INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Roberta Marcele Vaz da Costa

NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Rio de Janeiro, RJ – Brasil.

Novembro de 2015

NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Roberta Marcele Vaz da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: DSc. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

Rio de Janeiro, RJ – Brasil.

Novembro de 2015

Agradecimentos

Conquistar é mérito essencial daquele que realiza a busca por um sonho, mas não exclusivo. Toda trajetória de sucesso conta não só com um protagonista determinando, mas com personagens fundamentais que o ajudaram a construir meios para alcançar a vitória. Tenho então, muito a agradecer.

Agradeço aos criadores e implementadores do PROFMAT que possibilitaram a realização de uma ampla discussão sobre a matemática no Ensino Básico, promovendo a capacitação de tantos educadores.

Aos professores do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, pelas excelentes aulas, dedicação e atenção dada aos alunos. Por todo o suporte e incentivo, que culminaram na elaboração deste trabalho.

Ao professor Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira , pelo tempo e atenção dedicados à orientação.

Aos amigos, Gabriela Barbosa e Fernando Ramires, pelos momentos de estudos que deixaram de ser menos sacrificantes devido à ótima companhia que representam e pela colaboração neste trabalho.

Às minhas filhas, Bruna e Alice, que serviram de motivação para a conclusão desse curso.

À Gabriella Montezano, pelo companheirismo, carinho e paciência indispensáveis para que eu pudesse seguir firme em busca desse objetivo.

Resumo

Iniciado com uma apresentação dos principais teoremas, definições e propriedades que tratam sobre os números primos e conduzem ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), este trabalho tem como objetivos, expor uma base teórica mínima necessária ao educador que pretende lecionar o conteúdo mencionado ao sexto ano do Ensino Fundamental e ainda propor uma metodologia de ensino composta por cinco aulas, cuja abordagem dos conceitos foi feita de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gerard Vergnaud. Descrevemos assim, nosso objeto matemático, o TFA, e em seguida expomos um conjunto de aulas que contam com atividades lúdicas, como jogos, a dinâmica de construção dos conceitos mediante o debate científico e ainda com a resolução de problemas como ferramentas que otimizam o processo de ensino aprendizagem.

Palavras chave: Números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, Teoria dos Campos Conceituais, jogos, resolução de problemas, Ensino Fundamental.

Abstract

Started with a presentation of the main theorems, definitions and properties that treat about prime numbers and lead to the Fundamental Theorem of Arithmetic (TFA), this paper aims to expose a minimum theoretical basis necessary for the educator who wants to teach the contents mentioned the sixth year of the Elementary School and to propose a teaching methodology consists of five classes, whose approach to the concepts, was done according to the Conceptual Fields Theory, proposed by Gerard Vergnaud. Therefore we describe our mathematical object, the TFA, and then expose a set of classes that rely on amusement activities, such as games, dynamic construction of concepts through scientific debate and with problem solving as tools that streamline the process of teaching and learning.

Key words: Prime numbers, Fundamental Theorem of Arithmetic, Conceptual Fields Theory, games, problem solving, Elementary School.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O ensino da Aritmética na Educação Básica nos mostra uma faceta de insucesso na aprendizagem escolar. Direcionando o foco para o campo pedagógico, na busca pela causa da não assimilação dos conceitos, constata-se que o tratamento dado aos mesmos e a forma como são levados às salas de aula tradicionais, conduzem o aluno à memorização de algoritmos e de definições vazios de sentido. Assim, quando os mesmos são indagados, por exemplo, a respeito do processo utilizado em tais algoritmos, ou ainda sobre conexões entre as definições mencionadas, nota-se que, em geral, as respostas não apresentam indícios de que haja um domínio sólido sobre os entes matemáticos.

Quando os objetivos da disciplina não são alcançados e o estudante se vê limitado a memorizar e reproduzir uma série de regras, cujos significados e aplicações ele desconhece, acaba tomando para si, a ideia de que os conhecimentos matemáticos são inatingíveis, fortalecendo o mito socialmente construído de que o aprender matemática fica restrito a um grupo seleto de pessoas, cujo intelecto seria mais evoluído. Este cenário desafiador, nos incita a buscar meios de inserir na prática pedagógica procedimentos como o exercício do questionamento advindo do estudante, do pensamento científico, da criação de problematizações, para que haja o resgate do interesse pelo estudo da Matemática. Em substituição às aulas expositivas, onde o professor simplesmente projeta seu conhecimento para a turma com a dinâmica: definição – exemplo – exercício, propomos estimular a construção das estruturas matemáticas, num processo regido pelo professor e protagonizado pelo aluno, a prática argumentativa, o uso e a elaboração de demonstrações adequadas ao nível de escolaridade dos educandos. São estes alguns dos instrumentos que poderiam promover a consolidação do conhecimento, contudo, são raramente vistos no cotidiano escolar.

A busca de uma didática que favoreça o desenvolvimento do pensamento crítico nas aulas de matemática, é descrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> *"É desejável que no terceiro ciclo[1] se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre*

tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas." (PCN, p. 70).

Tomamos como tópico a ser discutido neste trabalho, o Teorema Fundamental da Aritmética. De grande importância é o ensino desse tema, pois contempla noções básicas essenciais como a de número primo, por exemplo, além de ter grande aplicabilidade na resolução de problemas e no desenvolvimento de conceitos mais avançados. Temos como objetivo traçar um caminho para uma aprendizagem sólida dessa teoria.

Assim, diante da problemática educacional relativa ao ensino da Matemática, em especial da Aritmética, que foi apresentada, trazemos, primeiramente, um suporte teórico, que acreditamos ser a bagagem mínima de conhecimento da qual o educador deve ter se apossado para realizar uma boa aula, contendo as principais definições, propriedades e teoremas a respeito do nosso objeto matemático, o Teorema Fundamental da Aritmética. Em seguida apresentamos uma proposta de metodologia de ensino, que conduz ao TFA, construída à luz da Teoria do Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Partiremos da noção de divisibilidade, com uma ampla discussão sobre as propriedades inerentes à tal conceito, descreveremos o processo de divisão euclidiana, destacaremos a importância dos números primos, chegando por fim ao TFA. Esta proposta destina-se às turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, sendo organizada em um conjunto de cinco aulas, com uma média de duração de 100 minutos cada. Neste procedimento, procuramos enfatizar a importância das interações entre os indivíduos em trabalhos em grupo, contando com uma ferramenta de grande eficácia no ensino da matemática: os jogos. Além disso, destacamos a grande relevância que possui o conhecimento advindo do próprio estudante, sua capacidade de debater e construir conceitos. Não deixamos porém de encaminhar as ideias construídas a uma região de formalidade, natural e necessária a assimilação das propriedades dos objetos matemáticos.

Nesta sugestão metodológica, partimos de uma problemática, induzindo os estudantes a criarem seus esquemas de investigação e resolução, destacando os invariantes envolvidos e valorizando formas diversas de representação, assim como os mecanismos que promovem transformação de uma representação em outra. Ao fim de cada atividade buscaremos a construção das definições e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo através da elaboração e interpretação de propriedades e teoremas.

Capítulo 2

Objeto matemático: O Teorema Fundamental da Aritmética

Ao educador cabe não somente ter se apropriado dos conceitos que pretende ensinar, é necessário que sua esfera de conhecimento seja mais abrangente. Elaborar uma metodologia de ensino dotada de estratégias que estimulem a capacidade de dedução, a memorização e a habilidade de generalizar é possível quando o profissional de educação matemática se envolveu de forma mais avançada com os teoremas e propriedades que embasam suas aulas. Consideramos que os tópicos que serão abordados a seguir são essenciais para o educador conceber uma forma própria de trabalhar, num nível adequado às turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, com as ideias de divisibilidade, múltiplos, divisores, divisão euclidiana, números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética. A maneira como tais conceitos são discutidos nesse primeiro momento de aprendizagem pode guiar o estudante a uma concepção sólida, em seu futuro contato com tópicos menos elementares. Logo, entendemos que o educando não deve limitar-se a reprodução. Para subir os degraus da abstração, ele precisa construir definições, refletir e argumentar sobre conceitos e processos matemáticos, orientado pelo professor que domina o assunto em patamares mais elevados.

2.1 Divisibilidade: Conceitos e Propriedades

Iniciaremos a discussão sobre divisibilidade, no conjunto dos números naturais, em um caminho distinto dos livros didáticos tradicionais. Usualmente o que vemos nas salas de aula é a definição de divisibilidade atrelada a noção de divisão euclidiana. Um número é considerado divisível por outro quando sua divisão por ele deixa resto zero. Ao partir dessa premissa, podemos levar os alunos a pensar que a divisão somente pode ser realizada quando um número é divisível por outro, criando um obstáculo para a aprendizagem de posteriores divisões que deixam restos não nulos.

Assim, partiremos da ideia de que um número é divisível por outro quando é múltiplo do mesmo.

2.1.1 Definição de Divisibilidade

Considere dois números naturais d e D, teremos que d divide D, escrevendo $d|D$, quando existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $D = qd$. Podemos afirmar ainda que d é um divisor ou um fator de D, ou, ainda, que D é um múltiplo de d, ou que D é divisível por d.

Assim a sentença $d|D$ nos diz que existe um q tal que $D = qd$. A mesma pode ser negada através da simbologia $d \nmid D$, significando que não existe nenhum número natural q tal que $D = qd$.

2.1.2 Propriedades da Divisibilidade

Proposição 1

Sejam $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Tem-se que

i) Todo número natural é divisível por 1, ou seja,$1|n_1$;

ii) Todo número natural é divisível por ele mesmo, ou seja, $n_1|n_1$;

iii) Todo número natural é divisor de zero, ou seja, $n_1|0$.

iv) O único número que tem o zero como divisor é o próprio zero, ou seja, $0|n_1 \Leftrightarrow n_1 = 0$.

v) Se $n_1| n_2$ e $n_2| n_3$, então $n_1| n_3$.

Demonstração

(i) Decorre diretamente da igualdade $n_1 = n_1 \cdot 1$;

(ii) Decorre diretamente da igualdade $n_1 = 1 \cdot n_1$;

(iii) Decorre diretamente da igualdade $0 = 0 \cdot n_1$;

(iv) Partiremos do princípio que $0|\, n_1$; temos com isso que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 = q \cdot 0$, o que implica $n_1 = 0$. Para a recíproca basta observar que $0|0$, o que foi provado (iii);

(iii) $n_1|\, n_2$ e $n_2|\, n_3$ logo existem q_1, $q_2 \in \mathbb{N}$, tais que $n_2 = q_1n_1$ e $n_3 = q_2\, n_2$. Substituindo o valor de n_2 da primeira equação na outra, obtemos

$$n_3 = q_2n_2 = q_2(q_1n_1) = (q_2q_1)n_1,$$

o que nos mostra que $n_1|\, n_3$.

Consideraremos então o caso $0 \mid 0$ (estamos assumindo que $0 \in \mathbb{N}$) e, portanto, todo número natural divide 0. Assim, 0 tem infinitos divisores.

Definição

Tomando como verdade que $d|D$ e que $d \neq 0$. Seja $q \in \mathbb{N}$ tal que $D = qd$. O número natural q, univocamente determinado, é chamado de *quociente* de D por d e denotado por $q = \frac{D}{d}$.

Proposição 2

Se n_1, n_2, n_3, $n_4 \in \mathbb{N}$, então

$$n_1|n_2 \text{ e } n_3|n_4 \Longrightarrow n_1n_3|n_2n_4.$$

Demonstração

Se $n_1|n_2$ e $n_3|n_4$, então $\exists\ q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 = q_1n_1$ e $n_4 = q_3n_3$. Portanto, $n_2n_4 = (q_1q_2)(n_1n_2)$, logo, $n_1n_3|n_2n_4$.

Em particular, se $n_1|n_2$, então $n_1q|n_2q$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

Proposição 3

Sejam d, D_1, $D_2 \in \mathbb{N}$, $D_1 > D_2$ tais que $d|(D_1 \pm D_2)$. Então

$$d|D_1 \Leftrightarrow d|D_2.$$

Demonstração

Partiremos do princípio que $d|(D_1 + D_2)$. Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 + D_2 = qd$.

Então, se $d|D_1$, temos que existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 = q_1d$.

A partir das duas igualdades acima, temos

$$q_1d + D_2 = qd,$$

Com isso temos que $D_2 = (q - q_1)d$, logo $d|D_2$.

Analogamente para o caso em que d| D_2.

Observando a outra premissa, partiremos do princípio que $d|(D_1 - D_2)$. Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 - D_2 = qd$.

Então, se $d|D_1$, temos que existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D_1 = q_1d$. Juntando as duas igualdades acima, temos

$$q_1d - D_2 = qd,$$

Com isso temos que $D_2 = (q_1 - q)d$, logo $d|D_2$.

Proposição 4

Se $d, D_1, D_2 \in \mathbb{N}$ são tais que $d|D_1$ e $d|D_2$, então para todo $x, y \in \mathbb{N}$

$$d|(xD_1 + yD_2).$$

Demonstração

$d|D_1$ e $d|D_2$ implicam que existem $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tais que $D_1 = q_1d$ e $D_2 = q_2d$. Logo,

$$xD_1 + yD_2 = x(q_1d) + y(q_2d) = (xq_1 + yq_2)d.$$

Com isso, $d|(xD_1 + yD_2)$.

Proposição 5

Dados $d, D \in \mathbb{N}$, onde $D \neq 0$, temos que

$$d|D \Longrightarrow d \leq \mathrm{D}.$$

Demonstração

De fato, se $d|D$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D = qd$. Como $D \neq 0$, temos que $q \neq 0$, logo $1 \leq \mathrm{q}$ e, consequentemente, $d \leq qd = D$.

Podemos deduzir da proposição 5, dois importantes resultados:

(i) O único divisor 1 é ele mesmo.

Claro, se $d \in \mathbb{N}$ e $d|1$, então $0 < d \leq 1$, logo $d = 1$.

(ii) Um número natural D, possui um número finito de divisores.

Como, para $D \neq 0$, temos que todo divisor d de D é tal que $d \leq D$, segue-se, nesse caso, que D tem um número finito de divisores que estão no intervalo $1 \leq d \leq D$.

Note que a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem, pois

i) é reflexiva: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n|n$.

ii) é transitiva: se $n_1|n_2$ e $n_2|n_3$, então $n_1|n_3$.

ii) é antissimétrica: se $n_1|n_2$ e $n_2|n_1$, então $n_1 = n_2$.

2.2 Algoritmo da Divisão

Processo de Divisão Euclidiana

Veremos agora um importante resultado descrito por Euclides, em sua mais famosa obra, *Os Elementos*. Esse resultado trata do fato de que dados dois números naturais d e D, com $d \neq 0$, é sempre possível realizar a divisão de D por d, ainda que haja um pequeno resto. Tal algoritmo, continua sendo a forma mais prática de se efetuar uma divisão com resto, e por isso, é marcante sua presença nas salas de aula e nos livros didáticos de matemática do Ensino Básico.

Teorema

Sejam D e d dois números naturais com $d \neq 0$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que

$$D = dq + r, \quad \text{como } 0 \leq r < d.$$

Onde D é chamado de dividendo, d de divisor, q de quociente r de resto.

Demonstração

Se $D < d$ então $q = 0$ e $r = D$. Se $D = d$, então $q = 1$ e $r = 0$. Suponha, então, que $D > d$.

Provaremos primeiro a existência: Considere, enquanto fizer sentido dentro do conjunto dos naturais, os números:

D, $D - d$, $D - 2d$, $D - 3d$, ... , $D - nd$, ..., como sendo elementos de um determinado conjunto S.

Pelo Princípio da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos números acima possui um menor elemento $r = D - qd$. Queremos mostrar que $r < d$.

Temos duas possibilidades:

Se $d|D$, o resultado é imediato, já que $r = 0 < d$.

Pensaremos agora no caso em que $d \nmid D$, ou seja, $r \neq d$. Fica claro que $r < d$, pois se não, admitiríamos a existência de um número natural a $< r$ tal que $r = a + d$. Consequentemente, sendo $r = a + d = D - qd$, teríamos

$$a = D - (q + 1)d \in S, \text{ com } a < r,$$

Essa sentença contradiz a hipótese, que afirma ser r o menor elemento de S.

Logo, temos que $D = dq + r$ com $r < d$, o que prova a existência de q e r.

Agora provaremos a unicidade: Tomando a diferença entre dois elementos distintos de S temos um múltiplo de d. Sendo o valor mínimo desta diferença igual ao próprio d. Logo, se $r = D - dq$ e $r' = D - dq'$, com $r < r' < d$, teríamos $r' - r \geq d$, o que implica que $r' \geq r + d \geq d$, que é um absurdo. Com isso, $r' = r$, e, por consequência, $dq' = dq$ e $q' = q$.

Podemos então escrever uma nova definição para divisibilidade: Dizemos que d divide D, se, e somente se, o resto da divisão euclidiana de D por d é zero.

Com o resultado que nos garante a unicidade de q e r na divisão euclidiana de D por d, construiremos a função que segue:

Denotamos por $q_d(D)$ o quociente da divisão do número D por d, definimos a *função quociente* por d como segue:

$$q_d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$D \longmapsto q_d(D)$$

Corolário

Dados dois números naturais D e d com $d > 0$, existe um único número natural n ($=q_d(D)$) tal que

$$nd \leq D < (n + 1)d.$$

Demonstração

Pela divisão euclidiana, temos que existem $q, r \in \mathbb{N}$, únicos, com $0 \leq r < d$, tais que $D = dq + r$. Considere $n = q$, está provado.

O natural $q_d(D)$ pode ser também interpretado como o maior natural menor ou igual do que o número racional $\frac{D}{d}$.

De fato, temos que, se r é o resto da divisão de D por d, então

$$q_d(D)d \leq D = q_d(D)d + r < (q_d(D) + 1)d, \text{logo,}$$

$$q_d(D) \leq \frac{D}{d} < q_d(D) + 1.$$

2.3 M.D.C. e Algoritmo de Euclides

2.3.1.Máximo Divisor Comum

Definição

Sejam dados dois números naturais n_1 e n_2, distintos ou não. Um número natural d será dito um *divisor comum* de n_1 e n_2 se $d|n_1$ e $d|n_2$.

Definição

Diremos que um número natural $d \geq 0$ é um *máximo divisor comum* (mdc) de n_1 e n_2, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de n_1 e n_2;

ii) d é divisível por todo divisor comum de n_1 e n_2, ou seja, se c é um divisor comum de n_1 e n_2, então $c|d$.

A unicidade do mdc fica garantida na condição (ii) acima. Note que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então, $d \mid d'$ e $d' \mid d$, o que, juntamente implicam que $d = d'$.

Denotaremos por mdc(n_1, n_2) o mdc de n_1 e n_2. Além disso, temos pela definição que mdc(n_1, n_2) = mdc (n_2, n_1).

Propriedades:

(i) $mdc\ (0, n) = n$

(ii) $mdc\ (1, n) = 1$

(iii) $mdc\ (n, n) = n$

(iv) Para todo $N \in \mathbb{N}$, temos que $n|N \Leftrightarrow mdc\ (n, N) = n$.

(v) $mdc\ (n, N) = 0 \Leftrightarrow n = N = 0$

Demonstração

(i) Como zero é divisível por todo número natural, temos que n é divisor de zero. E sendo n divisível por todos os divisores de n, por definição, decorre que $(0, n) = n$.

(ii) 1 é o único divisor de 1. E sendo 1 também divisor de n, decorre que $(1, n) = 1$.

(iii) Como n é divisível por todos os divisores de n, temos por definição que $(n, n) = n$.

(iv) De fato, se $n|N$, temos que n é um divisor comum de n e N, e se d é um divisor comum de n e N, então d divide n, o que mostra que $n = mdc\ (n, N)$.

A recíproca é clara, se $mdc\ (n, N) = n$, segue-se que n divide N.

(v) Como todo número natural divide 0, o *mdc* de n e N, onde $n = N = 0$, é 0, pois esse é um divisor comum de n e N e é o único número divisível por todos os divisores de 0. Reciprocamente, se o *mdc* de n e N é 0, então 0 divide n e divide N, mas o único número divisível por 0 é o próprio 0, logo $n = N = 0$.

Provaremos agora a existência do *mdc* de qualquer par de números naturais, ambos não nulos.

Iniciaremos mostrando que o máximo divisor comum de dois números, não ambos nulos, quando existe, é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números:

Seja $d > 0$ um *mdc* de n e N, não nulos, partindo do princípio que exista, e seja c um divisor comum qualquer desses números, então c divide d e, portanto, $c \leq d$.

Lema

Sejam $n, N, a \in \mathbb{N}$. Se existe $mdc\ (n, N - an)$, então, $mdc\ (n, N)$ existe e

$$mdc\ (n, N) = mdc\ (n, N - an).$$

Demonstração

Seja $d = mdc\ (n, N - an)$. Como $d|n$ e $d|(N - an)$, temos que d divide $N = N - an + an$. Com isso, d é divisor comum de n e N. Partiremos agora do princípio que c seja um divisor comum de n e N. Logo, c é um divisor comum de n e $N - an$ e, portanto, $c|d$. Concluímos que $d = mdc\ (n, N)$.

2.3.2.Algoritmo de Euclides

O método para o cálculo do mdc, apresentado a seguir, é comumente conhecido por Algoritmo de Euclides, que foi descrito no Livro VII, em *Os Elementos*. E assim como o algoritmo da divisão já apresentado, essa é mais uma ferramenta utilizada na metodologia atual do Ensino Básico.

Dados $n, N \in \mathbb{N}$, podemos supor $n \leq N$. Se $n = 1$ ou $n = N$, ou ainda $n|N$, já vimos que $mdc\ (n, N) = n$. Então, partiremos do princípio que $1 < n < N$ e que $n \nmid N$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever

$$N = nq_1 + r_1, \quad \text{com } 0 < r_1 < n.$$

Teremos dois casos:

a) $r_1|n$. Logo, $r_1 = mdc\ (n, r_1)$ já sabemos pelo lema apresentado que

$$r_1 = mdc\ (n, r_1) = mdc\ (n, N - q_1 n) = mdc\ (n, N),$$

o que finaliza o algoritmo.

b) $r_1 \nmid n$. Em tal caso, podemos efetuar a divisão de *n* por r_1, obtendo

$$n = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, teremos dois casos:

a') $r_2 | r_1$. Nesse caso, r_2 = *mdc* (r_1, r_2) e novamente, pelo Lema 5.2,

r_2 = *mdc* (r_1, r_2) = *mdc* (r_1, n - $q_2 r_1$) = *mdc*(r_1, *n*) = (*N* - $q_1 n$, *n*) = *mdc* (*N*, *n*) = *mdc* (*n*, *N*), o que finaliza o algoritmo.

b') $r_2 \nmid r_1$. Neste caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

E assim sucessivamente até que o processo pare. O fim do processo é garantido, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $n > r_1 > r_2 > \cdots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum *m*, temos que $r_m | r_{m-1}$, o que implica que *mdc* (*n*, *N*) = r_m.

Nas salas de aula do 5° e 6° anos do Ensino Fundamental, o algoritmo de Euclides assume uma outra representação, mais clara e acessível ao público, que traremos a seguir.

Começamos com o algoritmo da divisão N por *n*, $N = nq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama:

	q_1	
N	n	
r_1		

A seguir, continuamos efetuando a divisão $n = r_1 q_2 + r_2$e colocamos os números envolvidos no diagrama

	q_1	q_2	
N	n	r_1	
r_1	r_2		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
N	n	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (n, \mathrm{N})$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

2.3.3. Propriedades do mdc

Sejam $n, N \in \mathbb{N}^*$. Definimos o conjunto

$$J(n, N) = \{a \in \mathbb{N}^* ; \exists\, x, y \in \mathbb{N},\ a = xn - yN\}.$$

Por definição temos que

$$J(N, n) = \{b \in \mathbb{N}^* ; \exists\, x, y \in \mathbb{N},\ b = yN - xn\}.$$

Lema

Tem-se que: $J(n, N) = J(N, n) \neq \emptyset$.

Demonstração

Inicialmente mostraremos que os dois conjuntos são iguais. Pelo caráter simétrico do resultado com relação a n e N, basta mostrar que $J(n, N) \subset J(N, n)$.

Seja $a \in J(n, N)$, então $a = xn - yN$ com $x, y \in \mathbb{N}$. Pela Propriedade Arquimediana, existem números naturais p e q tais que $pn > y$ e $qN > x$. Tomando $m = \max\{p, q\}$, tem-se que $mn > y$ e $mN > x$. Portanto,

$$a = xn - yN = (mn - y)N - (mN - x)n \in J(N, n)$$

Agora, note que $n \in J(n, N)$ e, portanto, $J(n, N) \neq \emptyset$.

O resultado acima e a Propriedade da Boa Ordem garantem que existe $\min J(n, N)$.

Teorema

Sejam $n, N \in \mathbb{N}^*$ e seja $d = \min J(n, N)$, então

i) d é o mdc de n e N; e

ii) $J(n, N) = \{md; m \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração

(i) Tome que c divida n e N, logo c divide todos os números naturais da forma $xn - yN$. Portanto, c divide todos os elementos de $J(n, N)$, e, consequentemente, $c|d$.

Provaremos agora que d divide todos os elementos de $J(n, N)$. Seja a $\in J(n, N)$ e suponha, por absurdo, que $d \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana,

$$a = dq + r, \quad \text{com } 0 < r < d.$$

Como $a = xn - yN$ e $d = uN - vn$, para alguns $x, y, u, v \in \mathbb{N}$, segue-se que

$$r = (x + qv)n - (y + qu)N \in J(n, N),$$

o que é um absurdo, pois $d = \min J(n, N)$ e $r < d$. Em particular, $d|n$ e $d|N$.

(ii) Dado que $ld = l(un - vN) = (lv)n - (lu)N \in J(n, N)$, é claro que

$$\{ld;\ l \in \mathbb{N}\} \subset J(n, N).$$

Mas, já foi provado que todo $a \in J(n, N)$ é tal que $d|a$, e, portanto,

$$J(a, b) \subset \{ld;\ l \in \mathbb{N}\}.$$

Corolário

Quaisquer que sejam $n, N, x \in \mathbb{N}^*$ tem-se que

$$mdc\,(xn, xN) = x\, mdc\,(n, N).$$

Demonstração

Note inicialmente que

$$J(xn, xN) = xJ(n, N) \quad = \{xa;\ a \in J(n, N)\}$$

O resultado decorre do teorema e do fato de que

$$\min xJ(n, N) = x \min J(n, N).$$

Corolário

Dados n, $N \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$mdc\left(\frac{n}{mdc(n,N)}, \frac{N}{mdc\,(n,N)}\right) = 1.$$

Demonstração

Temos que

$$mdc\,(n, N)\; mdc\left(\frac{n}{mdc\,(n,N)}, \frac{N}{mdc\,(n,N)}\right) =$$

$$= mdc\left(mdc\,(n, N)\, \frac{n}{mdc\,(n,N)}, mdc\,(n, N)\, \frac{N}{mdc\,(n,N)}\right) =$$

$$= mdc\,(n, N),$$

o que valida o resultado.

Definição

Dois números naturais n e N serão ditos *primos entre si*, ou *coprimos*, se $mdc\,(n, N) = 1$; ou seja, se o único divisor comum de ambos é 1.

Proposição 6

$mdc(n,N) = 1 \Leftrightarrow$ existem números naturais x e y tais que $xn - yN = 1$.

Demonstração

($\Rightarrow$)Partindo do princípio que n e N são primos entre si. Logo, $mdc\ (n, N) = 1$. Temos que existem números naturais x e y tais que $xn - yN = mdc\ (n, N) = 1$.

($\Leftarrow$)Partindo do princípio que existam números naturais x e y tais que $xn - yN = 1$. Se $d = mdc\ (n, N)$, temos que $d|(xn - yN)$, o que mostra que $d|1$, e, portanto, $d = 1$.

Lema de Gauss

Sejam n_1, n_2 e n_3 números naturais. Se $n_1|n_2n_3$ e $mdc\ (n_1, n_2) = 1$, então $n_1|n_3$.

Demonstração

Se $n_1|n_2n_3$, então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n_2n_3 = n_1a$.

Se $mdc\ (n_1, n_2) = 1$, então, pela Proposição 10, temos que existem $x, y \in \mathbb{N}$ tais que

$$xn_1 - yn_2 = 1.$$

Multiplicando por n_3 ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$n_3 = xn_1n_3 - yn_2n_3.$$

Substituindo n_2n_3 por n_1a nesta última igualdade, temos que

$$n_3 = xn_1n_3 - yn_1a = n_1(xn_3 - ya)$$

e, portanto, $n_1|n_3$.

Corolário

Dados n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}$, com n_2 e n_3 não ambos nulos, temos que

$$n_2 | n_1 \quad \text{e } n_3 | n_1 \Leftrightarrow \frac{n_2 n_3}{mdc(\mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3)} | n_1.$$

Demonstração

Já sabemos que $n_1 = xn_2 = yn_3$ para alguns x, $y \in \mathbb{N}$. Então,

$$x \frac{n_2}{mdc(n_2, n_3)} = y \frac{n_3}{mdc(n_2, n_3)}.$$

Como $mdc\left(\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)}, \frac{n_3}{mdc(n_2,n_3)}\right) = 1$, decorre que $\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)} | y$ e $\frac{n_2}{mdc(n_2,n_3)} n_3 | yn_3$. Como $yn_3 = n_1$, a implicação direta fica provada. A recíproca é análoga.

Definição

Vamos ampliar agora a definição de mdc de dois números naturais para o mdc de m números naturais:

Um número natural d será dito mdc de dados números naturais $n_1, \ldots, n_m$, não todos nulos, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de $n_1, \ldots, n_m$.

ii) Se c é um divisor comum de $n_1, \ldots, n_m$, então $c | d$.

Denotaremos o mdc por:

$$mdc\ (n_1, \ldots, n_m).$$

Proposição 7

Dados números naturais n_1,..., n_m, não todos nulos, existe o seu mdc e

$$mdc\ (n_1,...,n_m) = \text{mdc}\ (n_1,...,(n_{m-1}, n_m)).$$

Demonstração

Provaremos por indução sobre *m* (≥ 2). É fácil ver que para *m* = 2, o resultado é válido. Partiremos do princípio que o resultado vale para *m*. Para provar que o resultado é válido para *m* + 1, basta mostrar que se d é o mdc de n_1,..., (n_m, n_{m+1}), então d é o mdc de n_1,..., n_m, n_{m+1}, o que prova também a existência.

Seja *d* o mdc de n_1,..., (n_m, n_{m+1}). Logo, $d|n_1$,..., $d|n_{m-1}$e $d|$mdc(n_m, n_{m+1}). Portanto, $d|n_1$,..., $d|n_{m-1}$, $d|n_m$e $d|n_{m+1}$.

Por outro lado, seja *c* divisor comum de n_1,...,n_m,n_{m+1}; logo *c* é um divisor comum de n_1,...,n_{m-1} e mdc(n_m, n_{m+1}); e, portanto, $c|d$.

Definição

Os naturais n_1,..., n_m serão ditos *primos entre si*, ou *coprimos*, quando mdc(n_1,..., n_m) = 1.

2.4. Mínimo Múltiplo Comum

Definição

Um número natural é um *múltiplo comum* de dois números naturais dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Um número natural m é um *mínimo múltiplo comum (mmc)* dos números naturais n_1 e n_2, se possuir as seguintes propriedades:

(i) m é um múltiplo comum de n_1 e n_2, e

(ii) se c é um múltiplo comum de n_1 e n_2, então $m|c$.

Considerando que o mínimo múltiplo comum existe, sua unicidade é garantida em (ii), pois temos que se c é um múltiplo comum de n_1 e n_2 então $m|c$ e consequentemente $m \leq c$, ou seja, m é o menor dos múltiplos comuns.

O mínimo múltiplo comum de n_1 e n_2, se existe, é denotado por mmc (n_1, n_2).

Corolário

O mmc $(n_1, n_2) = 0$ se, e somente se, $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$.

Demonstração

Se mmc $(n_1, n_2) = 0$, então 0 divide n_1n_2, que é múltiplo de n_1 e de n_2, logo $n_1n_2 = 0$ e, portanto, $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$. Reciprocamente, se $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$, então 0 é o único múltiplo comum de n_1 *e* n_2, logo mmc $(n_1, n_2) = 0$.

Proposição 8

Dados dois números n_1 e n_2 temos que m = mmc (n_1, n_2) existe e:

$$\text{mmc}\,(n_1, n_2).\ \text{mdc}\,(n_1, n_2) = n_1n_2.$$

Demonstração

Vamos escrever $m = \frac{n_1 n_2}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)}$, como

$$m = n_1 \frac{n_2}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)} = n_2 \frac{n_1}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)},$$

temos que $n_1|m$ e $n_2|m$. Portanto, m é um múltiplo comum de n_1 e n_2.

Seja c um múltiplo comum de n_1 e n_2; logo, $c = an_1 = bn_2$, para $a, b \in \mathbb{N}$. Decorre que:

$$a \frac{n_1}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)} = b \frac{n_2}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)}.$$

Já sabemos que $\frac{n_1}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)}$ e $\frac{n_2}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)}$ são primos entre si, segue-se, que $\frac{n_1}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)}$ divide b, e, portanto, $m = \frac{n_1}{mdc\ (n_1 \mathrm{n}_2)} n_2$ divide bn_2 que, é igual a c.

Corolário

Se n_1 e n_2 são números inteiros primos entre si, então mmc $(n_1, n_2) = n_1 n_2$.

Vamos ampliar agora a definição de mmc de dois números naturais para o mmc de k números naturais:

Um número natural m é um mmc dos naturais não nulos $n_1,..., n_k$, se m é um múltiplo comum de $n_1,..., n_k$, e, se para todo múltiplo comum c desses números, tem-se que $m|c$.

É fácil ver que o mmc, se existe, é o único, sendo denotado por mmc $(n_1,..., n_k)$.

Proposição 9

Sejam $n_1,..., n_k$ números naturais não nulos. Então existe o número mmc $(n_1,..., n_k)$ e

$$mmc\ (n_1,..., n_{k-1,} n_k) = mmc\ (n_1,..., mmc\ (n_{k-1,} n_k)).$$

Demonstração

Seja m = $mmc(n_1,..., mmc(n_{k-1,}n_k))$. Logo, n_1,..., n_{k-2} e $mmc(n_{k-1,}n_k)$ dividem m. Como $n_{k-1}|mmc(n_{k-1,}n_k)$ e $n_k|mmc(n_{k-1,}n_k)$, segue que m é um múltiplo comum de n_1,..., n_k.

Por outro lado, suponha que c seja múltiplo comum de n_1,..., n_k. Logo, $n_1|c$,..., $n_{k-2}|c$ e $mmc(n_{k-1,}n_k)|c$; daí segue que c é múltiplo de $m = mmc(n_1,..., mmc(n_{k-1,}n_k))$.

2.5 Números Primos

O conceito de número primo é um dos mais importantes na Matemática. Estes números desempenham papel fundamental na Teoria dos Números e estão associados a muitos problemas famosos que permanecem sem soluções apesar dos esforços de vários matemáticos ao longo dos anos.

2.5.1 Conceito e propriedades

Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores 1 e ele próprio é chamado de *número primo*.

Dados dois números primos p e q e um número natural n qualquer, decorrem da definição acima os seguintes fatos:

I) Se $p|q$, então $p = q$.

De fato, como $p|q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

II) Se $p \nmid n$, então $mdc(p, n) = 1$.

De fato, se $mdc(p, n) = d$, temos que $d|p$ e $d|n$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid n$ e, consequentemente, $d = 1$.

Um número maior do que 1 e que não é primo será dito *composto*.

Portanto, se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que

$$n = n_1 n_2, \qquad \text{com } 1 < n_1 < n \text{ e } 1 < n_2 < n$$

Lema de Euclides

Sejam n_1, n_2, $p \in \mathbb{N}$, com p primo. Se $p|n_1n_2$, então $p|n_1$ ou $p|n_2$.

Demonstração

Se $p|n_1$ não há mais o que demonstrar. Suponha que $p \nmid n_1$. Então mdc $(p, n_1) = 1$, e o resultado segue-se do Lema de Gauss.

Corolário

Se p, $p_1,..., p_n$ são números primos e, se $p|p_1...p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1,..., n$.

Demonstração

Use o Lema de Euclides, indução sobre n e o fato de que, se $p|p_i$, então $p = p_i$.

2.5.2 O conjunto dos números primos é infinito

É no livro IX, na proposição 20, que está o resultado mais interessante da obra. Nesta proposição, Euclides prova que há infinitos números primos, usando a redução ao absurdo: Suponha seja finito o número de primos. Tome P como sendo o produto de todos esses números e ainda, consideremos, $K = P + 1$. Logo, K não pode ser primo, pois a hipótese seria contrariada, uma vez que P é produto de todos os primos. Assim, só nos resta afirmar que K é composto e deve então ser medido por algum p, primo. Porém, p não poderia ser um fator de P, pois automaticamente seria também fator de 1. Assim, p é um primo diferente daqueles que são fatores de P, levando ao absurdo.

2.5.3 A distribuição dos números primos

Sabendo que existem infinitos números primos, podemos nos perguntar como obter uma lista contendo os números primos até uma dada ordem. Um dos mais antigos métodos para elaborar tabelas de números primos é devido ao matemático grego Eratóstenes, que viveu por volta de 230 anos antes de Cristo. O método, chamado de *Crivo de Eratóstenes*, permite determinar todos os números primos até a ordem que se desejar, mas não é muito eficiente para ordens muito elevadas.

Como exemplo, vamos utilizar o crivo de Eratóstenes para encontrar os números primos menores que 120.

Primeiramente, escrevemos todos os números naturais de 2 a 120. Em seguida riscaremos todos os números compostos de acordo com o que segue:

Primeiro riscamos todos os múltiplos de 2 maiores que 2, que é o primeiro número primo.

O segundo número primo é o menor número maior que 2 que não foi riscado, isto é, o 3. Agora riscamos todos os múltiplos de 3 maiores que 3 (note que alguns já foram riscados).

O menor número maior que 3 que ainda não foi riscado, o 5, é o terceiro número primo. Então riscamos todos os múltiplos de 5 maiores que 5 (os que ainda não foram riscados).

Por fim, riscaremos os múltiplos do 4º número primo (com exceção dele mesmo) que é o menor número maior que 5 ainda não riscado, isto é, o 7.

O lema a seguir, devido ao próprio Eratóstenes, nos mostra que para encontrar os primos menores que 120 não precisamos repetir além do número 7 o procedimento descrito acima.

Lema

Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.

Demonstração

Se n é composto então ele é divisível por algum primo p. Se $p^2 \leq n$ nada há para demonstrar. Se, por outro lado $p^2 > n$ então $n = pn_1$ com $n_1^2 \leq n$, pois se $n_1^2 > n$ então $n^2 = (pn_1)^2 = p^2n_1^2 > nn = n^2$, o que é uma contradição. Se n_1 é primo nada há mais para demonstrar. Se, porém, n_1 é composto então existe um primo $q < n_1$ que divide n_1 e portanto n e, assim, $q|n$ e $q^2 < n$. Portanto, na nossa tabela de números de 2 a 120, devemos ir até alcançarmos o primo 7, pois o próximo primo é 11, cujo quadrado supera 120.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~
109	~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

Note que o Lema acima também nos fornece um teste de primalidade, pois, para verificar se um dado número *n* é primo, basta verificar que não é divisível por nenhum primo *p* menor que $\sqrt{n}$.

Não existe um padrão em relação à proximidade de dois primos consecutivos.

Note, por exemplo, que na tabela acima vemos que há vários pares de números primos que diferem de duas unidades. Números primos com essa propriedade são chamados *primos gêmeos*. Não se sabe ainda se existem infinitos pares de primos gêmeos.

Em contrapartida existem também primos consecutivos arbitrariamente afastados.

Observe que, dado *n*, a sequência $(n + 1)! + 2$, $(n + 1)! + 3$,..., $(n + 1)! + n + 1$, de números naturais é formada por *n* números consecutivos compostos. Repare que o k-ésimo número desta sequência é divisível por k + 1.

Em relação a densidade de números primos em um determinado intervalo, denotemos por $\pi(n)$, a quantidade de números primos menores ou iguais a *n*.

Legendre e Gauss, analisando tabelas, chegaram à conclusão de que essa função tem um crescimento próximo ao de $\frac{n}{\ln n}$. Por volta de 1900, J. Hadamard e Ch. de la Vallée-Poussin, independentemente, provaram o profundo *Teorema dos Números Primos*, cujo enunciado é simplesmente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{n} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{-1} = 1.$$

2.6 Teorema Fundamental da Aritmética

2.6.1. Enunciado e Demonstração

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração

Provaremos por indução sobre um número natural $n \geq 2$. Para $n = 2$, o resultado se verifica.

Partiremos do princípio que o resultado é válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Então, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1,...,p_r$ e $q_1,...,q_s$ tais que $n_1 = p_1,...,p_r$ e $n_2 = q_1,...,q_s$. Portanto, $n = p_1,...,p_r q_1,...,q_s$.

Vamos, agora, provar a unicidade da escrita. Suponha que tenhamos $n = p_1,...,p_r = q_1,...,q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 | q_1,...,q_s$, pelo corolário acima, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1,...,q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 ... p_r = q_2 ... q_s.$$

Como $p_2 ... p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares.

2.6.2. Aplicações do Teorema Fundamental da Aritmética

Uma das aplicações mais recorrentes do TFA em turmas do Ensino Básico é o uso do mesmo para determinar a quantidade de divisores de um número natural n.

Seguem duas proposições que nos darão uma fórmula pra encontrar o quantitativo de divisores e ainda uma outra não tão usual, que nos fornece o valor da soma dos divisores de um número natural.

Proposição 10

Seja $n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$ um número natural. Se *m* é um divisor positivo de *n*, então:

$m = p_1^{\beta_1} ... p_r^{\beta_r}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, ..., r$.

Demonstração

Considere *m* um divisor de *n* e seja p^{β} a potência de um primo *p* presente na decomposição de *m* em fatores primos. Como $p^{\beta}|n$, decorre que p^{β} divide algum $p_i^{\alpha_i}$, por ser primo com os demais $p_j^{\alpha_j}$, e, consequentemente, $p = p_i$ e $0 \leq \beta \leq \alpha_i$.

Proposição 11

Seja $n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$, a decomposição de um número $n > 1$ nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então, o número de divisores positivos de *n* e a soma de todos esses divisores estão dados, respectivamente, por

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

$$s(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Demonstração

Constatamos na proposição anterior que existem tantos divisores positivos de *n* quanto números da forma

$m = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para i = 1,..., r.

Note que, de acordo com tal critério, os divisores positivos de *n* são todos os termos do desenvolvimento do produto

$$S = (p_1^0 + p_1^1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) . (p_2^0 + p_2^1 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots (p_r^0 + p_r^1 + \ldots + p_r^{\alpha_r})$$

Como cada parênteses contém $\alpha_i + 1$ parcelas, $1 \leq i \leq r$, logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos que o total de divisores de *n* e consequentemente o total de termos de S é:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

Por construção temos que S = s(*n*). Tomando a fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica, temos:

$$p_i^0 + p_i^1 + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i \ +1} - 1}{p_i - 1}, \ 1 \leq i \leq r.$$

Logo,

$$s(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} . \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

A decomposição de números naturais em fatores primos revela toda a estrutura multiplicativa desses números. Podemos então, a partir dela encontrar o mdc e o mmc de dois números naturais n_1 e n_2. Seguem os teoremas que fundamentam essa outra aplicação do TFA também explorada em classes do Ensino Básico.

Teorema

Sejam $n_1 = p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}$ e $n_2 = p_1^{\beta_1}...p_n^{\beta_n}$. Pondo γ_i = min{α_i, β_i}, δ_i = max{α_i, β_i}, i = 1,...,n, tem-se que

(i) mdc(n_1, n_2) = $p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$.

(ii) mmc(n_1, n_2)= $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$.

Demonstração

(i) Sabemos que $p_1^{\gamma_1}...p_r^{\gamma_r}$ é um divisor comum de n_1 e n_2. Seja c um divisor comum de n_1 e n_2; logo, $c = p_1^{\varepsilon_1}...p_r^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_i \leq$ min{α_i, β_i} e, portanto, $c|p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$. Como todo divisor comum de n_1 e n_2 é divisor de $p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$, temos que: mdc($n_1$, n_2) = $p_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$.

(ii) Sabemos que $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$é um múltiplo comum de n_1 e n_2. Seja m um múltiplo como de n_1 e n_2, logo, $m = p_1^{\varepsilon_1}...p_r^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_i \geq$ max{α_i, β_i} e, portanto, $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n} | m$. Como $p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$ é divisor de todo múltiplo como de n_1 e n_2 , temos que : mmc(n_1, n_2) =$p_1^{\delta_1}...p_n^{\delta_n}$.

Capítulo 3

Sequência Didática

3.1 Base teórica para a construção das atividades: Teoria dos Campos Conceituais

A construção dos conceitos e teoremas e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, devem ser de presença marcante no ensino da Matemática. Para tanto, contamos com duas estratégias hoje amplamente defendidas. A primeira delas é o ensino da matemática através da resolução de problemas. Para fundamentar essa proposta, lembramos que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998):

> *"Enfatizam que o fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos — que admitem diferentes respostas em função de certas condições — evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos".*

Deparar-se com um problema por si só, já faz com que o aluno sinta-se minimamente curioso a respeito de sua solução. Quando o mesmo se vê ativo no processo por essa busca, tendo o seu repertório de conhecimento reconhecido e explorado através de discussões e debates, existe então o surgimento real da motivação. Solucionada a questão, são levados a concluir que não somente aplicaram o que já sabiam, mas que construíram novos conceitos e moldes de resolução.

A outra estratégia está na utilização do lúdico dos jogos, do estímulo, e da interação social que eles proporcionam, para a descoberta de propriedades matemáticas, para treino e memorização de conceitos já assimilados, para a formulação de novas teorias. Segundo Borin(1998):

“Dentro da situação de jogo, é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, nota-se que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam de matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. A introdução dos jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos dos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê- la.”

Os mecanismos mencionados podem ser agregados numa mesma metodologia. A base teórica que dará suporte a tal metodologia, bem como será aporte para a superação da defasagem de conteúdo, será a Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud. Segundo ele, o conhecimento conceitual deve emergir a partir de situações-problema, no geral propostas pelos docentes, que possuam significação para o aluno, objetivando fornecer potencialidades para a aquisição de novos conceitos e compreensão de suas estruturas.

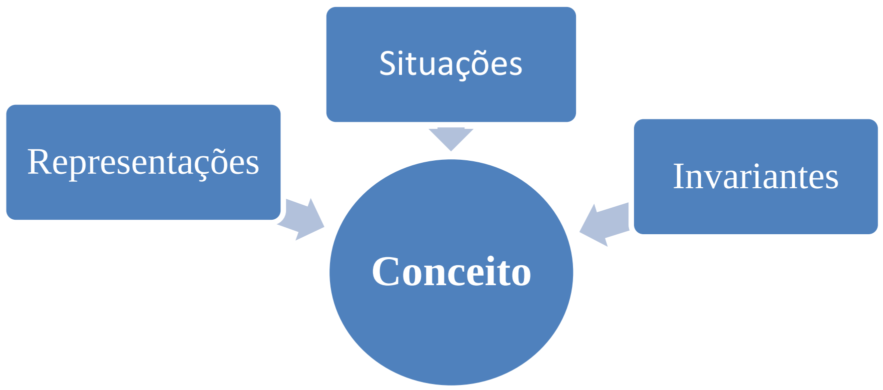
“O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução (Vergnaud, 1990).”

Este pesquisador considera que os conceitos matemáticos estão sempre interligados, formando uma rede complexa, o que é denominada por ele como Campo Conceitual. Sua proposta diz que a análise de uma situação problema não pode ser feita usando somente uma ideia isolada. Se pensarmos por exemplo no processo de fatoração de um número em fatores primos, podemos observar com clareza, que trataremos simultaneamente de diversos tópicos: multiplicação, divisão, potenciação e números primos seriam alguns deles. Assim, um campo conceitual é um grupo de situações, que para serem dominadas progressivamente, faz-se necessário uma variedade de conceitos, de procedimentos e representações simbólicas conectadas.

Se, para Vergnaud, conceitualizar é o centro do processo cognitivo, devemos expor a visão que este tem da estrutura dos conceitos. Para o autor, o conceito é constituído por três conjuntos:

✓ S: O conjunto das situações. A análise de um campo conceitual se inicia a partir de situações, que são responsáveis pelo sentido que é atribuído ao conceito;

- ✓ I: O conjunto dos invariantes. Representam aquilo que se preserva nos conceitos e em seus processos de manipulações. São suas propriedades e os teoremas relacionados. Os invariantes simbolizam o significado do conceito;
- ✓ R: O conjunto das representações simbólicas. São as diversas formas em que um conceito pode se apresentar, uma ideia pode ser descrita, por exemplo, através de um gráfico, tabela, por uma linguagem algébrica ou ainda pela própria linguagem idiomática tanto oral, quanto escrita. Trata-se do significante do conceito.



Grande é a importância dada a noção de esquema nesta teoria. Para Vergnaud (1993), o conceito de esquema designa a atividade organizada que o sujeito desenvolve em face de uma certa classe de situações. Ao verificar um esquema utilizado por um aluno frente a um problema, construindo sua solução, podemos selecionar os elementos cognitivos que fizeram, ou não, com que a ação desse sujeito fosse operatória. A análise de um esquema que alcançou seu objetivo, leva o educador a inferir, por exemplo, se o meio utilizado foi o mais eficiente. Além disso, a observação de um esquema equivocado, dá ao professor ferramentas para buscar a superação de dúvidas, já que poder revelar o ponto em que o aluno está tendo dificuldades para explorar e aplicar propriedades que estão sendo ensinadas. A partir desses dados o educador consegue elaborar um planejamento mais adequado a seu grupo, aprimorando sua técnica e ampliando as chances de sua turma obter um bom rendimento.

Os ingredientes de um esquema, são, segundo Vergnaud (1993):

- ✓ Metas e antecipações: Apresentada uma situação, o sujeito pode esperar certos efeitos ou eventos, premeditar o resultado de algumas escolhas, começando a elaborar assim uma estratégia;

- ✓ Regras de ação: Busca de informação, do conhecimento que valide a estratégia, e ainda do controle dos resultados da ação;
- ✓ Invariantes operatórios: São os conhecimentos que dão base à formação do esquema. São os teoremas-em-ação, que consistem nas proposições consideradas verdadeiras, que estão relacionadas ao objeto de estudo, e os conceitos-em-ação, que são as categorias de pensamento, de definições consideradas como pertinentes.
- ✓ Possibilidades de inferências: Diferentes possibilidades de raciocínios para efetuar o desenvolvimento da solução de uma situação-problema, a partir dos invariantes operatórios contidos no repertório do sujeito.

Há ainda duas classes distintas de situações a serem consideradas quando se fala sobre elaboração de um esquema. Existe aquela em que o indivíduo está dotado das habilidades e conceitos necessários ao seu tratamento, onde o que se busca, ao se propor esse tipo de situação, é aprimorar. Nesta classe observa-se a automatização de um esquema, uma padronização, que leva a uma resolução quase que espontânea.

O segundo grupo de situações, requer do indivíduo tempo de reflexão e exploração, pois trabalha no âmbito da produção, da criação. Aqui o sujeito em ação não possui ainda todas as competências necessárias para a manipular o caso. Com isso, podem surgir metas equivocadas, regras de ação ineficientes e escolhas incorretas dos invariantes operatórios. Ocorrendo dessa forma, o educador deve orientar a manipulação da situação, o que leva o aluno, em seguida, a percepção do erro e a busca pelo esquema eficaz.

Entende-se que em um planejamento de ensino completo ambas as situações devem ser exploradas. As habilidades de reproduzir e memorizar são pilares essenciais para a apreensão de novas ideias, para a produção e elaboração de métodos novos.

3.2.Aula 1: “Entre Retângulos e Divisibilidade”

Atividade 1: Construção de Retângulos

Objetivos Gerais

- Compreender que todo número natural pode ser escrito como um produto de dois fatores;

- Construir uma representação geométrica para os conceitos de fator, divisor e múltiplo;

Objetivos Específicos

- Construir a definição de divisibilidade, de divisor e de múltiplo;

- Registrar as seguintes igualdades matemáticas e perceber a equivalência entre as mesmas: a .b = c, c : b = a e c: a = b, com a,b, e c naturais.

- Demonstrar as propriedades:

Sendo a um número natural, temos:

1) 1 é divisor de a;
2) a é divisor de a;
3) a é divisor de zero.

- Iniciar a discussão sobre números primos e números compostos.

Organização da Classe

Os alunos devem trabalhar em duplas para a realização da atividade.

Material Didático

- Folha de papel quadriculado, onde cada quadrado tem 1cm de lado;

- Fichas de registro, semelhantes a que segue, com um número maior de linhas, já que faz-se necessário a observação de um grande número de casos e suas regularidades, para a extração das propriedades.

<table>
<tr><td>Número de Unidades Quadradas</td><td>Igualdades Envolvendo Produtos</td><td colspan="2">Igualdades Envolvendo Divisões</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Procedimento

Em posse das fichas e do papel quadriculado, a dupla seguirá as indicações do professor, que vai expor pra turma as seguintes situações-problema:

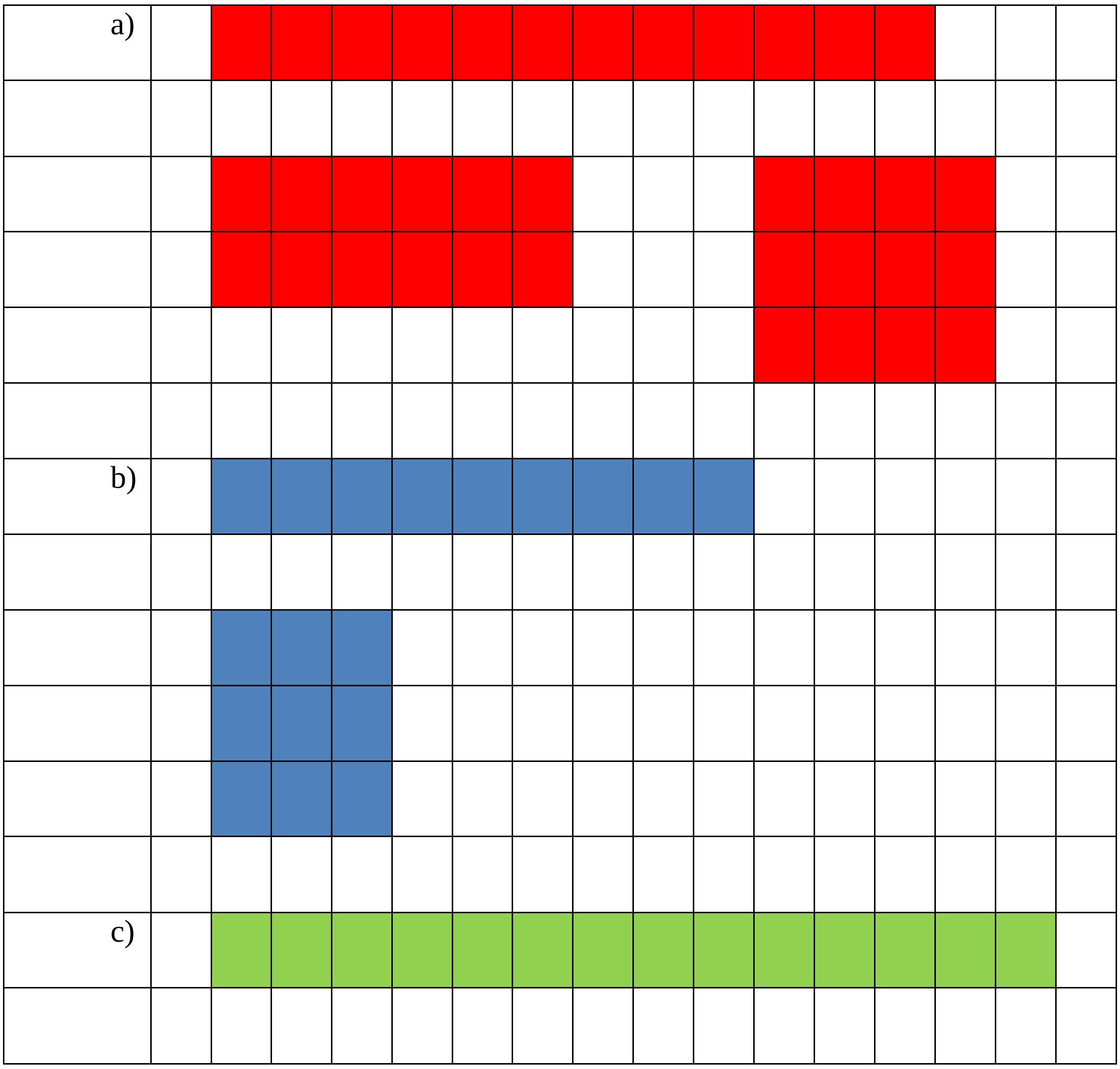
Quantos retângulos podemos formar, cuja a área seja, por exemplo:

a) 12 cm^2?

b) 9 cm^2?

c) 13 cm^2?

O docente vai conduzir sua turma as soluções gráficas:



Em seguida, acompanhará também o preenchimento da ficha que foi entregue:

Número de Unidades Quadradas	Igualdades Envolvendo Produtos	Igualdades Envolvendo Divisões	
$12cm^2$	12 = 12 .1 12 = 3 . 4 12 = 2 . 6	12 : 1 = 12 12 : 3 = 4 12 : 2 = 6	12:12 = 1 12 : 4 = 3 12 : 6 = 2
$9cm^2$	9 = 9 . 1 9 = 3 . 3	9 : 1 = 9 9 : 3 = 3	9 : 9 = 1
$13cm^2$	13 = 13 . 1	13 : 1 = 13	13 : 13 = 1

Note que os exemplos contemplam os três, dos quatro principais casos: O primeiro, um número composto que não é quadrado perfeito, o segundo um número composto que é quadrado perfeito, podendo ser fatorado como o produto de dois primos, e o último um número primo.

Como exercício poderíamos propor que um número composto que é quadrado perfeito e não pode ser fatorado como o produto de dois primos, o que consideramos como sendo o quarto caso, fosse indicado. Por exemplo, o professor apresentaria a turma o desafio de descobrir, dessa vez sem sua intervenção, quantos retângulos com a área igual a 36cm² poderiam ser construídos. E ainda que preenchessem a ficha, tomando sua correção como uma avaliação parcial da aula.

Vale ressaltar que são precisos ainda mais objetos singulares para que os alunos possam compreender as propriedades. Poderia ser de grande valia pedir que os alunos escolhessem outros valores para serem trabalhados. Essa atitude promove uma maior participação da classe e ainda complementa o quadro de exemplos.

É essencial que os casos apareçam nas situações propostas, para que o educando possa concluir que existem números que darão origem a mais de um retângulo, todos com largura e comprimento distintos, outros que darão origem a retângulos com largura e comprimentos distintos e a um quadrado e que outros só poderão ser representados por um único retângulo com largura e comprimento distintos, onde a medida do comprimento é sempre igual a 1.

Fugindo um pouco da atividade, partindo para um pensamento mais abstrato, o professor poderia então, já pensando em preparar uma base para assimilação dos conceito de número primo e número composto, perguntar a turma:

- ✓ Que outros números só podem ser representados por um único retângulo?
- ✓ Qual é o único número par que é representado por um único retângulo?
- ✓ Por que só existe um número par que pode ser representado por um único retângulo?

É importante mencionar ainda que, dependendo do nível da turma, talvez se faça necessária uma revisão de alguns conceitos no início da aula. Um possível erro que deve ser evitado, já com comentários anteriores a atividade, é o de pensar que retângulos 3 x 4 e 4 x 3 são distintos.

Faz-se necessário também, recordar com a turma os conceitos de retângulo e quadrado, bem como suas propriedades, enfatizando que todo quadrado é um retângulo com os quatro lados possuindo a mesma medida.

Construindo Definições e Demonstrações

Seja qual for o curso de matemática, deve-se colocar em prática sempre o debate científico, que consiste em levantar uma problemática, deixar que os estudantes questionem, ou sejam guiados pelos questionamentos do professor, de acordo com o perfil da turma, e que levantem possíveis soluções e estratégias para o assunto proposto. Tal prática tem como pressuposto que é preciso estar ativo no jogo científico para ter o interesse despertado pela ciência, para compreender o alcance real de seus resultados e consequentemente, na resolução de problemas, aplicar esses resultados.

Na metodologia apresentada, a primeira etapa para a condução aos critérios que compõem uma definição, foi realizada: A apresentação de objetos singulares vinculados a uma situação, retângulos e suas áreas, com a qual a turma já estava familiarizada. Além disso, foram trabalhadas duas representações, a geométrica e a aritmética, estando envolvidos vários invariantes, por exemplo, os conceitos de multiplicação, de divisão e de igualdade. Nessa segunda fase que será apresentada, o professor orientador vai levantar questionamentos, oralmente ou expostos no quadro ou ainda em ficha complementar para que o estudante faça o registro de suas ideias, de forma que os invariantes dos conceitos que pretendemos formar, se apresentem de forma explícita. Seguem algumas possibilidades:

- ✓ Todo número natural pode ser representado como um retângulo, de área igual ao mesmo?
- ✓ Qual é o menor número de retângulos que pode representar um número natural?
- ✓ Existe algum retângulo, de mesmo comprimento, que apareça em todos os casos?

Após esse debate, exemplos podem ser discutidos e outras questões levantadas:

12 pode ser escrito como o produto 12 . 1, ou seja, ele é resultado da multiplicação de 12 por 1, assim como é de 3 por 4 e 2 por 6. Logo, podemos dizer 12 é múltiplo de 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Pensando de forma geral, quando um número A é múltiplo de um número B? Respostas como as que seguem podem ser aceitas como corretas, levando em consideração o devido grau de maturidade matemática do grupo:

“Toda vez que A for a resposta da multiplicação de B por outro número”.

“Quando B vezes algum número é igual a A”.

12 quando dividido por 1, gera 12 partes, 12 quando é dividido por 2, gera 6 partes e ainda 12 quando dividido por 3, gera 4 partes. Assim, podemos dizer que os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4 , 6 e 12, e ainda que 12 é divisível por 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Generalizando mais uma vez, o que faz com que um número A seja divisor de um número B?

“Quando B pode ser divido em partes iguais por A”.

Quando então podemos afirmar que um número divide o outro? Qual é a definição de divisibilidade?

Propomos que esta definição seja dada pelo educador e analisada pela turma:

“Um número natural A divide um número B, se podemos encontrar um número C, onde B = C.A”

Tal definição deve ser trabalhada em detalhes, já que o estudante do sexto ano não tem ainda o conhecimento pleno da linguagem algébrica, mesmo já tendo tido o contato breve com a ideia de que letras podem representar números.

Um bom questionamento seria: Quais são as possibilidades de A e C se B for o número 12?

Se C = 12, então A = 1.

Se C = 1, então A = 12. E assim sucessivamente. Tendo em mente que o ideal seria o docente iniciar revelando as respostas e deixar que os alunos completem o raciocínio.

As demonstrações das propriedades mencionadas podem ser guiadas pelo educador ou ainda apresentadas e interpretadas com o grupo. Para a turma, sendo A um número natural, podemos explicitar:

A = 1 . A, logo o número 1 é o que de A?

A = 1 . A, logo o número A é o que dele mesmo?

Assim, podemos dizer que todo número é divisível por quais valores? Com isso mais uma propriedade é construída:

“ ”.

O debate da divisão do zero não foi realizado com a malha quadriculada, pois não faz sentido representar o zero por um retângulo. Contudo, como estamos tratando o conceito de divisibilidade também com outra representação que não a gráfica, podemos buscar diversos exemplos como os que seguem e depois pedir aos alunos uma conclusão:

0 = 0 . 12,   0 = 0 . 9, 0 = 0 .13

Assim como, 0 = 0 . A. Logo, todo número é um divisor de zero.

As ideias de divisibilidade, divisor e múltiplo foram contempladas nesta aula, através da proposta inicial de uma situação-problema, foi explorada em seguida com um debate e ainda foi finalizada com algum rigor matemático coerente com uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental. Acreditamos que dessa forma, os alunos possam subir um degrau de abstração rumo a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética.

3.3.Aula 2: “Divisão Euclidiana e o Jogo dos Restos”

As provas de vários teoremas relacionados ao processo de divisão euclidiana são muitas vezes inacessíveis aos alunos que compõem o sexto ano do Ensino Fundamental, principalmente quando abordadas com o rigor da matemática avançada. Contudo, podemos trabalhar com as turmas muito além do que a simples exposição de resultados e propriedades, dados como verdades não passíveis de questionamentos. Esta aula, traz a proposta de uma atividade que, apesar de não demonstrar formalmente sua validade, ilustrará diversas características da Relação Fundamental da Divisão:

Dados os números naturais d e D, com d diferente de zero, temos que existem dois únicos números naturais q e r, tais que:

D = dq + r, com r maior ou igual a zero e menor que d.

Vale ressaltar, que o grupo já possui certa prática na aplicação de tal algoritmo, advinda do estudo do mesmo em séries anteriores, portanto a relação citada é um conceito que já se encontra em construção. Além disso, já existe consolidada, no geral, a nomenclatura para cada um dos termos relacionados na igualdade acima:

D é chamando de dividendo, d de divisor, q quociente e r de resto.

Logo, a abordagem algébrica não está fora da realidade do grupo.

<u>Atividade 1: Dividindo com material concreto</u>

Objetivos gerais

- Atribuir significado aos elementos de uma situação em que se distribui certo número de objetos em grupos iguais;

- Associar a atividade com o algoritmo da divisão.

Objetivos Específicos

- Reconhecer que a quantidade de pratos na qual o número de feijões pode ser distribuído igualmente sem deixar resto representa um divisor de tal número;

- Evidenciar que a maior quantidade possível de pratos para que a atividade possa acontecer é igual ao número de feijões;

- Reconhecer que todo número natural é divisível sempre por 1 e por ele mesmo;

- Perceber a existência de números que só possuem dois divisores;

- Associar o conceito de múltiplo às divisões com resto zero.

Organização da Classe

Os alunos devem trabalhar em duplas para a realização da atividade.

Material Didático

- Um recipiente com feijões;

- Um conjunto de 6 pratinhos;

- Fichas de registro semelhantes às que seguem:

N° de pratinhos	N° de grãos em cada prato	Resto	N° total de grãos
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Procedimento

As quantidades de pratos e feijões nessa primeira atividade não serão escolhidas ao acaso, para que o estudante possa evidenciar a forma de registro, que futuramente também será adotada no Jogo dos Restos, buscando assim, a garantia da evolução correta do jogo e da extração das propriedades da Divisão Euclidiana dos registros efetuados.

O professor pedirá que a primeira ficha seja preenchida com o número total de 10 feijões, a segunda com 12 e a terceira com 19. Tais fichas serão entregues as duplas, assim como os seis pratinhos e o pote com feijões.

O total de feijões deverá ser repartido, de forma que todos os pratos devem ter o mesmo número de feijões, recebendo cada um o maior número possível. Primeiramente utilizarão apenas 1 prato, em seguida 2, e assim sucessivamente, até o sexto prato.

Exemplificamos o procedimento com a ficha que segue, para um total de 19 feijões:

N° de pratinhos	N° de grãos em cada prato	Resto	N° total de grãos
1	19	0	19
2	9	1	19
3	6	1	19
4	4	3	19
5	3	4	19
6	3	1	19

A reflexão sobre o processo e os resultados quando uma atividade lúdica é finalizada faz-se essencial para que a mesma deixe de ser apenas uma forma de "brincar" com conceitos matemáticos para se tornar uma ferramenta de construção do conhecimento. Contudo, essa reflexão não pode ser limitada a fala do educador, ela deve aparecer em forma de discussão envolvendo toda a turma.

"As regras ou os princípios do "debate científico", conforme estabelecidas por Legrand (1990), parecem permitir aos alunos praticar realmente, em sala de aula, atividades científicas – questionamentos e formulações de raciocínios – que, guardadas as devidas proporções, são da mesma natureza das atividades desenvolvidas por especialistas nas comunidades de pesquisa."

Propostas de questões a serem sugeridas pelo professor ao fim da atividade:

✓ Qual o maior número de pratos que pode ser utilizado na realização dessa atividade, quando utilizamos 10 feijões? E 12? E 19?

✓ Sem ampliar a tabela, considerando todas as possibilidades de pratos, quais as quantidades de pratos que não deixam resto para esse valor? O que essas quantidades representam?

✓ Crie sentenças utilizando as palavras divisor e múltiplo, relacionadas aos elementos da tabela.

Atividade 2: Jogo dos Restos

Os objetivos gerais e específicos da Atividade 1, também são buscados nesse momento, além dos que seguem:

Objetivos gerais:

- Trabalhar o lúdico dos jogos, bem como sua competitividade característica, para o desenvolvimento das ideias matemáticas e interações com o grupo;

- Construir a Relação Fundamental da Divisão.

Objetivos específicos:

- Observar que o resto de cada divisão é sempre maior ou igual a zero, e que nunca ultrapassa ou é igual ao valor do divisor;

- Listar os possíveis valores de restos para diversos divisores;

- Reconhecer que a adição do resto ao produto do número de pratos pelo número de grãos por prato resulta no total de grãos;

- Utilizar a igualdade acima citada para o cálculo mental do total de feijões.

Organização da Classe

Os alunos devem trabalhar em duplas para a realização da atividade.

Material Didático

- Um recipiente com feijões;

- Um conjunto de pratinhos;

- Fichas de registro semelhantes às que seguem, com um maior número de linhas:

N° de pratinhos	N° de grãos em prato	Restos	N° total de grãos

- Um dado com seis faces.

Procedimento

O jogo consistirá em: Cada aluno da dupla, vai retirar inicialmente um punhado de feijões do recipiente, sem contá-los. Em seguida, jogará o dado e o resultado obtido irá determinar o número de pratos que o mesmo deverá pegar. Os feijões serão distribuídos nos pratos, seguindo as regras:

1) Os pratos devem conter o mesmo número de feijões, recebendo sempre o maior número possível;
2) Os valores devem ser registrados nas fichas dadas;
3) Ganhará a partida quem ficar com o maior resto, após essa repartição.

Consideramos que um número mínimo de 5 partidas deve ser considerado para observação e generalização das propriedades.

Duas concepções errôneas que podem ser consideradas pelo grupo como verdades, mas no decorrer do jogo serem classificadas de forma correta são:

- ✓ Quanto maior o número de feijões no punhado, maior será o resto.

- ✓ Quanto maior o número de pratos menor será o resto.

A invalidação dessas afirmações pode ser feita pela citação de contra exemplos. Vamos expor um caso que irá tornar falsa a primeira conclusão:

N° de pratinhos	N° de grãos em cada prato	Restos	N° total de grãos
6	8	0	48
6	6	4	40

A tabela acima pode ser explicitada e o professor assim consegue ressaltar com mais clareza, que a conclusão está errada. Note que, no contra exemplo dado quando o número de feijões é 48, o resto é zero, já quando o total de feijões é 40 o resto é 4 e no entanto, 48 é maior que 40, sendo o resto deixado por 48 menor que o deixado por 40, o que contradiz a afirmação.

Os contra exemplos dirigem-se habitualmente às premissas universais quando pretendemos refutá-las. Uma premissa universal será falsa se encontrarmos pelo menos uma situação em que a mesma não pode ser aplicada.

Essa estratégia, deve certamente ser explicada em detalhes ao grupo, dando a turma uma importante ferramenta lógica para resolução de diversos exercícios e compreensão de futuras demonstrações.

Dando continuidade, observamos que esse debate serve para iniciarmos a discussão sobre os possíveis valores do resto. Alguns questionamentos podem ser levantados pelo professor:

- ✓ Quando o resto é igual a zero, temos uma divisão exata. Isso significa que o total de feijões é o que do número de pratos?

- ✓ Seria possível que o resto de feijões fosse maior que o número de pratos? Qual parte das regras do jogo estaria sendo infligida caso isso ocorresse?

- ✓ Analise as possibilidades de restos para o número de pratos igual a 15, a 80 e a 100 por exemplo. O que podemos concluir a respeito dos possíveis valores dos restos em relação aos valores dos divisores?

A sentença algébrica pode ser apresentada como conclusão do raciocínio acima construído, sendo importante uma revisão prévia da simbologia para as relações de maior e menor:

Designando o resto por r e o divisor por d, temos:

$$\mathbf{0 \leq r < d}$$

Construção do Teorema da Divisão Euclidiana

A construção do Teorema será feita a partir da observação dos valores registrados ao longo do jogo nas fichas. Cada aluno reconhecerá com o auxílio do professor em sua própria ficha que a adição do resto ao produto do número de pratos pelo número de grãos por prato resulta no total de grãos. Essas igualdades serão escritas em uma ficha auxiliar como a que segue, sendo os dados das quatro primeiras colunas, os obtidos durante as partidas no Jogo dos Restos, já registrados numa ficha anterior.

N° de pratinhos	N° de grãos em prato	Restos	N° total de grãos	Igualdades

O Teorema da Divisão Euclidiana será apresentado no quadro, no formato já exposto na breve introdução dessa aula, com base na observação dos objetos singulares, já que sua demonstração não está ao alcance da turma, porém deve-se deixar claro que tal formalidade existe e é necessária.

Avaliar o aprendizado de forma continuada é uma excelente estratégia, para que o educador acompanhe a evolução de sua turma, bem como possa rastrear as dúvidas do grupo. Para a verificação da aprendizagem, uma atividade que pode ser aplicada de imediato, seria o preenchimento individual de uma tabela semelhante a que segue:

N° de pratinhos	N° de grãos em prato	Restos	N° total de grãos	Igualdades
3	12	2	38	38 = 12 . 3 + 2
5	7	4	39	39 = 7 . 5 + 4
2	23	1		
	15	3	78	
8		2	90	
13			134	

3.4.Aula 3: “Desvendando o Segredo dos Números Primos”

Os números primos estão presentes no currículo do sexto ano, sendo, portanto, um assunto que é abordado nas salas de aula pelos educadores que seguem o conteúdo programático proposto. Contudo, nota-se que os estudantes, podem até ter memorizado a definição de tais números, porém, não associa a mesma ao Teorema Fundamental da Aritmética, nem tão pouco ao MDC e ao MMC. O tratamento dado a esse objeto matemático, no geral, tem um caráter segmentador, analisa a ideia de forma isolada. Tal conceito não pode ser compreendido em separado, a construção do mesmo deve ser iniciada com discussões envolvendo múltiplos, divisores e o próprio processo de divisão euclidiana.

As atividades sugeridas nessa aula visam consolidar o conceito de número primo já introduzido nas aulas anteriores, através do trabalho em grupo num ambiente lúdico. Sua definição será construída a partir de dinâmicas que ajudam a estruturar o pensamento dos alunos, incentivam a criatividade e a capacidade de analisar e deduzir.

Presume-se que os alunos que participarão dessa atividade tenham trabalhado com os conceitos de multiplicação e potenciação em expressões numéricas. Contudo, uma breve revisão seria aconselhável antes de iniciar as etapas propostas.

Atividade 1: Desvendando o Segredo dos Números Primos

Objetivos Gerais

- Desenvolver a habilidade de associar elementos;
- Trabalhar a generalização a partir da observação de propriedades comuns;
- Estimular a capacidade de criação e o trabalho em grupo.

Objetivos Específicos

- Definir número primo e número composto;
- Iniciar a discussão sobre decomposição em fatores primos;
- Revisitar os processos de multiplicação e potenciação.

Organização da Classe

Os alunos irão trabalhar em grupos com entorno de 4 alunos, que serão formados da seguinte maneira: Cada aluno da turma receberá um cartão com uma expressão matemática. Cabe a cada estudante, para a formação das equipes, resolver sua expressão e encontrar os colegas que tenham obtido o mesmo resultado, ou ainda associá-las pela aplicação da noção de potência, o que seria um procedimento que indicaria o aprendizado das propriedades de potenciação. As expressões serão sempre fatorações em fatores primos. Seguem exemplos de cartões:

$2.2.2.3^2.5$	$2^3.3^2.5$
$2.2^2.3^2.5$	$2.3.3.5$

Após a formação dos grupos, o professor abre para debate o critério que levou os alunos a compor as equipes, além de questionar os mesmos sobre a estratégia utilizada. Seria interessante tomar um grupo como exemplo, expor as expressões de seus cartões no quadro e trabalhar as mesmas.

Material Didático

- Cartões contendo as expressões;

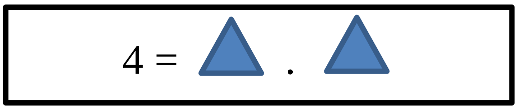
- Cartões com os números primos menores que 10 e sua respectiva representação simbólica;

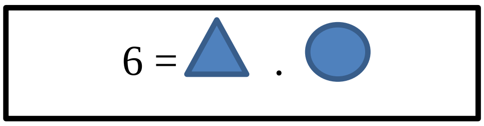
- Cartões com números compostos fatorados usando a simbologia atribuída a cada número primo citado no item acima;

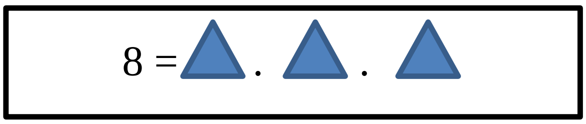
- Cartolina, tesoura, lápis de cor e caneta hidrocor.

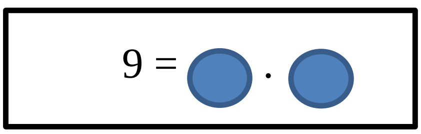
Procedimento

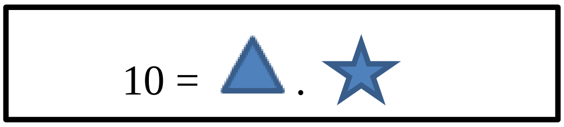
Cada grupo receberá cartões como os que seguem:

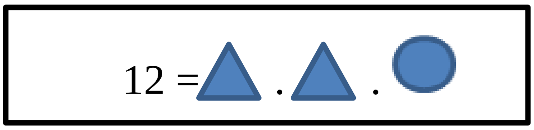




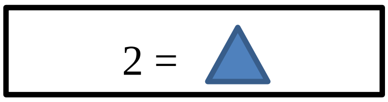


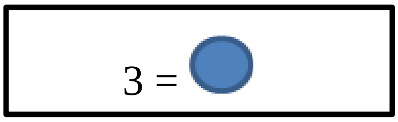


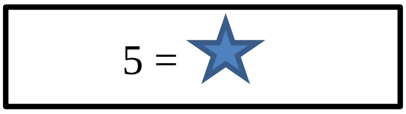




Direcionados pelo professor os alunos deverão deduzir que:







Os cartões acima devem estar previamente preparados e serem expostos no quadro após a dedução da classe.

Alguns questionamentos devem ser feitos pelo professor:

- ✓ Seria possível decompor 2, 3 e 5 como a multiplicação de números diferentes de 1 e deles mesmos?
- ✓ Quantos e quais são os divisores de 2, 3 e 5?
- ✓ Existe alguma relação entre as respostas dadas nas questões anteriores?

Em seguida, cada grupo será orientado a descobrir a resposta de apenas uma das perguntas abaixo:

- ✓ Quais números entre 6 e 12 tem exatamente dois divisores?

- ✓ Quais números entre 12 e 18 tem exatamente dois divisores?

- ✓ Quais números entre 18 e 24 tem exatamente dois divisores?

E assim sucessivamente, de acordo com a quantidade de equipes formadas, possibilitando a cada uma delas encontrar apenas dois números primos em cada intervalo.

Após essa etapa, os alunos deverão criar símbolos para os números encontrados e apresentá-los à turma em cartões confeccionados por eles.

Para construir a definição de número primo o educador faz o debate final:

- ✓ O que todos esses números tem em comum?

- ✓ Tais números podem ser incluídos no conceito de Números Primos. Como podemos defini-los?

O professor deve orientar a turma e chegar à definição:

Números Primos são números naturais maiores do que 1, que só são divisíveis por 1 e por eles mesmos.

Devemos acrescentar ainda que os números que não são primos, são chamados de números compostos. Para fixar a ideia, propomos que a turma poderia confeccionar um "jogo da memória" onde os pares serão formados por um número composto e por sua respectiva decomposição em fatores primos, feita utilizando os símbolos criados pelos grupos e os apresentados pelo professor. Um modelo das peças desse jogo encontra-se no anexo 1.

3.5. Aula 4: Método da Árvore para a Decomposição em Fatores Primos

O Teorema Fundamental da Aritmética, TFA, nos diz que todo número inteiro maior que um, ou é primo, ou se escreve de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de números primos. A demonstração desse teorema é, para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, de entendimento complexo. Contudo, defendemos aqui, mais uma vez, que o fato de um determinado conceito matemático ter uma definição mais abstrata ou de um teorema ter uma demonstração que utiliza linguagens e conhecimentos mais avançados, não significa que o professor deve simplesmente expor os mesmos esquivando –se de uma discussão sobre o assunto. A generalização do processo de decomposição em fatores primos, que conduz ao TFA, poderia ser feita com a turma, através da observação, manipulação e criação de exemplos, selecionando de tais casos particulares as propriedades que lhes são comuns, construindo a partir delas tal teorema. Sabe-se que a generalização de propriedades através da observação de diversos objetos, incluídos no conteúdo de certo conceito, não é o movimento matemático considerado com o rigor adequado aos padrões dessa ciência. Esse fato não pode ser ignorado, a classe tem que estar ciente de que é um processo de experimentação, baseados em uma teoria já provada. Ressaltamos novamente, que a demonstração formal não seria uma boa ferramenta para ser usada com este grupo de alunos, mas sua existência deve ser informada, inclusive para atrair atenções sobre uma matemática bem mais avançada e ainda desconhecida por esse público.

Apresentaremos nesta aula o Método da Árvore para Decomposição em Fatores Primos como alternativa para a formulação de casos que ilustrem o TFA aplicado ao conjunto dos números naturais. Esta forma de representar a fatoração nos permite observar que pode existir mais de uma maneira de se efetuar este algoritmo chegando a um mesmo resultado, além de proporcionar mais clareza na determinação dos divisores do número que está sendo fatorado. Podemos também extrair deste modelo diversas igualdades envolvendo multiplicações e divisões, elucidando suas propriedades e a reversibilidade entre elas, como será abordado nas duas atividades que seguem.

Atividade 1: Aprendendo o Método da Árvore

Objetivos Gerais

- Revisar e aplicar os conceitos de multiplicação e divisão, bem como suas propriedades e a reversibilidade entre elas;

- Decompor um número em fatores compostos e em fatores primos.

Objetivos Específicos

- Reconhecer que todo número natural maior que um, ou é primo, ou pode ser decomposto de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de números primos;

- Reconhecer e aplicar o conceito de números primos nesse processo de decomposição;

- Destacar as igualdades envolvendo multiplicação, divisão e potenciação incluídas nesse processo de decomposição;

- A partir da observação da decomposição de um número em fatores primos, determinar seus divisores.

Organização da Classe

A turma ficará organizada em duplas, porém cada aluno fará seu registro individual. O objetivo da formação de duplas é a troca de informações e ideias durante a atividade.

Material Didático

- Quadro e caneta para quadro;

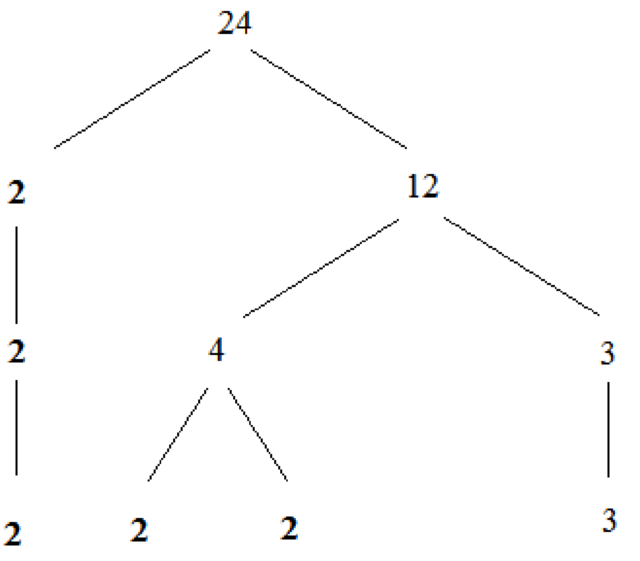
- Caderno e caneta pra o registro da atividade;

- Ficha de avaliação.

Procedimento

Inicialmente serão apresentados exemplos da decomposição de um número em fatores primos através do Método da Árvore, para posterior generalização do algoritmo. Escolhemos um caso em que o número ao ser fatorado, nos dá mais de uma possibilidade para a construção da árvore:

a)



A descrição oral detalhada de cada caso é essencial para a aprendizagem. Faremos a descrição do exemplo acima, como sugestão para o professor:

A primeira coisa que devemos nos perguntar é: O número 24, pode ser escrito como o produto de dois números, sendo ambos diferentes de 1?

A resposta para essa pergunta é sim, já que 24 é um número composto.

Pesando em quais seriam esses dois números, chegamos a uma das possibilidades: 12 e 2, 24 = 12 .2.

Faremos o mesmo raciocínio tanto para 2 , como para 12.

Ao nos questionarmos se 2 pode ser escrito como o produto de dois fatores ambos diferentes de 1, chegamos de forma simples a resposta, que é não, já que 2 é primo. Assim, nos resta repetir o número 2 na linha abaixo até o final do processo.

Em relação ao 12, escolhemos a opção 3 e 4, já que 12 = 3.4.

Finalizando o processo, focamos nos números 3 e 4. O número 3 será repetido na linha de baixo, pois já sabemos que 3 é primo, contudo o número 4, pode ser escrito como o produto de 2. 2.

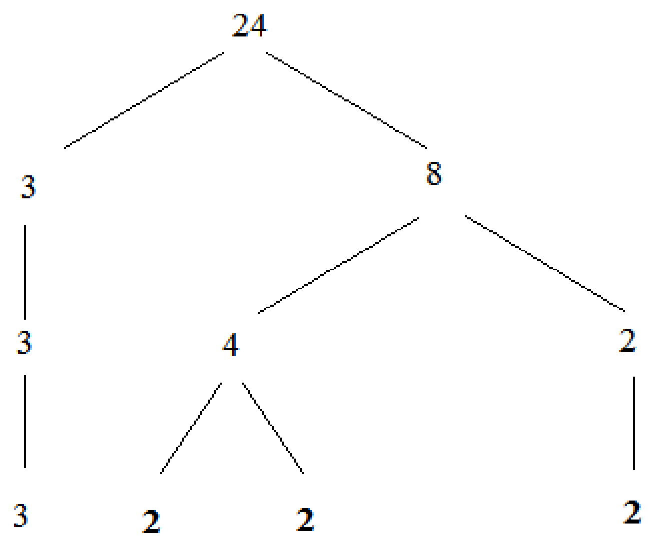
Assim, na última linha, encontramos: 2, 2, 2 e 3.

O que isso significa?

Temos que 24 pode ser escrito como o produto: 2 . 2. 2. 3, ou ainda, que $24 = 2^3 . 3$.

Neste mesmo caso, o professor pode apresentar também para a turma a construção de uma outra árvore:

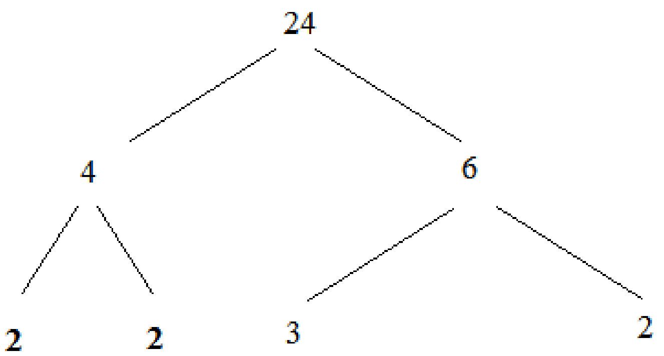
b)



A última linha apresenta os números 3, 2, 2, e 2. O que isso significa? Podemos afirmar que $3. 2^3 = 2^3 .3$? Relembrar a propriedade comutativa da multiplicação é de extrema importância nesse momento, para tomar a sentença $3. 2^3 = 2^3 .3$ como verdadeira.

E por fim, pedir aos alunos que pensassem em mais uma forma de decompor o número 24. Expondo no quadro um modelo de resposta:

c)



Em cima dessas três formas distintas de decomposição que levam ao mesmo resultado, podemos explorar diversas igualdades envolvendo multiplicação e divisão.

No item (a), por exemplo, temos:

24 = 12 . 2 24 = 2 . 4. 3 24 = 2 . 2. 2. 3 12 = 4 . 3 4 = 2. 2	e	24 : 2 = 12 24 : 12 = 2 12: 3 = 4 12 : 4 = 3 4 : 2 = 2

E ainda pode-se deduzir os divisores do número 24 a partir da observação de suas decomposições, lembrando a turma que todo número é divisível por um e por ele próprio. Assim, o conjunto dos divisores de 24 é {1,2,3,4,6,8,12,24}.

Finalizada essa exposição para a classe, pode-se iniciar uma discussão de uma versão generalizada para a realização de uma decomposição em fatores primos para um número qualquer.

Para trabalhar a habilidade de exteriorizar o raciocínio através da escrita, o educador pode pedir aos estudantes que respondam a seguinte questão:

- ✓ Como vocês explicariam para alguém o processo de decomposição em fatores primos de um número n, sendo n natural e maior do que 1?

Explicitar um processo como esse, sem dúvida não é algo simples, tanto pela natureza do exercício, como pelo fato de não ser usual na prática pedagógica. Permitir que os alunos escrevam sem intervenções, entregando ao professor suas produções, é uma boa forma de avaliar como os mesmos atuam diante dessa tarefa, tida como complexa.

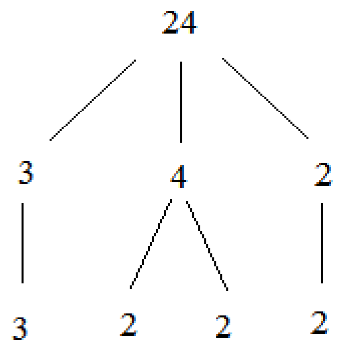
Posteriormente, o professor irá expor uma forma de escrever as regras do algoritmo para a decomposição de um número em fatores primos:

Dado um número natural n, devemos determinar dois números a e b, diferentes de 1, tais que n = a. b. Se esse procedimento não for possível, temos que n é um número primo, o que finaliza a operação. Caso seja possível, temos que n é composto e, repetiremos o processo com a, determinando dois números c e d , tais que, a = c . d, e ainda com b, determinando dois números f e g, tais que b = f .g. Se esse processo não for possível com a ou b, significa que um ou outro são primos, devendo ser reescritos na linha seguinte. Mais uma vez a ideia será aplicada a c, d , f e g, e assim sucessivamente, até que todos os números restantes em uma linha sejam primos.

Aprofundando a discussão sobre tal mecanismo de decomposição, o professor poderia levantar a seguinte ideia:

- ✓ Temos necessariamente que, dado um número natural n, pensar em exatamente dois números a e b, tais que n = a . b? Ou poderíamos pensar em três números x, y, z tais que n = x . y. z, ou ainda, quatro números m, n, p, q, tais que n = m . n . p . q, e assim sucessivamente?

Espera-se que o diálogo com a classe leve a conclusão de que quanto maior o número de fatores que pudermos determinar num primeiro momento, mais rapidamente chegaremos a decomposição em fatores primos, segue o exemplo:

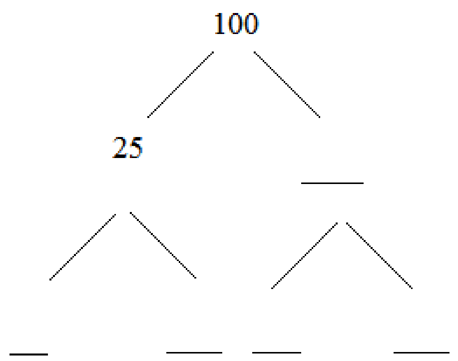


Ao fim da aula o professor propõe uma pequena avaliação, que será realizada pela dupla, com registros individuais. A proposta é de uma avaliação curta, que consiste em apresentar árvores de decomposição incompletas, visando determinar se os alunos compreenderam o processo de decomposição em si, e ainda se perceberam as relações de multiplicação e divisão implícitas no mesmo.

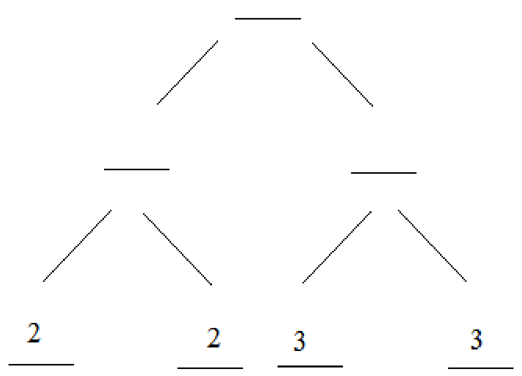
Ficha de Avaliação

Complete as árvores de decomposição que seguem:

a)



b)



Atividade 2: O jogo da Árvore

Objetivos Gerais:

- Trabalhar a interação social, a criatividade e as ideias matemáticas de decomposição, multiplicação e divisão através do lúdico dos jogos;

- Desenvolver o cálculo mental e a agilidade do raciocínio.

Objetivos Específicos:

- Praticar a decomposição de um número em fatores primos;

- Reconhecer igualdades envolvendo multiplicação e divisão presentes na árvore de decomposição dos números dados.

Organização da Classe

A turma ficará dividida em grupos de 4 alunos. O grupo será dividido em duas duplas, que competirão durante a atividade.

Material Didático

- Quadro e caneta para quadro;

- Cronômetro;

- Folha de papel A4;

- Caneta.

Procedimento

As regras do jogo serão apresentadas a turma:

- ✓ Serão jogadas 5 partidas;

- ✓ Em cada partida um número será anunciado pelo professor, devendo o mesmo ser decomposto por cada dupla, pelo método da árvore;

- ✓ Em seguida a dupla tentará extrair de cada decomposição o maior número possível de igualdades envolvendo multiplicações e divisões;

- ✓ Vence a dupla que no intervalo de tempo predeterminado construir a árvore de forma correta, extraindo da mesma o maior número de igualdades.

O intervalo de tempo de cada partida pode ser negociado com a turma, tendo é claro que contar com o bom senso do professor e sua análise em relação ao nível em que a classe se encontra para realização dos cálculos. Também deve-se levar em conta os números que foram selecionados para a realização da atividade e o grau de dificuldade de suas decomposições.

Ao término das atividades, o educador iniciará um debate, cujas questões levantadas, servirão de suporte pra o entendimento do enunciado do TFA que será exposto em seguida.

- ✓ Diante da observação dos casos, um número sendo primo, pode ser fatorado como um produto de números primos? Por quê?

- ✓ Todo número composto admite uma decomposição cujos fatores sejam todos números primos?

- ✓ O processo de decomposição de um número composto é único? E seu resultado é único?

Tendo sido realizada essa discussão, o educador expõe no quadro o enunciado do TFA, que deve ser registrado. Sua demonstração formal, como já foi mencionado, não deve ser apresentada, já que não condiz com o conhecimento matemático da classe, mas sua existência e sua função de real validação do teorema deve ser mencionada.

3.6. Aula 5: Resolução de Problemas

A sequência didática proposta por nós será encerrada com uma sugestão metodológica envolvendo a resolução de problemas, que vão abordar os conceitos associados a divisibilidade, números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética. Nesta aula, trazemos a estratégia do ensinar matemática através do desenvolvimento e análise da solução de questões. Primeiramente, devemos deixar clara a diferença entre exercício e problema. Consideramos um exercício quando o tratamento do caso exige somente a reprodução, quase que automática, de uma técnica, para que alcancemos o objetivo final. Temos, de acordo com Pozo(1998) que:

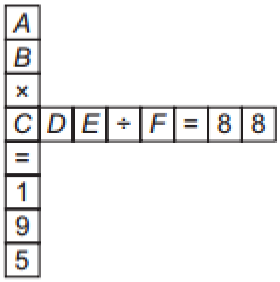
> *"(...)uma situação somente pode ser concebida um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não dispomos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a consequência de passos a serem seguidos."*

Ainda, segundo Pozo(1998), consideramos que o problema impõe um desafio, a vivência de um caso diferenciado, isto é, a solução não é construída por meio de um caminho rápido e direto, mas através de ações que exigem a explicitação de estratégias, conhecimentos conceituais e atitudes.

A riqueza de se trabalhar matemática através da resolução de problemas está na oportunidade de estudar com os alunos diferentes esquemas, e com intervenções pertinentes, guiá-los por suas estratégias distintas, rumo ao mesmo resultado. Propicia ao professor ter contato direto com os erros dos estudantes, o que permite um replanejamento, sinalizado por uma referência concreta.

Problema 1

As contas AB x C = 195 e CDE ÷ F = 88 estão corretas, sendo A, B, C, D, E e F algarismos diferentes. Qual é o algarismo que representa a letra F? (OBMEP 2015)

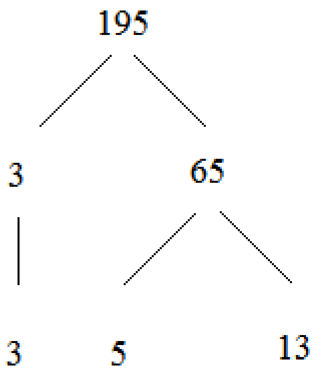


Este problema nos apresenta uma solução que desperta a curiosidade dos alunos. O ponto de interesse e questionamento está na necessidade de realizar tentativas, até chegar a resposta correta. A maioria dos estudantes acredita que saber resolver uma questão implica em desenvolver uma meta que leve diretamente ao resultado, sem pausas para erros e reformulações. Se a estratégia envolve tentativa e erro, no geral somos indagados: “Mas é assim, tentando?” “Não tem um jeito direto?” Os estudantes chegam a indagar a respeito da legitimidade desse método, por não ser explorado com frequência em sala de aula.

Se, ao desenvolver a questão perante a turma, o educador escolheu um caminho, que não leva a solução do problema, sem antes deixar claro para a classe que trata-se de uma tentativa a partir da escolha aleatória de uma das possibilidades, pode criar um clima de desconfiança. Portanto, é interessante que antes de iniciar a investigação, o professor faça uma abordagem franca sobre o caso, discutindo o fato de que ao se optar por uma direção podemos ou não alcançar o objetivo.

Analisaremos o primeiro dado: AB x C = 195. Partiremos para a decomposição de 195 em fatores primos:

Tomando essa fatoração:



Podemos ser levados a crer que A = 6, B = 5 e C = 3.

Passaríamos a análise do segundo dado: CDE ÷ F = 88. Como estamos supondo que C = 3, de acordo com o que constatamos a partir da fatoração acima, teríamos 3DE ÷ F = 88. Assim, recordando a relação de reversibilidade entre a divisão e a multiplicação, buscamos o número de um algarismo que quando multiplicado por 88, nos dá um número de três algarismos, iniciado por 3. Testaremos cada caso:

88 . 2 = 176

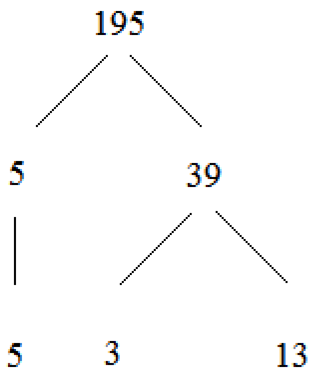
Não efetuaremos a multiplicação por 3, uma vez que os algarismos buscados tem que ser distintos.

88 . 4 = 352, a solução é um número de três algarismos iniciado por 3, mas não serve como resposta, pois B = 5 e D = 5, o que contraria a hipótese de B e D serem algarismos distintos.

88 . 5 = 440, 88 . 6 = 528, 88 . 7 = 616, 88 . 8 = 704 e 88 .9 = 792.

Com isso, esgotamos todas as possibilidades e não encontramos uma que se enquadre no padrão procurado.

Faz-se necessário analisar a outra possibilidade de fatoração:



Por essa outra decomposição, podemos supor que A = 3, B = 9 e C = 5.

Buscamos agora o número de um algarismo que quando multiplica 88, nos dá como resposta um número de três algarismos iniciado por 5. O número procurado é o 6:

88 . 6 = 528.

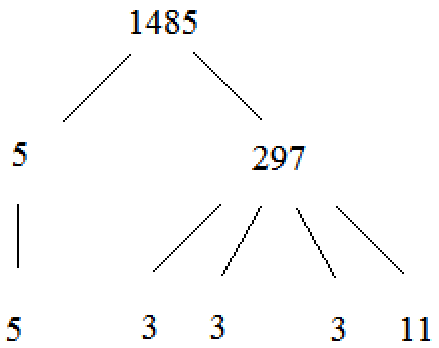
Logo, A = 3, B = 9, C = 5, D = 2, E = 8 e F = 6.

Problema 2

Qual é o menor número, não nulo, que devemos multiplicar por 1485 para que ele seja um cubo perfeito?

Além dos conhecimentos sobre decomposição de um número em fatores primos, precisaremos ainda tratar sobre propriedades de potenciação e sobre a definição de cubo perfeito, ao longo da resolução dessa questão. Como todos esses tópicos já foram trabalhados com os alunos, de acordo com o currículo previsto, não é preciso que o professor, antes de lançar a questão, faça qualquer tipo de revisão, pois assim acabaria por indicar qual caminho seguir durantes a resolução da questão. A postura que se busca de um aluno ao resolver um problema é a investigativa. Uma vez que os conceitos envolvidos foram vistos, cabe ao educando revisar em seu material buscando sanar possíveis dúvidas conceituais. Considerando claro, que essa postura nem sempre é a usual, o professor pode guiar essa pesquisa e incentivá-la.

Iniciaremos com a fatoração do número 1485:



Assim, $1485 = 5 . 3^3.11$.

Para que um número seja um cubo perfeito, os expoentes de cada um de seus fatores primos que se encontram em sua decomposição, devem ser múltiplos de 3. Como estamos buscando o menor número que ao ser multiplicado por 1485 resulte num cubo perfeito, queremos:

$5^x . 3^y . 11^z . 5 . 3^3 . 11 = 5^3 . 3^3 . 11^3$

Aplicando a propriedade das potências a respeito da multiplicação de potências de mesma base, podemos de deduzir que $x = 2$, $y = 0$ e $z = 2$. Logo, o número que buscamos é $5^2 . 11^2 = 3025$.

Problema 3

Achar todos os pares de números primos p e q, tais que $p – q = 3$.

O enunciado desta questão pode induzir o aluno a sair numa buscar desenfreada de pares de números primos que satisfaçam a condição dada, sem antes refletir sobre as informações que foram apresentadas. Em especial, a palavra “todos” leva o estudante a imaginar de forma errônea que existe mais de um par como solução.

A prática da análise minuciosa dos dados de um problema também não faz parte do cotidiano do aluno. Refletir sobre os dados do enunciado e tentar extrair dos mesmos sugestões de conceitos e teoremas que fundamentem um esquema de resolução é algo que precisa ser incentivado pelo professor.

Mais uma vez, esse problema exige que o aluno relembre a propriedade que nos diz que se o resultado da subtração de dois números naturais é um número ímpar, então esses números tem paridades diferentes.

Como p e q são números primos e já é de conhecimento do grupo que o único número primo par é o 2, chegamos à conclusão de que q = 2. Com isso, p = 5.

Assim, a solução do problema é única, p = 5 e q = 2.

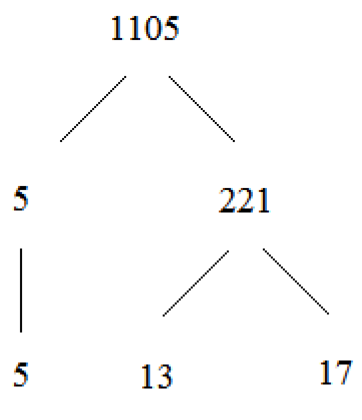
Problema 4

O produto de três números é igual a 1105. Sabendo que, nenhum dos números possuem três algarismos e que a soma dos algarismos do maior número é igual ao dobro da soma dos algarismos do número do meio, determine a diferença entre o maior e o menor número.

Essa é uma questão interessante cujo o enunciado apresenta três informações sobre os números procurados:

- ✓ São três números cujo o produto é 1105;
- ✓ Nenhum dos números possuem três algarismos;
- ✓ A soma dos algarismos do número maior é igual ao dobro da soma dos algarismos do número do meio.

A atitude que se espera do aluno é que ele realize a decomposição de 1105 em fatores primos:



Pela observação da fatoração, conclui-se que os números são 5, 13 e 17.

Parece, em um primeiro momento, que as duas últimas condições fornecidas pelo enunciado são desnecessárias. Esse fato pode ser trabalhado pelo professor, levando esses questionamentos a turma:

- ✓ Se não houvessem as duas últimas condições dadas pelo enunciando, a resposta do problema seria a mesma?

- ✓ Se não houvesse apenas a última condição exposta no enunciado, qual seria a resposta?

Ora, excluindo-se as duas últimas condições teríamos como possíveis soluções:

(1, 5, 221), (1,13,85), (1,17,65) e (5, 13, 17)

E ainda, excluindo-se somente o último dado, teríamos como possíveis soluções:

(1,13,85), (1,17,65) e (5, 13, 17)

Alterar o enunciado de um problema e verificar os efeitos sobre a solução do mesmo, é uma boa estratégia para estimular o raciocínio lógico dedutivo e a capacidade de interpretação de um texto.

A partir da abordagem feita, concluímos que o reconhecimento da legitimidade da estratégia de resolução por tentativa e erro e do tipo de problema onde cabe essa estratégia, o desenvolvimento da atitude investigativa, da iniciativa de pesquisa de itens já estudados que precisam ser revistos para o desenvolvimento de uma questão, o estímulo a concentração para a leitura detalhada de um enunciado, bem como para a associação do texto com conceitos e teoremas que fazem parte do repertório do aluno, a seleção dos dados contido no problema e a interpretação de suas implicações sobre a solução encontrada foram alguns dos tópicos envolvendo competências e habilidades trabalhados nos problemas propostos. Nota-se então, que ao inserir na prática pedagógica a cultura do ensino através da resolução de problemas, ampliamos as possibilidades de aprendizagem. Passamos a valorizar não apenas o acúmulo de conhecimento, mas o desenvolvimento das estruturas mentais associadas ao pensamento lógico, a criação de metas e a elaboração de esquemas.

Capítulo 4

Considerações Finais

Acreditamos que o público que compõe hoje turmas do Ensino Básico necessita de uma abordagem dinâmica da matemática, tanto para uma compreensão mais sólida da disciplina quanto para ter o interesse despertado pela matéria. O dinamismo de uma metodologia é entendido por nós como a característica de uma aula que possui a inserção de debates e discussões sobre os conceitos que estão sendo construídos, o levantamento de problemáticas que instiguem o pensamento científico, a valorização do conhecimento advindo do estudante e dos questionamentos levantados por ele. A ideia de um ensino tradicional não se encaixa mais na realidade de nossos alunos, esperar que os mesmos assumam um postura passiva, que se limitem a ouvir e registrar a fala e a escrita que o professor expõe e ainda assim tenham uma aprendizagem significativa, não é de fato uma postura realista.

Visando agregar à prática educacional, o dinamismo e a construção de ideias mencionados acima, este trabalho abordou então, tópicos relacionados ao conceito de número primo e ao Teorema Fundamental da Aritmética, almejando relatar as principais definições, propriedades e teoremas, que serviriam de base ao professor que pretende ensinar tais conceitos ao sexto ano do Ensino Fundamental.

Além disso, foi apresentada uma sugestão metodológica para a consolidação do Teorema Fundamental da Aritmética baseada na construção do conhecimento através do debate científico, do engajamento promovido pelo jogos matemáticos, do incentivo a criatividade e da busca por um padrão, ainda que limitado, de formalidade matemática. Utilizamos como suporte teórico a Teoria do Campos Conceituais, promovemos situações, problemas, desafios e competições a serem vencidos, trabalhando diversas representações como a algébrica, a aritmética, a geométrica e a lúdica, selecionando e destacando a importância de invariantes, propriedades comuns, na busca da conceitualização, ou seja, da formação propriamente dita do conceito, o TFA.

Referências

BARBOSA,G.S., tese de doutorado: *O teorema fundamental da aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental.* São Paulo: PUC/SP/EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,2008.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação

Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília, DF, 1998.

COELHO, S.; MACHADO, S. e MARANHÃO, C. *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental?* Atas do CIBEM V, Cd-rom, Cidade do Porto, 2005.

FIORENTINO, D; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática:*

percursos teóricos e metodológicos; Campinas; SP. 2006. (Formação de Professores, 1)

LINS, R. C.Gimenez, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.*

Campinas: Papirus, 1997.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli Elisa D. A. *Pesquisa em Educação*. São Paulo: EPU, 1986.

__________, *Abordagens Qualitativas Pesquisa em Educação.* São Paulo.

Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 2001.

__________, *Novos enfoques em pesquisa em didática. In.:* CANDAU, Vera (org.).

A Didática em questão. Petropolis: Vozes, 1984.

PINTO, N.B. *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar*. São Paulo: Papirus, 2000.

POZO, J. I. (org.). ***A solução de problemas:*** *aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RIBENBOIM, P. *Números Primos: mistérios e recordes.* Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001.

VERGNAUD, G. *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59, 1982.

__________,. *Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives*. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983a.

__________, *Multiplicative structures*. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174, 1983b.

__________,. *Problem solving and concept development in the learning of mathematics*. E.A.R.L.I. Second Meeting. Tübingen, 1987.

__________, *Multiplicative structures*. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161, 1988.

__________, *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170, 1990a.

__________, et al. *Epistemology and psychology of mathematics education*. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press, 1990b.

__________, *Teoria dos campos conceituais*. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1993.

__________, *Multiplicative conceptual field: what and why?* In Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

__________, *The nature of mathematical concepts*. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) Learning and teaching mathematics, an international perspective. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd., 1997.

__________, *A comprehensive theory of representation for mathematics education*. Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 167-181, 1998.

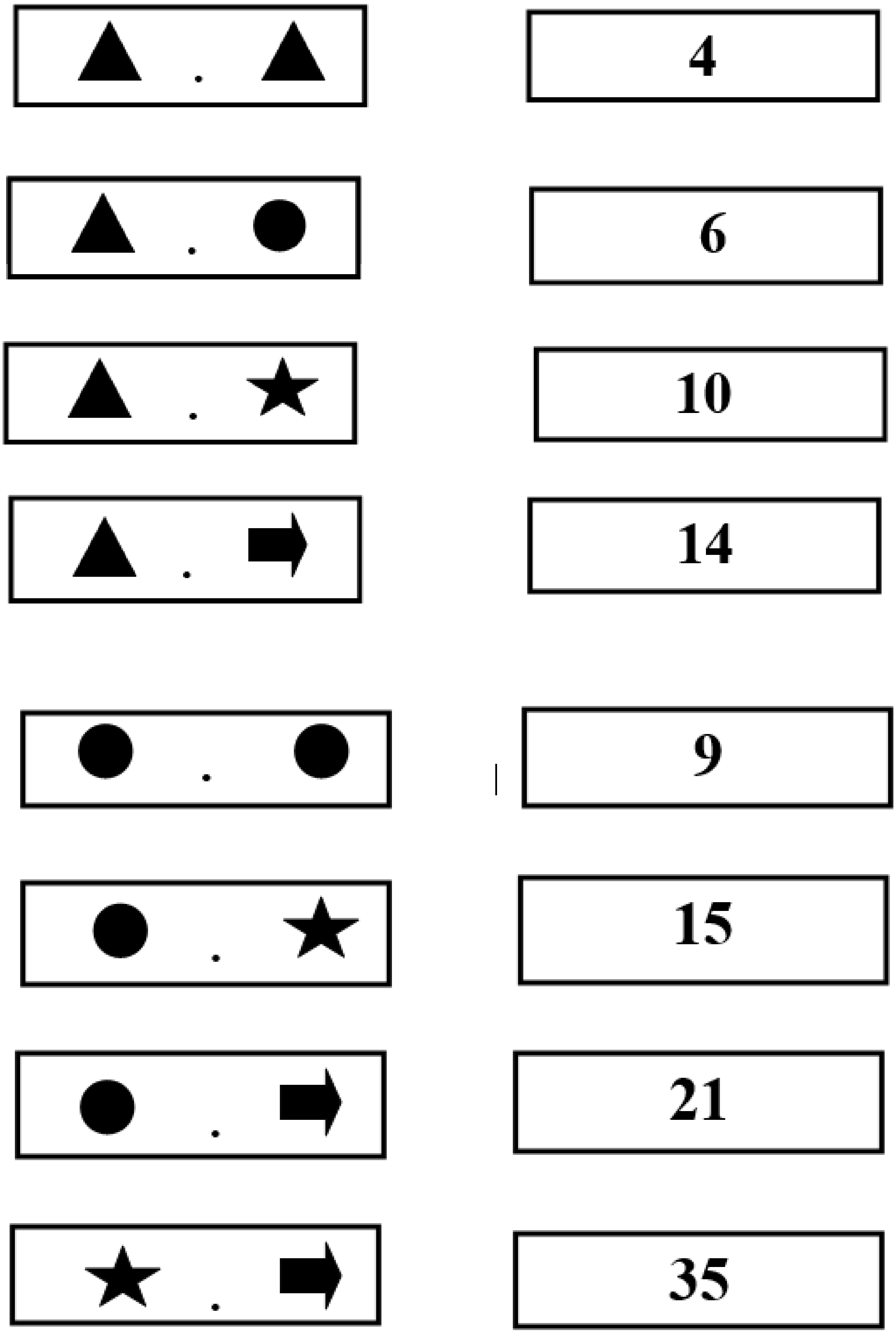
Anexo

JOGO DA MEMÓRIA COM NÚMEROS PRIMOS

A tabela que relaciona os primeiros primos com os símbolos escolhidos pode ficar exposta no quadro para orientar o jogo.

Números primos	Símbolo
2	▲
3	●
5	★
7	➡

Seguem as sugestões para as peças que irão compor o jogo:



★ . ★	**25**
➡ . ➡	**49**