INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MARCELO DE ALMEIDA CURTI

SOLUÇÕES GERAIS DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS E A RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES CÚBICAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Orientador: Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira

Rio de Janeiro

2015

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MARCELO DE ALMEIDA CURTI

SOLUÇÕES GERAIS DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS E A RELAÇÃO ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES CÚBICAS

Trabalho de conclusão de curso

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – no Instituto de matemática pura e aplicada – IMPA.

Orientador: Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira

Rio de Janeiro

2015

Dedico este trabalho a minha querida mãe Antônia em reconhecimento ao incomensurável esforço para me dar uma boa educação.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do IMPA, em especial, nosso orientador Gugu cuja simplicidade e genialidade sempre nos serviram de inspiração.

Aos meus colegas de mestrado, em especial, Adriano, Alexandre, Fabrício, Marcelo, Rafael, Roberta e Suelen sem os quais essa jornada teria sido bem mais árdua.

A minha amada esposa Keli pelo apoio incondicional.

"Ao longo do tempo muitos homens conseguiram atingir o êxtase da criação. A estes homens dá-se o nome de matemáticos."

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho é fruto de um esforço para explicar as soluções gerais das equações do terceiro e do quarto graus, discutir a relação entre números complexos e equações do terceiro grau (mesmo, e talvez principalmente, as que têm três raízes reais), preparar e aplicar aulas sobre o assunto direcionadas para um público de alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Equações Cúbicas e Quárticas, Números Complexos.

ABSTRACT

This work is the result of an effort to explain the general solutions of cubic and quartic equations, discuss the relationship between complex numbers and third-degree equations (even, and perhaps especially, those with three real roots), design and implement lessons about the subject directed to high School Students.

Keywords: Cubic and Quartic Equations, Complex Numbers.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO..10

1.1 – Da motivação..10

1.2 – Objetivos..11

2 – RETROSPECTIVA HISTÓRICA...12

2.1 – As tábuas Babilônicas..12

2.2 – A Matemática Árabe e Hindu...13

2.3 – Os Matemáticos Italianos..16

2.3.1 – Resolução da Equação cúbica...19

2.3.2 – Resolução da Equação Quártica..21

2.4 – Solução de Descartes para Equação Quártica..............................24

3 – DISCUSSÃO ENTRE EQUAÇÕES CÚBICAS E COMPLEXOS..............26

3.1 – Bombelli e os Números Sofisticados...29

4 – EQUAÇÕES CÚBICAS NO ENSINO MÉDIO......................................32

5 – MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GERAL DE ALGUMAS EQUAÇÕES.......36

5.1 – Métodos de Resolução Geral de Equações de Grau 2................36

5.1.1 – Fazendo uma Mudança de Variável x = y + t.....................36

5.1.2 – Completando quadrado...38

5.1.3 – Exemplos Resolvidos..39

5.2 – Métodos de Resolução de Equações Cúbicas.............................39

5.2.1 – Solução de Carlos G. T. de Araújo Moreira........................41

5.2.2 – Outro Método de Resolução...43

5.2.3 – Justificativa da Combinação Usando 1, w e w²...................46

5.2.4 – Aplicações e Discussão dos Problemas....49
5.3 – Métodos de Resolução de Equações do Quarto Grau....57
5.3.1 – Solução de Carlos G. T. de Araújo Moreira....57
5.3.2 – Solução de Ferrari....59
5.3.3 – Exemplos Resolvidos....61
6 – PESQUISA DE CAMPO....65
6.1 – Descrição e Análise do Experimento Realizado....65
6.2 – Conclusão da Pesquisa de Campo....72
6.3 – Sugestão de Plano de Aula para Professores....73
6.4 – Sugestão de Plano de Estudos....76
7 – BREVE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS....80
7.1 – Matemática: Contextos e Aplicações....80
7.2 – Matemática: Ciência e Aplicações....83
7.3 – Matemática: Ensino Médio....85
7.4 – Conexões com a Matemática....88
7.5 – Matemática: Novo Olhar....89
7.6 – Matemática Paiva....91
7.7 – Conclusão da Análise....94
8 – CONSIDERAÇÕES FINAIS....95
9 – REFERÊNCIAS....97

INTRODUÇÃO

As linhas que seguem são resultado de um esforço conjunto para compreender e explicar as resoluções de equações polinomiais cúbicas e quárticas com ênfase na conceituação, onde a abordagem histórica foi de fundamental importância, na manipulação, em que procuramos discutir as resoluções de forma simples e eficaz, e na aplicação, sem dúvida o maior desafio e também onde ocorreu a maior aprendizagem dada a pesquisa de campo realizada com alunos do ensino básico.

1.1 Da motivação

Analisando os registros históricos é possível afirmar desde os primórdios do raciocínio algébrico a resolução de equações constituiu um dos grandes desafios propostos aos matemáticos e quando observamos o tempo e esforço que separou a descoberta de soluções para equações de 1º, 2º e 3º/4º graus é que temos noção do quanto essas descobertas foram importantes na história da matemática e da humanidade.

No que se refere à resolução por radicais das equações de 3º e 4º grau, cerne deste estudo, consideramos de inestimável importância a sua apreciação tendo em vista o contexto histórico que envolveu sua descoberta, um dos episódios mais apaixonantes da história da matemática, seu papel na criação do conjunto dos números complexos e por sua significância no campo da álgebra como o que podemos considerar o fim de um capítulo conforme confirmaria a teoria de Galois.

Por falar em números complexos, ao contemplar como o assunto é tratado no Ensino Básico a impressão que temos é que existe uma lacuna a ser preenchida justamente no que diz respeito ao papel das resoluções de equações cúbicas e quárticas na concepção deste conjunto. Após estudar a resolução destas equações o leitor constatará que são de fundamental importância para justificar e compreender a necessidade deste novo tipo de número.

1.2 Objetivos

Esperamos que este material sirva de suporte para alunos do ensino médio interessados em aprender mais sobre equações cúbicas e quárticas e seus métodos de resolução, de referência para professores interessados em inserir em seu plano de curso estas resoluções e de inspiração para que outros pesquisadores deem continuidade a este esforço enriquecendo ainda mais a produção matemática de nosso tempo.

Outrossim, almejamos que sirva também para seduzir o leitor a imergir nas envolventes narrativas que permeiam a construção do conhecimento matemático se deixando envolver pelos enredos, ora românticos ora dramáticos, que retratam o quanto a história da matemática caminha paralela a história da humanidade longe de ser uma ciência fria e distante da passionalidade humana.

Desejamos, sobretudo, que aqueles que evitavam o estudo dessas equações por considerá-lo dificultoso ou desinteressante alterem seu modo de pensar, que encontrem aqui motivação e suporte para dedicar tempo e intelecto à resolução de equações cúbicas e quárticas e levem adiante este intento.

2. RETROSPECTIVA HISTÓRICA[1]

Neste capítulo voltamos nosso olhar para o contexto histórico que precedeu a descoberta de uma resolução algébrica das equações cúbicas e quárticas a fim de entender a importância deste acontecimento bem como sua influência em toda produção matemática que se seguiu. Desde que os babilônicos[2] desenvolveram o método de completar quadrados para resolver equações quadráticas, quase quatro milênios se passariam até que um método para resolução por radicais das cúbicas e quárticas fosse descoberto pela humanidade, descoberta essa que desencadeia um novo capítulo na história dos números, conforme veremos mais adiante.

2.1 As Tábuas Babilônicas

Nossa história começa na região da antiga Babilônia, situada no vale dos rios Eufrates e Tigre, hoje conhecida como Mesopotâmia e onde recentes escavações arqueológicas desenterraram tábuas matemáticas suficientes para decifrar a escrita cuneiforme e reconstruir parte do conhecimento babilônico a respeito da matemática.

A esse respeito Eves afirma que *“perto do ano 2000 a.C. aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida”* segundo o autor o conhecimento matemático babilônico permitia não só resolver equações quadráticas, mas também discutir algumas cúbicas e quárticas (biquadradas). Na *figura 1* vê-se a tábua onde foram identificados problemas que dão origem a equações quadráticas e sistemas de equações.

---

[1] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves

[2] Termo que inclui outros povos, como os sumérios, acadianos, caldeus e assírios, que também habitaram a região.

Alguns problemas de equações cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$ eram resolvidos consultando uma tábua com os valores de $n^3 + n^2$ para os inteiros de um a trinta.

Figura 1: Tábua Babilônica BM 13901

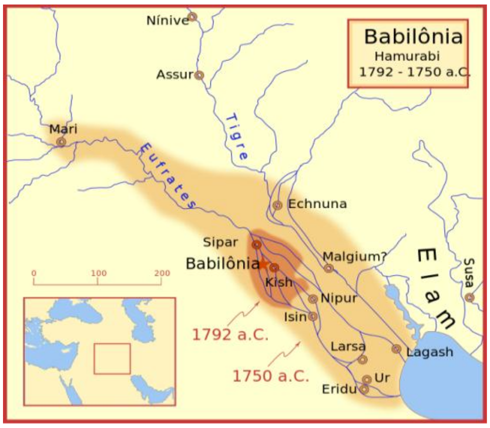


Figura 2: Mapa da região antigamente conhecida como Babilônia

2.2 A Matemática Árabe e Hindu

A palavra álgebra deriva do título do tratado de al-Khwarizmi[3], sobre o assunto, Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah, que numa tradução mais livre significa "ciência da transposição e do cancelamento", tratado esse, comumente referenciado pela forma abreviada al-jabr ou álgebra. Segundo o dicionário "**Algebra**, s.f. Parte da matemática que generaliza os problemas aritméticos, analisando de um ponto de vista geral as soluções possíveis". Desde as tábuas babilônicas muitos anos se passaram para que pudéssemos conhecer a álgebra em toda amplitude de seu significado, a esse respeito ROQUE afirma que

> O passo decisivo para a constituição da álgebra como disciplina pode ser estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos de Al-Khwarizmi e de outros matemáticos ligados a ele.

[3] Al-Khwarizmi (780-850) foi um matemático, astrônomo, astrólogo, geólogo e autor persa. Seu principal trabalho foi Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah onde apresentou a primeira solução sistemática de equações lineares e quadráticas.

Al-Khwarizmi utiliza termos específicos para se referir às três formas sob as quais um número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples. Após definir as quatro operações com expressões contendo quantidades desconhecidas e radicais ele enumera os seis casos possíveis de equações quadráticas:

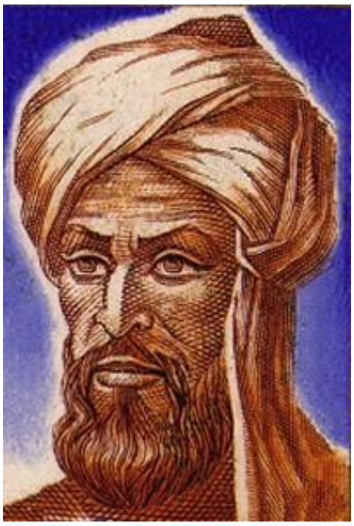


Figura 3: Al-Khwarizmi

1. Quadrados iguais a raízes $(ax^2 = bx)$

2. Quadrados iguais a um número $(ax^2 = c)$

3. Raízes iguais a um número $(bx = c)$

4. Quadrados e raízes iguais a um número $(ax^2 + bx = c)$

5. Quadrados e um número iguais a raízes $(ax^2 + c = bx)$

6. Raízes e um número iguais a quadrados $(bx + c = ax^2)$

Note que são admitidos exclusivamente coeficientes positivos, al-Khwarizmi utilizava exemplos e com palavras descrevia o procedimento para resolução de cada caso. Apesar dos exemplos particulares e da ausência de simbologia algébrica essência de seu método apresentava a generalidade inerente à álgebra que conhecemos.

Posteriormente, no século XII, foi Bháskara quem dedicou-se com maior destaque à resolução de equações quadráticas por métodos algébricos. À época os problemas que hoje são modelados por meio de equações eram enunciados de forma poética, apenas com palavras. Abaixo, um verso citado como exercício por ROQUE:

> De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada [do total] foram para o lago de *Manasa*, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me, donzela, o número de gansos no bando.

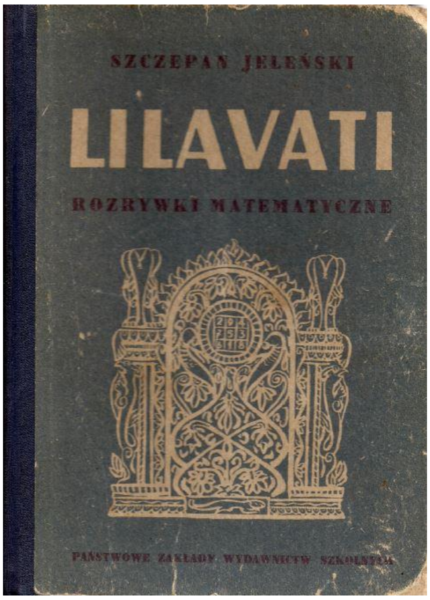


Figura 4: Lilavati é um dos quatro volumes que compunham o principal trabalho de Bháskara.

Seu método consistia em reduzir o problema a uma equação linear através de completamento de quadrados. Chamemos o total de gansos de x^2, daí, $10x$ foram para o lago, $\frac{x^2}{8}$ foram para a floresta e 6 foram vistos brincando na água, ou seja,

$$\frac{x^2}{8} + 10x + 6 = x^2$$

$$\frac{7x^2}{8} - 10x = 6$$

$$7x^2 - 80x = 48$$

Expressando na forma $ax^2 + bx = c$. A partir daí deve-se multiplicar ambos os lados por $4a$ e, em seguida, adicionar b^2 a ambos os lados, obtendo a expressão $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$.

$$196x^2 - 2240x = 1344$$

$$196x^2 - 2240x \ + 6400 = 7744$$

$$(14x - 80)^2 = 7744$$

Agora, diminuímos o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros:

$$14x - 80 = 88$$

E resolvemos a equação de primeiro grau obtida. Logo, $x = 12$ e o número de gansos do bando é igual a 144.

2.3 Os Matemáticos Italianos

Nossa história continua na Itália do século XVI, epicentro de uma épica explosão intelectual impulsionada pelo espírito renascentista, com um professor de matemática de uma das mais antigas universidades medievais, a Universidade de Bolonha já, então, com uma forte tradição matemática e onde Scipione del Ferro (1465-1526) lecionava. Inspirado, provavelmente, em fontes árabes, a despeito da teoria de Pacioli[4], Scipione del Ferro desenvolve um método para resolver a equação $x^3 + mx = n$, o ano é entre 1510 e 1515, aproximadamente, não é possível precisar a época de sua descoberta uma vez que Ferro não a publicou, mas teria revelado seu achado a um discípulo seu, Antonio Maria del Fiore (século XV – século XVI).

A possibilidade da resolução algébrica de equação cúbica serviu para motivar outros matemáticos a se engajarem na descoberta do método, em

[4] Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1517) foi um monge franciscano e célebre matemático italiano. É considerado pai da contabilidade moderna.

especial, Nicolo[5] Fontana (1499-1557), muito prematuramente acometido pela tragédia, foi obrigado a superar as adversidades, sendo a maior delas quando ainda criança foi ferido gravemente na face durante a tomada da Bréscia pelos franceses. O ferimento perpetrou-lhe um defeito na fala que lhe rendeu o pseudônimo Tartaglia, que Nicolo passou a assinar. Sequelado e com poucos recursos Tartaglia obrigou-se a ser um autodidata e assim aprendeu praticamente sozinho a ler e escrever e passou a dedicar-se nos caminhos da matemática vindo a ganhar seu sustento como professor de ciência em Verona, Vicenza, Brescia e Veneza por volta de 1535.

Segundo GARBI o conhecimento da descoberta de Ferrari motivou Tartaglia que afirmou "mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535". O desempenho de Tartaglia chegou ao conhecimento de Del Fiore que, se valendo muito mais da sorte do legado que recebera de seu mestre do que da própria competência, desafiou Tartaglia para um debate público, ação de que se arrependeria amargamente mais tarde conforme veremos. Enquanto Del Fiore utilizou o conhecimento a ele repassado para formular questões com equações cúbicas do tipo resolvido por Ferro, Tartaglia já generalizara um método para a resolução da cúbica do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. O resultado foi que Tartaglia foi capaz de resolver todas as questões propostas por Del Fiore, ao tempo que este, foi incapaz de resolver sequer uma questão proposta por seu oponente.

Derrotado, humilhado, Del Fiore se retira dessa trama e eis que surge um novo candidato a vilão, Girolamo Cardano[6] (1501-1576), filho ilegítimo de advogado, médico, astrólogo, jogador inveterado, herege e um dos algebristas mais talentosos de seu tempo são algumas das características relacionadas ao seu nome. Seu talento o colocou em posição de destaque no cenário europeu, era protegido do Papa Gregório XIII, certa vez, foi chamado a Escócia para diagnosticar uma doença no arcebispo de St. Andrews, apesar das acusações de heresia por haver divulgado o horóscopo de Jesus Cristo e por sua devoção a Nero, grande perseguidor dos cristãos. Cardano, então, convida Tartaglia a

[5] Em algumas bibliografias aparece escrito Niccolò Fontana
[6] Dependendo da fonte pode aparecer também Gerônimo Cardano ou Jérôme Cardan

sua casa sob o pretexto de obter-lhe um encontro entre ele e um possível patrono, no entanto, sua verdadeira intenção era obter o segredo da resolução das cúbicas, o que, após muita resistência de Tartaglia, conseguiu sob juramento de jamais revelar a ninguém. Em defesa das acusações de mesquinho e egoísta pugnadas por Cardano, Tartaglia afirmou que pretendia publicar sua descoberta em uma obra própria, mas como era de se esperar Cardano quebra seu juramento e publica a descoberta em umas das mais importantes obras dedicadas a álgebra, a *Ars Magna*. A *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis,* ou *Ars Magna* como ficou conhecida, foi publicada em Nuremberg na Alemanha em 1545 e tratava-se do maior compêndio algébrico existente na época e nela Cardano resolve laboriosamente diversas equações cúbicas e embora ele mesmo tenha mencionado uma "dica" dada por Tartaglia o método utilizado fica conhecido como Fórmula de Cardano como é enunciada até hoje por alguns autores.

Figura 5: Tartaglia

Figura 6: Cardano

São muitas as controvérsias que permeiam esta história podendo haver mais de uma versão, apenas para que o leitor possa ter uma idéia do quanto Cardano era tão polêmico quanto extraordinário, após sua viagem a Escócia Cardano ocupou cadeiras nas importantes universidades de Pávia e Bolonha, acusado de heresia abdicou de seu cargo vindo posteriormente a mudar-se para Roma e se tornar astrólogo do Papa. Publicou uma precursora obra a respeito de probabilidades, conhecimento que supostamente utilizava para trapacear no jogo, teve um filho executado por assassinar a esposa, cortou as orelhas do outro e seu melhor discípulo morreu envenenado pela irmã. Por fim, deu cabo a própria vida para não contrariar a previsão que ele mesmo fizera acerca de sua morte. Uma vida tão conturbada pode ter lhe rendido alguns inimigos, o que explicaria sua má fama relatada por ele mesmo como injusta em sua autobiografia. Antes que o leitor se compadeça demasiadamente por Tartaglia, é bom saber que ele publicou uma tradução de Arquimedes como sendo sua e em outra obra enunciou a lei do plano inclinado de Nemorarius sem a atribuição apropriada.

2.3.1 Resolução da Equação Cúbica

Dada a polêmica em torno da real autoria da fórmula para a resolução da equação do terceiro grau para sermos o mais justos possível a chamaremos de Fórmula de Cardano-Tartaglia, vejamos agora como era:

Vamos considerar x = A + B, elevando os dois lados da equação ao cubo teremos

$$x^3 = (A+B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

Como A + B = x

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Substituindo na equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ teremos

$$p = -3AB \;\Rightarrow\; p^3 = -27A^3B^3 \Rightarrow A^3B^3 = -\frac{P^3}{27}$$

e

$$q = -(A^3 + B^3) \Rightarrow A^3 + B^3 = -q$$

Daí, $A^3 e\, B^3$ são dois números cuja soma e produto são conhecidos. O que temos agora se trata de uma equação do segundo grau cuja fórmula resolutória já conhecemos:

Sejam A^3 e B^3 raízes da equação quadrática $w^2 + \frac{b}{a}w + \frac{c}{a} = 0$

Daí, aplicando as relações entre coeficientes e raízes

$$w^2 - (A^3 + B^3)w + A^3B^3 = 0$$

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como x = A + B

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Uma pergunta que o leitor faria é “Tartaglia só sabia resolver um tipo de cúbica?". Note que qualquer cúbica na forma geral como conhecemos $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser reduzida a forma $x^3 + px = q$ da maneira que segue:

Seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se $x = y + m$, então:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0$$

fazendo

$$b + 3am = 0$$

tem-se

$$m = -\frac{b}{3a}$$

O que nos fornecerá uma equação do terceiro grau do tipo $y^3 + py + q = 0$ cuja resolução nos levará até o valor de $x = y + m$.

Logo, Tartaglia desenvolveu não só um método para resolução de uma cúbica em particular, mas uma fórmula geral.

2.3.2 Resolução da Equação Quártica

Voltemos, agora, para o momento em que Cardano, quebrando todas as suas juras e promessas, publica a solução de Tartaglia das cúbicas em sua *Ars*

Magna. Tartaglia vê a pérola que coroaria seu trabalho subtraída, conforme a história confirmaria, o crédito pelo achado seria injustamente dado a Cardano. Indignado, Tartaglia o acusa de quebrar um juramento sagrado feito sobre a Bíblia e roubar-lhe os louros da descoberta que, sem dúvidas, significou um enorme avanço no estudo da álgebra e pode ser considerado o maior avanço matemático daquele século. Em meio a muito ódio e rivalidade Tartaglia propõe-se a travar um debate público com Cardano em Milão, no entanto quem aparece em seu lugar é o jovem e talentoso matemático Ludovico Ferrari (1522-1560), discípulo de Cardano.

Seria Ferrari um mero coadjuvante ou um dos protagonistas desta intricada trama? Poucos anos antes da publicação de sua maior obra Cardano foi desafiado por Zuanne de Tonini da Coi (século XVI) a resolver um problema que na linguagem atual traduz-se na seguinte equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Ferrari teve uma origem humilde em Bolonha passou a trabalhar como servo na casa de Cardano que identificou um brilhantismo no jovem rapaz, o promoveu a seu secretário e passou a doutriná-lo nos desígnios da matemática. Ferrari fez jus à confiança nele depositada e, onde seu mestre não teve êxito, obteve sucesso ao generalizar uma fórmula algébrica para a resolução das equações quárticas. Vejamos como era:

Antes, note que a equação geral do 4º grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0)$$

sempre pode ser transformada em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

Fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3º grau. De modo que sabendo resolver a equação de 4º grau incompleta acima é possível resolver qualquer equação de 4º grau.

Agora, dada a equação

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

procuraremos reagrupar os termos de modo a encontrar em ambos os lados da igualdade polinômios que sejam quadrados perfeitos.

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta$$

Para que tenhamos trinômios quadrados perfeitos em ambos os lados dessa igualdade é necessário e suficiente que os seus discriminantes sejam nulos, ou seja:

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0$$

e

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha}$$

daí,

$$(p + \alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0$$

$$(p + \alpha)^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0$$

$$\alpha(p + \alpha)^2 - 4\alpha r - q^2 = 0$$

$$\alpha p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^3 - 4\alpha r - q^2 = 0$$

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

Que é uma equação de 3º grau cuja fórmula resolutória nós já conhecemos. Bastando, enfim, determinar os valores de α, posteriormente de β, e extrair as raízes quadradas

$$\sqrt{x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta)} = \sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}$$

O método de Ferrari foi publicado na *Ars Magna* em sequência as resoluções de Tartaglia para as cúbicas. Ferrari ganhou notoriedade em Milão chegando a ocupar uma cadeira na Universidade de Bolonha, mas pouco tempo depois, aos 38 anos, morreu provavelmente envenenado pela própria irmã.

2.4 Solução de Descartes para uma Equação Quártica

No capítulo em que aborda a geometria analítica [5] propõe a resolução de uma equação de quarto grau sem o termo cúbico utilizando o princípio da identidade de polinômios, assim como Descartes[1] o fez.

Considere a equação do quarto grau

$$ax^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Igualando o primeiro termo da igualdade ao produto de polinômios quadráticos $x^2 + kx + b$ e $x^2 - kx + m$ temos

$$ax^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + kx + b)(x^2 - kx + m)$$

$$ax^4 + px^2 + qx + r = x^4 + (m + b - k^2)x^2 + k(m - b)x + mb$$

daí, igualamos os termos semelhantes dos dois lados da equação:

(1) $m + b = k^2 + p$

(2) $m - b = \frac{q}{k}$

(3) $mb = r$

por (3) $mb = r \Rightarrow b = \frac{r}{m}$, que substituindo em (1) fornece

$$m + \frac{r}{m} = k^2 + p$$

$$mk^2 + m(p - m) - r = 0 \quad (4)$$

Somando as relações (1) e (2) obteremos m em função de *k*, *p* e *q*:

(1) $m + b = k^2 + p$

(2) $m - b = \dfrac{q}{k}$

$$2m = k^2 + \frac{q}{k} + p$$

$$m = \frac{k^2}{2} + \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}$$

Substituindo a expressão encontrada para *m* em (4):

$$\left(\frac{k^2}{2} + \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}\right)k^2 + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}\right)\left(-\frac{k^2}{2} - \frac{q}{2k} + \frac{p}{2}\right) - r = 0$$

$$\left(\frac{2k^4}{4} + \frac{2qk^2}{4k} + \frac{2pk^2}{4}\right) - \left(\frac{k^4}{4} + \frac{2qk^2}{4k} + \frac{q^2}{4k^2} - \frac{p^2}{4}\right) - r = 0$$

$$\frac{k^4}{4} + \frac{2pk^2}{4} - \frac{q^2}{4k^2} + \frac{p^2}{4} - r = 0 \qquad .(4k^2)$$

$$k^6 + 2pk^4 - q^2 + p^2k^2 - 4rk^2 = 0$$

$k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 = 0$, que pode ser considerada uma equação cúbica em k^2.

Dessa maneira reduz-se a solução da equação quártica original à resolução de uma cúbica associada a ela.

3. DISCUSSÃO ENTRE EQUAÇÕES CÚBICAS E NÚMEROS COMPLEXOS[7]

Neste capítulo trataremos com a devida atenção uma implicação tão intrigante quanto problemática que surge da resolução algébrica das equações cúbicas. Alguma coisa simplesmente não encaixava quando se observava certos casos de equações cúbicas e, por fim, a resolução suscitava mais perguntas do que respostas.

Observe, por exemplo, o problema "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com área da base 15 unidades, sabendo que a diferença entre seus volumes é de quatro unidades?" equivalente a equação

$$x^3 - 15x = 4$$

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia chegaremos a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ora, na época, de fato, não era possível extrair raízes quadradas de números negativos, logo, a resposta acima não conduziria a lugar algum, no entanto, é possível constatar, por simples inspeção, que x = 4 é uma solução para a equação dada, então, como isso é possível? A esse respeito Eves afirma

> Mas nesse caso, pela fórmula de Cardano-Tartaglia, essas raízes se expressam como diferença de duas raízes cúbicas de números complexos imaginários. Essa aparente anomalia, que tantos transtornos causou aos antigos algebristas, caracteriza o chamado caso irredutível das equações cúbicas.

---

[7] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves.

Tratava-se, então, de um problema de repercussão surpreendente e para o qual não haveria outra solução a não ser criar um novo tipo de numero, conforme veremos mais adiante. Note que ao longo da história os números passaram por incrementações como o advento dos números racionais e a admissão de números negativos, foram evoluções que tiveram seu impacto na matemática de suas épocas, contudo, apenas a descoberta dos pitagóricos, cerca de 400 a.C, de números que não poderiam ser representados na forma a/b (a e b inteiros) comparar-se-ia a extensão do conceito de número que estava tendo início na Itália do século XVI. Ora, se para evitar os números irracionais ou negativos bastava dizer que as equações $x^2 - 2 = 0$ e $x + 1 = 0$, respectivamente, não tinham solução, da mesma forma, para inadmitir a raiz quadrada de um número negativo bastava dizer, por exemplo, que a equação $x^2 + 2 = 0$ não tem solução. Mas a resolução das cúbicas traria um indiscutível questionamento a essa conclusão conforme narra Garbi:

> Logo começaram a surgir dúvidas, perguntas e problemas na aplicação do método de Tartaglia e os matemáticos viram-se enredados em questões que demandariam cerca de 200 anos e os esforços dos melhores cérebros dos séculos XVII, XVIII e início do século XIX até que fossem definitivamente esclarecidas.

O que ocorre com a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ pode ser genericamente sintetizado da seguinte forma:

Seja o produto

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

Se o igualarmos a zero teremos uma equação de 3º grau cujas raízes serão $x = a, x = b \; e \; x = c$. Observe que tipo de relação deverá haver entre a, b e c para o desenvolvimento desse produto leve a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, cuja fórmula resolutória nos já conhecemos:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc \qquad (1)$$

para que o termo de segundo grau seja nulo basta que

$$a + b + c = 0$$

ou

$$c = -\,(a + b)$$

substituindo na equação (1):

$$(x - a)(x - b)(x + [a + b]) =$$

$$x^3 - (a + b - \ (a + b))x^2 + (ab + b(-\,(a + b)) + a(-\,(a + b)))x - ab\big(-\,(a + b)\big) =$$

$$x^3 + [ab - (a + b)^2]x + ab(a + b)$$

e fazendo

$$x^3 + [ab - (a + b)^2]x + ab(a + b) = 0$$

teremos uma equação cúbica de raízes $x = a,\ x = b\ e\ x = -(a + b)$.

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia tem-se

$$x = \sqrt[3]{-\frac{ab(a + b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{ab(a + b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{ab(a + b)}{2} - \sqrt{\left(\frac{ab(a + b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right)^3}}$$

Tomemos a expressão sob o radical quadrático, chamando de Δ

$$\Delta = \left(\frac{ab(a + b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right)^3$$

$$\Delta = \frac{4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{108}$$

Chegamos à surpreendente constatação que se a e b são reais, então delta nunca é positivo. Ora, observe que ao tempo que nas equações quadráticas a condição necessária para que as raízes fossem reais era o $\Delta \geq 0$ no caso das equações do terceiro grau as raízes serão todas reais se, e somente se, $\Delta \leq 0$. Todas essas evidências conduziriam a uma irrefutável conclusão, apenas os números com os quais os matemáticos vinham trabalhando até então já não eram mais suficientes para atender plenamente ao estudo da álgebra.

3.1 Bombelli e os Números Sofisticados

O autor de Ars Magna, Girolamo Cardano, que revelou ao mundo a resolução das equações cúbicas e quárticas em sua obra, sem, contudo, oferecer uma solução convincente para as implicações que a fórmula de Tartaglia traria para a teoria dos números, ainda estaria vivo para testemunhar, em 1572, uma contribuição notável para a resolução das equações cúbicas em *L'Álgebra parte Maggiore dell'Arithmetica* de Rafael Bombelli (1526-1573).

Bombelli nasceu em Bolonha, era engenheiro por profissão e entusiasta da matemática, apenas para que o leitor tenha uma ideia do nível de abstração necessário para conceber tal teoria o próprio Bombelli ao explicar sua visão utilizava expressões como "ideia louca", "pensamento rude" e "apoiar-se em sofismas" ao referir-se a seu estudo sobre os números sofisticados.

Bombelli estuda a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, de raiz igual a 4 constatada por simples observação e o resultado fornecido pela fórmula de Cardano-Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Seu método baseou-se na ideia de que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, daí:

Como

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121} \text{ e } \left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2-\sqrt{-121}$$

concluiu-se que

$$a = 2 \text{ e } b = 1.$$

e assim

$$x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$$

conforme esperado.

Nasce então um novo tipo de número, que utiliza a *unidade imaginária* $\mathbb{i}$, tal que $\mathbb{i}^2 = -1$, e com ele um novo ramo da matemática, A Teoria dos Números Complexos, que foi concebida para atender um problema essencialmente teórico, mas no futuro se mostraria com infindáveis aplicações práticas.

Justiça seja feita, o primeiro a cogitar os chamados *números complexos imaginários,* sem, entretanto, denominá-los assim, teria sido Cardano que em sua *Ars Magna* propõe o seguinte problema, dividir 10 em duas partes de modo que o produto seja 40. Segue a resolução:

$$x(10-x) = 40$$

$$10x - x^2 = 40$$

$$x^2 - 10x + 25 = -40 + 25$$

$$(x-5)^2 = -15$$

$$x - 5 = \pm\sqrt{-15}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Embora esteja claro que a soma desses dois números seja 10 e que o produto seja 40, Cardano conclui dizendo que o resultado era "tão sutil quanto inútil". Como bem sabemos hoje, Cardano antecipara a noção de números complexos conjugados desenvolvida por Bombelli, ele estava certo quanto à sutileza, mas tais soluções não são nem um pouco inúteis.

4. EQUAÇÕES CÚBICAS NO ENSINO MÉDIO[8]

Neste capítulo discutiremos a relação entre equações cúbicas e números complexos com ênfase na elaboração, aplicação e análise de uma proposta pedagógica que utilize as equações cúbicas como tema precursor para o estudo dos números complexos. A ideia de introduzir o estudo dos números complexos a partir da resolução de Cardano-Tartaglia para as equações cúbicas é conduzir o aluno pelo caminho natural que outrora levou grandes matemáticos a desafiarem o conceito do que era reconhecidamente "real" e investissem seu tempo e intelecto no "imaginário". A esse respeito Garbi afirma

> (...) um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-texto relativamente à origem dos números complexos: foram as equações do 3º grau e não as do 2º que desencadearam todo o desenvolvimento teórico naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli

A seguir, o roteiro da aula a ser aplicada a uma turma de 3º ano do Ensino Médio com conhecimento prévio de equações algébricas de terceiro e quarto grau. A essa altura os alunos já estão familiarizados com a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução da equação cúbica bem como todo o contexto histórico que envolveu sua descoberta, conforme descrito no capítulo anterior.

Utilizaremos o problema clássico proposto por Cardano "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com área da base 15 unidades, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?" equivalente a equação

---
[8] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves

$$x^3 - 15x = 4$$

Verificar que x = 4 é uma solução para o problema proposto.

$$4^3 - 15.4 = 4$$

Vale relembrar que o desenvolvimento do produto (x-a)(x-b)(x-c) leva a um polinômio do 3º grau em x que, quando igualado a zero, fornece-nos uma equação do 3º grau, cujas raízes são x=a, x=b e x=c. Daí,

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x - b)(x - c)$$

$$\frac{x^3 - 15x - 4}{x - 4} = (x - b)(x - c)$$

$$x^2 + 4x + 1 = (x - b)(x - c)$$

Igualando o polinômio do lado esquerdo da igualdade a zero obteremos uma equação quadrática de raízes $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$ que são as outras duas soluções da equação cúbica inicial.

Note que, pelo Teorema do Valor Intermediário[1], uma equação de grau ímpar sempre tem, ao menos, uma solução real. No caso da equação cúbica, conhecendo essa raiz é possível fatorar o polinômio do 3º grau a fim de encontrar uma equação quadrática cujas raízes serão as outras duas soluções da cúbica em questão.

Agora, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, determinar as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (1)$$

Nesta etapa os alunos terão a oportunidade de compartilhar da perplexidade experimentada por Tartaglia, Cardano, Bombelli, ao se depararem com equações que possuíam raízes reais conhecidas cuja resolução passa por raízes quadradas de números negativos. Se traçarmos uma analogia entre o problema semelhante que ocorre em equações quadráticas com discriminante menor que zero e o problema atual veremos que para evitar o primeiro a argumentação é muito simples, tal equação não possui solução real, ao tempo que com o problema acima a solução não só existe mas a conhecemos o que conduzirá os alunos seguinte conclusão, os números estudados até aqui não são suficientes para resolução de todos os problemas algébricos que conhecemos. Nas palavras de Boyer

> Outro resultado imediato da resolução da cúbica foi a primeira observação significativa de uma nova espécie de número...Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse de alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.

Neste momento propõe-se que, seguindo os passos de Bombelli, "façamos de conta" que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e estabeleçamos algumas normas para operar com ele:

i. $\left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = -1$
ii. $\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right)\left(\sqrt{-1}\right) = 1$
iii. $\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right)\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right) = -1$
iv. $(\pm 1)\left(\sqrt{-1}\right) = \pm\sqrt{-1}$
v. $(\pm 1)\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right) = \mp\sqrt{-1}$

Aplicando as propriedades estabelecidas na conjectura acima à expressão obtida em (1) chegaremos a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

nosso resultado já conhecido.

Admitir $\sqrt{-1}$ como um número na resolução de equações cúbicas com raízes quadradas negativas foi um recurso engenhoso e ousado, especialmente para a época, no entanto, foi visto com muita desconfiança pelos matemáticos do século XVI, tanto que a chamaram de *unidade imaginária*, e assim prosseguiu por dois séculos, aproximadamente. A Teoria dos Números Complexos teve contribuições de Girard, Descartes, Wallis, Euler e, por fim, Gauss que não deixou muito a ser acrescentado. Dito isso, é perfeitamente natural que os alunos desconfiem a primeira vista e demorem um pouco a aceitar e operar com essa nova espécie de número.

5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GERAL DE ALGUMAS EQUAÇÕES[9]

Neste capítulo daremos maior importância aos métodos de resoluções gerais de equações cúbicas e quárticas, mas sem esquecermos as equações quadráticas uma vez que estas nos servem de ferramenta para o desenvolvimento dos métodos de resolução das equações de graus três e quatro.

5.1 Métodos de Resolução Geral de Equações de grau 2

Vamos desenvolver de duas formas a solução geral da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b\ e\ c \in R, a \neq 0$

5.1.1 Fazendo uma Mudança de Variável x = y + t

Primeiro fazendo uma substituição $x = y + t$, onde t é uma constante qualquer, daí, teremos uma nova equação do segundo em y.

$$a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0$$

$$ay^2 + 2aty + at^2 + by + bt + c = 0$$

$$ay^2 + (2at + b)y + at^2 + bt + c = 0$$

Observe que se eliminarmos o termo de grau 1 na última equação teremos duas soluções para y, diretamente. Basta isolar y. Portanto, fazemos $2at + b = 0 \rightarrow t = -\frac{b}{2a}$ e substituímos na última equação para termos:

[9] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$ay^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c$$

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou seja,

$$y_1 = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \; ou \; y_2 = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

portanto, a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é:

$$x_1 = y_1 + t = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x_2 = y_2 + t = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Note que é necessário fazer uma discussão sobre $\Delta = b^2 - 4ac$ se for no contexto de soluções reais. Caso contrário fica entendido que o contexto é estendido ao conjunto dos números complexos. E, logo, a equação pode ter até duas raízes reais, ou sempre duas raízes complexas.

5.1.2 Completando Quadrados

Para uma segunda solução geral, dividimos ambos os membros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a e em seguida completamos quadrados que é um recurso, geralmente desenvolvido no 8º ano do ensino fundamental.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula para resolução da equação de 2º grau, como é conhecida.

ou seja, temos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Apesar de essa última solução ser mais enxuta, o argumento de fazer $x = y + t$ é bastante interessante do ponto de vista das transladações dos gráficos de funções através da adição de uma constante t ao argumento da função.

5.1.3 Exemplos Resolvidos

Exemplo 1: vamos resolver a equação $2x^2 - 4x + 7 = 0$ utilizando os procedimentos dos dois métodos anteriores.

Solução pelo primeiro método:

Façamos a substituição de $x = y + t$ na equação $2x^2 - 4x + 7 = 0$, para obter:

$$\begin{aligned} 2(y+t)^2 - 4(y+t) + 7 &= 2y^2 + 2t^2 + 4ty - 4y - 4t + 7 \\ &= 2y^2 + (4t-4)y + (-4t + 7 + 2t^2) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $t = 1$, temos:

$$2y^2 + 5 = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{-\frac{5}{2}} = \pm i\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Portanto $2x^2 - 4x + 7 = 0 \rightarrow x = 1 + i\sqrt{\frac{5}{2}}\ ou\ x = 1 - i\sqrt{\frac{5}{2}}$

Solução pelo segundo método, completando quadrados:

$$2x^2 - 4x + 7 = 0 \to x^2 - 2x + \frac{7}{2} = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{7}{2}$$

$$(x-1)^2 = -\frac{5}{2}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{-\frac{5}{2}}$$

$$x = 1 + i\sqrt{\frac{5}{2}}, ou\ x = 1 - i\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Exemplo 2: vamos resolver a equação $5x^2 + 11x + 2 = 0$ pela solução geral.

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 121 - 40 = 81 > 0$$

logo

$$x = \frac{-11 + \sqrt{81}}{10} = -\frac{1}{5}\ ou\ x = \frac{-11 - \sqrt{81}}{10} = -\frac{20}{10} = -2$$

5.2 Métodos de Resolução de Equações Cúbicas

Aos 14 anos de idade, Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira, no ano de 1987, apresentou a dedução da fórmula geral da equação do terceiro grau e do método de resolução da equação do quarto grau por artifícios simples e naturais que mais tarde lhe rendeu os olhares do conceituado matemático Elon Lages Lima. E em 1994 com incentivo do professor Elon, Carlos Gustavo concordou em publicar na Revista do Professor de Matematica o seu achado. Pouco antes da publicação de seu artigo o autor, humildemente, enviou uma carta à revista RPM dizendo que tinha visto no livro (EULER, L. Elements of Algebra, New York, Springer, c. 1972, Section IV, chap. XV, P. 282) essencialmente a mesma ideia sendo desenvolvida para equações de grau quatro pelo genial Euler.

5.2.1 Solução dada por Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira

Dada uma equação geral do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, tal que x_1 e x_2 são soluções complexas da equação, então, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Portanto, podemos escrever a equação assim, $x^2 - Sx + P = 0$.

Motivado, o autor, pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do segundo grau em função dos coeficientes da equação, resolveu calcular a equação:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

Elevando ao cubo ambos os membros da equação temos

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})$$

Substituindo $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2$ e $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ na equação acima

$$y^3 = S + 3\sqrt{P}y$$

$$y^3 - 3\sqrt{P}y - S = 0 \quad \text{(I).}$$

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, façamos a seguinte substituição $x = y + t$ a fim de anular o termo quadrático. Portanto,

$$(y + t)^3 + a(y + t)^2 + b(y + t) + c = 0$$

$$y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 + ay^2 + 2aty + at^2 + by + bt + c = 0$$

$$y^3 + (3t + a)y^2 + (3t^2 + 2at + b)y + (t^3 + at^2 + bt + c) = 0$$

Como queremos eliminar o termo y^2, logo $3t + a = 0 \rightarrow t = -\frac{a}{3}$, fazendo com que a equação anterior se transforme em algo do tipo:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad \text{(II)}$$

Com

$$p = 3t^2 + 2at + b = 3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\left(-\frac{a}{3}\right) + b = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b = -\frac{a^2}{3} + b$$

e

$$q = t^3 + at^2 + bt + c = \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c$$
$$= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

Observe que existem fórmulas para p e q em função dos coeficientes da equação cúbica. Comparando os coeficientes de (I) e (II), temos

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad e \quad q = -S$$

donde podemos concluir que

$$P = -\frac{p^3}{27} \quad e \quad S = -\,q$$

que substituindo em $x^2 - Sx + P = 0$ nos dá:

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

daí

$$\Delta = q^2 + 4\,\frac{p^3}{27}$$

e

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\,\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ou

$$x_2 = \frac{-q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

De $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, segue que,

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$. Como 1, *w e w²* são as raízes da unidade e sabendo que cada raiz pode assumir três valores complexos mas a equação $\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3}$ diz que o produto das raízes deve ser $-\frac{p}{3}$.

$$y_2 = w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

onde

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, temos acima as três raízes, na fórmula de Cardano-Tartaglia, de $y^3 + py + q = 0$ que somadas a $t = -\frac{a}{3}$ nos dão as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. A solução acima é chamada de solução geral da equação do 3º.

Mais a frente será explicado o porquê de só essas combinações, usando 1, *w* e *w²,* serem válidas na solução geral.

5.2.2 Outro Método de Resolução

Considere a equação geral do 3º grau com coeficientes complexos $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. E fazendo

$$x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + bx + c = 0$$

Observe que as mudanças feitas foram multiplicar por $\frac{3}{3}$, somar e subtrair por $3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x$ e $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ que são operações neutras, mas que nos permitirá ter um novo olhar da equação.

$$x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + bx + c = 0$$

$$x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

Note que os quatro primeiros termos formam um cubo perfeito $x^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3$. Logo, podemos escrever a equação anterior assim:

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

Vamos comparar a equação anterior com $\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(x + \frac{a}{3}\right)p + q = 0$

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(x + \frac{a}{3}\right)p + q = 0$$

Fazendo $y = x + \frac{a}{3} \rightarrow x = y - \frac{a}{3}$, obtemos:

$$(y)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(y - \frac{a}{3}\right) + c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (y)^3 + (y)p + q = 0$$

$$y^3 + by - \frac{ab}{3} - \frac{a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + c - \frac{a^3}{27} = y^3 + py + q = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} = y^3 + py + q = 0$$

Podemos concluir que $p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right) e\ q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$, onde temos, novamente, as mesmas expressões para p e q em função dos coeficientes da equação do terceiro grau.

O problema agora é resolver a equação $y^3 + py + q = 0$ onde faremos uma mudança de variável $y = u + v$

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

Desenvolvendo o produto notável e organizando a equação, temos:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

façamos

$$u^3 + v^3 = -q\ e\ 3uv = -p$$

$$u^3 + v^3 = -q\ e\ uv = -\frac{p}{3}$$

$$u^3 + v^3 = -q\ e\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Podemos, pensar em u^3 e v^3 como as raízes de uma equação do segundo grau, por exemplo, na variável y. Daí,

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

donde temos $\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27}$ como discriminante da equação em y e

$$y_1 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ou

$$y_2 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Ou seja, fazendo $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ que implica $u = \sqrt[3]{y_1}\ e\ v = \sqrt[3]{y_2}$ e como $y = u + v$, temos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Observando que $uv = -\frac{p}{3}$, temos que as outras duas raízes são:

$$y_1 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_2 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

onde $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz da unidade

E estas são as soluções gerais da cúbica: $y^3 + py + q = 0$, e para determinar a solução geral da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ basta fazer $x = y - \frac{a}{3}$, $x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$ e $x_2 = y_2 - \frac{a}{3}$

Observação: poderíamos ter usado o mesmo argumento que o autor da primeira solução usou de fazer $x = y + t$ com o intuito de eliminar o termo de grau 2, mas propositalmente foi usado multiplicar por $\frac{3}{3}$, somar e subtrair por $3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x$ e $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ que são operações neutras e nos dão uma nova visão para determinarmos a solução geral da equação cúbica.

5.2.3 Justificativa da Combinação Usando 1, w e w²

A solução geral é dada pela soma de dois radicais cúbicos. Portanto, temos nove combinações usando $1, w\ e\ w^2$ que são:

$$y_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_4 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_5 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_6 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_7 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_8 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Além das outras três. Só que estas seis últimas não satisfazem o produto $uv = -\frac{a}{3}$. Vejamos um exemplo:

$$(1\cdot u)\cdot(w\cdot v)=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\cdot\left(w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

$$=w\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\cdot\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$$

$$=w\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2}$$

$$=w\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=-w\frac{p}{3}\neq-\frac{p}{3}.$$

O leitor fica convidado testar os demais oito casos. Mas esta justificativa vale para $p\neq 0$.

Outra justificativa seria:

Sabemos que

$$\begin{cases} u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow w^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

e que $u+v, wu+w^2v \; e \; w^2u+wv$ são as raízes da equação cúbica $y^3+py+q=0$, logo a equação abaixo deve gerar esta equação.

$$[y-(u+v)]\cdot\underbrace{[y-(wu+w^2v)]\cdot[y-(w^2u+wv)]}=0$$

$$[y-(u+v)]\cdot\{y^2-[u(w+w^2)+v(w^2+w)]y+(wu+w^2v)\cdot(w^2u+wv)\}=0$$

$$[y-(u+v)]\cdot\{y^2+(u+v)y+w^3(u^2+v^2)-uv\}$$

$$y^3 + [w^3(u^2+v^2) - uv - (u+v)^2]y - (u+v)[w^3(u^2+v^2) - uv] = 0$$

Basta verificar que

$$[w^3(u^2+v^2) - uv - (u+v)^2] = w^3(u^2+v^2) - u^2 - v^2 - 3uv$$
$$= (u^2+v^2)(w^3-1) - 3uv = p$$

onde $(w^3 - 1) = 0$ e $uv = -p/3$.

$$-(u+v)[w^3(u^2+v^2) - uv] = -(u+v)(u^2+v^2)w^3 + (u+v)uv$$
$$= -w^3(u^3+v^3+uv^2+u^2v) + uv^2 + u^2v$$
$$= -w^3(u^3+v^3) - uv^2(w^3-1) - u^2v(w^3-1) = -w^3(u^3+v^3)$$
$$= -(-q) = q$$

Onde $w^3 = 1$ e $u^3 + v^3 = -q$. Portanto fica verificado que de fato as únicas raízes são: $u+v, wu + w^2v$ e $w^2u + wv$.

Observe que é possível desenvolver a discussão das soluções da equação cúbica a partir do discriminante $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Que quando maior que zero temos que $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \in R$. Mas que não garante que as três raízes da equação sejam reais.

5.2.4 Aplicações e Discussões de Problemas

Note que podemos criar uma equação do terceiro grau na variável x, por exemplo, e aplicarmos os métodos de resolução vistos anteriormente ou, até mesmo, as fórmulas, diretamente. Vamos considerar a seguinte equação:

Exemplo 1: $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

Onde claramente $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ são as raízes da equação. Portanto, vamos desenvolver o produto no primeiro membro da equação e resolvê-la pelos métodos vistos anteriormente.

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

$$(x^2-3x+2)(x-3)=0$$

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Usando a primeira solução temos: $a=-6, b=11, c=-6$. Temos $p=-\frac{a^2}{3}+b$ e $q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$, tais que $y^3+py+q=0$. Assim:

$$p=-\frac{(-6)^2}{3}+11=-1$$

$$q=\frac{2(-6)^3}{27}-\frac{(-6)11}{3}+(-6)=0$$

temos então:

$$y^3-y=0$$

Note que $y=0, y=1$ e $y=-1$ são raízes da equação acima.

Usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

$$y_1=\sqrt[3]{\frac{-0}{2}+\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-0}{2}-\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{\frac{-1}{27}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}-\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}=0$$

ou

$$y_2=w\sqrt[3]{\frac{-0}{2}+\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-0}{2}-\sqrt{\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}}}=$$

$$w \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} - w^2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} = w \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} =$$

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = 2 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right)$$

ou

$$y_3 = w^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w \cdot \frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} = \left(\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}$$

$$= -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right)$$

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, são: $x_1 = 2, x_2 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2$ e $x_3 = -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2$, onde de $-\frac{a}{3} = -\frac{(-6)}{3} = 2$. Nossa! essas raízes são feias. Concordo, plenamente. E visualmente nada têm a ver, aparentemente, com as raízes 1, 2, e 3 que sabemos satisfazer a equação.

Cabe a pergunta: "*Números inteiros podem ser escritos com expressões envolvendo radicais e números complexos?"* A resposta é sim, podem. Assim como números inteiros podem ser escritos como números racionais.

Observe que de $y_2 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = 1$ e $y_3 = -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = -1$, pois sabemos que 1 e -1 são raízes da equação $y^3 - y = 0$. Sendo assim $\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) = \frac{1}{i\sqrt{3}}$ e daí temos: $x_2 = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$ e $x_3 = -i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$. Mas é estranho que $i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = 3$ e $-i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}\right) + 2 = 1$, não acha?

Usando o segundo método

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$x^3 - 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 4x - 8 - 3 \cdot 4x + 8 + 11x - 6 = 0$$

$$(x-2)^3 - 3 \cdot 4x + 8 + 11x - 6 = 0$$

$$(x-2)^3 - x + 2 = 0$$

$$(x-2)^3 - (x-2) = 0$$

Fazendo uma mudança de variável $y = x - 2 \rightarrow x = y + 2$, temos:

$$y^3 - y = 0$$

Note que as raízes desta equação são –1, 0 e 1, porém se resolvermos a equação pela fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

como $p = -1$ e $q = 0$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} = 0$$

ou

$$y_1 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}$$

ou

$$y_2 = w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3}$$

Portanto, as soluções de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, são:

$$x = 2$$

ou

$$x_1 = w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} + 2$$

ou

$$x_2 = w^2\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} - w\frac{\sqrt[3]{i\sqrt{27}}}{3} + 2$$

Observe que o discriminante é – 1/27, menor que zero. E no entanto as raízes da equação sabemos que são reais e inteiras. Será que sempre que o discriminante for negativo as raízes são todas reais?

Exemplo 2: Vamos resolver a equação $2x^3 - 6x + i - 3 = 0$ de coeficientes complexos.

$$2x^3 - 6x + i - 3 = 0 \leftrightarrow x^3 - 3x + \frac{i-3}{2} = 0$$

$$p = -3, q = \frac{i-3}{2}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} + \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} - \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$x_2 = w\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} + \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} - \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$x_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} + \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{i-3}{2} - \sqrt{\frac{(i-3)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

Exemplo 3: Mostrar que $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 2$

$$\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^{3}=2^{3}$$

$$7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50}+3\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)=8$$

Supondo que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$ seja verdade. Temos:

$$2\cdot 7+3\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\cdot 2=8$$

$$7+3\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})\cdot(7-\sqrt{50})}=4$$

$$7+3\sqrt[3]{49-50}=7-3=4$$

Portanto, está mostrado que

$$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$$

Mas vamos tentar resolver este problema usando equações de grau 3, ou pelo menos a ideia do formato da sua fórmula geral resolutiva.

Supondo que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=x$. Como conhecemos o formato da fórmula resolutiva e vemos que o número $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$ tem grande semelhança com o formato da fórmula de Cardano-Tartaglia, então fazemos:

$$\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^{3}=x^{3}$$

$$7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50}+3\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)=x^{3}$$

Por hipótese, temos:

$$14 - 3x = x^3 \rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0$$

E observe que 2 satisfaz a equação $x^3 + 3x - 14 = 0$ e $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0$ e como $(x^2 + 2x + 7) = 0$ não tem solução real já que $\Delta < 0$, verifique!, logo $x = 2$ é a única solução racional inteira. Provando assim que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 2$, como queríamos demonstrar.

Observe que não seria um processo tão natural fazer $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = x$ e transformar isso em uma equação cúbica e fazer uma verificação das raízes da equação se a pessoa que estiver resolvendo a questão não conhecer o formato de uma equação do terceiro grau.

Exemplo 4: Vamos resolver a equação $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Pelo método de Carlos Gustavo temos a = b = c = 1. E sabemos que $p = -\frac{a^2}{3} + b$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ tais que $y^3 + py + q = 0$, logo:

$$p = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\ , q = \frac{2}{27} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{20}{27}\ e\ y^3 + \frac{2}{3}y + \frac{20}{27} = 0$$

Usando as fórmulas de Cardano-Tartaglia temos:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{3}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{3}}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^3}{27}}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{20^3}{27^4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{20^3}{27^4}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{20^3}{3^{12}}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{20^3}{3^{12}}}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{3^{10}+20^3}{3^{12}}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{3^{10}+20^3}{3^{12}}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{59049+8000}}{3^6}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{59049+8000}}{3^6}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{67049}}{3^6}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{67049}}{3^6}} = \sqrt[3]{\frac{-3^5+\sqrt{67049}}{3^6}}+\sqrt[3]{\frac{-3^5-\sqrt{67049}}{3^6}}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-243+\sqrt{67049}}{729}}+\sqrt[3]{\frac{-243-\sqrt{67049}}{729}}$$

ou

$$y_2 = w\sqrt[3]{\frac{-243+\sqrt{67049}}{729}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-243-\sqrt{67049}}{729}}$$

ou

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{\frac{-243+\sqrt{67049}}{729}}+w\sqrt[3]{\frac{-243-\sqrt{67049}}{729}}$$

Logo, as raízes de $x^3+x^2+x+1=0$, são:

$$x_1 = -\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{-243+\sqrt{67049}}{729}}+\sqrt[3]{\frac{-243-\sqrt{67049}}{729}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}+w\sqrt[3]{\frac{-243+\sqrt{67049}}{729}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-243-\sqrt{67049}}{729}}$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}+w^2\sqrt[3]{\frac{-243+\sqrt{67049}}{729}}+w\sqrt[3]{\frac{-243-\sqrt{67049}}{729}}$$

Mas note que, por inspeção, -1 é raiz da equação $x^3+x^2+x+1=0$ e, portanto, uma das raízes anteriores é equivalente a -1. Observe também que

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \; ou \; x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Portanto, as raízes x_1, x_2 e x_3 podem ser escritas como: -1, + i e – i. E observe que o discriminante é menor que zero.

Observe que o discriminante $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^3}{27} > 0$ e há duas raízes complexas e uma real. Será que sempre que isso ocorre às raízes tem esse padrão? Para responder a essa questão recomendamos trabalho de conclusão de curso em nossa referência.

5.3 Métodos de Resolução de Equações do Quarto Grau

Vamos começar desenvolvendo o produto do primeiro membro da equação $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ que deixa claro que suas raízes são x_1, x_2 e x_3. Ao resolvermos temos:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \qquad (*)$$

Chamando $S = x_1 + x_2 + x_3$, $S_d = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3$ e $P = x_1x_2x_3$. Podemos reescrever a equação anterior na forma:

$$x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0 \qquad (**)$$

5.3.1 Solução Apresentada por Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, que elevando ao quadrado fica:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2\left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}\right)$$

$$\frac{y^2 - S}{2} = \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}\right)^2$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 2\left(\sqrt{x_1x_1x_2x_3} + \sqrt{x_2x_1x_2x_3} + \sqrt{x_3x_1x_2x_3}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 2\left(\sqrt{x_1}\sqrt{x_1x_2x_3} + \sqrt{x_2}\sqrt{x_1x_2x_3} + \sqrt{x_3}\sqrt{x_1x_2x_3}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y$$

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0$$

Considerando a equação geral $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. E fazendo uma substituição $x = y + t$, a fim de eliminar o termo de grau 3, temos:

$$(y+t)^4 + a(y+t)^3 + b(y+t)^2 + c(y+t) + d = 0$$

$y^4 + (4t + a)y^3 + (6t^2 + 3ta + b)y^2 + (4t^3 + 3at^2 + 2bt + c)y + (t^4 + bt^2 + at^3 + ct + d) = 0$ *(***)*

E para que possamos eliminar o termo de grau 3 nesta última equação ,fazemos $4t + a = 0 \rightarrow t = -\frac{a}{4}$ e substituímos na equação anterior. Dai, obtemos uma equação da forma:

$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$

Observação: k_1, k_2 e k_3 são diferentes de zero e, portanto, não anulam mais nenhum termo da equação (***) com a substituição.

Comparando as equações $y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4c = 0$ e $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$, temos:

$$k_1 = -2S, \qquad k_2 = -8\sqrt{P}, \qquad k_3 = S^2 - 4S_d$$

$$S = -\frac{k_1}{2}, \qquad P = \left(\frac{k_2}{8}\right)^2, \qquad S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{k_1{}^2 - 4k_3}{16}$$

Portanto, resolvendo a equação:

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \left(\frac{k_1{}^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2^2}{8}\right)^2 = 0$$

Teremos as raizes $x_1,\ x_{2,}\ e\ x_3$ tais que $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$ satisfaz $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

E para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ basta diminuir $\frac{a}{4}$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma obtemos todas as quatro raízes da equação original.

5.3.2 Solução de Ferrari

Considere a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ com coeficientes complexos e façamos uma divisão por a, a ambos os membros da equação e em seguida completemos quadrados convenientemente.

$$x^4 + \left(\frac{b}{a}\right)x^3 + \left(\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{d}{a}\right)x + \frac{e}{a} = 0$$

$$x^4 + \left(\frac{b}{a}\right)x^3 = -\left[\left(\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{d}{a}\right)x + \frac{e}{a}\right]$$

$$x^4 + \left(\frac{b}{a}\right)x^3 + \left(\frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}x\right)^2 - \left[\left(\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{d}{a}\right)x + \frac{e}{a}\right]$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \left(\frac{d}{a}\right)x - \frac{e}{a} = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)x^2 - \left(\frac{d}{a}\right)x - \frac{e}{a}$$

Observando a última equação vemos que seria interessante que no segundo membro aparecesse uma expressão quadrado perfeito, pois o problema se resumiria a resolver uma equação do segundo grau. Bem, como não aparece, podemos manipular algebricamente para que ocorra. E para isso basta somar y a $x^2 + \frac{b}{2a}x$ e desenvolver as contas que aparecerá o termo que somaremos ao segundo membro da última equação acima. Portanto, temos:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + y\right)^2 = \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + y^2$$

Agora, vamos somar a expressão $2yx^2 + \frac{b}{a}xy + y^2$ a ambos os membros da equação $\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)x^2 - \left(\frac{d}{a}\right)x - \frac{e}{a}$ e agrupar os termos semelhantes para obter:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + y\right)^2 = \left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) + 2y\right]x^2 + \left(\frac{b-d}{a}y\right)x + \left(y^2 - \frac{e}{a}\right)$$

Observe que o segundo membro da última equação igualado a zero é uma equação do segundo grau em x. Se quisermos que a expressão seja quadrado perfeito basta fazer $\Delta = 0$. Portanto tomemos a equação:

$$\left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) + 2y\right]x^2 + \left(\frac{b-d}{a}y\right)x + \left(y^2 - \frac{e}{a}\right) = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{b-d}{a}y\right)^2 - 4\left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) + 2y\right]\left(y^2 - \frac{e}{a}\right) = 0$$

$$\left(\frac{b-d}{a}\right)^2 y^2 - \left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right) + 8y\right]\left(y^2 - \frac{e}{a}\right) = 0$$

$$\left(\frac{b-d}{a}\right)^2 y^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right)\frac{e}{a} + 8y^3 - 8\frac{e}{a}y = 0$$

$$8y^3 + \left[\left(\frac{b-d}{a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right)\right]y^2 - 8\frac{e}{a}y + \left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right)\frac{e}{a} = 0$$

Note que esta última é uma equação cúbica completa cujas raízes já sabemos determinar. Portanto as raízes da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ são dadas pela solução da equação a seguir onde y_1 é uma das três soluções da cúbica acima.

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + y_1\right)^2 = \left[\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) + 2y_1\right]x^2 + \left(\frac{b-d}{a}y_1\right)x + \left({y_1}^2 - \frac{e}{a}\right)$$

Pois este segundo membro terá a seguinte forma: $(\alpha + \beta)^2$, logo, teremos:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + y_1\right)^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + y_1 = \pm(\alpha + \beta)$$

E da última equação saem as raízes da equação geral do 4º grau.

5.3.3 Exemplos Resolvidos

Exemplo 1: Vamos resolver a equação $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

(a) Solução baseada no método de Ferrari

$$x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 25x^2 - 35x^2 + 50x - 24 = -10x^2 + 50x - 24$$

$$(x^2 - 5x)^2 = -10x^2 + 50x - 24$$

Note que a expressão $-10x^2 + 50x - 24$ não é um quadrado perfeito. Portanto, precisaremos descobrir que expressão somar a ambos os membros da equação anterior para que se mantenha quadrado perfeito no primeiro membro e consigamos algo no segundo membro que possa ser transformado num quadrado perfeito, assim temos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 5x + y)^2 &= (x^2 - 5x)^2 + 2y(x^2 - 5x) + y^2 \\ &= 2y(x^2 - 5x) + y^2 - 10x^2 + 50x - 24\end{aligned}$$

$$(x^2 - 5x + y)^2 = (2y - 10)x^2 + (50 - 10y)x + (y^2 - 24)$$

Vamos trabalhar a expressão do segundo membro da expressão para que ela seja um quadrado perfeito. Portanto façamos:

$$(2y-10)x^2+(50-10y)x+(y^2-24)=0$$

E para que a equação do segundo grau anterior tenha duas raízes reais e iguais devemos ter $\Delta=0$. Logo,

$$(50-10y)^2-4(2y-10)(y^2-24)=0$$

reduzindo temos

$$2y^3-35y^2+202y-385=0$$

Observe que $y=5$ satisfaz a equação logo anterior. E substituindo em

$$(x^2-5x+y)^2=(2y-10)x^2+(50-10y)x+(y^2-24)$$

temos

$$(x^2-5x+5)^2=1$$

Ou seja, ambos os membros da equação são quadrado perfeito. Logo,

$$x^2-5x+5=1 \leftrightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x=4 \; ou \; x=1$$

ou

$$x^2-5x+5=-1 \leftrightarrow x^2-5x+6=0 \rightarrow x=3 \; ou \; x=2$$

Portanto, as raízes pertencem ao conjunto solução $\{1,2,3,4\}$

(b) Solução baseada no método de Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira

Na equação $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$, façamos uma mudança de variável $x=y+t \leftrightarrow y=x-t$

$$(y+t)^4-10(y+t)^3+35(y+t)^2-50(y+t)+24=0$$

Desenvolvendo, temos:

$$y^4 + (4t - 10)y^3 + (6t^2 - 30t + 35)y^2 + (4t^3 - 30t^2 + 70t - 50)y$$
$$+ (t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) = 0$$

Para eliminarmos o termo de grau 3, basta fazer $t = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. E a equação se transforma

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} = 0 \rightarrow y = \pm\frac{1}{2}\ ou\ y = \pm\frac{3}{2}$$

Dai, $x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1, ou\ x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2, ou\ x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3, ou\ x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

Exemplo 2: Vamos determinar as raies da equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Façamos:

$$x^4 + x^3 = -x^2 - x - 1$$

$$x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - x^2 - x - 1$$

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{-3x^2 - 4x - 4}{4} \rightarrow (2x^2 + x)^2 = -3x^2 - 4x - 4$$

Para que ambos os membros sejam quadrados perfeitos, podemos fazer:

$$(2x^2 + x + y)^2 = (2x^2 + x)^2 + 2(2x^2 + x)y + y^2$$

Portanto, somando $2(2x^2 + x)y + y^2$ a ambos os membros de $(2x^2 + x)^2 = -3x^2 - 4x - 4$, temos:

$$(2x^2 + x + y)^2 = 2(2x^2 + x)y + y^2 - 3x^2 - 4x - 4$$
$$= (4y - 3)x^2 + (2y - 4)x + (y^2 - 4)$$

$$(2x^2 + x + y)^2 = (4y - 3)x^2 + (2y - 4)x + (y^2 - 4)$$

Observe que para o segundo da equação anterior seja quadrado perfeito devemos ter:

$$(2y-4)^2 - 4(4y-3)(y^2-4) = 0$$

Note que $y = 2$ satisfaz a equação anterior. Logo,

$$(2x^2 + x + 2)^2 = (4 \cdot 2 - 3)x^2 + (2 \cdot 2 - 4)x + (2^2 - 4)$$

$$(2x^2 + x + 2)^2 = 5x^2 = (\sqrt{5}x)^2$$

$$2x^2 + x + 2 = \pm\sqrt{5}x \rightarrow 2x^2 + x + 2 = \sqrt{5}x \; ou \; 2x^2 + x + 2 = -\sqrt{5}x$$

$$2x^2 + \left(1 - \sqrt{5}\right)x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \; ou \; x = \frac{\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

ou

$$2x^2 + \left(1 + \sqrt{5}\right)x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(1 + \sqrt{5}) + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \; ou \; x = \frac{-(1 + \sqrt{5}) - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Portanto, temos quatro raízes complexas para a equação.

6. PESQUISA DE CAMPO

A seguir, um relato das atividades realizadas ao longo de cinco aulas, com dois tempos de 50 minutos cada, com 32 alunos de terceiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Presidente Kennedy, algumas observações e sugestões.

6.1 Descrição e Análise do Experimento Realizado

Aula 1

Nesta aula foi apresentado aos alunos um breve relato a cerca da história das resoluções das equações algébricas desde as quadráticas, cerca de 1700 A.C, culminado na resolução das cúbicas na Itália Renascentista.

Com o auxílio de recursos audiovisuais, quadro e explanação oral os alunos puderam ter uma pequena noção do quanto foi difícil e relevante a resolução destas equações.

Aula 2

Relembramos a resolução das equações quadráticas conforme a demonstração abaixo:

Dada a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com $a \neq 0, b\ e\ c\ \in\ \mathbb{R}$.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

somando $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados da igualdade completamos o quadrado o lado esquerdo da igualdade sem alterá-la

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que equivale a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A seguir foi entregue uma atividade (anexo A) com as três equações abaixo

a) $x^2 - 3x - 18 = 0$
b) $x^2 + x - 1 = 0$
c) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

E as perguntas que seguem

1. *Você encontrou dificuldade para resolver alguma das equações acima? Caso tenha encontrado diga qual foi a dificuldade.*

2. *Alguma das equações acima não possui solução dentro do conjunto dos números reais? Por que não?*

O objetivo dessas perguntas foi verificar se os alunos sentiram-se a vontade para justificar a inexistência de solução para determinada equação devido ao aparecimento de raízes quadradas de números negativos.

Foram obtidas algumas respostas esperadas para esse estudo como, por exemplo:

1º. “Eu não tive dificuldade em resolver, mas a equação c) não tinha solução”

2º. “A letra c) porque não existe raiz quadrada de número negativo”

Aula 3

Neste momento foi apresentada a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução das equações cúbicas e demonstrada conforme o subcapítulo 2.3 deste trabalho.

Dado

$$x^3 + px + q = 0$$

teremos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Com relação à demonstração da fórmula acima cabe dizer que embora todos os alunos quando interpelados tenham se mostrados convencidos da validade da fórmula os mesmos confessaram dificuldades em compreender alguns passos da demonstração, principalmente no que diz respeito às mudanças de variáveis e manipulações algébricas.

Perguntas mais frequentes:

"Por que chamar x de A + B?"

"Como saber que $p = -3AB$ deve ser elevado ao cubo?"

"Como conhecer a soma $A^3 + B^3$ e o produto A^3B^3 me ajuda a descobrir os valores de A^3 e B^3"

Como exemplo, a equação abaixo foi resolvida

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$$

fazendo a substituição

$$x = t - \frac{b}{3a}$$

$$x = t + 1$$

obtém-se a equação

$$t^3 - 2t + 4 = 0$$

em que

$$p = \frac{1}{1} - \frac{(-3)^2}{3} = -2$$

e

$$q = \frac{2(-3)^3}{27} - \frac{(-3)}{3} + \frac{5}{1} = 4$$

uma solução da equação em t é dada pela fórmula resolvente

$$t_1 = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3}} = -2$$

a que corresponde a solução da equação em x

$$x = t + 1$$

$$x = -2 + 1 = -1$$

Os alunos foram convidados a substituir o resultado obtido na equação dada, a fim de verificar que a fórmula realmente conduziu a uma solução correta.

Observe que a equação foi cuidadosamente escolhida de forma que seu discriminante fosse um número positivo e que neste momento não se falou sobre as outras duas soluções da equação do terceiro grau dada. Esse procedimento se deve ao fato dessa aula destinar-se a introdução do estudo dos números complexos.

Aula 4

Nesta aula inicialmente demonstrou-se que determinada equação cúbica possuía soluções reais para posteriormente dar seguimento a resolução pela fórmula de Cardano-Tartaglia a fim de, então, deparar-se com raízes quadradas de números negativos e gerar o seguinte questionamento: Como uma fórmula que comprovadamente funciona para resolver uma equação que sabidamente tem ao menos uma solução real pode apresentar números que, supostamente, não existem.

Dada a equação cúbica

$$x^3 - 15x = 4$$

verificar que $x_1 = 4$ é uma solução para a equação proposta.

$$4^3 - 15.4 = 4$$

dividir $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$

$$\frac{x^3 - 15x - 4}{x - 4} = x^2 + 4x + 1$$

resolver a equação quadrática encontrada

$$x_2 = -2 + \sqrt{3} \text{ e } x_3 = -2 - \sqrt{3}$$

e verificar que x_2 e x_3 são soluções para a equação cúbica proposta.

Agora, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, determinar as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (1)$$

Neste ponto chega-se ao impasse que gerará a discussão a respeito da necessidade de um novo tipo de número.

Uma abordagem mais prática foi adotada com o objetivo de ratificar as conclusões obtidas até agora, por meio da seguinte atividade:

1. Dado o problema "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com 15 unidades de área na base, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?" escreva uma equação capaz de modelá-lo:

Solução:

$$x^3 - 15x = 4$$

2. Verifique qual é a diferença entre o volume do cubo e do paralelepípedo quando sua aresta e altura medem três unidades.

Solução:

Volume do cubo: $3^3 = 27$

Volume do paralelepípedo: $3 \cdot 15 = 45$

Diferença entre os volumes: $27 - 45 = -18$

3. Verifique qual é a diferença entre o volume do cubo e do paralelepípedo quando sua aresta e altura medem cinco unidades.

Volume do cubo: $5^3 = 125$

Volume do paralelepípedo: $5 \cdot 15 = 75$

Diferença entre os volumes: $125 - 75 = 50$

4. A parir dos resultados obtidos é possível concluir que existe solução para o problema proposto? Justifique.

Exemplos de respostas:

“Sim, a resposta deve ser um número entre 3 e 5”

“Sim. Porque 4 está entre -18 e 50”

Observe que para valores pequenos de x a diferença entre os volumes é um número menor o que quatro, mas se aumentarmos o valor atribuído a x, essa diferença torna-se maior do que quatro logo, para algum valor de x essa diferença deve ser igual a quatro.

Com este argumento os alunos tiveram a oportunidade de experimentar da mesma inquietude de matemáticos de outrora ao deparar-se com problemas práticos os quais tinham certeza da existência de solução sem, contudo, possuir recursos algébricos para resolvê-los.

Aula 5

Para resolver o problema proposto na aula anterior foi proposto o seguinte:

Admitir que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e estabelecer as seguintes propriedades para operar com ele:

i. $\left(\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = -1$
ii. $\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right)\left(\sqrt{-1}\right) = 1$
iii. $\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right)\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right) = -1$
iv. $(\pm 1)\left(\sqrt{-1}\right) = \pm\sqrt{-1}$
v. $(\pm 1)\left(-\left(\sqrt{-1}\right)\right) = \mp\sqrt{-1}$

Aplicando as propriedades estabelecidas na conjectura acima à expressão obtida em (1) chegou-se ao seguinte resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

verificou-se que

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \text{ e } \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

e concluiu-se que

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

introduzindo, então, a noção de unidade imaginária com aplicação na resolução de equações cúbicas.

6.2 Conclusão da Pesquisa de Campo

Do experimento realizado foi possível constatar que todos os alunos participantes tiveram dificuldade nos cálculos de produtos notáveis, resolução de equações quadráticas, tanto por completamento de quadrados quanto por fórmula, manipulação algébrica e, sobretudo, nas deduções em que o autor se utiliza de igualdades mais simples e mudanças de variáveis a fim de chegar a resultados mais complexos. Aparentemente, a falta de prática em cálculos algébricos dificultou estabelecer as interrelações necessárias para compreender com mais facilidade certos passos da demonstração.

Dificuldades a parte, todos assimilaram e aplicaram a fórmula dada mostrando-se convencidos de sua validade bem como da necessidade de um novo tipo de número que possibilite a resolução de equações cúbicas com raízes quadradas de números negativos.

Esta conclusão foi de suma importância para esse estudo a fim de estabelecermos uma proposta pedagógica que abone o justo destaque à resolução das equações cúbicas e quárticas cujo detrimento, a nosso ver, tem deixado uma lacuna no currículo de matemática do Ensino Básico.

6.3 Sugestão de Plano de Aula para Professores[10]

Segue abaixo uma humilde contribuição de um plano de aula para professores que desejam implementar os métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas e a relação das mesmas com os números complexos.

<table>
<tr><td>Número de aulas:
6 aulas</td><td>Carga horária:
6 tempos de 50 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema central: desenvolvimento dos métodos de resolução de equações do terceiro e do quarto grau com a dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:
✓ Compreender o desenvolvimento dos produtos notáveis até o cubo da soma e da diferença de dois termos assim como o completar expressões para que se tornem quadrados perfeitos e cubos perfeitos;
✓ Desenvolver a habilidade de fatorar, principalmente os casos de maior necessidade para o desenvolvimento dos métodos de resolução das equações em estudo;
✓ Compreensão e desenvolvimento de equações do segundo grau, por fórmula de resolução geral e completando quadrados;
✓ Compreender números complexos no caso de alunos do primeiro e do</td></tr>
</table>

[10] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves

terceiro ano do ensino médio; ✓ Desenvolver os métodos de resolução de equações do terceiro grau e dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia assim como seu uso prático; ✓ Compreender os métodos de resolução de equações do quarto grau pelos métodos de Ferrari e de Carlos Gustavo, assim como sua aplicação prática na resolução de equações quárticas.
Conteúdos a serem trabalhados: produtos notáveis, fatoração de expressões algébricas, equações do segundo grau,números complexos e métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas.
Procedimentos: 1. Realizar um sólido resgate dos produtos notáveis, principalmente, quadrado e cubo da soma e da diferença de dois termos, fatoração de expressões algébricas ressaltando o completamento de quadrados; 2. Apresentar a solução de equações quadráticas completando quadrados e por mudança de variável, com intuito de obter uma fórmula resolutiva assim como na prática direta dos exercícios e discussão sobre o número de raízes; 3. Introduzir os números complexos; 4. Demonstrar a fórmula de Cardano-Tartaglia usando os recursos anteriores pelos dois, ou mais métodos que se utilizam discutindo com os alunos o número de soluções reais e fazendo comparações de números reais com números complexos; 5. Apresentar de forma geral a solução da equação quártica pelo método de Ferrari e de Carlos Gustavo.
Estratégias/Recursos: ✓ Exposição de conteúdos, levatamento do conhecimento prévio dos alunos, discussão socializada, problematizada e sistematizada do tema; ✓ Textos, quadro-negro, pilot e data show.

Avaliação:

- ✓ Observar e analisar o posicionamento crítico dos alunos, assim como o grau de interesse dos mesmos sobre o assunto, durante a exposição do conteúdo;
- ✓ A prática dos alunos deve ter pontuação proporcional ao número de equações resolvidas e ao esforço empregado na tentativa de resolvê-las.

Referências:

- ✓ ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ A. HEFEZ e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; E. WAGNER e A. C. MORGADO. A Matemática do Ensino Médio V.3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.6 Polinômios. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A.
- ✓ IEZZI. G. Fundamentos de Matemática Elementar V.6. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Editora Atual;
- ✓ A. GARCIA e Y. Lequain. Elementos de Álgebra. Coleção Projeto Euclides. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. Coleção Iniciação científica. Sociedade Brasileira de Matemática;
- ✓ ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática.

6.4 Sugestão de Plano de Estudo[11]

Achamos pertinente tentar orientar o estudo dos métodos de resolução de equações de graus 2, 3 e 4, para leitores que desejam expandir seus conhecimentos sobre resolução dessas equações. Assim como a relação dessas com números complexos.

Quadro Resumo

CONEÚDO	ORIENTAÇÃO	OBJETIVOS	REFERÊNCIAS
Produtos notáveis	Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos.	Familiarização com os produtos notáveis; Criando quadrados e cubos perfeitos através do completamento de quadrados	NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática; A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A.
Fatoração de expressões algébricas	Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura	O leitor deve estar com uma visão ampliada sobre as fatorações de expressões algébricas	NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática; A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE.

[11] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves

	completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos.		Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A.
Equação do segundo grau	Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos.	Resolver equações do segundo grau por completamento de quadrados e pela fórmula para resolução da equação de 2º grau; Saber discutir sobre o número de soluções reais	A. C. MORGADO, E. WAGNER e M. JORGE. Álgebra I. Livraria Francisco Alves Editora S. A. ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática. NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;
Números complexos	Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do	Conhecer o conjunto dos números complexos assim como sua estrutura algébrica; Comparar números	IEZZI. G. Fundamentos de Matemática Elementar V.6. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Editora Atual; NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.6 Polinômios. Coleção Professor de Matemática. Sociedade

	material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos.	complexos com números reais	Brasileira de Matemática; LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; E. WAGNER e A. C. MORGADO. A Matemática do Ensino Médio V.3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática; Hefez e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
Resolução de equações cúbicas	Buscar o conteúdo no índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos.	Obter a fórmula de Cardano-Tartaglia através dos métodos apresentados; Aplicar os métodos ao resolver equações de terceiro grau; Interpretar resultados reais na forma de números complexos.	Hefez e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática; ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática.
Resolução de	Buscar o conteúdo no	Compreender a resolução da	Hefez e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações

equações quárticas	índice da referência bibliográfica indicada e fazer uma leitura completa do material que vai da leitura do material a resolução dos exercícios propostos.	equação quártica em sua forma geral através dos métodos apresentados; Aplicar os métodos na resolução de equações dadas.	Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática; ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática.

7. BREVE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS[12]

O Plano Nacional do Livro Didático é um programa que tem por objetivo prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários. Um edital especifica todos os critérios para inscrição das obras. Os títulos inscritos pelas editoras são avaliados pelo MEC, que elabora o Guia do Livro Didático, composto das resenhas de cada obra aprovada, que é disponibilizado às escolas participantes pelo FNDE.

Cada escola escolhe democraticamente, dentre os livros constantes no referido Guia, aqueles que deseja utilizar, levando em consideração seu planejamento pedagógico.

A seguir, uma breve análise das coleções de livros didáticos de matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2015, no que diz respeito ao estudo das equações cúbicas e quárticas.

7.1 Matemática: Contexto e Aplicações

A obra Matemática: contexto e aplicações é do autor Luiz Roberto Dante, ex-professor da rede estadual de São Paulo, Mestre em matemática pela USP, Doutor em Ensino da Matemática pela PUC de São Paulo e pesquisador da Unesp. Foi analisada uma coleção dividida em três volumes publicada pela Editora Ática.

[12] Escrito com a colaboração de Fabrício Garcia da Silva Alves

Figura 7: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações

No sexto capítulo do terceiro volume dessa coleção, Dante aborda as equações cúbicas e quárticas como tema introdutório ao estudo dos números complexos. Dedica a esse estudo, nas páginas 136 e 137, as linhas que seguem:

"Os números complexos aparecem só no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano publicou seu famoso livro Ars Magna, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$*. O problema 'Qual é a medida* ***x****, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?' corresponderia à equação* $x^3 - 15x = 4$*, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão* $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$*. Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se essas ainda não existiam. (...)"*

Complementa mencionando as contribuições de Bombelli, Euler e Gauss na construção do conjunto dos números complexos e com a atividade:

"1. Em Ars Magna, Cardano apresenta uma das raízes da equação de 3º grau $x^3 + ax + b = 0$ *dada por*

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}$$

Essa fórmula foi sugerida a ele por Tartaglia, outro famoso matemático italiano dessa época.

a) Mostre como Cardano se deparou com o número $\sqrt{-121}$ ao tentar encontrar as raízes da equação que resolvia o problema do cubo e do paralelepípedo mencionado.

b) Verifique que 4 é raiz da equação."

Nota-se, claramente, que a fórmula resolutória da equação cúbica foi apresentada neste capítulo como problema introdutório ao estudo dos números complexos sem, contudo, ater-se à sua demonstração ou a resolução de equações do terceiro grau.

Ao final desse capítulo no texto "Um pouco de história", página 171, o autor narra, resumidamente, os eventos que protagonizados por Cardano, Tartaglia e Bombelli, no que diz respeito à resolução das equações cúbicas e quárticas e a criação dos números complexos.

No capítulo sete, que trata do estudo dos polinômios, subcapítulo onze, páginas 189 e 190, o autor enuncia as Relações de Girard para as equações de grau 2, 3 e n, seguido de três exemplos resolvidos e nove exercícios propostos.

Ainda no capítulo sete, o autor cita a seguinte propriedade:

*"Se o número racional $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

*então p é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n."*

Que utiliza a fim de resolver equações cúbicas e quárticas através da pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros e divisão de polinômios.

No final desse capítulo, à página 201, o texto “A história das equações algébricas” conta como Scipione del Ferro estudou as cúbicas ainda antes de Tartaglia, a polêmica envolvendo Cardano, Tartaglia e a resolução das cúbicas publicada na *Ars Magna,* Ferrari e a resolução das equações quárticas e a impossibilidade da resolução das quínticas por radicais conforme seria incontestavelmente provado por Galois[1] na a teoria que leva o seu nome.

7.2 Matemática: Ciência e Aplicações

Trata-se de uma coleção dividida em três volumes da Editora Saraiva de São Paulo, dos autores Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.

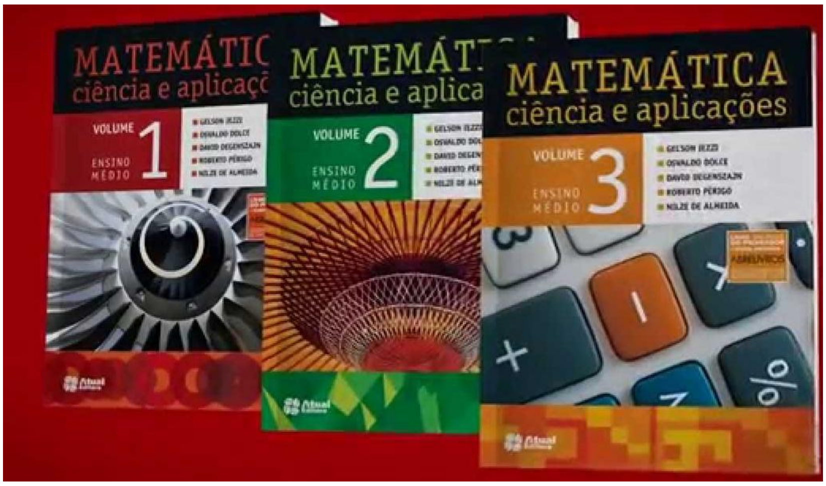


Figura 8: Coleção Matemática: Ciência e Aplicações

No quinto capítulo do terceiro volume dessa coleção, que trata dos números complexos, às páginas 122 e 123, o autor introduz com o texto “Um pouco de História” onde menciona um problema proposto por Cardano já abordado nesse estudo que seria “Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo comprimento seja 40” e afirma que Bombelli aplicara a fórmula de Cardano para resolver a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, obtendo uma solução $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. A fórmula mencionada não foi apresentada e nada mais foi dito acerca das equações cúbicas ou quárticas neste capítulo.

Mais a frente, no capítulo 7, Equações algébricas ou polinomiais, páginas 188 189, o autor fala das relações de Girard entre coeficientes e raízes:

"*Equação de 3º grau*

Sejam r_1, r_2 *e* r_3*as raízes da equação* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *com* $a \neq 0$. *Temos:*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Dividindo os dois membros por a $(a \neq 0)$, *vem:*

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, vem:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x + r_1r_2r_3$$

Da igualdade dos polinômios, segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

A seguir, o autor aplica as relações enunciadas em um exemplo e logo depois, de forma análoga a que foi feito nas equações de terceiro grau, deduz as Relações de Girard para as equações de quarto grau.

"*Equação de 4º grau*

Sejam r_1, r_2, $r_3\ e\ r_4$ *as raízes da equação* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\ (a \neq 0)$.

(...)

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\dfrac{d}{a} \\ r_1r_2r_3r_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

Resolve outro exemplo e, por fim, generaliza:

“Equação de grau n

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, com* $a_n \neq 0$*, e* $r_1, r_2, \ldots, r_3$ *suas raízes Por meio de raciocínio análogo aos anteriores, vem:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_nr_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1r_2 \ldots r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

No Capítulo 7, página 180, o texto “A Resolução de equações” traz um resumo da história da resolução de equações algébricas desde Al-Khowarizmi até Galois.

7.3 Matemática: Ensino Médio

Esta também é uma coleção da Editora Saraiva, dividida em três volumes, das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, ambas doutoras pela USP e coordenadoras do projeto Mathema, grupo de formação e pesquisa na área de matemática.

Figura 9: Coleção Matemática Ensino Médio

No capítulo 10, página 224, as autoras iniciam o estudo dos números complexos com a seguinte equação

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

E a seguir afirmam que aplicando a fórmula para resolução da equação de 2º grau chegaremos ao seguinte resultado

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Concluindo que embora esse resultado não seja útil no campo dos números reais é possível dar continuidade a resolução com o auxílio dos números complexos.

A seguir, no texto *Um pouco de História* narram o seguinte:

"*Por volta da primeira metade do século XVI, alguns matemáticos italianos (Tartaglia e Cardano) descobriram um modo para resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$.*

Em sua obra Ars Magna, Jerônimo Cardano (1501-1576) apresentou pela primeira vez a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Como solução de uma equação do tipo $x^3 + ax + b = 0$*, onde* $a > 0$ *e* $b > 0$*.”*

E complementa dizendo que embora tal fórmula só se aplicasse a equações com discriminante positivo, Bombelli chegou a um impasse ao verificar que a equação $\mathrm{x}^3 - 15\mathrm{x} = 4$, cuja solução leva a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

possuía uma raiz conhecida, $\mathrm{x} = 4$, o que pode ser facilmente verificado. Daí, a necessidade da invenção dos números complexos.

Embora a resolução de equações cúbicas tenha sido o tema gerador para o estudo dos números complexos nenhum dos exercícios resolvidos ou propostos retoma o assunto.

No capítulo seguinte, subcapítulo 5, página 255, as autoras enunciam as relações de Girard para as equações de grau 2, 3 e 4 e também tratam a resolução de equações por meio de pesquisa de raízes racionais com exercícios resolvidos e propostos envolvendo equações cúbicas e quárticas. Abaixo, um dos exemplos resolvidos, da página 261:

“ER11. Resolva.

$$4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 15x + 9 = 0$$

Resolução:

Vamos pesquisar se a equação admite alguma raiz racional.

p: divisor de 9 ⇒ $p = \pm 1, \pm 3, \pm 9$

q: divisor de 4 ⇒ q= $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Os candidatos a raízes racionais são todos os possíveis valores de $\frac{p}{q}$*:*

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 9, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{9}{4}$$

Verificamos (usando o dispositivo de Briot-Ruffini) que $\frac{1}{2}$ *e 3 são raízes; dividindo o 1º membro da equação por* $x - \frac{1}{2}$ *e o quociente por* $x - 3$*, vem:*

	10	*2*	*15*
$\frac{1}{2}$	*8*	*6*	*18*

As demais raízes da equação são de:

$$4x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

portanto, o conjunto solução é

$S = \left\{\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i\right\}$*."*

7.4 Conexões com a Matemática

Esta é uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna sob a coordenação do editor Fábio Martins de Leonardo, licenciado em matemática pela USP.

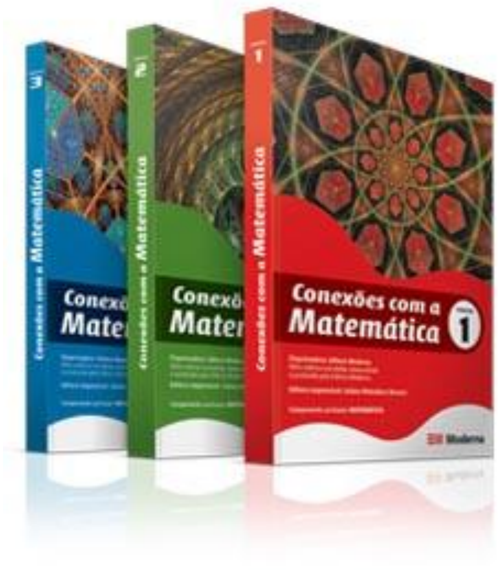


Figura 10: Coleção Conexões com a Matemática

No capítulo 7, que trata dos números complexos, foi traçada uma linha do tempo destacando os seguintes pontos:

- Tartaglia e a resolução da equação do tipo $x^3 + px = q$
- Cardano, a *Ars Magna* e a equação $x^3 - 15x = 4$
- Bombelli admite $\sqrt{-1}$ como sendo um número para dar seguimento à resolução do problema de Cardano
- Euler utiliza pela primeira vez i para representar $\sqrt{-1}$
- Gauss introduz a representação geométrica dos complexos.

Embora a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ tenha sido mencionada não aparece a fórmula que conduziu a esse resultado.

No capítulo seguinte, que trata dos polinômios e equações polinomiais, as relações de Girard entre coeficientes e raízes para equações de 2º, 3º e n-ésimo grau são enunciadas.

7.5 Matemática: Novo Olhar

Esta obra de Joamir Souza, especialista em estatística e licenciado em matemática pela Universidade Estadual de Londrina, é dividida em três volumes e publicada pela Editora FTD.

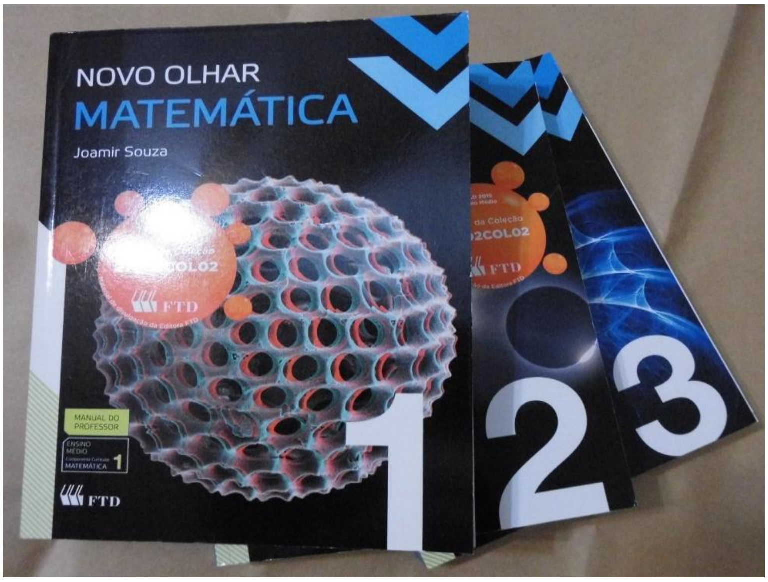


Figura 11: Coleção Novo Olhar Matemática

No capítulo 7, que aborda os números complexos, o autor inicia destacando que a fórmula resolutiva de equações cúbicas de Tartaglia-Cardano foi uma das maiores contribuições ao desenvolvimento da álgebra e promoveu discussões que culminaram no desenvolvimento dos números complexos.

Em seguida, cita um trecho de Boyer onde esclarece que sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos.

Por fim, o autor fala da equação $x^3 = 15x + 4$ e sua solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ sem, contudo, exprimir a fórmula que leva a esse resultado.

Fica claro que o discurso do autor visa justificar a necessidade de um novo tipo de número a fim de resolver o problema decorrente da resolução das equações cúbicas.

No capítulo 8, polinômios e equações algébricas, páginas 275 e 276, o autor enuncia as relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações algébricas de grau 2, 3 e *n.* Na página 281 ensina como pesquisar raízes racionais de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, resolve dois exemplos e propõe atividades envolvendo, entre outras, equações cúbicas.

Na página seguinte a seção “Explorando o Tema” expõe um texto a respeito das equações cúbicas e quárticas onde ratifica que a descoberta da resolução das equações cúbicas e quárticas foi provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI e elucida como os fatos parecem ter acontecido resumindo a história já contada no segundo capítulo desse trabalho.

Ao final apresenta nossa já conhecida fórmula da seguinte forma:

"A resolução da equação cúbica $x^3 + mx = n$, enunciada por Cardano em seu trabalho Ars Magna, pode ser representada, em notação atual, da seguinte maneira:

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Para exemplificar, usaremos essa fórmula para resolver a equação $x^3 + 6x = 20$. Por exemplo, temos:

$$\mathrm{x} = \sqrt[3]{\frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$$

Resolvendo essa expressão, obtemos $x = 2$, que é uma das raízes da equação."

A seguir o autor faz cinco perguntas, sendo as três primeiras sobre a história da resolução das equações cúbicas e quárticas e nas duas ultimas pede para utilizar a fórmula dada para encontrar uma das raízes da equação $x^3 - 9x - 28 = 0$ e as três raízes do polinômio $p(x) = x^3 + 3x + 14$.

7.6 Matemática Paiva

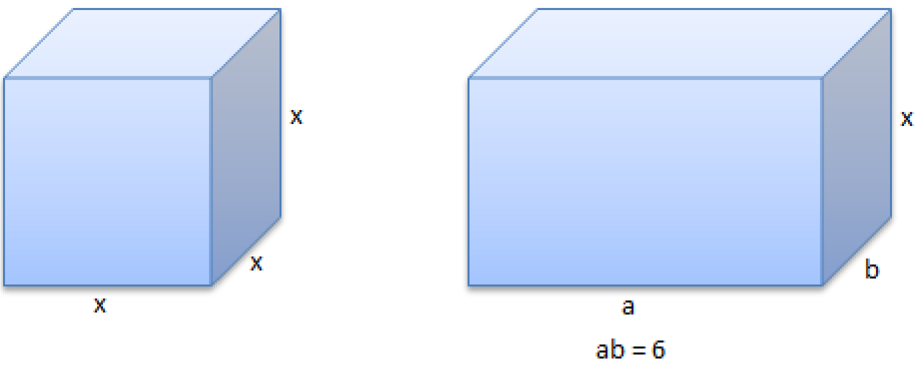
A coleção Matemática Paiva publicada pela Editora Moderna é composta por três volumes de autoria de Manuel Paiva, Licenciado em matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André e mestre em educação pela PUC-SP.

Figura 12: Coleção Matemática Paiva

Na abertura do capítulo 7 do volume 3, que trata dos números complexos, o autor propõe o seguinte problema:

“Um engenheiro projetou duas caixas d’água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 6 m² de área da base. O volume da caixa cúbica deve ter 4 m³ a menos que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica?

Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica, temos:



Assim, o valor de x é a raiz da equação $x^3 = 6x - 4$*, que é equivalente a* $x^3 - 6x + 4 = 0$*."*

A seguir sugere a resolução pelo método deTartaglia que, segundo ele, consiste em substituir x por $u - v$, de modo que o produto uv seja igual à terça parte do coeficiente de x, ou seja, $uv = -\frac{6}{3} = -2$. Assim:

$$\begin{cases} (u-v)^3 - 6(u-v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

Faz a substituição $uv = -2$ na primeira equação, obtendo:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 \\ v = -\dfrac{2}{u} \end{cases}$$

E então substitui a segunda igualdade na primeira chegando a equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$ que fazendo a substituição $u^3 = t$ fornece a equação do 2º grau $t^2 + 4t + 8 = 0$.

Neste momento o autor utiliza o resultado

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

e o fato de que

$$2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$$

para gerar a seguinte discussão: embora não exista no conjunto dos números reais o número $\sqrt{-16}$ a equação dada possui solução real, logo, seria possível admitir que exista o número $\sqrt{-16}$?

Por fim, o autor faz referência a Cardano, Bombelli e suas contribuições para a concepção do conjunto dos números complexos.

No capítulo 9, Equações Polinomiais, subcapítulo 7, o autor enuncia as relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações algébricas de grau 2, 3 e *n.*

7.7 Conclusão da Análise

Após analisar as coleções verificamos que todas abordam a resolução das equações cúbicas apenas superficialmente, não como fim, mas como tema introdutor ao estudo dos números complexos ou a título de curiosidade histórica. Quanto à resolução das equações quárticas, constatamos total inexistência da dedução de um método geral.

Contudo, destacamos o livro *Matemática Paiva* por utilizar uma abordagem capaz de instigar a curiosidade do leitor ao partir de um problema geométrico, que é modelado por uma equação cúbica, e através de passos algébricos deduzir a resposta. Este parece ser o caminho mais natural para conduzir o aluno, público alvo do livro didático, à compreensão da dedução da fórmula que resolve a equação cúbica.

Acreditamos que uma proposta que dedique mais atenção ao estudo dessas equações pode ser interessante no sentido que dá oportunidade para resgatar conceitos importantes e colocar em uso ferramental matemático como produtos notáveis e relações entre coeficientes e raízes, tal proposta também atende ao disposto nos PCNEM para ensino da matemática quando afirma que:

> O Currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio histórica que está na origem desses temas.

Antes de iniciar o estudo dos números complexos pode ser um bom momento para apresentar uma dedução para a fórmula de Cardano-Tartaglia, alguns exercícios e uma breve discussão sobre o caso irredutível, demonstrando que sempre que a equação cúbica tiver três soluções reais distintas o discriminante será negativo. Já com o conhecimento dos números complexos podemos retomar o estudo das equações cúbicas abordando também as relações entre as raízes e o sinal do discriminante e deduzir a solução geral das equações quárticas com exemplos resolvidos e atividades que viabilizem a compreensão do tema.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de equações por radicais constituiu uma das grandes buscas da humanidade na produção matemática e, em particular, a resolução das cúbicas e quárticas estabelece uma divisão entre o que é possível resolver com técnicas algébricas elementares e o que não é, encerrando assim uma fase do estudo da álgebra. Não obstante à relevância do tema os livros didáticos adotados no Ensino Médio atualmente dedicam, no máximo, uma pequena menção ao assunto deixando duas opções para o docente, evitar a matéria ou buscar suporte em outras fontes bibliográficas.

Sabemos que a resolução dessas equações tem sua curva de aprendizagem assim como qualquer outro assunto na matemática, não acreditamos que seja fácil para o jovem aluno dividir pela primeira vez ou resolver uma equação quadrática no nono ano, mesmo assim ensinamos, porque sabemos que é importante. Se em algum momento chegou-se a conclusão que não é importante para o aluno do ensino básico compreender a resolução das equações cúbicas e quárticas esperamos ter provado, ao longo deste trabalho, que tal conclusão está equivocada ou não teremos atingido nosso objetivo.

O trabalho de campo feito com alunos da rede pública de ensino foi de fundamental importância para mensurar o grau de dificuldade da implementação desse projeto. Os obstáculos são muitos admitimos, mas garantimos também que não é impossível. Para abraçar essa proposta foi preciso em primeiro lugar abandonar certos dogmas como currículo já sobrecarregado, inexistência de aplicação ou utilidade prática, falta de tempo ou incentivo e inabilidade do aluno.

Ao longo da execução deste trabalho nos fizemos algumas perguntas que talvez o colega professor se tenha feito enquanto o examinava tais como “onde encontrar tempo para mais um assunto?", "como essa aprendizagem será útil para nossos alunos?" e "esse conteúdo está ao alcance da compreensão deles?". Garantimos que se seguimos em frente não foi movidos pela necessidade de completar uma simples exigência pedagógica mas por acreditar plenamente na viabilidade da execução dessa proposta, temos a convicção de que mesmo dispondo de pouco tempo e recursos é possível que o professor reserve um aparte para, ao menos, introduzir o assunto e quem sabe suscitar em seus alunos o espírito investigativo inerente ao matemático capaz de lavá-los a buscar mais conhecimento sobre o assunto e aprofundarem-se nas urdiduras da álgebra.

Ao aluno do ensino básico que se deparou com este estudo seja por acidente ou na procura por um material para auxiliá-lo em um trabalho escolar esperamos que tenha sido útil, acessível e esclarecedor. Desejamos especialmente que não se contente com as linhas acima, que após esgotá-las busque mais conhecimento, que não se subestime e se aventure nas veredas da matemática e que possam se inspirar no jovem matemático autor de uma das soluções apresentadas nesta dissertação.

Por fim, mas não menos importante, ao pesquisador da área de educação matemática que se interessou por este estudo, deixamos nosso relato onde admitimos não ter chegado nem próximo de esgotar o assunto e nem poderíamos, pois acreditamos que o conhecimento matemático, como o universo, está em constante expansão. O concitamos a prosseguir neste mister, dando também sua contribuição seja para ratificar, complementar ou divergir de nossas conclusões, pois acreditamos que esse é o combustível que alimenta a produção matemática e nos orgulha saber que contribuímos de alguma forma nesta infinita construção.

9. REFERÊNCIAS

[1] A. GARCIA e Y. Lequain. Elementos de Álgebra. Coleção Projeto Euclides. Sociedade Brasileira de Matemática;

[2] ANDRADE, J. F. S. Tópicos Especiais em Álgebra. Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática;

[3] BOYER, Carl Benjamin. História da matemática. 11. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[4] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

[5] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: ed. UNICAMP, 1995.

[6] GARBI, Gilberto G. O Romance das Equações Algébricas. 4. ed. rev. e ampl. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[7] GUEDJ, Denis. O teorema do papagaio. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

[8] HEFEZ e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;

[9] IEZZI, Gelson, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Matemática ciência e aplicações – 6ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2013

[10] LEONARDO, Fábio Martins de (Ed.). Conexões com a Matemática. São Paulo: Moderna, 2014.

[11] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; E. WAGNER e A. C. MORGADO. A Matemática do Ensino Médio V.3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[12] LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[13] NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.1 Números Reais. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[14] NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar V.6 Polinômios. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

[15] NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. Coleção Iniciação científica. Sociedade Brasileira de Matemática;

[16] PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. São Paulo: Moderna, 2009.

[17] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;

[18] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática: Ensino Médio. – 8 ed. – São Paulo: Saraiva, 2013.

[19] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. – 2 ed. – São Paulo: FTD, 2013.