INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA – IMPA/RJ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

RIO DE JANEIRO - RJ
2015

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo geral apresentar o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e analisar suas possibilidades de ensino no 6º ano do Ensino Fundamental.

Segundo Alencar Filho (1988), o TFA garante que todo número natural maior do que um, ou é primo, ou pode ser decomposto de maneira única num produto de números primos, a menos de permutações dos fatores. Dessa forma, os conceitos que se associam favorecendo a sua compreensão são as relações de múltiplos e fatores que podem se estabelecer entre um par de números naturais e as propriedades que derivam destas relações, os critérios de divisibilidade, a diferenciação entre primos e compostos e decomposição de um número em fatores primos.

É importante destacar a relevância de tais conceitos dentro do corpo de conhecimentos matemáticos a serem estudados pelos alunos durante os ensinos Fundamental e Médio. Conhecendo alguns critérios de divisibilidade, o aluno pode efetuar cálculos mentais e estimativas. Observando a decomposição de números naturais em fatores primos, podemos obter rapidamente o mínimo múltiplo comum (M.M.C.) e o máximo divisor comum (M.D.C.) destes números, calcular o número de divisores de cada um ou mesmo listá-los.

Em 1998, o Governo Federal publicou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), documento que aponta diretrizes para a construção dos currículos escolares. Eles receberam críticas relacionadas à linguagem (apontada como elemento dificultador da compreensão da proposta) e à sua presença num contexto democrático (como estabelecer um currículo comum numa democracia?). Entretanto, no que diz respeito à Matemática, concordamos com Angelo e Silva (2008) que "(...) os documentos são relevantes, uma vez que estes refletem as recomendações dos educadores matemáticos desde os anos 80 e sistematizam questões de primeira ordem sobre o ensino e a aprendizagem dessa área do conhecimento" (p.33). Tanto o PCN de Matemática para 1ª a 4ª série quanto aquele que se volta para 5ª a 8ª série distribui os conteúdos matemáticos a serem trabalhados no Ensino Fundamental em quatro blocos: *números e operações*, *espaço e forma*, *grandezas e medidas* e *tratamento da informação.* O TFA e os demais conceitos associados a ele pertencem ao bloco *números e operações* e, sendo assim, na maioria das escolas brasileiras e nos livros didáticos, são apresentados desde o 4º ano (antiga 3ª Série) do Ensino Fundamental, sendo retomado nos anos subsequentes apenas com aumento gradual dos números, cuja decomposição é solicitada aos alunos.

Cabe mencionar ainda que, além de elencar os conteúdos a serem estudados, os PCN refletem sobre o ensino e, no caso do ensino da Aritmética, sugerem uma abordagem mais reflexiva dos números considerando que o aluno deve perceber

> a existência de diversos tipos de números (naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados à medida que deparar com situações-problema, envolvendo operações ou medidas de grandeza, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento matemático (BRASIL, 1998: 50).

Em outras palavras, com relação às operações, o trabalho a ser realizado deve se concentrar na compreensão dos diferentes significados dos números e operações, nas relações existentes entre eles e suas propriedades. Entretanto, as pesquisas mais recentes em Educação Matemática sinalizam a existência de problemas no ensino e na aprendizagem da Aritmética. Embora ocorra, observamos um tratamento mecanizado, com base em exercícios repetitivos e problemas idealizados. Os alunos não têm tido oportunidade de descobrir variações nos algoritmos que possam ser úteis para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e estimativas. Lins e Gimenez reforçam esta constatação ao afirmarem que:

> Os conceitos aritméticos usados na Educação Matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Tem-se esquecido frequentemente que a aritmética inclui também: a) representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos, que ampliam a ideia simples do manipulativo); b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades); e d) descobertas ou "teoremas" (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínios). (LINS e GIMENEZ, 1997: 33).

Especificamente sobre o TFA, Coelho et al. (2005) investigaram a compreensão do TFA por professores de Matemática em curso de formação continuada e por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental de São Paulo. As autoras concluíram que, comparativamente, existem diferenças entre os dois grupos. Na maioria das vezes, o grupo de alunos reproduz algoritmos sem saber interpretar cada etapa de suas ações e seus resultados. Voltando-se para o grupo de professores, elas perceberam uma compreensão conceitual mais aprofundada, decorrente do estudo recente da Teoria dos Números no curso de formação continuada que estão frequentando. Este estudo permitiu ainda a conclusão de que é possível criar cursos voltados para estudantes brasileiros de qualquer nível de ensino nos quais a compreensão conceitual seja enfatizada, mas, o professor deve estar atento para que essa abordagem não seja perturbada por um ensino prévio muito calcado em algoritmos.

Assim, reforçamos a necessidade de uma abordagem que priorize a formação de conceitos e não simplesmente a memorização de algoritmos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, justificamos nossa pesquisa. Se a construção de conceitos não for favorecida, o indivíduo enfrentará dificuldades durante sua vida escolar, sobretudo, quando confrontado com situações que lhe exijam tomar decisões e estabelecer estratégias de resolução de problemas. As dificuldades poderão se fazer presentes, inclusive, em níveis de ensino mais elevados. Ideias mal concebidas inicialmente se constituirão em obstáculos para a compreensão de futuros conceitos.

Sintetizando os objetivos gerais de um trabalho curricular aritmético diferente do mecanizado baseado em algoritmos que está presente no ensino tradicional, Lins e Gimenez (1997), propõem que o ensino deve:

> - Buscar a compreensão da quantidade e a observação e a manipulação de processos operativos.
> - Fomentar a criatividade e a sensibilidade na busca de propriedades e relações.
> - Conhecer, assumir e usar uma metodologia heurística, motivando a intuição para ajudar a formulação de hipóteses, generalizações e, em alguns casos, estratégias indutivas.
> - Reconhecer processos dedutivos e iterativos usados na história, tentando reconhecer e identificar seus fundamentos, e reviver suas reflexões (GIMENEZ, 1997: 40-44).

Influenciadas pelas ideias de Lins e Gimenez (1997) e Coelho et al. (2005), as pesquisas de Barbosa (2008), Groenwald, Franke e Olgin (2009) e Groenwald e Olgin (2010) descrevem intervenções de ensino voltadas para tópicos da Teoria dos Números que foram aplicadas e promoveram a aprendizagem significativa em alunos do Ensino Fundamental. Já Machado e Oliveira (2015), com base numa análise minuciosa de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, propõem a inclusão do tópico equações diofantinas neste nível de ensino.

Groenwald, Franke e Olgin (2009) desenvolveram atividades envolvendo as aplicações da Teoria dos Números à criptografia em turmas de 9º ano. Groenwald e Olgin(2010) retomaram esta proposta inserindo o uso da calculadora como recurso didático e Barbosa (2008) desenvolveu, aplicou e analisou à luz da Teoria dos Campos Conceituais uma longa intervenção de ensino visando a compreensão e aplicação na simplificação de cálculos do Teorema Fundamental da Aritmética por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Em suas análises, Barbosa (2008) verificou que o TFA não pode ser ensinado isoladamente, pois existem outros conceitos, já mencionados neste texto, que se associam a ele permitindo a sua compreensão. Além disso, constatou que, com base nos padrões numéricos envolvidos nas situações problema que vivenciaram, os alunos realizaram generalizações.

A compreensão do TFA demandou dos alunos o percurso de um longo caminho que teve início na distinção entre divisões exatas e não exatas, passando pelos conceitos de múltiplo e fator e suas propriedades, conceitos de primos e compostos e decomposição em fatores primos. Esse percurso, no entanto, não é linear. Nele os alunos cometem e superam parcial ou totalmente determinados erros, levantam, testam, validam ou refutam hipóteses. Além disso, podem recorrer a materiais manipulativos e utilizar várias representações como desenhos, tabelas, além do registro numérico tradicional.

É o trabalho de Barbosa (2008) que retomamos neste estudo. Antes de iniciar sua intervenção de ensino, ela aplicou um teste diagnóstico para identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Aqui aplicamos novamente o teste numa outra turma de 6º ano de uma escola particular de Madureira e, debruçados sobre os resultados deste teste, temos como objetivos específicos:

- Descrever as estratégias empregadas pelos alunos para resolver problemas que envolvem os principais conceitos associados ao TFA;
- Identificar os erros cometidos pelos alunos quando confrontados com situações que envolvem os principais conceitos associados ao TFA;
- Reconhecer as principais características de uma intervenção de ensino voltada para a compreensão destes conceitos por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Dessa forma, nossa pesquisa é uma pesquisa qualitativa em educação com características de um estudo de caso. Nossa intenção não é generalizar dados nem apresentar estatísticas, uma vez que nossa amostra é pequena (uma turma de 27 alunos), mas sim oferecer uma análise qualitativa do desempenho dos alunos e contribuir para a discussão mais ampla sobre a melhoria do ensino da aritmética na educação básica. Por se tratar de uma análise qualitativa, também buscamos o suporte teórico da TCC. Esta teoria cognitivista, desenvolvida pelo francês Gerard Vergnaud, têm fundamentado muitas pesquisas sobre a compreensão de conceitos na Matemática e na Física nos últimos anos.

Entre os principais marcos desta teoria está a noção de campo conceitual e de conceito. Para Vergnaud (2009), um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Ele se associa a muitos outros compondo um campo conceitual. Além disso, um conceito é uma terna composta pelas situações que lhe dão sentido, pelos invariantes operatórios de cada classe de situações e pelas suas representações. Só podemos dizer que um aluno domina um conceito quando ele dá conta dessa terna.

Assim, é nessa direção que conduzimos nossa pesquisa. Na análise dos testes, valorizamos os registros dos alunos e, quando não os compreendíamos, realizávamos entrevistas informais solicitando-lhes que descrevessem as estratégias que empregavam. Na sugestão das atividades, procuramos diversificar as situações, privilegiando aquelas que dando oportunidade para o aluno se expressar e transitar entre diferentes formas de representação.

Com o intuito de clarificar cada etapa da nossa pesquisa, no próximo capítulo apresentamos o objeto matemático desta pesquisa, ou seja, as principais definições, teoremas e propriedades relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética e os resultados de pesquisas internacionais que investigaram a compreensão de alguns desses elementos. O terceiro capítulo é dedicado ao tratamento qualitativo dos dados coletados no teste diagnóstico, com a descrição das estratégias empregadas pelos alunos e dos principais erros que eles cometeram. E, por fim, no capítulo 4, fazemos nossas considerações finais, tendo como foco principal responder cada objetivo específico e, em seguida, o objetivo geral.

1 OBJETO MATEMÁTICO: O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Ao educador cabe não somente ter se apropriado dos conceitos que pretende ensinar, é necessário que sua esfera de conhecimento seja mais abrangente. Elaborar uma metodologia de ensino dotada de estratégias que estimulem a capacidade de dedução, a memorização e a habilidade de generalizar é possível quando o profissional de educação matemática se envolveu de forma mais avançada com os teoremas e propriedades que embasam suas aulas. Consideramos que os tópicos que serão abordados a seguir são essenciais para o educador conceber uma forma própria de trabalhar, num nível adequado às turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, com as ideias de divisibilidade, múltiplos, divisores, divisão euclidiana, números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética. A maneira como tais conceitos são discutidos nesse primeiro momento de aprendizagem pode guiar o estudante a uma concepção sólida, em seu futuro contato com tópicos menos elementares. Logo, entendemos que o educando não deve limitar-se a reprodução. Para subir os degraus da abstração, ele precisa construir definições, refletir e argumentar sobre conceitos e processos matemáticos, orientado pelo professor que domina o assunto em patamares mais elevados.

1.1 Divisibilidade: Conceitos e Propriedades

Iniciaremos a discussão sobre divisibilidade, no conjunto dos números naturais, em um caminho distinto dos livros didáticos tradicionais. Usualmente o que vemos nas salas de aula é a definição de divisibilidade atrelada a noção de divisão euclidiana. Um número é considerado divisível por outro quando sua divisão por ele deixa resto zero. Ao partir dessa premissa, podemos levar os alunos a pensar que a divisão somente pode ser realizada quando um número é divisível por outro, criando um obstáculo para a aprendizagem de posteriores divisões que deixam restos não nulos. Assim, partiremos da ideia de que um número é divisível por outro quando é múltiplo do mesmo.

1.1.1 Definição de divisibilidade

Considere dois números naturais de D, teremos que d divide D, escrevendo $d|D$, quando existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $D = qd$. Podemos afirmar ainda que d é um divisor ou um fator de$D$, ou, ainda, que Dé um múltiplo de d, ou que Dé divisível por d.

Assim a sentença $d|D$ nos diz que existe um q tal que $D = qd$. A mesma pode ser negada através da simbologia $d \nmid D$, significando que não existe nenhum número natural$q$tal que $D = qd$.

1.1.2 Propriedades da Divisibilidade

Proposição 1

Sejam n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}$. Tem-se que

i) Todo número natural é divisível por 1, ou seja,$1|n_1$;
ii) Todo número natural é divisível por ele mesmo, ou seja, $n_1|n_1$;
iii) Todo número natural é divisor de zero, ou seja, $n_1|0$.
iv) O único número que tem o zero como divisor é o próprio zero, ou seja, $0|n_1 \Leftrightarrow n_1 = 0$.

v) Se $n_1|\ n_2$e $n_2|\ n_3$, então $n_1|\ n_3$.

Demonstração

(i) Decorre diretamente da igualdade $n_1 = n_1 \cdot 1$;

(ii) Decorre diretamente da igualdade $n_1 = 1 \cdot n_1$;

(iii) Decorre diretamente da igualdade $0 = 0 \cdot n_1$;

(iv) Partiremos do princípio que $0|\ n_1$; temos com isso que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 = q \cdot 0$, o que implica $n_1 = 0$. Para a recíproca basta observar que $0|0$, o que foi provado (iii);

(iii) $n_1|\ n_2$ e $n_2|\ n_3$ logo existem $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, tais que $n_2 = q_1 n_1$ e $n_3 = q_2\ n_2$.
Substituindo o valor de n_2 da primeira equação na outra, obtemos

$$n_3 = q_2 n_2 = q_2(q_1 n_1) = (q_2 q_1) n_1,$$

o que nos mostra que $n_1|\ n_3$.

Consideraremos então o caso $0\ |\ 0$ (estamos assumindo que $0 \in \mathbb{N}$) e, portanto, todo número natural divide 0. Assim, 0 tem infinitos divisores.

<u>Definição</u>

Tomando como verdade que $d|D$ e que $d \neq 0$. Seja $q \in \mathbb{N}$ tal que $D = qd$. O número natural q, univocamente determinado, é chamado de *quociente* de D por d e denotado por $q = \frac{D}{d}$.

<u>Proposição 2</u>

Se $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$, então

$$n_1|n_2 \text{ e } n_3|n_4 \Longrightarrow n_1 n_3|n_2 n_4.$$

<u>Demonstração</u>

Se $n_1|n_2$ e $n_3|n_4$, então $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 = q_1 n_1$ e $n_4 = q_3 n_3$. Portanto, $n_2 n_4 = (q_1 q_2)(n_1 n_2)$, logo, $n_1 n_3|n_2 n_4$.

Em particular, se $n_1|n_2$, então $n_1q|n_2q$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

<u>Proposição 3</u>

Sejam d, D_1, $D_2 \in \mathbb{N}$, $D_1 > D_2$ tais que $d|(D_1 \pm D_2)$. Então

$$d|D_1 \Leftrightarrow d|D_2$$

<u>Demonstração</u>

Partiremos do princípio que $d|(D_1 + D_2)$. Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 + D_2 = qd$. Então, se $d|D_1$, temos que existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 = q_1 d$. A partir das duas igualdades, temos:

$$q_1 d + D_2 = qd,$$

Com isso temos que $D_2 = (q - q_1)d$, logo $d|D_2$.

Analogamente para o caso em que d| D_2.

Observando a outra premissa, partiremos do princípio que $d|(D_1 - D_2)$. Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 - D_2 = qd$.

Então, se $d|D_1$, temos que existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 = q_1 d$. Juntando as duas igualdades acima, temos

$$q_1 d - D_2 = qd,$$

Com isso temos que $D_2 = (q_1 - q)d$, logo $d|D_2$.

<u>Proposição 4</u>

Se d, D_1, $D_2 \in \mathbb{N}$ são tais que $d|D_1$ e $d|D_2$, então para todo $x, y \in \mathbb{N}$

$$d|(xD_1 + yD_2).$$

Demonstração

$d|D_1$e $d|D_2$ implicam que existem q_1, $q_2 \in \mathbb{N}$ tais que $D_1 = q_1 d$ e $D_2 = q_2 d$. Logo,

$$xD_1 + yD_2 = x(q_1 d) + y(q_2 d) = (xq_1 + yq_2)d.$$

Com isso, $d|(xD_1 + yD_2)$.

Proposição 5

Dados d, $D \in \mathbb{N}$, onde $D \neq 0$, temos que

$$d|D \Longrightarrow d \leq \mathrm{D}$$

Demonstração

De fato, se $d|D$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D = qd$. Como $D \neq 0$, temos que $q \neq 0$, logo $1 \leq$ q e, consequentemente, $d \leq qd = D$.

Podemos deduzir da proposição 5, dois importantes resultados:

(i) O único divisor 1 é ele mesmo.

Claro, se $d \in \mathbb{N}$ e $d|1$, então $0 < d \leq 1$, logo $d = 1$.

(ii) Um número natural D, possui um número finito de divisores.

Como, para $D \neq 0$, temos que todo divisor d de D é tal que $d \leq D$, segue-se, nesse caso, que D tem um número finito de divisores que estão no intervalo $1 \leq d \leq D$.

Note que a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem, pois

(i) é reflexiva: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n|n$.

(ii) é transitiva: se $n_1|n_2$ e $n_2|n_3$, então $n_1|n_3$.

(ii) é antissimétrica: se $n_1|n_2$ e $n_2|n_1$, então $n_1 = n_2$.

1.2 Algoritmo Da Divisão

1.2.1 Processo de divisão euclidiana

Veremos agora um importante resultado descrito por Euclides, em sua mais famosa obra, *Os Elementos*. Esse resultado trata do fato de que dados dois números naturais d e D, com $d \neq 0$, é sempre possível realizar a divisão de D por d, ainda que haja um pequeno resto. Tal algoritmo continua sendo a forma mais prática de se efetuar uma divisão com resto, e por isso, é marcante sua presença nas salas de aula e nos livros didáticos de matemática do Ensino Básico.

<u>Teorema</u>

Sejam D e d dois números naturais com $d \neq 0$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que

$$D = dq + r, \quad \text{como } 0 \leq r < d.$$

Onde D é chamado de dividendo, d de divisor, q de quociente r de resto.

<u>Demonstração</u>

Se $D<d$ então $q = 0$ e $r = D$. Se $D = d$, então $q = 1$ e $r = 0$. Suponha, então, que $D>d$.

Provaremos primeiro a existência: Considere, enquanto fizer sentido dentro do conjunto dos naturais, os números:

D, $D - d$, $D - 2d$, $D - 3d$, ... ,$D - nd$, ..., como sendo elementos de um determinado conjunto S.

Pelo Princípio da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos números acima possui um menor elemento $r = D - qd$. Queremos mostrar que $r < d$.

Temos duas possibilidades:

Se $d|D$, o resultado é imediato, já que $r = 0 < d$.

Pensaremos agora no caso em que $d \nmid D$, ou seja, $r \neq d$. Fica claro que $r<d$, pois se não, admitiríamos a existência de um número natural a $<r$ tal que $r = a + d$. Consequentemente, sendo $r = a + d = D - qd$, teríamos

$$a = D - (q + 1)d \in S, \text{ com } a<r,$$

Essa sentença contradiz a hipótese, que afirma ser r o menor elemento de S. Logo, temos que $D = dq + r$ com $r < d$, o que prova a existência de q e r.

Agora provaremos a unicidade: Tomando a diferença entre dois elementos distintos de S temos um múltiplo de d. Sendo o valor mínimo desta diferença igual ao próprio d. Logo, se $r = D - dq$ e $r' = D - dq'$, com $r < r' < d$, teríamos $r' - r \geq d$, o que implica que $r' \geq r + d \geq d$, que é um absurdo. Com isso, $r' = r$, e, por consequência, $dq' = dq$ e $q' = q$.

Podemos então escrever uma nova definição para divisibilidade: Dizemos que d divide D, se, e somente se, o resto da divisão euclidiana de D por d é zero.

Com o resultado que nos garante a unicidade de q e r na divisão euclidiana de D por d, construiremos a função que segue:

Denotamos por $q_d(D)$ o quociente da divisão do número D por d, definimos a *função quociente* por d como segue:

$$q_d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$D \longmapsto q_d(D)$$

<u>Corolário</u>

Dados dois números naturais D e d com $d > 0$, existe um único número natural n ($= q_d(D)$) tal que

$$nd \leq D < (n+1)d.$$

<u>Demonstração</u>

Pela divisão euclidiana, temos que existem $q, r \in \mathbb{N}$, únicos, com $0 \leq r < b$, tais que $D = dq + r$. Considere $n = q$, está provado.

O natural $q_d(D)$ pode ser também interpretado como o maior natural menor ou igual do que o número racional $\frac{D}{d}$.

De fato, temos que, se r é o resto da divisão de D por d, então

$$q_d(D)d \leq D = q_d(D)d + r < (q_d(D) + 1)d, \text{logo,}$$

$$q_d(D) \leq \frac{D}{d} < q_d(D) + 1.$$

1.3 M.D.C. e Algoritmo de Euclides

1.3.1 Máximo Divisor Comum

Sejam dados dois números naturais n_1 e n_2, distintos ou não. Um número natural d será dito um *divisor comum* de n_1 e n_2 se $d|n_1$ e $d|n_2$.

Diremos que um número natural $d \geq 0$ é um *máximo divisor comum* (mdc) de n_1 e n_2, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de n_1 e n_2, e
ii) d é divisível por todo divisor comum de n_1e n_2, ou seja, se c é um divisor comum de n_1e n_2, então $c|d$.

A unicidade do mdc fica garantida na condição (ii) acima. Note que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então, $d \mid d'$ e $d' \mid d$, o que, juntamente implicam que $d = d'$.

Denotaremos por mdc(n_1, n_2) o mdc de n_1 e n_2. Além disso, temos pela definição que mdc(n_1, n_2) =mdc(n_2, n_1).

Propriedades

(i) $mdc\ (0, n) = n$

(ii)$mdc\ (1, n) = 1$

(iii) $mdc\ (n, n) = n$

(iv) Para todo $N \in \mathbb{N}$, temos que $n|N \Leftrightarrow mdc\ (n, N) = n$.

(v) $mdc\ (n, N) = 0 \Leftrightarrow n = N = 0$

Demonstração

(i) Como zero é divisível por todo número natural, temos que n é divisor de zero. E sendo n divisível por todos os divisores de n, por definição, decorre que $(0, n) = n$.

(ii) 1 é o único divisor de 1. E sendo 1 também divisor de n, decorre que $(1, n) = 1$.

(iii) Como n é divisível por todos os divisores de n, temos por definição que $(n, n) = n$.

(iv) De fato, se $n|N$, temos que n é um divisor comum de n e N, e se d é um divisor comum de n e N, então d divide n, o que mostra que $n = mdc(n, N)$.

A recíproca é clara, se $mdc\ (n, N) = n$, segue-se que n divide N.

(v) Como todo número natural divide 0, o mdc de n e N, onde n = N = 0, é 0, pois esse é um divisor comum de n e N e é o único número divisível por todos os divisores de 0. Reciprocamente, se o mdc de n e N é 0, então 0 divide n e divide N, mas o único número divisível por 0 é o próprio 0, logo n = N = 0.

Provaremos agora a existência do *mdc* de qualquer par de números naturais, ambos não nulos. Iniciaremos mostrando que o máximo divisor comum de dois números, não ambos nulos, quando existe, é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números:

Seja $d > 0$ um *mdc* de n e N, não nulos, partindo do princípio que exista, e seja c um divisor comum qualquer desses números, então c divide d e, portanto, $c \leq d$.

<u>Lema</u>

Sejam $n, N, a \in \mathbb{N}$. Se existe $mdc(n, N - an)$, então, $mdc(n, N)$ existe e

$$mdc(n, N) = mdc(n, N - an).$$

<u>Demonstração</u>

Seja $d = mdc(n, N - an)$. Como $d|$n e $d|(N - an)$, temos que d divide $N = N - an + an$. Com isso, d é divisor comum de n e N. Partiremos agora do princípio que c seja um divisor comum de n e N. Logo, c é um divisor comum de n e $N - an$ e, portanto, $c|d$. Concluímos que $d = mdc(n, N)$.

1.3.2 Algoritmo de Euclides

O método para o cálculo do mdc, apresentado a seguir, é comumente conhecido por Algoritmo de Euclides, que foi descrito no Livro VII, em *Os Elementos*. E assim como o algoritmo da divisão já apresentado, essa é mais uma ferramenta utilizada na metodologia atual do Ensino Básico.

Dados $n, N \in \mathbb{N}$, podemos supor $n \leq N$. Se $n = 1$ ou $n = N$, ou ainda $n|N$, já vimos que $mdc(n, N) = n$. Então, partiremos do princípio que $1 < n < N$ e que $n \nmid N$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever

$$N = nq_1 + r_1, \quad \text{com } 0 < r_1 < n.$$

Teremos dois casos:

a) $r_1|n$. Logo, r_1 =*mdc*(n, r_1) já sabemos pelo lema apresentado que

$$r_1 = mdc\,(n, r_1) = mdc(n, N - q_1 n) = mdc(n, N),$$

o que finaliza o algoritmo.

b) $r_1 \nmid n$. Em tal caso, podemos efetuar a divisão de n por r_1, obtendo

$$n = r_1 q_2 + r_2, \ \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, teremos dois casos:

a') $r_2|r_1$. Nesse caso, r_2 =*mdc*(r_1, r_2) e novamente, pelo Lema 5.2,

$$r_2 = mdc(r_1, r_2) = mdc(r_1, \mathrm{n} - q_2 r_1) = mdc(r_1, n) = (N - q_1 n, n) = mdc(N, n) = mdc(n, N),$$

o que finaliza o algoritmo.

b') $r_2 \nmid r_1$. Neste caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \ \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

E assim sucessivamente até que o processo pare. O fim do processo é garantido, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $n > r_1 > r_2 >$... que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum m, temos que $r_m|r_{m-1}$, o que implica que *mdc*(n, N) = r_m.

Nas salas de aula do 5° e 6° anos do Ensino Fundamental, o algoritmo de Euclides assume outra representação, mais clara e acessível ao público, que traremos a seguir.

Começamos com o algoritmo da divisão N por n, $N = nq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama:

	q_1	
N	n	
r_1		

A seguir, continuamos efetuando a divisão $n = r_1 q_2 + r_2$ e colocamos os números envolvidos no diagrama

	q_1	q_2	
N	n	r_1	
r_1	r_2		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
N	n	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (n, \mathrm{N})$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

1.3.3 Propriedades do M.D.C

Sejam $n, N \in \mathbb{N}^*$. Definimos o conjunto

$$J(n, N) = \{a \in \mathbb{N}^* \,;\, \exists\, x, y \in \mathbb{N},\, a = xn - yN\}.$$

Por definição temos que

$$J(N, n) = \{b \in \mathbb{N}^* \,;\, \exists\, x, y \in \mathbb{N},\, b = yN - xn\}.$$

Lema

Tem-se que: $J(n, N) = J(N, n) \neq \emptyset$.

Demonstração

Inicialmente mostraremos que os dois conjuntos são iguais. Pelo caráter simétrico do resultado com relação a n e N, basta mostrara que $J(n, N) \subset J(N, n)$.

Seja $a \in J(n, N)$, então $a = xn - yN$ com $x, y \in \mathbb{N}$. Pela Propriedade Arquimediana, existem números naturais p e q tais que $pn > y$ e $qN > x$. Tomando m = max $\{p, q\}$, tem-se que $mn > Y$ e $mN > X$. Portanto,

$$a = xn - yN = (mn - y)N - (mN - x)n \in J(N, n)$$

Agora, note que $n \in J(n, N)$ e, portanto, $J(n, N) \neq \emptyset$.

O resultado acima e a Propriedade da Boa Ordem garantem que existe min $J(n, N)$.

Teorema

Sejam $n, N \in \mathbb{N}^*$ e seja $d = \min J(n, N)$, então
i) d é o mdc de n e N; e
ii) $J(n, N) = \{md; m \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração

(i) Tome que c dividan e N, logo c divide todos os números naturais da forma $xn - yN$. Portanto, c divide todos os elementos de $J(n, N)$, e, consequentemente, $c|d$.

Provaremos agora que d divide todos os elementos de $J(n, N)$. Seja a$\in J(n, N)$ e suponha, por absurdo, que $d \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana,

$$a = dq + r, \quad \text{com } 0 < r < d.$$

Como $a = xn - yN$ e $d = uN - vn$, para alguns $x, y, u, v \in \mathbb{N}$, segue-se que

$$r = (x + qv)n - (y + qu)N \in J(n, N)$$

o que é um absurdo, pois $d = \min J(n, N)$ e $r < d$. Em particular, $d|n$e $d|N$.

(ii) Dado que $ld = l(un - vN) = (lv)n - (lu)N \in J(n, N)$, é claro que

$$\{ld;\ l \in \mathbb{N}\} \subset J(n, N).$$

Mas, já foi provado que todo $a \in J(n, N)$ é tal que $d|a$, e, portanto,

$$J(a, b) \subset \{ld;\ l \in \mathbb{N}\}.$$

<u>Corolário</u>

Quaisquer que sejam $n, N, x \in \mathbb{N}^*$ tem-se que

$$mdc(xn, xN) = x\, mdc(n, N).$$

<u>Demonstração</u>

Note inicialmente que

$$J(xn, xN) = xJ(n, N) \quad = \{xa;\ a \in J(n, N)$$

O resultado decorre do teorema e do fato de que

$\min xJ(n, N) = x \min J(n, N)$.

Corolário

Dados $n, N \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$mdc\left(\frac{n}{mdc\,(n,N)}, \frac{N}{mdc\,(n,N)}\right) = 1.$$

Demonstração

Temos que

$$mdc(n, N)\; mdc\left(\frac{n}{mdc\,(n,N)}, \frac{N}{mdc\,(n,N)}\right) =$$

$$= mdc\left(mdc\,(n, N)\,\frac{n}{mdc\,(n,N)}, mdc\,(n,N)\,\frac{N}{mdc\,(n,N)}\right) =$$

$$= mdc(n, N),$$

o que valida o resultado.

Definição

Dois números naturais n e N serão ditos *primos entre si*, ou *coprimos*, se $mdc(n, N) = 1$; ou seja, se o único divisor comum de ambos é 1.

Proposição 6

$mdc(n, N) = 1 \Leftrightarrow$ existem números naturais x e y tais que $xn - yN = 1$.

Demonstração

($\Rightarrow$)Partindo do princípio que n e N são primos entre si. Logo, $mdc(n, N) = 1$. Temos que existem números naturais x e y tais que $xn - yN = mdc(n, N) = 1$.

(⇦)Partindo do princípio que existam números naturais x e y tais que $xn - yN = 1$. Se $d = mdc(n, N)$, temos que $d|(xn - yN)$, o que mostra que $d|1$, e, portanto, $d = 1$.

<u>Lema de Gauss</u>

Sejam n_1, n_2 e n_3 números naturais. Se $n_1|n_2n_3$ e $mdc(n_1, n_2) = 1$, então $n_1|n_3$.

<u>Demonstração</u>

Se $n_1|n_2n_3$, então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n_2n_3 = n_1a$.

Se $mdc(n_1, n_2) = 1$, então, pela Proposição 10, temos que existem $x, y \in \mathbb{N}$ tais que

$$xn_1 - yn_2 = 1.$$

Multiplicando por n_3 ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$n_3 = xn_1n_3 - yn_2n_3.$$

Substituindo n_2n_3 por n_1a nesta última igualdade, temos que

$$n_3 = xn_1n_3 - yn_1a = n_1(xn_3 - ya)$$

e, portanto, $n_1|n_3$.

<u>Corolário</u>

Dados $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, com n_2 e n_3 não ambos nulos, temos que

$$n_2|n_1 \quad \text{e } n_3|n_1 \Leftrightarrow \frac{n_2n_3}{mdc(n_2,n_3)}|n_1.$$

<u>Demonstração</u>

Já sabemos que $n_1 = xn_2 = yn_3$ para alguns $x, y \in \mathbb{N}$. Então,

$$x\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)} = y\frac{n_3}{mdc(n_2,n_3)}.$$

Como $mdc(\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)}, \frac{n_3}{mdc(n_2,n_3)}) = 1$, decorre que $\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)}|y$ e $\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)}n_3|yn_3$.

Como $yn_3 = n_1$, a implicação direta fica provada. A recíproca é análoga.

Definição

Vamos ampliar agora a definição de mdc de dois números naturais para o mdc de *m* números naturais:

Um número natural *d* será dito mdc de dados números naturais $n_1,\ldots, n_m$, não todos nulos, se possuir as seguintes propriedades:

i) *d* é um divisor comum de $n_1,\ldots, n_m$.

ii) Se *c* é um divisor comum de $n_1,\ldots, n_m$, então $c|d$.

Denotaremos o mdc por:

$$mdc\,(n_1,\ldots,n_m).$$

Proposição 7

Dados números naturais $n_1,\ldots, n_m$, não todos nulos, existe o seu mdc e

$$mdc(n_1,\ldots,n_m) = \text{mdc}\,(n_1,\ldots, (n_{m-1}, n_m)).$$

Demonstração

Provaremos por indução sobre *m* ($\geq$ 2). É fácil ver que para *m* = 2, o resultado é válido. Partiremos do princípio que o resultado vale para *m*. Para provar que o resultado é válido para *m* + 1, basta mostrar que se *d* é o mdc de n_1,..., (n_m, n_{m+1}), então *d* é o mdc de n_1,..., n_m, n_{m+1}, o que prova também a existência.

Seja *d* o mdc de n_1,..., (n_m, n_{m+1}). Logo, $d|n_1$,..., $d|n_{m-1}$ e $d|$mdc(n_m, n_{m+1}). Portanto, $d|n_1$,..., $d|n_{m-1}$, $d|n_m$ e $d|n_{m+1}$.

Por outro lado, seja *c* divisor comum de n_1,...,n_m,n_{m+1}; logo *c* é um divisor comum de n_1,...,n_{m-1} e mdc(n_m, n_{m+1}); e, portanto, $c|d$.

Definição

Os naturais n_1,..., n_m serão ditos *primos entre si*, ou *coprimos*, quando mdc(n_1,...,n_m) = 1.

1.4 Mínimo Múltiplo Comum

Definição

Um número natural é um *múltiplo comum* de dois números naturais dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Um número natural *m* é um *mínimo múltiplo comum (mmc)* dos números naturais n_1 e n_2, se possuir as seguintes propriedades:

(i) *m* é um múltiplo comum de n_1 e n_2, e

(ii) se *c* é um múltiplo comum de n_1 e n_2, então $m|c$.

Considerando que o mínimo múltiplo comum existe, sua unicidade é garantida em (ii), pois temos que se c é um múltiplo comum de n_1 e n_2 então $m|c$ e consequentemente $m \leq c$, ou seja, *m* é o menor dos múltiplos comuns.

O mínimo múltiplo comum de n_1e n_2, se existe, é denotado por mmc (n_1, n_2).

Corolário

O mmc (n_1, n_2) = 0 se, e somente se, $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$.

Demonstração

Se mmc (n_1, n_2) = 0, então 0 divide n_1n_2, que é múltiplo de n_1e de n_2, logo $n_1n_2 = 0$ e, portanto, $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$. Reciprocamente, se $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$, então 0 é o único múltiplo comum de n_1 *e* n_2, logo mmc (n_1, n_2) = 0.

Proposição 8

Dados dois números n_1e n_2 temos que m = mmc (n_1, n_2) existe e mmc (n_1, n_2). mdc (n_1, n_2) = n_1n_2.

Demonstração

Vamos escrever $m = \frac{n_1 n_2}{mdc\ (n_1 n_2)}$, como

$$m = n_1\frac{n_2}{mdc\ (n_1 n_2)} = n_2\frac{n_1}{mdc\ (n_1 n_2)}\ ,$$

temos que $n_1|m$ e $n_2|m$. Portanto, m é um múltiplo comum de n_1e n_2.

Seja c um múltiplo comum de n_1e n_2; logo, $c = an_1 = bn_2$, para a, $b \in \mathbb{N}$. Decorre que:

$$a\,\frac{n_1}{mdc\ (n_1 n_2)} = b\,\frac{n_2}{mdc\ (n_1 n_2)}\ .$$

Já sabemos que $\frac{n_1}{mdc\ (n_1\, n_2)}$ e $\frac{n_2}{mdc\ (n_1\, n_2)}$ são primos entre si, segue-se, que $\frac{n_1}{mdc\ (n_1\, n_2)}$ divide *b*, e, portanto, $m = \frac{n_1}{mdc\ (n_1\, n_2)} n_2$ divide bn_2 que, é igual a *c*.

Corolário

Se n_1 e n_2 são números inteiros primos entre si, então mmc $(n_1, n_2) = n_1 n_2$.

Vamos ampliar agora a definição de mmc de dois números naturais para o mmc de *k* números naturais:

Um número natural *m* é um mmc dos naturais não nulos $n_1 \ldots n_k$, se *m* é um múltiplo comum de $n_1, \ldots, n_k$, e, se para todo múltiplo comum *c* desses números, tem-se que $m|c$.

É fácil ver que o mmc, se existe, é o único, sendo denotado por mmc$(n_1, \ldots, n_k)$.

Proposição 9

Sejam $n_1, \ldots, n_k$ números naturais não nulos. Então existe o número mmc$(n_1, \ldots, n_k)$ e

$$mmc\ (n_1, \ldots, n_{k-1,} n_k) = mmc\ (n_1, \ldots, mmc(n_{k-1,} n_k)).$$

Demonstração

Seja $m = mmc(n_1, \ldots, mmc(n_{k-1,} n_k))$. Logo, $n_1, \ldots, n_{k-2}$ e $mmc(n_{k-1,} n_k)$ dividem *m*. Como $n_{k-1} | mmc(n_{k-1,} n_k)$ e $n_k | mmc(n_{k-1,} n_k)$, segue que *m* é um múltiplo comum de $n_1, \ldots, n_k$.

Por outro lado, suponha que *c* seja múltiplo comum de $n_1, \ldots, n_k$. Logo, $n_1 | c, \ldots, n_{k-2} | c$ e $mmc(n_{k-1,} n_k) | c$; daí segue que *c* é múltiplo de $m = mmc(n_1, \ldots, mmc(n_{k-1,} n_k))$.

1.5 Números Primos

O conceito de número primo é um dos mais importantes na Matemática. Estes números desempenham papel fundamental na Teoria dos Números e estão associados a muitos problemas famosos que permanecem sem soluções apesar dos esforços de vários matemáticos ao longo dos anos.

1.5.1 Conceito e propriedades

Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores 1 e ele próprio é chamado de *número primo*.

Dados dois números primos p e q e um número inteiro n qualquer, decorrem da definição acima os seguintes fatos:

i) Se $p|q$, então $p = q$.

De fato, como $p|q$e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta$p = q$.

ii) Se $p \nmid n$, então $mdc(p, n) = 1$.

De fato, se $mdc(p, n) = d$, temos que $d|p$ e $d|n$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid n$ e, consequentemente, $d = 1$. Um número maior do que 1 e que não é primo será dito *composto*.

Portanto, se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de$n$ tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que

$$n = n_1 n_2, \qquad \text{com } 1 < n_1 < n \text{ e } 1 < n_2 < n$$

<u>Lema de Euclides</u>

Sejam $n_1, n_2, p \in \mathbb{N}$, com p primo. Se $p|n_1n_2$, então $p|n_1$ou $p|n_2$.

Demonstração

Se $p|n_1$ não há mais o que demonstrar. Suponha que $p \nmid n_1$. Então mdc $(p, n_1) = 1$, e o resultado segue-se do Lema de Gauss.

A propriedade descrita acima pode ser utilizada para caracterizar a noção de número primo.

Corolário

Se p, $p_1,\ldots, p_n$ são números primos e se $p|p_1 \ldots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1,\ldots, n$.

Demonstração

Use o Lema de Euclides, indução sobre n e o fato de que, se $p|p_i$, então $p = p_i$.

1.5.2 O conjunto dos números primos é infinito

É no livro IX, na proposição 20, que está o resultado mais interessante da obra. Nesta proposição, Euclides prova que há infinitos números primos, usando a redução ao absurdo: Suponha seja finito o número de primos. Tome P como sendo o produto de todos esses números e ainda, consideremos, K = P + 1. Logo, K não pode ser primo, pois a hipótese seria contrariada, uma vez que P é produto de todos os primos. Assim, só nos resta afirmar que K é composto e deve então ser medido por algum p, primo. Porém, p não poderia ser um fator de P, pois automaticamente seria também fator de 1. Assim, p é um primo diferente daqueles que são fatores de P, levando ao absurdo.

1.5.3 A distribuição dos números primos

Sabendo que existem infinitos números primos, podemos nos perguntar como obter uma lista contendo os números primos até uma dada ordem. Um dos mais antigos métodos para elaborar tabelas de números primos é devido ao matemático grego Eratóstenes, que viveu por volta de 230 anos antes de Cristo. O método, chamado de *Crivo de Eratóstenes*, permite determinar todos os números primos até a ordem que se desejar, mas não é muito eficiente para ordens muito elevadas.

Como exemplo, vamos utilizar o crivo de Eratóstenes para encontrar os números primos menores que 120.

Primeiramente, escrevemos todos os números naturais de 2 a 120. Em seguida riscaremos todos os números compostos seguindo a seguinte procedimento:

Primeiro riscamos todos os múltiplos de 2 maiores que 2, que é o primeiro número primo.

O segundo número primo é o menor número maior que 2 que não foi riscado, isto é, o 3. Agora riscamos todos os múltiplos de 3 maiores que 3 (note que alguns já foram riscados).

O menor número maior que 3 que ainda não foi riscado, o 5, é o terceiro número primo. Então riscamos todos os múltiplos de 5 maiores que 5 (os que ainda não foram riscados).

Por fim, riscaremos os múltiplos do 4º número primo (com exceção dele mesmo) que é o menor número maior que 5 ainda não riscado, isto é, o 7.

O lema a seguir, devido ao próprio Eratóstenes, nos mostra que para encontrar os primos menores que 120 não precisamos repetir além do número 7 o procedimento descrito acima.

<u>Lema</u>

Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.

<u>Demonstração</u>

Se n é composto então ele é divisível por algum primo p. Se $p^2 \leq n$ nada há para demonstrar. Se, por outro lado $p^2 > n$ então $n = pn_1$ com $n_1^2 \leq n$, pois se $n_1^2 > n$ então $n^2 = (pn_1)^2 = p^2 n_1^2 > nn = n^2$, o que é uma contradição. Se n_1 é primo nada há mais para demonstrar. Se, porém, n_1 é composto então existe um primo $q < n_1$ que divide n_1 e portanto n e, assim, $q|n$ e $q^2 < n$.

Portanto, na nossa tabela de números de 2 a 120, devemos ir até alcançarmos o primo 7, pois o próximo primo é 11, cujo quadrado supera 120.

TABELA 1 TABELA DE NÚMEROS

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~
109	~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

Fonte: Autora, 2015.

Note que o Lema acima também nos fornece um teste de primalidade, pois, para verificar se um dado número n é primo, basta verificar que não é divisível por nenhum primo p menor que $\sqrt{n}$. Não existe um padrão em relação à proximidade de dois primos consecutivos.

Note, por exemplo, que na tabela acima vemos que há vários pares de números primos que diferem de duas unidades. Números primos com essa propriedade são chamados *primos gêmeos*. Não se sabe ainda se existem infinitos pares de primos gêmeos.

Em contrapartida existem também primos consecutivos arbitrariamente afastados.

Observe que, dado n, a sequência

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, ..., (n + 1)! + n + 1.$$

de números naturais é formada por n números consecutivos compostos. Repare que o k-ésimo número desta sequência é divisível por k + 1.

Em relação a densidade de números primos em um determinado intervalo, denotemos por $\pi(n)$, a quantidade de números primos menores ou iguais a n.

Legendre e Gauss, analisando tabelas, chegaram à conclusão de que essa função tem um crescimento próximo ao de $\frac{n}{\ln n}$. Por volta de 1900, J. Hadamard e Ch. de la Vallée Poussin, independentemente, provaram o profundo *Teorema dos Números Primos*, cujo enunciado é simplesmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{-1} = 1.$$

1.6 Teorema Fundamental da Aritmética

1.6.1 Enunciado e Demonstração

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração

Provaremos por indução sobre um número natural $n \geq 2$. Para $n = 2$, o resultado se verifica. Partiremos do princípio que o resultado é válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Então, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1,\ldots,p_r$ e $q_1,\ldots,q_s$ tais que $n_1 = p_1,\ldots,p_r$ e $n_2 = q_1,\ldots,q_s$. Portanto, $n = p_1,\ldots,p_r q_1,\ldots,q_s$.

Vamos, agora, provar a unicidade da escrita. Suponha que tenhamos $n = p_1,\ldots,p_r = q_1,\ldots,q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 | q_1,\ldots,q_s$, pelo corolário acima, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1,\ldots,q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \ldots p_r = q_2 \ldots q_s.$$

Como $p_2 \ldots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares

1.6.2 Aplicações do teorema fundamental da aritmética

Uma das aplicações mais recorrentes do TFA em turmas do Ensino Básico é o uso do mesmo para determinar a quantidade de divisores de um número natural n.

Seguem duas proposições que nos darão uma fórmula pra encontrar o quantitativo de divisores e ainda uma outra não tão usual, que nos fornece o valor da soma dos divisores de um número natural.

Proposição 10

Seja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ um número natural. Se m é um divisor positivo de n, então:

$$m = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}, \text{ onde } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \text{ para } i = 1,\ldots, r.$$

Demonstração

Considere m um divisor de n e seja p^{β} a potência de um primo p presente na decomposição de m em fatores primos. Como $p^{\beta}|n$, decorre que p^{β} divide algum $p_i^{\alpha_i}$, por ser primo com os demais $p_j^{\alpha_j}$, e, consequentemente, $p = p_i$ e $0 \leq \beta \leq \alpha_i$.

Proposição 11

Seja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, a decomposição de um número $n > 1$ nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então, o número de divisores positivos de n e a soma de todos esses divisores estão dados, respectivamente, por

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

$$s(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Demonstração

Constatamos na proposição anterior que existem tantos divisores positivos de n quanto números da forma

$$m = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}, \text{ onde } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \text{ para } i = 1, \ldots, r.$$

Note que, de acordo com tal critério, os divisores positivos de n são todos os termos do desenvolvimento do produto

$$S = (p_1^0 + p_1^1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot (p_2^0 + p_2^1 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots (p_r^0 + p_r^1 + \ldots + p_r^{\alpha_r})$$

Como cada parênteses contém $\alpha_i + 1$ parcelas, $1 \leq i \leq r$, logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos que o total de divisores de n e consequentemente o total de termos de S é:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$$

Por construção temos que S = s(n). Tomando a fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica, temos:

$$p_i^0 + p_i^1 + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1},\ 1 \leq i \leq r.$$

Logo,

$$s(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

A decomposição de números naturais em fatores primos revela toda a estrutura multiplicativa desses números. Podemos então, a partir dela encontrar o mdc e o mmc de dois números naturais n_1 e n_2. Seguem os teoremas que fundamentam essa outra aplicação do TFA também explorada em classes do Ensino Básico.

<u>Teorema</u>

Sejam $n_1 = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ e $n_2 = p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n}$. Pondo

$$\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \qquad \delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tem-se que

(i) mdc(n_1, n_2) = $p_1^{\gamma_1} \ldots p_n^{\gamma_n}$.

(ii) mmc(n_1, n_2)= $p_1^{\delta_1} \ldots p_n^{\delta_n}$.

<u>Demonstração</u>

(i) Sabemos que $p_1^{\gamma_1} \ldots p_r^{\gamma_r}$ é um divisor comum de n_1e n_2. Seja c um divisor comum de n_1e n_2; logo, $c = p_1^{\varepsilon_1} \ldots p_r^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_i \leq \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e, portanto,

$c|p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$. Como todo divisor comum de n_1e n_2 é divisor de $p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$, temos que: mdc($n_1$, n_2) = $p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$.

(ii) Sabemos que $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$é um múltiplo comum de n_1e n_2.Seja m um múltiplo como de n_1 e n_2, logo, m =$p_1^{\varepsilon_1}...p_r^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_i \geq$ max{α_i, β_i} e, portanto, $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}|m$. Como $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$ é divisor de todo múltiplo como de n_1e n_2 , temos que : mmc(n_1, n_2) =$p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$.

2 O TESTE DIAGNÓSTICO

Além das pesquisas nacionais relatadas na introdução, pesquisas internacionais também motivaram o nosso estudo. Os onze estudos organizados na obra de Campbell e Zazkis (2002) abordam a Teoria dos Números e discutem questões como o uso da linguagem e das metáforas no seu ensino e as provas e demonstrações na formação de professores. Entre eles, priorizamos os estudos de Campbell (2002), Brown et al. (2002) e Teppo (2002), porque se voltam para a estrutura multiplicativa e a decomposição de números em fatores primos, ou seja, nosso objeto matemático.

É um aspecto consensual entre os pesquisadores a relevância do estudo da Teoria Elementar dos Números desde a educação básica, porque, aplicando seus conhecimentos da estrutura multiplicativa nesse contexto, os alunos terão oportunidades valiosas para enriquecer sua compreensão das propriedades de multiplicação e divisão. Por meio das respostas e justificativas dos sujeitos a situações problema que envolvem o conceito de número primo e a decomposição em fatores primos, os três estudos concluíram que alguns alunos frequentemente lidam com tarefas da Teoria dos Números sem usar de modo consciente seus conhecimentos da estrutura multiplicativa. Eles escolhem executar computações quando raciocinar sobre as computações bastaria. As respostas iniciais tendem aos cálculos em vez das inferências com base na observação da forma fatorada do número. Além disso, as respostas iniciais de todos os sujeitos revelam uma tendência para associar fortemente os conceitos de divisibilidade e divisor com a ação de dividir. Também foi típico associar o conceito de múltiplo com multiplicação ou soma de parcelas repetidas. Barbosa (2008) resumindo os resultados destas pesquisas sinaliza a necessidade de um trabalho voltado para a Teoria dos Números que faça distinções entre:

1. Números inteiros e números racionais não negativos
2. Unidades indivisíveis e divisíveis;
3. Divisão de número inteiro com resto e divisão de número racional;
4. Abordagens inteiras e fracionais para a divisão com resto usando calculadoras;
5. Divisão quotitativa e partitiva.

Os sujeitos das pesquisas organizadas por Campbell e Zazkis (2002) são diferentes dos sujeitos envolvidos em nossa investigação: trabalhamos com alunos do Ensino Fundamental enquanto esses pesquisadores trabalharam com professores em formação. No entanto, a experiência de Barbosa (2008) revelou que certas concepções e procedimentos empregados pelos professores em formação, quando confrontados com da Teoria dos Números, também podem ser percebidos na conduta dos alunos do Ensino Fundamental. Por isso acreditamos que os dados destas pesquisas nos ajudarão na interpretação dos resultados do teste diagnóstico que apresentamos neste aqui.

Este capítulo aborda a pesquisa realizada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular do Rio de Janeiro. Nessa pesquisa, aplicamos um teste diagnóstico a partir do qual pretendíamos obter informações referentes à relação que os alunos já estabeleciam com os conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, (propriedades da multiplicação, as relações múltiplo e fator e suas propriedades, números primos e compostos, decomposição de um número em fatores primos). O que já dominavam plenamente? A que estratégias recorriam para solucionar problemas? Que erros cometiam com frequência?

O teste diagnóstico foi elaborado e apresentado na pesquisa de Barbosa (2008) e, segundo essa autora, nele é possível perceber as influências da Teoria dos Campos Conceituais. O teste abarca uma gama de conceitos e não apenas um conceito isolado e é composto por situações problema que favorecem, entre outras coisas, a utilização de várias representações. Acredita-se, nessa teoria, que o sujeito é o próprio construtor do seu conhecimento. Quando confrontados com um problema, os alunos mobilizam e engendram uma série de esquemas mentais. Decidimos retomá-lo e aplicá-lo novamente, pois acreditamos que ele permite coletar dados significativos para a criação de uma intervenção de ensino voltada para o 6º ano do Ensino Fundamental.

Trabalhamos com uma turma de 6º ano que possui 27 alunos, portanto não temos a intenção de enfatizar dados estatístico nem de generalizar os fatos que observamos. Por isso, embora apresentemos números e/ou percentuais de erros e acertos por questão, nosso interesse maior é descrever os tipos de estratégia e os tipos de erros cometidos pelos alunos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa.Tendência crescente no panorama educacional, a pesquisa qualitativa vem se voltando, especialmente, para o interior da escola. Nessa aproximação, procura captar seu cotidiano, extraindo dele os elementos capazes de construir novos conhecimentos a respeito desse universo (LÜDKE 1984; LÜDKE E ANDRÉ 1986; EZPELETA E ROCKWELL, 1986). Reconhece-se a importância de se analisar o que se passa em sala de aula, sobretudo na situação de ensino e aprendizagem, usando metodologias de cunho mais qualitativo. Na nossa pesquisa, por ser pequeno o número de sujeitos envolvidos (27 alunos de uma única turma), identificamo-nos com a metodologia *estudo de caso.*

2.1 Delineamento da Pesquisa

O teste foi aplicado numa aula de matemática que ocupava dois tempos seguidos de 50 minutos, ou seja, extraindo-se o tempo gasto com o esclarecimento da proposta e organização da turma, os alunos tiveram cerca de 90 minutos para realizar o teste. Isso ocorreu no início do mês de junho, pouco antes de a professora de matemática revisar os conteúdos presentes no teste. É importante lembrar que os PCN sugerem o ensino desses conteúdos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e a escola segue essa orientação, portanto sabíamos que, quase toda a turma já havia estudado no 4º e no 5º ano os conteúdos que seriam exigidos no teste. Durante toda a aplicação, estivemos presentes na sala juntamente com a professora de Matemática da turma. Os alunos trabalharam individualmente e não podiam consultar nenhum material escrito, podiam somente manipular as embalagens e formas (embalagens de ovos, formas de gelo e formas para bombons e pirulitos) citadas na primeira questão do teste, que foram mostradas para toda a turma no início do teste e disponibilizadas para quem os solicitasse.

2.2 Teste Diagnóstico

O teste é um material escrito com nove questões, sendo três delas com subitens. Apresentamos aqui cada questão acompanhada de sua análise e o disponibilizamos tal como foi aplicado no anexo.

Antes de autorizarmos os alunos a começar, fizemos uma leitura em voz alta e pausadamente para a turma. Não explicávamos aos alunos o que deveriam fazer nas questões, mas líamos os enunciados para eles quantas vezes fossem necessárias. Além do material manipulativo já descrito, os alunos tinham à disposição folhas de rascunho para efetuar os cálculos que julgassem necessários. Entre os diversos conceitos pertencentes ao campo conceitual multiplicativo e associados ao TFA, de acordo com Barbosa (2008), foram abordados:

1. Representação para produtos envolvendo três fatores;
2. Produção e manipulação de igualdades matemáticas com base na complementaridade entre multiplicação e divisão;
3. Identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores;

4. Identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos;
5. Uso da decomposição dos números em fatores primos para simplificar cálculos. (p. 90)

Com relação à descrição desses itens, Barbosa (2008) esclarece ainda que:

> Sabemos da Matemática formal que o produto só pode ser efetuado, por definição, entre dois fatores. O que estamos nomeando produto de três fatores, corresponde ao emprego da propriedade associativa da multiplicação. Estamos empregando a expressão *manipulação de igualdades matemáticas* para nos referirmos à obtenção de outras igualdades a partir de uma dada. Por exemplo, da igualdade *8 : 2 = 4*, podem ser obtidas as igualdades *8 : 4 = 2* e *2 x 4 = 8* (BARBOSA, 2008: 90).

Dessa forma, podemos dizer que o teste diagnóstico está dividido em cinco blocos. Cada item acima corresponde a um bloco. A tabela a seguir oferece um panorama das questões por bloco:

TABELA 1 PANORAMA DAS QUESTÕES

Bloco	Questões
Representação para produtos envolvendo três fatores.	Q1a e Q1b
Produção e manipulação de igualdades matemáticas com base na complementaridade entre multiplicação e divisão.	Q1a, Q1b, Q9a, Q9b e Q9c
Identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores.	Q3, Q4 e Q5
Identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos.	Q6 e Q7
Uso da decomposição dos números em fatores primos para simplificar cálculos.	Q8a, Q8b, Q8c, Q8d

Fonte: A autora, 2015.

A média de acertos da turma no teste foi de 35%. A segunda questão não teve acertos e muitos alunos a deixaram completamente em branco por isso ela não é considerada neste estudo. Nas correções das demais questões não buscávamos apenas diferenciar o que estava certo do que estava errado. Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, há uma série de conhecimentos nos procedimentos (certos ou errados) empregados pelos alunos. Além disso, concordamos com Pinto (2000) quando afirma que o erro é parte integrante do processo de construção do conhecimento do aluno.

Pesquisando especificamente sobre o erro no processo de aprendizagem da Matemática, Pinto sugere que:

> discutir suas condições de existência poderia gerar um questionamento fecundo do trabalho desenvolvido no ensino da Matemática e sinaliza que o erro apresenta-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua cidadania (PINTO, 2000: 11).

No caso da nossa proposta os erros bem como as estratégias de resolução empregadas pelos alunos serviram de base para a construção da intervenção de ensino. Na próxima seção, passamos à apresentação e análise dos erros e estratégias por bloco de questões.

2.2.1 Desempenho nas questões de representação para "produtos envolvendo três fatores" (Q1a e Q1b)

O primeiro bloco é formado pelos dois itens da primeira questão, descritos no quadro a seguir.

QUADRO 1 QUESTÕES Q1A E Q1B DO TESTE DIAGNÓSTICO

1) Você está observando embalagens para ovos e para bombons e fôrmas para fazer bombons, pirulitos e gelo. As embalagens são: uma delas para uma dúzia de ovos e outra para 15 bombons FERRERO. Com as fôrmas posso fazer 12 bombons *flor* ou 20 coraçõezinhos ou 3 pirulitos. Ou ainda 18 cubinhos de gelo.

a) Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho

Igualdade matemática: ___ x 2 x ___ = ___

b) E se você quiser desenhar 4 embalagens de bombom FERRERO. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho

Igualdade matemática: ___ x ___ x 5 = ___

Fonte: A autora, 2015.

Para Barbosa (2008), por meio desta questão é possível "investigar se os alunos são capazes de atribuir significados para e estabelecer correspondência entre as diferentes representações e o produto de três números" (p. 91). Como pode ser observado, na Figura 3.1, Para cada situação proposta, existem duas representações distintas: os desenhos e as igualdades matemáticas. Como Coelho et al. (2005) e Barbosa (2008) sinalizam o raciocínio sobre estruturas multiplicativas podem favorecer a compreensão da decomposição em fatores primos e seu uso na simplificação de cálculos, por isso julgamos importante avaliar o desempenho dos alunos neste tipo de questão.

Disponibilizamos sobre a mesa da professora os materiais que mencionamos nos dois itens para que os alunos os manipulassem, caso necessitassem. Nossa expectativa era de que eles tivessem pouca necessidade de fazer isso, bastando-lhes observá-los a certa distância. Entretanto, todos queriam ter em mãos as formas e as embalagens. Alguns queriam pegar no material por curiosidade, outros para conferir o que fizeram inicialmente, sem a manipulação. Foram considerados corretos os desenhos dos objetos que descreviam a organização retangular das unidades que os compunham. Por exemplo, no caso da embalagem de ovo, o desenho esperado era aquele que descreve a organização retangular de seis fileiras, cada uma com duas unidades. No caso da embalagem de bombom, tratava-se de outra organização retangular, sendo cinco fileiras, cada uma com três unidades. A posição dos retângulos poderia variar em função do ângulo de observação dos alunos. Os desenhos dos retângulos deveriam ser repetidos o número de vezes que as embalagens eram citadas nos enunciados das questões. As igualdades esperadas eram $5 \times 2 \times 6 = 60$ e $4 \times 3 \times 5 = 60$, respectivamente.

O primeiro item teve aproximadamente 40% de acertos e o segundo, 38%. O erro mais comum foi representar apenas uma embalagem, desconsiderando o número de embalagens sugerido nos enunciados. Nesses casos, as igualdades matemáticas produzidas foram $2 \times 6 = 12$ e $3 \times 5 = 15$ e os alunos não fizeram uso do espaço destinado para o terceiro número que deveria ser usado para indicar o número de embalagens**.** Este tipo de erro nos sugere duas interpretações possíveis: a primeira é que os alunos tiveram dificuldade na leitura e interpretação dos enunciados, não compreendendo o que lhes era solicitado, e a segunda é que estes alunos ou parte deles ainda não conseguem atribuir significado ao produto envolvendo três números. Ainda não dominam plenamente a classe de situações que envolvem o produto de três números. Desta forma, aproximam estas situações daquelas que envolvem o produto de dois números, que já dominam plenamente, e dão-lhes o mesmo tratamento. Como são classes distintas, o mesmo tratamento lhes conduz ao erro.

Outro erro bastante frequente foi desenhar qualquer representação retangular que representasse o total de unidades. Assim, cientes de que o número de unidades de ovos e bombons é 60, os alunos desenhavam qualquer configuração retangular cujo produto do número de linhas pelo número de colunas fosse 60. Esse procedimento também foi verificado nos desenhos por embalagem. Cientes de que, na embalagem dos ovos, havia 12 unidades e, na embalagem de bombons, havia 15 unidades, os alunos desenhavam qualquer configuração retangular cujo produto do número de linhas pelo número de colunas fosse, respectivamente, 12 e 15. Para nós, isto pode ser uma evidência de um ensino de matemática que sempre enfatizou o resultado de cálculos, deixando para segundo plano ou desconsiderando o significado dos números envolvidos nos cálculos.

Para Vergnaud (1990), esquema é a organização invariante da ação do sujeito para dar conta de uma classe de situações. Sendo assim, entendendo que os itens a e b pertencem à mesma classe de situações, nos casos de acerto, foi possível reconhecermos o esquema mobilizado pelos alunos para transferir o conteúdo do texto escrito no enunciado para o desenho: desenhar uma coluna com a quantidade de elementos informados e repetir este procedimento até obter o total de unidades que haviam calculado mentalmente ou no rascunho.

Neste caso, inferimos que o aluno reconhece na ação, embora não consiga generalizar formalmente que o total de unidades é múltiplo do número de elementos de cada coluna e adiciona seguramente parcelas repetidas desse número até obter o total. Por ser um conhecimento presente na ação do aluno para dar conta da situação, trata-se do que Vergnaud (1990) nomeia teorema-em-ação. Os conceitos de adição, de multiplicação como a soma de parcelas repetidas, a reversibilidade entre multiplicação e divisão, as noções de representação retangular, de coluna, de unidade e de igualdade são também invariantes operatórios presentes nesta ação, mas como elementos constituintes do teorema-em-ação e, por isso, são exemplos de conceitos-em-ação.

2.2.2 Desempenho nas questões de produção e manipulação de igualdades matemáticas (Q1a, Q1b, Q9a, Q9b, Q9c)

Além das questões Q1a e Q1b apresentadas na seção anterior, o segundo bloco ainda é composto pelas questões Q9a, Q9b e Q9c, que são apresentadas no Quadro 2 a seguir:

QUADRO 2 QUESTÕES Q9A, Q9B E Q9C DO TESTE DIAGNÓSTICO

9) Resolva a questão abaixo:

a)
Dividi 50 por 5. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei
como resultado o cociente igual a ___________.

Agora observe atentamente o que você fez e, em seguida, complete os outros itens.
Não deixe de explicar o que você fez ou pensou para completar:

b)
Dividi _________ por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e
encontrei como resultado o cociente igual a 8.

Explicação:

c)
Dividi 36 por _____________. Dividi o cociente encontrado por 2 e
encontrei como resultado o cociente igual a 2.

Explicação:

Fonte: A autora, 2015.

Segundo as pesquisas de Campbell e Zazkiz (2002), o uso da decomposição em fatores primos para favorecer o cálculo mental e a otimização de cálculos, de um modo geral, pressupõe que o sujeito saiba escrever igualdades matemáticas que envolvam multiplicações e saiba, também, manipular estas igualdades, obtendo outras a partir de uma conhecida. Por isso, no segundo bloco, apresentamos duas questões: uma com dois itens (Q1a e Q1b) cujo objetivo é produzir igualdades matemáticas para representar situações do campo multiplicativo e a outra, com três itens, (Q9a, Q9b e Q9c), que requer a manipulação de duas igualdades simultaneamente.

Nos três itens da questão 9 são oferecidos textos em que algum termo é desconhecido e deve ser identificado. Para resolver Q9a, basta que o aluno realize as operações na ordem em que são enunciadas. O último resultado é o valor procurado. Assim, nossa expectativa era que os alunos não sentissem maiores dificuldades ao solucioná-la, o que foi confirmado pelos 92% de acerto.

Já em Q9b e Q9c os termos desconhecidos poderiam ser obtidos por meio da escrita de igualdades matemáticas e da aplicação de conhecimentos da reversibilidade entre multiplicação e divisão. Por exemplo, para resolver Q9b, o aluno deveria escrever $a : 3 = b$ e $b : 2 = 8$. Manipulando a última igualdade, obteria $b = 8 \times 2 = 16$ e, substituindo b na primeira igualdade, identificaria $a = 16 \times 3 = 48$. Entretanto, dos 27 alunos apenas 3 adotaram este procedimento. Os restantes recorreram às tentativas e estimativas.

O erro mais comum foi cometido pelos alunos que consideravam apenas uma das duas ações informadas no texto. Assim, para Q9b, uma resposta frequente foi 16, pois os alunos só consideravam a parte final do enunciado *"Dividi o quociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o quociente igual a 8".* Entendemos que este procedimento é consequência da obtenção, embora mental, de igualdades matemáticas a partir da igualdade $a : 2 = 8$. Houve, ainda, casos em que os alunos também buscavam mentalmente, mas, por meio de tentativas, o número que dividido por 2 resulta 8.

A estimativa e o uso da reversibilidade entre multiplicação e divisão também foram os procedimentos predominantes nas soluções corretas. Eles predominaram inteira ou parcialmente nas soluções. No último caso, tivemos o que chamamos de estratégia mista. O aluno empregava a reversibilidade para resolver parte do enunciado e, em seguida, fazia estimativas para resolver a parte que restava.

Pudemos verificar um exemplo da estratégia mista no registro deixado por um aluno no teste. Para resolver Q9c, o aluno empregou a reversibilidade para obter o número 4 e estimou o número que deveria multiplicar por 4 para obter 36. As expressões *4 x 1, 4 x 2, 4 x 3, 4 x 4, 4 x 5, 4 x 6* deixadas no espaço destinado à explicação mostraram a busca do aluno até encontrar o número 36.

Sendo assim, constatamos que a reversibilidade entre a multiplicação e a divisão foi um conhecimento subjacente às ações dos alunos, ou seja, um teorema-em-ação. Entre os conceitos que lhe dão sustentação, designados conceitos-em-ação, temos os algoritmos das duas operações e as tabuadas.

Com base na análise das soluções dos alunos, inferimos ainda sobre o grau de dificuldade das questões Q9b e Q9c. São questões extremamente complexas, pois requerem a identificação sucessiva de dois termos desconhecidos e a coordenação de mais de um esquema mental.

2.2.3 Desempenho nas questões de identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores (Q3, Q4 e Q5)

Para compreender a decomposição de um número em fatores primos e, consequentemente, usá-la na otimização de cálculos e na realização de cálculos mentais, é preciso, antes de tudo, que o aluno admita a possibilidade de decompor um número em fatores, ou seja, escrevê-lo como produto de dois ou mais fatores. Nossa experiência, adquirida lecionando Matemática para turmas do Ensino Fundamental há cerca de 20 anos, associada às pesquisas de Campbell e Zazkis (2002) nos sugeriu que esta não é uma ideia facilmente concebida pelos alunos.

Tanto em nossa prática profissional como na leitura dos artigos organizados por esses pesquisadores, percebemos que há alunos que, frente a um número, aplicam processos para fazer sua decomposição em fatores, obtêm-na satisfatoriamente, entretanto, não associam a decomposição que obtiveram ao número tomado inicialmente no processo. Assim, por exemplo, o aluno obtém *2 x 3 x 5* a partir do 30, mas não reconhece que 30 pode ser substituído por *2 x 3 x 5* em determinadas situações problema. É por isso que as questões do terceiro bloco estão relacionadas à identificação dos fatores de um número e à sua decomposição em fatores. No Quadro 3, temos as três questões (Q3, Q4 e Q5) que o compõem.

QUADRO 3 QUESTÕES Q3, Q4 E Q5 DO TESTE DIAGNÓSTICO

3) João multiplicou dois números naturais e encontrou 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado: ______x ______= 36 ou _____x______ = 36 ou ______x______ = 36 ou ______x ______= 36 ou _____x_____ = 36 4) Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3 x 5 = 15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles? 5) O número 7 possui quantos fatores? Quais são eles?

Fonte: A autora, 2015.

Na primeira, foi solicitado dos alunos esgotar todas as possibilidades de decompor um número em um produto de dois fatores. Na segunda e na terceira questão, propusemos o reconhecimento dos fatores de um número composto e de um número primo, respectivamente, por meio da observação das decomposições feitas na questão anterior. Como as noções de múltiplo e fator já haviam sido estudadas nos anos anteriores, esperávamos que os alunos relembrassem estas noções, mas isto não lhes foi possível. Os percentuais de acerto em Q3, Q4 e Q5 foram, respectivamente 38%, 15% e 29%.

Em Q4 e Q5, cálculos errados e a identificação dos fatores com os produtos foram as causas dos erros cometidos pelos alunos. Por exemplo, ao produzirem a falsa igualdade *3 x 13 = 36*, alguns alunos indicavam 3 e 13, como fatores de 36. Já, ao identificarem os fatores com o produto, os alunos, em vez de escreverem que os fatores de 36 são 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, consideravam que a resposta certa era os produtos que haviam escrito na questão anterior: *2 x 18, 3 x 12, 4 x 9, 6 x 6, 1 x 36*. Assim, aqueles que cometeram este tipo de erro escreveram que o 36 possui 5 fatores. Este equívoco foi bastante frequente e, com base nas pesquisas de Campbell e Zazkis (2002) e Barbosa (2002), inferimos que tal ocorrência revela a tendência dos alunos para associar fatores à divisão e múltiplos à multiplicação.

Voltando-nos para Q3, as omissões dos produtos *3 x 12*, *2 x 18*, *6 x 6* e *1 x 36* foram os erros que nos chamaram atenção. Os produtos *3 x 12* e *2 x 18* foram esquecidos, pois, como verificamos nos diálogos informais com os alunos, não constam nas tabuadas de 1 a 10, que eles memorizaram desde os anos iniciais, e era exatamente nelas que eles buscavam produtos que resultassem em 36. Já as omissões dos produtos *6 x 6* e *1 x 36* ocorreram porque, para os alunos, era necessário que os números a serem multiplicados fossem diferentes e não fazia sentido que o próprio 36 fosse usado como fator.

Cabe mencionar ainda que, não tendo escrito todos os produtos, sobravam lacunas em branco que, em alguns casos, foram preenchidas envertendo-se a ordem dos fatores de produtos que já haviam sido utilizados. Por exemplo, um aluno que não escreveu os produtos *3 x 12* e *2 x 18*, aplicou a propriedade comutativa e preencheu as lacunas que haviam sobrado com com *4 x 9* e *9 x 4*. Mesmo as falsas igualdades, provenientes de erros de cálculos, tiveram a ordem dos fatores invertida. Esta atitude dos alunos foi um exemplo do processo de equilibração e acomodação de esquemas descrito por Vergnaud (1990) na Teoria dos Campos Conceituais. Eles possuíam esquemas suficientes para dar conta do preenchimento de algumas lacunas: aquelas cujos pares de números se encontram nas tabuadas de 1 a 10. Mas encontrar os pares cujo produto é 36 que não constam nas tabuadas de 1 a 10 constituiu-se um situação conflituosa para eles. Assim, foram buscar na bagagem de esquemas que já dominavam, algum esquema que pudesse ajudá-los a lidar com a situação. Encontraram este que tem como invariante operatório a propriedade comutativa da multiplicação, entretanto ele não contribuiu para que o conflito fosse desfeito. Afinal, desconsiderando-se a ordem, os pares eram os mesmos e aqueles esperados não foram encontrados.

Além da observação das tabuadas, outro procedimento empregado pelos alunos em Q3 foi a busca dos fatores com base na reversibilidade entre multiplicação e divisão. Um esquema muito comum empregado para a obtenção dos fatores de 36 foi realizar a divisão deste número pela sequência dos números naturais e selecionar aqueles cuja divisão foi exata. Trata-se de um esquema em que os alunos tinham, inclusive, o controle de suas ações: sabiam que o processo não deveria ser repetido indefinidamente. Alguns o interrompiam quando dividiam por 18, alegando que “depois do 18, que é o meio, só o 36 mesmo” e outros o interrompiam apenas quando dividiam por 36. Nas divisões, por sua vez, ora armavam cálculos, ora empregavam critérios de divisibilidade. Acertavam frequentemente quando usavam os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 e erravam os critérios por 3 e 9.

2.2.4 Desempenho nas questões de identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos (Q6 e Q7)

O quarto bloco teve objetivos semelhantes ao terceiro, mas nele procuramos enfatizar a identificação dos fatores primos de um número e a decomposição de números naturais em fatores primos. O quadro a seguir apresenta as duas questões referentes a este bloco:

QUADRO 4 QUESTÕES Q6 E Q7 DO TESTE DIAGNÓSTICO

6) Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.
7) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

Fonte: A autora, 2015.

Como pode ser observado, em Q6, os alunos deveriam decidir se um número era primo utilizando a definição de número primo apresentada no enunciado, e, em Q7, foi solicitada a decomposição de um número em fatores primos. Esperávamos que eles, pelo menos, relembrassem as técnicas de decomposição de um número em fatores primos que estudaram exaustivamente nos anos anteriores, o que não ocorreu. Além disso, tanto neste bloco como no anterior, esperávamos que o fato de certas definições serem apresentadas nos enunciados, bastando aos alunos apenas interpretá-los, favorecesse a resolução das questões, mas isto também não ocorreu e o percentual de acertos de Q6 foi 55% e Q7 não teve acerto.

Reconhecer as estratégias empregadas pelos alunos que acertaram Q6 demandou algumas entrevistas e conversas informais. Isto porque nenhum deles deixou registros por escrito no teste. Embora houvesse espaço para isso, eles apenas escreveram suas respostas. Entre os que acertaram, a estratégia foi testar a sequência dos números naturais, listando mentalmente os fatores de cada número. Quando encontravam um fator diferente de 1 e do próprio número, partiam para testar o número seguinte.

Em Q6, também chamou a nossa atenção a reincidência de alguns alunos na identificação de conceitos ligados ao TFA com a multiplicação e a divisão. Assim como no bloco anterior em que os alunos identificaram os conceitos de fator e múltiplo com, respectivamente, divisão e multiplicação, neste bloco, identificaram o conceito de primo com uma multiplicação. Para responder Q6, por exemplo, um aluno escreveu “3 x 3, 5 x 5”, enquanto outro escreveu “1 x 5 e 1 x 7”.

Cabe mencionar ainda que, em Q6, quando os alunos listavam apenas números e não multiplicações, eles erravam por incluir algum número ímpar que não é primo em suas respostas. Boa parte dos alunos incluiu o número 9. Em conversas informais conosco sobre este fato alguns eles justificaram suas respostas com comentários como “todo número ímpar é “primo” e “todo número primo é ímpar”. Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, estes comentários revelam falsos teoremas-em-ação empregados pelos alunos.

Já em Q7, entre os erros cometidos, destacamos três tipos. O primeiro tipo está associado à dificuldade dos alunos de aceitar a decomposição em mais de dois fatores, dificuldade esta que já se fez presente no primeiro bloco de atividades. Para resolver a questão, o grupo que cometeu este tipo de erro listou os pares que usou para responder Q3.

O segundo tipo de erro corresponde a recorrer ao raciocínio aditivo para dar conta da situação. Neste caso, em vez de decompor 36 em fatores primos, os alunos decompuseram o número em parcelas. Em algumas decomposições, as parcelas eram números compostos, em outras, os alunos cuidaram de escolher parcelas que fossem números primos, como foi o caso de um aluno que decompôs 36 em doze parcelas iguais a 3. Este tipo de erro é mais um exemplo da aproximação de esquemas feita pelos alunos quando estão diante de situações que não dominam plenamente, fato mencionado por Vergnaud (1990). Ainda não dominando plenamente as estruturas multiplicativas, os alunos empregavam o raciocínio aditivo para resolver problemas relacionados a essas estruturas, o que os conduziu a erros.

No terceiro tipo de erro, os alunos não apresentavam decomposições e sim produziam a escrita na medida em que efetuavam os cálculos para decompor 36. Sendo assim, um aluno escreveu “36 : 2 = 18 : 3 = 6 : 2 = 3 : 3 = 1”. Esta escrita deixa claro que o aluno efetuou os cálculos necessários à decomposição, mas escreveu falsas igualdades matemáticas o que, em momentos subsequentes, não lhes favoreceriam avançar na construção dos conceitos. Para nós, estas escritas foram evidências de que nem todos os alunos compreendiam de fato o conceito de decomposição em fatores primos. Afinal, segundo Vergnaud (1990), as simbologias associadas ao conceito formam um dos conjuntos que o compõem. Julgamos que o uso desta simbologia inadequada certamente ofereceria algum tipo de obstáculo na interpretação e uso que deveriam fazer da decomposição de números em fatores primos.

2.2.5 Desempenho nas questões de uso da decomposição dos números em fatores primos para otimizar cálculos (Q8a, Q8b, Q8c e Q8d)

Finalmente, o quinto bloco serviu como instrumento para que identificássemos como os alunos procediam para obter o quociente entre dois números escritos em suas formas fatoradas e se reconheciam e aplicavam em situação problema a reversibilidade que existe entre a multiplicação e a divisão. O quadro 5 apresenta as questões que compõem este bloco:

QUADRO 5 Q8A, Q8B, Q8C, Q8D DO TESTE DIAGNÓSTICO

8) Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

a) João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou ....

b) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ......

c) Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ......

d) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é ......

Fonte: A autora, 2015.

O objetivo central de toda a intervenção de ensino era criar condições para que os alunos operassem com a decomposição dos números em fatores primos e realizassem simplificações e cálculos mentais. Com estas questões, desejávamos investigar se já realizavam tais ações. Assim, tínhamos a expectativa de que eles eliminassem fatores comuns para simplificar a obtenção do quociente, entretanto isto não aconteceu. Todos os alunos empregaram a mesma estratégia: efetuaram os produtos para, em seguida, calcular o quociente entre os resultados. Os erros produzidos decorreram apenas de erros de cálculos. Este, na verdade, é um resultado que reforça as ideias de Campbell (2002), Brown et al. (2002) e Teppo (2002) quando afirmam que, se não for feito um trabalho conceitual dos principais conceitos da Teoria dos Números, os alunos tenderão a calcular em vez de inferir com base nas decomposições dos números.

2.3 Considerações do Capítulo

Neste capítulo fizemos uma análise qualitativa dos resultados dos testes diagnósticos. Embora tenhamos apresentado percentuais de acertos por questão, nosso objetivo principal foi as estratégias e erros cometidos pelos alunos.

Com o teste, foi possível inferir sobre os conhecimentos apreendidos pelos alunos quando estudam os conteúdos ligados ao TFA no 4º e no 5º ano. Percebemos que esses assuntos precisam ser retomados no 6º ano. Apesar disso, há na ação das crianças, quando em situação problema, uma série de conhecimentos matemáticos implícitos. Muitas vezes, eles não conseguem verbalizar ou escrever com a simbologia matemática, ou seja, explicitá-los. É trabalho do professor criar condições para que os alunos consigam tornar explícitos os conhecimentos que estão implícitos em suas ações. Por isso, faz-se necessário pensar uma intervenção de ensino detalhada que perpasse todos os temas abordados na seção 2.2.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, faremos uma síntese da trajetória de nossa pesquisa e de seus principais resultados. Na sequência, com base nesses resultados, responderemos às questões de pesquisa que motivaram a realização deste estudo. Por fim, faremos algumas sugestões para futuras pesquisas.

3.1 A trajetória de nossa pesquisa

A presente pesquisa teve por objetivo geral apresentar o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e analisar suas possibilidades de ensino no 6º ano do Ensino Fundamental.

Para tanto aplicamos um teste diagnóstico numa turma de 6º ano. Este teste envolvia os principais conceitos associados ao TFA: conceitos de múltiplo e fator, primos e compostos e decomposição em fatores primos. A turma era composta por 27alunos do 6º ano e funcionava numa escola particular da zona norte do Rio de Janeiro. Salientamos que todo o grupo já havia estudado, em anos anteriores (4º e 5º anos), os assuntos abordados no teste e voltaria a estudá-los em junho, logo depois da aplicação do teste que ocorreu no final de maio de 2015.

Para alcançarmos o objetivo da pesquisa, traçamos um planejamento científico que envolveu algumas etapas. A primeira delas foi o estudo aprofundado do TFA e de pesquisas que se voltam para a sua compreensão e para a compreensão dos conceitos a ele associados por alunos de todos os níveis de ensino. Em seguida, aplicamos o teste diagnóstico e analisamos o desempenho dos alunos (suas estratégias e os erros que cometeram à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Por fim, com base nos dados do teste, identificamos as principais características que uma intervenção de ensino visando a compreensão do TFA por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, deve ter.

3.2 Síntese Dos Principais Resultados

O desempenho médio de todos os alunos no teste diagnóstico foi insatisfatório. Verificamos que o nível de conhecimento prévio em relação ao Teorema Fundamental da Aritmética e os principais conceitos associados a ele eram da ordem de 38%. Em questão que solicitávamos decompor um número em fatores primos, por exemplo, não houve qualquer acerto.

De acordo com as características conceituais, agrupamos as questões e estabelecemos um critério para medir os conhecimentos dos alunos a respeito dos conceitos evocados nelas. Constatamos que os alunos dominavam de forma insuficiente as possíveis representações para produto envolvendo mais de dois fatores, a identificação dos fatores e a decomposição dos números em fatores, fossem eles primos ou não.

Quanto ao reconhecimento de um número primo, a operação com números escritos na forma fatorada e a reversibilidade entre multiplicação e divisão, os alunos demonstraram um domínio razoável. Estes resultados nos permitiram inferir que realizar multiplicações e divisões era uma ação que esses alunos já haviam se apropriado.

Tendo em vista os tipos de estratégias empregados pelos alunos nas questões, observamos uma série de conhecimentos matemáticos ainda quando elas não conduziam à resposta certa. Vergnaud nomeia estes conhecimentos de "teoremas-em-ação" e "conceitos-em-ação".

Destacamos nesses momentos a necessidade de um trabalho didático que permita aos alunos organizá-los e identificar seus domínios de validade. Com base nisso, identificamos as principais características de uma intervenção de ensino que permita aos alunos levantar, testar, validar ou refutar hipóteses, além, é claro, de utilizar representações variadas para lidar com os conceitos. Passamos a seguir para uma síntese das estratégias e dos principais erros cometidos pelos alunos.

3.3 Voltando aos objetivos específicos

Em cada subseção apresentamos um objetivo específico e oferecemos uma síntese do modo como foi contemplado.

3.3.1 Descrever as estratégias empregadas pelos alunos para resolver problemas que envolvem os principais conceitos associados ao TFA

A partir da análise das resoluções apresentadas pelos alunos no teste diagnóstico, foi possível identificar as seguintes estratégias:

– Diferentes estratégias de contagem. Nas situações em que foram levados a contar elementos de um conjunto, as estratégias mais usadas pelos alunos foram contar um a um, contar dois a dois, agrupar os elementos a serem contados e somar grupo a grupo, o número de elementos por grupo. Embora preferissem contar a efetuar cálculos, os alunos sabiam que, para lidar com grandes quantidades de elementos, poderiam agrupá-los e multiplicar o número de grupos pelo número de elementos por grupo, adicionando o resto, caso existisse. É importante lembrar que, inicialmente, esqueciam-se de adicionar os restos. Ora escreviam os cálculos no papel, ora realizavam-nos mentalmente. Na contagem, algumas vezes, usavam os dedos. Com eles, apontavam os elementos do conjunto ou indicavam as quantidades envolvidas na ação.

- Diferentes representações. Como pode ser observado, as questões do teste favorecem o uso de diversas representações para os conceitos envolvidos nas situações: gestos, desenhos, figuras geométricas, tabelas, língua materna, linguagem aritmética (igualdades matemáticas). No uso e na transferência destas linguagens, alguns alunos não extraíam da situação os elementos necessários ao seu tratamento matemático. Na representação de formas e embalagens, por exemplo, a representação retangular não foi um aspecto relevante para alguns alunos. Ainda com relação à linguagem, os alunos revelaram tendência para produzir igualdades matemáticas com base na sequência de suas ações, o que os conduzia à produção de falsas igualdades matemáticas.
- Obtenção dos fatores pela busca nas tabuadas. Para obter os fatores de um número, os alunos observavam nas tabuadas de 1 a 10, as igualdades matemáticas nas quais eles figuram. Esta ação tem um domínio de validade restrito, pois, nem todas as decomposições em dois fatores dos números constam nestas tabuadas. Este procedimento, gradativamente, foi sendo substituído pelas divisões nas quais o quociente assumia valores da sequência dos números naturais. Cabe destacar que o reconhecimento de um número primo também seguiu este caminho.
- Tentativa de enunciar critérios de divisibilidade. Quando precisavam decidir se um número é múltiplo de outro ou estimar cálculos nas questões de decomposição, os alunos tentavam enunciar critérios de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 eram enunciados corretamente. Entretanto, alguns alunos adaptavam esses critérios para outros números e produziam erros.

3.3.2 Identificar os erros cometidos pelos alunos quando confrontados com situações que envolvem os principais conceitos associados ao TFA

- Os múltiplos e fatores de um número são aqueles que constam nas tabuadas de 1 a 10;
- Uma igualdade matemática não pode representar uma situação. Apenas o resultado é importante, ou seja, o segundo membro da igualdade é o que importa;
- Falsas igualdades matemáticas, como 2 x 3 = 6 + 8 = 14;
- O primeiro número quadrado é o 1;
- O produto de dois fatores de um número sempre será fator deste número;
- Todo número que tem na ordem das unidades os algarismos 0, 3, 6, 9, é divisível por 3.
- Divisão é distribuição, o que significou um obstáculo para a divisão na qual o divisor é 1;
- Toda Progressão Aritmética de razão *n*, é sequência dos múltiplos de *n;*
- Não é possível decompor em mais de dois fatores;
- Não é possível repetir fatores na decomposição;
- Todo número ímpar é primo;
- Todo número primo é ímpar;
- O conjunto dos múltiplos de um número é finito.

3.3.3 Reconhecer as principais características de uma intervenção de ensino voltada para a compreensão destes conceitos por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental

Dado que cada grupo de alunos tem suas especificidades, não tem sentido descrevermos uma intervenção de ensino. Entretanto listamos as ações que, segundo nossos dados, devem estar presentes em qualquer intervenção que vise favorecer a compreensão dos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética na educação básica. São elas:

1. Efetuar divisões e discernir as exatas das não exatas.
2. Produzir igualdades matemáticas que representem estas divisões.
3. Aplicar a reversibilidade entre multiplicação e divisão para obter outras igualdades matemáticas a partir de uma igualdade dada.

4. Refletir sobre as igualdades relacionadas às divisões exatas e, a partir daí, identificar as relações *múltiplo de* e *fator de* que se estabelecem entre os números envolvidos.
5. Reconhecer as propriedades das relações “múltiplo de” e “fator de”.
6. Listar o conjunto dos múltiplos e dos fatores de um número;
7. Diferenciar números primos de números compostos;
8. Criar representações para o produto envolvendo mais de dois fatores;
9. Decompor números em fatores e, simultaneamente, escrever e refletir sobre as igualdades matemáticas referentes a cada decomposição;
10. Decompor números em fatores primos e, simultaneamente, escrever e refletir sobre as igualdades matemáticas referentes a cada decomposição.

3.4 Sugestões Para Pesquisas Futuras

Acreditamos que nosso estudo poderá trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre o ensino da Aritmética e, particularmente, do Teorema Fundamental da Aritmética. Ao longo dele, novas questões foram surgindo e constituem nossas sugestões para pesquisas futuras. A primeira sugestão é criar e aplicar uma intervenção de ensino. Com base nos resultados de teste diagnóstico e à luz da Teoria dos Campos Conceituais, vimos que é possível criar intervenções que atendam às necessidades específicas de cada turma.

Outra sugestão é a aplicação do teste em outras turmas de 6º ano. Trabalhamos com uma turma de 27 alunos de uma escola particular. Será que a aplicação do teste numa turma de 6º ano de uma escola pública produzirá os mesmos resultados?

De todo modo, é importante esclarecer mais uma vez que nossa intenção não é generalizar dados, mas contribuir para a discussão mais ampla sobre o ensino de conceitos pertencentes à Teoria dos Números na educação básica.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Nobel, 1988.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília, DF, 1998.

BROWN, A.; THOMAS, k. e TOLIAS, G. *Conceptions of Divisibility: Sucess and Understanding. In* MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

CAMPBELL, S. *Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding*, in Learning and Teaching Number Theory, Ed. Campbell & Zazkis, Ablex Publishing, Westport, 2002.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. *Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding*, Journal for Research in Mathematics Education, 27 (5), pp. 540-563, 1995.

__________. *Prime decomposition: understanding uniqueness*, Journal of Mathematical Behavior, 15 (2), 217-218, 1996.

__________. *Toward Number Theory as a Conceptual Field.* In MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

COELHO, S.; MACHADO, S. e MARANHÃO, C. *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental?* Atas do CIBEM V, Cd-rom, Cidade do Porto, 2005.

EZPELETA, J. e ROCKWELL, E. *Pesquisa participante.* São Paulo, Cortez, 1986.

FIORENTINO, D; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 2006.

LINS, R. C.Gimenez, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 1997.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli Elisa D. A. *Pesquisa em Educação*. São Paulo: EPU, 1986.

__________, *Abordagens Qualitativas Pesquisa em Educação.* São Paulo: EPU, 2001.

__________, *Novos enfoques em pesquisa em didática. In.* CANDAU, Vera (org.). *A Didática em questão.* Petrópolis: Vozes, 1984.

PINTO, N.B. *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar*. São Paulo: Papirus, 2000.

RIBENBOIM, P. *Números Primos:* mistérios e recordes. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

SANTOS, J. P.O. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

TEPPO, A. R. *Integrating content and process in classroom mathematics* in Learning and Teaching Number Theory. Wesport: Ablex Publishing, 2002.

VERGNAUD, G. *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59, 1982.

__________,. *Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example:* les structures additives. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983a.

__________, *Multiplicative structures*. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174, 1983b.

__________. *Problem solving and concept development in the learning of mathematics*. E.A.R.L.I. Second Meeting. Tübingen, 1987.

__________, *Multiplicative structures*. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161, 1988.

__________, *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170, 1990a.

__________, et al. *Epistemology and psychology of mathematics education*. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press, 1990b.

__________, *Teoria dos campos conceituais*. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1993.

__________, *Multiplicative conceptual field: what and why?* In Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

__________, *The nature of mathematical concepts.* In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) Learning and teaching mathematics, an international perspective. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd., 1997.

__________, *A comprehensive theory of representation for mathematics education*. Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 167-181, 1998.

__________, *L' enfant, la mathématique et la réalité.* Berne, Editions Peter Lang, 1981.

ZAZKIS, R. Language of Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach. *In* MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

ANEXO

Teste Diagnóstico

1. Você está recebendo embalagens para ovos e para bombons e fôrmas para fazer bombons, pirulitos e gelo. As embalagens são: uma delas para uma dúzia de ovos e outra para 15 bombons FERRERO. Com as fôrmas posso fazer 12 bombons *flor* ou 20 coraçõezinhos ou 30 pirulitos. Ou ainda 18 cubinhos de gelo.

a. Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a igualdade?

<u>Desenho</u>

Igualdade Matemática: ___ x 2 x ___ = ___

b. E se você quiser desenhar 4 embalagens de bombom FERRERO. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho

Sentença: ___x ___ x 5 = ___

2. A quantidade de bichinhos de pelúcia que Bruna tem é menor que 50. Separando-os em grupos de 5, sobram 3 e separando-os em grupos de 9, sobram 2. Quantos bichinhos de pelúcia Bruna tem?

   <u>Cálculos</u>

3. João multiplicou dois números naturais e encontrou 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

   ______x ______= 36 ou _____x______ = 36 ou ______x______ = 36

   ou ______x ______= 36 ou _____x_____ = 36

4. Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3 x 5 = 15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

5. O número 7 possui quantos fatores? Quais são eles?

6. Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

7. Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

8. Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

a. João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou ....
b. Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ......
c. Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ......
d. Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é ..

9. Resolva a questão abaixo:

a. Dividi 50 por 5. Dividi o quociente encontrado por 2 e achei como resultado o quociente igual a __________.

b. Agora observe atentamente o que você fez e, em seguida, complete os outros itens. Não deixe de explicar o que você fez ou pensou para completar:

Dividi _________ por 3. Dividi o quociente encontrado por 2 e achei como resultado o quociente igual a 8.

Explicação:

c. Dividi 36 por ____________. Dividi o quociente encontrado por 2 e achei como resultado o quociente igual a 2.

Explicação: