INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

FABRÍCIO GARCIA DA SILVA ALVES

# SOLUÇÕES GERAIS DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS E A RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES CÚBICAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Orientador: Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira

Rio de Janeiro

2015

**INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

**FABRÍCIO GARCIA DA SILVA ALVES**

# SOLUÇÕES GERAIS DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS E A RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES CÚBICAS

**Trabalho de conclusão de curso**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – no Instituto de matemática pura e aplicada – IMPA.

**Orientador: Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira**

**Rio de Janeiro**

**2015**

Dedico este trabalho a minha mulher **CLARA ALICE OTAVIANA DA COATA** que me deu apoio e as minhas filhas **MAYARA SANTOS DA SILVA** e **ISADORA DA COSTA GARCIA** que são minha inspiração e estímulo para buscar cada dia mais

A minha mãe **INDALÉCIA GARCIA DA SILVA ALVES** por me ajudar e acreditar em mim.

A minha irmã **FABIANA GARCIA DA SILVA ALVES** e meu sobrinho **ADILTON GARCIA CAETANO.**

**Agradecimentos**

Agradeço ao meu orientador, aos professores do PROFMAT, a minha família e, principalmente, a Deus, pois sem ele nada disso seria possível.

**RESUMO**

Tentamos, através desde trabalho, apresentar os métodos de resolução de equações do terceiro e quarto grau assim como a conexão de equações cúbicas e números complexos. Sugerimos planos de aula para colegas professores e de estudos para leitores interessados em enriquecer seus conhecimentos sobre o assunto. Além de uma retrospectiva histórica.

**Palavras-chave:** Equações Cúbicas e Quárticas, Métodos de Resolução.

SUMÁRIO


1 – INTRODUÇÃO........................................................................................8

2 – RETROSPECTIVA HISTÓRICA...............................................................10

2.1 – As tábuas Babilônicas.......................................................................10

2.2 – A Matemática Árabe e Hindu.............................................................11

2.3 – Os Matemáticos Italianos..................................................................14

2.3.1 – Resolução da Equação cúbica.......................................................17

2.3.2 – Resolução da Equação Quártica....................................................19

2.4 – Solução de Descartes para Equação Quártica....................................22

3 – DISCUSSÃO ENTRE EQUAÇÕES CÚBICAS E COMPLEXOS.............24

3.1 – Bombelli e os Números Sofisticados.................................................27

4 – EQUAÇÕES CÚBICAS NO ENSINO MÉDIO..........................................29

5 – MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GERAL DE ALGUMAS EQUAÇÕES......33

5.1 – Métodos de Resolução Geral de Equações de Grau 2.......................33

5.1.1 – Fazendo uma Mudança de Variável $x = y + t$...............................33

5.1.2 – Completando quadrado.................................................................35

5.1.3 – Exemplos Resolvidos.....................................................................36

5.2 – Métodos de Resolução de Equações Cúbicas....................................37

5.2.1 – Solução de Carlos G. T. de Araújo Moreira.....................................38

5.2.2 – Outro Método de Resolução..........................................................40

5.2.3 – Justificativa da Combinação Usando 1, $w$ e $w^2$...........................44

5.2.4 – Aplicações e Discussão dos Problemas..........................................46

5.3 – Métodos de Resolução de Equações do Quarto Grau........................54

5.3.1 – Solução de Carlos G. T. de Araújo Moreira......................54
5.3.2 – Solução de Ferrari.............................................................56
5.3.3 – Exemplos Resolvidos........................................................58
6 – PESQUISA DE CAMPO..............................................................62
6.1 – Conclusão da Pesquisa de Campo..............................................63
6.2 – Sugestão de Plano de Aula para Professores.............................64
6.3 – Sugestão de Plano de Estudos....................................................68
7 – BREVE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS............................................72
7.1 – Matemática: Contextos e Aplicações............................................72
7.2 – Matemática: Ciência e Aplicações................................................75
7.3 – Matemática: Ensino Médio...........................................................77
7.4 – Conexões com a Matemática........................................................80
7.5 – Matemática: Novo Olhar...............................................................81
7.6 – Matemática Paiva.........................................................................83
7.7 – Conclusão da Análise...................................................................86
8 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.............................................................87
9 – REFERÊNCIAS..............................................................................88

## 1. INTRODUÇÃO

Resolver equações algébricas é o que mais fazemos em matemática e em outras disciplinas que se utilizam da matemática como física e química, por exemplo. As equações estão presentes sempre que se pode modelar uma situação problema através de uma sentença com uma ou mais letras, que são chamadas de incógnita.

No ensino fundamental, sexto ao nono ano, são inseridos as equações do primeiro grau com uma ou duas incógnitas e do segundo grau com uma incógnita. As equações de primeiro grau vistas no sétimo e no oitavo ano e equações do segundo grau no nono ano. A seguir no ensino médio continuam trabalhando com resoluções de equações, mas sem desenvolvimentos de métodos de resolução geral de equações de grau três e quatro. Nossa proposta de trabalho é incentivar o ensino de pelo menos um método de resolução de equações cúbicas e quárticas a alunos da educação básica, principalmente o ensino médio, mas sempre que possível com uma breve motivação no nono ano do ensino fundamental.

Aqui assumimos que os números complexos sejam conhecidos pelo leitor. O conteúdo de números complexos é tratado, normalmente, no terceiro ano do ensino médio. Este assunto é abordado no ensino médio sem, às vezes, nenhuma motivação prévia em anos anteriores ao terceiro ano do ensino médio. Simplesmente partem de um tema, ou de uma resumida história, para a formalização. No presente trabalho tentamos dar sentido a apresentação dos números complexos. Inclusive fazemos comparações de números complexos com números reais.

Exibimos métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas num contexto histórico e com abordagem mais moderna procurando justificar os passos de forma mais detalhada possível e resolvemos alguns exemplos utilizando os mesmos artifícios do desenvolvimento generalizado dos métodos, assim como simples aplicação de fórmulas determinadas de maneira geral.

Demos à devida importância as pesquisas com alunos da educação básica e deixamos sugestões de planejamentos de aulas e de cursos, para o caso de leitores interessados em estudar por conta própria. Apresentamos algumas observações sobre os livros didáticos aprovados no último Programa nacional do livro didático (PNLD) a respeito do conteúdo deste trabalho.

# 2. RETROSPECTIVA HISTÓRICA[1]

Neste capítulo voltamos nosso olhar para o contexto histórico que precedeu a descoberta de uma resolução algébrica das equações cúbicas e quárticas a fim de entender a importância deste acontecimento bem como sua influência em toda produção matemática que se seguiu. Desde que os babilônicos[2] desenvolveram o método de completar quadrados para resolver equações quadráticas, quase quatro milênios se passariam até que um método para resolução por radicais das cúbicas e quárticas fosse descoberto pela humanidade, descoberta essa que desencadeia um novo capítulo na história dos números, conforme veremos mais adiante.

## 2.1 As Tábuas Babilônicas

Nossa história começa na região da antiga Babilônia, situada no vale dos rios Eufrates e Tigre, hoje conhecida como Mesopotâmia e onde recentes escavações arqueológicas desenterraram tábuas matemáticas suficientes para decifrar a escrita cuneiforme e reconstruir parte do conhecimento babilônico a respeito da matemática.

A esse respeito Eves afirma que *"perto do ano 2000 a.C. aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida"* segundo o autor o conhecimento matemático babilônico permitia não só resolver equações quadráticas, mas também discutir algumas cúbicas e quárticas (biquadradas). Na *figura 1* vê-se a tábua onde foram identificados problemas que dão origem a equações quadráticas e sistemas de equações.

Alguns problemas de equações cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$ eram resolvidos consultando uma tábua com os valores de $n^3 + n^2$ para os inteiros de um a trinta.

[1] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis
[2] Termo que inclui outros povos, como os sumérios, acadianos, caldeus e assírios, que também habitaram a região.

Figura 1: Tábua Babilônica BM 13901

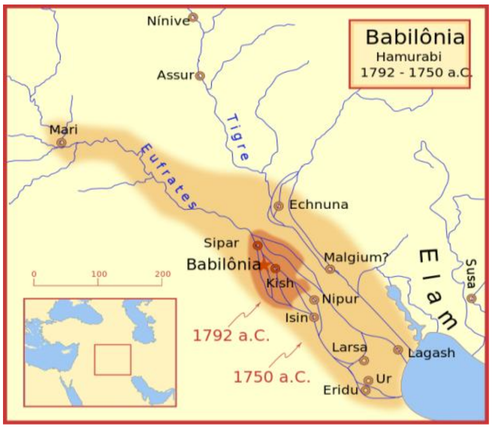



Figura 2: Mapa da região antigamente conhecida como Babilônia

## 2.2 A Matemática Árabe e Hindu

A palavra álgebra deriva do título do tratado de al-Khwarizmi[3], sobre o assunto, Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah, que numa tradução mais livre significa "ciência da transposição e do cancelamento", tratado esse, comumente referenciado pela forma abreviada al-jabr ou álgebra. Segundo o dicionário "**Algebra**, s.f. Parte da matemática que generaliza os problemas aritméticos, analisando de um ponto de vista geral as soluções possíveis". Desde as tábuas babilônicas muitos anos se passaram para que pudéssemos conhecer a álgebra em toda amplitude de seu significado, a esse respeito ROQUE afirma que

> O passo decisivo para a constituição da álgebra como disciplina pode se estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos de Al-Khwarizmi e de outros matemáticos ligados a ele.

Al-Khwarizmi utiliza termos específicos para se referir às três formas sob as quais um número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples. Após definir as quatro operações com expressões contendo

[3] Al-Khwarizmi (780-850) foi um matemático, astrônomo, astrólogo, geólogo e autor persa. Seu principal trabalho foi Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah onde apresentou a primeira solução sistemática de equações lineares e quadráticas.

quantidades desconhecidas e radicais ele enumera os seis casos possíveis de equações quadráticas:

Figura 3: Al-Khwarizmi

1. Quadrados iguais a raízes $(ax^2 = bx)$
2. Quadrados iguais a um número $(ax^2 = c)$
3. Raízes iguais a um número $(bx = c)$
4. Quadrados e raízes iguais a um número $(ax^2 + bx = c)$
5. Quadrados e um número iguais a raízes $(ax^2 + c = bx)$
6. Raízes e um número iguais a quadrados $(bx + c = ax^2)$

Note que são admitidos exclusivamente coeficientes positivos, al-Khwarizmi utilizava exemplos e com palavras descrevia o procedimento para resolução de cada caso. Apesar dos exemplos particulares e da ausência de simbologia algébrica, essência de seu método, apresentava a generalidade inerente à álgebra que conhecemos.

Posteriormente, no século XII, foi Bháskara quem dedicou-se com maior destaque à resolução de equações quadráticas por métodos algébricos. À época os problemas que hoje são modelados por meio de equações eram enunciados de forma poética, apenas com palavras. Abaixo, um verso citado como exercício por ROQUE:

> De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada [do total] foram para o lago de *Manasa*, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me, donzela, o número de gansos no bando.

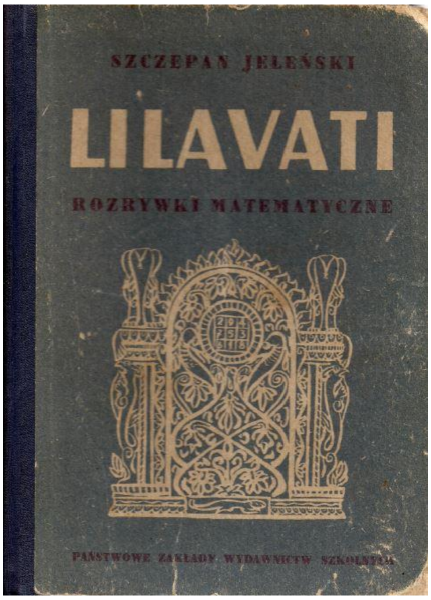


Figura 4: Lilavati é um dos quatro volumes que compunham o principal trabalho de Bháskara.

Seu método consistia em reduzir o problema a uma equação linear através de completamento de quadrados. Chamemos o total de gansos de $x^2$, daí, $10x$ foram para o lago, $\frac{x^2}{8}$ foram para a floresta e 6 foram vistos brincando na água, ou seja,

$$\frac{x^2}{8} + 10x + 6 = x^2$$

$$\frac{7x^2}{8} - 10x = 6$$

$$7x^2 - 80x = 48$$

Expressando na forma $ax^2 + bx = c$. A partir daí deve-se multiplicar ambos os lados por $4a$ e, em seguida, adicionar $b^2$ a ambos os lados, obtendo a expressão $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$.

$$196x^2 - 2240x = 1344$$

$$196x^2 - 2240x + 6400 = 7744$$

$$(14x - 80)^2 = 7744$$

Agora, diminuímos o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros:

$$14x - 80 = 88$$

E resolvemos a equação de primeiro grau obtida. Logo, $x = 12$ e o número de gansos do bando é igual a 144.

## 2.3 Os Matemáticos Italianos

Nossa história continua na Itália do século XVI, epicentro de uma épica explosão intelectual impulsionada pelo espírito renascentista, com um professor de matemática de uma das mais antigas universidades medievais, a Universidade de Bolonha já, então, com uma forte tradição matemática e onde Scipione del Ferro (1465-1526) lecionava. Inspirado, provavelmente, em fontes árabes, a despeito da teoria de Pacioli[4], Scipione del Ferro desenvolve um método para resolver a equação $x^3 + mx = n$, o ano é entre 1510 e 1515, aproximadamente, não é possível precisar a época de sua descoberta uma vez que Ferro não a publicou, mas teria revelado seu achado a um discípulo seu, Antonio Maria del Fiore (século XV – século XVI).

A possibilidade da resolução algébrica de equação cúbica serviu para motivar outros matemáticos a se engajarem na descoberta do método, em especial, Nicolo[5] Fontana (1499-1557), muito prematuramente acometido pela tragédia, foi obrigado a superar as adversidades, sendo a maior delas quando ainda criança foi ferido gravemente na face durante a tomada da Bréscia pelos franceses. O ferimento perpetrou-lhe um defeito na fala que lhe rendeu o

[4] Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1517) foi um monge franciscano e célebre matemático italiano. É considerado pai da contabilidade moderna.

[5] Em algumas bibliografias aparece escrito Niccolò Fontana

pseudônimo Tartaglia, que Nicolo passou a assinar. Sequelado e com poucos recursos Tartaglia obrigou-se a ser um autodidata e assim aprendeu praticamente sozinho a ler e escrever e passou a dedicar-se nos caminhos da matemática vindo a ganhar seu sustento como professor de ciência em Verona, Vicenza, Brescia e Veneza por volta de 1535.

Segundo GARBI o conhecimento da descoberta de Ferrari motivou Tartaglia que afirmou "mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535". O desempenho de Tartaglia chegou ao conhecimento de Del Fiore que, se valendo muito mais da sorte do legado que recebera de seu mestre do que da própria competência, desafiou Tartaglia para um debate público, ação de que se arrependeria amargamente mais tarde conforme veremos. Enquanto Del Fiore utilizou o conhecimento a ele repassado para formular questões com equações cúbicas do tipo resolvido por Ferro, Tartaglia já generalizara um método para a resolução da cúbica do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. O resultado foi que Tartaglia foi capaz de resolver todas as questões propostas por Del Fiore, ao tempo que este, foi incapaz de resolver sequer uma questão proposta por seu oponente.

Derrotado, humilhado, Del Fiore se retira dessa trama e eis que surge um novo candidato a vilão, Girolamo Cardano[6] (1501-1576), filho ilegítimo de advogado, médico, astrólogo, jogador inveterado, herege e um dos algebristas mais talentosos de seu tempo são algumas das características relacionadas ao seu nome. Seu talento o colocou em posição de destaque no cenário europeu, era protegido do Papa Gregório XIII, certa vez, foi chamado a Escócia para diagnosticar uma doença no arcebispo de St. Andrews, apesar das acusações de heresia por haver divulgado o horóscopo de Jesus Cristo e por sua devoção a Nero, grande perseguidor dos cristãos. Cardano, então, convida Tartaglia a sua casa sob o pretexto de obter-lhe um encontro entre ele e um possível patrono, no entanto, sua verdadeira intenção era obter o segredo da resolução das cúbicas, o que, após muita resistência de Tartaglia, conseguiu sob juramento de jamais revelar a ninguém. Em defesa das acusações de

[6] Dependendo da fonte pode aparecer também Gerônimo Cardano ou Jérôme Cardan

mesquinho e egoísta pugnadas por Cardano, Tartaglia afirmou que pretendia publicar sua descoberta em uma obra própria, mas como era de se esperar Cardano quebra seu juramento e publica a descoberta em uma das mais importantes obras dedicadas a álgebra, a *Ars Magna*. A *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis,* ou *Ars Magna* como ficou conhecida, foi publicada em Nuremberg na Alemanha em 1545 e tratava-se do maior compêndio algébrico existente na época e nela Cardano resolve laboriosamente diversas equações cúbicas e embora ele mesmo tenha mencionado uma "dica" dada por Tartaglia o método utilizado fica conhecido como Fórmula de Cardano como é enunciada até hoje por alguns autores.


Figura 5: Tartaglia


Figura 6: Cardano

São muitas as controvérsias que permeiam esta história podendo haver mais de uma versão, apenas para que o leitor possa ter uma ideia do quanto Cardano era tão polêmico quanto extraordinário, após sua viagem a Escócia Cardano ocupou cadeiras nas importantes universidades de Pávia e Bolonha, acusado de heresia abdicou de seu cargo vindo posteriormente a mudar-se para Roma e se tornar astrólogo do Papa. Publicou uma precursora obra a respeito de probabilidades, conhecimento que supostamente utilizava para trapacear no jogo, teve um filho executado por assassinar a esposa, cortou as orelhas do outro e seu melhor discípulo morreu envenenado pela irmã. Por fim, deu cabo a própria vida para não contrariar a previsão que ele mesmo fizera acerca de sua morte. Uma vida tão conturbada pode ter lhe rendido alguns inimigos, o que explicaria sua má fama relatada por ele mesmo como injusta em sua autobiografia. Antes que o leitor se compadeça demasiadamente por Tartaglia, é bom saber que ele publicou uma tradução de Arquimedes como sendo sua e em outra obra enunciou a lei do plano inclinado de Nemorarius sem a atribuição apropriada.

### 2.3.1 Resolução da Equação Cúbica

Dada a polêmica em torno da real autoria da fórmula para a resolução da equação do terceiro grau para sermos o mais justos possível a chamaremos de Fórmula de Cardano-Tartaglia, vejamos agora como era:

Vamos considerar x = A + B, elevando os dois lados da equação ao cubo teremos

$$x^3 = (A + B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

Como A + B = x

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Substituindo na equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ teremos

$$p = -3AB \Rightarrow p^3 = -27A^3B^3 \Rightarrow A^3B^3 = -\frac{P^3}{27}$$

e

$$q = -(A^3 + B^3) \Rightarrow A^3 + B^3 = -q$$

Daí, $A^3 e\ B^3$ são dois números cuja soma e produto são conhecidos. O que temos agora se trata de uma equação do segundo grau cuja fórmula resolutória já conhecemos:

Sejam $A^3$ e $B^3$ raízes da equação quadrática $w^2 + \frac{b}{a}w + \frac{c}{a} = 0$

Daí, aplicando as relações entre coeficientes e raízes

$$w^2 - (A^3 + B^3)w + A^3B^3 = 0$$

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como x = A + B

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Uma pergunta que o leitor faria é “Tartaglia só sabia resolver um tipo de cúbica?". Note que qualquer cúbica na forma geral como conhecemos $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser reduzida a forma $x^3 + px = q$ da maneira que segue:

Seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se $x = y + m$, então:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0$$

fazendo

$$b + 3am = 0$$

tem-se

$$m = -\frac{b}{3a}$$

O que nos fornecerá uma equação do terceiro grau do tipo $y^3 + py + q = 0$ cuja resolução nos levará até o valor de $x = y + m$.

Logo, Tartaglia desenvolveu não só um método para resolução de uma cúbica em particular, mas uma fórmula geral.

### 2.3.2 Resolução da Equação Quártica

Voltemos, agora, para o momento em que Cardano, quebrando todas as suas juras e promessas, publica a solução de Tartaglia das cúbicas em sua *Ars Magna.* Tartaglia vê a pérola que coroaria seu trabalho subtraída, conforme a história confirmaria, o crédito pelo achado seria injustamente dado a Cardano. Indignado, Tartaglia o acusa de quebrar um juramento sagrado feito sobre a Bíblia e roubar-lhe os louros da descoberta que, sem dúvidas, significou um enorme avanço no estudo da álgebra e pode ser considerado o maior avanço matemático daquele século. Em meio a muito ódio e rivalidade Tartaglia propõe-se a travar um debate público com Cardano em Milão, no entanto quem aparece em seu lugar é o jovem e talentoso matemático Ludovico Ferrari (1522-1560), discípulo de Cardano.

Seria Ferrari um mero coadjuvante ou um dos protagonistas desta intricada trama? Poucos anos antes da publicação de sua maior obra Cardano foi desafiado por Zuanne de Tonini da Coi (século XVI) a resolver um problema que na linguagem atual traduz-se na seguinte equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Ferrari teve uma origem humilde em Bolonha passou a trabalhar como servo na casa de Cardano que identificou um brilhantismo no jovem rapaz, o promoveu a seu secretário e passou a doutriná-lo nos desígnios da matemática. Ferrari fez jus à confiança nele depositada e, onde seu mestre não teve êxito, obteve sucesso ao generalizar uma fórmula algébrica para a resolução das equações quárticas. Vejamos como era:

Antes, note que a equação geral do 4º grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0)$$

sempre pode ser transformada em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

Fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3º grau. De modo que sabendo resolver a equação de 4º grau incompleta acima é possível resolver qualquer equação de 4º grau.

Agora, dada a equação

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

procuraremos reagrupar os termos de modo a encontrar em ambos os lados da igualdade polinômios que sejam quadrados perfeitos.

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta$$

Para que tenhamos trinômios quadrados perfeitos em ambos os lados dessa igualdade é necessário e suficiente que os seus discriminantes sejam nulos, ou seja:

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0$$

e

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha}$$

daí,

$$(p + \alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0$$

$$(p + \alpha)^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0$$

$$\alpha(p + \alpha)^2 - 4\alpha r - q^2 = 0$$

$$\alpha p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^3 - 4\alpha r - q^2 = 0$$

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

Que é uma equação de 3º grau cuja fórmula resolutória nós já conhecemos. Bastando, enfim, determinar os valores de α, posteriormente de β, e extrair as raízes quadradas

$$\sqrt{x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta)} = \sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}$$

O método de Ferrari foi publicado na *Ars Magna* em sequência as resoluções de Tartaglia para as cúbicas. Ferrari ganhou notoriedade em Milão chegando a ocupar uma cadeira na Universidade de Bolonha, mas pouco tempo depois, aos 38 anos, morreu provavelmente envenenado pela própria irmã.

### 2.4 Solução de Descartes para uma Equação Quártica

No capítulo em que aborda a geometria analítica [5] propõe a resolução de uma equação de quarto grau sem o termo cúbico utilizando o princípio da identidade de polinômios, assim como Descartes[1] o fez.

Considere a equação do quarto grau

$$ax^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Igualando o primeiro termo da igualdade ao produto de polinômios quadráticos $x^2 + kx + b$ e $x^2 - kx + m$ temos

$$ax^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + kx + b)(x^2 - kx + m)$$

$$ax^4 + px^2 + qx + r = x^4 + (m + b - k^2)x^2 + k(m - b)x + mb$$

daí, igualamos os termos semelhantes dos dois lados da equação:

(1) $m + b = k^2 + p$

(2) $m - b = \frac{q}{k}$

(3) $mb = r$

por (3) $mb = r \Rightarrow b = \frac{r}{m}$, que substituindo em (1) fornece

$$m + \frac{r}{m} = k^2 + p$$

$$mk^2 + m(p - m) - r = 0 \quad (4)$$

Somando as relações (1) e (2) obteremos m em função de *k*, *p* e *q*:

$$\begin{array}{ll} (1) & m + b = k^2 + p \\ (2) & m - b = \dfrac{q}{k} \\ \hline & 2m = k^2 + \dfrac{q}{k} + p \end{array}$$

$$m = \frac{k^2}{2} + \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}$$

Substituindo a expressão encontrada para *m* em (4):

$$\left(\frac{k^2}{2} + \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}\right)k^2 + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}\right)\left(-\frac{k^2}{2} - \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}\right) - r = 0$$

$$\left(\frac{2k^4}{4} + \frac{2qk^2}{4k} + \frac{2pk^2}{4}\right) - \left(\frac{k^4}{4} + \frac{2qk^2}{4k} + \frac{q^2}{4k^2} - \frac{p^2}{4}\right) - r = 0$$

$$\frac{k^4}{4} + \frac{2pk^2}{4} - \frac{q^2}{4k^2} + \frac{p^2}{4} - r = 0 \qquad .(4k^2)$$

$$k^6 + 2pk^4 - q^2 + p^2k^2 - 4rk^2 = 0$$

$k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 = 0$, que pode ser considerada uma equação cúbica em $k^2$.

Dessa maneira reduz-se a solução da equação quártica original à resolução de uma cúbica associada a ela.

## 3. DISCUSSÃO ENTRE EQUAÇÕES CÚBICAS E NÚMEROS COMPLEXOS[7]

Neste capítulo trataremos com a devida atenção uma implicação tão intrigante quanto problemática que surge da resolução algébrica das equações cúbicas. Alguma coisa simplesmente não encaixava quando se observava certos casos de equações cúbicas e, por fim, a resolução suscitava mais perguntas do que respostas.

Observe, por exemplo, o problema "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com área da base 15 unidades, sabendo que a diferença entre seus volumes é de quatro unidades?" equivalente à equação

$$x^3 - 15x = 4$$

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia chegaremos a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ora, na época, de fato, não era possível extrair raízes quadradas de números negativos, logo, a resposta acima não conduziria a lugar algum, no entanto, é possível constatar, por simples inspeção, que x = 4 é uma solução para a equação dada, então, como isso é possível? A esse respeito Eves afirma

> Mas nesse caso, pela fórmula de Cardano-Tartaglia, essas raízes se expressam como diferença de duas raízes cúbicas de números complexos imaginários. Essa aparente anomalia, que tantos transtornos causou aos antigos algebristas, caracteriza o chamado caso irredutível das equações cúbicas.

Tratava-se, então, de um problema de repercussão surpreendente e para o qual não haveria outra solução a não ser criar um novo tipo de numero, conforme veremos mais adiante. Note que ao longo da história os números passaram por incrementações como o advento dos números racionais e a

[7] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis.

admissão de números negativos, foram evoluções que tiveram seu impacto na matemática de suas épocas, contudo, apenas a descoberta dos pitagóricos, cerca de 400 A.C, de números que não poderiam ser representados na forma a/b (a e b inteiros) comparar-se-ia a extensão do conceito de número que estava tendo início na Itália do século XVI. Ora, se para evitar os números irracionais ou negativos bastava dizer que as equações $x^2 - 2 = 0$ e $x + 1 = 0$, respectivamente, não tinham solução, da mesma forma, para inadmitir a raiz quadrada de um número negativo bastava dizer, por exemplo, que a equação $x^2 + 2 = 0$ não tem solução. Mas a resolução das cúbicas traria um indiscutível questionamento a essa conclusão conforme narra Garbi:

> Logo começaram a surgir dúvidas, perguntas e problemas na aplicação do método de Tartaglia e os matemáticos viram-se enredados em questões que demandariam cerca de 200 anos e os esforços dos melhores cérebros dos séculos XVII, XVIII e início do século XIX até que fossem definitivamente esclarecidas.

O que ocorre com a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ pode ser genericamente sintetizado da seguinte forma:

Seja o produto

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

Se o igualarmos a zero teremos uma equação de 3º grau cujas raízes serão $x = a, x = b \; e \; x = c$. Observe que tipo de relação deverá haver entre a, b e c para o desenvolvimento desse produto leve a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, cuja fórmula resolutória nós já conhecemos:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc \qquad (1)$$

para que o termo de segundo grau seja nulo basta que

$$a + b + c = 0$$

ou

$$c = -(a + b)$$

substituindo na equação (1):

$$(x-a)(x-b)(x+[a+b]) =$$

$$x^3-(a+b-\ (a+b))x^2+(ab+b(-\ (a+b))+a(-\ (a+b)))x$$
$$-\ ab\big(-\ (a+b)\big) =$$

$$x^3+[ab-(a+b)^2]x+ab(a+b)$$

e fazendo

$$x^3+[ab-(a+b)^2]x+ab(a+b)=0$$

teremos uma equação cúbica de raízes $x=a,\ x=b\ e\ x=-(a+b)$.

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia tem-se

$$x=\sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2}+\sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2+\left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}+$$

$$\sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2}-\sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2+\left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}$$

Tomemos a expressão sob o radical quadrático, chamando de Δ

$$\Delta=\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2+\left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3$$

$$\Delta=\frac{4a^6-12a^5b+3a^4b^2+26a^3b^3+3a^2b^4-12ab^5-4b^6}{108}$$

$$\Delta=-\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{108}$$

Chegamos à surpreendente constatação que se a e b são reais, então delta nunca é positivo. Ora, observe que ao tempo que nas equações quadráticas a condição necessária para que as raízes fossem reais era o $\Delta \geq 0$ no caso das equações do terceiro grau as raízes serão todas reais se, e somente se, $\Delta \leq 0$. Todas essas evidências conduziriam a uma irrefutável conclusão, apenas os números com os quais os matemáticos vinham trabalhando até então já não eram mais suficientes para atender plenamente ao estudo da álgebra.

### 3.1 Bombelli e os Números Sofisticados

O autor de Ars Magna, Girolamo Cardano, que revelou ao mundo a resolução das equações cúbicas e quárticas em sua obra, sem, contudo, oferecer uma solução convincente para as implicações que a fórmula de Tartaglia traria para a teoria dos números, ainda estaria vivo para testemunhar, em 1572, uma contribuição notável para a resolução das equações cúbicas em *L'Álgebra parte Maggiore dell'Arithmetica* de Rafael Bombelli (1526-1573).

Bombelli nasceu em Bolonha, era engenheiro por profissão e entusiasta da matemática, apenas para que o leitor tenha uma ideia do nível de abstração necessário para conceber tal teoria o próprio Bombelli ao explicar sua visão utilizava expressões como "ideia louca", "pensamento rude" e "apoiar-se em sofismas" ao referir-se a seu estudo sobre os números sofisticados.

Bombelli estuda a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, de raiz igual a 4 constatada por simples observação e o resultado fornecido pela fórmula de Cardano-Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Seu método baseou-se na ideia de que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, daí:

Como

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121} \text{ e } \left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2-\sqrt{-121}$$

concluiu-se que

$$a = 2 \text{ e } b = 1.$$

e assim

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

conforme esperado.

Nasce então um novo tipo de número, que utiliza a *unidade imaginária* $\mathbb{i}$, tal que $\mathbb{i}^2 = -1$, e com ele um novo ramo da matemática, A Teoria dos Números Complexos, que foi concebida para atender um problema essencialmente teórico, mas no futuro se mostraria com infindáveis aplicações práticas.

Justiça seja feita, o primeiro a cogitar os chamados *números complexos imaginários,* sem, entretanto, denominá-los assim, teria sido Cardano que em sua *Ars Magna* propõe o seguinte problema, dividir 10 em duas partes de modo que o produto seja 40. Segue a resolução:

$$x(10 - x) = 40$$

$$10x - x^2 = 40$$

$$x^2 - 10x + 25 = -40 + 25$$

$$(x - 5)^2 = -15$$

$$x - 5 = \pm\sqrt{-15}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Embora esteja claro que a soma desses dois números seja 10 e que o produto seja 40, Cardano conclui dizendo que o resultado era "tão sutil quanto inútil". Como bem sabemos hoje, Cardano antecipara a noção de números complexos conjugados desenvolvida por Bombelli, ele estava certo quanto à sutileza, mas tais soluções não são nem um pouco inúteis.

## 4. EQUAÇÕES CÚBICAS NO ENSINO MÉDIO[8]

Neste capítulo discutiremos a relação entre equações cúbicas e números complexos com ênfase na elaboração, aplicação e análise de uma proposta pedagógica que utilize as equações cúbicas como tema precursor para o estudo dos números complexos. A ideia de introduzir o estudo dos números complexos a partir da resolução de Cardano-Tartaglia para as equações cúbicas é conduzir o aluno pelo caminho natural que outrora levou grandes matemáticos a desafiarem o conceito do que era reconhecidamente "real" e investissem seu tempo e intelecto no "imaginário". A esse respeito Garbi afirma

> (...) um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-texto relativamente à origem dos números complexos: foram as equações do 3º grau e não as do 2º que desencadearam todo o desenvolvimento teórico naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli

A seguir, o roteiro da aula a ser aplicada a uma turma de 3º ano do Ensino Médio com conhecimento prévio de equações algébricas de terceiro e quarto grau. A essa altura os alunos já estão familiarizados com a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução da equação cúbica bem como todo o contexto histórico que envolveu sua descoberta, conforme descrito no capítulo anterior.

Utilizaremos o problema clássico proposto por Cardano "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com área da base 15 unidades, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?" equivalente a equação

$$x^3 - 15x = 4$$

Verificar que x = 4 é uma solução para o problema proposto.

[8] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis

$$4^3 - 15.4 = 4$$

Vale relembrar que o desenvolvimento do produto (x-a)(x-b)(x-c) leva a um polinômio do 3º grau em x que, quando igualado a zero, fornece-nos uma equação do 3º grau, cujas raízes são x=a, x=b e x=c. Daí,

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x-b)(x-c)$$

$$\frac{x^3 - 15x - 4}{x-4} = (x-b)(x-c)$$

$$x^2 + 4x + 1 = (x-b)(x-c)$$

Igualando o polinômio do lado esquerdo da igualdade a zero obteremos uma equação quadrática de raízes $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$ que são as outras duas soluções da equação cúbica inicial.

Note que, pelo Teorema do Valor Intermediário[1], uma equação de grau ímpar sempre tem, ao menos, uma solução real. No caso da equação cúbica, conhecendo essa raiz é possível fatorar o polinômio do 3º grau a fim de encontrar uma equação quadrática cujas raízes serão as outras duas soluções da cúbica em questão.

Agora, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, determinar as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \quad (1)$$

Nesta etapa os alunos terão a oportunidade de compartilhar da perplexidade experimentada por Tartaglia, Cardano, Bombelli, ao se depararem com equações que possuíam raízes reais conhecidas cuja resolução passa por raízes quadradas de números negativos. Se traçarmos uma analogia entre o problema semelhante que ocorre em equações quadráticas com discriminante menor que zero e o problema atual veremos que para evitar o primeiro a argumentação é muito simples, tal equação não possui solução real, ao tempo que com o problema acima a solução não só existe, mas a conhecemos o que conduzirá os alunos a seguinte conclusão, os números estudados até aqui não são suficientes para resolução de todos os problemas algébricos que conhecemos. Nas palavras de Boyer

> Outro resultado imediato da resolução da cúbica foi a primeira observação significativa de uma nova espécie de número...Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse de alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.

Neste momento propõe-se que, seguindo os passos de Bombelli, "façamos de conta" que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e estabeleçamos algumas normas para operar com ele:

i. $(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$
ii. $\left(-(\sqrt{-1})\right)(\sqrt{-1}) = 1$
iii. $\left(-(\sqrt{-1})\right)\left(-(\sqrt{-1})\right) = -1$
iv. $(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$
v. $(\pm 1)\left(-(\sqrt{-1})\right) = \mp\sqrt{-1}$

Aplicando as propriedades estabelecidas na conjectura acima à expressão obtida em (1) chegaremos a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

nosso resultado já conhecido.

Admitir $\sqrt{-1}$ como um número na resolução de equações cúbicas com raízes quadradas negativas foi um recurso engenhoso e ousado, especialmente para a época, no entanto, foi visto com muita desconfiança pelos matemáticos do século XVI, tanto que a chamaram de *unidade imaginária*, e assim prosseguiu por dois séculos, aproximadamente. A Teoria dos Números Complexos teve contribuições de Girard, Descartes, Wallis, Euler e, por fim, Gauss que não deixou muito a ser acrescentado. Dito isso, é perfeitamente natural que os alunos desconfiem a primeira vista e demorem um pouco a aceitar e operar com essa nova espécie de número.

# 5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GERAL DE ALGUMAS EQUAÇÕES[9]

Neste capítulo daremos maior importância aos métodos de resoluções gerais de equações cúbicas e quárticas, mas sem esquecermos as equações quadráticas uma vez que estas nos servem de ferramenta para o desenvolvimento dos métodos de resolução das equações de graus três e quatro.

## 5.1 Métodos de Resolução Geral de Equações de grau 2

Vamos desenvolver de duas formas a solução geral da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b\ e\ c \in R, a \neq 0$

### 5.1.1 Fazendo uma Mudança de Variável x = y + t

Primeiro fazendo uma substituição $x = y + t$, onde t é uma constante qualquer, daí, teremos uma nova equação do segundo em $y$.

$$a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0$$

$$ay^2 + 2aty + at^2 + by + bt + c = 0$$

$$ay^2 + (2at + b)y + at^2 + bt + c = 0$$

Observe que se eliminarmos o termo de grau 1 na última equação teremos duas soluções para $y$, diretamente. Basta isolar $y$. Portanto, fazemos $2at + b = 0 \rightarrow t = -\frac{b}{2a}$ e substituímos na última equação para termos:

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

[9] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis

$$ay^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c$$

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou seja,

$$y_1 = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ou\ y_2 = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

portanto, a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é:

$$x_1 = y_1 + t = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x_2 = y_2 + t = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Note que é necessário fazer uma discussão sobre $\Delta = b^2 - 4ac$ se for no contexto de soluções reais. Caso contrário fica entendido que o contexto é estendido ao conjunto dos números complexos. E, logo, a equação pode ter até duas raízes reais, ou sempre duas raízes complexas.

### 5.1.2 Completando Quadrados

Para uma segunda solução geral, dividimos ambos os membros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a e em seguida completamos quadrados que é um recurso, geralmente desenvolvido no 8º ano do ensino fundamental.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula para resolução da equação de 2º grau, como é conhecida.

ou seja, temos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Apesar de essa última solução ser mais enxuta, o argumento de fazer $x = y + t$ é bastante interessante do ponto de vista das transladações dos gráficos de funções através da adição de uma constante $t$ ao argumento da função.

### 5.1.3 Exemplos Resolvidos

**Exemplo 1**: vamos resolver a equação $2x^2 - 4x + 7 = 0$ utilizando os procedimentos dos dois métodos anteriores.

Solução pelo primeiro método:

Façamos a substituição de $x = y + t$ na equação $2x^2 - 4x + 7 = 0$, para obter:

$$\begin{aligned} 2(y+t)^2 - 4(y+t) + 7 &= 2y^2 + 2t^2 + 4ty - 4y - 4t + 7 \\ &= 2y^2 + (4t - 4)y + (-4t + 7 + 2t^2) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $t = 1$, temos:

$$2y^2 + 5 = 0 \to y = \pm\sqrt{-\frac{5}{2}} = \pm i\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Portanto $2x^2 - 4x + 7 = 0 \to x = 1 + i\sqrt{\frac{5}{2}}\ ou\ x = 1 - i\sqrt{\frac{5}{2}}$

Solução pelo segundo método, completando quadrados:

$$2x^2 - 4x + 7 = 0 \to x^2 - 2x + \frac{7}{2} = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{7}{2}$$

$$(x-1)^2 = -\frac{5}{2}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{-\frac{5}{2}}$$

$$x = 1 + i\sqrt{\frac{5}{2}}, ou\ x = 1 - i\sqrt{\frac{5}{2}}$$

**Exemplo 2**: vamos resolver a equação $5x^2 + 11x + 2 = 0$ pela solução geral.

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 121 - 40 = 81 > 0$$

logo

$$x = \frac{-11 + \sqrt{81}}{10} = -\frac{1}{5}\ ou\ x = \frac{-11 - \sqrt{81}}{10} = -\frac{20}{10} = -2$$

### 5.2 Métodos de Resolução de Equações Cúbicas

Aos 14 anos de idade, Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira, no ano de 1987, apresentou a dedução da fórmula geral da equação do terceiro grau e do método de resolução da equação do quarto grau por artifícios simples e naturais que mais tarde lhe rendeu os olhares do conceituado matemático Elon Lages Lima. E em 1994 com incentivo do professor Elon, Carlos Gustavo concordou em publicar na Revista do Professor de Matemática o seu achado. Pouco antes da publicação de seu artigo o autor, humildemente, enviou uma carta à revista RPM dizendo que tinha visto no livro (EULER, L. Elements of Algebra, New York, Springer, c. 1972, Section IV, chap. XV, P. 282) essencialmente a mesma ideia sendo desenvolvida para equações de grau quatro pelo genial Euler.

### 5.2.1 Solução dada por Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira

Dada uma equação geral do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$ , $a \neq 0$, tal que $x_1$ e $x_2$ são soluções complexas da equação, então, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ . Portanto, podemos escrever a equação assim, $x^2 - Sx + P = 0$.

Motivado, o autor, pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do segundo grau em função dos coeficientes da equação, resolveu calcular a equação:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

Elevando ao cubo ambos os membros da equação, temos:

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})$$

Substituindo $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2$ e $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ na equação acima

$$y^3 = S + 3\sqrt{P}y$$

$$y^3 - 3\sqrt{P}y - S = 0 \quad \text{(I).}$$

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, façamos a seguinte substituição $x = y + t$ a fim de anular o termo quadrático. Portanto,

$$(y + t)^3 + a(y + t)^2 + b(y + t) + c = 0$$

$$y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 + ay^2 + 2aty + at^2 + by + bt + c = 0$$

$$y^3 + (3t + a)y^2 + (3t^2 + 2at + b)y + (t^3 + at^2 + bt + c) = 0$$

Como queremos eliminar o termo $y^2$, logo $3t + a = 0 \rightarrow t = -\frac{a}{3}$, fazendo com que a equação anterior se transforme em algo do tipo:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad \text{(II)}$$

Com

$$p = 3t^2 + 2at + b = 3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\left(-\frac{a}{3}\right) + b = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b = -\frac{a^2}{3} + b$$

e

$$q = t^3 + at^2 + bt + c = \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c$$
$$= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

Observe que existem fórmulas para $p$ e $q$ em função dos coeficientes da equação cúbica. Comparando os coeficientes de (I) e (II), temos

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad e \quad q = -S$$

donde podemos concluir que

$$P = -\frac{p^3}{27} \quad e \quad S = -q$$

que substituindo em $x^2 - Sx + P = 0$ nos dá:

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

daí

$$\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27}$$

e

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ou

$$x_2 = \frac{-q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

De $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ , segue que,

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$. Como 1, $w$ *e* $w^2$ são as raízes da unidade e sabendo que cada raiz pode assumir três valores complexos mas a equação $\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3}$ diz que o produto das raízes deve ser $-\frac{p}{3}$ .

$$y_2 = w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

onde

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, temos acima as três raízes, na fórmula de Cardano-Tartaglia, de $y^3 + py + q = 0$ que somadas a $t = -\frac{a}{3}$ nos dão as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. A solução acima é chamada de solução geral da equação do 3º grau.

Mais a frente será explicado o porquê de só essas combinações, usando 1, *w e w²,* serem válidas na solução geral.

### 5.2.2 Outro Método de Resolução

Considere a equação geral do 3º grau com coeficientes complexos $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. E fazendo

$$x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + bx + c = 0$$

Observe que as mudanças feitas foram multiplicar por $\frac{3}{3}$, somar e subtrair por $3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x$ e $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ que são operações neutras, mas que nos permitirá ter um novo olhar da equação.

$$x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + bx + c = 0$$

$$x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

Note que os quatro primeiros termos formam um cubo perfeito $x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3$. Logo, podemos escrever a equação anterior assim:

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

Vamos comparar a equação anterior com $\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(x + \frac{a}{3}\right)p + q = 0$

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(x + \frac{a}{3}\right)p + q = 0$$

Fazendo $y = x + \frac{a}{3} \to x = y - \frac{a}{3}$, obtemos:

$$(y)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(y - \frac{a}{3}\right) + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (y)^3 + (y)p + q = 0$$

$$y^3 + by - \frac{ab}{3} - \frac{a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + c - \frac{a^3}{27} = y^3 + py + q = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} = y^3 + py + q = 0$$

Podemos concluir que $p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right) e\ q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$, onde temos, novamente, as mesmas expressões para $p$ e $q$ em função dos coeficientes da equação do terceiro grau.

O problema agora é resolver a equação $y^3 + py + q = 0$ onde faremos uma mudança de variável $y = u + v$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

Desenvolvendo o produto notável e organizando a equação, temos:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

façamos

$$u^3 + v^3 = -q\ e\ 3uv = -p$$

$$u^3 + v^3 = -q\ e\ uv = -\frac{p}{3}$$

$$u^3 + v^3 = -q\ e\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Podemos, pensar em $u^3$ e $v^3$ como as raízes de uma equação do segundo grau, por exemplo, na variável $y$. Daí,

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

donde temos $\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27}$ como discriminante da equação em y e

$$y_1 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ou

$$y_2 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Ou seja, fazendo $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ que implica $u = \sqrt[3]{y_1}$ $e$ $v = \sqrt[3]{y_2}$ e como $y = u + v$, temos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Observando que $uv = -\frac{p}{3}$, temos que as outras duas raízes são:

$$y_1 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_2 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

onde $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz da unidade

E estas são as soluções gerais da cúbica: $y^3 + py + q = 0$, e para determinar a solução geral da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ basta fazer $x = y - \frac{a}{3}$, $x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$ e $x_2 = y_2 - \frac{a}{3}$

**Observação**: poderíamos ter usado o mesmo argumento que o autor da primeira solução usou de fazer $x = y + t$ com o intuito de eliminar o termo de grau 2, mas propositalmente foi usado multiplicar por $\frac{3}{3}$, somar e subtrair por $3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x$ e $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ que são operações neutras e nos dão uma nova visão para determinarmos a solução geral da equação cúbica.

### 5.2.3 Justificativa da Combinação Usando 1, w e w²

A solução geral é dada pela soma de dois radicais cúbicos. Portanto, temos nove combinações usando $1, w\ e\ w^2$ que são:

$$y_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_4 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_5 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_6 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_7 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_8 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Além das outras três. Só que estas seis últimas não satisfazem o produto $uv = -\frac{a}{3}$. Vejamos um exemplo:

$$(1\cdot u)\cdot(w\cdot v)=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\cdot\left(w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

$$=w\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\cdot\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$$

$$=w\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2}$$

$$=w\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=-w\frac{p}{3}\neq-\frac{p}{3}.$$

O leitor fica convidado a testar os demais oito casos. Mas esta justificativa vale para $p\neq 0$.

Outra justificativa seria:

Sabemos que

$$\begin{cases} u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow w^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

e que $u+v, wu+w^2v \; e \; w^2u+wv$ são as raízes da equação cúbica $y^3+py+q=0$, logo a equação abaixo deve gerar esta equação.

$$[y-(u+v)]\cdot\underbrace{[y-(wu+w^2v)]\cdot[y-(w^2u+wv)]}=0$$

$$[y-(u+v)]\cdot\{y^2-[u(w+w^2)+v(w^2+w)]y+(wu+w^2v)\cdot(w^2u+wv)\}=0$$

$$[y-(u+v)]\cdot\{y^2+(u+v)y+w^3(u^2+v^2)-uv\}$$

$$y^3 + [w^3(u^2+v^2) - uv - (u+v)^2]y - (u+v)[w^3(u^2+v^2) - uv] = 0$$

Basta verificar que

$$[w^3(u^2+v^2) - uv - (u+v)^2] = w^3(u^2+v^2) - u^2 - v^2 - 3uv$$
$$= (u^2+v^2)(w^3-1) - 3uv = p$$

onde $(w^3 - 1) = 0$ e $uv = -p/3$.

$$-(u+v)[w^3(u^2+v^2) - uv] = -(u+v)(u^2+v^2)w^3 + (u+v)uv$$
$$= -w^3(u^3+v^3+uv^2+u^2v) + uv^2 + u^2v$$
$$= -w^3(u^3+v^3) - uv^2(w^3-1) - u^2v(w^3-1) = -w^3(u^3+v^3)$$
$$= -(-q) = q$$

Onde $w^3 = 1 \; e \; u^3 + v^3 = -q$. Portanto fica verificado que de fato as únicas raízes são: $u + v, wu + w^2v \; e \; w^2u + wv$.

Observe que é possível desenvolver a discussão das soluções da equação cúbica a partir do discriminante $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Que quando maior que zero temos que $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \in R$. Mas que não garante que as três raízes da equação sejam reais.

### 5.2.4 Aplicações e Discussões de Problemas

Note que podemos criar uma equação do terceiro grau na variável $x$, por exemplo, e aplicarmos os métodos de resolução vistos anteriormente ou, até mesmo as fórmulas diretamente. Vamos considerar a seguinte equação:

**Exemplo 1**: $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

Onde claramente $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ são as raízes da equação. Portanto, vamos desenvolver o produto no primeiro membro da equação e resolvê-la pelos métodos vistos anteriormente.

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

$$(x^2-3x+2)(x-3)=0$$

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Usando a primeira solução temos: $a=-6, b=11, c=-6$. Temos $p=-\frac{a^2}{3}+b$ e $q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$, tais que $y^3+py+q=0$. Assim:

$$p=-\frac{(-6)^2}{3}+11=-1$$

$$q=\frac{2(-6)^3}{27}-\frac{(-6)11}{3}+(-6)=0$$

temos então:

$$y^3-y=0$$

Note que $y=0, y=1$ e $y=-1$ são raízes da equação acima.

Usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

$$y_1=\sqrt[3]{\frac{-0}{2}+\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-0}{2}-\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{\frac{-1}{27}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}-\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}=0$$

ou

$$y_2=w\sqrt[3]{\frac{-0}{2}+\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-0}{2}-\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}=$$

$$w \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} - w^2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} = w \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} =$$

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = 2 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right)$$

ou

$$y_3 = w^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} = \left(\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}$$

$$= -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right)$$

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, são: $x_1 = 2, x_2 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2$ e $x_3 = -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2$, onde de $-\frac{a}{3} = -\frac{(-6)}{3} = 2$. Nossa! essas raízes são feias. Concordo, plenamente. E visualmente nada têm a ver, aparentemente, com as raízes 1, 2, e 3 que sabemos satisfazer a equação.

Cabe a pergunta: “Números inteiros podem ser escritos com expressões envolvendo radicais e números complexos?” A resposta é sim, podem. Assim como números inteiros podem ser escritos como números racionais.

Observe que de $y_2 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = 1$ e $y_3 = -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = -1$, pois sabemos que $1$ e $-1$ são raízes da equação $y^3 - y = 0$. Sendo assim $\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = \frac{1}{i\sqrt{3}}$ e daí temos: $x_2 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$ e $x_3 = -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$. Mas é estranho que $i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = 3$ e $-i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = 1$, não acha?

Usando o segundo método

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$x^3 - 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 4x - 8 - 3 \cdot 4x + 8 + 11x - 6 = 0$$

$$(x-2)^3 - 3 \cdot 4x + 8 + 11x - 6 = 0$$

$$(x-2)^3 - x + 2 = 0$$

$$(x-2)^3 - (x-2) = 0$$

Fazendo uma mudança de variável $y = x - 2 \rightarrow x = y + 2$, temos:

$$y^3 - y = 0$$

Note que as raízes desta equação são –1, 0 e 1, porém se resolvermos a equação pela fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

como $p = -1$ e $q = 0$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} = 0$$

ou

$$y_1 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}$$

ou

$$y_2 = w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}$$

Portanto, as soluções de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, são:

$$x = 2$$

ou

$$x_1 = w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} + 2$$

ou

$$x_2 = w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} + 2$$

Observe que o discriminante é – 1/27, menor que zero. E, no entanto, as raízes da equação sabemos que são reais e inteiras. Será que sempre que o discriminante for negativo as raízes são todas reais?

**Exemplo 2**: Vamos resolver a equação $2x^3 - 6x + i - 3 = 0$ de coeficientes complexos.

$$2x^3 - 6x + i - 3 = 0 \leftrightarrow x^3 - 3x + \frac{i-3}{2} = 0$$

$$p = -3, q = \frac{i-3}{2}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} + \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} - \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$x_2 = w\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} + \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} - \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$x_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} + \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} - \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

**Exemplo 3**: Mostrar que $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 2$

$$\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^3 = 2^3$$

$$7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50}+3\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)=8$$

Supondo que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$ seja verdade. Temos:

$$2\cdot 7+3\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\cdot 2=8$$

$$7+3\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})\cdot(7-\sqrt{50})}=4$$

$$7+3\sqrt[3]{49-50}=7-3=4$$

Portanto, está mostrado que

$$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$$

Mas vamos tentar resolver este problema usando equações de grau 3, ou pelo menos a ideia do formato da sua fórmula geral resolutiva.

Supondo que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=x$. Como conhecemos o formato da fórmula resolutiva e vemos que o número $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$ tem grande semelhança com o formato da fórmula de Cardano-Tartaglia, então fazemos:

$$\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^3 = x^3$$

$$7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50}+3\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)=x^3$$

Por hipótese, temos:

$$14 - 3x = x^3 \rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0$$

E observe que 2 satisfaz a equação $x^3 + 3x - 14 = 0$ e $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0$ e como $(x^2 + 2x + 7) = 0$ não tem solução real já que $\Delta < 0$, verifique!, logo $x = 2$ é a única solução racional inteira. Provando assim que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 2$, como queríamos demonstrar.

Observe que não seria um processo tão natural fazer $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = x$ e transformar isso em uma equação cúbica e fazer uma verificação das raízes da equação se a pessoa que estiver resolvendo a questão não conhecer o formato de uma equação do terceiro grau.

**Exemplo 4**: Vamos resolver a equação $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Pelo método de Carlos Gustavo temos a = b = c = 1. E sabemos que $p = -\frac{a^2}{3} + b$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ tais que $y^3 + py + q = 0$, logo:

$$p = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\ , q = \frac{2}{27} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{20}{27}\ e\ y^3 + \frac{2}{3}y + \frac{20}{27} = 0$$

Usando as fórmulas de Cardano-Tartaglia temos:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{3}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{3}}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^3}{27}}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{20^3}{27^4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{20^3}{27^4}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{20^3}{3^{12}}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{20^3}{3^{12}}}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{3^{10} + 20^3}{3^{12}}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{3^{10} + 20^3}{3^{12}}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{59049 + 8000}}{3^6}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{59049 + 8000}}{3^6}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{67049}}{3^6}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{67049}}{3^6}} = \sqrt[3]{\frac{-3^5 + \sqrt{67049}}{3^6}} + \sqrt[3]{\frac{-3^5 - \sqrt{67049}}{3^6}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-243 + \sqrt{67049}}{729}} + \sqrt[3]{\frac{-243 - \sqrt{67049}}{729}}$$

ou

$$y_2 = w\sqrt[3]{\frac{-243 + \sqrt{67049}}{729}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-243 - \sqrt{67049}}{729}}$$

ou

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{\frac{-243 + \sqrt{67049}}{729}} + w\sqrt[3]{\frac{-243 - \sqrt{67049}}{729}}$$

Logo, as raízes de $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, são:

$$x_1 = -\frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{-243 + \sqrt{67049}}{729}} + \sqrt[3]{\frac{-243 - \sqrt{67049}}{729}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} + w\sqrt[3]{\frac{-243 + \sqrt{67049}}{729}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-243 - \sqrt{67049}}{729}}$$

$$x_3 = -\frac{1}{3} + w^2\sqrt[3]{\frac{-243 + \sqrt{67049}}{729}} + w\sqrt[3]{\frac{-243 - \sqrt{67049}}{729}}$$

Mas note que, por inspeção, -1 é raiz da equação $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ e, portanto, uma das raízes anteriores é equivalente a -1. Observe também que

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \; ou \; x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Portanto, as raízes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ podem ser escritas como: -1, + i e – i. E observe que o discriminante é menor que zero.

Observe que o discriminante $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^3}{27} > 0$ e há duas raízes complexas e uma real. Será que sempre que isso ocorre às raízes tem esse padrão? Para responder a essa questão recomendamos trabalho de conclusão de curso em nossa referência.

### 5.3 Métodos de Resolução de Equações do Quarto Grau

Vamos começar desenvolvendo o produto do primeiro membro da equação $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ que deixa claro que suas raízes são $x_1$, $x_2$ e $x_3$. Ao resolvermos temos:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \qquad (*)$$

Chamando $S = x_1 + x_2 + x_3$, $S_d = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3$ e $P = x_1x_2x_3$. Podemos reescrever a equação anterior na forma:

$$x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0 \qquad (**)$$

#### 5.3.1 Solução Apresentada por Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, que elevando ao quadrado fica:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2\left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}\right)$$

$$\frac{y^2 - S}{2} = \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}\right)^2$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 2\left(\sqrt{x_1x_1x_2x_3} + \sqrt{x_2x_1x_2x_3} + \sqrt{x_3x_1x_2x_3}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 2\left(\sqrt{x_1}\sqrt{x_1x_2x_3} + \sqrt{x_2}\sqrt{x_1x_2x_3} + \sqrt{x_3}\sqrt{x_1x_2x_3}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y$$

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0$$

Considerando a equação geral $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. E fazendo uma substituição $x = y + t$, a fim de eliminar o termo de grau 3, temos:

$$(y + t)^4 + a(y + t)^3 + b(y + t)^2 + c(y + t) + d = 0$$

$y^4 + (4t + a)y^3 + (6t^2 + 3ta + b)y^2 + (4t^3 + 3at^2 + 2bt + c)y + (t^4 + bt^2 + at^3 + ct + d) = 0$ *(***)*

E para que possamos eliminar o termo de grau 3 nesta última equação ,fazemos $4t + a = 0 \rightarrow t = -\frac{a}{4}$ e substituímos na equação anterior. Dai, obtemos uma equação da forma:

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$$

Observação: $k_1$, $k_2$ e $k_3$ são diferentes de zero e, portanto, não anulam mais nenhum termo da equação (***) com a substituição.

Comparando as equações $y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4c = 0$ e $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$, temos:

$$k_1 = -2S, \qquad k_2 = -8\sqrt{P}, \qquad k_3 = S^2 - 4S_d$$

$$S = -\frac{k_1}{2}, \qquad P = \left(\frac{k_2}{8}\right)^2, \qquad S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{k_1{}^2 - 4k_3}{16}$$

Portanto, resolvendo a equação:

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \left(\frac{k_1{}^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2^2}{8}\right)^2 = 0$$

Teremos as raizes $x_1,\ x_{2,}\ e\ x_3$ tais que $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$ satisfaz $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

E para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ basta diminuir $\frac{a}{4}$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma obtemos todas as quatro raízes da equação original.

### 5.3.2 Solução de Ferrari

Considere a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ com coeficientes complexos e façamos uma divisão por $a$, a ambos os membros da equação e em seguida completemos quadrados convenientemente.

$$x^4 + \left(\frac{b}{a}\right)x^3 + \left(\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{d}{a}\right)x + \frac{e}{a} = 0$$

$$x^4 + \left(\frac{b}{a}\right)x^3 = -\left[\left(\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{d}{a}\right)x + \frac{e}{a}\right]$$

$$x^4 + \left(\frac{b}{a}\right)x^3 + \left(\frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}x\right)^2 - \left[\left(\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{d}{a}\right)x + \frac{e}{a}\right]$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \left(\frac{d}{a}\right)x - \frac{e}{a} = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)x^2 - \left(\frac{d}{a}\right)x - \frac{e}{a}$$

Observando a última equação vemos que seria interessante que no segundo membro aparecesse uma expressão quadrado perfeito, pois o problema se resumiria a resolver uma equação do segundo grau. Bem, como não aparece, podemos manipular algebricamente para que ocorra. E para isso basta somar $y$ a $x^2+\frac{b}{2a}x$ e desenvolver as contas que aparecerá o termo que somaremos ao segundo membro da última equação acima. Portanto, temos:

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+y\right)^2=\left(x^2+\frac{b}{2a}x\right)^2+2\left(x^2+\frac{b}{2a}x\right)y+y^2$$

Agora, vamos somar a expressão $2yx^2+\frac{b}{a}xy+y^2$ a ambos os membros da equação $\left(x^2+\frac{b}{2a}x\right)^2=\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)x^2-\left(\frac{d}{a}\right)x-\frac{e}{a}$ e agrupar os termos semelhantes para obter:

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+y\right)^2=\left[\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)+2y\right]x^2+\left(\frac{b-d}{a}y\right)x+\left(y^2-\frac{e}{a}\right)$$

Observe que o segundo membro da última equação igualado a zero é uma equação do segundo grau em x. Se quisermos que a expressão seja quadrado perfeito basta fazer $\Delta=0$. Portanto tomemos a equação:

$$\left[\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)+2y\right]x^2+\left(\frac{b-d}{a}y\right)x+\left(y^2-\frac{e}{a}\right)=0$$

$$\Delta=\left(\frac{b-d}{a}y\right)^2-4\left[\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)+2y\right]\left(y^2-\frac{e}{a}\right)=0$$

$$\left(\frac{b-d}{a}\right)^2y^2-\left[\left(\frac{b^2-4ac}{a^2}\right)+8y\right]\left(y^2-\frac{e}{a}\right)=0$$

$$\left(\frac{b-d}{a}\right)^2y^2-\left(\frac{b^2-4ac}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{b^2-4ac}{a^2}\right)\frac{e}{a}+8y^3-8\frac{e}{a}y=0$$

$$8y^3+\left[\left(\frac{b-d}{a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{a^2}\right)\right]y^2-8\frac{e}{a}y+\left(\frac{b^2-4ac}{a^2}\right)\frac{e}{a}=0$$

Note que esta última é uma equação cúbica completa cujas raízes já sabemos determinar. Portanto as raízes da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ são dadas pela solução da equação a seguir onde $y_1$ é uma das três soluções da cúbica acima.

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + y_1\right)^2 = \left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) + 2y_1\right]x^2 + \left(\frac{b-d}{a}y_1\right)x + \left({y_1}^2 - \frac{e}{a}\right)$$

Pois este segundo membro terá a seguinte forma: $(\alpha + \beta)^2$, logo, teremos:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + y_1\right)^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + y_1 = \pm(\alpha + \beta)$$

E da última equação saem as raízes da equação geral do 4º grau.

### 5.3.3 Exemplos Resolvidos

**Exemplo 1**: Vamos resolver a equação $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

(a) Solução baseada no método de Ferrari

$$x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 25x^2 - 35x^2 + 50x - 24 = -10x^2 + 50x - 24$$

$$(x^2 - 5x)^2 = -10x^2 + 50x - 24$$

Note que a expressão $-10x^2 + 50x - 24$ não é um quadrado perfeito. Portanto, precisaremos descobrir que expressão somar a ambos os membros da equação anterior para que se mantenha quadrado perfeito no primeiro membro e consigamos algo no segundo membro que possa ser transformado num quadrado perfeito, assim temos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 5x + y)^2 &= (x^2 - 5x)^2 + 2y(x^2 - 5x) + y^2 \\ &= 2y(x^2 - 5x) + y^2 - 10x^2 + 50x - 24\end{aligned}$$

$$(x^2 - 5x + y)^2 = (2y - 10)x^2 + (50 - 10y)x + (y^2 - 24)$$

Vamos trabalhar a expressão do segundo membro da expressão para que ela seja um quadrado perfeito. Portanto façamos:

$$(2y-10)x^2+(50-10y)x+(y^2-24)=0$$

E para que a equação do segundo grau anterior tenha duas raízes reais e iguais devemos ter $\Delta = 0$. Logo,

$$(50-10y)^2-4(2y-10)(y^2-24)=0$$

reduzindo temos

$$2y^3-35y^2+202y-385=0$$

Observe que $y=5$ satisfaz a equação logo anterior. E substituindo em

$$(x^2-5x+y)^2=(2y-10)x^2+(50-10y)x+(y^2-24)$$

temos

$$(x^2-5x+5)^2=1$$

Ou seja, ambos os membros da equação são quadrado perfeito. Logo,

$$x^2-5x+5=1 \leftrightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x=4 \; ou \; x=1$$

ou

$$x^2-5x+5=-1 \leftrightarrow x^2-5x+6=0 \rightarrow x=3 \; ou \; x=2$$

Portanto, as raízes pertencem ao conjunto solução $\{1,2,3,4\}$

*(b) Solução baseada no método de Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira*

Na equação $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$, façamos uma mudança de variável $x=y+t \leftrightarrow y=x-t$

$$(y+t)^4-10(y+t)^3+35(y+t)^2-50(y+t)+24=0$$

Desenvolvendo, temos:

$$y^4 + (4t - 10)y^3 + (6t^2 - 30t + 35)y^2 + (4t^3 - 30t^2 + 70t - 50)y$$
$$+ (t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) = 0$$

Para eliminarmos o termo de grau 3, basta fazer $t = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. E a equação se transforma

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} = 0 \to y = \pm\frac{1}{2}\ ou\ y = \pm\frac{3}{2}$$

Dai, $x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1, ou\ x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2, ou\ x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3, ou\ x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

**Exemplo 2**: Vamos determinar as raies da equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Façamos:

$$x^4 + x^3 = -x^2 - x - 1$$

$$x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - x^2 - x - 1$$

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{-3x^2 - 4x - 4}{4} \to (2x^2 + x)^2 = -3x^2 - 4x - 4$$

Para que ambos os membros sejam quadrados perfeitos, podemos fazer:

$$(2x^2 + x + y)^2 = (2x^2 + x)^2 + 2(2x^2 + x)y + y^2$$

Portanto, somando $2(2x^2 + x)y + y^2$ a ambos os membros de $(2x^2 + x)^2 = -3x^2 - 4x - 4$, temos:

$$(2x^2 + x + y)^2 = 2(2x^2 + x)y + y^2 - 3x^2 - 4x - 4$$
$$= (4y - 3)x^2 + (2y - 4)x + (y^2 - 4)$$

$$(2x^2 + x + y)^2 = (4y - 3)x^2 + (2y - 4)x + (y^2 - 4)$$

Observe que para o segundo membro da equação anterior seja quadrado perfeito devemos ter:

$$(2y-4)^2-4(4y-3)(y^2-4)=0$$

Note que $y=2$ satisfaz a equação anterior. Logo,

$$(2x^2+x+2)^2=(4\cdot 2-3)x^2+(2\cdot 2-4)x+(2^2-4)$$

$$(2x^2+x+2)^2=5x^2=(\sqrt{5}x)^2$$

$$2x^2+x+2=\pm\sqrt{5}x \rightarrow 2x^2+x+2=\sqrt{5}x \ ou \ 2x^2+x+2=-\sqrt{5}x$$

$$2x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x+2=0 \rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \ ou \ x$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

ou

$$2x^2+\left(1+\sqrt{5}\right)x+2=0 \rightarrow x=\frac{-(1+\sqrt{5})+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \ ou \ x$$
$$=\frac{-(1+\sqrt{5})-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Portanto, temos quatro raízes complexas para a equação.

## 6. PESQUISA DE CAMPO

Aos vinte e dois dias do mês de junho de 2015 foram apresentados, em forma de seminário, os métodos de resolução de equações cúbicas e a demonstração da fórmula de Cardano-Tartaglia para uma turma de Ensino Médio do Colégio Estadual Santa Rita de Cássia em Nova Iguaçu, Rio de Janeiro. A pesquisa foi realizada com 28 alunos do primeiro ano e teve duração de quatro tempos de cinquenta minutos onde dois deles foram usados para que os alunos testassem a aplicação dos métodos e fórmula de Cardano-Tartaglia. A pesquisa se deu através de pontos da apresentação relacionados à demonstração geral dos métodos e fórmula de Cardano-Tartaglia e a aplicação de métodos e fórmulas onde, em caso afirmativo de dúvidas, os alunos redigiam um breve texto apontando em quais passos essas dúvidas apareciam.

Durante a apresentação dos métodos, os alunos relataram dificuldades em relação ao algebrismo usado como: produtos notáveis, fatoração e completar quadrados ou cubos, mesmo assim conseguiram compreender os passos com aberturas de parênteses que os explicavam. Porém, tiveram menos dificuldades de entender os passos em que os resultados dependiam da resolução de uma equação do segundo grau. Apesar das dificuldades a turma se mostrou satisfeita com a explicação e entusiasmada a por em prática o conteúdo apresentado. Outra grande dificuldade destacada pela turma foi na compreensão de mudanças de variáveis como, por exemplo: $x = y + t$. Precisamos mostrar o significado dessa mudança argumentando a respeito de trasladação no gráfico de uma função polinomial do terceiro grau e usamos o GeoGebra como auxilio.

Quanto à aplicação dos métodos para determinar o conjunto solução das equações cúbicas sugeridas, as dificuldade foram:

1. A falta de atenção com as contas e na determinação de radicais;
2. A ideia de eliminar o termo de grau dois na equação completa do terceiro grau através da mudança de variável $x = y + t$, daí as

dificuldades em desenvolver cubos e quadrados de binômios e a identificação e agrupamento de termos semelhantes;

3. A interpretação das raízes reais na forma de números, aparentemente, complexos.

Apesar das dificuldades assinaladas, a maioria dos alunos, com orientação, conseguiu usar as fórmulas e métodos de resolução determinando, com sucesso, as raízes das equações sugeridas tanto no contexto números reais quanto no contexto dos números complexos. Embora nenhum dos dois métodos tenha sido aceito com muita naturalidade pela turma, o método que eles tiveram mais dificuldade para entender foi o método desenvolvido por Carlos Gustavo.

Na exibição dos métodos de resolução de equações do quarto grau, método de Ferrari e de Carlos Gustavo, houve menos dificuldades entre os alunos. As dificuldades apontadas foram relacionadas ao método de completar quadrados, que foi uma das dificuldades destacadas no desenvolvimento dos métodos de resolução de equações cúbicas, só que de um número menor de alunos talvez pelo fato de já terem usado tal artifício algébrico na resolução de equações cúbicas. Conseguiram realizar as atividades que consistiam em resolver algumas equações do quarto grau pelo método de Ferrari e pelo método de Carlos Gustavo demonstrando que os métodos foram satisfatoriamente compreendidos. Curiosamente, os dois métodos de resolução de equações quárticas foram quase que igualmente aceitos pelos alunos o que não ocorreu na resolução de equação cúbica. E utilizamos quatro tempos de aulas de cinquenta minutos para a apresentação dos métodos de resolução de equações de grau quatro.

## 6.1 Conclusão da Pesquisa de Campo

No nono ano do Ensino Fundamental os alunos são apresentados às equações do segundo grau no contexto de números reais. A pesquisa foi realizada com alunos que acabaram de sair do nono ano e não têm ainda o conhecimento de números complexos, mas tem no currículo do primeiro período do primeiro ano do Ensino Médio o estudo dos conjuntos numéricos que pode ser estendido ao conjunto dos números complexos. Portanto, acreditamos que seja pertinente que resoluções de equações cúbicas e quárticas sejam implementadas ainda no nono ano, no contexto dos números reais, motivando, porém, o estudo dos números complexos.

Acreditamos, também, que a implementação de resolução de equações de grau três e quatro, ainda no ensino fundamental, especificamente, no nono ano, fará com que os professores tenham motivação para trabalhar as fatorações e produtos notáveis com mais abrangência e com promessa de aplicação futura dentro do próprio universo matemático. Pois as dificuldades de se manipular algebricamente expressões algébricas estejam atreladas ao desuso aplicativo das fatorações e dos produtos notáveis dentro da matemática fazendo com que tal algebrismo seja encarado como algo de pouca ou nenhuma utilidade. E isso pode estar desmotivando o aprendizado de tais conteúdos.

## 6.2 Sugestão de Plano de Aula para Professores[10]

Segue abaixo uma humilde contribuição de um plano de aula para professores que desejam implementar os métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas e a relação das mesmas com os números complexos.

| **Número de aulas:** 6 aulas | **Carga horária:** 6 tempos de 50 minutos |
|---|---|
| **Tema central:** desenvolvimento dos métodos de resolução de equações do terceiro e do quarto grau com a dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia. | |

[10] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis

**Objetivos:**

- ✓ Compreender o desenvolvimento dos produtos notáveis até o cubo da soma e da diferença de dois termos assim como o completar expressões para que se tornem quadrados perfeitos e cubos perfeitos;
- ✓ Desenvolver a habilidade de fatorar, principalmente os casos de maior necessidade para o desenvolvimento dos métodos de resolução das equações em estudo;
- ✓ Compreensão e desenvolvimento de equações do segundo grau, por fórmula de resolução geral e completando quadrados;
- ✓ Compreender números complexos no caso de alunos do primeiro e do terceiro ano do ensino médio;
- ✓ Desenvolver os métodos de resolução de equações do terceiro grau e dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia assim como seu uso prático;
- ✓ Compreender os métodos de resolução de equações do quarto grau pelos métodos de Ferrari e de Carlos Gustavo, assim como sua aplicação prática na resolução de equações quárticas.

**Conteúdos a serem trabalhados:** produtos notáveis, fatoração de expressões algébricas, equações do segundo grau, números complexos e métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas.

**Procedimentos:**

1. Realizar um sólido resgate dos produtos notáveis, principalmente, quadrado e cubo da soma e da diferença de dois termos, fatoração de expressões algébricas ressaltando o completamento de quadrados;
2. Apresentar a solução de equações quadráticas completando quadrados e por mudança de variável, com intuito de obter uma fórmula resolutiva assim como na prática direta dos exercícios e discussão sobre o número de raízes;
3. Introduzir os números complexos;
4. Demonstrar a fórmula de Cardano-Tartaglia usando os recursos anteriores

pelos dois, ou mais métodos que se utilizam discutindo com os alunos o número de soluções reais e fazendo comparações de números reais com números complexos;

5. Apresentar de forma geral a solução da equação quártica pelo método de Ferrari e de Carlos Gustavo.

**Estratégias/Recursos:**

- ✓ Exposição de conteúdos, levatamento do conhecimento prévio dos alunos, discussão socializada, problematizada e sistematizada do tema;
- ✓ Textos, quadro, pilot e data show.

**Avaliação:**

- ✓ Observar e analisar o posicionamento crítico dos alunos, assim como o grau de interesse dos mesmos sobre o assunto, durante a exposição do conteúdo;
- ✓ A prática dos alunos deve ter pontuação proporcional ao número de equações resolvidas e ao esforço empregado na tentativa de resolvê-las.

**Referências:**


- ✓ ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ A. HEFEZ e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; E. WAGNER e A. C. MORGADO. A Matemática do Ensino Médio V.3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.6 Polinômios.

Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

- ✓ A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A.
- ✓ IEZZI. G. Fundamentos de Matemática Elementar V.6. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Editora Atual;
- ✓ A. GARCIA e Y. Lequain. Elementos de Álgebra. Coleção Projeto Euclides. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. Coleção Iniciação científica. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática.

### 6.3 Sugestão de Plano de Estudo[11]

Achamos pertinente tentar orientar o estudo dos métodos de resolução de equações de graus 2, 3 e 4, para leitores que desejam expandir seus conhecimentos sobre resolução dessas equações. Assim como a relação dessas com números complexos.

Quadro Resumo

| CONEÚDO | ORIENTAÇÃO | OBJETIVOS | REFERÊNCIAS |
|---|---|---|---|
| Produtos notáveis | Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos. | Familiarização com os produtos notáveis; Criando quadrados e cubos perfeitos através do completamento de quadrados | NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;<br>A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A. |
| Fatoração de expressões algébricas | Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura | O leitor deve estar com uma visão ampliada sobre as fatorações de expressões algébricas | NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;<br>A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. |

[11] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis

| | | | |
|---|---|---|---|
| | completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos. | | Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A. |
| Equação do segundo grau | Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos. | Resolver equações do segundo grau por completamento de quadrados e pela fórmula para resolução da equação de 2º grau;<br>Saber discutir sobre o número de soluções reais | A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A.<br>ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática.<br>NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática; |
| Números complexos | Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do | Conhecer o conjunto dos números complexos assim como sua estrutura algébrica;<br>Comparar números | IEZZI. G. Fundamentos de Matemática Elementar V.6. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Editora Atual;<br>NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.6 Polinômios. Coleção Professor de Matemática. Sociedade |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos. | complexos com números reais | Brasileira de Matemática;<br>LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; E. WAGNER e A. C. MORGADO. A Matemática do Ensino Médio V.3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;<br>Hefez e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática; |
| Resolução de equações cúbicas | Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos. | Obter a fórmula de Cardano-Tartaglia através dos métodos apresentados;<br>Aplicar os métodos ao resolver equações de terceiro grau;<br>Interpretar resultados reais na forma de números complexos. | Hefez e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;<br>ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática. |
| Resolução de | Buscar o conteúdo no | Compreender a resolução da | Hefez e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações |

| | | | |
|---|---|---|---|
| equações quárticas | índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos. | equação quártica em sua forma geral através dos métodos apresentados; Aplicar os métodos na resolução de equações dadas. | Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática; ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática. |

# 7. BREVE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS[12]

O Plano Nacional do Livro Didático é um programa que tem por objetivo prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários. Um edital especifica todos os critérios para inscrição das obras. Os títulos inscritos pelas editoras são avaliados pelo MEC, que elabora o Guia do Livro Didático, composto das resenhas de cada obra aprovada, que é disponibilizado às escolas participantes pelo FNDE.

Cada escola escolhe democraticamente, dentre os livros constantes no referido Guia, aqueles que deseja utilizar, levando em consideração seu planejamento pedagógico.

A seguir, uma breve análise das coleções de livros didáticos de matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2015, no que diz respeito ao estudo das equações cúbicas e quárticas.

## 7.1 Matemática: Contexto e Aplicações

A obra Matemática: contexto e aplicações é do autor Luiz Roberto Dante, ex-professor da rede estadual de São Paulo, Mestre em matemática pela USP, Doutor em Ensino da Matemática pela PUC de São Paulo e pesquisador da Unesp. Foi analisada uma coleção dividida em três volumes publicada pela Editora Ática.

[12] Escrito com a colaboração de Marcelo de Almeida Curtis


Figura 7: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações

No sexto capítulo do terceiro volume dessa coleção, Dante aborda as equações cúbicas e quárticas como tema introdutório ao estudo dos números complexos. Dedica a esse estudo, nas páginas 136 e 137, as linhas que seguem:

*"Os números complexos aparecem só no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano publicou seu famoso livro Ars Magna, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo* $x^3 + ax + b = 0$. *O problema 'Qual é a medida* ***x****, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?' corresponderia à equação* $x^3 - 15x = 4$, *e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão* $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. *Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se essas ainda não existiam. (...)"*

Complementa mencionando as contribuições de Bombelli, Euler e Gauss na construção do conjunto dos números complexos e com a atividade:

*"1. Em Ars Magna, Cardano apresenta uma das raízes da equação de 3º grau* $x^3 + ax + b = 0$ *dada por*

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}$$

*Essa fórmula foi sugerida a ele por Tartaglia, outro famoso matemático italiano dessa época.*

*a) Mostre como Cardano se deparou com o número $\sqrt{-121}$ ao tentar encontrar as raízes da equação que resolvia o problema do cubo e do paralelepípedo mencionado.*

*b) Verifique que 4 é raiz da equação."*

Nota-se, claramente, que a fórmula resolutória da equação cúbica foi apresentada neste capítulo como problema introdutório ao estudo dos números complexos sem, contudo, ater-se à sua demonstração ou a resolução de equações do terceiro grau.

Ao final desse capítulo no texto "Um pouco de história", página 171, o autor narra, resumidamente, os eventos que protagonizados por Cardano, Tartaglia e Bombelli, no que diz respeito à resolução das equações cúbicas e quárticas e a criação dos números complexos.

No capítulo sete, que trata do estudo dos polinômios, subcapítulo onze, páginas 189 e 190, o autor enuncia as Relações de Girard para as equações de grau 2, 3 e n, seguido de três exemplos resolvidos e nove exercícios propostos.

Ainda no capítulo sete, o autor cita a seguinte propriedade:

*"Se o número racional $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

*então p é divisor de $a_0$ e **q** é divisor de $a_n$."*

Que utiliza a fim de resolver equações cúbicas e quárticas através da pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros e divisão de polinômios.

No final desse capítulo, à página 201, o texto "A história das equações algébricas" conta como Scipione del Ferro estudou as cúbicas ainda antes de Tartaglia, a polêmica envolvendo Cardano, Tartaglia e a resolução das cúbicas publicada na *Ars Magna,* Ferrari e a resolução das equações quárticas e a impossibilidade da resolução das quínticas por radicais conforme seria incontestavelmente provado por Galois[1] na teoria que leva o seu nome.

## 7.2 Matemática: Ciência e Aplicações

Trata-se de uma coleção dividida em três volumes da Editora Saraiva de São Paulo, dos autores Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.

Figura 8: Coleção Matemática: Ciência e Aplicações

No quinto capítulo do terceiro volume dessa coleção, que trata dos números complexos, às páginas 122 e 123, o autor introduz com o texto "Um pouco de História" onde menciona um problema proposto por Cardano já abordado nesse estudo que seria "Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo comprimento seja 40" e afirma que Bombelli aplicara a fórmula de Cardano para resolver a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, obtendo uma solução $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. A fórmula mencionada não foi apresentada e nada mais foi dito acerca das equações cúbicas ou quárticas neste capítulo.

Mais a frente, no capítulo 7, Equações algébricas ou polinomiais, páginas 188 189, o autor fala das relações de Girard entre coeficientes e raízes:

"*Equação de 3º grau*

*Sejam $r_1$, $r_2$ e $r_3$as raízes da equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com $a \neq 0$. Temos:*

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

*Dividindo os dois membros por a $(a \neq 0)$, vem:*

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

*Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, vem:*

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)x+r_1r_2r_3$$

*Da igualdade dos polinômios, segue que:*

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

A seguir, o autor aplica as relações enunciadas em um exemplo e logo depois, de forma análoga a que foi feito nas equações de terceiro grau, deduz as Relações de Girard para as equações de quarto grau.

"*Equação de 4º grau*

*Sejam $r_1$, $r_2$, $r_3$ $e$ $r_4$ as raízes da equação $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ $(a \neq 0)$.*

*(...)*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\dfrac{d}{a} \\ r_1r_2r_3r_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Resolve outro exemplo e, por fim, generaliza:

*"Equação de grau n*

*Seja a equação* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, com* $a_n \neq 0$*, e* $r_1, r_2, \ldots, r_3$ *suas raízes Por meio de raciocínio análogo aos anteriores, vem:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_nr_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1r_2 \ldots r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

No Capítulo 7, página 180, o texto "A Resolução de equações" traz um resumo da história da resolução de equações algébricas desde Al-Khowarizmi até Galois.

### 7.3 Matemática: Ensino Médio

Esta também é uma coleção da Editora Saraiva, dividida em três volumes, das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, ambas doutoras pela USP e coordenadoras do projeto Mathema, grupo de formação e pesquisa na área de matemática.

Figura 9: Coleção Matemática Ensino Médio

No capítulo 10, página 224, as autoras iniciam o estudo dos números complexos com a seguinte equação

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

E a seguir afirmam que aplicando a fórmula para resolução da equação de 2º grau chegaremos ao seguinte resultado

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Concluindo que embora esse resultado não seja útil no campo dos números reais é possível dar continuidade a resolução com o auxílio dos números complexos.

A seguir, no texto *Um pouco de História* narram o seguinte:

"*Por volta da primeira metade do século XVI, alguns matemáticos italianos (Tartaglia e Cardano) descobriram um modo para resolver equações do tipo* $x^3 + ax + b = 0$.

*Em sua obra Ars Magna, Jerônimo Cardano (1501-1576) apresentou pela primeira vez a fórmula:*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

*Como solução de uma equação do tipo* $x^3 + ax + b = 0$*, onde* $a > 0$ *e* $b > 0$*."*

E complementa dizendo que embora tal fórmula só se aplicasse a equações com discriminante positivo, Bombelli chegou a um impasse ao verificar que a equação $\mathrm{x}^3 - 15\mathrm{x} = 4$, cuja solução leva a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

possuía uma raiz conhecida, $\mathrm{x} = 4$, o que pode ser facilmente verificado. Daí, a necessidade da invenção dos números complexos.

Embora a resolução de equações cúbicas tenha sido o tema gerador para o estudo dos números complexos nenhum dos exercícios resolvidos ou propostos retoma o assunto.

No capítulo seguinte, subcapítulo 5, página 255, as autoras enunciam as relações de Girard para as equações de grau 2, 3 e 4 e também tratam a resolução de equações por meio de pesquisa de raízes racionais com exercícios resolvidos e propostos envolvendo equações cúbicas e quárticas. Abaixo, um dos exemplos resolvidos, da página 261:

*"ER11. Resolva.*

$$4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 15x + 9 = 0$$

*Resolução:*

*Vamos pesquisar se a equação admite alguma raiz racional.*

*p: divisor de 9* ⇒ $p = \pm 1, \pm 3, \pm 9$

*q: divisor de 4* ⇒ *q*= $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

*Os candidatos a raízes racionais são todos os possíveis valores de* $\frac{p}{q}$*:*

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{9}{4}$$

*Verificamos (usando o dispositivo de Briot-Ruffini) que $\frac{1}{2}$ e 3 são raízes; dividindo o 1º membro da equação por $x - \frac{1}{2}$ e o quociente por $x - 3$, vem:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *10* | *2* | *15* |
| $\frac{1}{2}$ | *8* | *6* | *18* |
| | | | |

*As demais raízes da equação são de:*

$$4x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

*portanto, o conjunto solução é*

$S = \left\{\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i\right\}$.”

## 7.4 Conexões com a Matemática

Esta é uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna sob a coordenação do editor Fábio Martins de Leonardo, licenciado em matemática pela USP.

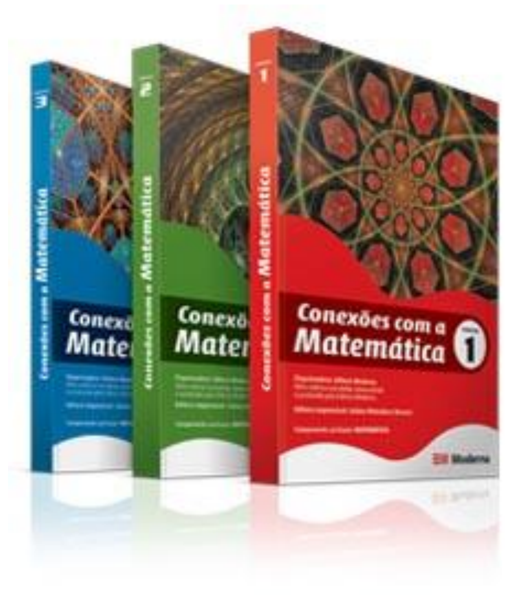



Figura 10: Coleção Conexões com a Matemática

No capítulo 7, que trata dos números complexos, foi traçada uma linha do tempo destacando os seguintes pontos:

- Tartaglia e a resolução da equação do tipo $x^3 + px = q$
- Cardano, a *Ars Magna* e a equação $x^3 - 15x = 4$
- Bombelli admite $\sqrt{-1}$ como sendo um número para dar seguimento à resolução do problema de Cardano
- Euler utiliza pela primeira vez $i$ para representar $\sqrt{-1}$
- Gauss introduz a representação geométrica dos complexos.

Embora a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ tenha sido mencionada não aparece a fórmula que conduziu a esse resultado.

No capítulo seguinte, que trata dos polinômios e equações polinomiais, as relações de Girard entre coeficientes e raízes para equações de 2º, 3º e n-ésimo grau são enunciadas.

## 7.5 Matemática: Novo Olhar

Esta obra de Joamir Souza, especialista em estatística e licenciado em matemática pela Universidade Estadual de Londrina, é dividida em três volumes e publicada pela Editora FTD.

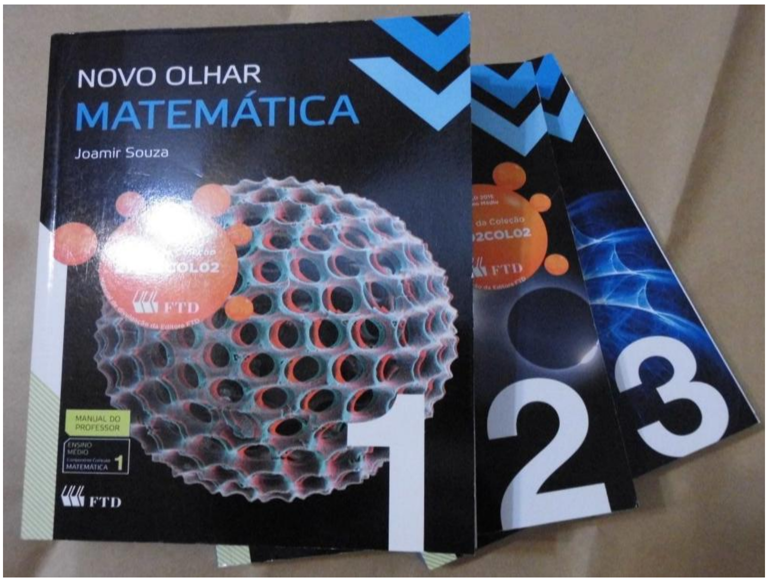


Figura 11: Coleção Novo Olhar Matemática

No capítulo 7, que aborda os números complexos, o autor inicia destacando que a fórmula resolutiva de equações cúbicas de Cardano-Tartaglia foi uma das maiores contribuições ao desenvolvimento da álgebra e promoveu discussões que culminaram no desenvolvimento dos números complexos.

Em seguida, cita um trecho de Boyer onde esclarece que sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente as raízes quadradas de números negativos.

Por fim, o autor fala da equação $x^3 = 15x + 4$ e sua solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ sem, contudo, exprimir a fórmula que leva a esse resultado.

Fica claro que o discurso do autor visa justificar a necessidade de um novo tipo de número a fim de resolver o problema decorrente da resolução das equações cúbicas.

No capítulo 8, polinômios e equações algébricas, páginas 275 e 276, o autor enuncia as relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações algébricas de grau 2, 3 e *n.* Na página 281 ensina como pesquisar raízes racionais de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, resolve dois exemplos e propõe atividades envolvendo, entre outras, equações cúbicas.

Na página seguinte a seção “Explorando o Tema” expõe um texto a respeito das equações cúbicas e quárticas onde ratifica que a descoberta da resolução das equações cúbicas e quárticas foi provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI e elucida como os fatos parecem ter acontecido resumindo a história já contada no segundo capítulo desse trabalho.

Ao final apresenta nossa já conhecida fórmula da seguinte forma:

*"A resolução da equação cúbica $x^3 + mx = n$, enunciada por Cardano em seu trabalho Ars Magna, pode ser representada, em notação atual, da seguinte maneira:*

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

*Para exemplificar, usaremos essa fórmula para resolver a equação $x^3 + 6x = 20$. Por exemplo, temos:*

$$\mathrm{x} = \sqrt[3]{\frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$$

*Resolvendo essa expressão, obtemos $x = 2$, que é uma das raízes da equação."*

A seguir o autor faz cinco perguntas, sendo as três primeiras sobre a história da resolução das equações cúbicas e quárticas e nas duas últimas pede para utilizar a fórmula dada para encontrar uma das raízes da equação $x^3 - 9x - 28 = 0$ e as três raízes do polinômio $p(x) = x^3 + 3x + 14$.

### 7.6 Matemática Paiva

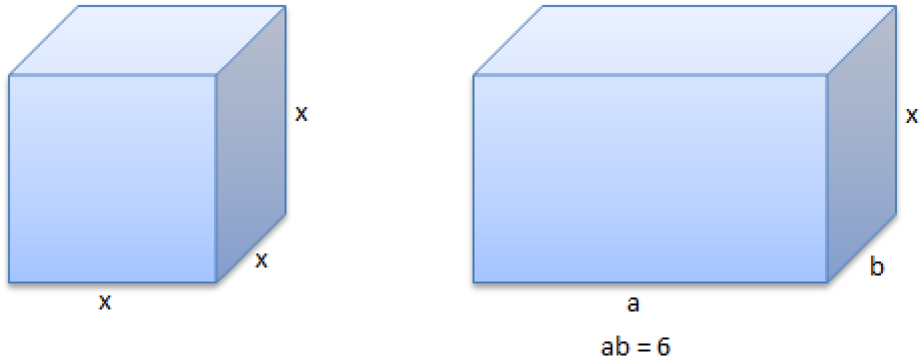
A coleção Matemática Paiva publicada pela Editora Moderna é composta por três volumes de autoria de Manuel Paiva, Licenciado em matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André e mestre em educação pela PUC-SP.


Figura 12: Coleção Matemática Paiva

Na abertura do capítulo 7 do volume 3, que trata dos números complexos, o autor propõe o seguinte problema:

*"Um engenheiro projetou duas caixas d'água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 6 $m^2$ de área da base. O volume da caixa cúbica deve ter 4 $m^3$ a menos que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica?*

*Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica, temos:*




*Assim, o valor de x é a raiz da equação* $x^3 = 6x - 4$, *que é equivalente a* $x^3 - 6x + 4 = 0$.*"*

A seguir sugere a resolução pelo método de Tartaglia que, segundo ele, consiste em substituir $x$ por $u - v$, de modo que o produto $uv$ seja igual à terça parte do coeficiente de $x$, ou seja, $uv = -\frac{6}{3} = -2$. Assim:

$$\begin{cases} (u-v)^3 - 6(u-v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

Faz a substituição $uv = -2$ na primeira equação, obtendo:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 \\ v = -\dfrac{2}{u} \end{cases}$$

E então substitui a segunda igualdade na primeira chegando a equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$ que fazendo a substituição $u^3 = t$ fornece a equação do 2º grau $t^2 + 4t + 8 = 0$.

Neste momento o autor utiliza o resultado

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

e o fato de que

$$2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$$

para gerar a seguinte discussão: embora não exista no conjunto dos números reais o número $\sqrt{-16}$ a equação dada possui solução real, logo, seria possível admitir que exista o número $\sqrt{-16}$?

Por fim, o autor faz referência a Cardano, Bombelli e suas contribuições para a concepção do conjunto dos números complexos.

No capítulo 9, Equações Polinomiais, subcapítulo 7, o autor enuncia as relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações algébricas de grau 2, 3 e *n.*

### 7.7 Conclusão da Análise

Após analisar as coleções verificamos que todas abordam a resolução das equações cúbicas apenas superficialmente, não como fim, mas como tema introdutor ao estudo dos números complexos ou a título de curiosidade histórica. Quanto à resolução das equações quárticas, constatamos total inexistência da dedução de um método geral.

Contudo, destacamos o livro *Matemática Paiva* por utilizar uma abordagem capaz de instigar a curiosidade do leitor a partir de um problema geométrico, que é modelado por uma equação cúbica, e através de passos algébricos deduzir a resposta. Este parece ser o caminho mais natural para conduzir o aluno, público alvo do livro didático, à compreensão da dedução da fórmula que resolve a equação cúbica.

Acreditamos que uma proposta que dedique mais atenção ao estudo dessas equações pode ser interessante no sentido que dá oportunidade para resgatar conceitos importantes e colocar em uso o ferramental matemático como produtos notáveis e relações entre coeficientes e raízes, tal proposta também atende ao disposto nos PCNEM para ensino da matemática quando afirma que:

> O Currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio histórica que está na origem desses temas.

Antes de iniciar o estudo dos números complexos pode ser um bom momento para apresentar uma dedução para a fórmula de Cardano-Tartaglia, alguns exercícios e uma breve discussão sobre o caso irredutível, demonstrando que sempre que a equação cúbica tiver três soluções reais distintas o discriminante será negativo. Já com o conhecimento dos números complexos podemos retomar o estudo das equações cúbicas abordando também as relações entre as raízes e o sinal do discriminante e deduzir a solução geral das equações quárticas com exemplos resolvidos e atividades que viabilizem a compreensão do tema.

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos na possibilidade de implementação dos métodos de resolução das equações cúbicas e quárticas no ensino básico num encadeamento lógico e nos anos de ensino adequados, respeitando o amadurecimento dos alunos. Porém ainda não temos total certeza de como fazer valer nossa crença. Mas, durante a pesquisa, ficou claro que certos conceitos se encaixavam, logicamente, em anos anteriores ao terceiro ano do ensino médio. E que com novas pesquisas pode haver um consenso de como podemos inserir as resoluções de equações cúbicas e quárticas no ensino básico.

Com a pesquisa, percebemos que faltava base para que os alunos compreendessem o desenvolvimento dos métodos apresentados. E que muitos não tiveram a base desejada porque conteúdos como: Produtos notáveis, fatoração e equações do segundo grau, não são assuntos tão interessantes, além de outros fatores. E que, segundo eles, tais assuntos não se aplicam ao cotidiano. Mas acreditamos que se tais assuntos fossem usados no ensino fundamental, mesmo que aplicados à própria matemática, teriam mais sentido e, logo, não seriam descriminados pelos alunos. E uma das aplicações passaria pelo desenvolvimento dos métodos de resoluções de equações cúbicas e quarticas.

## 9. REFERÊNCIAS

[1] A. GARCIA e Y. Lequain. Elementos de Álgebra. Coleção Projeto Euclides. Sociedade Brasileira de Matemática;

[2] ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática;

[3] BOYER, Carl Benjamin. História da matemática. 11. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[4] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

[5] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: ed. UNICAMP, 1995.

[6] GARBI, Gilberto G. O Romance das Equações Algébricas. 4. ed. rev. e ampl. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[7] GUEDJ, Denis. O teorema do papagaio. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

[8] HEFEZ e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;

[9] IEZZI, Gelson, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Matemática ciência e aplicações – 6ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2013

[10] LEONARDO, Fábio Martins de (Ed.). Conexões com a Matemática. São Paulo: Moderna, 2014.

[11] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; E. WAGNER e A. C. MORGADO. A Matemática do Ensino Médio V.3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[12] LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[13] NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[14] NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.6 Polinômios. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[15] NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. Coleção Iniciação científica. Sociedade Brasileira de Matemática;

[16] PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo: Moderna, 2009.

[17] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;

[18] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática: Ensino Médio. – 8 ed. – São Paulo: Saraiva, 2013.

[19] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. – 2 ed. – São Paulo: FTD, 2013.