



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL-PROFMAT

# Curvas Parametrizadas, Ciclóides, Experimentos e Aplicações

Por:

**Allisson Wesley do Nascimento Venceslau**

Mestrado Profissional de Matemática - São Cristóvão - SE

São Cristóvão, 2015.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL-PROFMAT

# Curvas Parametrizadas, Ciclóides, Experimentos e Aplicações

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**Allisson Wesley do Nascimento Venceslau**

**Orientador: Doutora Débora Lopes da Silva**

São Cristovão, 2015.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

V451c Venceslau, Allisson Wesley do Nascimento  
Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações  
/ Allisson Wesley do Nascimento Venceslau; orientadora Débora  
Lopes da Silva. – São Cristóvão, 2015.  
53 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
- PROFMAT) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Geometria. 3. Curvas  
geométricas. I. Silva, Débora Lopes da, orient. II. Título.

CDU: 514



*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## **Curvas Parametrizadas, Ciclóides, Experimentos e Aplicações**

*por*

Allisson Wesley do Nascimento Venceslau

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Débora Lopes da Silva- UFS  
Orientadora

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos- UFS  
Primeiro Examinador

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga- UFS  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Maio de 2015.

## Dedicatória

A minha família e em especial a minha esposa Sheyla, minha filha Yasmin e meu grande amigo Antônio José.

## Agradecimentos

- A Deus por ter me abençoado a alcançar esta grande vitória;
- De uma forma muito especial, a minha mulher, Sheyla, pelo amor, incentivo, por ser guerreira e estar sempre ao meu lado;
- A minha filha Yasmin pelo amor, ela é uma dádiva de Deus;
- Aos meus familiares, minha mãe Ivânia, meu irmão Igo, meus sogros Clodoveu e Luzinete;
- Ao meu grande amigo Prof Antônio José por todos os seus ensinamentos, ele será sempre para mim o modelo de professor que desejo ser;
- A professora Débora Lopes pela paciência e confiança;
- Aos meus amigos de turma, em especial Sheyla, Rigel e Epifânio;
- Aos professores, que compuseram a banca examinadora;
- Aos professores da equipe PROFMAT com os quais convivi, que com empenho e dedicação, compartilharam seus conhecimentos.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar encaminhamentos metodológicos capazes de tornar o ensino da matemática mais prazeroso e interativo. Neste sentido o trabalho que será desenvolvido aqui abordará o estudo de algumas curvas especiais como a Curva de Agnesi, a Epiciclóide, a Hipociclóide e destacará com maior profundidade o estudo da Ciclóide abordando a suas principais propriedades com ênfase na Tautócrona e Braquistócrona. Todo trabalho realizado neste estudo mostra que a matemática pode assumir um papel importante na sala de aula, ajudando a desenvolver a aprendizagem de outras disciplinas graças às práticas experimentais aliadas ao desenvolvimento de conteúdos interdisciplinares. Na literatura fala-se muito em interdisciplinaridade, mas na maioria dos textos não se mostra como é possível fazê-la, ou seja, pouco se faz realmente. Este trabalho descreve o conteúdo e mostra como realizar atividades integradoras que venham a melhorar o ensino de outras ciências e permite desenvolver outras habilidades (além do raciocínio matemático) no aluno. Este trabalho não se encerra aqui, ele é o primeiro passo para outros estudos que melhorem o ensino da matemática, em particular da geometria. Introduzir o conteúdo de forma que a curiosidade do aluno seja instigada já é um grande passo no ensino dessa disciplina. É este o objetivo deste trabalho, despertar a curiosidade dos envolvidos através das práticas experimentais sem tão pouco deixar de lado a parte teórica.

**Palavras chaves:** Curva de Agnesi, Epiciclóide, Hipociclóide, Ciclóide, Tautócrona, Braquistócrona.

## Abstract

This work aims at presenting methodological referrals able to make mathematics teaching more enjoyable and interactive. In this sense, the work that will be developed here will address the study of some special curves like the Agnesi Curve, the Epicycloid, the Hypocycloid and will focus in greater depth the study of Cycloid addressing its main properties with an emphasis on Tautochrone and Brachistochrone. All work performed in this study shows that mathematics can play an important role in the classroom, helping to develop the learning of other disciplines thanks to allied experimental practices to the development of interdisciplinary content. In the literature there is much talk on interdisciplinarity, but most texts do not show how it can be done, that is, little is done really. This paper describes the content and shows how to perform integrative activities that will improve the teaching of other sciences and allows students to develop other skills (in addition to mathematical reasoning). This work does not end here, it is the first step to other studies that improve the teaching of mathematics, especially geometry. Introduce the content so that the curiosity of the student is instigated is a big step in the teaching of this discipline. This is the objective of this work, arouse the curiosity of those involved through experimental practices without so little put aside theoretical part.

**keywords:** Agnesi Curve, Epicycloid, Hypocycloid, Cycloid, Tautochrone, Brachistochrone.

# Lista de Figuras

2.1	Construção da curva de Agnesi . . . . .	23
2.2	Curva de Agnesi . . . . .	24
2.3	Desenvolvimento da Ciclóide . . . . .	25
2.4	Ciclóide . . . . .	26
2.5	Partícula deslizando sobre a ciclóide invertida . . . . .	28
2.6	Desenho de um relógio de pêndulo por <i>Huygens</i> em seu livro <i>Horologium</i> . . . . .	31
2.7	Pêndulo cicloidal segundo a construção de <i>Huygens</i> . . . . .	32
2.8	Trajetória da partícula . . . . .	32
2.9	$P$ descreve a epicyclóide . . . . .	36
2.10	$P$ continuando o movimento . . . . .	36
2.11	Epicyclóide com $R = 2r$ . . . . .	38
2.12	Cardióide $R = r$ . . . . .	39
2.13	$P$ descrevendo uma hipociclóide. . . . .	40
2.14	$P$ continuando o movimento. . . . .	41
2.15	Hipociclóide ( $R = 4r$ ), também chamada de Astróide. . . . .	42
3.1	Placa de isopor fixada em uma parede para evitar que se desloque durante a construção da ciclóide . . . . .	44
3.2	Construção do traçado da ciclóide com o uso de isopor, cano PVC e lápis para quadro branco . . . . .	45
3.3	Ciclóide com as paredes laterais que são necessárias para evitar que a esfera caia	46
3.4	Ciclóide pronta já com uma superfície de fita adesiva para reduzir as trepidações e o atrito com a esfera . . . . .	46
3.5	Verificação experimental do problema da tautócrona . . . . .	47
3.6	Verificação experimental do problema da braquistócrona . . . . .	48
3.7	Curva Ciclóide . . . . .	50
3.8	Half de madeira. . . . .	51

3.9	Half de concreto. . . . .	51
3.10	Parte externa do Museu. . . . .	52
3.11	Parte interna do Museu. . . . .	52

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>1 Enfoque Histórico</b>	<b>16</b>
1.1 Gilles Persone de Roberval (1602-1675)	16
1.2 Evangelista Torricelli (1608-1647)	17
1.3 Blaise Pascal (1623-1662)	18
1.4 Christiaan Huygens (1629-1695)	19
1.5 Família Bernoulli	20
1.5.1 Jakob Bernoulli (1654-1705)	20
1.5.2 Johann Bernoulli (1667-1748)	21
<b>2 Parametrização de algumas curvas planas</b>	<b>23</b>
2.1 Curva de Agnesi	23
2.2 Ciclóides	25
2.2.1 Propriedades da cicloide	26
2.2.2 O problema da Braquistócrona	32
2.3 Epicicloide	35
2.4 Hipocicloide	39
<b>3 Construção da Cicloide e Aplicações</b>	<b>43</b>
3.1 Proposta experimental para ser desenvolvida em sala de aula	43
3.1.1 Construção da Cicloide	44
3.1.2 Verificação das Propriedades da Cicloide	47
3.2 Uma Proposta Interdisciplinar no Ensino Médio	48
3.3 Uma Proposta Interdisciplinar na Graduação	49
3.4 Aplicações da Cicloide	51
3.4.1 Skate Vertical Half Pipe	51

3.4.2	Arquitetura . . . . .	52
	<b>Considerações Finais</b>	<b>53</b>
	<b>Referências</b>	<b>55</b>

# Introdução

Uma das tarefas mais difíceis no ensino da matemática é ilustrar experimentalmente os resultados de um teorema porque algumas vezes as conclusões são tão abstratas que é preciso muita habilidade para mostrar na prática. Mas quando se consegue visualizar com algum experimento essas conclusões imediatamente despertam em todo o público muita atenção. Apesar da sua grande importância, ainda hoje a abordagem de conteúdos matemáticos podem ser considerados subdimensionados na maioria das escolas, devendo-se então, questionar: Como é possível ampliar a importância dada à matemática nos ambientes escolares? O que se deve fazer para resgatar o ensino dessa ciência entre os discentes, favorecendo a sua aprendizagem conceitual e o desenvolvimento de habilidades e competências específicas? Este trabalho visa, em parte, responder a essas questões, sinalizando encaminhamentos metodológicos capazes de tornar o ensino da matemática mais prazeroso e interativo. Neste sentido o trabalho que será desenvolvido aqui abordará o estudo de algumas curvas especiais e destacará com maior profundidade o estudo da cicloide abordando a suas principais propriedades.

A matemática constitui uma construção humana historicamente situada, tendo seus contornos delineados pelos contextos sociais, econômicos e culturais de cada época. Nessa perspectiva, a abordagem histórica da produção dos conhecimentos científicos e, em particular, a reprodução de experimentos históricos relevantes constituem recursos que podem contribuir grandemente para que os estudantes tenham o seu interesse despertado para a construção de novos conhecimentos e, além disso, compreendam alguns aspectos inerentes às ciências, como o seu caráter empírico que deve ser abordado de modo contextualizado (SANTOS,2012). Nos últimos anos houve uma disseminação dos computadores nas escolas, mas infelizmente não há o uso correto dessas tecnologias porque o professor não foi orientado corretamente na Universidade a usar softwares específicos com a finalidade de ensinar matemática. Naturalmente essas ferramentas não têm o objetivo que deveria ter. Infelizmente se dá pouca ênfase aos experimentos e a maioria dos conceitos matemáticos que são explorados em sala de aula parecem distantes da realidade do discente.

Este trabalho tem como objetivo incentivar alunos de graduação, professores e interessados a desenvolver experimentos simples com alunos do Ensino Fundamental e Médio nas áreas das Ciências Exatas e apresentar em eventos, como feira de ciências, por exemplo. Será abordada uma sugestão experimental na área da geometria, desde a construção do experimento com materiais recicláveis até a sua execução. Os futuros professores de matemática e profissionais interessados podem desenvolver esse experimento na sua instituição e testar nas escolas de Ensino Fundamental e Médio.

Alguns questionamentos podem ser feitos em relação ao trabalho. O que queremos com essa proposta? Queremos envolver alunos, professores e outros profissionais no desenvolvimento deste trabalho com o intuito de despertar em todos participantes o gosto no aprendizado da matemática. O que motiva este trabalho? A geometria não é bem compreendida no Ensino Fundamental e Médio e por isso a matemática é uma das disciplinas mais odiadas em todos os níveis. Como tornar a geometria mais atrativa em todos os níveis de conhecimento? Segundo Comenius, por volta de 1650, o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo. Locke, em 1680, dizia da necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento. Cerca de cem anos depois, Rousseau recomendou a experiência direta sobre os objetos, visando à aprendizagem. Pestalozzi e Froebel, por volta de 1800, também reconheceram que o ensino deveria começar pelo concreto; na mesma época, Herbart defendeu que a aprendizagem começa pelo campo sensorial. Pelos idos de 1900, Dewey concordava com o pensamento de Comenius, ressaltando a importância da experiência direta como fator básico para construção do conhecimento, e Poincaré recomendava o uso de imagens vivas para clarear verdades matemáticas. Mais recentemente, Montessori legou-nos inúmeros exemplos de materiais didáticos e atividades de ensino que valorizam a aprendizagem através dos sentidos, especialmente do tátil, enquanto Piaget deixou claro que o conhecimento se dá pela ação repetida sobre o objeto; Vygotsky, na Rússia, e Bruner, nos Estados Unidos, concordaram que as experiências no mundo real constituem o caminho para a criança e o adolescente construírem seu raciocínio (LORENZATO,2006).

Em cada educador, a seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem. Em termos de sala de aula, durante a ação pedagógica, esse reconhecimento evidencia o fundamental papel que o material didático pode desempenhar na aprendizagem e que as dinâmicas utilizando objetos concretos contribuem para a aproximação dos alunos com a disciplina. Educar matematicamente, permite que o aluno raciocine, descubra e interaja

criticamente com colegas e professores. A proposta é a de instigar o aprender da matemática não como um ato mecânico de decorar e aplicar fórmulas, mas compreender que ela está na vida, muito antes de ser aprendida ou apresentada no espaço escolarizado. A experimentação é o melhor caminho para começar.

# Capítulo 1

## Enfoque Histórico

Estudaremos nesse trabalho as curvas cicloidais: cicloide, epicycloide e hypocycloide. Entretanto para dar sustentação nas afirmações que serão feitas, principalmente sobre a cicloide, inicialmente vamos conhecer um pouco de sua história e dos célebres matemáticos que contribuíram para seu desenvolvimento, nos atentaremos no problema proposto por Johann Bernoulli, que no século XVII desafiou as mentes mais brilhantes do seu tempo.

### 1.1 Gilles Persone de Roberval (1602-1675)

A designação para a cátedra de Ramus no Collège Royal, que Gilles Persone de Roberval manteve durante cerca de quarenta anos, era determinada a cada três anos, com base em um exame competitivo, cujas questões eram postas pelos detentores. Em 1634, Roberval ganhou o concurso, provavelmente porque havia desenvolvido um método de indivisíveis semelhante ao de Cavalieri; não revelando seu método a outros, conseguiu conservar sua posição na cátedra até sua morte, em 1675. Mas isso significou que ele não recebia reconhecimento pela maior parte de suas descobertas e que ele se envolvia em numerosas querelas a respeito de prioridades. A mais amarga dessas controvérsias foi referente à *cicloide*, curva a que veio a ser aplicada a frase "a Helena dos geometras", por causa da frequência com que provocou querelas durante o século dezessete. Mersenne, em 1615, tinha chamado a atenção dos matemáticos para a *cicloide*, tendo talvez ouvido falar da curva por meio de Galileu; em 1628, quando Roberval chegou a Paris, Mersenne propôs ao jovem que estudasse a curva. Em 1634, Roberval foi capaz de demonstrar que a área sob um arco da curva é exatamente três vezes a área do círculo gerador. Em 1638, ele tinha descoberto como traçar a tangente à curva em qualquer ponto (problema resolvido mais ou menos ao mesmo tempo também por Fermat e Descartes) e tinha achado o volume gerado quando a área sob um arco gira em torno da reta de base. Mais tarde ainda,

achou os volumes gerados por revolução da área em torno do eixo de simetria ou em torno da tangente no vértice. Roberval não publicou suas descobertas relativas à *ciclóide* (que ele chamou de trocoide, da palavra grega para roda), porque ele pode ter desejado propor questões semelhantes para possíveis candidatos a sua cátedra (BOYER,2012 p.251).

## 1.2 Evangelista Torricelli (1608-1647)

O ano de 1647, em que Cavalieri morreu, foi também o da morte de outro discípulo de Galileu, o jovem Evangelista Torricelli. Mas, em muitos aspectos, Torricelli representava a nova geração de matemáticos que estava construindo rapidamente sobre as fundações infinitesimais que Cavalieri tinha esboçado de modo bem vago. Se Torricelli não tivesse morrido tão prematuramente, a Itália poderia ter continuado a partilhar a liderança nos novos desenvolvimentos; porém a França é que veio a ser o incontestável centro da matemática durante o segundo terço do século dezessete. Torricelli estudou matemática em diversas instituições jesuítas antes de estudar com Benedetto Castelli, de quem foi secretário por seis anos. Ele se interessou pela *ciclóide*, talvez por sugestão de Marin Mersenne, talvez por meio de Galileu, a quem Torricelli, como Mersenne, admirava grandemente. Em 1643, Torricelli enviou a Mersenne a quadratura da *ciclóide*, e, em 1644, publicou uma obra intitulada *De dimensione parabolae*, em que incluiu a quadratura da *ciclóide*. Torricelli não mencionou o fato de Gilles Persone de Roberval ter chegado a esses resultados antes dele, e por isso, em 1646, Roberval escreveu uma carta acusando Torricelli de plágio, dele e de Fermat (sobre máximos e mínimos). É claro agora que a prioridade na descoberta cabe a Roberval, mas a prioridade na publicação é de Torricelli, que provavelmente redescobriu a área e a tangente independentemente. Roberval usara o método dos indivisíveis para o problema da área; Torricelli deu duas quadraturas, uma usando o método de Cavalieri dos indivisíveis e a outra pelo antigo método de exaustão. Para achar a tangente à curva, ele empregou uma composição de movimentos, remanescente da tangente de Arquimedes a sua espiral.

A ideia da composição de movimentos não era original nem de Torricelli nem de Roberval, pois Arquimedes, Galileu, Descartes e outros a tinham usado. Torricelli poderia ter derivado a ideia de qualquer desses homens. Tanto Torricelli quanto Roberval aplicaram o método cinemático também em outras curvas.

Torricelli foi um dos mais promissores matemáticos do século dezessete - frequentemente chamado o século do gênio. Mersenne tornara a obra de Fermat, Descartes e Roberval conhecida na Itália, tanto por sua correspondência com Galileu a partir de 1635 como durante uma peregrinação a Roma em 1644. Torricelli logo dominou os novos métodos, embora sempre desse preferência ao tratamento geométrico em relação ao algébrico. A breve associação de Torricelli com o idoso e cego Galileu, de 1641 a 1642, tinha despertado no jovem também o interesse pela física, e hoje ele é provavelmente mais lembrado como inventor do barômetro do que como matemático. Se tivesse vivido mais, é possível que se tornasse o inventor do cálculo; mas uma doença cruel pôs fim à sua vida prematuramente, em Florença, poucos dias antes de completar trinta e nove anos (BOYER,2012 p.236).

### 1.3 Blaise Pascal (1623-1662)

Na noite de 23 de novembro de 1654, das 22 h e 30 min até cerca de 24 h e 30 min, Pascal experimentou um êxtase religioso que fez com que abandonasse a ciência e a matemática pela teologia. O resultado foi que escreveu *Lettres provinciales e Pensées*; só por um breve período, de 1658 a 1659, é que Pascal voltou à matemática. Uma noite em 1658, uma dor de dentes ou mal-estar impediu-o de dormir e, para se distrair da dor, ele voltou-se para o estudo da *ciclóide*. Milagrosamente, a dor melhorou, e Pascal tomou isso como um sinal de Deus de que o estudo da matemática não lhe desagradava. Tendo achado certas áreas, volumes e centros de gravidade associados à *ciclóide*, Pascal propôs meia dúzia de tais questões aos matemáticos do seu tempo, oferecendo um primeiro e um segundo prêmio para as soluções - e indicando Roberval como um dos Juízes. A publicidade e o senso de tempo eram tão fracos então que só duas coleções de soluções foram apresentadas e continham pelo menos alguns erros de cálculo. Pascal, por isso, não concedeu nenhum prêmio; mas publicou suas próprias soluções, com outros resultados, tudo precedido por uma *Histoire de la roulette* em uma série de *Lettres de A. Dettonville*. As questões do concurso e as *Lettres de A. Dettonville* focalizaram o interesse sobre a *ciclóide*, mas despertaram um "vespeiro" de controvérsias. Os dois finalistas, Antoine de Lalouvière e John Wallis, ambos matemáticos competentes, se aborreceram por lhes serem negados os prêmios; e os matemáticos italianos ficaram indignados, porque a "*História da Ciclóide*" de Pascal praticamente desconhecia os méritos de Torricelli, sendo concedida a prioridade na descoberta apenas a Roberval.

Muito do material contido nas *Lettres de A. Dettonville*, como a igualdade entre os arcos de espirais e parábolas, bem como as questões do concurso sobre a *ciclóide* eram conhecidos por Roberval e Torricelli; mas parte disso aparecia impresso pela primeira vez. Se Pascal não tivesse morrido, como Torricelli, logo depois de completar trinta e nove anos, ou se tivesse se dedicado mais constantemente à matemática, ou se fosse mais atraído por métodos algorítmicos que pela geometria e pela especulação sobre a filosofia da matemática, há pouca dúvida de que poderia ter-se antecipado a Newton e Leibniz em sua maior descoberta (BOYER,2012 p.256).

## 1.4 Christiaan Huygens (1629-1695)

Christiaan Huygens, membro de uma proeminente família holandesa e filho do diplomata Constantin Huygens, foi encorajado em suas atividades matemáticas, quando jovem, tanto por Descartes quanto por Mersenne, que eram associados de seu pai. Christiaan se tornou um cientista de reputação internacional, que é lembrado pelo princípio que tem seu nome na teoria ondulatória da luz, pela observação dos anéis de Saturno e pela real invenção do relógio de pêndulo, sua descoberta matemática mais importante. Huygens sabia que as oscilações de um pêndulo simples não são estritamente isócronas, mas dependem da amplitude da oscilação. Em outras palavras, se um objeto é colocado sobre o lado de uma superfície hemisférica lisa, e é largado, o tempo que leva para chegar ao ponto mais baixo será quase, mas não exatamente, independente da altura em que foi largado. Aconteceu que Huygens inventou o relógio de pêndulo quase ao mesmo tempo em que se realizava o concurso de Pascal sobre a *ciclóide*, em 1658, e ocorreu-lhe considerar o que aconteceria se a superfície hemisférica fosse substituída por outra, cuja secção fosse um arco de *ciclóide* invertido. Huygens ficou satisfeitíssimo ao observar que em tal caso, o objeto chegará ao ponto mais baixo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja a altura sobre a superfície interna em que o objeto seja colocado na partida. A *ciclóide* é verdadeiramente uma tautócrona; isto é, sobre um arco de *ciclóide* invertido, um objeto escorregará de um ponto qualquer até o fundo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja o ponto de partida. Huygens fez alguns relógios de pêndulo assim, mas verificou que, ao funcionar, eles não eram tão precisos quanto os que dependiam das oscilações de um pêndulo ordinário simples, que são praticamente isócronos para oscilações muito pequenas (BOYER,2012 p.260).

## 1.5 Família Bernoulli

Na história da ciência, principalmente na matemática esta família ocupa um lugar ímpar pois foi a família que produziu o maior número de matemáticos célebres. Em três gerações teve doze matemáticos, que trabalharam com aplicações do cálculo à mecânica e a astronomia, desempenhando um papel fundamental no desenvolvimento da matemática moderna europeia.

Neste trabalho estudaremos um pouco sobre dois dos membros desta célebre família: são os irmãos suíços, Jacques Bernoulli e Jean Bernoulli, frequentemente conhecidos também pela forma anglicizada de seus nomes, James e John (ou pelos equivalentes alemães, Jakob e Johann). Jakob Bernoulli estudou teologia e Johann Bernoulli estudou medicina por insistência do pai, ambos, porém encontraram sua verdadeira vocação quando os primeiros artigos de Leibniz, entre 1684 e 1686, foram publicados na *Acta Eruditorum*. Eles aprenderam o "novo cálculo" e iniciaram ampla correspondência com Leibniz tornando-se seus mais importantes discípulos. Os dois estavam entre os primeiros e perceberam a potência espantosa do cálculo e aplicaram esse instrumento em vários problemas.

### 1.5.1 Jakob Bernoulli (1654-1705)

Jakob Bernoulli foi professor de matemática em Basileia desde 1687 até sua morte. Ele logo se interessou por séries infinitas, e em seu primeiro artigo sobre o assunto, em 1689, ele apresentou a bem conhecida "desigualdade de Bernoulli"  $(1+x)^n > 1+nx$ , onde  $x$  é real e  $x > -1$  e  $x \neq 0$  e  $n$  é um inteiro maior que 1. A ele é também frequentemente atribuída a demonstração de que a série harmônica é divergente, e que a soma dos inversos dos quadrados é convergente, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) \text{ é divergente, e}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) \text{ é convergente}$$

Correspondendo-se frequentemente com outros matemáticos de seu tempo, Jakob Bernoulli estava a par dos problemas populares, muitos dos quais ele resolveu independentemente. Entre esses estavam os de achar as equações da catenária, da tratiz e da isócrona. Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático a utilizar a palavra "integral" com sentido ligado ao cálculo na resolução do problema da curva isócrona publicada na *Acta eruditorum* em 1690. No campo das equações diferenciais, Jakob Bernoulli contribuiu com o estudo da "equação de Bernoulli"  $y' + P(x)y =$

$Q(x)y^n$  que ele, Leibniz e Johann Bernoulli resolveram - Johann por redução a uma equação linear mediante a substituição  $z = y^{1-n}$ . Leibniz e os Bernoulli estavam procurando uma solução para o problema da braquistócrona (curva de descida mais rápida). Johann achava primeiro uma demonstração incorreta de que a curva é uma *ciclóide*, mas depois de desafiar o irmão a descobrir a curva procurada, Jakob demonstrou corretamente que a curva é uma *ciclóide*. Dentre suas contribuições à matemática, destacam-se também a "distribuição de Bernoulli" e o "teorema de Bernoulli" princípio básico da teoria de probabilidades; "os números de Bernoulli" que aparecem na expansão da função tangente em série de potências; "os polinômios de Bernoulli" de interesse da teoria dos números e a "*lemniscata* de Bernoulli" dos cursos iniciais de cálculo. Jakob Bernoulli tinha fascinação por curvas, mas a curva que mais lhe prendeu a imaginação foi a espiral logarítmica (BOYER, 2012 p.293).

### 1.5.2 Johann Bernoulli (1667-1748)

Johann Bernoulli nasceu em Basileia em 1667, filho de Nicolaus Bernoulli, um boticário, e sua esposa, Margaretha Schönauer, onde começou a estudar medicina na Universidade de Basel. Seu pai desejava que seus estudos o tornasse apto para que ele assumisse o comércio de especiarias da família, mas Johann Bernoulli não gostava de negócios e convenceu o pai a deixá-lo estudar medicina. No entanto, Johann Bernoulli, também não se interessou pelos estudos de medicina e começou a estudar matemática com seu irmão mais velho Jacques. Ao longo da educação de Johann Bernoulli na Universidade de Basel, os irmãos Bernoulli trabalharam juntos e gastaram muito do seu tempo a estudar o recém-descoberto cálculo infinitesimal. Eles estavam entre os primeiros matemáticos, não só por estudar e compreender o cálculo, mas por aplicá-lo a vários problemas. Um destes problemas, que ganharam maior notoriedade foi a descoberta de que a *ciclóide* é solução para o problema da braquistócrona. Em junho de 1696, Bernoulli desafiou as mentes mais brilhantes de sua época a resolver um problema que ele apresentou na revista científica *Acta Eruditorum* (revista dos eruditos), que foi uma revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz, um problema que ele já havia resolvido. Eis a motivação de Bernoulli aos gênios de seu tempo:

*"Eu, Johann Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores ma-*

*temáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, eu o declararei publicamente merecedor de elogio"*(ACTA ERUDITORUM,1699).

O desafio proposto por Bernoulli tratava-se de encontrar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória. Esse desafio foi encaminhado por carta às mentes mais brilhantes do mundo da época dando-lhes um prazo de seis meses, depois prorrogados por mais quatro meses para que o problema fosse solucionado. Além do próprio Johann Bernoulli, outros cinco matemáticos apresentaram soluções originais para o problema: Sir Isaac Newton (1643 - 1727); Jacques Bernoulli (1654 - 1705); Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716); Ehrenfried Walther Von Tschirnhaus (1651 - 1708) e Guillaume de L'Hôpital (1661 - 1704). Todos esses matemáticos por meios diferentes chegaram à mesma resposta, que a curva de menor tempo ou Braquistócrona deveria ser uma *ciclóide*.

Johann Bernoulli foi professor em Groningen, na Holanda, em 1695 e depois da morte de Jakob, ele o sucedeu em Basileia, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Teve três filhos: Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Johann II (1710-1790) e todos se tornaram matemáticos e cientistas renomados no século XVIII. Escreveu sobre múltiplos tópicos como fenômenos ópticos relacionados com reflexão e refração, determinação das trajetórias ortogonais de uma família de curvas, retificação de curvas e quadraturas de áreas por meio de séries, trigonometria analítica, o cálculo exponencial e muitos outros assuntos.

# Capítulo 2

## Parametrização de algumas curvas planas

Neste capítulo apresentamos a *Curva de Agnesi* e o estudo de curvas obtidas pela trajetória de pontos fixos em circunferências que rolam, sem deslizar, sobre uma reta (A *Ciclóide*) ou sobre uma outra circunferência (*Epicyclóide* e *Hipociclóide*). Faremos ainda referência às propriedades da ciclóide com ênfase na *tautócrona* e na *braquistócrona*.

### 2.1 Curva de Agnesi

Seja  $\lambda$  um círculo de raio  $r$  tangente a duas retas paralelas  $s_1$  e  $s_2$ . Sejam  $O$  e  $A$  os pontos de tangência de  $\lambda$  com  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente. Do ponto  $O$  tracemos uma semirreta em direção à reta  $s_2$ . Sejam  $R$  e  $Q$  os pontos de interseção desta semirreta com  $\lambda$  e  $s_2$ , respectivamente. Tracemos o segmento  $\overline{QD}$  perpendicular a  $s_1$ , com  $D \in s_1$ , e a reta  $s$  paralela a  $s_1$  que passa por  $R$  (veja a Figura 2.1 ).

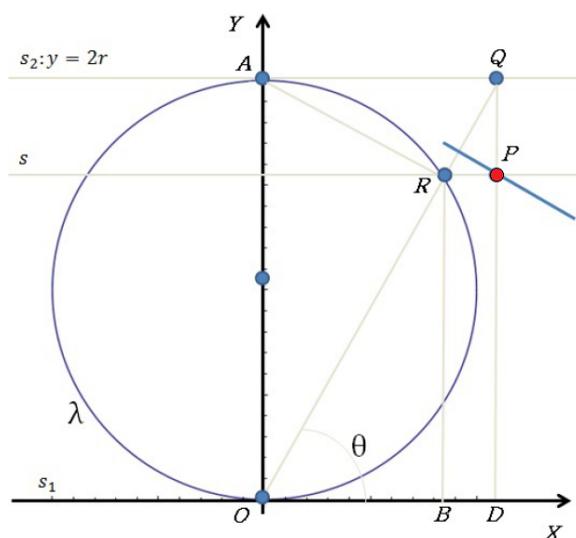


Figura 2.1: Construção da curva de Agnesi

Seja  $P$  o ponto de interseção da reta  $s$  com o segmento  $\overline{QD}$ . Os pontos  $P$  assim obtidos, traçando todas as semirretas de origem  $O$  que intersectam  $\lambda$ , descrevem a **curva de Agnesi**. Observe que o ângulo que estas semirretas fazem com o semieixo  $OX$  positivo varia no intervalo  $(0, \pi)$ . Para obtermos as equações paramétricas da curva de Agnesi, vamos admitir que  $O$  seja a origem do sistema de coordenadas,  $s_1$  seja o eixo  $OX$  e  $s_2 : y = 2r (\iff A = (0, 2r))$  (veja a Figura 2.1).

O nosso problema consiste em determinar as coordenadas dos pontos  $P = (x, y)$  da curva em função de apenas um parâmetro.

Denotando por  $\theta$  a medida do ângulo  $\widehat{DOQ}$ , obtemos:

$$|OD| = |OQ|\cos\theta \quad e \quad |RB| = |OR|\sen\theta$$

onde  $B$  é a projeção ortogonal de  $R$  sobre o eixo  $OX$ . Note que

$$x = |OD| \quad e \quad y = |RB|, \tag{2.1}$$

pois  $x$  e  $\cos\theta$  têm o mesmo sinal no intervalo  $(0, \pi)$ .

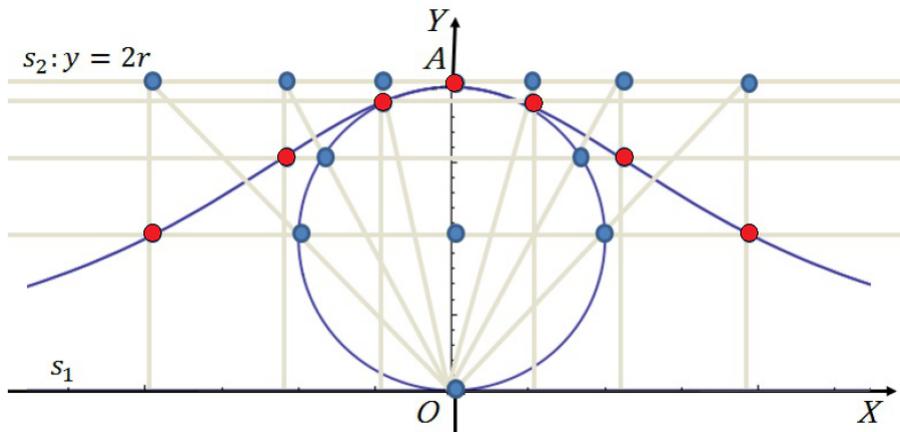


Figura 2.2: Curva de Agnesi

Como o triângulo  $ORA$  (inscrito num semicírculo de  $\lambda$ ) é retângulo em  $R$ , a medida do ângulo  $\widehat{OAR}$  é  $\theta$  e portanto,  $|OR| = 2r\sen\theta$ . E, sendo o triângulo  $ODQ$  retângulo em  $D$  e  $|QD| = 2r$ , temos  $|OQ| = \frac{2r}{\sen\theta}$ . Substituindo estas relações em (2.1), segue que:

$$x = \frac{2r\cos\theta}{\sen\theta} = 2r\cot\theta \quad e \quad y = 2r\sen^2\theta, \quad \theta \in (0, \pi), \tag{2.2}$$

são as equações paramétricas da curva de Agnesi (veja a Figura 2.2).

## 2.2 Ciclóides

A **ciclóide** é a curva traçada por uma partícula qualquer, fixa numa circunferência que rola sem deslizar, ao longo de uma reta. Esta curva ficou conhecida por "*Helena de geometria*" uma vez que, tal como a "*Helena de Tróia*" foi cobiçada e disputada por vários homens, também a ciclóide gerou várias disputas na comunidade matemática. Joahnn Bernoulli chegou mesmo a chamar-lhe "*curva fatídica do século XVII*", (ACTA ERUDITORUM, 1699).

### Estudo da curva

Sejam  $\lambda$  um círculo de raio  $r$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto de  $\lambda$ . A ciclóide é a curva descrita pelo ponto  $P$  quando  $\lambda$  rola sobre a reta  $s$  sem deslizar. Para obtermos as equações paramétricas da ciclóide, vamos supor que a reta  $s$  é o eixo  $OX$  e o círculo  $\lambda$  inicia o movimento com centro no ponto  $(0, r)$ . Além disso, vamos supor que o ponto  $P$  coincide com a origem  $O$  no início do movimento.

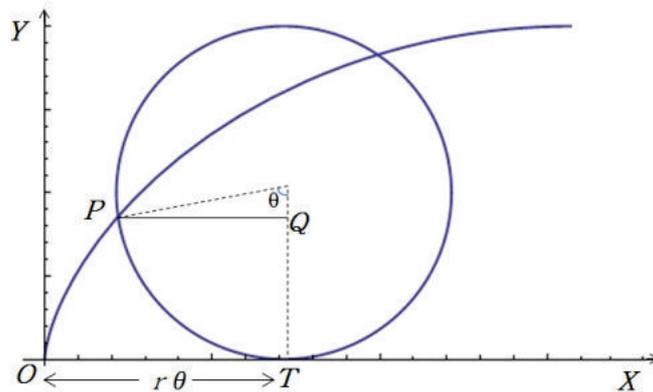


Figura 2.3: Desenvolvimento da Ciclóide

Seja  $\theta$  o parâmetro da circunferência. Após girar  $\theta$  radianos, no sentido horário, a distância que ele girou a partir da origem será

$$|OT| = r\theta \text{ (arco } \widehat{PT})$$

O centro do círculo será  $C(r\theta, r)$ . Se  $P(x, y)$  é o ponto do círculo, então

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r\text{sen}\theta = r(\theta - \text{sen}\theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\text{cos}\theta = r(1 - \text{cos}\theta)$$

Assim, as coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $OXY$  são:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = r(1 - \operatorname{cos}\theta) \end{cases}; \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.3)$$

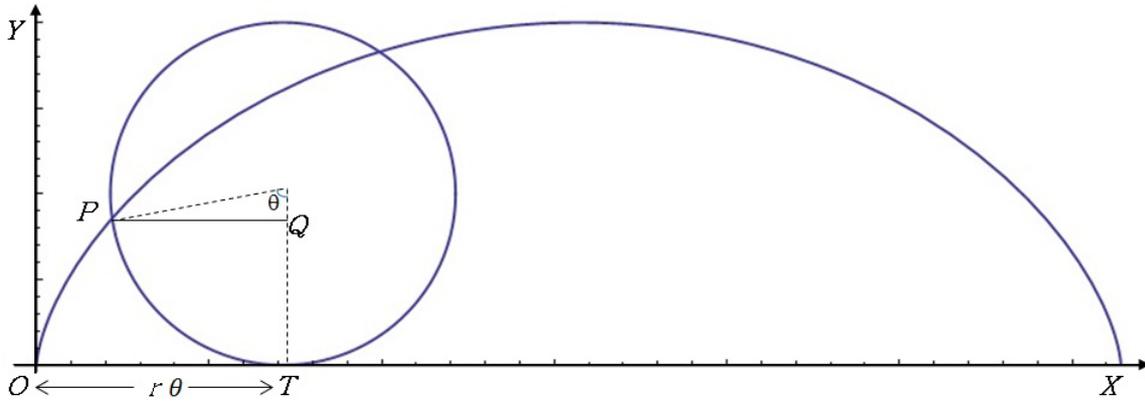


Figura 2.4: Ciclóide

### 2.2.1 Propriedades da cicloide

**Proposição 1:** O comprimento  $S$  de um arco de cicloide é  $S = 8r$ .

**Demonstração:** Seja  $P(x, y)$  um ponto arbitrário da circunferência que gera a cicloide. Tendo em conta (2.3), temos:

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \operatorname{cos}\theta) \quad e \quad \frac{dy}{d\theta} = r\operatorname{sen}\theta \quad (2.4)$$

Pela definição de comprimento do arco de uma curva parametrizada e por (2.4), temos que:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[r(1 - \operatorname{cos}\theta)]^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(2 - 2\operatorname{cos}\theta)} d\theta \\ &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \operatorname{cos}\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \iff \sqrt{1 - \cos\theta} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \quad (2.6)$$

Então, usando (2.6) em (2.5), obtemos:

$$S = 2r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} d\theta = 4r \left[ -\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4r(-\cos\pi + \cos 0) = 4r \cdot 2 = 8r$$

Notemos que o comprimento do arco de uma cicloide,  $8r$ , é maior que o comprimento da circunferência que a gera, nomeadamente,  $2\pi r$ .

**Proposição 2:** A área da região delimitada pela reta  $y = 0$  e por um arco de uma cicloide é o triplo da área da região delimitada pela circunferência que a gera, ou seja,  $A = 3\pi r^2$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $y(\theta) = r(1 - \cos\theta)$  e  $\frac{dx}{d\theta} = r - r\cos\theta$ .

Daí, temos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} y(\theta) \cdot x'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [r(1 - \cos\theta)] \cdot (r - r\cos\theta) d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta \\ &= r^2 \left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad (2.8)$$

Então, usando (2.8) em (2.7), obtemos:

$$A = r^2 [\theta]_0^{2\pi} - 2r^2 [\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} + \pi r^2 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

Esta propriedade foi inicialmente conjecturada por *Galileu* que comparou a massa de uma cicloide com a massa do círculo que a gera. Cortou em madeira moldes da cicloide e do círculo que a gera e pesou esses mesmos moldes com uma balança. Apesar de concluir que a razão entre eles era aproximadamente de três unidades de medida, não demonstrou esse mesmo resultado. Foram *Roberval* na França e *Torricelli* na Itália que anos mais tarde apresentaram a demonstração correta.

**Proposição 3:** A cicloide é uma curva tautócrona (*tautos*=mesmo, *chronos*=tempo).

**Demonstração:** Consideremos uma cicloide invertida, de modo que possa deslizar, sobre a mesma, uma partícula de massa  $m$ , inicialmente em repouso, que parte de um ponto  $A(x(\theta_a), y(\theta_a))$  para o ponto mais baixo da curva com  $\theta_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , como ilustra a figura seguinte.

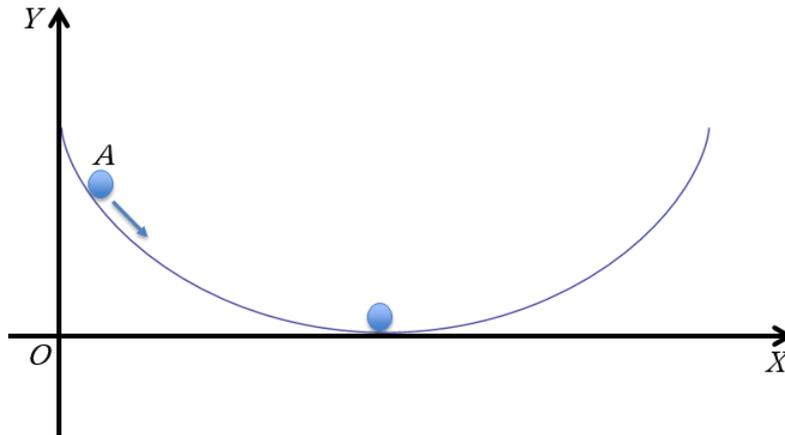


Figura 2.5: Partícula deslizando sobre a cicloide invertida

Devemos mostrar que independente do ponto escolhido da cicloide o tempo que a partícula leva para chegar no ponto mais baixo da curva é constante e igual para todos os pontos escolhidos. Vamos calcular o tempo que a partícula demora a efetuar esse deslocamento. Recorrendo ao princípio da conservação de energia sabemos que ao longo da trajetória a energia mecânica da partícula é constante, tendo-se:

$$E_{\text{mecânica}} = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}}$$

No ponto inicial  $A$  a energia cinética da partícula é nula e a energia potencial gravitacional vale  $mgy(x)$  de forma que podemos escrever a energia mecânica inicial como:

$$E_{\text{mecânica}(inicial)} = mgy(x)$$

Por outro lado ao atingir o ponto mais baixo da curva, a energia potencial gravitacional da partícula é nula e sua energia cinética é máxima e vale  $\frac{1}{2}mv^2$ . Assim sua energia mecânica vale:

$$E_{\text{mecânica}(final)} = \frac{1}{2}mv^2$$

Utilizando o princípio de conservação da energia mecânica, podemos igualar essas duas últimas expressões:

$$mgy(x) = \frac{1}{2}mv^2$$

sendo  $v$  a velocidade da partícula no ponto mais baixo da curva e  $P(x(\theta), y(\theta))$  um ponto genérico da curva de parâmetro  $\theta$ , com  $\theta \in [\theta_a, \pi]$  e  $h = y(\theta) - y(\theta_a)$ . Daí, temos:

$$v^2 = \frac{2mgh}{m} = 2gh$$

donde

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gh} \\ &= \sqrt{2g(y(\theta) - y(\theta_a))} \\ &= \sqrt{2g(r - r\cos\theta - r + r\cos\theta_a)} \\ &= \sqrt{2gr(\cos\theta_a - \cos\theta)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sabemos que  $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} \Rightarrow \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ , então utilizando essa relação em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gr \left( 2\cos^2\frac{\theta_a}{2} - 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 1 \right)} \\ &= \sqrt{4gr \left( \cos^2\frac{\theta_a}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \right)} \\ &= 2\sqrt{gr \left( \cos^2\frac{\theta_a}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por outro lado, sendo  $S$  a função comprimento do arco percorrido pela partícula do ponto  $A$  para o ponto mais baixo da curva, então  $v = \frac{ds}{dt}$ . Vamos procurar agora a expressão que define  $ds$ . Já vimos por (2.5) e (2.6) que  $S = 2r \int_0^{\theta} \text{sen}\frac{\theta}{2} d\theta$ , daí, temos:

$$\frac{ds}{d\theta} = 2r \text{sen}\frac{\theta}{2} \iff ds = 2r \text{sen}\frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.11)$$

Como  $v = \frac{ds}{dt} \iff dt = \frac{ds}{v}$ , então de (2.10) e (2.11) obtemos:

$$dt = \frac{2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta}{2\sqrt{gr \left( \cos^2 \frac{\theta_a}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}} \quad (2.12)$$

Integrando ambos os membros em (2.12), obtemos:

$$\begin{aligned} t &= \int_{\theta_a}^{\pi} \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_a}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_a}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_a}{2}}}} d\theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vamos fazer uma mudança de variável em (2.13), consideremos:

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2}} = u \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2}} d\theta = du \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = -2 \cos \frac{\theta_a}{2} du \quad (2.14)$$

Note que:

$$\theta = \theta_a \Rightarrow u = 1 \quad e \quad \theta = \pi \Rightarrow u = 0$$

Substituindo (2.14) em (2.13), temos:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 \frac{-2 \cos \frac{\theta_a}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2} \sqrt{1 - u^2}} du \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot [\operatorname{arcsenu}]_0^1 \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} (\operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen} 0) \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \end{aligned}$$

Portanto, o tempo que a partícula demora a deslocar-se do ponto  $A$  para o ponto mínimo da curva, com  $\theta_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  é constante, não dependendo do seu ponto de partida. Assim, a cicloide é tautócrona.

Veamos um exemplo onde o estudo desta propriedade foi utilizado.

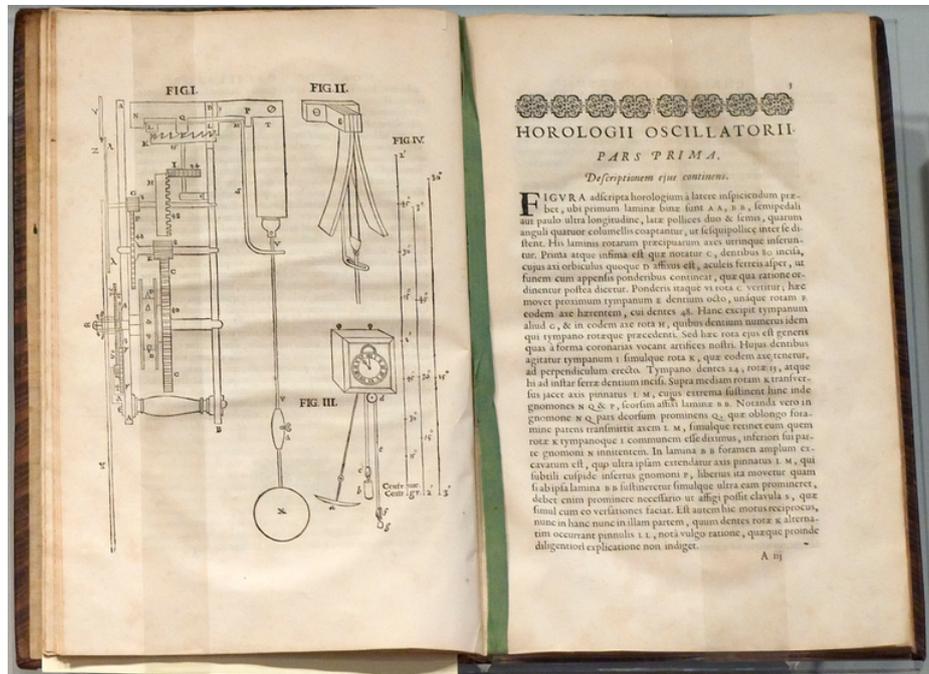


Figura 2.6: Desenho de um relógio de pêndulo por *Huygens* em seu livro *Horologium*.

*Christiann Huygens* dedicou-se ao estudo dos relógios de pêndulo, nos quais, a variação da amplitude das oscilações conduz a medições incorretas do tempo. Ao demonstrar que a cicloide é tautócrona, chegou à conclusão que, se no extremo inferior de um pêndulo se fixar um corpo que descreva uma trajetória cicloidal, o período de oscilação não se altera, ou seja, não depende da amplitude. Em seguida, procurou então descobrir que tipo de obstáculo deveria colocar na parte lateral do pêndulo de modo que o corpo a fixar no extremo inferior deste descrevesse a trajetória cicloidal. Por mera intuição, *Christiann Huygens* começou por pensar em obstáculos igualmente cicloidais, tendo obtido corretamente o resultado pretendido, isto é, quando os obstáculos laterais de um pêndulo têm a forma de cicloides, o corpo fixo no extremo inferior do mesmo pêndulo descreve uma trajetória cicloidal e, conseqüentemente, a variação da amplitude não altera o período de oscilação. *Huygens* mostrou que, se a circunferência dos quais os dois contornos cicloidais tem um raio que é precisamente, um quarto do comprimento do cabo de suspensão do pêndulo ( $l = 4a$ ), então o arco que a massa do pêndulo descreve é a cicloide com um círculo gerador de mesmo raio, um.

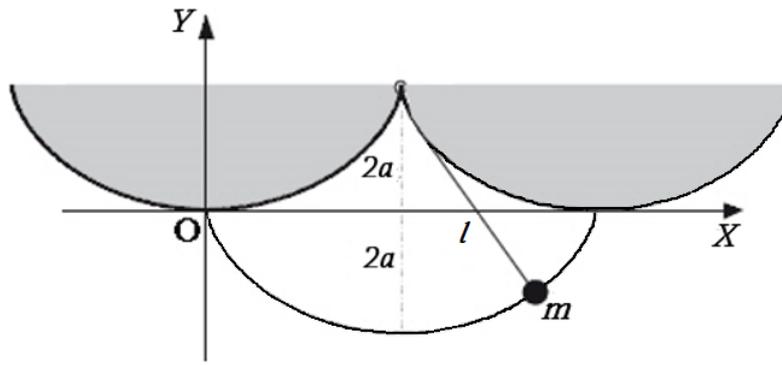


Figura 2.7: Pêndulo cicloidal segundo a construção de *Huygens*.

### 2.2.2 O problema da Braquistócrona

A cicloide é uma curva com propriedades geométricas particulares que intrigou a comunidade científica de matemáticos na altura em que foi descoberta, suscitando várias disputas entre os seus elementos. A descoberta da cicloide permitiu dar resposta a outros dois problemas da física, nomeadamente, o da curva braquistócrona e o da curva tautócrona, razão pela qual o estudo deste capítulo engloba as três curvas referidas.

**Definição:** Uma curva é braquistócrona (*brakhisto*=mais ligeiro, *chronos*=tempo) se o caminho que une dois pontos da mesma é o mais rápido, mesmo não sendo o mais curto. Assim, se deixarmos cair uma partícula de um ponto *A* numa curva braquistócrona, esta chega a um ponto *B* da mesma mais rapidamente do que seguindo qualquer outro caminho, mesmo que este seja retilíneo (caminho mais curto no plano, entre duas partículas).

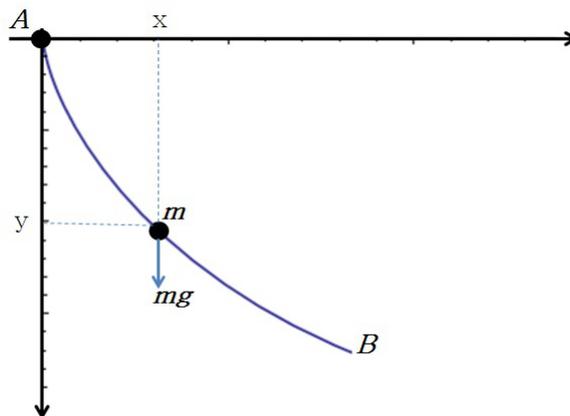


Figura 2.8: Trajetória da partícula

Vamos então procurar as equações que definem a braquistócrona.

O que se deve fazer na solução deste problema é encontrar o tempo que a partícula de massa *m* leva para se deslocar sobre uma curva qualquer entre dois pontos *A* e *B* e em seguida

procurar a curva, entre todas, que minimize o tempo de deslocamento entre esses pontos.

Orientando  $y$  para baixo (para ficar no mesmo sentido da força da gravidade) e o ponto  $A$  será tomado na origem do sistema. Na física sabe-se que o trabalho realizado pela força resultante é igual a variação da energia cinética.

$$W = \Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - 0$$

Este trabalho é igual ao realizado pela força peso, ou seja:

$$W = mgh = mgy \Rightarrow mgy = \frac{mv^2}{2}$$

$$\text{com } v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

O comprimento do arco percorrido pela partícula é dado por:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Daí, obtemos

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}, \text{ onde } t \text{ é o tempo}$$

Note que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

Conclui-se que o tempo total para sair do ponto  $A(0, 0)$  e chegar ao ponto  $B(x_0, y_0)$  é dado por:

$$T(x_0) = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx$$

O nosso problema resume-se a encontrar uma função  $y = y(x)$  que minimize o tempo acima. Pelo cálculo variacional devemos encontrar  $y = y(x)$  que satisfaça a seguinte equação de Euler-Lagrange (RAPOSO, 2013)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \tag{2.15}$$

com

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} \quad (2.16)$$

De (2.15) e (2.16), obtemos:

$$\frac{d}{dx}[(1 + (y')^2) \cdot y] = 0 \quad (2.17)$$

sendo

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(x_0) = y_0$$

Assim, integrando (2.17) em relação a  $x$ , obtemos:

$$(1 + (y')^2) \cdot y = k^2 \quad (2.18)$$

Em que  $k^2$  é uma constante positiva a ser determinada. Daí, resolvendo (2.18), obtemos:

$$dy = \sqrt{\frac{k^2 - y}{y}} dx \quad (2.19)$$

(escolhe-se a raiz quadrada positiva porque  $y > 0$ )

Fazendo

$$y = k^2 \text{sen}^2 \rho \Rightarrow dy = 2k^2 \text{sen} \rho \cdot \text{cos} \rho d\rho$$

e substituindo em (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned} 2k^2 \text{sen} \rho \cdot \text{cos} \rho d\rho &= \sqrt{\frac{k^2 - k^2 \text{sen}^2 \rho}{k^2 \text{sen}^2 \rho}} dx \\ &= \sqrt{\frac{k^2 (1 - \text{sen}^2 \rho)}{k^2 \text{sen}^2 \rho}} dx \\ &= \sqrt{\frac{\text{cos}^2 \rho}{\text{sen}^2 \rho}} dx \\ &= \frac{\text{cos} \rho}{\text{sen} \rho} dx \end{aligned}$$

Daí,

$$dx = 2k^2 \operatorname{sen}^2 \rho d\rho \quad (2.20)$$

Integrando (2.20) ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} \int dx &= 2k^2 \int \operatorname{sen}^2 \rho d\rho \\ x &= 2k^2 \left[ \frac{1}{2} (\rho - \operatorname{sen} \rho \cos \rho) \right] \\ &= k^2 (\rho - \operatorname{sen} \rho \cos \rho) \\ &= k^2 \left( \rho - \frac{\operatorname{sen} 2\rho}{2} \right) \\ &= k^2 \left( \rho - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\rho \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Fazendo  $2\rho = \theta \Rightarrow \rho = \frac{\theta}{2}$  e substituindo em (2.21), obtemos:

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad (2.22)$$

Como

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 \rho$$

Logo

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore y = \frac{k^2}{2} (1 - \cos \theta) \quad (2.23)$$

As equações (2.22) e (2.23) são as equações paramétricas da solução da equação (2.18).

Portanto o gráfico das equações (2.22) e (2.23) é uma *ciclóide*.

## 2.3 Epiciclóide

A **epiciclóide** é a curva obtida pela trajetória que um ponto de uma circunferência, quando esta roda, sem deslizar, no exterior de uma outra circunferência fixa, à qual é tangente. O nome desta curva deriva do grego *epi* que significa sobre.

## Estudo da curva

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  círculos de raios  $R$  e  $r$ , respectivamente, que se tocam apenas em um ponto  $P$  e os pontos de  $\lambda_2$ , diferentes de  $P$ , estão no exterior de  $\lambda_1$ .

A epiciclóide é o lugar geométrico descrito pelo ponto  $P$  quando  $\lambda_2$  rola sobre  $\lambda_1$  no sentido positivo sem deslizar.

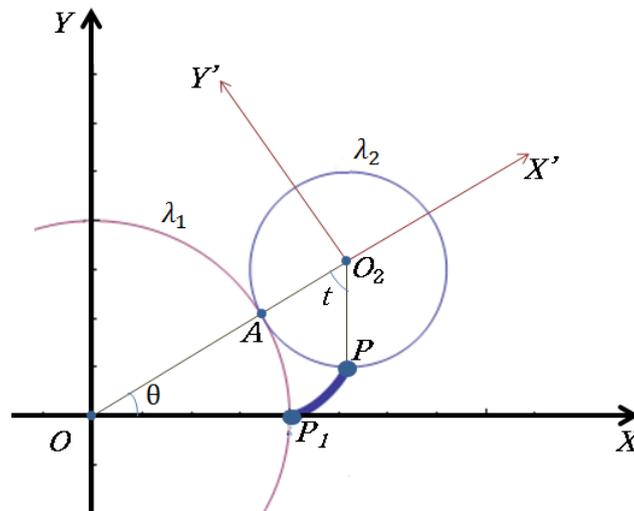


Figura 2.9: P descreve a epiciclóide

Para obtermos as equações paramétricas da epiciclóide, vamos supor que  $\lambda_1$  tem centro na origem,  $\lambda_2$  tem centro no ponto  $(R + r, 0)$  e  $P_1 = (R, 0)$  é a posição inicial do ponto  $P$ .

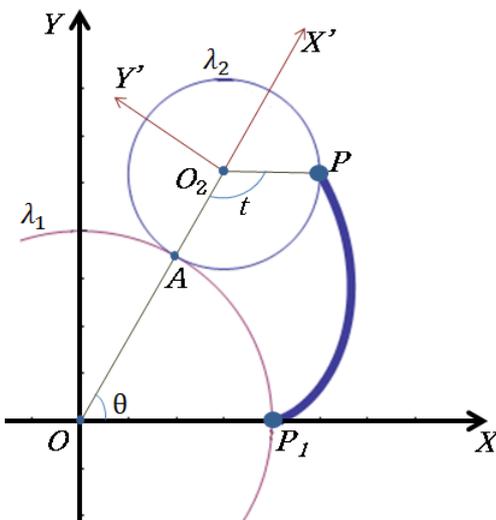


Figura 2.10: P continuando o movimento

Considere o ponto  $P = (x, y)$  da epiciclóide obtido quando  $\lambda_2$  rola um ângulo de medida  $\theta$  sobre  $\lambda_1$ ,  $A$  o ponto de contato entre os círculos e  $O_2$  é o centro de  $\lambda_2$ . Note que, enquanto

$\lambda_2$  rola sobre  $\lambda_1$ , o centro  $O_2$  de  $\lambda_2$  descreve um círculo centrado em  $O$  e de raio  $R + r$ .

Como  $\theta$  é a medida do ângulo que o semieixo  $OX$  positivo faz com a semirreta  $\overrightarrow{OO_2}$  no sentido positivo, e  $|OO_2| = |OA| + |AO_2| = R + r$ , temos que  $O_2 = ((R + r)\cos\theta, (R + r)\sen\theta)$ .

Seja o sistema  $O_2X'Y'$  obtido por uma rotação positiva de ângulo  $\theta$  do sistema  $OXY$ , seguida de uma translação dos eixos que leva o ponto  $O = (0, 0)$  no ponto  $O_2 = (x_0, y_0)$ , onde  $x_0 = (R + r)\cos\theta$  e  $y_0 = (R + r)\sen\theta$  são as coordenadas de  $O_2$  no sistema  $OXY$ .

Se  $t$  é a medida do ângulo que a semirreta  $\overrightarrow{O_2\tilde{O}}$  faz com a semirreta  $\overrightarrow{O_2\tilde{P}}$  no sentido positivo, então  $\pi + t$  é o ângulo que o semieixo  $O_2X'$  positivo faz com a semirreta  $\overrightarrow{O_2\tilde{P}}$  no sentido positivo.

Assim,  $x' = r\cos(\pi + t) = -r\cos t$  e  $y' = r\sen(\pi + t) = -r\sen t$  são as coordenadas de  $P$  no sistema  $O_2X'Y'$ .

Logo, pelas seguintes equações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sen\theta + x_0 \\ y = x'\sen\theta + y'\cos\theta + y_0 \end{cases},$$

onde  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas de  $P$  no sistema  $OX'Y'$ . Então,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = -r\cos t\cos\theta + r\sen t\sen\theta + (R + r)\cos\theta \\ y = -r\cos t\sen\theta - r\sen t\cos\theta + (R + r)\sen\theta \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = (R + r)\cos\theta - r(\cos t\cos\theta - \sen t\sen\theta) \\ y = (R + r)\sen\theta - r(\cos t\sen\theta + \sen t\cos\theta) \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = (R + r)\cos\theta - r\cos(\theta + t) \\ y = (R + r)\sen\theta - r\sen(\theta + t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Observe que o comprimento do arco de  $A$  a  $P$  ao longo de  $\lambda_2$  é igual ao comprimento do arco de  $P_1$  a  $A$  sobre o círculo  $\lambda_1$  (lembre que  $\lambda_2$  rola sobre  $\lambda_1$  sem deslizar). Como a medida do primeiro arco é  $rt$  e a medida do segundo é  $R\theta$ , temos  $rt = R\theta \iff t = \frac{R\theta}{r}$ .

Portanto, substituindo  $t = \frac{R\theta}{r}$  em (2.24), obtemos as seguintes equações paramétricas da epiciclóide em função apenas do parâmetro  $\theta$ :

$$\begin{cases} x = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R + r)\sen\theta - r\sen\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right) \end{cases}; \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.25)$$

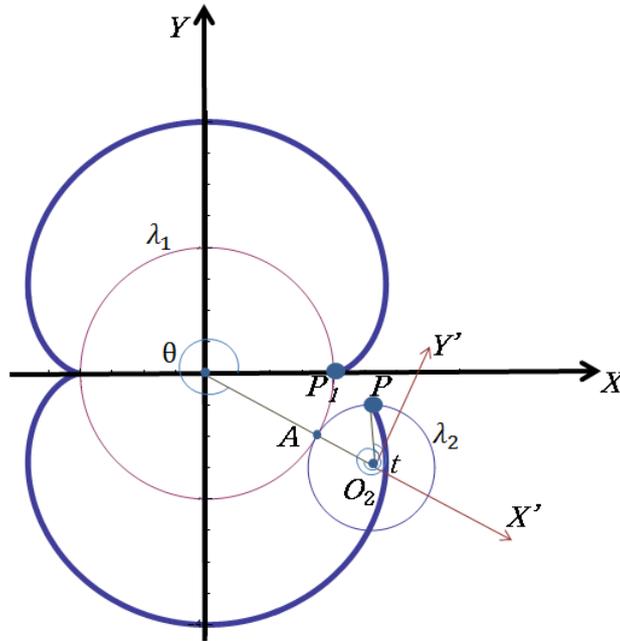


Figura 2.11: Epiciclóide com  $R = 2r$

Note que, quando o círculo  $\lambda_2$  percorre um arco do círculo  $\lambda_1$  de comprimento igual a  $2\pi r$ , o ponto  $P$  volta a tocar  $\lambda_1$ . Portanto, se  $\frac{R}{r} = n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , o ponto  $P$  toca  $\lambda_1$   $n$  vezes até coincidir com sua posição inicial na  $n$ -ésima vez. Para verificar isto, basta observar que o comprimento de  $\lambda_1$  contém  $n$  vezes o comprimento de  $\lambda_2$ , pois  $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$ .

O número de cúspides de uma epiciclóide depende da razão entre  $R$  e  $r$ , raios da circunferência fixa e a que roda, respectivamente. Por exemplo, se  $\frac{R}{r} = 2$  (veja a Figura 2.11) então a curva tem 2 cúspides e é obtida após duas voltas completas da circunferência que roda sem deslizar em torno da circunferência fixa ou, dito de outro modo, após o ponto  $P(x, y)$  tocar 2 vezes na circunferência fixa.

Particularizando os valores de  $R$  e  $r$ , obtemos vários tipos de epiciclóides.

A **Cardióide** é um caso particular de epiciclóide, ela é obtida quando  $\frac{R}{r} = 1$  (tem uma cúspide), ou seja, quando  $r = R$  ( $\iff \theta = t$ ). Então, por (2.25), as equações paramétricas da cardióide são:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta - r\cos(2\theta) \\ y = 2r\sin\theta - r\sin(2\theta) \end{cases}; \theta \in [0, 2\pi].$$

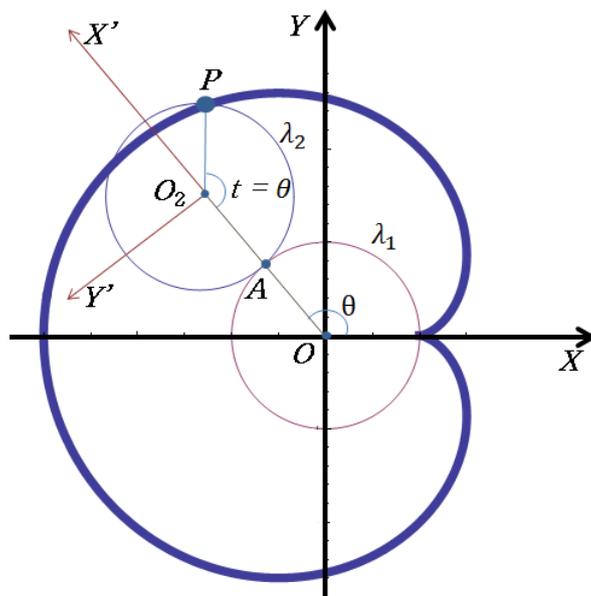


Figura 2.12: Cardióide  $R = r$

## 2.4 Hipociclóide

A **hipociclóide** é a curva obtida pela trajetória que um ponto de uma circunferência, quando esta roda, sem deslizar, no interior de uma outra circunferência fixa, à qual é tangente. A circunferência fixa também é conhecida por circunferência diretora ou diretriz. O nome desta curva deriva do grego *hypo* que significa sob.

### Estudo da curva

Consideremos dois círculos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de raios  $R$  e  $r$ , respectivamente, tais que:

- $r < R$ ,
- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  se tocam apenas em um ponto  $P$ ,
- os pontos de  $\lambda_2$ , diferentes de  $P$ , estão no interior de  $\lambda_1$ .

A hipociclóide é o lugar geométrico descrito pelo ponto  $P$ , quando  $\lambda_2$  rola sobre  $\lambda_1$ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por  $\lambda_1$ .

Para obtermos as equações paramétricas da hipociclóide, vamos admitir  $\lambda_1$  com centro na origem,  $\lambda_2$  iniciando o movimento com centro no ponto  $(R - r, 0)$  e  $P$  com posição inicial  $P_1 = (R, 0)$ .

Determinemos as coordenadas do ponto  $P = (x, y)$  em termos de um parâmetro, quando  $\lambda_2$  rola sobre  $\lambda_1$  sem deslizar.

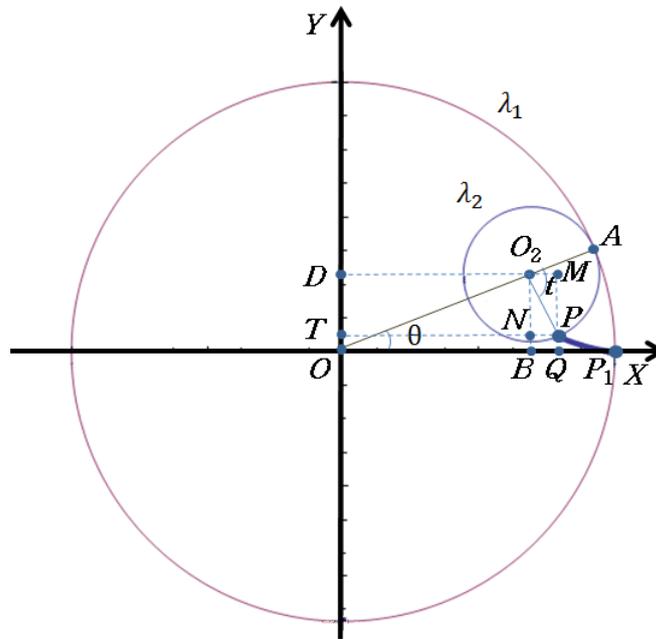


Figura 2.13:  $P$  descrevendo uma hipociclóide.

Acompanhe, na Figura 2.13, a designação dos seguintes elementos:

- $A$  é o ponto de  $\lambda_2$  que toca  $\lambda_1$ ;
- $O_2$  o centro de  $\lambda_2$ ;
- $B$  e  $D$  as projeções de  $O_2$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ ;
- $Q = (x, 0)$  e  $T = (0, y)$  as projeções de  $P$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ ;
- $M$  e  $N$  as projeções de  $P$  sobre  $O_2D$  e  $O_2B$ , respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que  $B$  está entre  $O$  e  $Q$ , mostrado na Figura 2.13, temos:

$$x = |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|, \quad (2.26)$$

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \quad (2.27)$$

Sabendo que o centro de  $\lambda_2$  descreve um círculo de raio  $R - r$ , e sendo  $\theta$  a medida do ângulo do semi-eixo  $OX$  positivo para  $OO_2$ , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R - r)\cos\theta \quad \text{e} \quad |OD| = (R - r)\sen\theta.$$

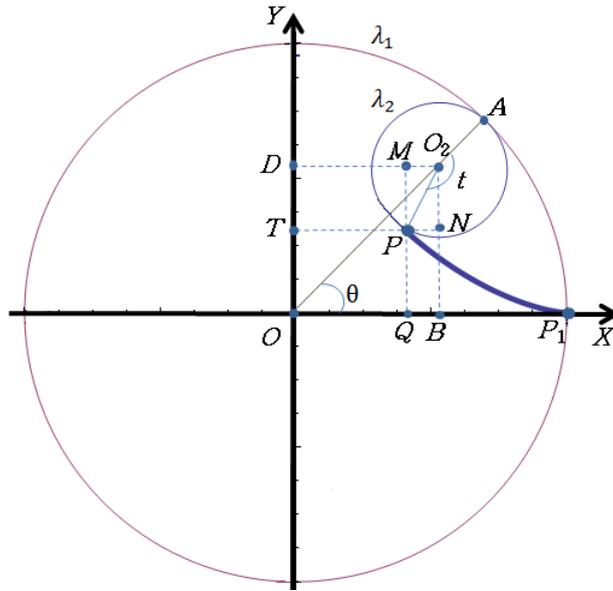


Figura 2.14:  $P$  continuando o movimento.

Denotando  $t$  a medida do ângulo de  $O_2A$  para  $O_2P$ , no sentido horário (ver Figura 2.13), temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - t \quad \text{e} \quad \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = -\frac{\pi}{2} + \theta + \widehat{OO_2P} = -\frac{\pi}{2} + \theta + (\pi - t) = (\theta - t) + \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, no triângulo retângulo  $PNO_2$ , temos:

$$|O_2M| = r \operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{sen}\left((\theta - t) + \frac{\pi}{2}\right) = r \operatorname{cos}(\theta - t) = r \operatorname{cos}(t - \theta),$$

$$|O_2N| = r \operatorname{cos}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{cos}\left((\theta - t) + \frac{\pi}{2}\right) = -r \operatorname{sen}(\theta - t) = r \operatorname{sen}(t - \theta).$$

Substituindo essas identidades nas relações (2.26) e (2.27), e usando o fato de que  $t = \frac{R\theta}{r}$ , obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\begin{cases} x = (R - r)\operatorname{cos}\theta + r \operatorname{cos}\left(\left(\frac{R - r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R - r)\operatorname{sen}\theta - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R - r}{r}\right)\theta\right) \end{cases}; \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.28)$$

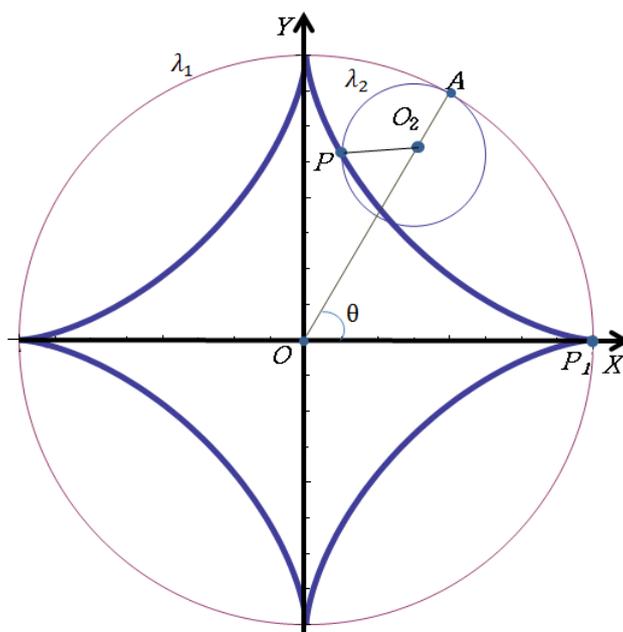


Figura 2.15: Hipociclóide ( $R = 4r$ ), também chamada de Astróide.

As hipociclóides têm mais do que uma cúspide. O número de cúspides deste tipo de curvas depende da razão entre  $R$  e  $r$ , raios da circunferência fixa e da que roda sem deslizar, respectivamente. Quando  $\frac{R}{r}$  é um número racional da forma  $\frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , a curva tem  $m$  cúspides quando a circunferência roda  $n$  vezes em torno da circunferência fixa e fica totalmente traçada após  $n$  voltas.

A **astróide**, também chamada **tetracúspide**, **cubociclóide** ou **paraciclo**, é a hipociclóide obtida quando  $\frac{R}{r} = 4$  (tem 4 cúspides), ou seja, quando  $r = \frac{R}{4}$ . Suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta + r\cos(3\theta) \\ y = 3r\sin\theta - r\sin(3\theta) \end{cases}; \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2.29)$$

# Capítulo 3

## Construção da Ciclóide e Aplicações

### 3.1 Proposta experimental para ser desenvolvida em sala de aula

Esta proposta experimental faz parte do trabalho que desenvolvemos sobre curvas parametrizadas. O principal objetivo da atividade experimental é incentivar os alunos de graduação, professores e interessados a trabalhar com experimentos simples com alunos do Ensino Fundamental e Médio nas áreas das Ciências Exatas e apresentar esses trabalhos com os seus discentes em eventos como Feira de Ciências (nas escolas onde foi desenvolvido o trabalho ou na própria Universidade).

Como já dissemos, a matemática não é bem compreendida no Ensino Fundamental e Médio e por isso essa disciplina é uma das mais odiadas em todos os níveis de ensino. Uma forma de atrair os discentes para os temas da matemática é com atividades experimentais. A proposta é a de instigar o aprender da matemática não como um ato mecânico de "decorar e aplicar fórmulas", mas compreender que a matemática está na vida, muito antes de ser aprendida ou apresentada no espaço escolarizado. Uma atividade experimental já é um bom começo.

A proposta experimental desenvolvida neste trabalho é constituída de duas etapas. A primeira parte do experimento consiste em obter a cicloide e a segunda parte consiste em explorar as duas principais propriedades: o problema da tautócrona e o problema da braquistócrona.

### 3.1.1 Construção da Ciclóide

#### Materiais

- Uma cola de isopor
- Um estilete
- Uma placa de isopor de espessura  $20mm$
- Duas placas de isopor de espessura  $10mm$
- Uma roda de diâmetro  $180mm$
- Um lápis para quadro branco
- Duas esferas de aço (ou bolas de gude)
- Um rolo de fita isolante
- Fita adesiva (durex)

#### Procedimento experimental para a construção da Ciclóide

O primeiro passo para construir a cicloide é manter bem fixo o isopor em um plano vertical. Neste caso é mais conveniente fixar a placa de isopor em uma parede utilizando fita adesiva para evitar que a placa se desloque (veja a Figura 3.1).



Figura 3.1: Placa de isopor fixada em uma parede para evitar que se desloque durante a construção da cicloide

Para traçar a cicloide no isopor, aproxima-se a roda no plano do isopor. A roda escolhida foi um cano de PVC de  $180\text{mm}$ , mas poderia ser qualquer outro material que tivesse um formato de disco. Coloca-se o lápis para quadro branco por fora do cano e fixa-o na borda deste, em seguida faz-se girar o cano com uma das mãos sem que este deslize e com a outra mão fixa bem a ponta do lápis no plano do isopor (de espessura  $20\text{mm}$ ). Neste caso tem-se muito cuidado para que o cano não deslize e naturalmente ele deve ficar sobre um plano horizontal bem nivelado como mostra a (veja a Figura 3.2).



Figura 3.2: Construção do traçado da cicloide com o uso de isopor, cano PVC e lápis para quadro branco

Após o cano completar uma volta, o lápis desenha sobre o isopor uma cicloide. O passo seguinte é utilizar um estilete e sobre o traço deixado pelo lápis cortar o isopor cuidadosamente. Se o trabalho for feito com isopor de espessura menor que  $20\text{mm}$  é necessário cortar mais de uma placa até que elas adquiram uma espessura de  $20\text{mm}$  (um pouco maior que a largura da fita isolante). Facilmente se constrói cicloides idênticas utilizando o traçado da primeira cicloide. Basta colocar a cicloide já pronta sobre a placa de isopor e desenhá-la para depois confeccioná-la da mesma forma que a primeira. Neste caso deve-se colar as duas placas utilizando a cola de isopor.

Difícilmente a esfera percorrerá toda a cicloide sem cair, por isso é fundamental construir paredes laterais para evitar que a esfera saia da cicloide durante o percurso. Toma-se o traçado da primeira cicloide e constrói duas idênticas com o isopor de espessura menor. Cola-se as cicloides nas laterais da cicloide de espessura maior que deve ficar um pouco mais baixa para

que essas duas novas sirvam de parede evitando que a esfera saia do percurso original (veja a Figura 3.3).



Figura 3.3: Ciclóide com as paredes laterais que são necessárias para evitar que a esfera caia

Como a esfera irá percorrer a superfície da ciclóide é importante reduzir as trepidações sobre o percurso. Neste caso utiliza-se uma fita isolante sobre a superfície de isopor que forma a ciclóide (veja a Figura 3.4).



Figura 3.4: Ciclóide pronta já com uma superfície de fita adesiva para reduzir as trepidações e o atrito com a esfera

### 3.1.2 Verificação das Propriedades da Ciclóide

Com a ciclóide pronta verificou-se os problemas da tautócrona (curva de mesmo tempo) e da braquistócrona (curva de menor tempo). Como já foi discutido, partículas soltas do repouso a partir de alturas diferentes ( $A_1$ ,  $A_2$ , etc.) de uma mesma ciclóide chegam ao mesmo tempo no ponto mais baixo  $B$ . Para provar experimentalmente esta propriedade, basta soltar duas esferas de duas posições diferentes e filmar os seus trajetos.

O procedimento experimental para o desenvolvimento desta atividade deve seguir os seguintes passos:

- i) Os discentes devem escolher dois pontos diferentes de uma mesma ciclóide e posicionar uma esfera em cada ponto.
- ii) Em seguida soltar as esferas desses pontos e mostrar que elas chegam ao mesmo tempo na parte mais baixa da ciclóide independente dos pontos escolhidos.

Os resultados obtidos podem ser verificados no filme que desenvolvemos e podem ser acessados no *Youtube* no link [https://youtu.be/d\\_wdURNOS04](https://youtu.be/d_wdURNOS04).

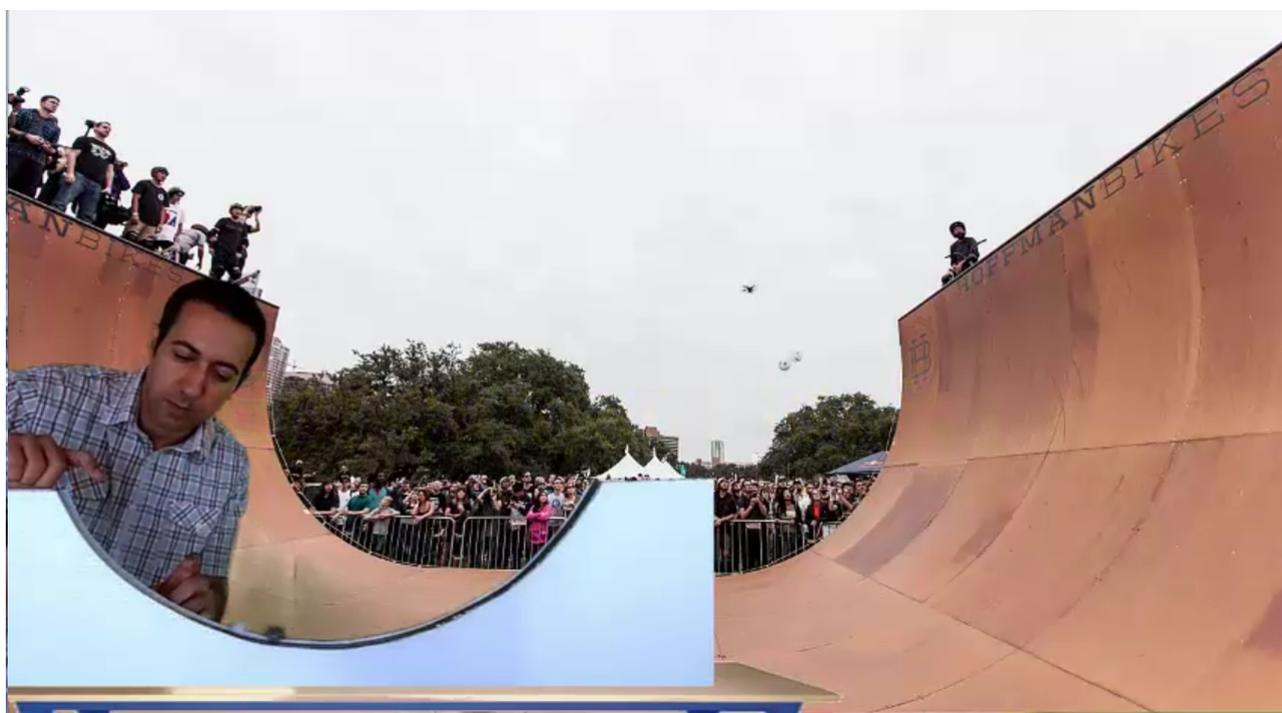


Figura 3.5: Verificação experimental do problema da tautócrona

Para mostrar experimentalmente o problema da braquistócrona, escolheu-se dois pontos da cicloide e nos mesmos níveis desses pontos em relação a base de sustentação coloca-se um plano inclinado (trajetória reta) e sobre este plano fixa-se uma fita isolante com o intuito de reduzir o atrito como foi feito com a cicloide.

Com a cicloide já pronta, os passos a seguir descrevem como devem proceder para a realização da atividade.

- i) Soltar duas esferas idênticas – uma percorrendo a cicloide e outra uma curva qualquer (como uma trajetória reta – plano inclinado).
- ii) Mostrar que entre os dois pontos do trajeto ligados por essas curvas a esfera que gasta o menor tempo é aquela que percorreu a cicloide.

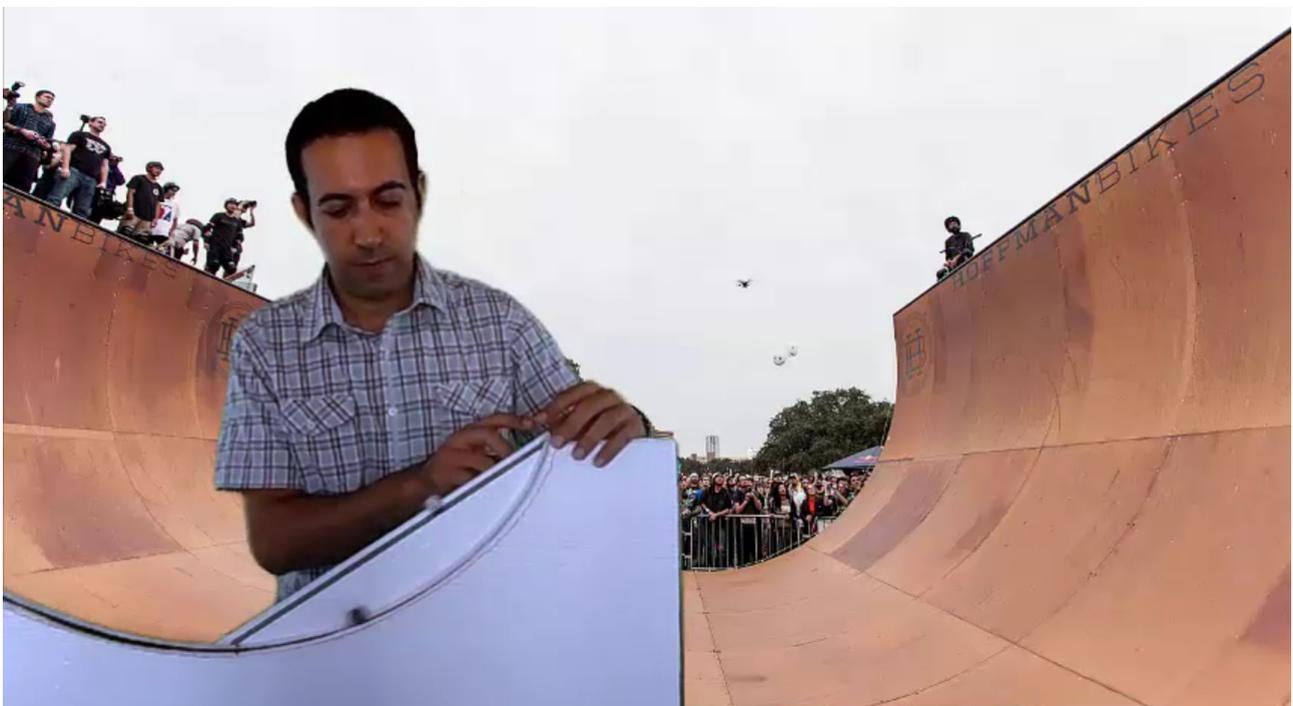


Figura 3.6: Verificação experimental do problema da braquistócrona

Todos os resultados que apresentamos aqui podem ser acessados no link [https://youtu.be/d\\_wdURNOS04](https://youtu.be/d_wdURNOS04).

### 3.2 Uma Proposta Interdisciplinar no Ensino Médio

Do que foi abordado anteriormente, vimos que a cicloide apresenta várias propriedades interessantes cuja demonstração matemática foge do nível do ensino médio, entretanto podemos

explorar suas propriedades independentemente do nível em consideração.

Uma segunda proposta é trabalhar com alunos do 3º ano do ensino médio unindo conceitos de física, matemática e história, com as curvas apresentadas neste trabalho. O professor de história poderia auxiliar os discentes com uma pesquisa bibliográfica fazendo uma revisão de literatura sobre o contexto histórico da época, bem como o geocentrismo e o heliocentrismo, já o professor de física poderia abordar o estudo das curvas na área da astronomia destacando o uso da epiciclóide para explicar o modelo de Ptolomeu sobre o movimento dos planetas e na mecânica para abordar os conceitos de velocidade média, aceleração média, conservação de energia além de outros, já na matemática caberia ao professor mostrar como se faz as curvas e explorar suas propriedades experimentalmente, fortalecendo a interdisciplinaridade entre essas ciências que é fundamental na construção do conhecimento do discente. E por fim, os discentes poderiam apresentar os resultados numa feira de ciências.

### 3.3 Uma Proposta Interdisciplinar na Graduação

#### Prática Integradora

A ideia principal desta atividade é achar a curva que liga dois pontos desnivelados de forma que uma partícula possa percorrê-la no menor intervalo de tempo. Este tipo de curva é de grande importância nas aplicações das pistas de skate, principalmente nas competições de modalidades verticais. Há vários tipos de modalidades verticais e todas elas os skatistas são examinados com base na sua criatividade e no grau de dificuldade das manobras. Essas manobras têm um tempo máximo permitido para o skatista realizar. Por isso é fundamental que ele realize seu movimento em contato com a pista no menor intervalo de tempo para ganhar mais tempo e poder realizar suas acrobacias aéreas com mais precisão.

Dada a importância de se realizar o percurso de contato do skate com a pista no menor intervalo de tempo, vem a pergunta óbvia: qual deve ser o formato da curva que uma pista de skate deve ter para que o tempo de descida seja o menor possível? Esse problema é conhecido como problema da braquistócrona que significa “curva de menor tempo”. O problema da Braquistócrona foi apresentado pela primeira vez pelo matemático Johann Bernoulli por volta de 1696. O que se sabe é que este problema foi resolvido por cinco matemáticos brilhantes: Newton, Leibniz, L'Hôpital, o próprio Johann Bernoulli e seu irmão Jacob Bernoulli.

Intuitivamente podemos pensar que o caminho mais curto é o que leva o menor tempo. Entretanto esta não é a resposta, ou seja, o caminho mais curto não é o caminho mais rápido para uma esfera deslocar-se sob ação da gravidade sem ação de forças de atrito. A curva que minimiza o tempo é conhecida como cicloide. A cicloide é uma curva obtida por um ponto qualquer da borda de uma roda de raio  $r$  que rola sem deslizar ao longo de uma reta. A seguir destacamos suas equações paramétricas e o seu gráfico.

$$\begin{cases} x = r(\theta - \text{sen}\theta) \\ y = r(1 - \text{cos}\theta) \end{cases}; \theta \in [0, 2\pi].$$

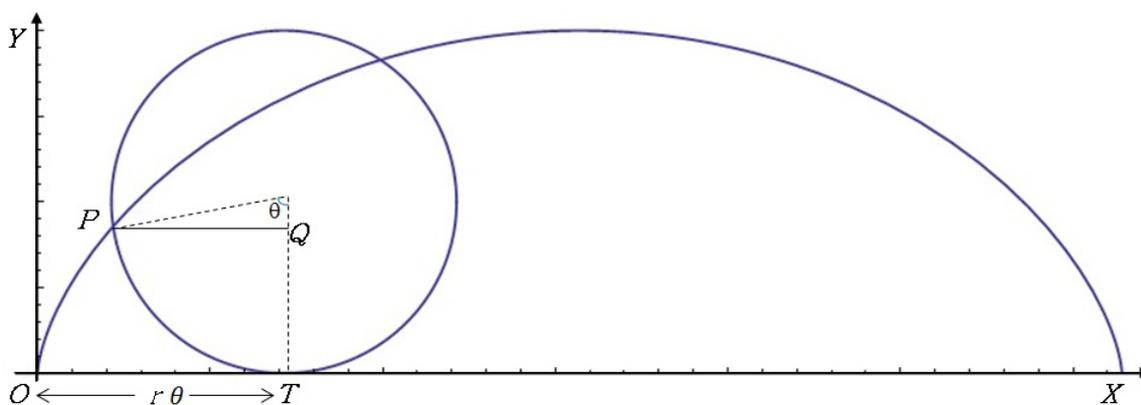


Figura 3.7: Curva Cicloide

### Objetivos da Prática Integradora

- Determinar as equações paramétricas da cicloide (curva que minimiza o tempo entre dois pontos de alturas diferentes)
- Determinar o comprimento de arco do traçado da cicloide em consideração
- Construir uma maquete de isopor (ou madeira) de uma pista de skate para ilustrar as principais propriedades da cicloide
- Determinar o centro de massa da pista construída
- Fazer interdisciplinaridade entre a Física e o Cálculo

### Orientações para a realização da prática integradora

A nossa atividade se desenvolverá em duas etapas. A primeira etapa envolve conhecimentos teóricos que precisam do cálculo e da física para a sua consolidação. Esta etapa consiste em

obter as equações paramétricas da cicloide, o seu comprimento de arco e o centro de massa da maquete da pista de skate construída com isopor. A segunda etapa é puramente experimental e consiste em construir uma rampa de isopor com o formato de uma cicloide e demonstrar experimentalmente que ela é realmente a mais rápida dentre qualquer outra curva escolhida que ligue esses dois pontos. Os resultados deste trabalho devem ser apresentados na forma de um banner que ilustre os principais resultados tais como o passo a passo da construção da maquete de isopor da pista de skate e os valores teóricos dos cálculos obtidos. A maquete da pista é livre e fica a cargo do aluno envolvido com a prática. Para facilitar o seu trabalho nós construímos um vídeo que ensina todas as etapas para a confecção da cicloide. Este vídeo está no *Youtube* e pode ser acessado através do link [https://youtu.be/d\\_wdURNOS04](https://youtu.be/d_wdURNOS04).

Essa atividade também pode ser encontrada em um formulário do google através do link <http://goo.gl/forms/6g8KbhKQID>.

## 3.4 Aplicações da Cicloide

### 3.4.1 Skate Vertical Half Pipe

A modalidade vertical é praticada em uma pista com curvas (transições), com 3,40m ou mais de altura, três metros de raio e quarenta centímetros de verticalização, geralmente possuem extensões (MARQUES,2008). A pista, que apresenta a forma de "U", é chamada de half-pipe e pode ser feita de madeira (veja a Figura 3.8) ou concreto (veja a Figura 3.9). As manobras podem ser de aéreas, onde o skatista realiza um vôo e retorna na própria pista, ou pode ser de borda, onde se desliza por cima de uma borda metálica.



Figura 3.8: Half de madeira.



Figura 3.9: Half de concreto.

Nas competições de vertical, os skatistas são avaliados segundo critérios de criatividade e grau de dificuldade das manobras, que devem ser executadas em um intervalo de tempo pré-estabelecido. Dessa forma, quanto menos tempo o skatista gasta percorrendo a extensão da rampa de um lado para o outro, mais tempo lhe sobrar para executar as manobras aéreas verticais que contam pontos. Por isso a importância em fazer o percurso da rampa no menor tempo possível. Assim, para construir uma rampa com tempo mínimo de descida é necessário que os arcos que compõe a lateral sejam ciclóides.

### 3.4.2 Arquitetura

A ciclóide pode ser utilizada na forma de cúpulas com boa reflexão da luz natural quando associada a uma plataforma de luz na forma adequada, exemplo dessa aplicação é um clássico da arquitetura "O Museu de Arte Kimbell", é um museu norte-americano, situado em Fort Worth, estado do Texas. Organização privada sem fins lucrativos, o museu foi inaugurado em 1972 e viabilizado pela doação de todo o legado do industrialista e colecionador texano Kay Kimbell, feita por sua esposa, Velma Fuller Kimbell, após a morte do marido, em 1964. Sua sede, projetada por Louis Kahn, renomado arquiteto norte-americano de origem estoniana, encontra-se entre as principais obras de seu autor. Na fase de elaboração da sala de exposições, um problema importante a ser resolvido pelo arquiteto foi a iluminação natural, que deveria iluminar as obras de forma indireta para evitar danos. Para possibilitar uma maior incidência de luz, foi pensada uma cúpula com uma abertura acompanhada de uma prateleira de luz, que deveriam possuir formas adequadas para uma melhor otimização. Após vários testes, o engenheiro A. Komendant recomendou a ciclóide como forma adequada para as cúpulas das salas de exposição da galeria (GONÇALVES,2009).



Figura 3.10: Parte externa do Museu.



Figura 3.11: Parte interna do Museu.

# Considerações Finais

Em resposta à pergunta que motivou esse trabalho: Como é possível ampliar a importância dada à matemática nos ambientes escolares? O que se deve fazer para resgatar o ensino dessa ciência entre os discentes, favorecendo a sua aprendizagem conceitual e o desenvolvimento de habilidades e competências específicas? podemos inferir que: O trabalho realizado neste estudo mostra que a matemática pode assumir um papel importante na sala de aula, ajudando a desenvolver a aprendizagem de outras disciplinas graças às práticas experimentais aliadas ao desenvolvimento de conteúdos interdisciplinares. Na literatura fala-se muito em interdisciplinaridade, mas na maioria dos textos não se mostra como é possível fazê-la, ou seja, pouco se faz realmente. Este trabalho descreve o conteúdo e mostra como realizar atividades integradoras que venham a melhorar o ensino de outras ciências e permite desenvolver outras habilidades (além do raciocínio matemático) no aluno. Este trabalho não se encerra aqui, ele é o primeiro passo para outros estudos que melhorem o ensino da matemática. Introduzir o conteúdo de forma que a curiosidade do aluno seja instigada já é um grande passo no ensino dessa disciplina. Foi este o objetivo deste trabalho, despertar a curiosidade dos envolvidos através das práticas experimentais sem tão pouco deixar de lado a parte teórica. Naturalmente o objetivo aqui colocado só é atingido com um professor muito motivado e habilidoso porque para ensinar é preciso saber muito mais que se ensina, é necessário conhecer a disciplina, ter interesse e entusiasmo por ela.

Concluo essa dissertação com a satisfação de ter conhecido um pouco da história e do trabalho de verdadeiros ícones da Matemática como: Roberval, Torricelli, Pascal, Huygens, Leibniz, L'Hôpital, os irmãos Jacques e Johann Bernoulli, e por fim Sir Isaac Newton. Tive a felicidade de estudar algumas curvas planas em particular a cicloide, e como é fantástica esta curva a ponto de me agussar uma curiosidade como nunca tinha sentido antes, foi um prazer e tanto. Percebi que os experimentos matemáticos com materiais manipuláveis e confeccionados faz com que a gente trabalhe de maneira informal, se movimentando e escolhendo métodos que facilite o ensino da matemática. Os materiais concretos são recursos didáticos que interferem fortemente

no processo ensino-aprendizagem da matemática. Nesse trabalho ficou nítido que a matemática, longe de ser uma ciência chata e sem aplicabilidade, é uma ciência dinâmica, aplicável, bela e cheia de desafios, desafios esses que promovem o desenvolvimento da forma de como o homem encara o mundo e como ele pode transformá-lo buscando o bem comum. E por fim, toda minha gratidão de ter conhecido excelentes professores durante todo o curso, estes sim, fundamentais para que eu tivesse chegado até aqui com a convicção de ser um eterno aprendiz.

# Referências Bibliográficas

- [1] ACTA ERUDITORUM, *Revista dos eruditos*, publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz.
- [2] BOYER, C. B., Merzbach, U. C., *História da Matemática*, Editora Blucher, São Paulo, 2012.
- [3] DELGADO, J., Frensel, K., Crissaff, L., *Geometria Analítica*, Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [4] GONÇALVES, V. S., *Curvas, Superfícies e Arquitetura*, Projeto de Iniciação Científica, Orientador: Professor Alberto Saa, 2009. Disponível em: <https://curvasearquitectura.wordpress.com/galeria-de-arte-kimbell/>. Acesso em: Abril de 2015.
- [5] LORENZATO, S., *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*, Coleção Formação de Professores, Editora Autores Associados, Campinas, 2006.
- [6] MARQUES, D. A., Oliveira, R. H. A. de, Jafelice, R. S. M., *Modelagem Matemática das Pistas de Skate*, FAMAT em revista número 10, Editora da UFU, Uberlândia, 2008.
- [7] RAPOSO, C. S. C. M., *Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades*, Dissertação: Mestrado em Matemática, Orientador: Prof<sup>a</sup> Doutora Ana Rute Domingos, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.
- [8] SANTOS, A. J. de J., Voelzke, M. R., Araújo, M. S. T., *O Projeto Eratóstenes: A Reprodução de um Experimento Histórico como Recurso para a Inserção de Conceitos da Astronomia no Ensino Médio*, Cad. Bras. Ens. Fís., v. 29, n. 3: p. 1137-1174, dez. 2012. DOI: 10.5007/2175-7941.2012v29n3p1137
- [9] VENCESLAU, A. W. do N. *Ciclóide e suas propriedades*, Aracaju, 2015. Disponível em: [https://youtu.be/d\\_wdURNOS04](https://youtu.be/d_wdURNOS04). Acesso em: Abril de 2015.