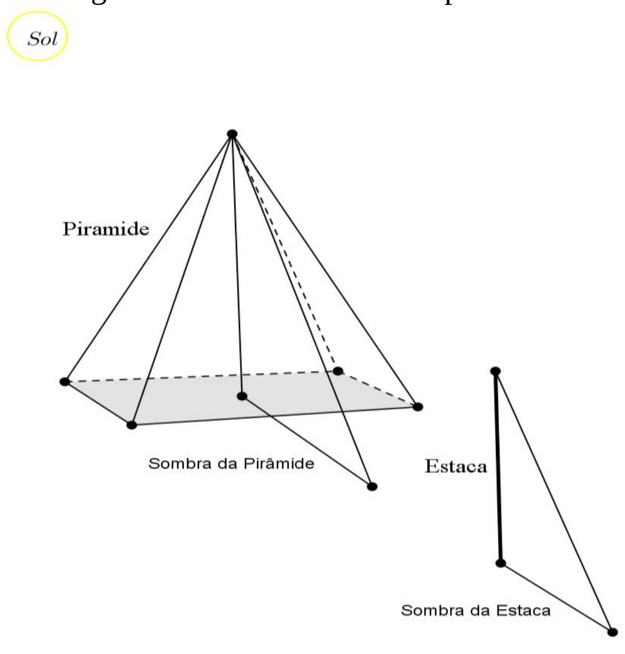
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Dante (2014, p. 235 – V.1)[27], a proporcionalidade principalmente na forma do teorema de Tales ou de semelhança de triângulos, foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos. Foi com a semelhança de triângulos que Aristarco (321 a.C. – 230 a.C.) comparou as distâncias da terra, e com que os matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas.

Ainda segundo Dante (2014, p.235 – V.1)[27], Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da antiguidade, levou para a Grécia a geometria dos egípcios e começou a aplicar a ela os procedimentos da filosofia grega. Com seu método de comparar sombras, hoje conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso dele foi à obtenção da altura de uma pirâmide.

Conta-se que Tales fincou uma vareta verticalmente no chão, ao lado da pirâmide. Esperou até um momento em que a sombra e a vareta tivessem exatamente o mesmo tamanho. Nesse instante, Tales mediu a sombra da pirâmide, descobrindo sua altura.

Figura 3 – Tales e a altura da pirâmide.

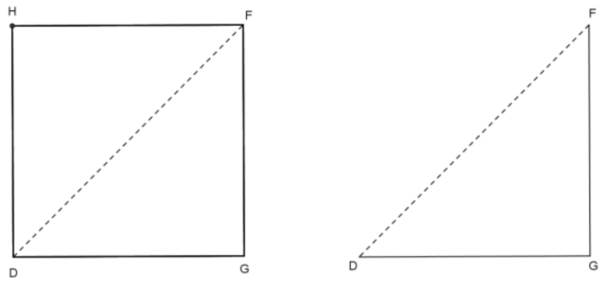


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda nessa seção estudaremos o conceito de semelhança de triângulos que é questão central nesse processo por se tratar de um dos tópicos mais importantes da geometria euclidiana plana. Como motivação deste estudo, será apresentada uma situação problema apresentado no livro do Dante (2014, p.242)[27], que pode ser resolvido facilmente fazendo uso dessa ferramenta.

Problema 1. Um garoto mediu a altura de uma cesta de basquete usando a metade de uma folha de papel quadrada, como mostra a figura 4.

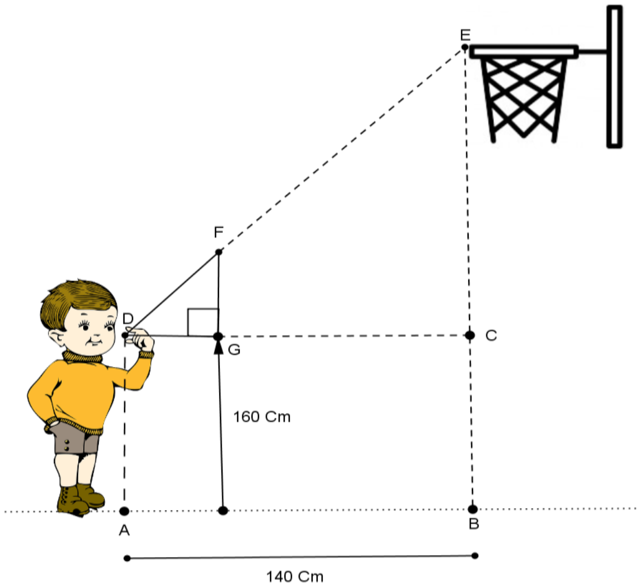
Figura 4 – Folha inteira e com vinco na diagonal.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados do problema são apresentados na figura 5.

Figura 5 – Garoto observando a cesta de basquete.



Fonte: Elaborada pelo autor.

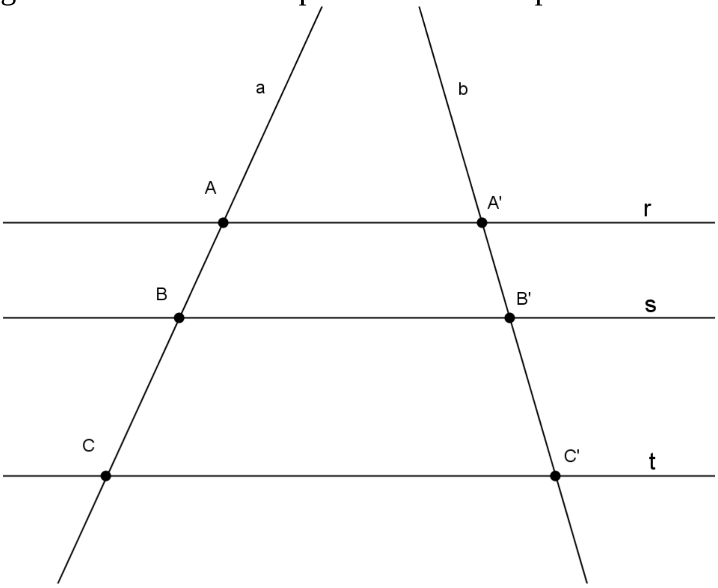
Qual a distância BE? Iremos apresentar os conhecimentos necessários para calcular tal medida e, a posteriori apresentar-se-á a resolução do problema.

3.1 Feixe de retas paralelas

Segundo Dante (2014, p.235, V-1)[27] feixe de retas paralelas é um conjunto de retas distintas de um plano paralelas entre si. Reta transversal ao feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe.

As retas r, s e t da figura abaixo constituem um feixe de retas paralelas.

Figura 6 – Feixe de retas paralelas cortadas por transversais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura, as retas a e b são transversais ao feixe. São pontos correspondentes A e A', B e B', C e C'. São segmentos correspondentes AB; $A'B'$; BC; $B'C'$, assim como AC e $A'C'$.

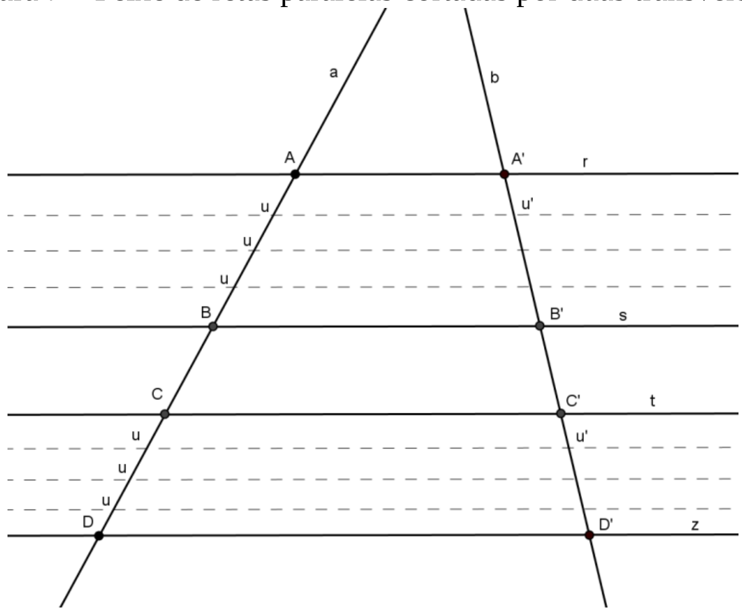
3.2 Teorema de Tales

Segundo Dante (2014, p.236,V-1)[27] se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra.

Vamos comprovar esse teorema, para o caso em que os segmentos são comensuráveis (o feixe de paralelas divide as transversais em segmentos cujas medidas podem ser expressas por uma quantidade inteira de certa unidade).

Considere um feixe de paralelas e duas transversais, como indica a figura abaixo.

Figura 7 – Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos supor que exista um segmento u de modo que $AB = mu$ e $CD = nu$ $(m, n \in \mathbb{N})$, ou seja, que AB e CD são números racionais. Estabelecendo a razão $\frac{AB}{CD}$ obtemos :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em m e n partes congruentes ao segmento de medida u, traçamos retas paralelas ao feixe. Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $C'D'$ ficam divididos em m e n partes iguais a u', respectivamente.

Temos:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{mu'}{nu'} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Das relações (1) e (2), concluímos que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Segundo Dante (2014, p.236)[27], podemos também enunciar o teorema de Tales assim: Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

Em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:

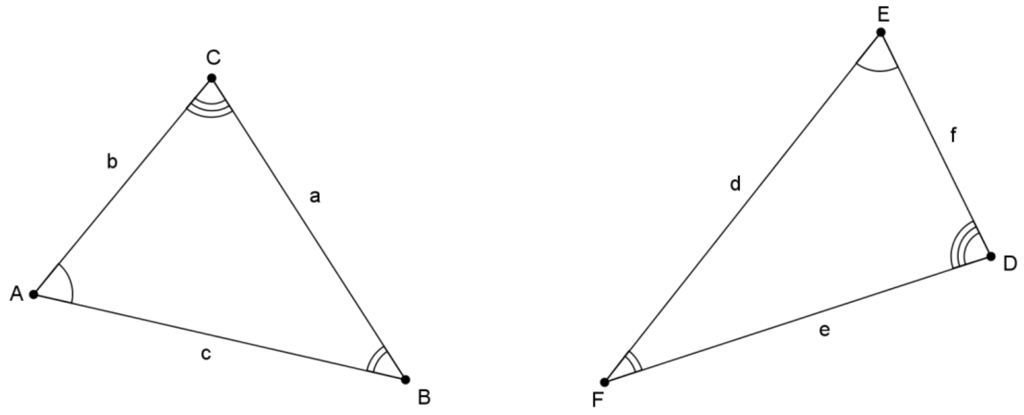
$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ ou } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

3.3 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes (símbolo ~) se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Observação: Dois lados homólogos são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

Figura 8 – Triângulos semelhantes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

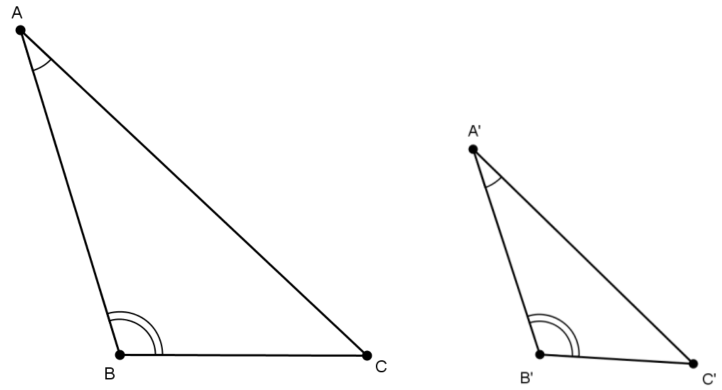
Para os dois triângulos acima, os pares de lados homólogos são: a e e; b e f; c e d.

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \;\Rightarrow \begin{cases} BAC \equiv DEF \\ ABC \equiv EFD \\ ACB \equiv FDE \\ \dfrac{a}{e} = \dfrac{b}{f} = \dfrac{c}{d} \end{cases}$$

3.4 Casos de semelhança

O primeiro caso de semelhança é o critério **AA** (Ângulo, Ângulo): Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro.

Figura 9 – Caso AA de semelhança de Triângulos

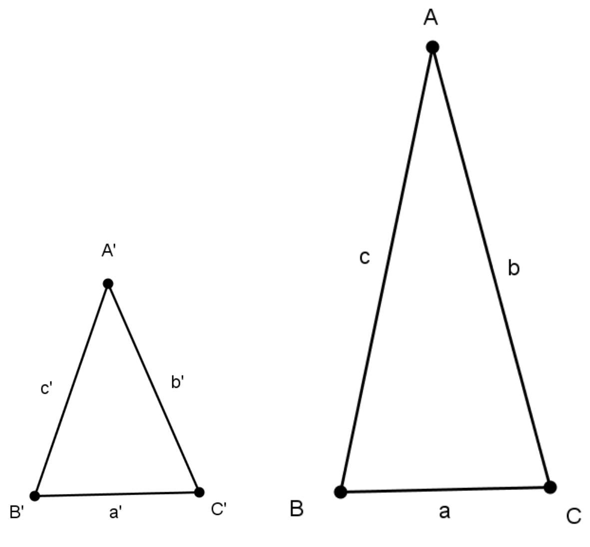


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\left.\begin{matrix} \hat{A} \sim \widehat{A'} \\ \widehat{B} \sim \widehat{B'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta \mathrm{A'B'C'}$$

O segundo caso de semelhança é o critério **LLL** (lado, lado, lado): Dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados do outro.

Figura 10 – Caso LLL de semelhança de Triângulos.

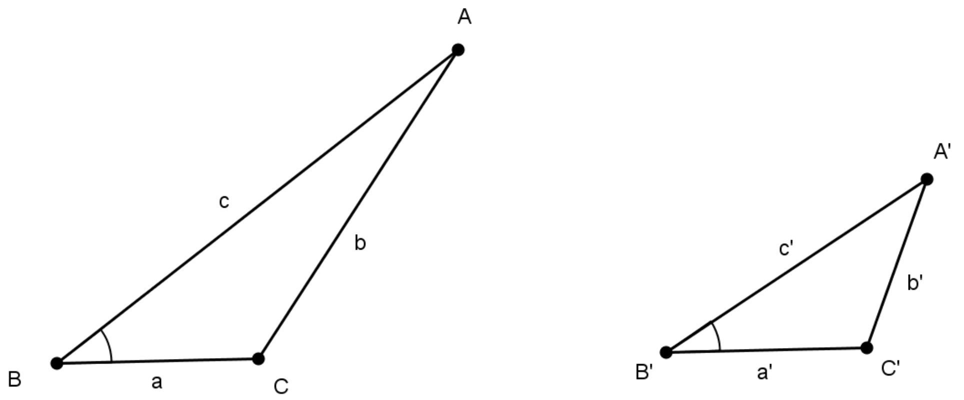


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{A'B'C'}$$

O terceiro caso de semelhança é o critério **LAL** (lado, ângulo, lado): Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.

Figura 11 – Caso LAL de semelhança de Triângulos.



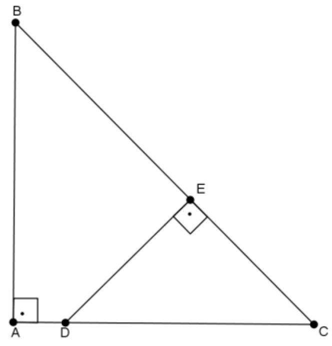
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \sim \widehat{B'} \\ \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta\mathrm{A'B'C'}$$

Por exemplo, considere o triângulo ABC, retângulo em A, seja D um ponto do segmento AC e DE perpendicular ao lado BC.

Vamos verificar se $\Delta ABC \sim \Delta\mathrm{EDC}$:

Figura 12 – Caso de AA de semelhança de Triângulos.



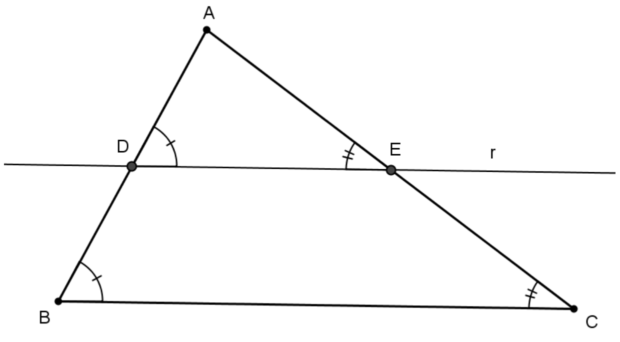
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\left.\begin{matrix} \hat{E} \sim \hat{A}\ (retos) \\ \hat{C}\ \text{é}\ comum \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EDC \sim \Delta \text{ABC (caso AA)}$$

3.5 Teorema fundamental da semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro.

Figura 13 – Teorema Fundamental da Semelhança.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\left.\begin{matrix} r \parallel BC \\ r\ \cap AB = \{D\} \\ r\ \cap AC = \{E\} \end{matrix}\right\} \text{ Assim, } \widehat{B} \sim \widehat{D}\ e\ \hat{C} \sim \hat{E}\text{. Logo, } \Delta ADE \sim \Delta \text{ABC.}$$

3.6 Resolução do problema 1

Os exercícios sobre semelhança de triângulos em geral não apresentam dificuldades na parte algébrica. O que é importante ressaltar é a argumentação. Siga estes procedimentos:

1. Mire o topo da cesta conservando a parte inferior da folha (DG) paralela ao chão. Talvez você precise afastar-se ou aproximar-se da cesta para que isso ocorra.
2. Meça a distância entre você e a perpendicular ao chão que passa pela cesta: AB = 140 Cm (Figura 5).
3. Meça agora a distância do chão aos seus olhos AD=160 cm. Veja que AD=BC. Logo, BC=160 cm e o $\Delta DCE \sim \Delta DGF$ (dois ângulos correspondentes congruentes). Da semelhança dos triângulos DCE e DGF, concluímos que;

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$$

Observando a última igualdade $\frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$ e sabendo que DG = FG, concluímos que DC=EC.

Assim a altura da cesta de basquete é dada por:

$$BC + CE = 160 + 140 = 300\ Cm = 3\ m$$

3.7 Relações métricas no triângulo retângulo

O triângulo retângulo é um dos importantes tipos de triângulo, pela utilidade que ele tem em matemática e na vida cotidiana. Pelo fato de possuir um ângulo reto, o triângulo retângulo é muito usado em Engenharia, em construções de todos os tipos.

Há mais de cinco mil anos, os egípcios já utilizavam triângulos de lados proporcionais a 3, 4 e 5, feitos de corda, para obter ângulos retos.

Em um triângulo retângulo, o maior lado é a hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto). Os outros dois lados, perpendiculares entre si, são os catetos. Os ângulos agudos são complementares ($\propto + \beta = 90°$).

Figura 14 – Ângulos complementares.

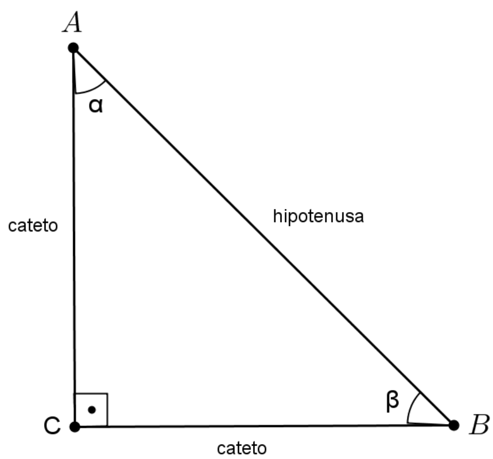
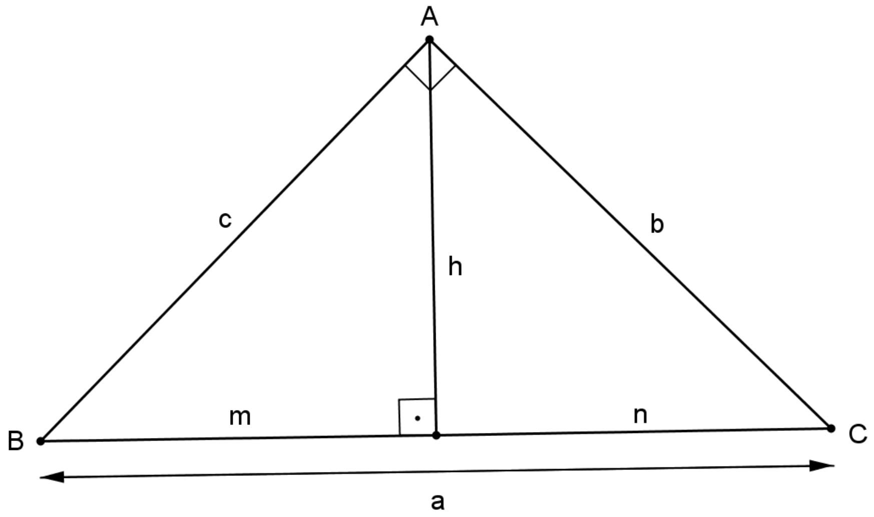


Figura: Elaborada pelo autor.

Na figura 15 podemos observar o triângulo ABC, retângulo em A, e o segmento AD perpendicular ao lado BC, com D em BC.

Ficam definidos os seguintes elementos do ΔABC:

Figura 15 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

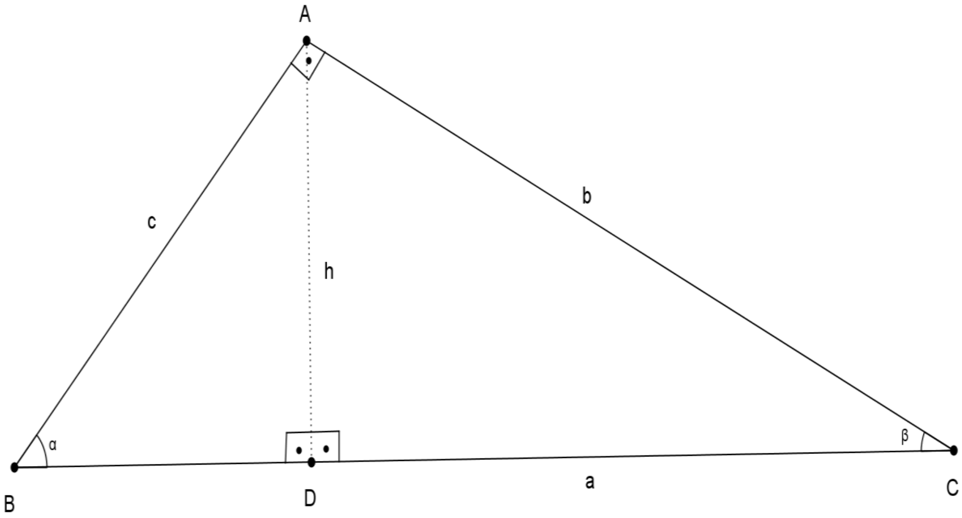


Fonte: Elaborada pelo autor.

- BC → hipotenusa (medida a)
- AC → cateto (medida b)
- AB → cateto (medida c)
- BD → projeção do cateto AB sobre a hipotenusa (medida m)
- CD → projeção do cateto AC sobre a hipotenusa (medida n)
- BC → altura relativa à hipotenusa (medida h)

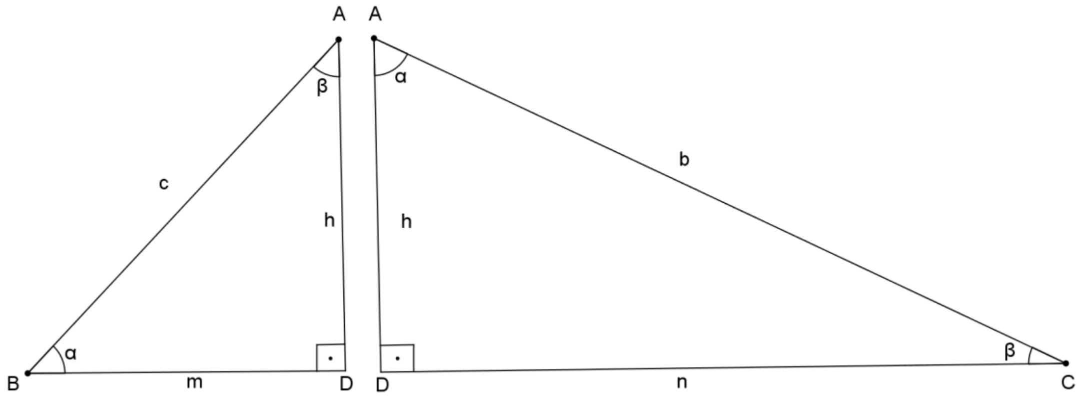
A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si. Observe:

Figura 16 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Relações Métricas no Triângulo Retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como os três triângulos têm todos os ângulos congruentes, pelo 1º caso de semelhança, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta \mathrm{DBA} \sim \Delta \mathrm{DAC}$$

Da semelhança entre ΔABC e ΔDBA, segue que;

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \qquad \text{(I)}$$

Da semelhança entre $\Delta ABC\ e$ ΔDAC, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \qquad \text{(III)}$$

Da semelhança entre ΔDBA e ΔDAC, segue que:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad . \qquad \text{(IV)}$$

Somando membro a membro (1) e (3), temos:

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \ . \ \text{(V) (Teorema de Pitágoras)}$$

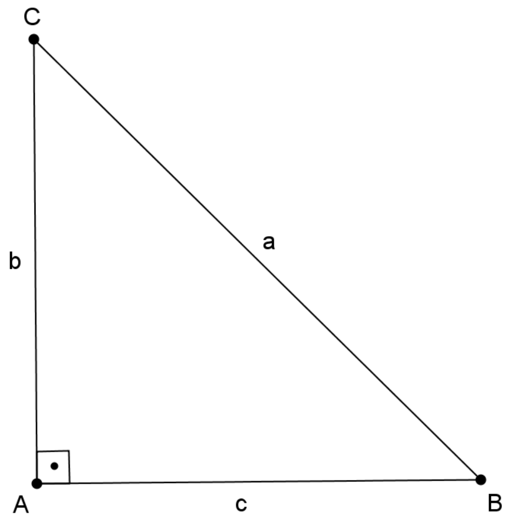
3.8 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Já estudamos como a proporcionalidade das medidas dos lados homólogos de triângulos semelhantes possibilita a obtenção de medidas inacessíveis. No exemplo dado com a cesta de basquete usamos um triângulo retângulo de catetos iguais feito de papel. Imagine agora que é possível usar qualquer triângulo retângulo para isso, e, melhor ainda, nem é preciso construir um modelo de papel. Basta saber um de seus ângulos agudos e usar as relações trigonométricas adequadas. É isso que estudaremos a seguir.

3.8.1 Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos

Se ABC é um triângulo retângulo em A, temos:

Figura 18 – Definição das funções trigonométricas por meio de semelhança de triângulos.

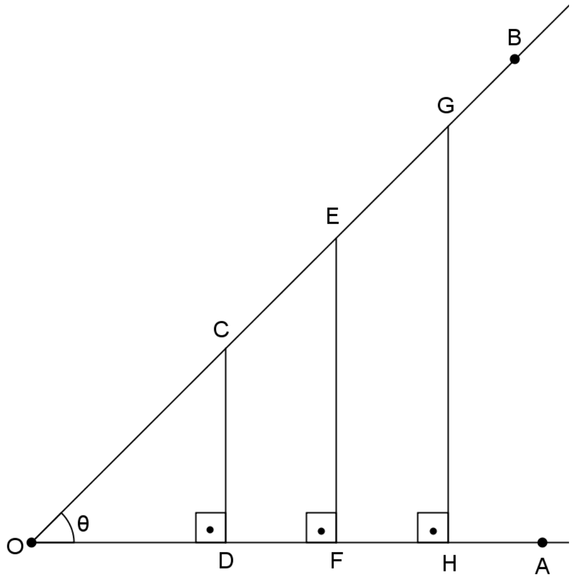


Fonte: Elaborada pelo autor.

- a é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- b e c são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos;
- AC é o cateto oposto ao ângulo B.
- AB é o cateto adjacente ao ângulo C.

Consideremos agora na figura 19, um ângulo $A\hat{O}B = \theta, 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ e tracemos, a partir dos pontos C, E, G, etc. da semirreta OA, as perpendiculares CD, EF, GH, etc., à semirreta OB.

Figura 19 – Definição das funções trigonométricas por meio de semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os triângulos OCD, OEF, OGH, etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \cdots\ (constante)$$

Essa relação depende apenas do ângulo θ (e não do tamanho do triângulo retângulo do qual θ é um dos ângulos agudos). Ela é chamada Seno de θ e escrevemos:

$$sen\,\theta = \frac{CD}{OC} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}\ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

De modo análogo, da semelhança de triângulos obtemos as relações:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \cdots (constante)$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \cdots (constante)$$

que também dependem apenas do ângulo θ e que definimos, respectivamente, como Cosseno do ângulo θ e Tangente do ângulo θ :

$$\cos\theta = \frac{OD}{OC} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}\ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

$$\tan\theta = \frac{CD}{OD} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}\ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

As razões $sen\ \theta = \frac{CD}{OC}, cos\ \theta = \frac{OD}{OC}, \tan\theta = \frac{CD}{OD}$ são chamadas razões trigonométricas em relação ao ângulo θ.

3.8.2 Tabela do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

Os ângulos de 30º, 45º e 60º são chamados ângulos notáveis, ou seja, ângulos que merecem atenção especial. Para os estudos de trigonometria, é essencial que tais valores sejam memorizados. A tabela a seguir resume esses valores:

Tabela 1 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que na tabela os valores da linha do seno aparecem invertidos na linha do cosseno. Isso não é coincidência. Ocorre porque 30º e 60º são complementares, e 45º é complementar a si mesmo.

Desta forma, nos cálculos que envolvem ângulos notáveis, você deve usar os valores memorizados e, nos demais, usar uma calculadora científica ou consultar uma tabela trigonométrica.

3.8.3 Tabela do Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 1 a 90 graus.

Tabela 2 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 1 a 90 graus.

Ângulo	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**	**Ângulo**	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
0	0,000	1,000	0,000	**46**	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	**47**	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	**48**	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	**49**	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	**50**	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	**51**	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	**52**	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	**53**	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	**54**	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	**55**	0,819	0,574	1,428

11	0,174	0,985	0,176	**56**	0,829	0,559	1,483
12	0,191	0,982	0,194	**57**	0,839	0,545	1,540
13	0,208	0,978	0,213	**58**	0,848	0,530	1,600
14	0,225	0,974	0,231	**59**	0,857	0,515	1,664
15	0,242	0,970	0,249	**60**	0,866	0,500	1,732
16	0,259	0,966	0,268	**61**	0,875	0,485	1,804
17	0,276	0,961	0,287	**62**	0,883	0,469	1,881
18	0,292	0,956	0,306	**63**	0,891	0,454	1,963
19	0,309	0,951	0,325	**64**	0,899	0,438	2,050
20	0,326	0,946	0,344	**65**	0,906	0,423	2,145
21	0,342	0,940	0,364	**66**	0,914	0,407	2,246
22	0,358	0,934	0,384	**67**	0,921	0,391	2,356
23	0,375	0,927	0,404	**68**	0,927	0,375	2,475
24	0,391	0,921	0,424	**69**	0,934	0,358	2,605
25	0,407	0,914	0,445	**70**	0,940	0,342	2,747
26	0,423	0,906	0,466	**71**	0,946	0,326	2,904
27	0,438	0,899	0,488	**72**	0,951	0,309	3,078
28	0,454	0,891	0,510	**73**	0,956	0,292	3,271
29	0,469	0,883	0,532	**74**	0,961	0,276	3,487
30	0,485	0,875	0,554	**75**	0,966	0,259	3,732
31	0,500	0,866	0,577	**76**	0,970	0,242	4,011
32	0,515	0,857	0,601	**77**	0,974	0,225	4,331
33	0,530	0,848	0,625	**78**	0,978	0,208	4,705
34	0,545	0,839	0,649	**79**	0,982	0,191	5,145
35	0,559	0,829	0,675	**80**	0,985	0,174	5,671
36	0,574	0,819	0,700	**81**	0,988	0,156	6,314
37	0,588	0,809	0,727	**82**	0,990	0,139	7,115
38	0,602	0,799	0,754	**83**	0,993	0,122	8,144
39	0,616	0,788	0,781	**84**	0,995	0,105	9,514
40	0,629	0,777	0,810	**85**	0,996	0,087	11,430
41	0,643	0,766	0,839	**86**	0,998	0,070	14,301
42	0,656	0,755	0,869	**87**	0,999	0,052	19,081
43	0,669	0,743	0,900	**88**	0,999	0,035	28,636
44	0,682	0,731	0,933	**89**	1,000	0,017	57,290
45	0,695	0,719	0,966	**90**	1,000	0,000	

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.8.4 Relações entre Seno, Cosseno e Tangente.

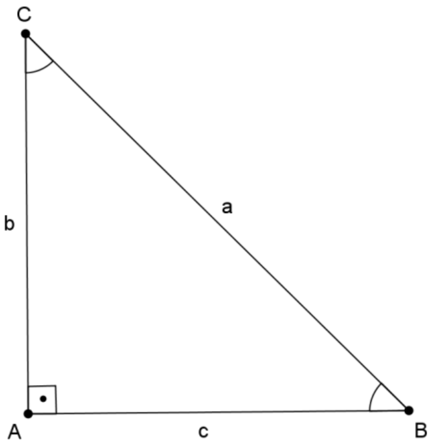
As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se relacionam de várias formas. A primeira é chamada Relação fundamental do triângulo retângulo;

$$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \ (0° < \alpha < 90°)$$

Vejamos a demonstração:

Consideremos um ângulo $\propto$ de vértice C e um triângulo CAB, retângulo em A, como mostra a figura abaixo.

Figura 20 – Relação Fundamental da Trigonometria.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembrando o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$sen^2 \propto + cos^2 \propto = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = 1$$

A segunda relação trabalha a razão entre seno e cosseno de um ângulo;

Demonstração:

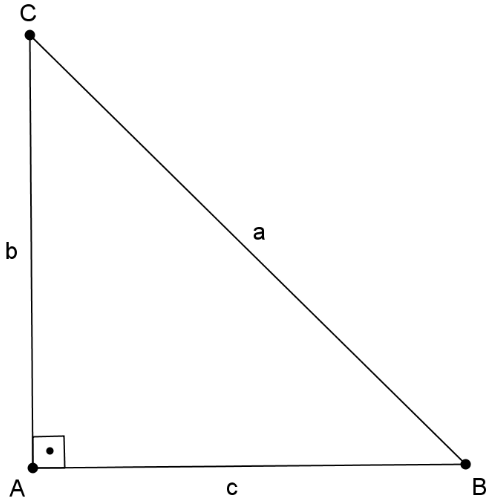
$$\frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = tan \propto$$

Logo,

$$tan \propto = \frac{sen \ \propto}{cos \propto}$$

Pode-se demonstrar, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra “cosseno” (seno do complemento).

Figura 21 – Relação Fundamental da Trigonometria.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo anterior, temos:

$sen\alpha = \frac{b}{a} = cos\beta$; portanto $sen\alpha = cos\beta$

$cos\alpha = \frac{c}{a} = sen\beta$; portanto $cos\alpha = sen\beta$

3.9 Trigonometria em triângulos quaisquer

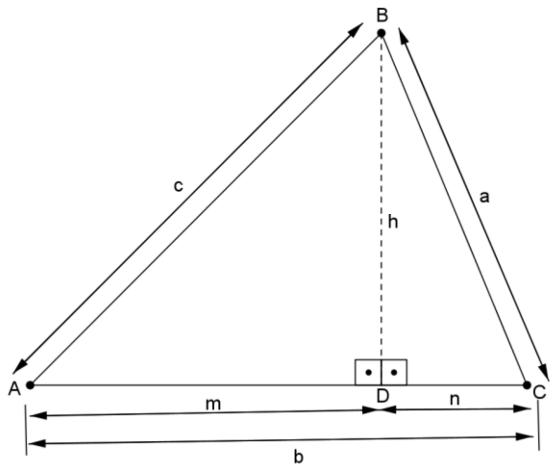
Nesta Subseção será apresentada a trigonometria em um triângulo qualquer. Apresentaremos a Lei dos cossenos e a Leis dos senos. Para demonstrar tais leis, será utilizado os conceitos apresentados até agora, utilizados em triângulos retângulos.

3.9.1 Lei dos Cossenos

Segundo Iezzi (2013, p.226), a lei dos cossenos é definida da seguinte forma; Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração:

Figura 22 – Lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(I) Seja ABC um triângulo com $A < 90°$.

No triângulo BCD, que é retângulo: $a^2 = h^2+n^2$ (1).

No triângulo BAD, que é retângulo: $h^2 = c^2-m^2$ (2).

Temos também que: $n = b - m$ (3).

Levando a equação (3) e a equação (2) na equação (1) temos:

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

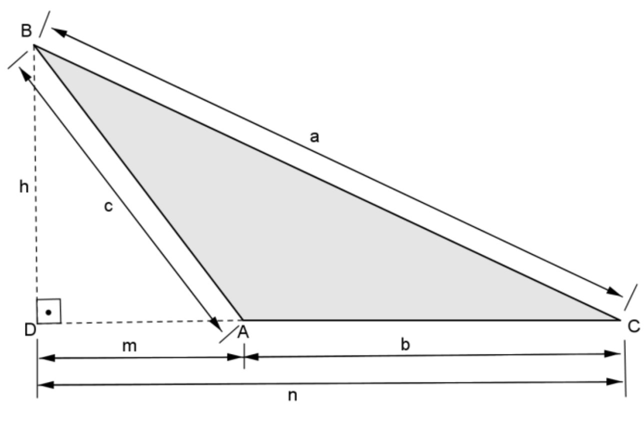
Mas, no triângulo BAD: $m = c.cos\hat{A}$.

Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A}$$

(II) Seja ABC um triângulo com $90° < \hat{A} < 180°$.

Figura 23 – Lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No triângulo BCD, que é retângulo: $a^2 = n^2 + h^2$ (1).

No triângulo BAD, que é retângulo: $h^2 = c^2 - m^2$ (2).

Temos também: $n = b + m$ (3)

Levando (3) e (2) em (1):

$$a^2 = (b+m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

Mas, no triângulo BAD: $m = c.\cos\left(180 - \hat{A}\right) \Rightarrow m = -c.cos\hat{A}$.

Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A}$$

(III) Analogamente, podemos provar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\hat{C}$$

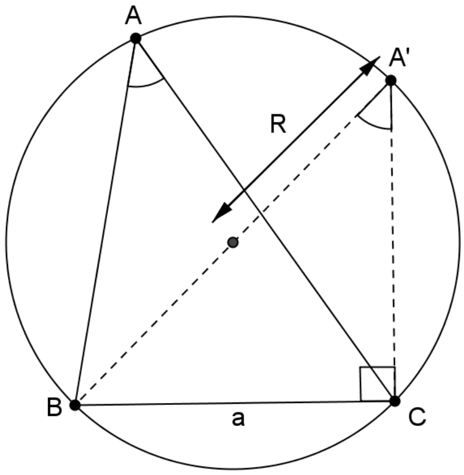
3.9.2 Lei dos senos

Segundo Iezzi (2013, p.229) a lei dos Senos é definida da seguinte forma; Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Pelo vértice B, tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos A' com C.

Figura 24- Lei dos senos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sabemos que $\hat{A}$ = $\widehat{A'}$ por determinarem na circunferência a mesma corda BC. O triângulo $A'BC$ é retângulo em C por estar inscrito numa semicircunferência.

Temos, então:

$$a = 2R.sen\widehat{A'} \Rightarrow a = 2R.sen\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{sen\hat{A}} = 2R$$

Analogamente:

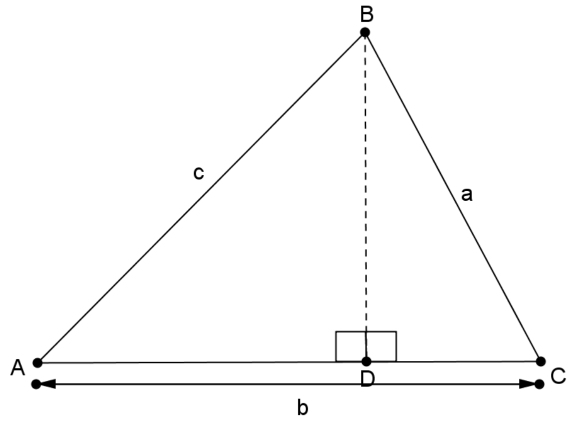
$$\frac{b}{sen\hat{B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$$

Donde concluímos a tese:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

3.9.3 Teorema da Área

Figura 25 – Teorema da Área.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

Demonstração:

(I) Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90°$.

No triângulo ADB, que é retângulo, temos:

$$DB = c.sen\hat{A}$$

então:

$$S = \frac{AC.DB}{2} = \frac{bc}{2}.sen\hat{A}$$

(II) Seja ABC um triângulo com $90° < \hat{A} < 180°$.

No triângulo ADB, que é retângulo, temos:

$$DB = c.sen(180° - \hat{A}) = c.sen\hat{A}$$

então:

$$S = \frac{AC.DB}{2} = \frac{bc}{2}.sen\hat{A}$$

(III) Analogamente provamos que:

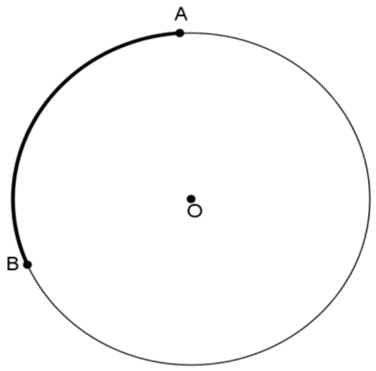
$$S = \frac{a.b}{2}\ .sen\hat{C}$$

$$S = \frac{a.c}{2}.sen\hat{B}$$

3.9.4 O Círculo Trigonométrico

Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes, assinalado em negrito no círculo da figura 26. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada arco de circunferência AB.

Figura 26 – Arco de circunferência.



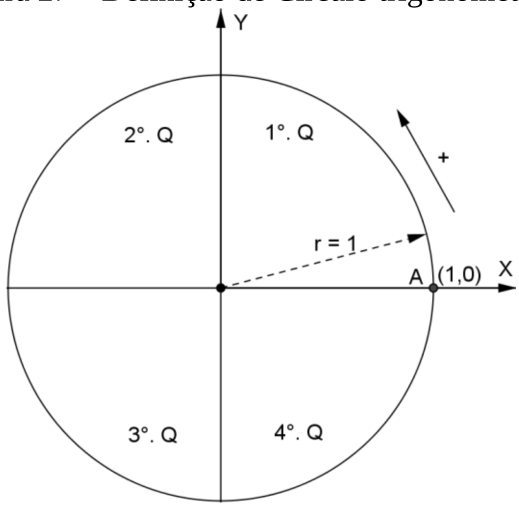
Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere, sobre um plano, um sistema cartesiano ortogonal. Denomina-se círculo ou ciclo trigonométrico a circunferência π de centro (0,0) e raio $r = 1$ e na qual o sentido positivo é o sentido anti-horário. Note que o comprimento da circunferência é 2π, pois o raio é unitário.

Ao círculo trigonométrico de centro O, vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixando o ponto A de coordenadas (1,0) como origem dos arcos (conforme figura 27).

Os eixos x (horizontal) e y (vertical) dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes, chamadas quadrantes, e contadas a partir de A, no sentido positivo.

Figura 27 – Definição de Círculo trigonométrico.

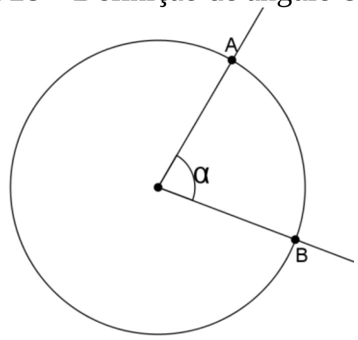


Autor: Elaborada pelo autor.

3.9.5 Ângulo Central

Todo ângulo com vértice no centro de uma circunferência e cujos lados a intersectam é denominado ângulo central relativo à circunferência. O arco da circunferência contido no interior de um ângulo central é chamado de arco correspondente a esse ângulo. Todo arco de circunferência corresponde um único ângulo central e a medida de um arco equivale à medida do ângulo central correspondente.

Figura 28 – Definição de ângulo central.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.9.6 Medidas dos Arcos

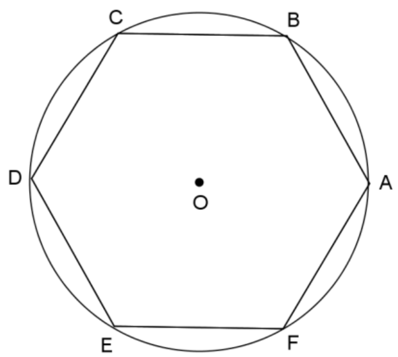
As unidades para medir arcos são o grau e o radiano. O grau é um arco unitário igual a 1/360 da circunferência que contém o arco a ser medido. O radiano é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

É evidente que uma circunferência mede 360º, porém já não é tão fácil dizer quantos radianos mede uma circunferência.

Podemos chegar a uma noção intuitiva do valor dessa medida, considerando a seguinte construção:

(1º) Em uma circunferência de centro O e raio r inscrevemos um hexágono regular ABCDEF. Cada lado do hexágono tem comprimento r:

Figura 29 – Medida de arcos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = r$$

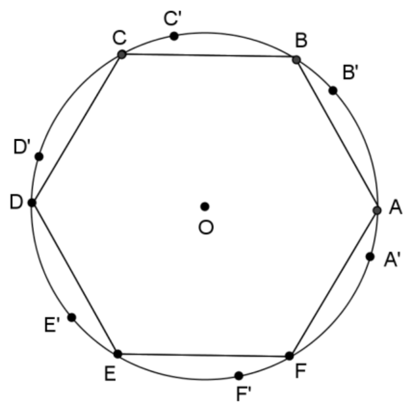
(2º) A circunferência fica dividida em seis arcos de medidas iguais a;

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$$

e, sendo o comprimento do arco sempre maior que o comprimento da corda correspondente (AB, BC, CD, DE, EF e FA são cordas da circunferência), todos esses arcos são maiores que 1 rad.

(3º) Em cada um dos citados arcos cabe 1 rad:

Figura 30 – Medida de arcos em rad.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\widehat{AB'} = \widehat{BC'} = \widehat{CD'} = \widehat{DE'} = \widehat{EF'} = \widehat{FA'} = 1\ rad$$

e ainda sobra uma fração de radiano.

(4º) O radiano cabe seis vezes na circunferência e mais a soma dessas sobras. Mais precisamente demonstra-se que a circunferência mede 6,283184...rad (número batizado com o nome de 2π).

Tendo em vista essas considerações, podemos estabelecer a seguinte correspondência para a conversão de unidades:

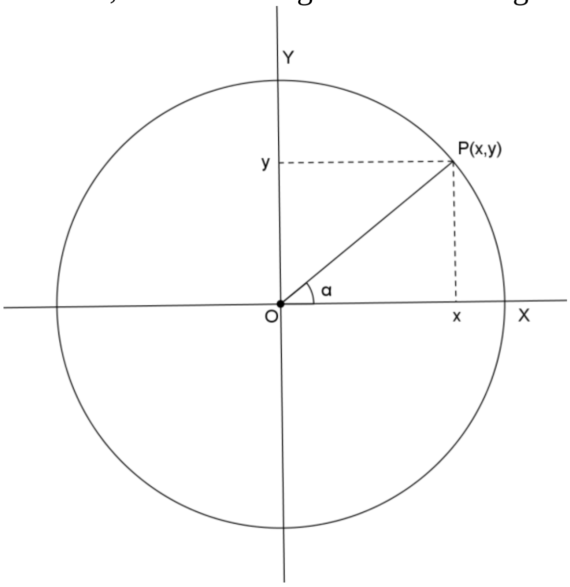
$$360° \rightarrow 2\pi\, rad$$

$$180° \rightarrow \pi\, rad$$

3.9.7 Seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico

A extensão do domínio das funções trigonométricas a toda a reta real faz-se recorrendo ao círculo trigonométrico. Ele é definido por uma circunferência de raio unitário (isto é, igual a um) centrada na origem dos eixos coordenados.

Figura 31 – Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O triângulo OPx é retângulo no ângulo com o eixo das abscissas (o eixo X) como se pode ver pela figura 31. Visto que a circunferência tem raio $r = 1$, todos os pontos distam da origem da mesma distância, r. Logo, o segmento $OP = 1$. Assim sendo, o quociente $\frac{y}{r}$ representa o seno de α, sendo r a hipotenusa. Da mesma forma, $\frac{x}{r}$ representa o cosseno do ângulo α.

Desta forma, podemos definir o seno e o cosseno do ângulo α para todos os valores de α, e não somente para aqueles entre zero grau e noventa graus, como anteriormente. Temos então que:

$$sen\alpha = \frac{y}{r}\ , cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Como no círculo trigonométrico o $r = 1$, temos então que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ são: $P(x, y) = (x, y) = (cos\alpha, sen\alpha)$. Se fosse $r \neq 1$, teria de dividir as coordenadas por r, sendo $r^2 = x^2 + y^2$.

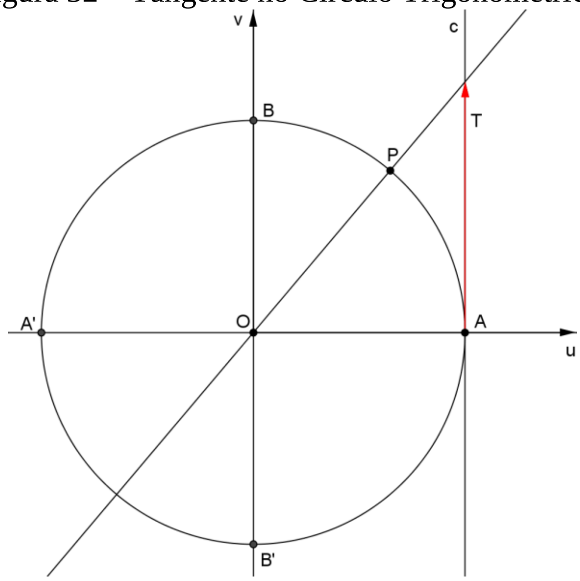
Analisando a figura 31 veremos que;

$$sen\frac{\pi}{2} = 1 \text{ e } cos\frac{\pi}{2} = 0$$

De igual forma, para o ângulo $\alpha = \pi$ radianos (meia volta no círculo), temos $sen(\pi) = 0$ e $cos(\pi) = -1$, obtemos o ponto $P(x, y) = (0, -1)$. Quando temos $\alpha = 2\pi$ radianos (uma volta completa começando em $\alpha = 0$, isto é, sobre o eixo dos X), voltamos a ter o ponto (0,1), logo $sen(2\pi) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$. Prosseguindo para outros valores, verificamos que as funções se repetem cada vez que adicionamos 2π radianos ao argumento (ângulo). Da mesma forma que temos valores possíveis para o seno e o cosseno quando $\alpha > 0$, também é possível atribuir valores às funções trigonométricas quando $\alpha < 0$. Nesses casos, temos ângulos descritos no sentido dos ponteiros do relógio. Portanto, as duas funções ficam assim definidas para todos os valores da reta real.

Dado um número real $x \in [0; 2\pi], x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta OP e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (indicamos $tg\ x$) a medida algébrica do segmento AT.

Figura 32 – Tangente no Círculo Trigonométrico.

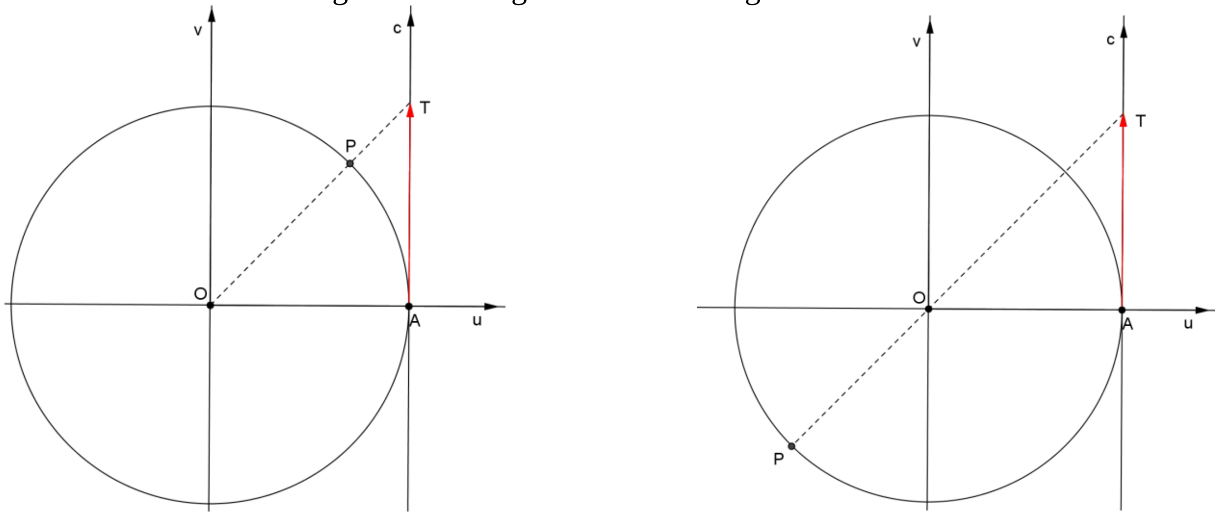


Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2}$, P está em B e, para $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B', então a reta OP fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a tgx não está definida.

Se x é um ângulo do primeiro ou do terceiro quadrante, então $tg\ x$ é positiva. De fato, neste caso o ponto T está acima de A e AT é positiva, ou seja, AT > 0.

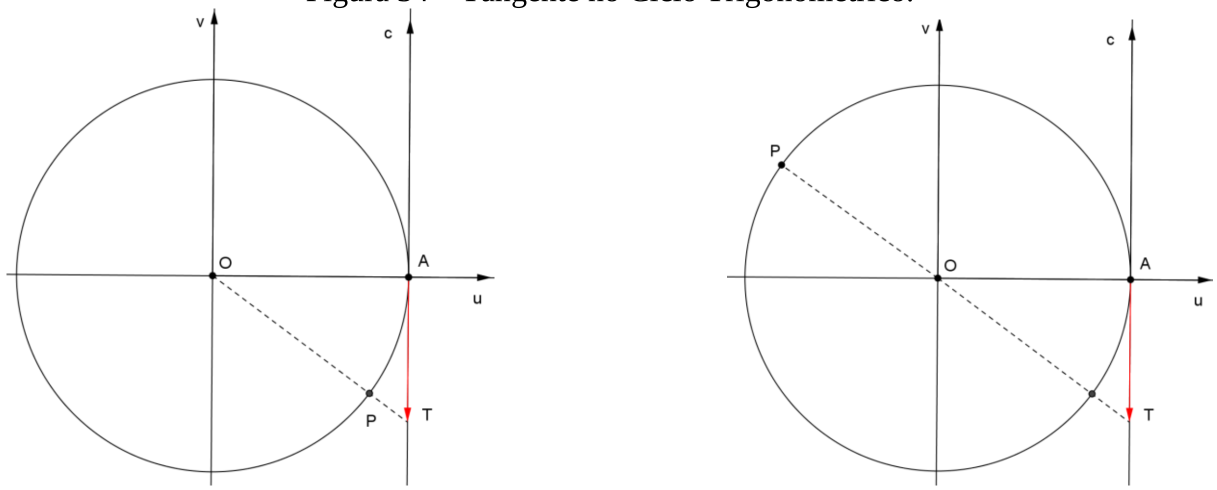
Figura 33 – Tangente no Ciclo Trigonométrico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então tgx é negativa. De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e AT é negativa, ou seja, AT < 0.

Figura 34 – Tangente no Ciclo Trigonométrico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.9.8 Fórmulas de adição de arcos.

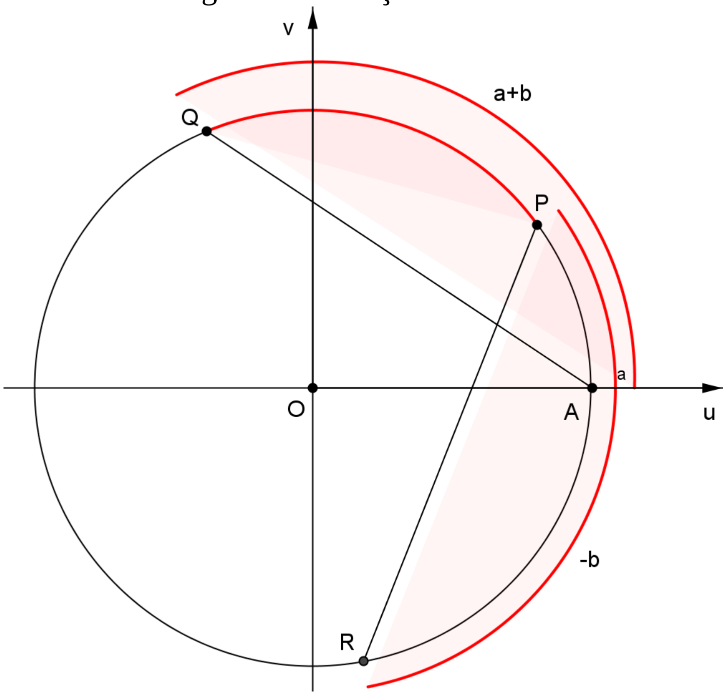
Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma $(a + b)$ e da diferença $(a - b)$ de dois números reais quaisquer a e b.

Iniciaremos deduzindo a fórmula do cosseno da soma. Sejam P, Q e R os pontos do ciclo associados aos números a, $a+b$, e $-b$, respectivamente. Em relação ao sistema cartesiano uOv, as coordenadas desses pontos são:

$$P(cosa, sena), Q\big(\cos(a+b)\,, sen(a+b)\big), R(cosb, -senb)$$

Os arcos $AQ\ E\ RP$ têm a mesma medida, portanto as cordas $AQ\ E\ PR$ têm medidas iguais.

Figura 35 – Adição de Arcos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos, da geometria analítica, temos:

$$d_{AQ}^2 \ = (X_Q - X_A)^2 + (Y_Q - Y_A)^2 =$$

$$= [\cos(a+b) - 1]^2 + [sen(a+b) - 0]$$

$$= cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + sen^2(a+b) =$$

$$= 2 - 2\cos(a+b)$$

$$d_{RP}^2 = (X_P - X_R)^2 + (Y_P - Y_R)^2 =$$

$$= (cosa - cosb)^2 + (sena + senb)^2 =$$

$$= cos^2a - 2cosa.cosb + cos^2b + sen^2a + 2sena.senb + sen^2\text{b}=$$

$$= 2 - 2cosa.cosb + 2sena.senb$$

$$d_{AQ} = d_{RP} \Rightarrow 2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos a\,.cosb + 2sena.senb$$

e, então, vem a fórmula:

$$\cos(a+b) = cosa.cosb - sena.senb$$

A partir da fórmula anterior podemos obter o cosseno da diferença:

$$\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = cosa.\cos(-b) - sena.sen(-b) =$$

$$= cosa.cosb - sena.(-senb)$$

então:

$$\cos(a-b) = cosa.cosb + sena.senb\ .$$

O seno da soma é obtido por $sen(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).cosb + sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right).senb$, então:

$$sen(a+b) = sena.cosb + senb.cosa.$$

A partir do seno da soma podemos obter o seno da diferença: $sen(a-b) = sen[a+(-b)] = sena.\cos(-b) + sen(-b).cosa = sena.cosb + (-senb).cosa$, então:

$$sen(a-b) = sena.cosb - senb.cosa$$

A tangente da soma pode ser obtida com o seno e o cosseno da soma:

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sena.cosb + senb.cosa}{cosa.cosb - sena.seb} = \frac{\frac{sena.cosb + senb.cosa}{cosa.cosb}}{\frac{cosa.cosb - sena.senb}{cosa.cosb}}$$

então:

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$$

Esta fórmula só é aplicável se: $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Da fórmula anterior temos:

$$tg(a-b) = tg[a+(-b)] = \frac{tga + tg(-b)}{1 - tga.tg(-b)} = \frac{tga + (-tgb)}{1 - tga.(-tgb)}$$

então:

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}$$

Esta fórmula só é aplicável se: $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

4 PRINCÍPIOS DA TOPOGRAFIA

Segundo Costa (2011, p.10)[28], a palavra topografia é originada do Grego: Topos (lugar) e Graphein (descrição), ou seja, literalmente topografia significa descrição dos lugares. Devido à necessidade de demarcar a terra para que o vizinho não se apropriasse da colheita, ou quando as plantações às margens do Rio Nilo foram destruídas pelas cheias, houve o desenvolvimento progressivo de novas técnicas de medição, chegando aos equipamentos que utilizamos hoje.

A topografia é uma aplicação da matemática, principalmente da geometria, e é empregada na medição das terras com todos os seus acidentes naturais e artificiais, determinando o contorno, a dimensão e a posição relativa de uma porção limitada da superfície, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre. Para a realização de projetos de qualquer obra de engenharia (construção civil, viadutos, barragens, estradas, atividades agrícolas, pastoris ou florestais, de exploração mineralógica, saneamento, entre outras) é necessária a confecção de uma planta que contenha as informações pertinentes para cada caso.

É indiscutível a importância da Topografia para a Engenharia, pois a planta topográfica é imprescindível para a elaboração e execução de qualquer projeto que deva ser implantado em uma determinada região.

O levantamento, isto é, trabalho topográfico e sua representação se dizem:

- Planimétrico: quando visa apenas determinar a projeção da gleba e das coisas nela contidas sobre superfície horizontal;
- Planialtimétrico: quando, além disso, determina a elevação de pontos da gleba, sobre superfície horizontal de referência.

A planta de uma gleba é a sua projeção sobre a superfície esférica da Terra, reduzida numa certa escala. A curvatura da Terra, todavia, é desprezível nas glebas representadas em trabalhos triviais de topografia. Por isso, no levantamento e representação de glebas não muito grandes, isto é, de alguns quilômetros ou dezenas de quilômetros de comprimento e largura, costumamos esquecer a curvatura, supondo plano o planeta em que vivemos. Na representação de glebas maiores, isto é impossível.

Chamamos Geodésia à ciência que tem por escopo o levantamento de glebas tão grandes que não permitam desprezo da curvatura da Terra.

Em topografia distância entre dois pontos, ângulo horizontal ou azimutal entre duas direções e área de uma gleba refere-se sempre às suas projeções horizontais.

Ângulo horizontal ou azimutal entre duas direções é o formado pelas suas projeções horizontais. Diz-se à direita quando medido no sentido horário, a partir da direção escolhida como origem e à esquerda, quando medido no sentido anti-horário.

Rumo de uma direção é o ângulo que sua projeção horizontal faz com o meridiano, contando de 0° a 90° para a esquerda ou direita, a partir de norte ou de sul.

Azimute de uma direção é o ângulo que sua projeção faz com o meridiano, medido de 0° a 360°, no sentido horário ou anti-horário, e a partir de N ou S.

O levantamento topográfico, em geral, implica na medida de duas espécies de grandezas, ângulos e distâncias. Em trabalhos triviais, os ângulos são medidos com teodolitos, instrumento que determina direta ou indiretamente ângulos horizontais e verticais, distâncias e desníveis.

4.1 Teodolito

Segundo Casaca (2013, p.12)[29] o termo teodolito foi introduzido por Leonard Digges no seu livro Pantometria, publicado na Inglaterra na primeira metade do século XVI. Os teodolitos são equipamentos utilizados em Topografia e Geodésia na medição de ângulos verticais (geralmente zenitais) e ângulos azimutais. Um teodolito é constituído por:

- Uma parte fixa, designada por base, que permite fixar o teodolito com um dispositivo de estacionamento sobre o terreno: um tripé ou um pilar de estacionamento;
- Uma parte móvel, designada por alidade, que roda em torno de um eixo, o eixo principal, perpendicular à base.

Os teodolitos mais recentes, chamados de teodolitos eletrônicos, apresentam:

- Sistemas óptico-eletrônicos de leitura dos círculos azimutal e vertical;

- Sistemas óptico-eletrônicos para leitura dos desvios angulares do eixo principal em relação à direção da vertical;

- Sistemas de registro de leituras em dispositivo magnético compatível com um computador pessoal;

- Um microprocessador, que controla os sistemas anteriores e registra as leituras azimutais e verticais, corrigidas do efeito do desvio da vertical referido.

Figura 36 – Estação total vista de frente, teclados de comandos e *display* de visualização.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Estação total vista de costa e seta indicando a posição do nível de bolha.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 - Estação total vista de lado sobre tripé, luneta apontada para o horizonte.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Estacionamento do Teodolito

O teodolito está estacionado em um ponto quando:

- Está nivelado, isto é, quando o seu eixo principal está verticalizado;
- Está centrado, isto é, quando o seu eixo principal se confunde com a vertical do ponto.

Tendo marcado os pontos de estação, realiza-se o estacionamento completo do teodolito, composto de quatro fases:

- Estacionamento do tripé.
- Centragem do teodolito.
- Nivelamento exato do teodolito.
- Focalizações.

4.3 Estacionamento do tripé

- Estender as pernas do tripé até que fiquem na altura do queixo do operador.
- Abrir, uniformemente, as pernas do tripé procurando formar um triângulo equilátero, imaginando o centro deste como sendo o ponto de estação, e com a altura compatível com a do operador.
- Colocar o fio de prumo e manter o parafuso de fixação do teodolito da mesa triangular do tripé, no centro do orifício circular desta mesa.
- Posicionar-se de forma oposta a uma das pernas do tripé.

- Deslocar o tripé utilizando as duas pernas, sem fechá-las, de modo que o fio de prumo se aproxime do centro do ponto de estação, tendo o cuidado de manter a mesa horizontalmente.
- Enterrar as pontas das pernas do tripé de modo que o fio de prumo continue sobre o centro do ponto de estação, e a mesa horizontalizada.
- Enterrar as pontas das pernas do tripé de modo que o fio de prumo continue sobre o centro do ponto de estação, e a mesa horizontalizada e o parafuso de fixação do teodolito próximo ao centro.

Figura 39 – Tripé em alumínio para suporte de estação total e nível.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – Estação total vista de lado sobre tripé e luneta apontada a 45º do horizonte.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Centragem do Teodolito

- Colocar o teodolito sobre a mesa do tripé, de modo que os parafusos calantes fiquem sobre os vértices daquela mesa.
- Apertar o parafuso de fixação do teodolito e, em seguida, afrouxá-lo meia volta, verificando e retificando, se for o caso, a centragem com o fio de prumo.
- Agir sobre os parafusos calantes até que estes estejam, aproximadamente, na metade de seu curso.
- Nivelar aproximadamente o teodolito com o nível esférico, de modo a agir sobre os dois parafusos calante, no sentido conveniente, a fim de trazer a bolha para o centro do círculo do nível esférico.
- Agir sobre a base triangular do teodolito orientado pelo prumo, realizando, assim, a centragem do instrumento.
- Apertar o parafuso de fixação do teodolito.

4.5 Nivelamento exato do Teodolito

- Colocar o nível tubular paralelo a dois parafusos calantes. Para isto, afrouxar o parafuso do grande movimento particular.
- Agir sobre estes parafusos, simultaneamente, no mesmo sentido e centralizar a bolha.
- Girar o teodolito aproximadamente 90º. O nível transversal ficará, consequentemente, perpendicular aos dois parafusos calantes utilizados na etapa anterior.
- Agir sobre o terceiro parafuso calante, no sentido conveniente, até centralizar a bolha.
- Repetir os procedimentos até que a bolha esteja centralizada em todas as direções, se a bolha se mantiver calada está terminado o nivelamento exato do teodolito.

4.6 Graus, Rumos e Azimutes

A leitura dos ângulos nos teodolitos é feita utilizando-se a unidade de medida grau ou unidade sexagesimal. O grau corresponde a 1/360 da circunferência, isto é, uma circunferência equivale a 360º. São submúltiplos do grau(º), o minuto de arco(') e o segundo de arco (''). Para os cálculos usa-se 1º = 60', 1' = 60'' , 1º = 3600''

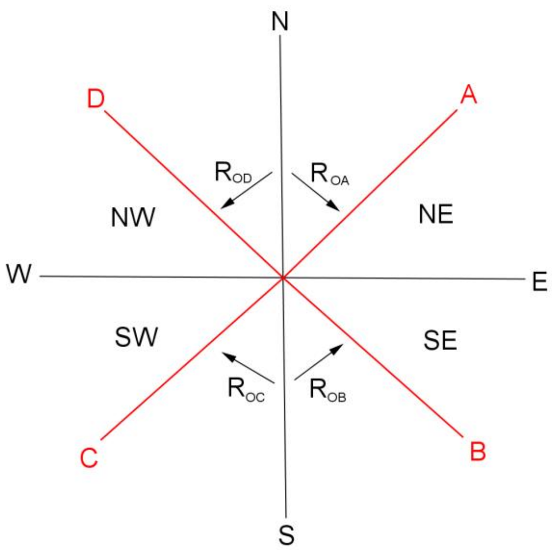
4.6.1 Rumo

É formado por um alinhamento qualquer com a direção do norte ou do sul, que varia de 0º a 90º. A origem é no norte, quando o alinhamento se encontra no quadrante nordeste (NE) ou no quadrante noroeste (NW). A origem é no sul, quando o alinhamento se encontra no quadrante sudeste (SE) ou no quadrante sudoeste (SW).

Como os rumos estão situados em quadrantes e têm valores que variam de 0º a 90º, há a necessidade de ser indicado o quadrante em que o alinhamento está situado.

Quando o rumo coincide com a linha norte (N), R = 0º N; com a linha sul (S), R = 0º S; com alinha leste (E), R = 90º E; e com a linha oeste (W), R = 90º W.

Figura 41 – Demonstração de rumos.



Fonte: Costa (2011, p.32)[28]

Tabela 3 – Rumo e Origem.

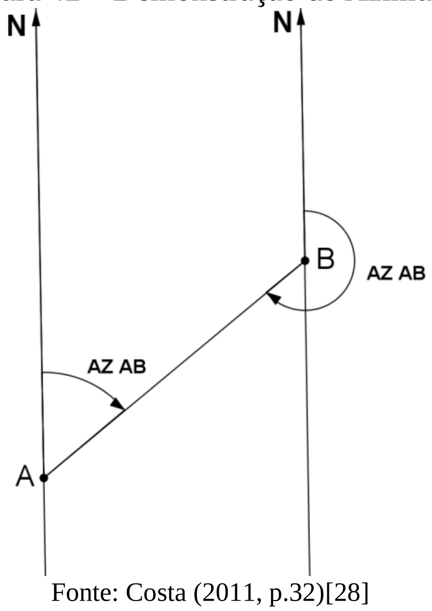
Quadrante	Rumo	Origem
I	NE	N
II	SE	S
III	SW	S
IV	NW	N

Fonte: Costa (2011, p.32)[28]

4.6.2 Azimute

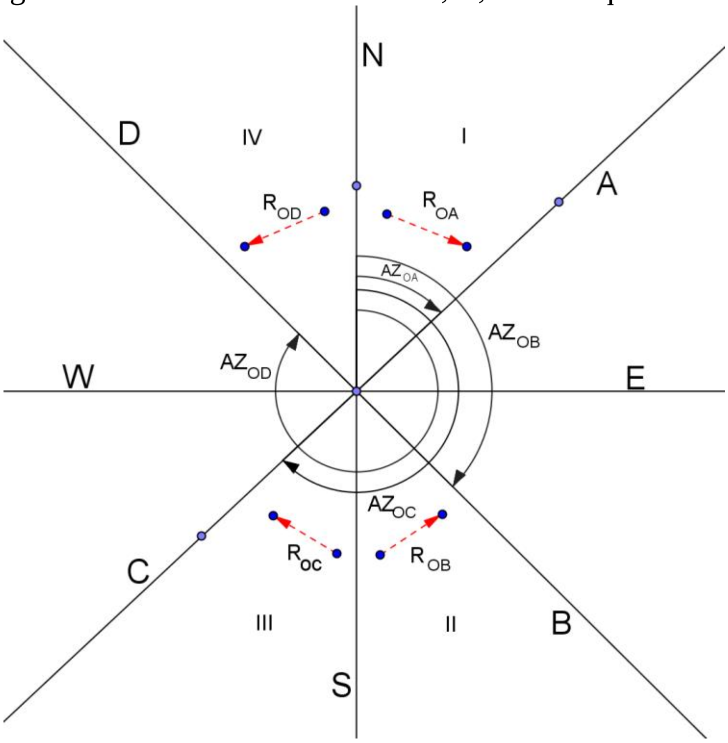
É o ângulo formado por um alinhamento qualquer com direção norte-sul. A origem é no norte. O sentido é o sentido horário e varia de 0º a 360º. A grandeza é o grau.

Figura 42 – Demonstração de Azimute.



Fonte: Costa (2011, p.32)[28]

Figura 43 – Azimutes e Rumos no I, II, III e IV quadrantes.



Fonte: Costa (2011, p.32)[28]

Tabela 4 – Rumo e Azimute.

RUMO $\Leftrightarrow$ AZIMUTE
Quadrante I $\Rightarrow AZ = R(NE)$
Quadrante II $\Rightarrow AZ = 180° - R \Rightarrow R = 180° - AZ(SE)$
Quadrante III $\Rightarrow AZ = 180° + R \Rightarrow R = AZ - 180°(SW)$
Quadrante VI $\Rightarrow AZ = 360° - R \Rightarrow R = 360° - AZ(NW)$

Fonte: Costa (2011, p.32)[28]

4.7 Escala

É a relação constante entre as grandezas do terreno e os respectivos valores gráficos representados em uma planta. A escala pode ser apresentada na forma de fração ou de proporção. Exemplo: 1/100 ou 1:100, sendo esta última a preferida.

As escalas mais usadas em topografia são: 1:100; 1:200; 1:500; 1:1000; 1:2000; 1:5000; 1:10000; 1:20000.

Na escala de 1:200, por exemplo, um alinhamento com a extensão de 200m será representado na planta por 1m. Em outras palavras, 1m na planta (100 cm) corresponde a 200m no terreno, ou ainda, 1 cm na planta corresponde a 200 cm (2m) no terreno.

4.8 Procedimentos para medições

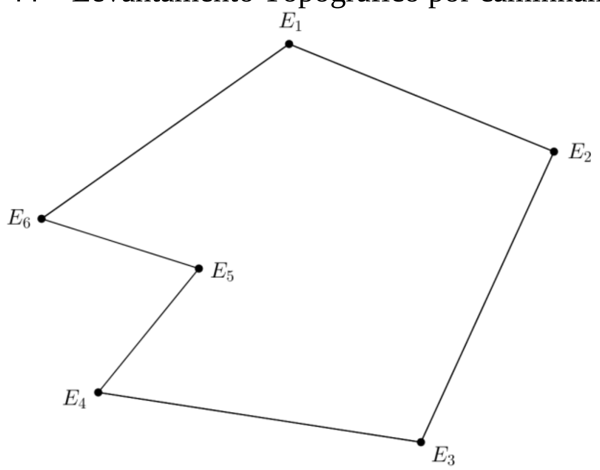
É a sequência dos trabalhos de campo de um levantamento topográfico:

- Caminhamento.
- Traçado dos alinhamentos.
- Medição das distâncias com a trena ou utilizando a mira vertical.
- Medição dos ângulos.
- Organização da caderneta de anotações.

4.8.1 Caminhamento

É uma base formada pelos alinhamentos. Na figura 44, o caminhamento é $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4 \rightarrow E_5 \rightarrow E_6$. Sendo o E_1 o ponto de partida. Os alinhamentos são $E_1E_2 \rightarrow E_2E_3 \rightarrow E_3E_4 \rightarrow E_5E_6 \rightarrow E_6E_1$.

Figura 44 – Levantamento Topográfico por caminhamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os pontos topográficos ($E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$) deverão ser situados em uma posição que permite boa visibilidade dos acidentes (rios, edificações, etc) e dos pontos detalhes (árvores, cantos de cercas, etc.).

4.8.2 Traçado dos alinhamentos

Para traçar os alinhamentos usam-se balizas, de modo que os pontos intermediários fiquem alinhados entre dois pontos extremos do alinhamento. Os pontos topográficos são marcados com piquetes e, quando necessário, com uma tachinha sobre estes. Trabalha-se em número de três pessoas, pelo menos. Duas seguram as balizas nas extremidades e a outra se posiciona entre os dois extremos. O intermediário é orientado até que o alinhamento seja definido.

4.8.3 Medição da Distância com a Trena

Os alinhamentos depois de traçados são medidos por processo direto, usando-se a trena ou outro equipamento para medição de distância.

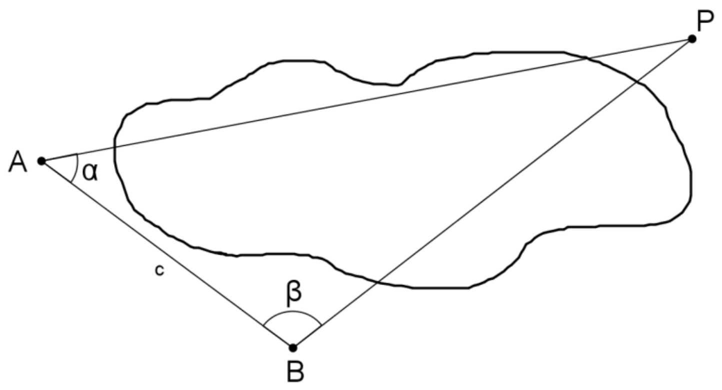
O primeiro instrumento de medição de distância que se usou foi a cadeia ou corrente de agrimensor, depois surgiram a fita de aço, a trena de aço, as trenas de lona, a trena de fibra de vidro e a trena de invar, que nada mais é que uma liga de níquel e aço que possui um coeficiente baixo de dilatação térmica. Trena é uma fita graduada, enrolada, acondicionada, ou não, em um estojo.

Quando o terreno é inclinado pode-se proceder das seguintes maneiras: ou se mede o ângulo de inclinação do terreno e se multiplica a distância inclinada pelo cosseno do ângulo, ou se mede a distância mantendo a trena na horizontal. O operador situado no ponto mais alto segura a trena mais baixa e o outro operador segura a trena mais alta), sabendo que um erro de horizontalidade até um grau (1º) é desprezível.

Quando a distância é maior que o comprimento da trena, é necessário alinhar os pontos intermediários entre os extremos. Dessa forma medem-se as distancias intermediária e somam-se os resultados. Devido a isto, em topografia, o seguimento que une dois pontos topográficos recebe o nome de alinhamento.

4.8.4 Distância a um Ponto Inacessível

Figura 45 – Distância entre o ponto A e P.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um observador está em um ponto A e deseja conhecer a distância deste ponto a um ponto P, como na figura. Como a medida não pode ser feita diretamente, o observador escolhe um ponto B qualquer (desde que P possa ser visto de B) e mede a distância $AB = c$ e os ângulos $PAB = \alpha$ e $PBA = \beta$. Aplicando então a lei dos senos no triângulo PAB temos:

$$\frac{PA}{Sen\beta} = \frac{c}{Sen(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{c.Sen\beta}{Sen(\alpha + \beta)}$$

5 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A proposta construída neste trabalho relaciona várias abordagens da trigonometria para serem exploradas em diferentes momentos do currículo escolar com objetivos específicos. Desta maneira, neste capítulo descrevem-se algumas atividades que foram aplicadas em uma turma da qual o professor pesquisador é docente.

De maneira geral os alunos apontam dificuldades diversas: familiarização com fórmulas, dificuldade de interpretar problemas, manipulações algébricas com as funções, identidades trigonométricas e aplicação das fórmulas de adição e subtração de arcos.

A partir disso apresentamos uma proposta de Metodologia para o Ensino da Trigonometria, relatando uma forma diferenciada de ensinar e de aprender os conteúdos, possibilitando que a interação entre alunos e professores ultrapasse os limites das salas de aula, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais atraente e interessante para alunos e professores, podendo assim contribuir para a redução dos altos índices de evasão e repetência no Ensino Médio.

As atividades foram aplicadas na segunda série do Ensino Médio com 20 alunos voluntários. Para o desenvolvimento do trabalho, os alunos compareceram no Instituto Federal de Rondônia - Campus Ariquemes, no período complementar ao das aulas regulares, em um momento chamado de projeto reforçar.

5.1 Relatos das aulas teóricas sobre Trigonometria Básica

✓ <u>Primeiro encontro (2h 45min)</u>

No primeiro encontro com os alunos foi realizado um pré-teste, que teve por finalidade avaliar os conhecimentos anteriores do aluno a respeito de trigonometria no triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo, no sentido de servir de termômetro, para avaliar se o mesmo domina os conteúdos matemáticos considerados como pré-requisitos para o trabalho que desejamos realizar.

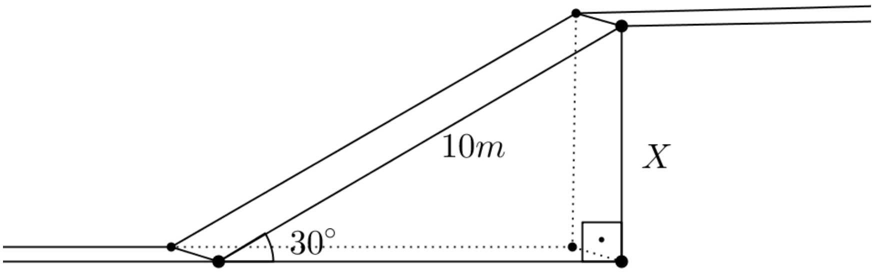
Tal avaliação tem, portanto, a função principal de diagnóstico, para posterior desenvolvimento de uma sequência didática. Na elaboração do teste, houve a preocupação formal de selecionar exercícios existentes no livro didático adotado pelo Instituto, com a finalidade de aproximar nosso instrumento diagnóstico à realidade escolar. O pré-teste é constituído por 5 questões, as quais apresentaremos a seguir.

(QUESTÃO 1) (Dante 2013, pg.237 – Vol.1) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:

a) 6 m
b) 7,2 m
c) 12 m
d) 20 m
e) 72 m

(QUESTÃO 2) Uma rampa lisa de 10 m de comprimento faz ângulo de 30º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente?

Figura 46 – Questão 2 do Pré-teste (Rampa lisa).



Fonte: Dante (2013, pg.254 –Vol.1)

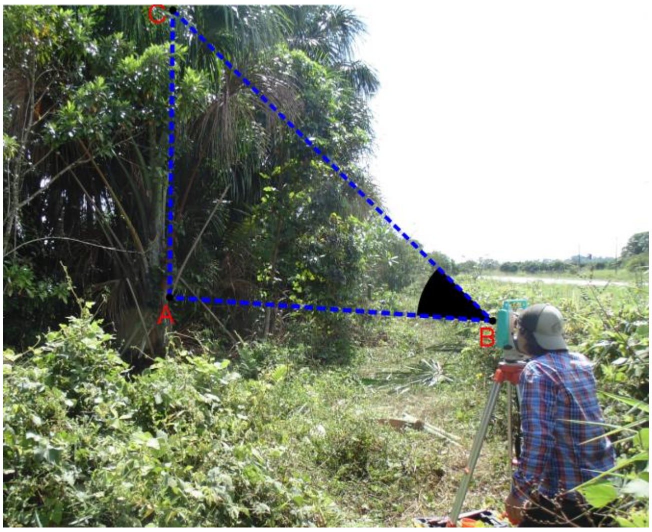
(QUESTÃO 3) Acredita-se que a necessidade de avaliar distâncias inacessíveis tenha colaborado para o surgimento do cálculo trigonométrico, já que essas medidas podem ser estimadas com o auxílio da trigonometria no triângulo retângulo. Atualmente, um instrumento óptico bastante usado para esse tipo de trabalho é o teodolito, que permite medir ângulos verticais e horizontais.

Figura 47 – Professor estacionando o Teodolito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando um teodolito a partir do segmento AB apresentado na figura abaixo, foi possível medir dois ângulos: $B\hat{A}C = 90°$ e $B\hat{C}A = 30°$.

Figura 48 – Professor medindo o ângulo B.

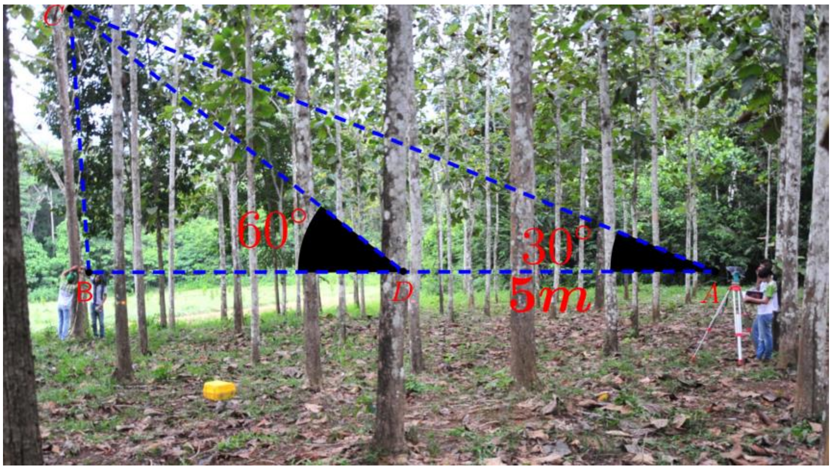


Fonte: Elaborada pelo autor.

Como foi obtida a distância $AB = 5\,m$, e tomando 1,73 como aproximação para $\sqrt{3}$, a distância entre os pontos A e C é:

(QUESTÃO 4) Em uma aula prática do curso Técnico em Agropecuária, um grupo de alunos teve de determinar a altura de uma árvore situada em terreno plano. Instalado o teodolito em um ponto do terreno, os estudantes conseguiram ver o topo da árvore sob um ângulo de 60º. Afastando-se o aparelho mais 5 m, seu topo passou a ser visto sob um ângulo de 30º.

Figura 49 – Alunos medindo os ângulos de 30º e 45º.

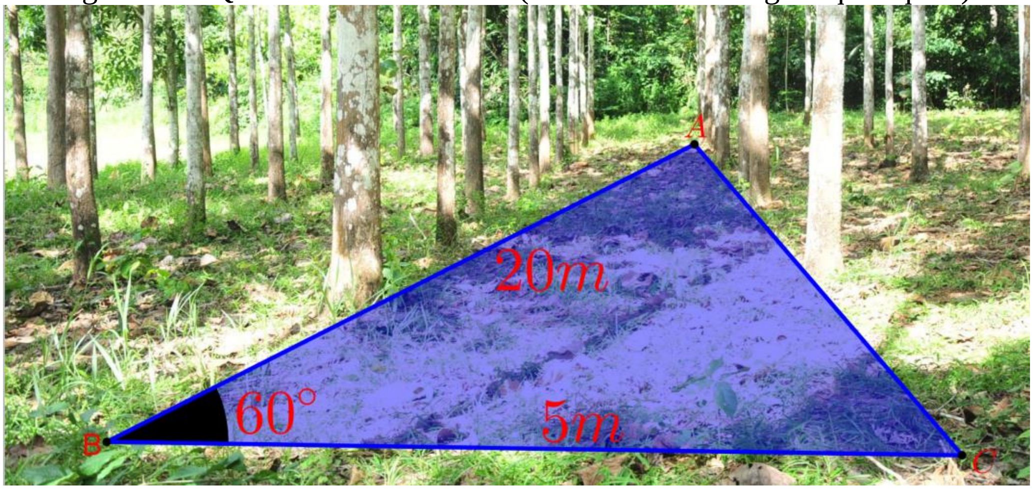


Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando que o teodolito tem uma altura de 1,17 m e tomando 1,732 como aproximação para $\sqrt{3}$, a altura da árvore é ?

(QUESTÃO 5) Instalando o teodolito no ponto B, medimos o ângulo horizontal $A\hat{B}C$. Com uma trena medimos as distâncias AB e BC.

Figura 50 – Questão 5 do Pré-Teste (Área de um Triângulo quaisquer).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Calcule a área do polígono ABC.

O resultado do diagnóstico revelou que eles tinham poucos conhecimentos sobre trigonometria, portanto tivemos que iniciar o estudo de conceitos trigonométricos básicos.

Iniciamos a aula com uma introdução histórica, fazendo questão de destacar que estudaremos a trigonometria em um contexto mais abrangente, no qual o triângulo retângulo passa a ser insuficiente para representar as situações propostas.

Recordamos alguns conceitos de Geometria Plana já conhecidos, tais como Arcos e ângulos na circunferência, unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos) e as relações entre unidades para medir arcos.

Pedimos aos alunos que desenhassem três circunferências concêntricas com raios diferentes e, com o auxílio de um barbante, demarcaram arcos de mesmo ângulo central nas três circunferências. A seguir, foi determinado o comprimento do arco de cada uma das circunferências desenhadas. Solicitamos então que os alunos respondessem se os arcos tinham o mesmo comprimento. Discutimos sobre conceitos de medida de arco (ângulo) e comprimento de arco, pois percebemos que os alunos estavam se confundindo.

✓ Segundo encontro (2h 45min)

O segundo encontro foi sobre as unidades para medir arcos de circunferência. Iniciamos com a unidade mais conhecida, o grau, apresentando alguns arcos importantes na circunferência. Para apresentar a unidade de medida radiano, pedimos aos alunos que desenhassem uma circunferência com o auxílio do compasso. Logo após, representaram o arco equivalente a um raio, ou seja, um radiano. Complementamos, mostrando que se usarmos a medida do raio como referência, será possível completar uma volta na circunferência com seis raios, com alguma sobra, e que esse resultado equivale ao comprimento da circunferência ($2\pi r \cong 6{,}28r$).

Estabelecemos a relação entre as unidades para medir arcos, usando os ângulos de 360º ou ($2\pi\, rad$); 180º ou ($\pi\, rad$); 90º ou ($\frac{\pi}{2} rad$); 270º ou ($\frac{3\pi}{4} rad$) como referência, e apresentamos também uma relação de comparação para uso em regra de três simples (180º equivale a $\pi\, rad$, por exemplo). Pedimos aos alunos várias conversões, explorando as diversas possibilidades de transformação entre as unidades de medida, deixando claro que, na ausência de unidades prevalece o radiano, por exemplo: $\frac{3\pi}{2}$ equivalem a $\frac{3\pi}{2} rad$, mas 30 não equivalem a 30º, e sim a 30 rad.

Explanamos sobre a importância de perceber que, $\pi\, rad$ significa aproximadamente $3{,}14\, rad$, da mesma forma $\pi\, Km$ significam aproximadamente $3{,}14\, Km$. Enfatizamos que é muito vantajoso usar a unidade de medida radiano, pois há possibilidade de fracionar o ciclo trigonométrico e visualizar simetrias. No entanto, muitos alunos sentiram dificuldades com frações, e automaticamente concluem que o sistema de unidade radiano é mais difícil de ser usado.

Para diminuir essas dificuldades propomos uma atividade em dupla, onde entregamos papéis coloridos de diversos tamanhos, régua, tesoura e transferidor. Cada dupla traçou no papel colorido quatro circunferências de tamanhos diferentes. Cada uma delas foi dividida ao meio, ficando cada metade com um elemento da dupla. Em seguida, orientamos que o primeiro pedaço fosse dividido ao meio, o segundo pedaço em três partes iguais, o terceiro pedaço em quatro partes iguais e o ultimo pedaço, em seis partes iguais, representando os ângulos de $\frac{\pi}{2} rad$,$\frac{\pi}{3} rad$,$\frac{\pi}{4} rad$ e $\frac{\pi}{6} rad$ respectivamente. Comparamos as divisões, destacando que os raios não interferem no ângulo obtido, e representamos o resultado no quadro. Solicitamos aos alunos que medissem cada ângulo obtido com o transferidor, comparando com os resultados em radianos.

✓ Terceiro encontro (2h 45min)

Neste encontro, apresentamos aos alunos a circunferência trigonométrica, representando os principais valores de ângulos (0º, 90º, 180º, 270º e 360º) tanto em graus quanto em radianos, assim como os quadrantes. Foram representados alguns ângulos notáveis, tais como 30º$\left(\frac{\pi}{6} rad\right)$ e 45º $\left(\frac{\pi}{4} rad\right)$. Destacamos que a circunferência trigonométrica possui orientação anti-horária para ângulos positivos e horária para ângulos negativos. Estimulamos que os alunos que representassem qualquer ângulo notável e observar as simetrias.

Para melhor fixar o conteúdo foram aplicados alguns exercícios.

(EXERCÍCIO 1) Determine a medida, em radianos, de um arco de 20 cm de comprimento contido em uma circunferência de raio 8 cm.

Resolução:

$l = 20\ cm\ ; r = 8\ cm$

$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{20}{8} = 2{,}5\ rad\ ou\ \frac{8\ cm}{1\ rad} = \frac{20\ cm}{x\ rad} \Rightarrow x = \frac{20}{8} = 2{,}5\ rad.$

(EXERCÍCIO 2) Escreva a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de:

a) 45º

b) $\frac{3\pi}{4} rad$

Resolução:

a) Expressão geral: $\alpha + k.360°$

$\alpha = 45°$

$45° + k.360°\ , com\ k\epsilon\ Z$

b) Expressão geral: $x = 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{4} rad$

$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, com\ K\ \epsilon\ Z$

(EXERCÍCIO 3) (Enem) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “Mineirinho”, conseguiu realizar a manobra denominada “900”, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação “900” refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

a. Uma volta completa.
b. Uma volta e meia.
c. Duas voltas completas.
d. Duas voltas e meia.

Resolução:

No problema é explicado que a denominação “900”, na manobra do skate vertical, se refere ao número de graus que o atleta gira em torno do seu próprio corpo.

Sabendo que uma volta completa equivale a um giro de 360º, basta determinarmos quantas voltas equivalem a 900º.

Chamando de x o número de vezes que 360º “ cabe” em 900º, temos:

$$360x = 900 \Rightarrow x = \frac{900}{360} = 2{,}5$$

Portanto, são duas voltas e meia.

5.2 Funções trigonométricas

✓ <u>Quarto encontro (2h 45min)</u>

A abordagem inicial foi por meio de fatos históricos. Comentamos sobre Gilles Persone de Roberval (1602 – 1675) o primeiro a esboçar o gráfico da função seno, e que o estudo dessas funções teve seu ápice com Joseph Fourier (1768-1830), no campo dos movimentos periódicos. Comentamos que a motivação inicial desses matemáticos para o estudo gráfico das funções trigonométricas, se deu pelo fato de estarem estudando as relações trigonométricas no círculo de raio unitário.

Prosseguimos a aula, representando por meio de figuras e tabelas, os valores notáveis do seno e do cosseno em todos os quadrantes, destacando os sinais de cada relação em cada um dos quadrantes.

Solicitamos que cada aluno confeccionasse um grande círculo trigonométrico representando os eixos dos senos, cossenos e seus respectivos valores para os ângulos notáveis em todos os quadrantes. Destacamos as simetrias existentes ao determinar os valores do seno dos ângulos de 30º, 150º, 210º e 330º e cossenos dos ângulos de 60º, 120º, 240º e 300º. Pedimos que fosse repetido o procedimento para determinar os valores do seno dos ângulos $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ e cosseno dos ângulos $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Distribuímos alguns exercícios sobre o assunto estudado. Por meio desta atividade teve-se a oportunidade de avaliar o desempenho e interesse dos alunos no decorrer da aula. O resultado foi satisfatório, pois a maioria não sentiu dificuldades na realização das tarefas, tendo um bom desempenho.

Prosseguimos com o estudo da função seno, solicitando aos alunos a confecção do gráfico da função $f(x) = sen\, x$ para os seguintes ângulos na primeira volta: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{1}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$ e $\frac{2\pi}{1}$ destacando suas principais características, tais como domínio, imagem e período. Feito isso, pedimos como atividade para casa o mesmo procedimento, mas agora usando a função $f(x) = \cos x$.

✓ Quinto encontro (2h 45min)

Neste encontro, optamos por trabalhar num ambiente computacional, pois segundo COSTA (2006), as atividades envolvendo funções trigonométricas desenvolvidas no computador são eficientes principalmente quanto à retenção dos conceitos trabalhados e também porque por meio de programas gráficos os estudantes podem desenvolver atividades exploratórias e realizar descobertas por eles próprios.

Nesse sentido, optamos por utilizar o software gráfico Geogebra, por oferecer a possibilidade de uma melhor visualização dos eixos, além de ser um *software* livre, ou seja, de fácil acesso, permitindo que as escolas possam adquiri-lo sem custos e licença.

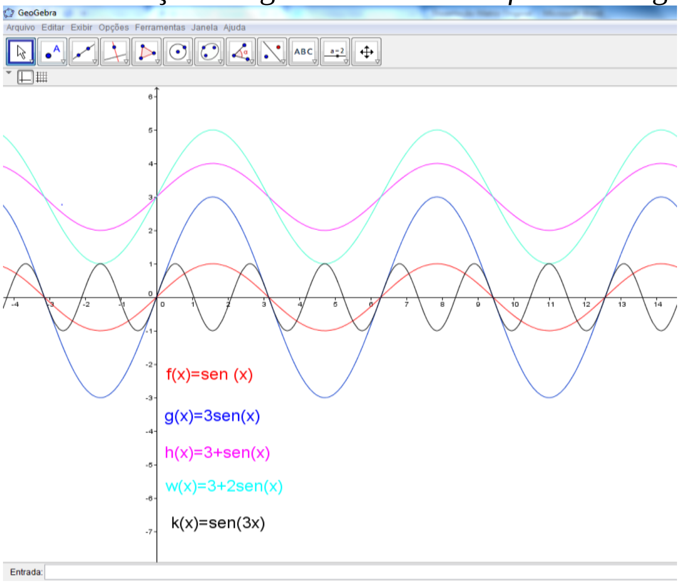
Procuramos explorar e reconhecer os fatores que influenciam no comportamento gráfico de uma função trigonométrica, além de proporcionar um ambiente onde os alunos pudessem criar seu objeto de estudo, manuseá-lo e compreender de fato os conceitos matemáticos que por ventura surgissem, isto é, aprender matemática fazendo matemática.

Para a realização desta atividade a turma foi deslocada para um dos laboratórios de informática e dividida em duplas. De início, os alunos ficaram alguns minutos utilizando o *software* de forma livre, realizaram algumas construções geométricas e puderam perceber as potencialidades e recursos disponíveis no Geogebra. Em seguida, sob nossa orientação, construíram o ciclo trigonométrico e os gráficos das funções seno e cosseno.

Em um segundo momento, solicitamos que os alunos observassem os gráficos dos senos e os fenômenos periódicos representados pelas funções $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ e $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, com coeficientes b e c positivos, imagem representada pelo intervalo $[a - b; a + b]$ e período $\frac{2\pi}{c}$. O objetivo da atividade foi verificar se os alunos estabeleciam relações entre período, domínio e imagem da função $f(x) = senx$, e como é a alteração do arco quando operamos a função com um escalar.

A seguir, destacamos a atividade desenvolvida por um aluno.

Figura 51 – Funções Trigonométricas no *software* Geogebra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante destacar que durante a realização dessa atividade, observou-se uma interação bastante expressiva entre os alunos e o *software*, quando eles, na construção dos gráficos, à medida que iam alterando os parâmetros a, b , c e d, observavam as mudanças da imagem e do período da função. Os discentes desenvolveram a atividade sem maiores dificuldades e quando necessário solicitavam a presença do professor para sanar algumas dúvidas. Ao final da aula, os alunos comentaram que estudar as funções trigonométricas com o *software* ajudou no aprendizado.

5.3 Relações trigonométricas

✓ Sexto encontro (1h 30m)

As razões trigonométricas foram apresentadas aos alunos de forma tradicional, em aula expositiva. Elas foram definidas para cada um dos ângulos agudos do triângulo retângulo, a fim de que os alunos tivessem esse conhecimento para posteriormente aplicá-lo em uma situação prática. Iniciamos apresentando as relações fundamentais, e enfatizamos que a principal aplicação ocorre em exercícios nos quais se devem determinar os valores de relações trigonométricas a partir de outra dada inicialmente. Aplicamos 5 exercícios para que pudessem desenvolver sem a nossa ajuda. Passados 25 minutos, analisamos os alunos que prosseguiram de maneira correta. Verificamos os cálculos e percebemos que 18 alunos tinham feito o exercício, mas apenas 12 haviam acertado e entendido o raciocínio. Orientamos aos alunos sobre a importância da resolução passo a passo, por facilitar a visualização das relações entre as informações fornecidas no enunciado.

Acompanhe o passo a passo da solução que apresentamos aos alunos.

1. Lendo e compreendendo.

a) O que é dado no problema?

$$senx = -\frac{1}{4}\ e\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

b) O que se pede?

$$\tan x\ e \sec x$$

2. Planejando a solução.

Sabemos, a partir das relações fundamentais, que $tanx = \frac{senx}{cosx}$ e $\sec x = \frac{1}{cosx}$. No entanto, nos foi fornecido apenas o valor de $sen\, x$. Para determinar o que é solicitado, precisamos do valor de $\cos x$. Assim, podemos usar a relação fundamental $sen^2x + cos^2x = 1$ para determinar o valor de $cosx$, já sabendo que será negativo. Depois, devemos calcular o valor de $tanx\ e\ secx$ de acordo com as relações fundamentais.

3. Executando o que foi planejado.

Substituindo o valor de $senx = -\frac{1}{4}$ na expressão, temos:

$$\frac{1}{16} + cos^2x = 1 \Longrightarrow cos^2x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Longrightarrow cosx = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Agora vamos determinar o valor de $tgx\ e\ secx$:

$$tgx = \frac{senx}{cosx} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$secx = \frac{1}{cosx} = \frac{-4}{\sqrt{15}} = \frac{-4\sqrt{15}}{15}$$

4. <u>Emitindo a resposta</u>.

$$tgx = \frac{\sqrt{15}}{15} \text{ e } secx = \frac{-4\sqrt{15}}{15}$$

Após as explicações, propomos aos alunos alguns exercícios para fixar os procedimentos e outros para aprofundamento do conteúdo.

✓ <u>Sétimo encontro (55m)</u>

Dando prosseguimento a aula, introduzimos o conceito de adição e subtração de arcos, explicando que em algumas situações não teremos tabelas ou calculadoras para determinar os valores de senos, cossenos e tangentes de ângulos notáveis, e que nesses casos conhecer algumas fórmulas ajuda na resolução de exercícios. Assim, abordamos as fórmulas de adição, que relacionam senos, cossenos e tangentes de ângulos obtidos a partir de somas e subtrações de ângulos notáveis, apresentando como exemplo o cálculo do cosseno de 15º.

(Exemplo 1) Calcule o $cos15°$ usando as fórmulas de adição e subtração de arcos.

Resolução:

$$cos15° = \cos(45° - 30°) = cos45°.cos30° + sen45°.sen30° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Pedimos aos alunos que pensassem em outras opções de operações com ângulos notáveis que pudessem gerar o $cos15°$. Solicitamos também que verificassem a igualdade $\cos(45° - 30°) = \cos(60° - 45°)$.

Após analisarmos as resoluções dos alunos, apresentamos o cálculo que verifica a igualdade $cos45° - cos30° = cos60° - cos45°$.

Discutimos os resultados, para que os alunos percebessem que um dos principais erros cometidos no tema, era confundir soma e subtração de ângulos, com soma e subtração de senos e cossenos.

✓ Oitavo encontro (2h 45m)

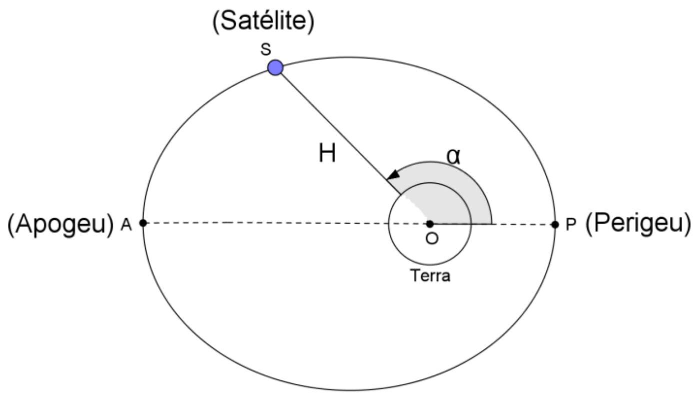
Iniciamos a aula trabalhando as equações trigonométricas, tomando, no entanto, alguns cuidados para a obtenção das soluções. Por exemplo, considerando a equação $senx = \frac{1}{2}$, sabemos que, para o primeiro quadrante, a solução será $x = \frac{\pi}{6}$ ou 30º, no entanto, se levarmos em conta outros conjuntos universos, essa resposta não será única. Mostramos aos alunos no círculo trigonométrico que no caso de $U = [0,2\pi]$, teremos também o ângulo $x = \frac{5\pi}{6}$ ou 150º e para o caso de $U = R$ teremos infinitas soluções, que representamos por meio das soluções gerais: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ com k inteiro.

Solicitamos aos alunos que resolvessem a equação $sen2x = \frac{1}{2}$ quando $U = R$. Pedimos que seguissem o mesmo procedimento descrito acima. Após 5 minutos de discussões entre alunos e professor sobre os procedimentos para resolução do exercício, solucionamos (aluno/professor) o exercício no quadro chegando às soluções: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, dividindo ambos os termos por 2 obtemos $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Dando prosseguimento ao assunto, pedimos aos alunos que fizessem duplas e solucionassem os seguintes exercícios:

(Exercício 1) A Figura 52 mostra a órbita elíptica de um satélite S em torno do planeta Terra. Na elipse estão assinalados dois pontos: o ponto A (apogeu), que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra, e o ponto P (perigeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.

Figura 52 – Órbita elíptica do Satélite S em torno do planeta Terra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ponto O indica o centro da Terra e o ângulo PÔS tem medida α, com $0º \leq \alpha \leq 360º$. A altura H, em Km, do satélite à superfície da terra, dependendo do ângulo α, é dada aproximadamente pela função:

$$H = \left(-64 + \frac{7980}{100+5COS\alpha}\right).10^2.$$

Determine os valores de α quando a altura H do satélite é de 1580 km.

No início, os alunos demonstraram um pouco de dificuldade para descrever o passo a passo, mas com algumas orientações prosseguiram de forma correta. Passados aproximadamente dez minutos, todas as duplas chegaram ao resultado. Para fixar melhor o conteúdo, discutimos o exercício no quadro e ao final solucionamos.

Solução dada pelo professor:

1. Lendo e compreendendo.

a) O que é dado no problema?

São dados uma função que relaciona a altura H do satélite (em Km) com o ângulo α e o intervalo de variação de α, $0° \leq \alpha \leq 360°$.

b) O que se pede?

Pede-se ao aluno que determine os valores do ângulo α no momento em que o satélite está a 1580 km de altura.

2. Planejando a solução.

Para obter o valor de α, vamos usar a função dada, substituindo o valor de 1580 km em H, e depois resolver a equação trigonométrica resultante dessa substituição.

3. Executando o que foi planejado.

Do enunciado sabemos que $H = \left(-64 + \frac{7980}{100+5COS\alpha}\right).10^2$.

Para H = 1580 km:

$$1580 = \left(-64 + \frac{7980}{100 + 5COS\alpha}\right).10^2$$

Dividindo ambos os membros por 10^2 (ou seja, 100), temos: $15{,}80 = -64 + \frac{7980}{100+5cos\alpha}$.
Vamos agora isolar $cos\alpha$:

$$15{,}80 + 64 = \frac{7980}{100 + 5cos\alpha} \Rightarrow 79{,}80 = \frac{7980}{100 + 5cos\alpha} \Rightarrow 79{,}80.(100 + 5cos\alpha) = 7980$$

$$\Rightarrow 100 + 5cos\alpha = \frac{7980}{79{,}80} \Rightarrow 100 + 5cos\alpha = 100 \Rightarrow 5cos\alpha = 0 \Rightarrow cos\alpha = 0.$$

Com o cosseno isolado, podemos avaliar que valores de α são solução da equação $cos\alpha = 0$. Considerando-se o intervalo dado no enunciado, $0° \leq \alpha \leq 360°$, esses valores são $\alpha = 90°$ou $\alpha = 270°$.

4. <u>Emitindo a resposta</u>.

Quando o satélite está a 1580 km de altura os valores de α são: $\alpha = 90°$ou $\alpha = 270°$.

5. <u>Ampliando o problema</u>.

Usando uma tabela trigonométrica ou uma calculadora científica, estime os valores do ângulo α para quando a altura do satélite for de 1500 km.

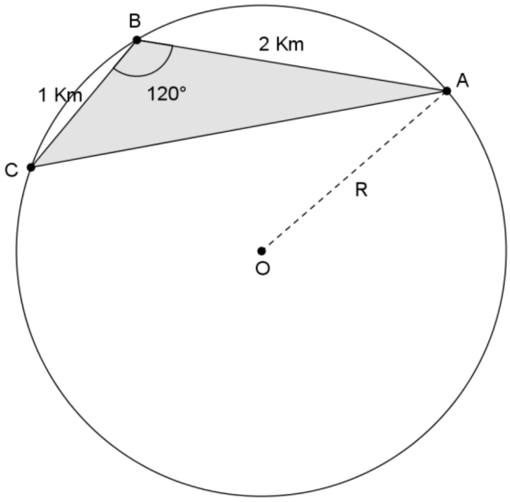
(Exercício 2) Sejam A, B e C três pontos distintos de uma circunferência tais que $AB = 2, BC = 1$ e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja 120°.

a) Faça no Geogebra uma figura representativa da situação descrita.
b) Calcule a medida de AC.
c) Calcule a medida do raio da circunferência.

Os alunos apresentaram dificuldades na resolução do problema, principalmente na aplicação da lei dos senos e cossenos. Após alguns minutos e tentativas frustradas de várias duplas, resolvemos fazer uma breve revisão sobre as leis. Tiramos as dúvidas e solicitamos que concluíssem o exercício proposto. Foi necessário que resolvêssemos no quadro o exercício, pois a aula já estava terminando e muitos alunos estavam curiosos para ver a solução. Segue abaixo a resolução apresentada pelo professor aos alunos:

- Iniciamos a resolução, construindo no Geogebra, a figura representativa do problema.

Figura 53 – Construção da figura do exercício 2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Para solucionar o item b, aplicamos a Lei dos Cossenos e obtemos:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.cos120° \Rightarrow AC^2 = 1 + 4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \Rightarrow AC = \sqrt{7}$$

- Para solucionar o item c, aplicamos a Lei dos Senos e obtemos:

$$\frac{AC}{sen120°} = 2r \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{7}}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Ao concluirmos a resolução, verificamos que alguns alunos ainda não haviam compreendido. Percebemos então que seria necessária uma intervenção mais detalhada para sanar as dificuldades, tanto na interpretação como na análise da fórmula adequada para cada problema. Então decidimos aplicar atividades práticas.

Solicitamos aos alunos que trouxessem alguns materiais que seriam utilizados para o próximo encontro. A relação foi a seguinte:

- Um transferidor com lado reto.
- Canudo ou tubo de caneta.
- Linha de *nylon* (aproximadamente 30 cm).
- Uma arruela ou peso de anzol.

5.4 Atividade Prática: Confecção e utilização do Clinômetro para calcular distâncias inacessíveis

Segundo Dante (2014), uma atividade prática ajuda a tornar a aula mais atraente, diversificada, ilustrada e, consequentemente, mais produtiva. Embora nos últimos anos tenha ocorrido uma melhora considerável no processo de ensino da matemática, a sua aprendizagem tem representado ainda um obstáculo para grande parte dos alunos, e por essa razão é necessário que o ideal da clareza, da motivação e da fácil compreensão da disciplina seja perseguido, procurando minimizar os entraves do seu ensino.

É nessa direção que propomos a construção de um material concreto, o Clinômetro. Este experimento foi planejado com o objetivo de cristalizar o conteúdo aprendido em sala de aula, contextualizando e relacionando a teoria com a prática e permitindo aos alunos um contato mais íntimo com as razões trigonométricas do triângulo retângulo, tornando assim, mais significativo o aprendizado da matemática, dando a oportunidade de sanar as dificuldades ainda existentes.

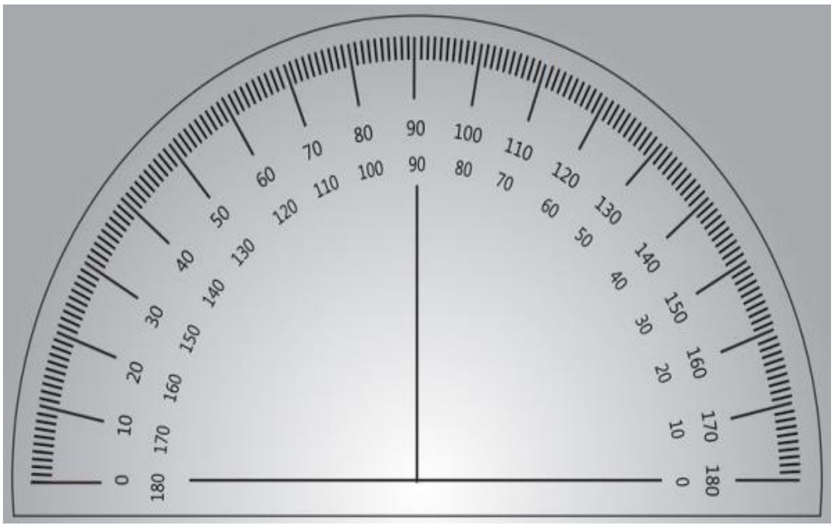
✓ Nono encontro (2h 45m)

Iniciamos o encontro, explicando que o clinômetro é um aparelho que nos permite medir o ângulo entre um plano inclinado e o plano horizontal ou entre uma linha inclinada e um plano horizontal. Consiste em um sistema de pêndulo vertical como referencial e uma escala graduada que mede o ângulo do plano em graus, sendo muito útil para o cálculo de distâncias inacessíveis. Concluímos que o mesmo é basicamente um telescópio, montado a partir de um transferidor.

Os passos da construção e os detalhes de como usá-lo, foram mostrados por meio de uma sequência de slides projetados na lousa.

Passo 1: Pegue um transferidor com um lado reto (modelo de 180º).

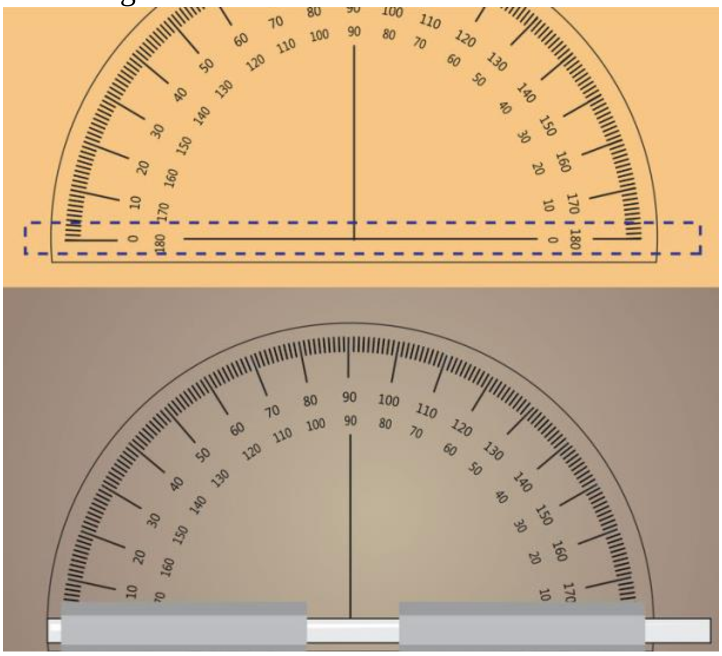
Figura 54 – Transferidor.



Fonte: http://pt.wikihow.com/Fazer-um-Clin%C3%B4metro

Passo 2: Cole um canudo próximo à borda reta do transferidor de forma a alinhá-lo em relação aos dois zeros e passando pelo centro.

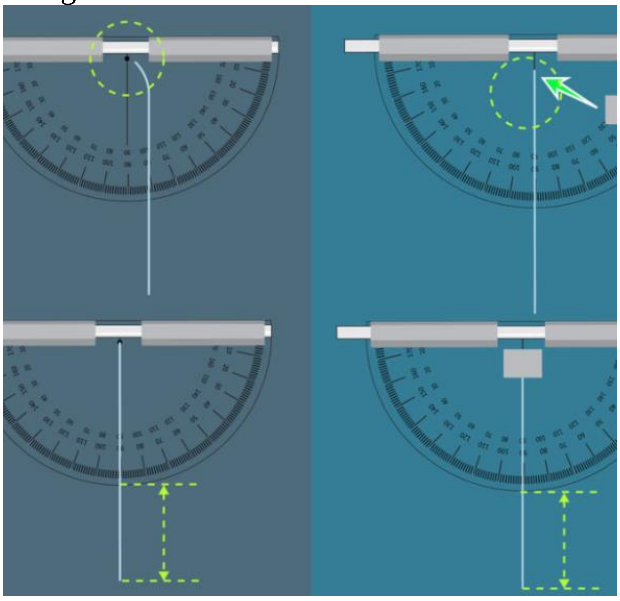
Figura 55 – Transferidor com um canudo.



Fonte: http://pt.wikihow.com/Fazer-um-Clin%C3%B4metro

Passo 3: Amarre um fio no pequeno furo sobre a borda reta do transferidor, entre as marcas zero extremas. Você poderá descobrir que ele se encontra aos 90 graus da borda curva do transferidor. Se ele não possui um furo nesse local, ou se o furo não estiver situado corretamente faça um ou cole o fio nesse ponto do transferidor. Assegure-se que o fio chegue a alguns centímetros abaixo do transferidor.

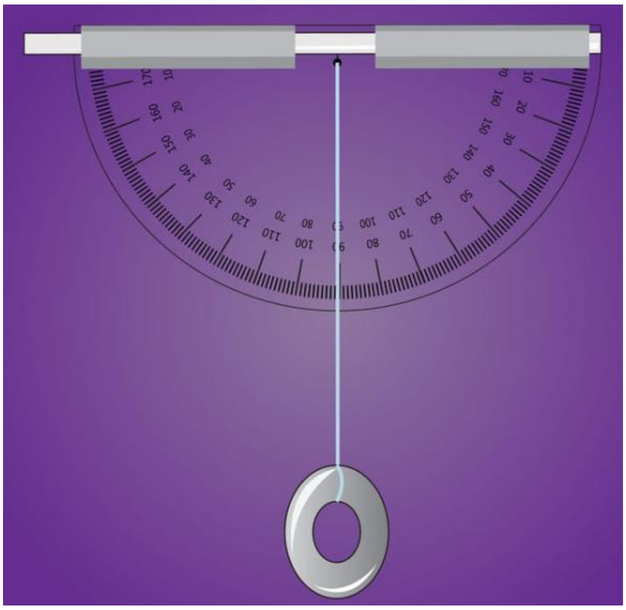
Figura 56 – Transferidor com canudo e fio.



Fonte: http://pt.wikihow.com/Fazer-um-Clin%C3%B4metro

Passo 4: Anexe uma arruela ou peso de anzol à extremidade pendurada do fio.

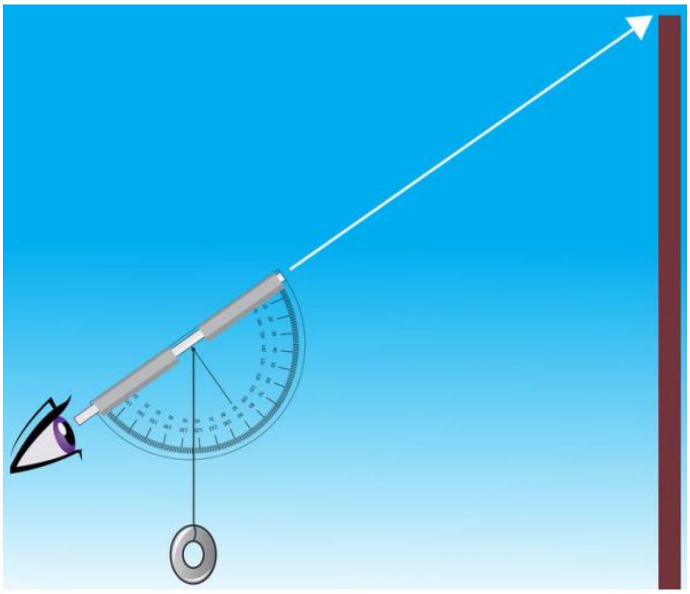
Figura 57 – Transferidor com uma arruela.



Fonte: http://pt.wikihow.com/Fazer-um-Clin%C3%B4metro

Passo 5: Aviste o topo de um objeto alto através do canudo.

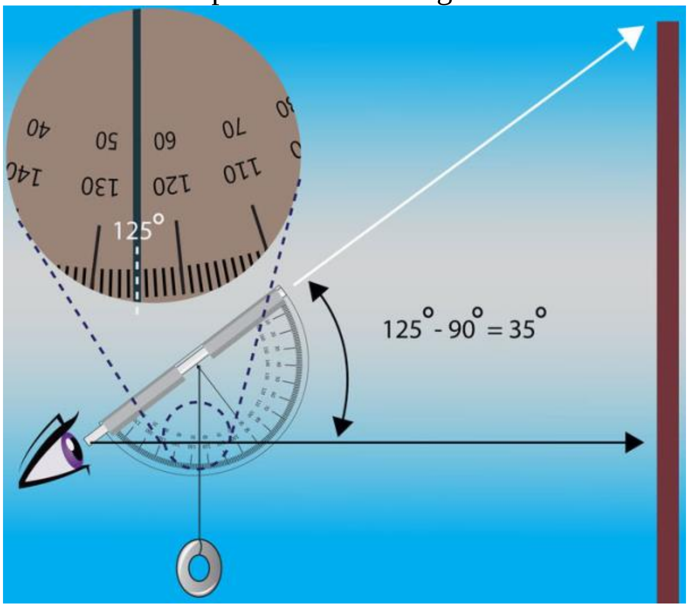
Figura 58 – Visualizando um ponto da vertical com o Clinômetro.



Fonte: http://pt.wikihow.com/Fazer-um-Clin%C3%B4metro

Passo 6: Observe que o ângulo no qual o fio cruza a escala, na borda curva do transferidor, é o ângulo de elevação, entre o seu olho e o topo do objeto avistado. Já que o transferidor comum possui 2 grupos de números, a leitura será equivalente ao número maior menos 90. Lembre-se que, se você estiver próximo ao objeto de forma a olhar para cima, com um ângulo muito fechado, o cálculo poderá se aproximar a 90°, mas jamais ultrapassar essa marca. 90° representa uma vertical plena.

Figura 59 – Cálculo para medir um ângulo com o Clinômetro.



Fonte: http://pt.wikihow.com/Fazer-um-Clin%C3%B4metro

De posse de seus aparelhos devidamente construídos, solicitamos aos alunos que medissem alguns ângulos. Nossa preocupação era que os alunos observassem a semelhança dos exercícios feitos em sala de aula com o experimento que iriam fazer.

Dirigimo-nos há uma floresta localizada a 1,5 Km do Instituto para fazer as medições. O local foi escolhido por se tratar de uma área com várias árvores da espécie Tectona grandis, também conhecida como Teca (árvore de grande porte e de grande importância econômica em todo o mundo, por se tratar de uma madeira de qualidade, cor clara e duradoura). A área é familiar aos alunos, pois é onde fazem suas aulas de Topografia e Produção Vegetal.

Solicitamos aos alunos que formassem grupos, onde cada grupo deveria ter quatro alunos. Feito as divisões, foram orientados a escolher cinco árvores para o cálculo da altura. A coleta de dados foi realizada de tal forma, que a cada nova medição, era escolhido um novo integrante para fazer as visualizações, ou seja, um rodízio. Os demais membros auxiliavam na coleta e na anotação das medidas. Este procedimento foi seguido, para que todos os alunos tivessem a oportunidade de fazer as medições.

Cada grupo tinha em posse uma tabela, onde os dados coletados e anotados, eram conferidos por todos os membros, evitando anotações incorretas. Logo em seguida, os componentes dos grupos discutiam qual das razões trigonométricas seria a ideal para fazer os cálculos. Após a análise da fórmula prosseguiam com o cálculo.

Figura 60 – Foto do aluno 12 mostrando seu Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 61 - Foto do aluno 12 e da aluna 18 fazendo uso do Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 62 – Aluna 18 fazendo uso do Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 63 – Aluno 3 visando um ponto da Teca com o Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Alunos calculando o ângulo de visada com o Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Medindo com a trena do ponto de 90º até o solo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

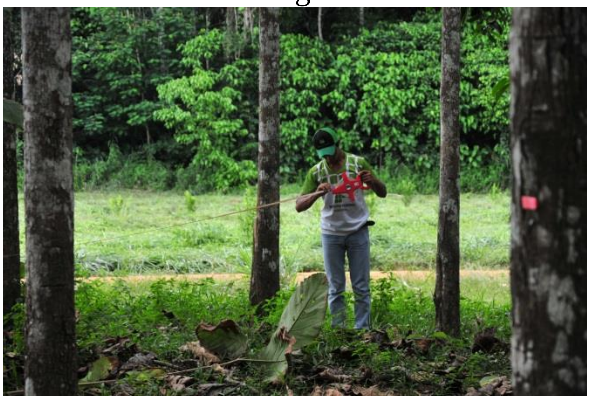
Figura 66 – Alunos com um pouco de dificuldade para encontrar o ponto de 90º acusado pelo Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 67 – Alunos no processo de coleta de dados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 68 – Aluno medindo com a trena o comprimento de um dos catetos do triângulo retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 69 – Alunos medindo com a trena a altura de um dos catetos para calcular a que distância se encontrava da árvore quando coletaram com o Clinômetro o ângulo α.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 70 – Finalizando a coleta de dados e iniciando os cálculos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Depois de coletados e efetuados os cálculos, comparamos os dados encontrados, com os dados de uma medição feita pelo professor da disciplina de Produção Vegetal. O professor, Doutor em Engenharia Agronômica, se surpreendeu com a proximidade dos resultados das alturas calculadas pelos alunos com o Clinômetro, com as alturas calculadas por ele, usando um Teodolito Eletrônico.

Apesar de o Clinômetro ser rústico, ele promove o experimento de forma satisfatória, não pelo resultado final (proximidade com as medidas do profissional em Topografia), mas sim, por toda a experiência vivenciada com a atividade. Experiência essa que os fazem vivenciar de forma concreta e interdisciplinar o tema estudado, fazendo com que a teoria tenha mais significado.

5.5 Atividade Prática: medindo distâncias inacessíveis com o Teodolito Eletrônico

✓ <u>Décimo encontro (2h 45m)</u>

A proposta para esse encontro foi medir com o Teodolito Eletrônico, as mesmas árvores que foram medidas com o Clinômetro. Para isso, o professor da disciplina de Produção Vegetal foi convidado para ensiná-los como estacionar o equipamento de maneira correta. Foi ministrada uma aula teórica sobre como encontrar os ângulos verticais e horizontais. De posse do Teodolito estacionado, os alunos encontraram os ângulos verticais com facilidade. Como o processo de cálculo é o mesmo para o cálculo com o Clinômetro após encontrar os ângulos, a aplicação das relações trigonométricas foi feita com facilidade, pois já tinham praticado muito na aula anterior. As medidas encontradas das alturas das árvores ficaram em média 40 cm para mais ou para menos. Os alunos gostaram muito dessa atividade, mas acharam mais prático com o Clinômetro, pois para estacionar o Teodolito, necessita de muita prática.

Figura 71 – Local onde serão feitas as medições.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 72 – Orientações do Engenheiro Agrônomo ao alunos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 73 – Orientações do Engenheiro Agrônomo aos alunos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 74 – Engenheiro Agrônomo ensinando a montagem do Tripé.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 75 – Alunos montando o Teodolito Eletrônico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 76 Alunos montando o Teodolito Eletrônico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 77 Alunos montando o Teodolito Eletrônico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 78 Alunos montando o Teodolito Eletrônico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 79 – Teodolito Eletrônico marcando 90º.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 80 – Aluno indicando na Teca o ponto onde o Teodolito marcou 90º.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 81 – Aluno indicando na Teca o ponto onde o Teodolito marcou 90º.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 82 – Aluna indicando na Teca o ponto onde o Teodolito marcou 90º.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 83 – Conferindo o ângulo com Clinômetro.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 84 – Alunos visando à copa da Teca.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 85 – Alunos visando à copa da Teca.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 86 – Alunos aplicando as Relações Trigonométricas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 87 – Medindo à distância da Teca ao Teodolito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 88 – Professor de Matemática auxiliando os alunos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 89 – Professor de Matemática auxiliando os alunos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 90 – Professor de Matemática auxiliando os alunos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 91 – Medindo a distância do Teodolito a Teca usando uma Trena.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 92 – Calculando o ângulo com o Teodolito.

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.6 Atividade Prática: Utilizando o Teodolito Eletrônico para calcular a áreas

No sentido de consolidar o conhecimento teórico, realizamos durante o desenvolvimento desta pesquisa uma aplicação da trigonometria utilizando o teodolito para calcular áreas. A proposta do trabalho era o cálculo da área útil do Instituto Federal de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico de Rondônia – Campus Ariquemes, com o emprego de um teodolito eletrônico.

O levantamento topográfico, em geral, implica na medida de duas espécies de grandezas, ângulos e distâncias. Essas medidas foram desenvolvidas seguindo as seguintes etapas:

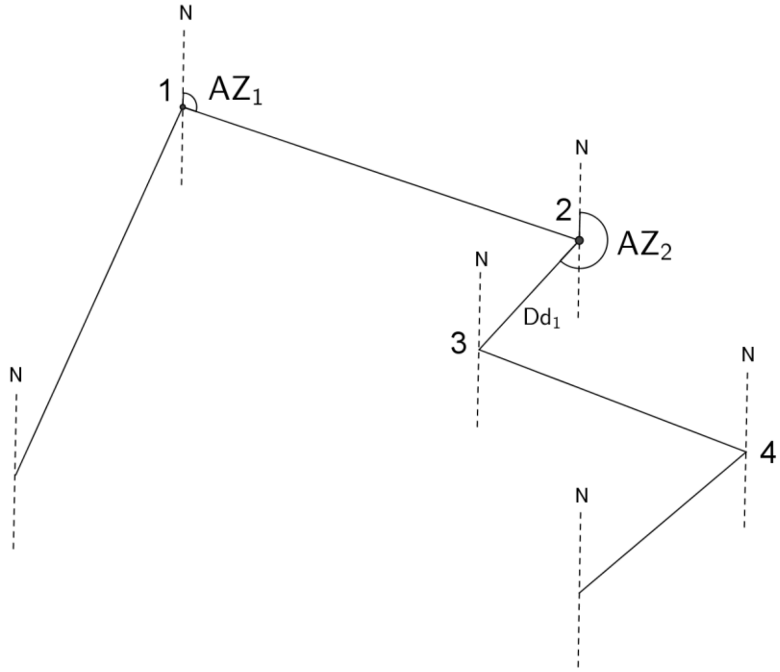
- Instalamos o teodolito sobre o tripé no ponto inicial, marcamos o ponto 1 e avistamos o norte através da bússola, depois gira-se a parte superior, até a luneta visar o pé de uma baliza colocada em 2; lê-se então o azimute ou rumo do alinhamento inicial 1-2 .

- Muda-se o instrumento para 2, acertam-se os zeros, mergulha-se a luneta (posição inversa) e visa-se uma baliza em 1.

- Trazendo a luneta para a posição direta, com a rotação em torno do próprio eixo, se solta à parte superior e procura-se visar a baliza em 3, lê-se então Dd_1, ângulo de deflexão a direita.

- No vértice 3 lê-se a deflexão à esquerda De_2, visando primeiro a baliza em 2 e depois a 4. As outras deflexões são obtidas do mesmo modo.

Figura 93 – Deflexões e Azimutes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Determinamos, então, as relações que ligam os azimutes às deflexões.

No vértice 2 tira-se que:

$$Az_2 = Az_1 + Dd_1$$

No vértice 3, temos que:

$$Az_3 = Az_2 - De_1$$

E assim, a fórmula geral dos azimutes, pelas deflexões, é:

$$Az_n = Az_{n-1} + Dd \quad \text{(Deflexão à Direita)}$$

$$Az_n = Az_{n-1} - De \text{ (Deflexão à Esquerda)}$$

De posse de todos os azimutes, pudemos calcular os ângulos internos da região poligonal considerada, através das seguintes relações:

$$Az_n = Az_{n-1} \pm A_n \mp 180°$$

Por se tratar de uma pequena área, consideramos todos os pontos materializados sobre o plano topográfico, e as distâncias entre os vértices do polígono foram calculadas através da relação:

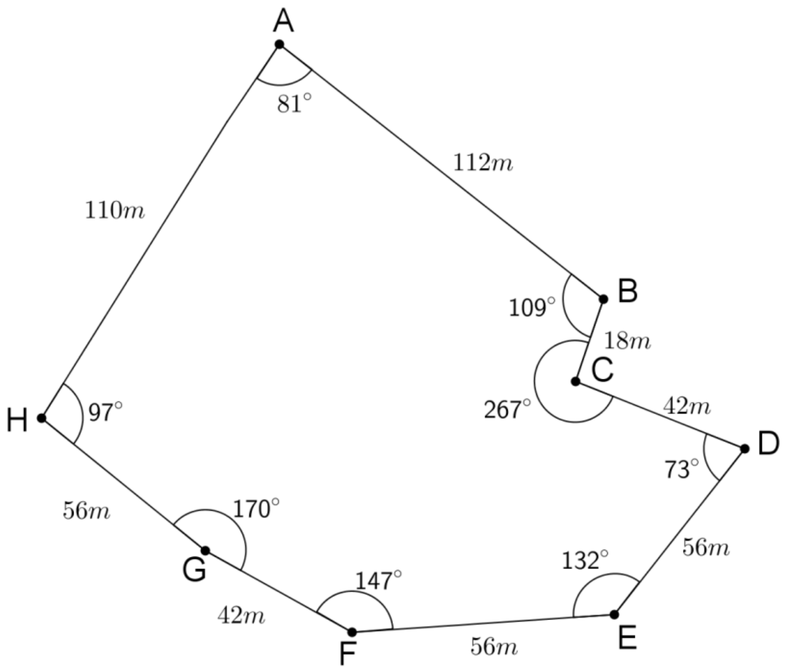
$$D = D_i . cos^2 V$$

onde,

D_i= Distância Inclinada (Medida com o Teodolito).

V = Ângulo Vertical do Eixo com o Horizonte (Medido com o Teodolito).

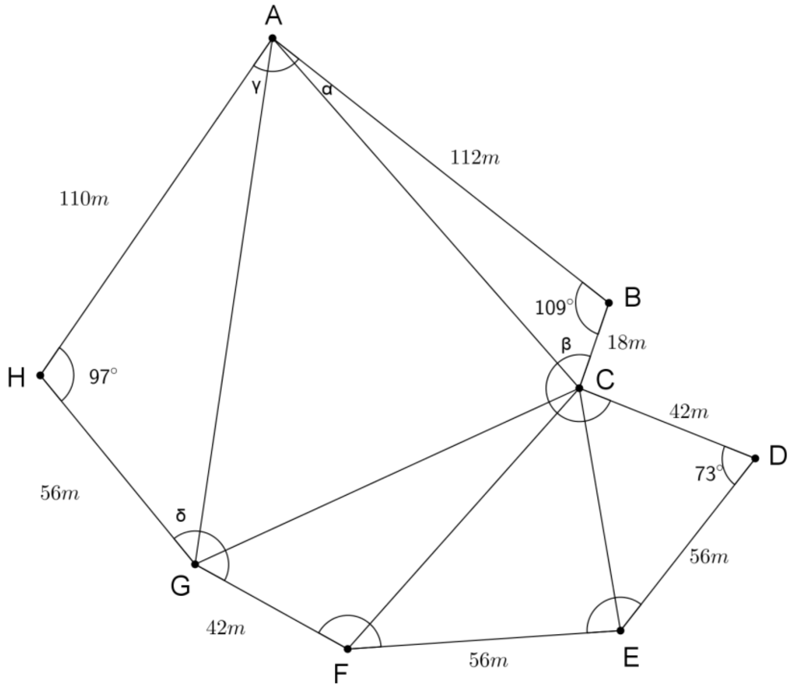
Figura 94 Figura com os ângulos internos e as distâncias



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o cálculo da área do polígono $ABCDEFGH$, decompomos a região em triângulos:

Figura 95 – Região decomposta por Triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicialmente, consideremos a área do polígono $ABCFGH$ e calculamos os ângulos α, β, γ e δ, bem como o comprimento dos lados AC e AG.

- Cálculo de AC usando a Lei dos Cossenos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.cos\hat{B} \Rightarrow$$
$$112^2 + 18^2 - 2(112.18).cos109° \Rightarrow$$
$$AC \cong 119\ m$$

- Cálculo de AG usando a Lei dos Cossenos:

$$AG^2 = AH^2 + HG^2 - 2.AH.HG.cos\widehat{H} \Rightarrow$$
$$110^2 + 56^2 - 2(110.56).cos97° \Rightarrow$$
$$AG \cong 129{,}37\ m$$

- Cálculo dos ângulos α e β usando a Lei dos Senos:

$$sen\alpha = \frac{BC.sen\hat{B}}{AC} = \frac{18.sen109°}{119} \cong 0{,}1430 \Rightarrow \alpha \cong 8{,}22°$$

Como $\alpha + \beta + 109° = 180°$, então $\beta = 62{,}78°$.

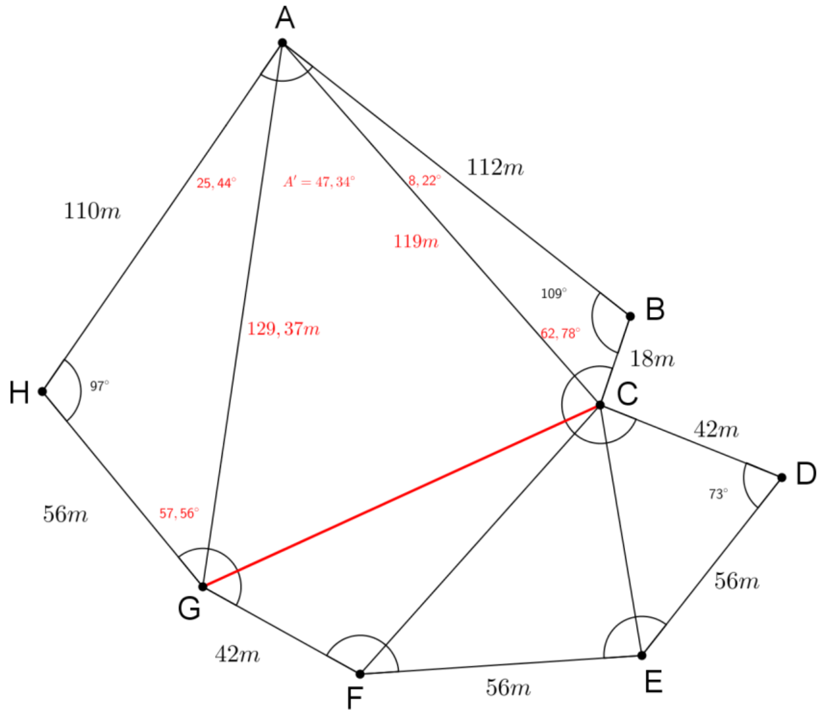
- Cálculo dos ângulos $\gamma\ e\ \delta$ usando a Lei dos Senos:

$$sen\gamma = \frac{56.sen97°}{129{,}37} \cong 0{,}4296 \Rightarrow \gamma \cong 25{,}44°$$

Como $\gamma + \delta + 97° = 180°$, então $\delta \cong 57{,}56°$.

Usando os ângulos e lados encontrados nos cálculos acima, podemos aplicar lei dos Cossenos e assim calcular a medida de CG.

Figura 96 – Destacando as medidas já encontradas e um Lado do Triângulo ACG a ser calculado



Fonte: Elaborada pelo autor.

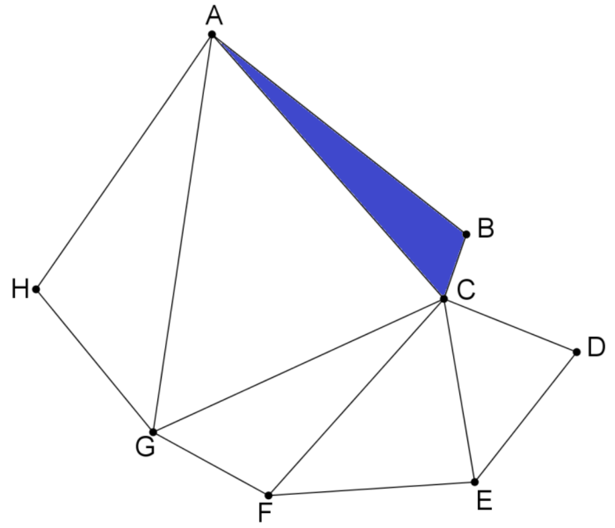
- Cálculo de CG usando a Lei dos Cossenos:

$$CG^2 = AG^2 + AC^2 - 2.AG.AC.cosA' \Rightarrow$$
$$CG^2 = 129{,}37^2 + 119^2 - 2(129{,}37.119)cos47{,}34° \Rightarrow$$
$$CG^2 = 10032{,}8224 \Rightarrow$$
$$CG = 100{,}16\ m$$

De posse dos dados e da figura obtidos até o momento, solicitamos aos alunos que identificassem as áreas que poderiam ser calculadas e qual fórmula seria mais adequada. Após todos os grupos perceberem que as áreas dos triângulos ABC, ACG e AGH já podiam ser efetuadas, prosseguiram com os cálculos.

- Cálculo da área do Triângulo ABC:

Figura 97 – Destacando a área do Triângulo ABC.

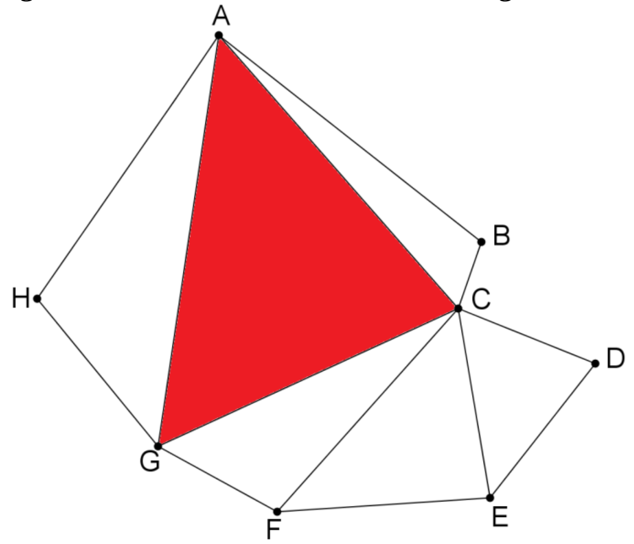


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{ABC} = \frac{AC.BC.Sen\beta}{2} = \frac{119.18.sen62{,}78°}{2} \cong 952{,}40m^2$$

- Cálculo da área do Triângulo ACG:

Figura 98 – Destacando a área do Triângulo ACG.

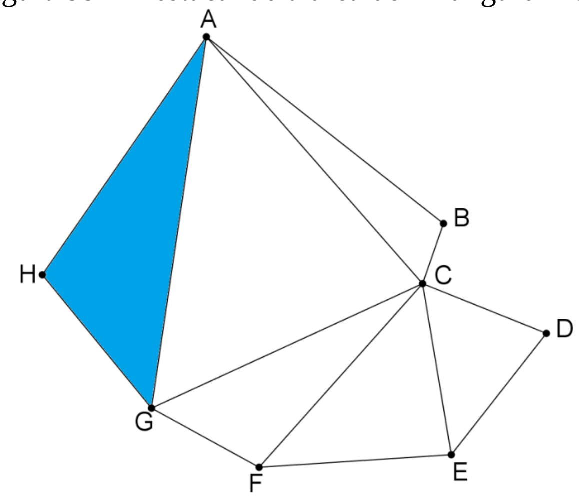


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{ACG} = \frac{AC.AG.senA\prime}{2} = \frac{119.129{,}37sen47{,}34°}{2} \cong 5660{,}66m^2$$

- Cálculo da área do Triângulo AGH:

Figura 99 – Destacando a área do Triângulo AGH.

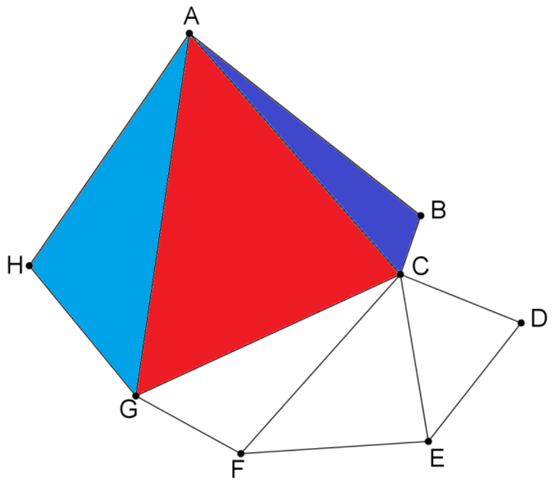


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{AGH} = \frac{HG.AG.Sen\delta}{2} = \frac{56.129{,}37.sen57{,}56°}{2} = 3033{,}23m^2$$

Portanto, a área do polígono $ABCGH$ é:

Figura 100 – Destacando o polígono $ABCGH$.



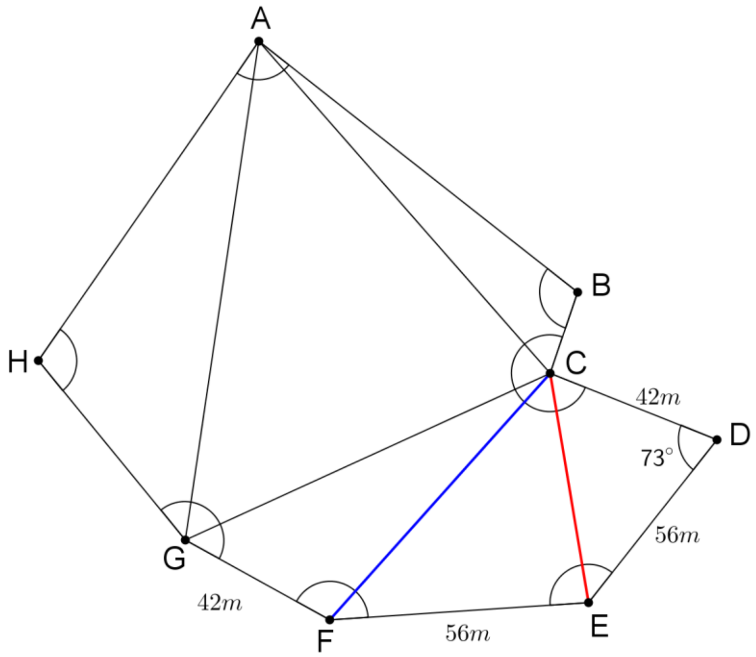
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{ABC} + S_{ACG} + S_{AGH} = 952{,}40m^2 + 5660{,}66m^2 + 3033{,}23m^2 = 9646{,}29m^2$$

A segunda parte da atividade consiste em calcular a área do polígono $CDEFG$. Para tal cálculo a sala foi dividida em três grupos. Os cálculos foram efetuados pelos alunos e conferidos pelo professor. Socializamos os resultados, e identificamos que o resultado de um dos grupos não estava correto. Solicitamos que esse grupo fosse à lousa e explicassem o cálculo. Quando iniciaram a demonstração, os próprios integrantes do grupo identificaram o erro, que consistia em uma confusão na escrita entre os segmentos CE e CF. Organizamos os cálculos em slides para apresentar para o restante da turma, pois essa atividade foi feita com 12 alunos, escolhidos por terem mais dificuldade na disciplina de Topografia. A apresentação foi organizado conforme a sequência dos tópicos a seguir.

- Cálculo de CE e CF usando a Lei dos Cossenos:

Figura 101 – Destacando o segmento CE e CF.



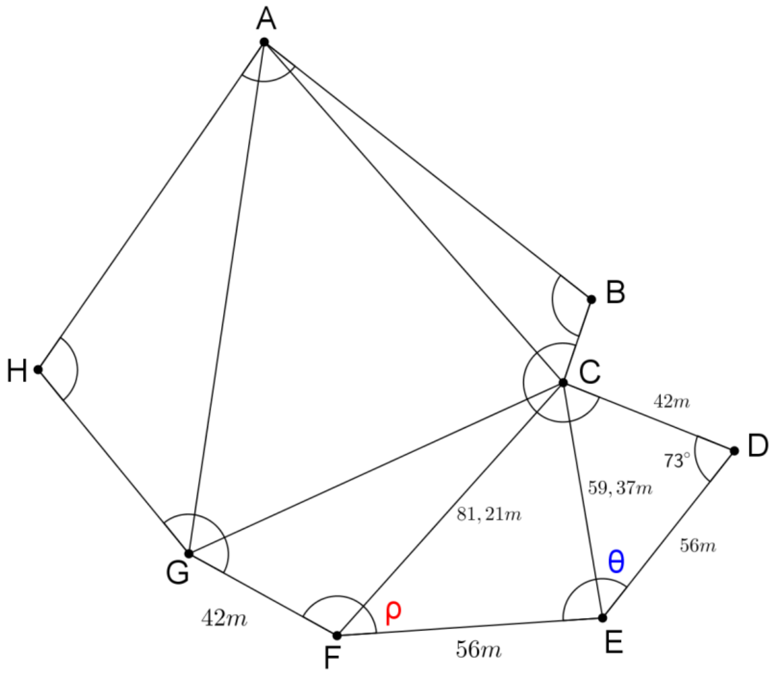
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2.CD.DE.cos73° \Rightarrow$$
$$CE^2 = 42^2 + 56^2 - 2(42.56)cos73° \cong 3524{,}6835 \Rightarrow$$
$$CE \cong 59{,}37m$$

$$CF^2 = FE^2 + CE^2 - 2.FE.CE.cos89{,}43° \Rightarrow$$
$$CF^2 = 56^2 + 59{,}37^2 - 2(56.59{,}37)cos89{,}43° \cong 6594{,}646856 \Rightarrow$$
$$CF \cong 81{,}21m$$

- Cálculo dos ângulos θ e ρ usando a Lei dos Senos:

Figura 102 – Destacando os ângulos θ e ρ.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\frac{\mathrm{CD}}{sen\ \theta} = \frac{CE}{sen73°} \Rightarrow \frac{42}{sen\theta} = \frac{59{,}37}{sen73°} \Rightarrow sen\theta = \frac{42.sen73°}{59{,}37} \Rightarrow$$

$$sen\theta = 0{,}6765 \Rightarrow$$

$$\theta = 42{,}57°$$

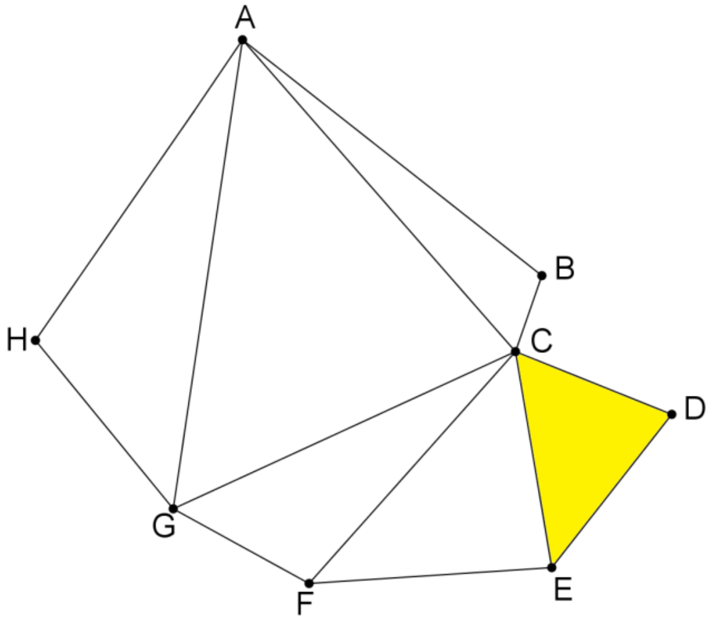
$$\frac{CE}{sen\rho} = \frac{CF}{sen89{,}43°} \Rightarrow sen\rho = \frac{59{,}37.sen89{,}43°}{81{,}21} \Rightarrow$$

$$sen\rho = 0{,}731 \Rightarrow$$

$$\rho = 46{,}97°$$

- Cálculo da área do Triângulo CDF:

Figura 103 – Destacando a área do Triângulo CDF.

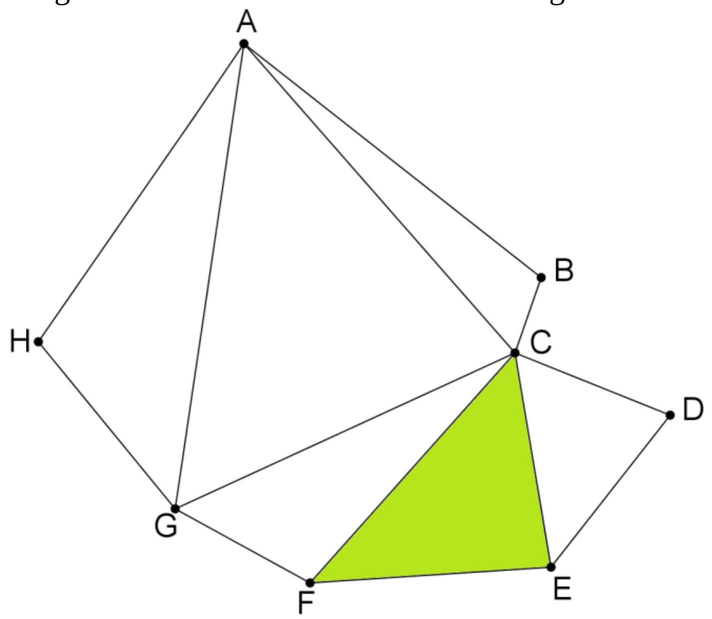


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{CDF} = \frac{CD.DE.sen73°}{2} = \frac{42.56.sen73°}{2} = 1124{,}61m^2$$

- Cálculo da área do Triângulo CEF:

Figura 104 – Destacando a área do Triângulo CEF.

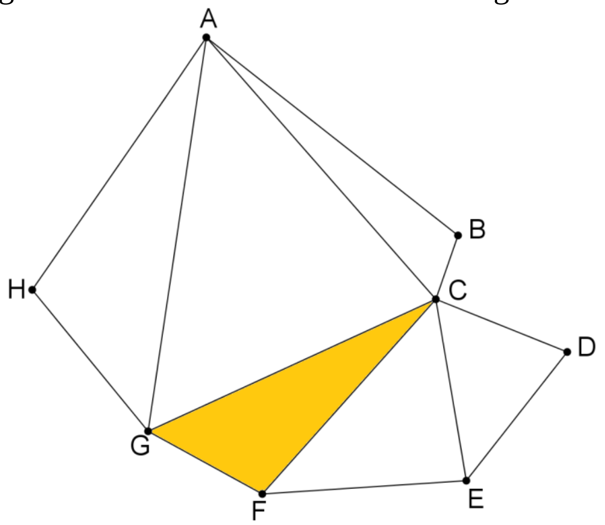


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{CEF} = \frac{FE.CE.sen89{,}43°}{2} = \frac{56.59{,}37.sen89{,}43°}{2} = 1662{,}28m^2$$

- Cálculo da área do Triângulo CFG:

Figura 105 – Destacando a área do Triângulo CFG.

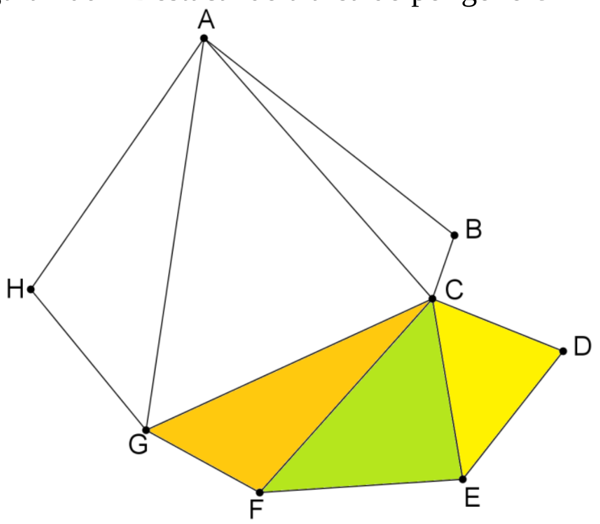


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{CFG} = \frac{CF.GF.sen100{,}03°}{2} = \frac{81{,}21.42.sen100{,}03°}{2} = 1679{,}35m^2$$

Portanto, a área do polígono $CDEFG$ é:

Figura 106 – Destacando a área do polígono $CDEFG$.

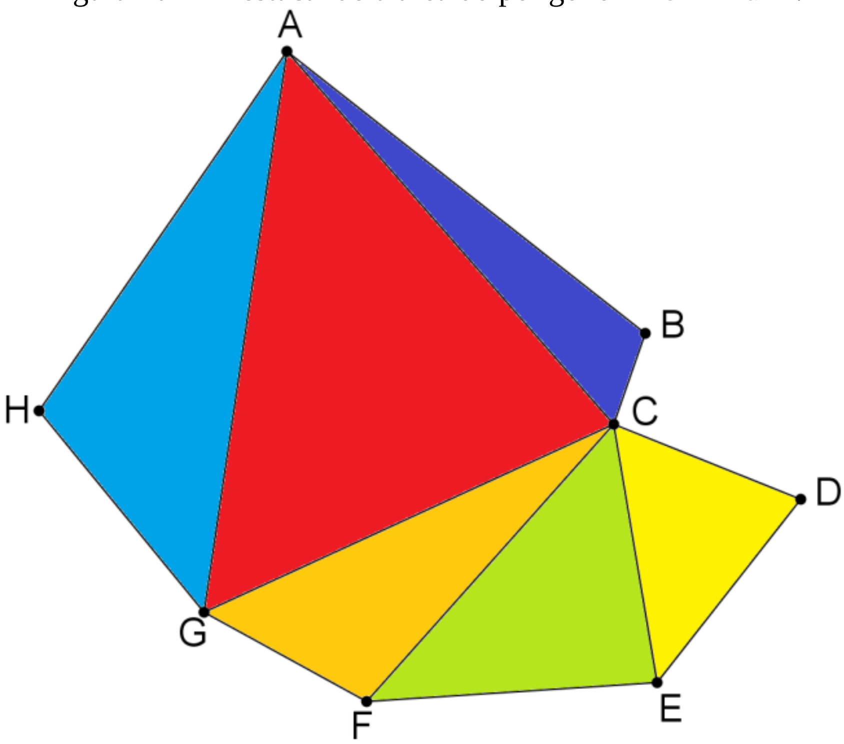


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{CDF} + S_{CEF} + S_{CFG} = 1124{,}61m^2 + 1662{,}28m^2 + 1679{,}35m^2 = 4466{,}24m^2$$

- Portanto, a área total do polígono $ABCDEFGH$ é:

Figura 107 – Destacando a área do polígono $ABCDEFGH$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{total} = 9646{,}29m^2 + 4466{,}24m^2 = \mathbf{14112,53m^2}$$

6 PÓS-TESTE, ANÁLISE DO DESEMPENHO NO (PRÉ-TESTE/PÓS-TESTE) E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Iniciaremos a seção apresentando o pós-teste, que é um instrumento que teve por finalidade, avaliar a compreensão dos conceitos básicos da trigonometria nos triângulos: Retângulo, acutângulo e obtusângulo, após a aplicação da sequência didática. Logo após, apresentaremos uma análise dos resultados obtidos da aplicação dos instrumentos diagnósticos (pré-teste/pós-teste). Analisando esse questionário e comparando os resultados com aqueles obtidos no pré-teste, esperamos observar o provável aproveitamento dos alunos.

6.1 Pós-teste

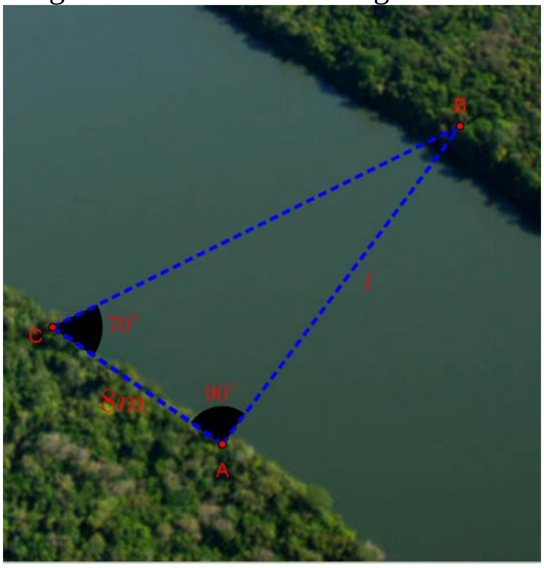
Procuramos elaborar um pós-teste com questões equivalentes ao do pré-teste, com o intuito de se obter dados comparativos o mais fiel possível. Como ocorreu na elaboração do pré-teste, procuramos questões existentes em livros didáticos, com a intenção de estarmos mais próximos da realidade escolar.

Assim como o pré-teste, o pós-teste tem cinco questões. O objetivo principal é observar se ocorreu a aprendizagem dos conceitos básicos de trigonometria após ter sido aplicado a sequência didática.

(QUESTÃO 1) Queremos saber a largura l de um rio sem atravessá-lo. Para isso, adotamos o seguinte processo:

- ✓ Marcamos dois pontos, A (uma estaca) e B (uma árvore), um em cada margem;
- ✓ Marcamos um ponto C, distante 8 m de A, onde fixamos o aparelho para medir ângulos (teodolito), de tal modo que o ângulo no ponto A seja reto;
- ✓ Obtemos uma medida de 70º para o ângulo ACB.

Figura 108 – Cálculo da largura do rio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nessas condições, qual a largura l do rio? (Dados: $sen70° = 0{,}94$; $cos70° = 0{,}34$ e $tg70° \cong 2{,}75$).

(QUESTÃO 2) Uma pessoa está usando um Teodolito a 1,5m do solo e toma duas medidas, com distâncias entre elas de 10m, conforme figura.

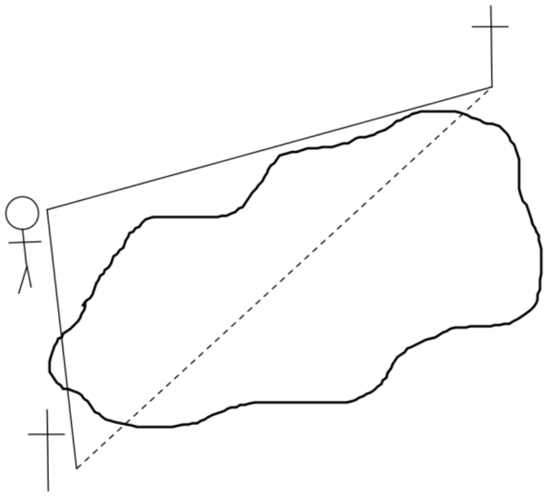
Figura 109 – Visando o topo da árvore.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo $l_1 = 30°$ e $l_2 = 45°$, calcule a altura da árvore.

(QUESTÃO 3) Um empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica numa fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância.

Figura 110 – Dois postes em lados opostos de um lago.



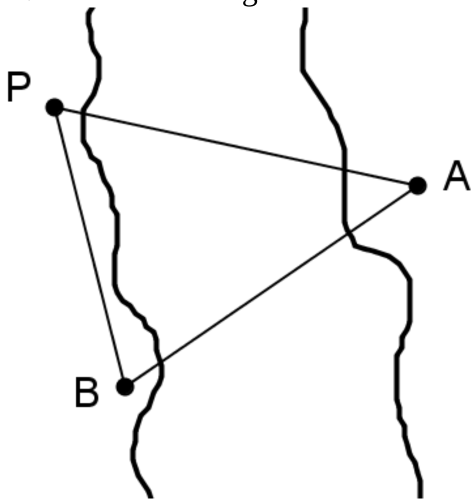
Fonte: Elaborada pelo autor.

Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um Teodolito, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120º. Um auxiliar mediu a distância do poste mais afastado do engenheiro e obteve 100m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45º. Com essas informações, o engenheiro sorriu. Ele já conseguiria calcular a distância entre os postes. Como ele procedeu?

(QUESTÃO 4) Um rio muito importante para o Nordeste é o rio São Francisco. Para se ter ideia do tamanho e da sua importância, ele possui 2830 Km de extensão, entre 300m e 800m de largura, separa a Bahia de Pernambuco e Alagoas de Sergipe e passa por áreas influenciadas por diferentes climas, vegetações e relevos. Suas utilidades são das mais variadas, por exemplo, o uso para fonte hídrica para a geração de energia em cinco usinas hidrelétricas, além de, em diversos trechos oferece condições de navegação servindo assim como transporte de materiais importantes como cimento, sal, açúcar, arroz, soja, madeira, etc. Para se calcular a largura de um rio como o São Francisco, que não possui largura fixa, basta usar o Teodolito para fazer a medição de dois ângulos e, formando um triângulo, a partir das leis estudadas, determinar a largura. Agora, faça o que se pede.

a) Defina topografia.
b) Qual a finalidade do Teodolito?
c) Indique pelo menos três funções importantes do rio São Francisco.
d) Qual a vantagem de se conhecer a lei dos senos e a lei dos cossenos?
e) Suponha que a largura do rio São Francisco seja a média aritmética entre a maior e a menor largura que ele possui e que um topógrafo localizado num ponto P da margem esquerda fixe um ponto A na margem direita através do teodolito, de modo que o segmento AP seja a largura média do rio. Se o topógrafo se deslocar 200m na mesma margem esquerda e ao parar num ponto B, meça um ângulo PBA de 30º, observe a representação matemática dessa situação e determine o seno do ângulo PAB.

Figura 111 – Vértices do Triângulo PAB nas margens do rio.

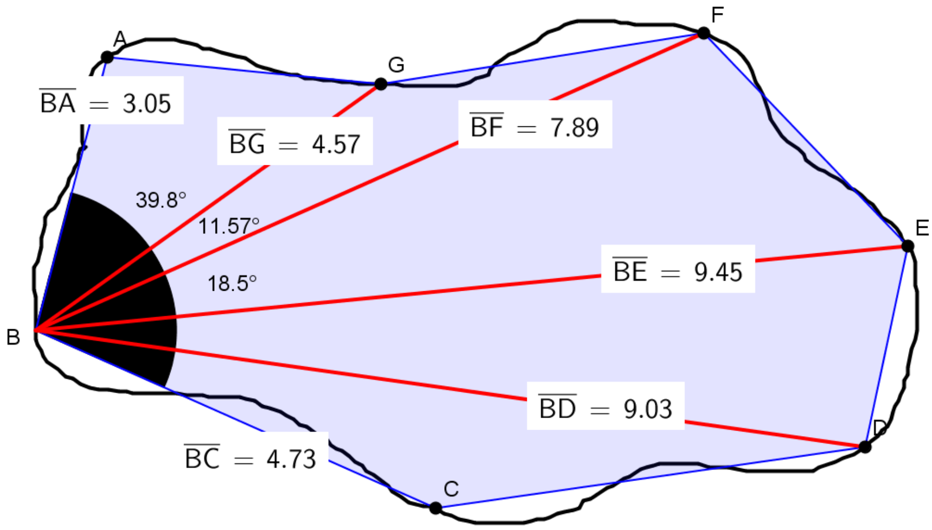


Fonte: Elaborada pelo autor.

(QUESTÃO 5) De posse de uma calculadora cientifica, calcule a área aproximada do polígono ABCDEFG, pelo método da triangulação usado na topografia.

Obs. Todas as distâncias dadas estão em metros.

Figura 112 – Região decomposta em Triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

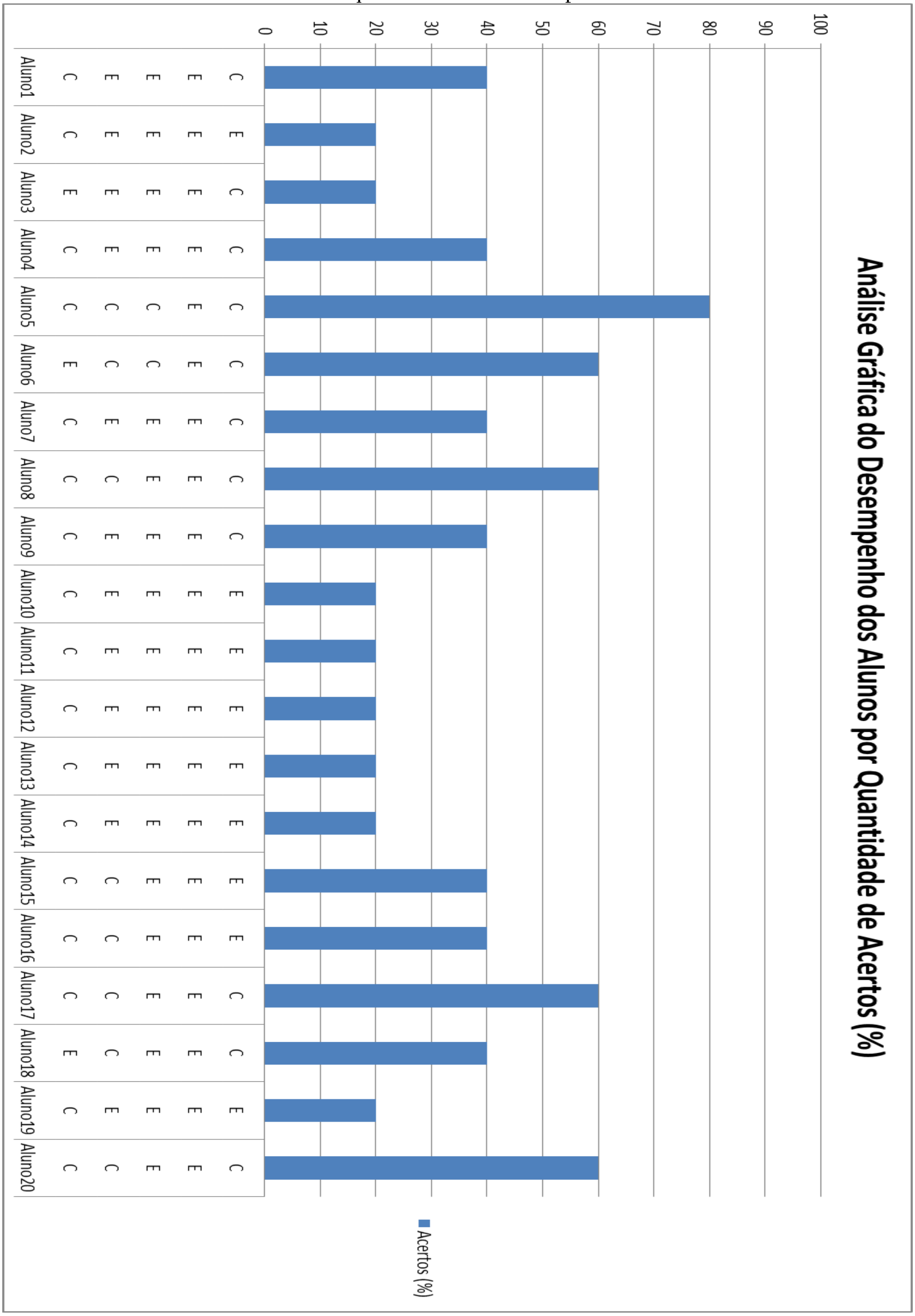
Na próxima subseção analisaremos o desempenho dos vinte alunos por quantidade de acertos no pré-teste, apresentando uma tabela em porcentagem e os mesmo dados em um gráfico de barras.

6.2 Análise do Desempenho dos Alunos por Quantidade de Acertos (%) no PRÉ-TESTE

Tabela 5 – Desempenho dos alunos do Pré-Teste.

ALUNOS	QUESTÕES					QUANTIDADE DE ACERTOS (%)
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	
Aluno1	C	E	E	E	C	40
Aluno2	C	E	E	E	E	20
Aluno3	E	E	E	E	C	20
Aluno4	C	E	E	E	C	40
Aluno5	C	C	C	E	C	80
Aluno6	E	C	C	E	C	60
Aluno7	C	E	E	E	C	40
Aluno8	C	C	E	E	C	60
Aluno9	C	E	E	E	C	40
Aluno10	C	E	E	E	E	20
Aluno11	C	E	E	E	E	20
Aluno12	C	E	E	E	E	20
Aluno13	C	E	E	E	E	20
Aluno14	C	E	E	E	E	20
Aluno15	C	C	E	E	E	40
Aluno16	C	C	E	E	E	40
Aluno17	C	C	E	E	C	60
Aluno18	E	C	E	E	C	40
Aluno19	C	E	E	E	E	20
Aluno20	C	C	E	E	C	60

Gráfico 1 – Análise da quantidade de acertos por aluno no Pré-Teste.

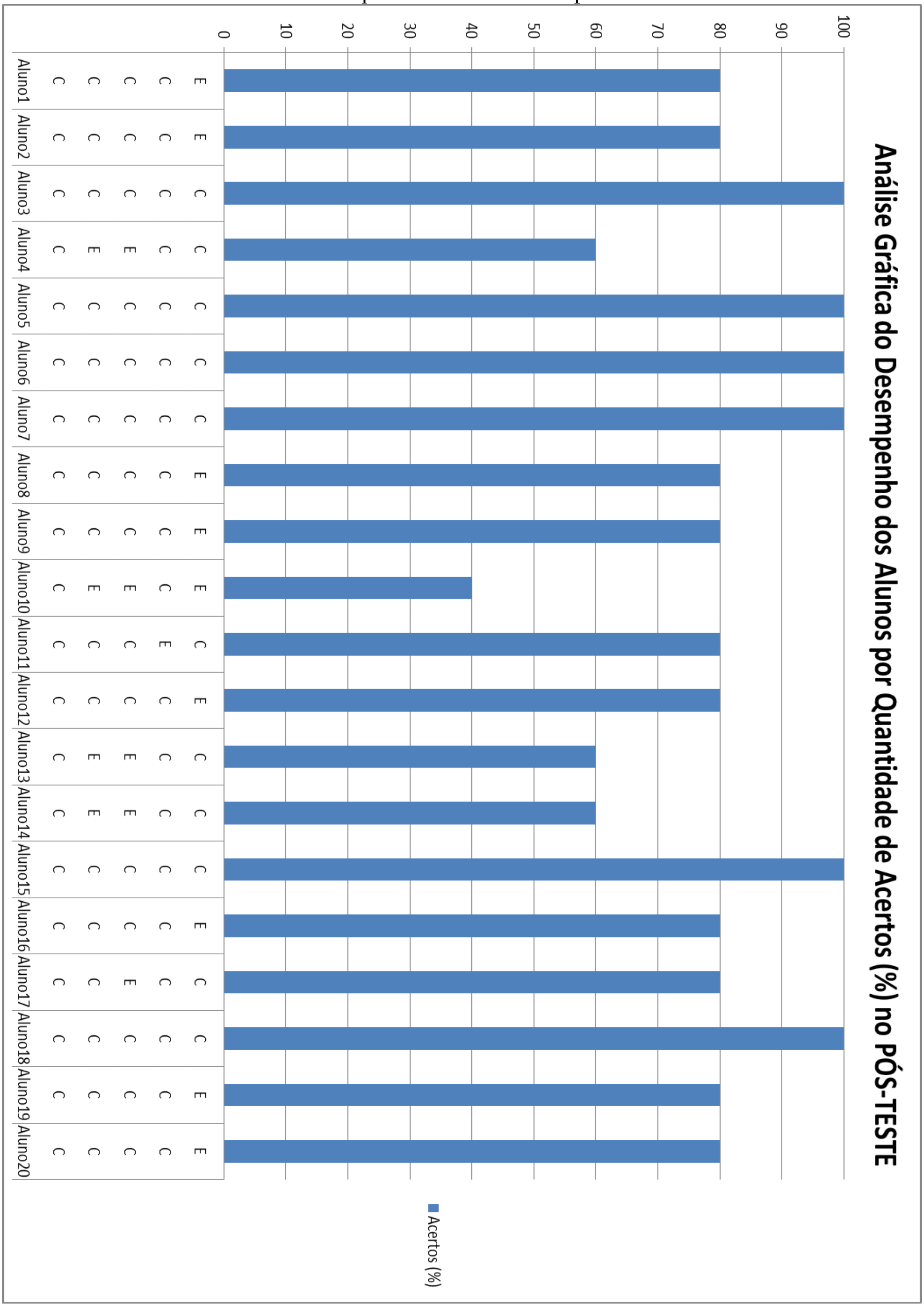


6.3 Análises do Desempenho dos Alunos por Quantidade de Acertos (%) no PÓS-TESTE

Tabela 6 – Análise do Desempenho dos alunos no Pós-Teste.

ALUNOS	QUESTÕES					QUANTIDADE DE ACERTOS (%)
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	
Aluno1	C	C	C	C	E	80
Aluno2	C	C	C	C	E	80
Aluno3	C	C	C	C	C	100
Aluno4	C	E	E	C	C	60
Aluno5	C	C	C	C	C	100
Aluno6	C	C	C	C	C	100
Aluno7	C	C	C	C	C	100
Aluno8	C	C	C	C	E	80
Aluno9	C	C	C	C	E	80
Aluno10	C	E	E	C	E	40
Aluno11	C	C	C	E	C	80
Aluno12	C	C	C	C	E	80
Aluno13	C	E	E	C	C	60
Aluno14	C	E	E	C	C	60
Aluno15	C	C	C	C	C	100
Aluno16	C	C	C	C	E	80
Aluno17	C	C	E	C	C	80
Aluno18	C	C	C	C	C	100
Aluno19	C	C	C	C	E	80
Aluno20	C	C	C	C	E	80

Gráfico 2 – Análise da quantidade de acertos por aluno no Pós-Teste.



6.4 Análises Comparativas do Desempenho Individual (Pré-Teste/Pós-Teste)

Gráfico 3 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 1.

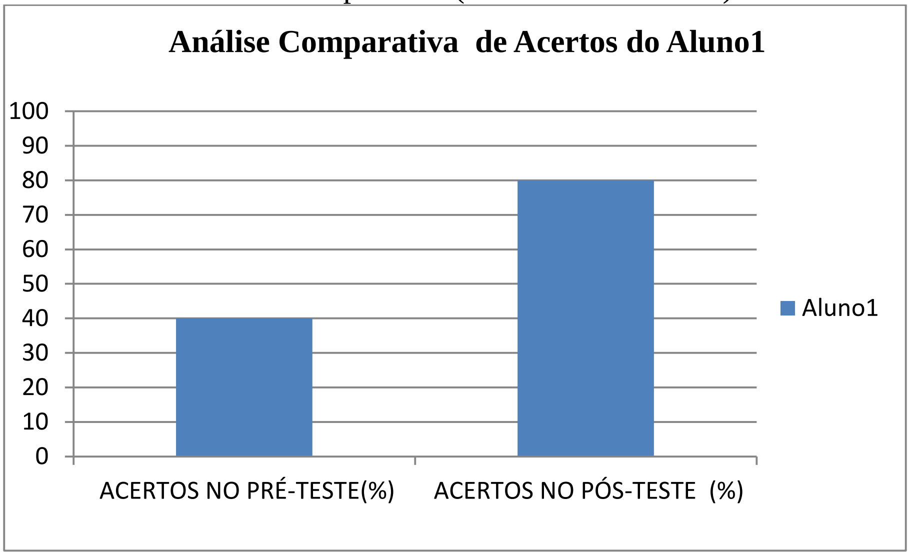


Gráfico 4 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 2.

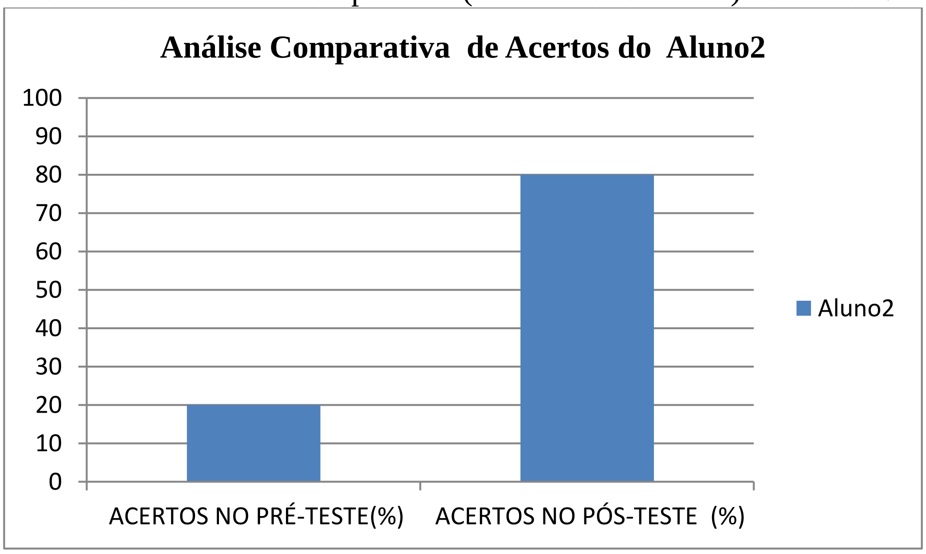


Gráfico 5 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 3.

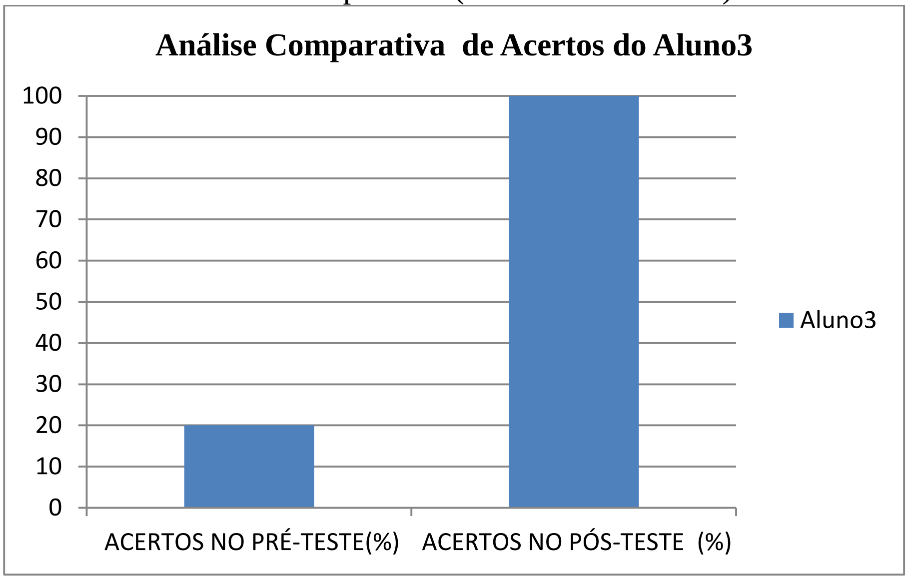


Gráfico 6 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 4.

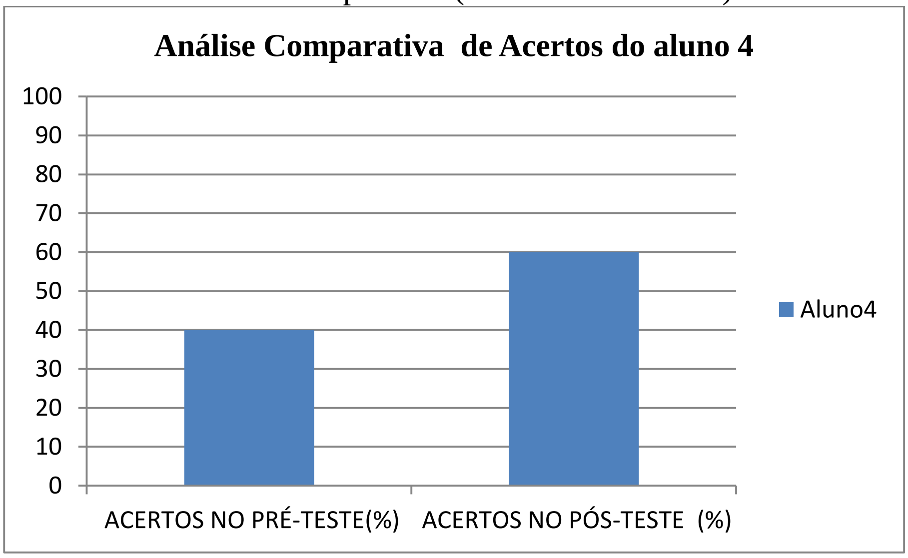


Gráfico 7 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 5.

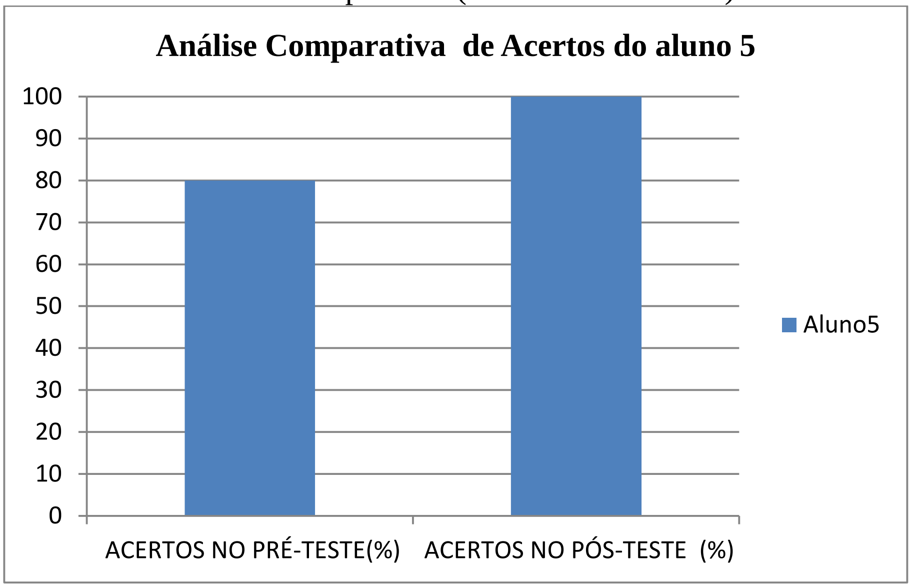


Gráfico 8 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 6.

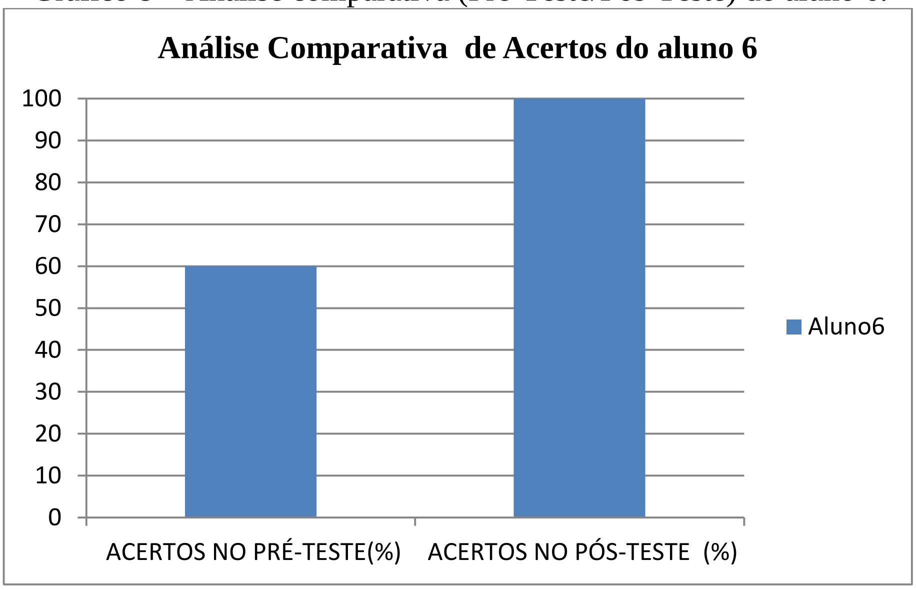


Gráfico 9 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 7.

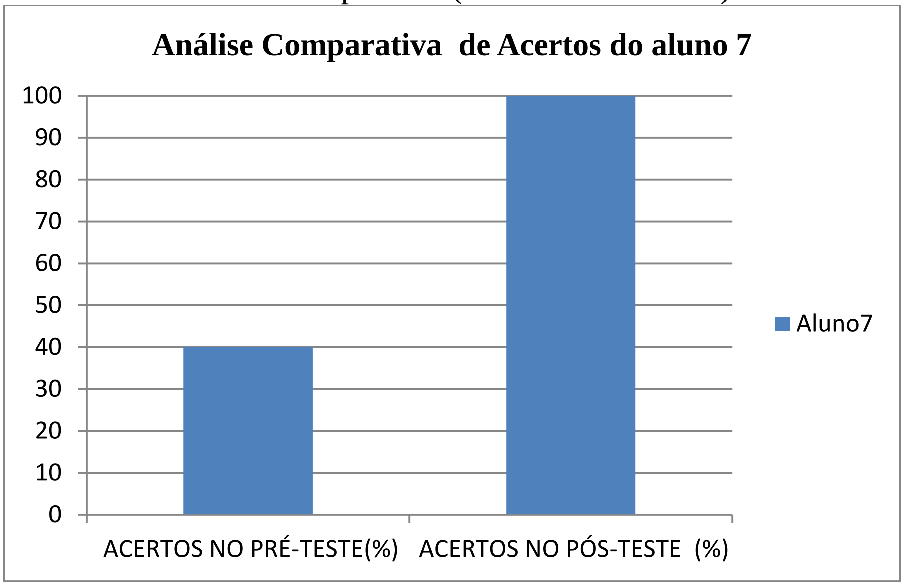


Gráfico 10 Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 8.

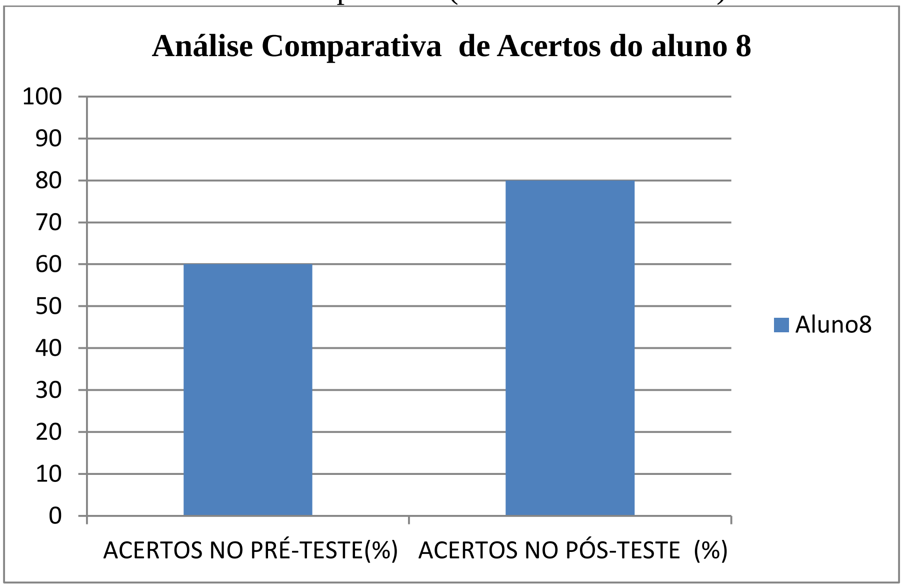


Gráfico 11 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 9.

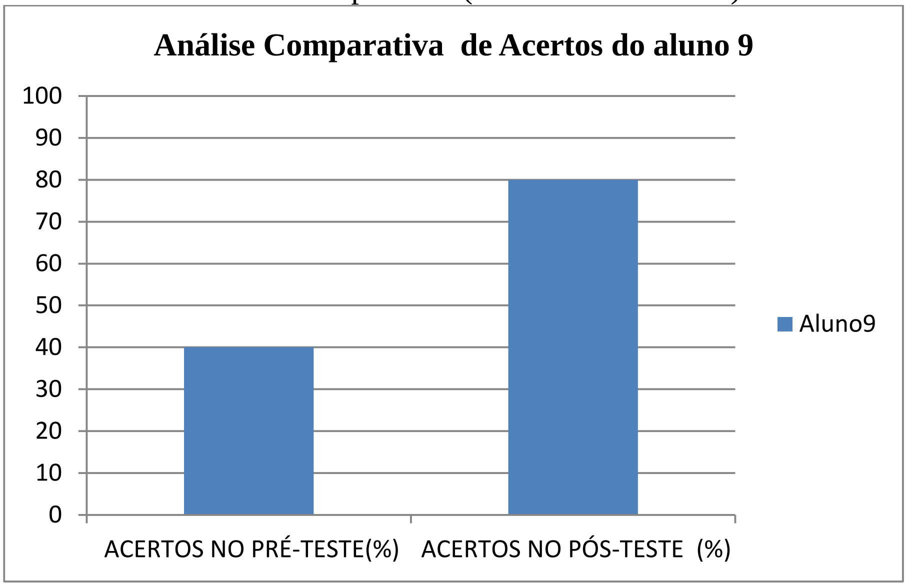


Gráfico 12 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 10.

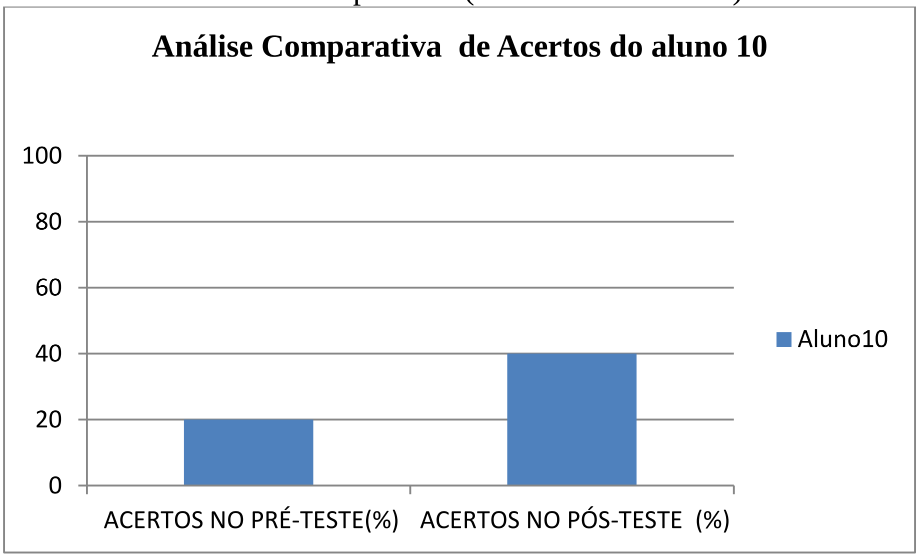


Gráfico 13 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 11.

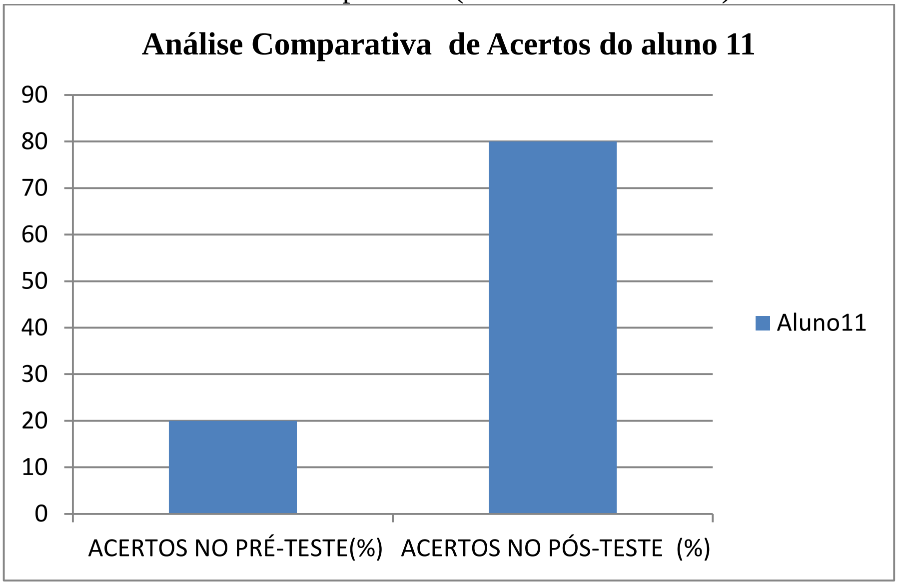


Gráfico 14 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 12.

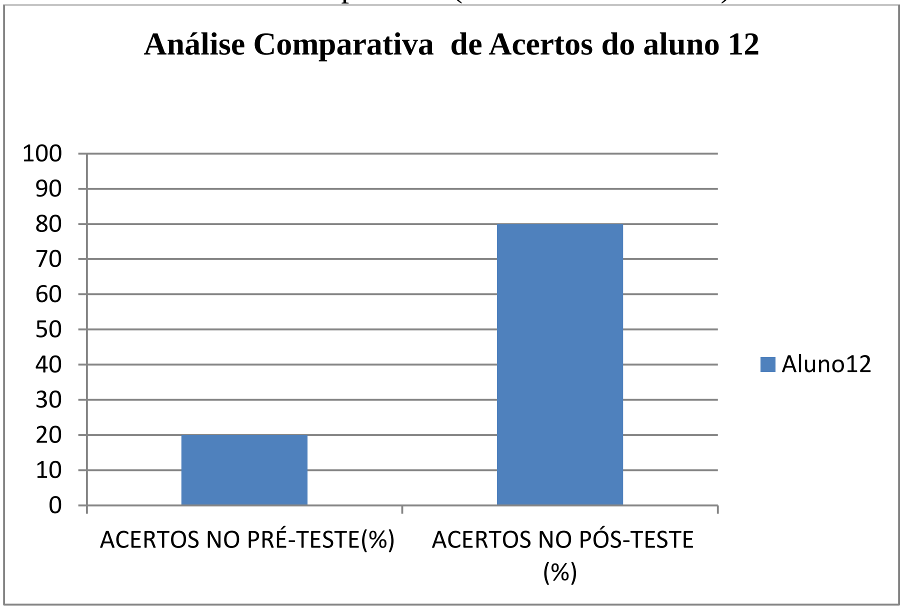


Gráfico 15 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 13.

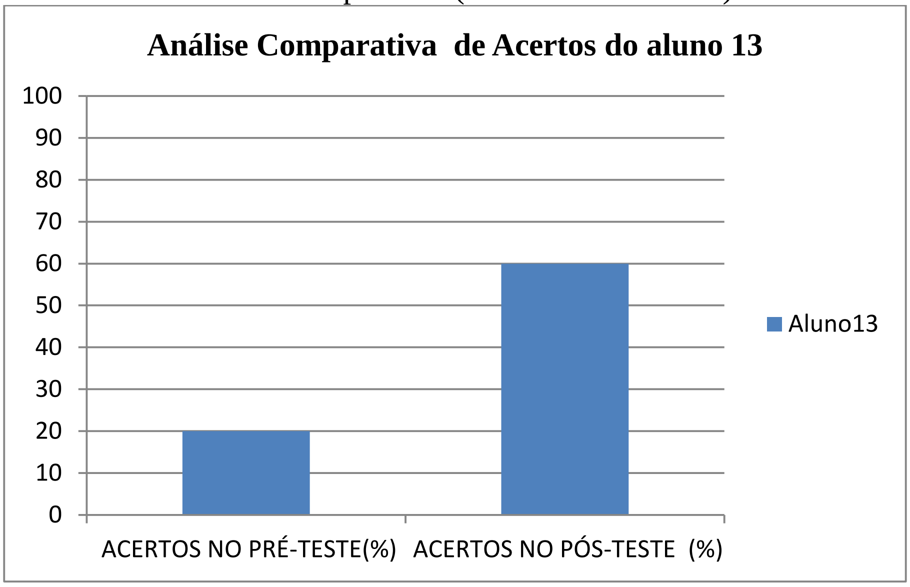


Gráfico 16 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 14.

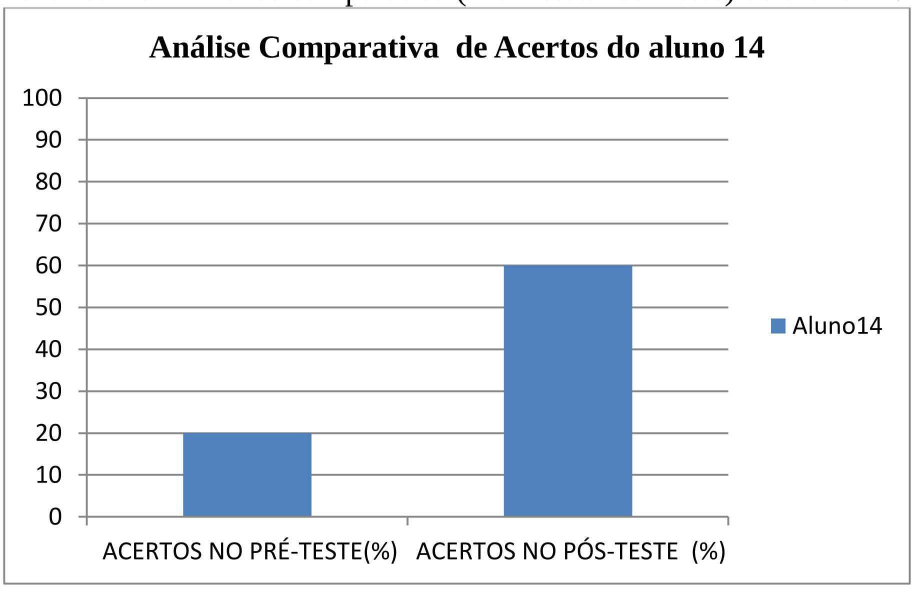


Gráfico 17 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 15.

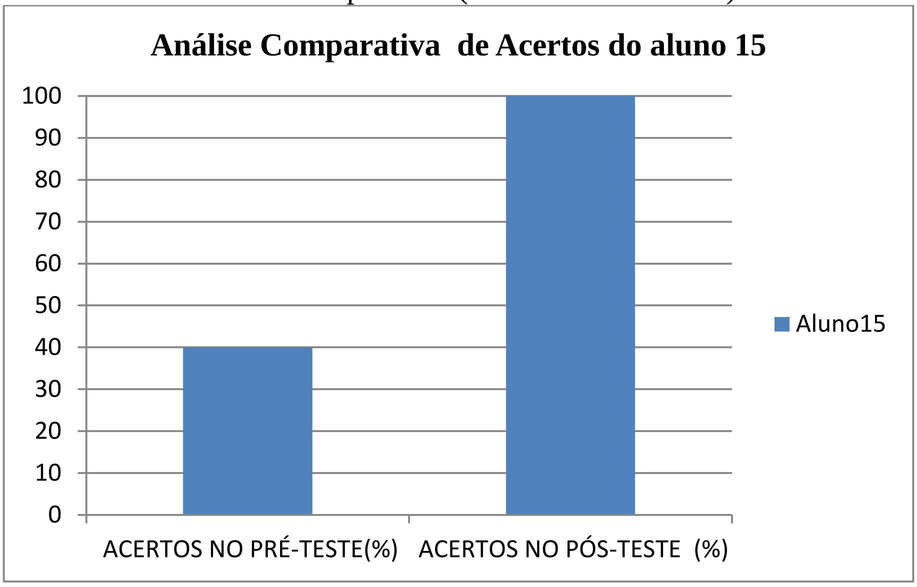


Gráfico 18 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 16.

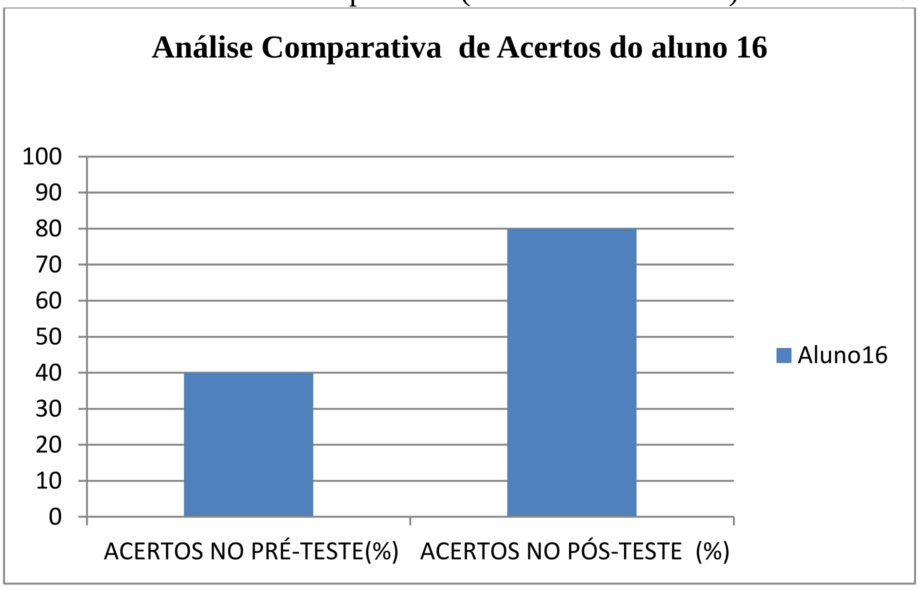


Gráfico 19 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 17.

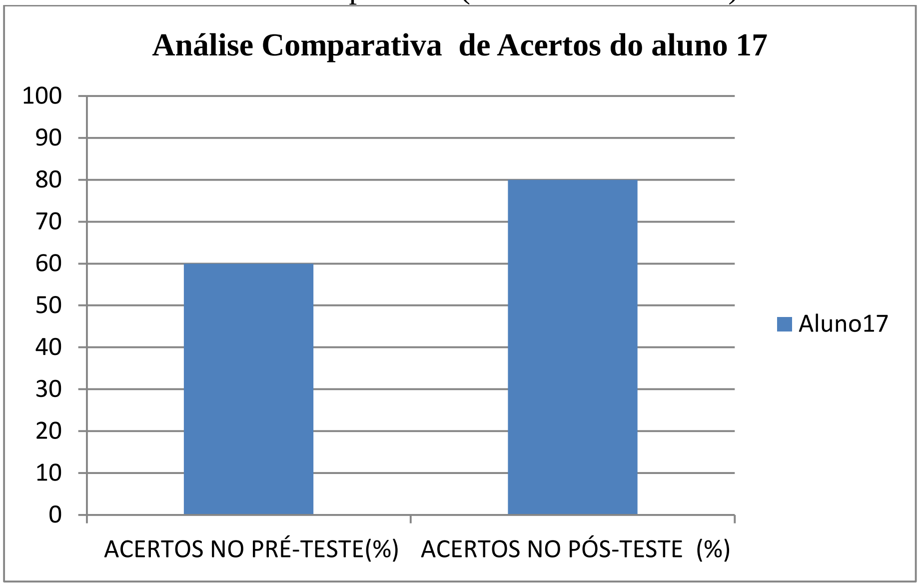


Gráfico 20 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 18.

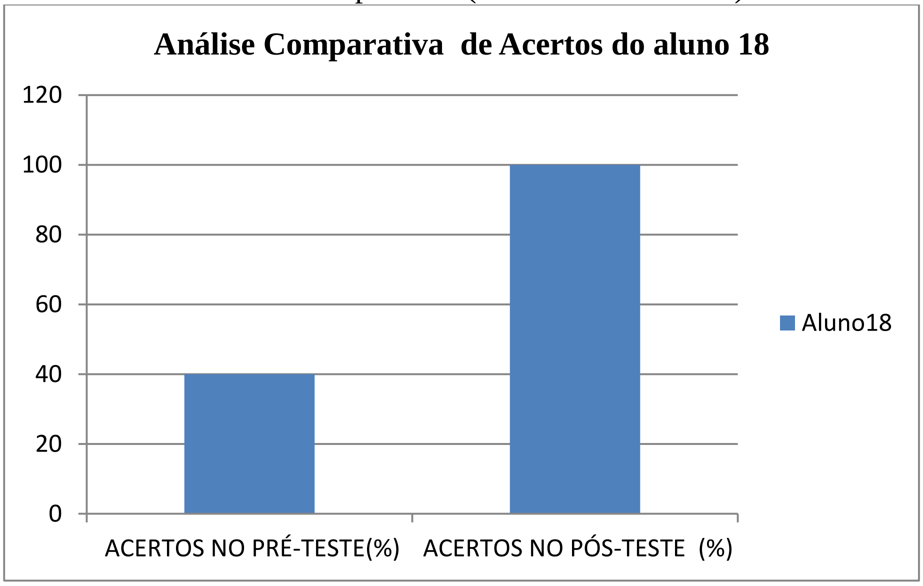


Gráfico 21 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 19.

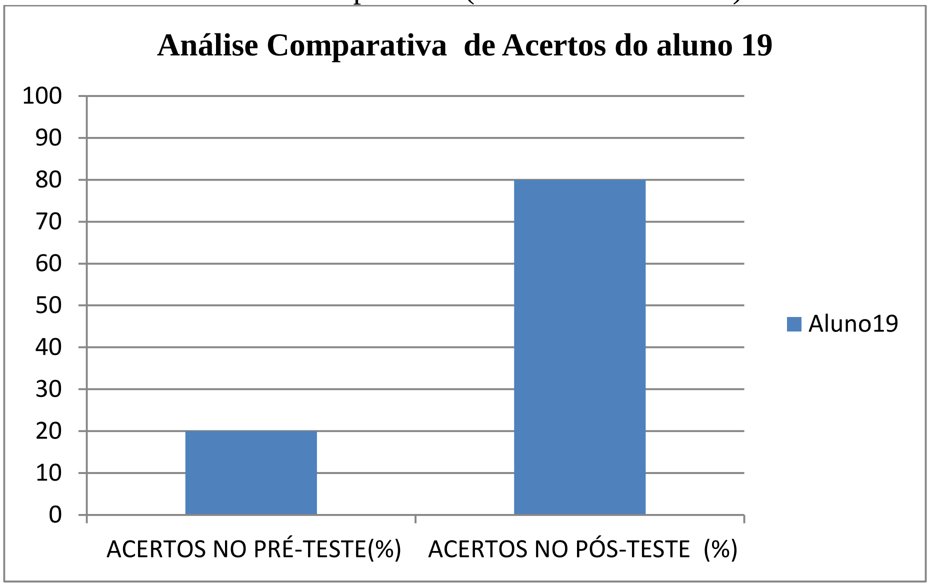
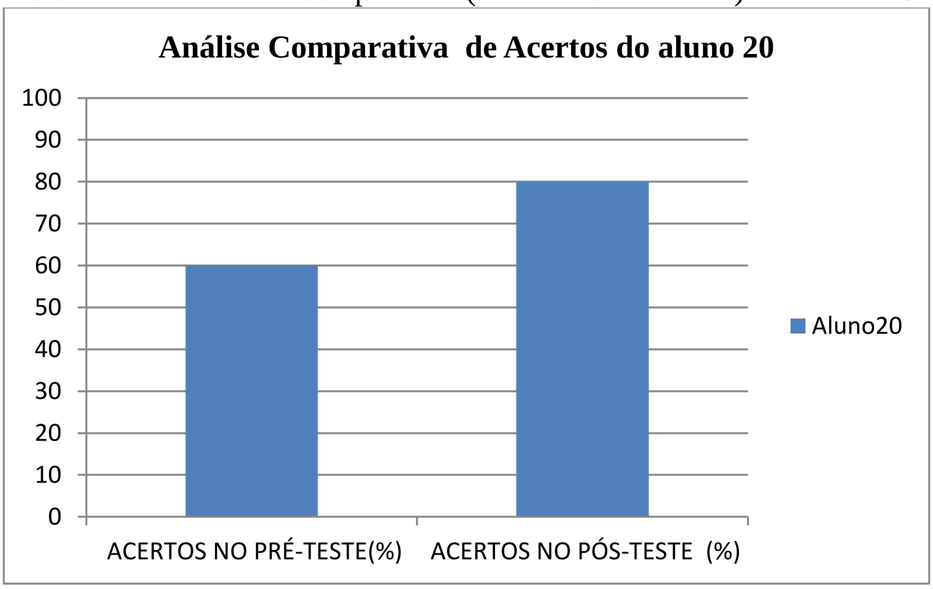
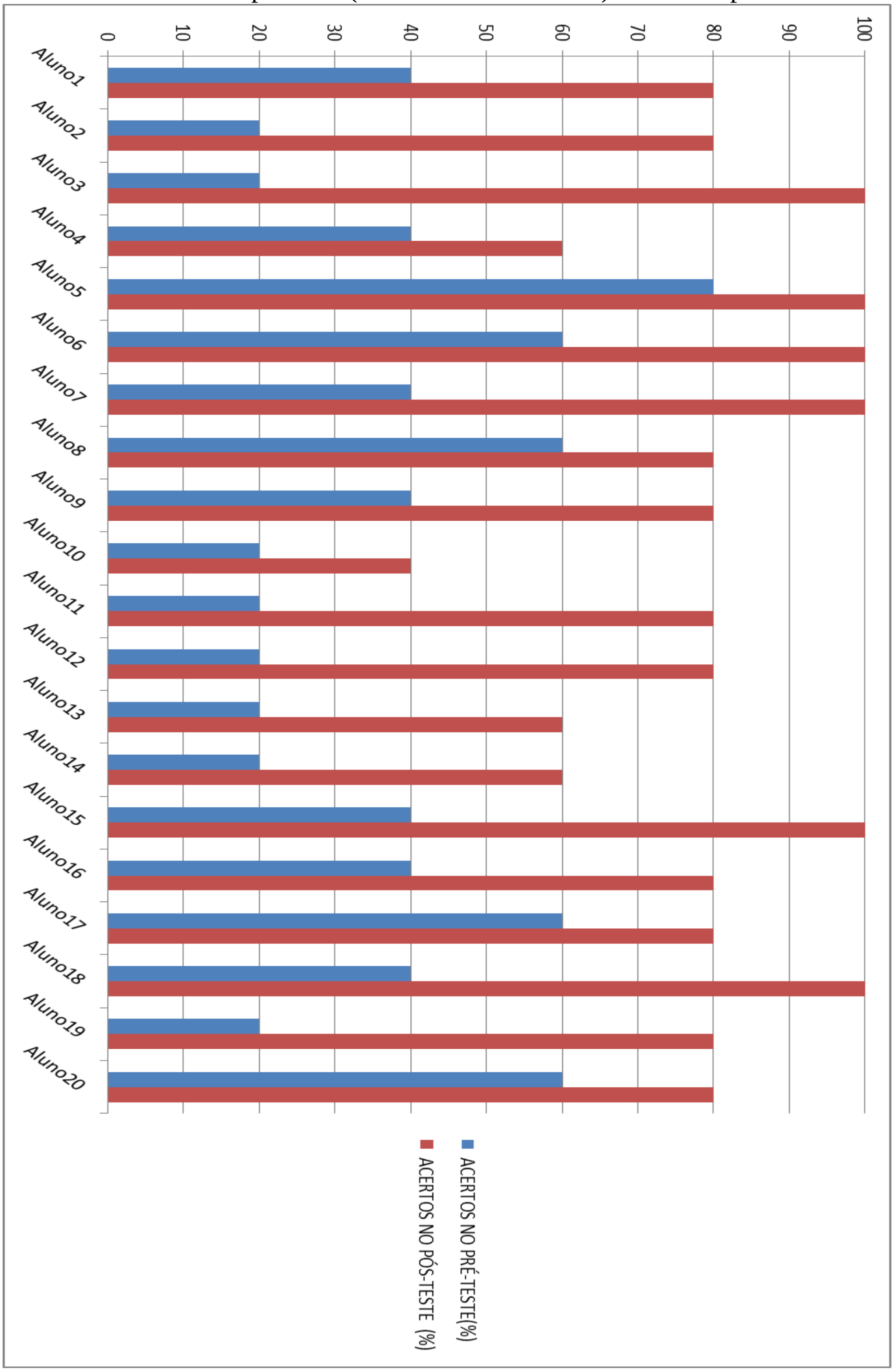


Gráfico 22 – Análise comparativa (Pré-Teste/Pós-Teste) do aluno 20.



6.5 Análise Comparativa (Pré-Teste e Pós-Teste) do Desempenho de todos os Alunos

Gráfico 23 – Análise comparativa (Pré-Teste e Pós-Teste) do Desempenho dos alunos.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

O atual mundo globalizado apresenta muitos desafios ao ser humano, e a educação manifesta a necessidade de romper com modelos tradicionais para o ensino. É importante considerar que a interdisciplinaridade supõe um eixo integrador com as disciplinas de um currículo para que os alunos aprendam a olhar o mesmo objeto sob diferentes perspectivas. Dessa forma, trabalhando de modo interdisciplinar, propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem sejam feitos destacando-se as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando sempre que possível à fragmentação entre elas.

Um fator importante nessa intervenção pedagógica, foi o fato de tratarmos sempre que possível, os conteúdos de forma contextualizada aproveitando ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, dando significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento.

Para elaborar a sequência didática, além de nossa motivação pessoal em conduzir uma unidade temática sobre Trigonometria, procedemos a uma revisão bibliográfica que nos permitisse conhecer como esse assunto é abordado em documentos oficiais, livros didáticos e em outras pesquisas. Nos documentos oficiais analisados, PCNEM (BRASIL, 1999)[19] e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006)[22], percebemos a preocupação em oferecer um ensino de trigonometria pautado em experiências e aplicações que o tornem mais próximo ao aluno, sendo este capaz de conferir significados aos conceitos e definições.

A utilização de novas metodologias para o ensino da matemática deve ser uma prática constante, sendo assim, partimos da situação problema e a partir dela vamos explanando os conceitos referentes para as soluções e percebemos que essa estratégia pode vir a ser uma poderosa ferramenta para o ensino de matemática, pois desta maneira o aluno será encorajado e incentivado a descobrir o que está envolvido por trás dos problemas, pois esses se encontram presentes no seu dia a dia, não sendo apenas mais um conteúdo distante da sua realidade.

A utilização do teodolito e a construção do clinômetro foram instrumentos muito importantes no processo de construção do conhecimento, pois possibilitou aos alunos utilizarem os conceitos matemáticos que estão presentes neste instrumento, para solucionar o problema da medição da altura das árvores e na medição da área útil da instituição, possibilitando uma interação maior entre os alunos, pois eles não foram apenas receptores da mensagem e sim, juntamente com o professor que assume seu papel de mediador do processo de ensino, precisaram construir todos os conceitos envolvidos.

Percebemos a partir da análise dos dados apresentados, que a proposta pedagógica atingiu o seu objetivo, que é o de contribuir de forma significante para o aprendizado dos alunos, além de possibilitar a detecção de algumas outras dificuldades apresentadas.

Assim, pretendeu-se nesse trabalho, desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas.

Espero que esta pesquisa possa contribuir sobremaneira para uma reflexão sobre a aprendizagem da Matemática; que seja útil àqueles que se dedicam ao seu ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MENDES, Juliana Elvira. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. 2013. 144 *f*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais.

[2] Ausubel, D.P. (1963). **The psychology of meaningful verbal learning**. New York, Grune and Stratton.

[3] AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

[4] MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O ensino e as propostas pedagógicas nas pesquisas em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. BICUDO, Maria Aparecida V. (org.). São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 153 -167.

[5] BRASIL, **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília : MEC, 2000. 88p

[6] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1998. 142p.

[7] AUSUBEL, David. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.

[8] MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

[9] SANTOS, J. C. F. dos. **Aprendizagem Significativa: modalidades de aprendizagem e o papel do professor**. Porto Alegre: Mediação, 2008.

[10] PONTES NETO, José. A. da S. **Sobre a aprendizagem significativa na escola**. MARTINS, E. J. S. et. al. **Diferentes faces da educação**. São Paulo: Arte & Ciência Villipress, 2001, p. 13-37.

[11] PONTES NETO, José A. da S. **Considerações sobre o conhecimento anterior**. In: Boletim de Psicologia Escolar. Assis (SP): ILHP, UNESP, n. 4, p. 57-65, 1988.

[12] AUSUBEL, David. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.

[13] AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. (1980). **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda.

[14] GASPARIN, J. L. Motivar para aprendizagem significativa. Jornal Mundo Jovem. Porto Alegre, n. 314, p. 8, mar. 2001. **Uma didática para a pedagogia histórico-crítica**. 4. ed. rev. e ampl. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

[15] COLL, César. **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, 3v.

[16] AUSUBEL, D.P. **Educational Psychology: A Cognitive View**. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1980.

[17] BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, 1999. 394p.

[18] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1999. Brasília, Brasil.

[19] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1999.

[20] BRASIL. **Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Matriz de Referência . Brasil, 1999.

[21] BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2002. 144 p.

[22] BRASIL. MEC. CNE. **Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Resolução n. 2, de 30 de Janeiro 2006.

[23] GUELLI, Oscar. **Contando a história da matemática**. 9. ed. São Paulo: Ática, 1993.

[24] BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: E. Blucher, 1974.

[25] CAVALCANTI, A.; GALVÃO, C. Trabalho em equipe. In: **Terapia ocupacional fundamentação e prática**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2008.

[26] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas SP, Unicamp, 2004.

[27] Dante, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2014.

[28] Costa, Aluízio Alves da. **Topografia**. – Curitiba: Livro Técnico, 2011. 144p.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLEMENTARES

ANASTASIOU, L. das G. C.; ALVES, L. P.(orgs.). **Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em sala de aula.** 6. Ed. – Joinville, SC: UNIVILLE, 2006.

VASCONCELOS, C. dos S. **Construção do conhecimento em sala de aula**. São Paulo: Libertad, 1994 (Cadernos Pedagógicos do Libertad, 2).

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

AUSUBEL, D. P. et al. Psicologia Educacional. Rio Janeiro: Interamericana, 1980. 625p. MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. Brasília: Unb, 1999a. 129p.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: Pedagógica e Universitária, 1999b. 195p. MOREIRA, M. A.; OSTERMANN, F. **Teorias Construtivistas**. Textos de apoio ao professor de Física. v.10. Porto Alegre: Instituto de Física UFRGS, 1999. 56p.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Learning how to learn**: New York: Cambridge University Press, 1989. 199p.

OSTERMANN, F. **A Física na Formação de Professores para as Séries Iniciais: Um Estudo de Caso**. Porto Alegre: UFRGS, 1991. 157p. Dissertação (Mestrado em Física), Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1991.

OSTERMANN, F., MOREIRA, M. A. **A Física na Formação de Professores de Ensino Fundamental.** Porto Alegre: Universidade/UFRGS, 1999. 151p. O Ensino de Física na Formação de Professores de 1ª a 4ª Série do 1º Grau: Entrevistas com Docentes. Caderno Catarinense de Ensino de Física. v.7, n.3, p.171 - 182. Florianópolis, dez. 1990.