Universidade Federal de Sergipe
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Funções e suas Aplicações

Deybson Oliveira Melo

Aracaju - SE
2015

Deybson Oliveira Melo

Funções e suas Aplicações

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática no Ensino Básico
Orientador: Professora Dra. Débora Lopes da Silva

Aracaju
2015

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestaçãodo caráter e afetividade da edução no processo de formação proficional, por tanto que se dedicaram, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

Em especial a minha orientadora Dr. Débora Lopes da Silva, pelo suporte, pelas suas correções e incentivos dedicado à elaboração deste trabalho.

Não é por acaso que estou aqui. Vocês me deram a vida, amor, carinho; enfim, me prepararam para enfrentar o mundo. Não foram apenas Pais, mas amigos incentivando-me a prosseguir. Muitos sonhos foram sacrificados para que eu conquistasse os meus. Hoje, procuro entre as palavras aquela que melhor exprime o que sinto e só encontro uma: Obrigado! A vocês, meus queridos pais Wellington e Edna, ofereço todos as minhas vitórias.

Obrigado especial também aos meus irmão Bergson e Robson, que sempre estiveram ao meu lado e me apoiaram em tudo.

Obrigado meus Tios(as), Primos(as), Sobrinhos(as), Cunhadas e Amigos(as), que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

Meus agradecimentos aos amigos de turma, companheiros de trabalhos e irmão na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Por fim, e não menos importante quero agardecer aos meus amigos de trabalho, meus alunos e todos que diretamente ou indiretamente fizeram parte dessa etapa da minha vida, o meu muito obrigado.

Resumo

Devido as dificuldades relacionadas ao ensino introdutório de funções nos ensinos fundamental e médio, faremos nesse trabalho uma abordagem sobre funções, dando ênfase a modelagem, resolução de problemas e construção de gráficos. Com o objetivo de construir o gráfico das funções dadas neste trabalho, introduziremos o conceito de limites e derivadas focando na definição de reta tangente ao gráfico de uma função.

Palavras-chave: Funções, modelagem, resolução de problemas, limites e derivadas.

Abstract

Due to the difficulties related to introductory teaching of functions in primary and secondary education, we will make in this work, an approach about functions, emphasizing modeling, problem solving, and graphic building. In order to build the graph of the functions given in this paper, we introduce the concept of limits and derivatives focusing on the definition of the tangent line to the graph of a function.

Keywords: functions, modeling, problem solving, limits and derivatives.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O conceito de função é bastante relevante e essencial para a edificação do conhecimento matemático e nos ajuda na busca do entendimento ou explicação de vários fenômenos.

Para Rêgo, esse conceito é um importante pré-requisito para boa parte dos conteúdos do ensino superior, porque através do uso de funções de uma ou mais variáveis podemos modelar e estudar vários problemas das ciências exatas, da tecnologia, da saúde e sociais aplicadas (RÊGO, 2000, p.20).

Os PCNs (2002) afirmam que é importante o estudo do conceito de função, uma vez que permite aos alunos alcançar não só a linguagem algébrica, como também a linguagem das ciências e que o estudo das diferentes funções deve ter ênfase no conceito de função, na interpretação de seus gráficos e na aplicação dessas funções (BRASIL, 2002, P. 121).

O conceito de função de acordo com Chaves e Carvalho (2004) é introduzido como um conjunto de pares ordenados que passam a representações analíticas e gráficas, em seguida são apresentadas aos alunos definições e generalizações com um alto grau de abstração e que eles não têm condições de realizarem.

As funções e suas várias formas de representação são identificadas quase que unicamente com expressões analíticas, dessa forma criando um obstáculo à aprendizagem com conceito de função, isso porque os alunos não compreendem seus significados em se tratando de situações reais.

Segundo Trindade (2000), esse estudo analítico deve surgir baseado em atividades feitas de forma ordenada a partir das representações numéricas e gráficas.

Os conceitos matemáticos do processo de ensino e aprendizagem da matemática se desenvolvem muitas vezes de forma repetitiva e mecânica, com isso os alunos a vê como um conjunto de regras, conceitos sem significados e sem relação com o cotidiano; disciplina onde não entram atividades desenvolvidas pelo homem e não como construção humana. Diante da sociedade tomada por transformações socais e tecnológicas, esse processo não fundamenta um ensino de reflexão e para que o ensino da matemática seja satisfatório é preciso repensar nossa postura educacional.

Para tentar superar essa situação realizamos um trabalho possibilitando um ensino aberto ao aluno no qual ele participa. Seu principal objetivo é introduzir e desenvolver o conteúdo de funções de forma prática, utilizando a modelagem matemática, resoluções de problemas de aplicações e construções de gráficos.

Capítulo 1

Funções

1.1 Definição

Definição 1.1.1 (Função). *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Uma função f: A→B é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado domínio de f e é denotado por D(f). B é chamado contradomínio ou campo de valores de f e é denotado por CD(f).*

Escrevemos:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

O conjunto dos valores f(x) é chamado imagem de f e é denotado por Im(f).

Observação 1.1.2. *Uma função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função real.*

Exemplo 1.1.3. *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$*

A função f: A→B cuja regra é dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.

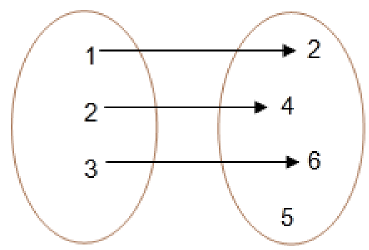


Figura 1.1

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) = y = 2x \end{aligned}$$

Onde: D(f) = A = $\{1, 2, 3\}$, CD (f) = $B = \{2, 4, 5, 6\}$ e Im(f)= $\{2, 4, 6\}$

Exemplo 1.1.4. *Sejam X o conjunto dos triângulos do plano α e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Se a cada $t \in X$, fizermos corresponder o número real f(t) = área do triângulo t, obteremos uma função f: $X \to \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.1.5. *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{20, 40, 50, 60\}$*

A função f: A$\to$B dada pelo diagrama abaixo não é uma função de A em B, pois o elemento $1 \in$ A tem dois correspondentes em B e o elemento $2 \in$ A não tem nenhum correspondente em B.

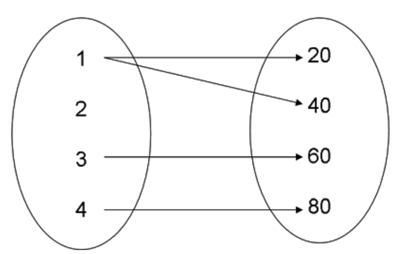


Figura 1.2

Exemplo 1.1.6. *Indiquemos com X o conjunto dos números reais positivos e com Y o conjunto dos triângulos do plano. Para cada $x \in X$, ponhamos f(x) = t caso t seja um trinâgulo cuja área é x. Esta regra não define uma função $f: X \to Y$ porque é ambígua: dado o número $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos diferentes com área x.*

1.2 Gráficos

Definição 1.2.1. *Seja f: $A \to B$ uma função. Definimos o gráfico de f como sendo o conjunto de pontos* $\{(x, f(x))/x \in A \text{ e } f(x) \in B\}$.

Para determinar o gráfico de uma função real, assinalamos uma série de pontos, fazendo uma tabela que nos dá as coordenadas.

Exemplo 1.2.2. *O gráfico da função f(x) = 3x + 2 consiste em todos os pares (x, y)* $\in \mathbb{R}^2$ *tais que y = 3x + 2. Em outras palavras, é a coleção de todos os pares (x, 3x+2) do plano xy. A figura abaixo nos mostra o gráfico desta função, onde salientamos alguns pontos, de acordo com a tabela.*

x	y = 3x + 2	y
1	y = 3.1 + 2	5
2	y = 3.2 + 2	8
3	y = 3.3 + 2	11
4	y = 3.4 + 2	14
5	y = 3.5 + 2	17

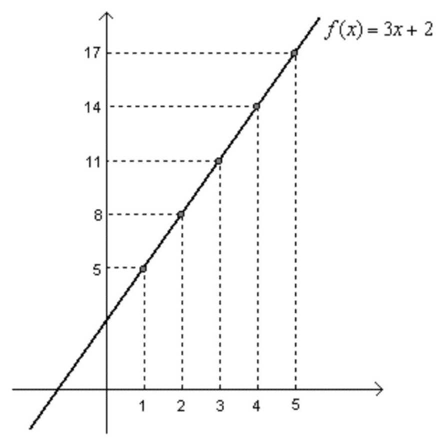


Figura 1.3

1.3 Função Sobrejetora, Função Injetora e Função Bijetora

Definição 1.3.1 (função sobrejetiva ou sobrejetora)**.** *Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que f(x) = y.*

Notemos que: f: A→B é sobrejetora se, e somente se, Im (f) = B.

Exemplo 1.3.2. *A função f de* $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ *em* $B = \{0, 1, 4\}$ *definida pela lei* $f(x)=x^2$ *é sobrejetora, pois, para todo elemento* $y \in B$*, existe o elemento* $x \in A$ *tal que* $y = x^2$.

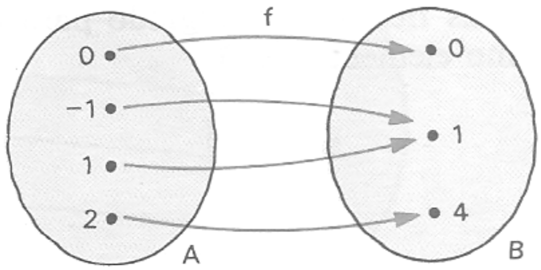


Figura 1.4

Exemplo 1.3.3. *Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano β e Δ o conjunto das retas desse mesmo plano. A regra que associa a cada segmento $AB \in S$ sua mediatriz g(AB) define uma função sobrejetora g: $S \to \Delta$. Pois toda reta do plano é mediatriz de algum segmento desse plano.*

Definição 1.3.4 (função injetiva ou injetora)**.** *Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Exemplo 1.3.5. *A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ definida pela lei f(x) = 2x + 1 é injetora, pois dois elementos distintos de A têm como imagem dois elementos distintos de B.*

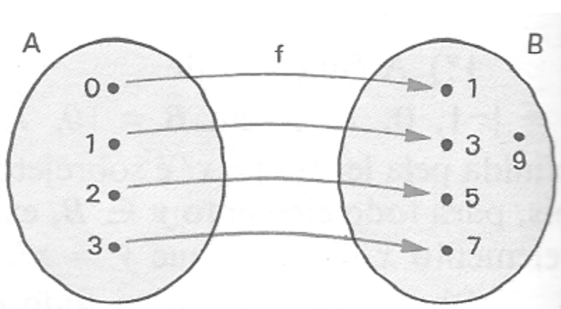


Figura 1.5

Exemplo 1.3.6. *A correspondência que associa a cada número natural n seu sucessor n + 1 define uma função injetiva f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos* *números naturais, com f(n) = n + 1. Pois dois elementos distintos de* $\mathbb{N}$ *têm como imagem dois elementos distintos de* $\mathbb{N}$*.*

Definição 1.3.7 (função bijetiva ou bijetora)**.** *Uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.*

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento de y pertencente a B, existe um único elemento de x pertencente a A tal que f(x) = y.

Exemplo 1.3.8. *A função f de* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *em* $B = \{1, 2, 3, 4\}$ *definida pela lei f(x)=x + 1 é bijetora, pois f é sobrejetora e injetora, isto é, para todo elemento* $y \in B$*, existe um único elemento* $x \in A$ *tal que* $y = x + 1$*.*

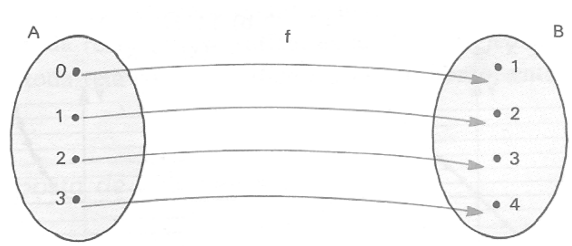


Figura 1.6

Observação 1.3.9. *Observemos que existem funções que não são sobrejetora nem injetora.*

Por exemplo, a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por f(x) = $|x|$, onde $|x|$ = x, se $x \geqslant 0$ e $|x|$ = -x, se $x < 0$:

I) dado y $\in \mathbb{R}^*_-$, não existe x $\in \mathbb{R}$ tal que y = $|x|$, portanto não é sobrejetora;

II) Existem x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, x_1 e x_2 opostos (e portanto $x_1 \neq x_2$) tais que $|x_1|$=$|x_2|$, isto é, f não é injetora.

1.4 Função Par e Função Impar

Definição 1.4.1 (Função Par)**.** *Uma função f(x) é par se, para todo x no domínio de f, f(-x) = f(x).*

Exemplo 1.4.2. *Exemplo: f(x) = x^2 + 1*

f(-x) = (-x)^2 + 1 = x$^2 + 1$ = f(x), $\forall$ x.

Logo, temos que f(x) = x^2 + 1 é uma função par.

Definição 1.4.3 (Função Ímpar)**.** *Uma função f(x) é impar se, para todo x no domínio de f, f(-x) = - f(x).*

Exemplo 1.4.4. *Exemplo: f(x) = x^3 - 2x*

f(-x) = (-x)^3 - 2.(-x) = - x$^3 + 2x$ = -(x$^3 - 2x$) = -f(x), $\forall$ x.

Logo, temos que f(x) = x^3 - 2x é uma função ímpar.

Exemplo 1.4.5. *f(x) = x^2 + 2x*

Fazendo, x = 2 $\Rightarrow$ f(2) = 2^2 + 2.2 = 8

Fazendo, x = -2 $\Rightarrow$ f(-2) = (-2)^2 + 2.(-2) = 0

Como f(-2) $\neq$ f(2) e f(-2) $\neq$ -f(2), temos que f(x) = x^2 + 2x não é uma função par e nem ímpar.

Proposição 1.4.6. *Toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar.*

Demonstração: Podemos escrever f(x) = $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ onde: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ = h(x) e $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ = g(x).

Logo, h(-x) = $\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}$ = h(x) e g(-x) = $\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}$ =

$= -\left[\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\right]$ = -g(x).

Como, h(-x) = h(x) e g(-x) = -g(x).

1.5 Função Crescente e Função Decrescente

Definição 1.5.1 (Função Crescente)**.** *Uma função f real, diz-se crescente em um intervalo I, I $\subset$ D(f), se e somente se, para todo x_1, $x_2 \in$ I, tem-se: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*

f diz-se estritamente crescente em I, se e somente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 1.5.2. *f(x) = 3x + 1*

De fato, $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Como, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ temos que f(x) = 3x + 1 é uma função estritamente crescente.

Definição 1.5.3 (Função Decrescente). *Uma função f, real de variável real, diz-se decrescente em um intervalo I, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo x_1, $x_2 \in I$, tem-se: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*

f diz-se estritamente decrescente em I, se e somente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 1.5.4. *f(x)* $= -x + 5$

De fato, $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 5 < -x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Como, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ temos que f(x) = -x + 5 é uma função estritamente decrescente.

1.6 Função Composta

Definição 1.6.1. *Dadas duas funções f e g, a função composta de f com g, denotada por $(f \circ g)$, é definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

O domínio de $(f \circ g)$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de g tais que g(x) está no domínio de f.

Simbolicamente, $D(f \circ g) = \{\ x \in D(g)\ /\ g(x) \in D(f)\ \}$.

Em diagrama,

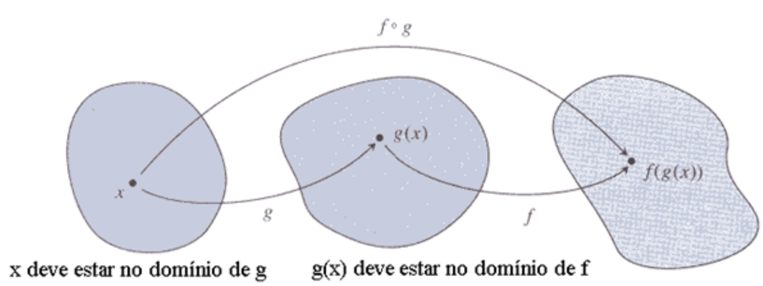


Figura 1.7

Exemplo 1.6.2. *Considerando as função f(x) = 2x - 3 e g(x) = x^2 + 2, temos:*

a) $f \circ g = f(g(x)) = 2.g(x) - 3 = 2(x^2 + 2) - 3 = 2x^2 + 4 - 3 = 2x^2 + 1$.

b) $g \circ f = g(f(x)) = f^2(x) + 2 = (2x - 3)^2 + 2 = 4x^2 - 12x + 9 + 2 =$
$= 4x^2 - 12x + 11$.

1.7 Função Inversa

Definição 1.7.1. *Se f é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos função inversa de f e indicamos por* f^{-1}.

Observação 1.7.2. *Observe que* $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

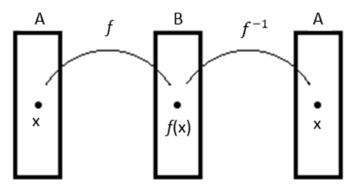


Figura 1.8

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1^o) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mundança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$.

2^o) transformamos algrebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo: $f(x) = 3x + 6$

$f(x) = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 6$

$x = 3y + 6 \Rightarrow 3y = x - 6 \Rightarrow y = \dfrac{x-6}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{3}$.

Observe que, $f(f^{-1})) = 3f^{-1}(x)+6 = \dfrac{3(x-6)}{3}+6 = x$ e $f^{-1}(f(x)) = \dfrac{f(x)-6}{3} = \dfrac{3x+6-6}{3} = x$.

Proposição 1.7.3. *Uma função f possui inversa se, e somente se, for bijetora.*

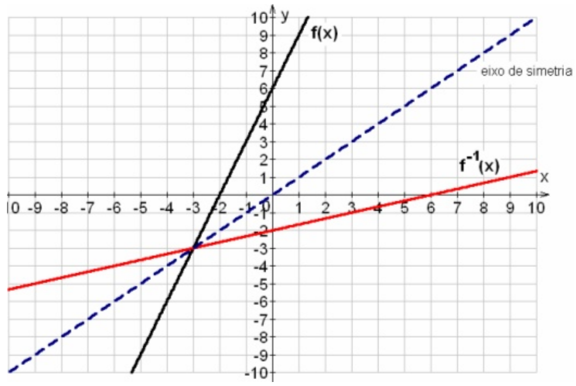
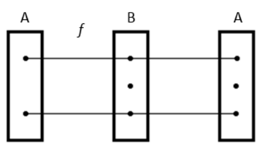
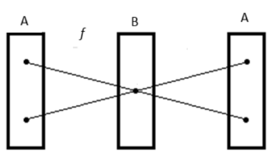


Figura 1.9





Se f não é sobrejetora, não é possível definir f^{-1}:B $\rightarrow$A, pois pelo menos um elemento de B ficaria sem correspondente.

Se f não é injetora, não é possível definir f^{-1}: B $\rightarrow$ A, pois pelo menos um elemento de B ficaria com dois correspondentes.

Exemplo 1.7.4. *f:* $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, *f(x)* $= \dfrac{1}{x}$ *não bijetora.*

Para identificarmos que esta função não admite a função inversa basta compreendermos que ela não é uma função sobrejetora.

Se ela fosse sobrejetora todos os elementos do contradomínio estariam associados a pelo menos algum elemento do domínio, mas isto não acontece para todos os elementos do contradomínio.

Note que o número 0, que pertence ao contradomínio da função, não pertence ao conjunto imagem, pois não há qualquer número do domínio que esteja associado a ele, afinal de contas qual é o número real que dividindo o número 1 resultará em 0?

Como o conjunto imagem difere do contradomínio, esta não é uma função sobrejetora.

Logo, se ela não é sobrejetora, ela não é bijetora.

Portanto, ela não é invertível, ou seja, não possue inversa.

1.8 Função Afim

Definição 1.8.1. *Um função f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se afim quando existem constantes a,* $b \in \mathbb{R}$ *tais que f(x) = ax + b, com* $a \neq 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Quando a > O a função f (x) = ax + b é crescente, isto é, à medida que x cresce, f (x) também cresce. Quando a < O a função f (x) = ax + b é decrescente, isto é, à medida que x cresce, f (x) decresce.

O gráfico da função f(x) = ax + b é uma linha reta.

O domínio de f (x) = ax + b é D(f) = $\mathbb{R}$, o contradomínio é CD(f) = $\mathbb{R}$ e a imagem é Im(f) = $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.8.2. *f(x) = x + 1 é uma função afim crescente porque a = 1 > O.*

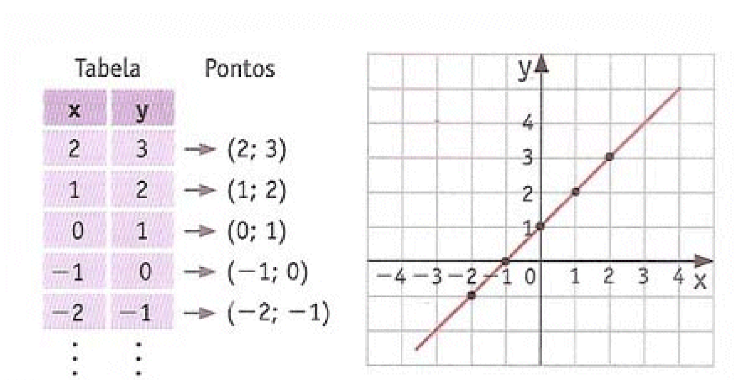


Figura 1.10

Essa função é bijetora, crescente, não é par e nem ímpar e sua inversa é $f^{-1}(x)$ = x - 1.

Exemplo 1.8.3. *O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim* $f : x \mapsto ax + b$*, onde x é a distância percorrida (normalmente usada em quilômetros), o valor inicial b é chamada bandeira e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.*

1.8.1 Casos Particulares de função afim

Definição 1.8.4 (Função Constante)**.** *É toda função do tipo f(x) = k, que associa a qualquer número real x um mesmo número real k. Observe que nessa situação a = 0.*

A representação gráfica será sempre uma reta paralela ao eixo do x, passando por y = k.

O domínio da função f(x) = k é D(f) = $\mathbb{R}$, o contradomínio é CD(f) = $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o conjunto unitário Im(f) = $\{k\}$.

Exemplo 1.8.5. *f(x) = 2*

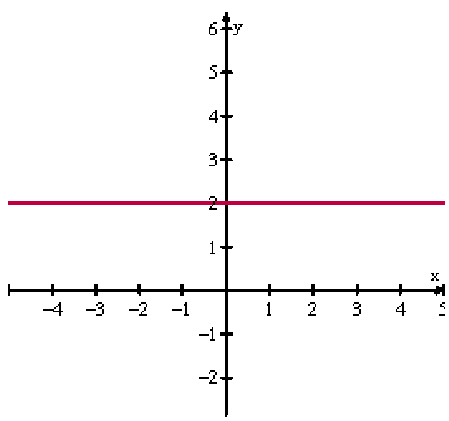


Figura 1.11

Onde: D(f) = $\mathbb{R}$, CD(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\{2\}$.

A função f(x) = 2 é par e não é bijetora, logo não possui inversa.

Definição 1.8.6 (Função Identidade)**.** *Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função identidade quando a cada elemento de $x \in \mathbb{R}$ associa o própio x, isto é: f(x)=x.*

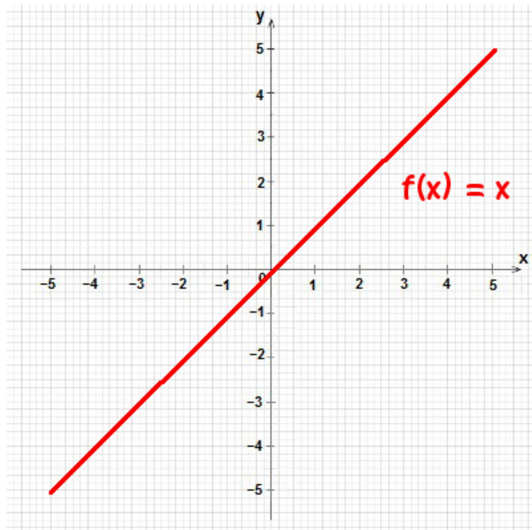


Figura 1.12

O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

A função identidade é uma função bijetora, ímpar, estritamente crescente e sua inversa é $f^{-1}(x)=x$.

Definição 1.8.7 (Função Linear)**.** *Uma aplicação de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *recebe o nome de função linear quando a cada elemento de* $x \in \mathbb{R}$ *associa o elemento* $ax \in \mathbb{R}$ *onde* $a \neq 0$ *é um número real dado, isto é:* $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$.

A função linear, dada pela fórmula f(x) = ax, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Uma proporcionalidade é uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se f(cx) = c.f(x)(proporcionalidade direta) ou f(cx) = $\dfrac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

É claro que se f(cx) = c.f(x) para todo c e todo x então, escrever a = f(1), tem-se f(c) = f(c.1) = c.f(1) = c.a, ou seja, f(c) = ac para todo c $\in \mathbb{R}$. Numa notação mais adequada, temos f(x) = ax para todo x $\in \mathbb{R}$, logo f é uma função linear.

Logo, podemos dizer que a grandeza y = f(x) é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a constante de proporcionalidade) tal que y = ax para todo valor de x.

Quanto a proporcionalidade inversa, ela só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas. Seu modelo matemático é uma função f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)

tal que f(cx) $= \dfrac{f(x)}{c}$ para c, x $\in \mathbb{R}^*$, têm-se f(x) $= \dfrac{a}{x}$, onde a constante a é f(1).

Fixaremos nosso estudo na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de "proporcionalidade". Por exemplo: se um quilo de café custa a reais então x quilos custam y = ax reais.

Exemplo 1.8.8. *f(x) = -2x é uma função linear decrescente, pois a = -2 < O e b=0.*

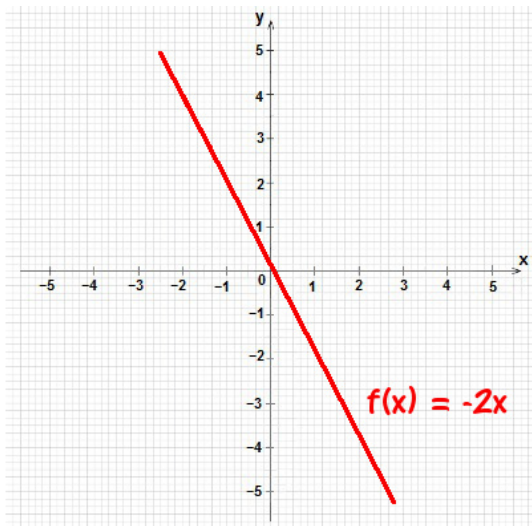


Figura 1.13

Está função é bijetora, ímpar, estritamente decrescente e sua inversa é f^{-1}(x)=-$\dfrac{x}{2}$.

Teorema 1.8.9. *Seja: f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmação são equivalentes:*
(1) f(nx) = nf(x) para todo n $\in$ Z e todo x $\in \mathbb{R}$.
(2) Pondo a = f(1), tem-se f(x) = ax para todo x $\in \mathbb{R}$.
(3) f(x + y) = f(x) + f(y) para quaisquer x, y $\in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.8.10. *Se investirmos a quantia x, digamos numa caderneta de poupança, depois de um ano teremos um capital f(x). Evidentemente, f é uma função crescente de x: quanto mais se aplica mais se recebe no final. Além disso, tem-se f(nx)=nf(x) para todo n $\in \mathbb{N}$ e todo x. De fato esta igualdade significa que tanto faz abrir um caderneta de poupanção com o capital inicial x' = nx como abrir(no mesmo dia) n cadernetas, cada uma com valor inicial x. O Teorema anterior nos permite concluir que f(x) é proporcional a x. Mais precisamente, se a aplicação de 1 real der, no final de um ano, um valor de resgate igual a a, então o capital inicial de x reais se* *transformará em f(x) = ax no final de um ano. (Não confundir este exemplo com o crescimento do capital em função do tempo. Este não é proporcional, é uma função exponencial, a qual estudaremos posteriormente).*

1.8.2 Zero da Função Afim

Definição 1.8.11. *O zero de uma função é todo número x cuja imagem é nula, isto é, x é zero de f(x) se, somente se f(x) = 0.*

Exemplo 1.8.12. *O zero da função f(x) = 2x - 4 é x = 2 pois, fazendo 2x - 4 = 0, teremos que x = 2.*

Podemos interpretar o zero da função afim como sendo a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos x.

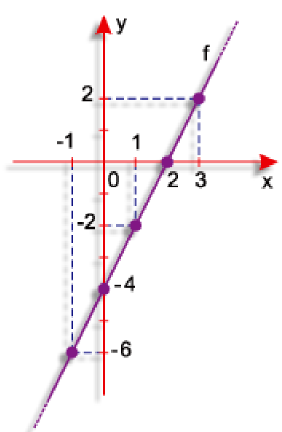


Figura 1.14

1.8.3 Sinal de uma Função Afim

Estudar o sinal de uma função f é determinar os valor de x para os quais f(x) é positivo, os valores de x para os quais f(x) é zero e os valores de x para os quais f(x) é negativo.

Consideremos uma função afim f(x) = ax + b vamos estudar seu sinal. Sabemos que essa função se anula para a raiz x = - $\frac{b}{a}$. Há dois casos possíveis:

1º) a > 0 (a função é crescente)

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

Conclusão: f(x) é positivo para valores de x maiores que o zero da função; f(x) é negativo para valores de x menores que o zero da função.

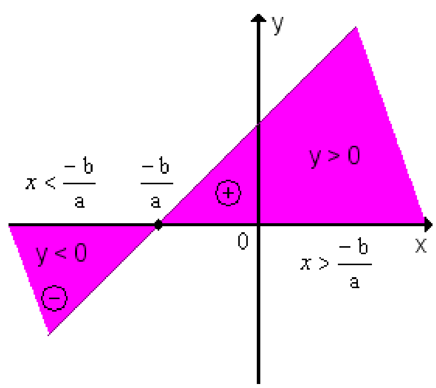


Figura 1.15

Exemplo 1.8.13. *f(x) = 3x - 9*

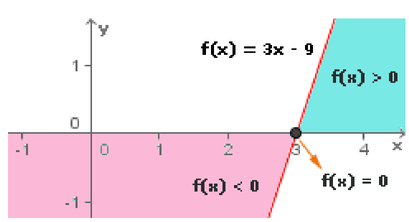


Figura 1.16

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x - 9 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 3x - 9 < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

2º) a < 0 (a função é decrescente)

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Conclusão: f(x) é positivo para valores de x menores que o zero da função; f(x) é negativo para valores de x maiores que o zero da função.

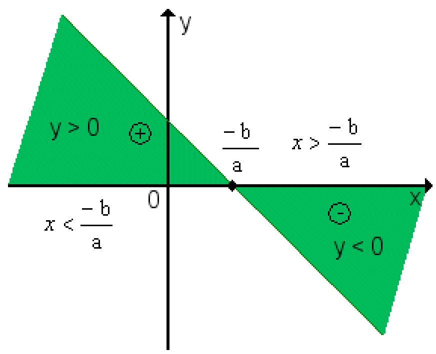


Figura 1.17

Exemplo 1.8.14. *f(x) = -2x + 4*

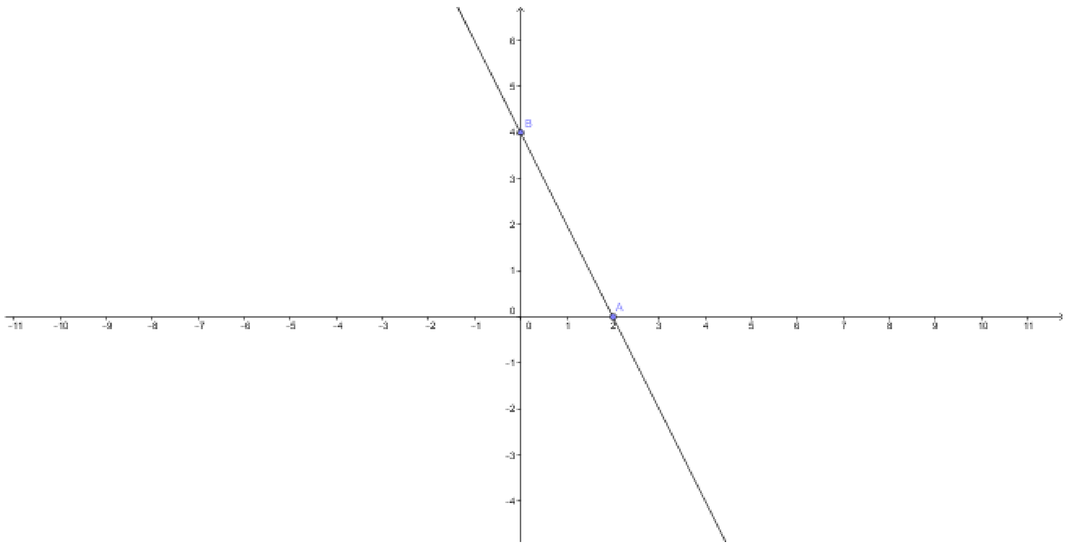


Figura 1.18

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

1.9 Função Polinomial do 2º Grau ou Função Quadrática

Definição 1.9.1. *A função f:*$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por f(x) =* $ax^2 + bx + c$, *com* $a \neq O$ *é chamada função polinomial do 2º grau ou função quadrática. Seu domínio é D(f) =* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.9.2. *f(x) =* $2x^2 + 3x - 5$

1.9.1 Gráficos

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y.

Se a > O, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se a < O, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

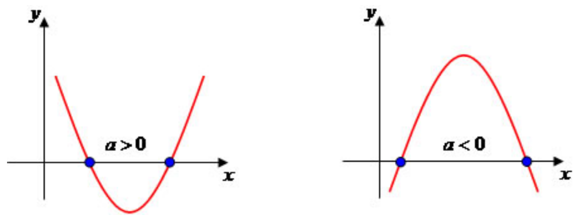


Figura 1.19

Exemplo 1.9.3. *f(x) = $2x^2 + 5x$ (a = 2, b = 5 e c = 0)*

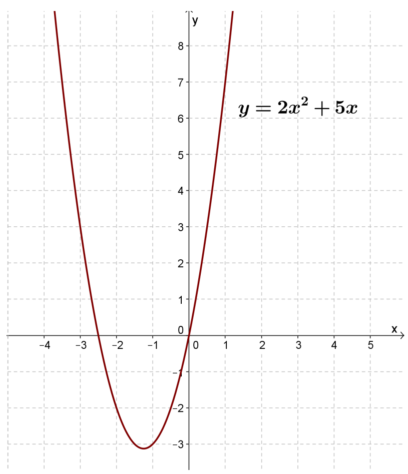


Figura 1.20

1.9.2 Zeros da Função Quadrática

Definição 1.9.4. *Chama-se zeros ou raízes da função quadrática f(x)= ax^2+bx+c , $a \neq 0$, os números reais x tais que f(x) = 0.*

Então as raízes da função f(x) = $ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde $b^2 - 4ac = \triangle$ é chamado de discriminante.

Exemplo 1.9.5. *f(x) = x^2 - 8x + 15*

x^2 - 8x + 15 = 0 $\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.15}}{2.1} =$
$= \dfrac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$. Logo: $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$.

Exemplo 1.9.6. *Duas torneiras juntas enchem um tanque em 12 horas. Uma delas, sozinha, levaria 10 horas a mais que a outra para enchê-lo. Quantas horas leva cada torneira para encher esse tanque?*

Solução: Convencionemos que uma das torneiras leva x horas para encher o tanque, e que a outra o faz em x + 10 horas. Assim, em uma hora, cada torneira contribui, respectivamente, com $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{x+10}$ do volume total do tanque. Como, juntas, elas enchem o tanque em 12 horas, temos que, em uma hora, elas enchem $\dfrac{1}{12}$ do seu volume. Segue que, podemos escrever:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$$

Isto resulta na equação do 2º grau: x^2 - 14x - 120 = 0,
cujas soluções são 20 e -6. Uma vez que não há sentido em x = -6 temos que uma das torneiras enche o tanque em 20 horas, enchendo-o a outra em 20 + 10 = 30 horas.

1.9.3 Número de Raízes

* Quando $\triangle$ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
* Quando $\triangle$ é zero, há duas raízes reais e iguais, ou seja, uma única raiz real;
* Quando $\triangle$ é negativo, não há raiz real.

Exemplo 1.9.7. *A função f(x) = $2x^2$ - 3x + 5 não possui raízes reais, pois,*
$\triangle = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.2.5 = 9 - 40 = -31.$

1.9.4 Vértice da Parábola

O vértice da parábola pode ser o ponto de máximo absoluto ou de mínimo absoluto da função polinomial do 2º grau. Se a concavidade da parábola for voltada para cima, o vértice é o ponto de mínimo da função, ou seja, é o menor valor que a função pode assumir. Se a concavidade da parábola estiver voltada para baixo, o vértice é o ponto de máximo da função, ou seja, o maior valor que a função pode assumir.

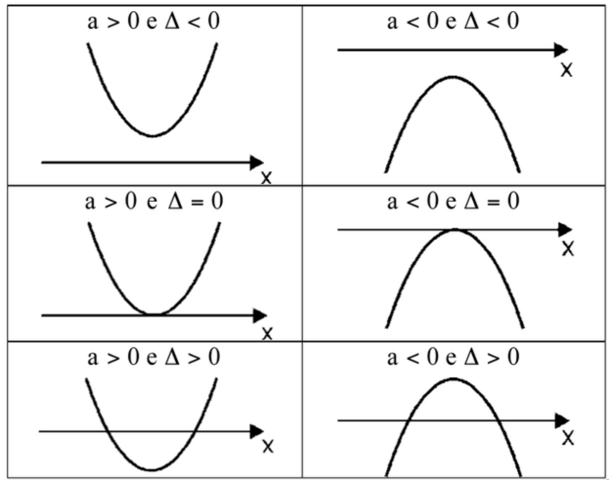


Figura 1.21

Quando a $>$ 0, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V;

Quando a $<$ 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.

$$V(x_v, y_v) \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\triangle}{4a}$$

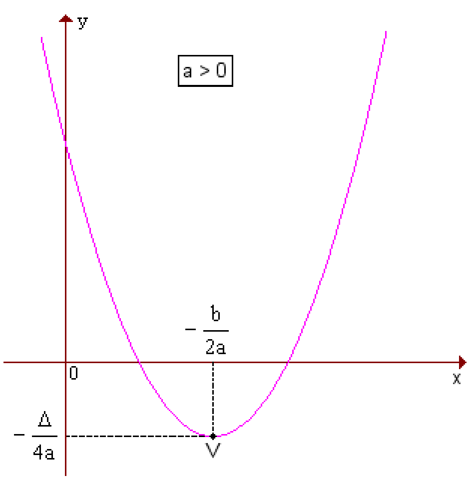


Figura 1.22

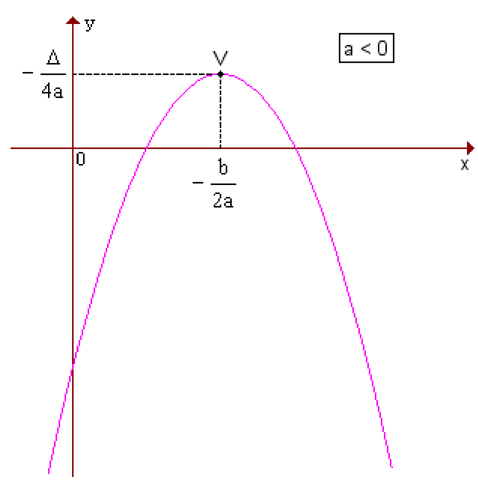


Figura 1.23

Exemplo 1.9.8. *Para produzirmos x unidades de uma mercadoria, temos que o custo dessa produção em reais é dado pela expressão matemática* $C = x^2 - 80x + 3000$. *Com* *base nessa expressão, determine a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo e qual o valor mínimo do custo.*

Quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo será de 40 peças.
Observe: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-80)}{2.1} = 40.$
Valor mínimo do custo será de 1400,00 reais.
Veja: $y_v = \dfrac{-\triangle}{4a} = \dfrac{-[(-80)^2 - 4.1.3000]}{4.1} = \dfrac{5600}{4} = 1400.$

1.9.5 Estudo dos Sinais

Consideramos uma funo quadrática f(x) = ax^2 + bx + c e determinemos os valores de x para os quais f(x) é negativo e os valores de x para os quais f(x) é positivos.

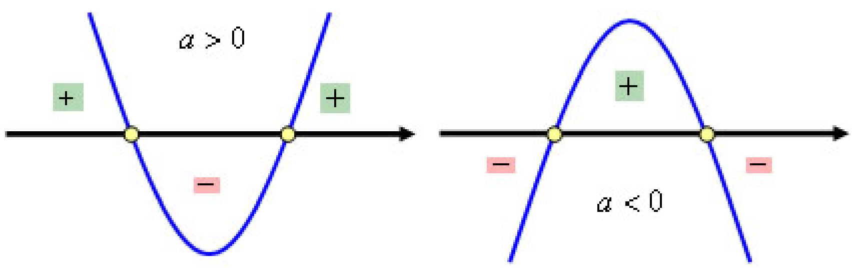


Figura 1.24

Exemplo 1.9.9. *Vamos estudar os sinais da função f(x) = x^2 + 2x - 3*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Logo: $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$.

Portanto:

x> 1 e x< -3 $\Rightarrow$ f(x) > 0

-3 < x< 1 $\Rightarrow$ f(x) < 0

x = -3 e x = 1 $\Rightarrow$ f(x) = 0

1.10 Função Polinomial

Definição 1.10.1. *Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita polinomial, se esta é escrita da forma f(x)= $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1,\ a_0$ são números reais chamados coeficientes e n, é um inteiro não negativo chamado o grau da função.*

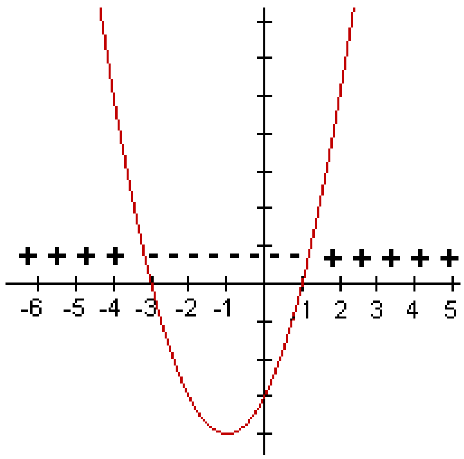


Figura 1.25

O domínio é sempre o conjunto dos números reais.

Exemplo 1.10.2. *(1) A função constante f(x) = k é uma função polinomial de grau zero, pois n= 0 (com exceção do caso k = 0);*
(2) A função f(x) = ax + b, a $\neq$ O é uma função polinomial do 1º grau, pois n = 1;
(3)A função quadrática f(x) = ax^2 + bx + c, a $\neq$ O é uma função polinomial do 2º grau, pois n =2;
(4)A função f (x) = x^3 + 1 é um caso particular de função polinomial chamada função polinomial cúbica (3º grau), pois n = 3;
(5)A função f(x) = -$2x^5$ 5x + 3 é uma função polinomial de grau 5, pois n = 5.

Exemplo 1.10.3. *O gráfico da função f(x) = $2x^3$ - $8x^2$ é:*

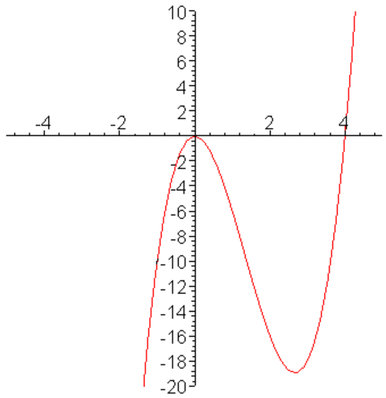


Figura 1.26

1.11 Função Modular

1.11.1 Módulo ou Valor Absoluto

Definição 1.11.1. *O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, que se indica por $|x|$ é definido da seguinte maneira:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geqslant 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.11.2. $|5| = 5; |-5| = -(-5) = 5.$

Definição 1.11.3 (Função Modular)**.** *A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = $|x|$ chama-se função modular. O seu domínio é o conjunto $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é Im(f) = [O, $+\infty$[.*

Exemplo 1.11.4. *f(x) = $|x-1|$, onde: D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = [O, $+\infty$[. (Esse exemplo ilustra uma composição de função afim com função modular)*

1.11.2 Gráfico

Exemplo 1.11.5. *f(x)* $= |x+1| = \begin{cases} x+1, & se \quad x+1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant -1 \\ -(x+1), & se \quad x+1 < 0 \Longrightarrow x < -1 \end{cases}$. *Ou seja, para x maiores ou igual a -1 tem seu valor igual a função afim definida por* *g(x)= x+1 e para x menores dom que -1 tem seu valor igual a função afim definida por h(x) = - x - 1.*

Dessa forma, obtemos o gráfico:

x	y = | x + 1 |
-3	y = | - 3 + 1 | = 2
-2	y = | - 2 + 1 | = 1
-1	y = | - 1 + 1 | = 0
0	y = | 0 + 1 | = 1
1	y = | 1 + 1 | = 2
2	y = | 2 + 1 | = 3
3	y = | 3 + 1 | = 4
4	y = | 4 + 1 | = 5

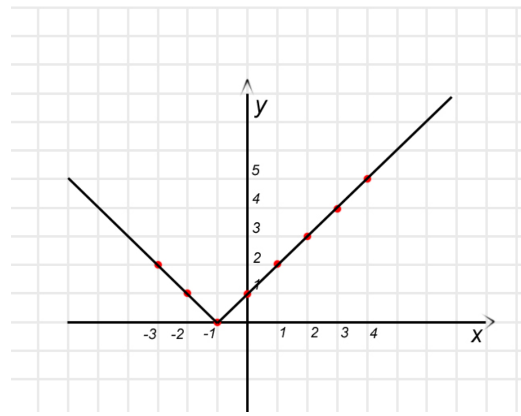


Figura 1.27

Onde: D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}_+$

1.12 Função Potência

Definição 1.12.1. *Qualquer função que pode ser escrita na forma f(x) = $k.x^a$ onde k e a são constantes diferentes de zero, é uma função potência. A constante a é a potência (ou o expoente) e k é a constante de variação ou constante de proporção. Dizemos que f(x) varia como a a-ésima potência de x ou que f(x) é proporcional à a-ésima potência de x.*

Em geral, se y = f(x) varia como uma potência constante de x então y é uma função potência de x.

Exemplo 1.12.2. *(1) Comprimento da circunferência de raio r é descrito por: C=$2\pi r$, expoente igual a 1 e constante de variação igual a 2π (O comprimento da circunferência varia diretamente com o seu raio).*
(2) Área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$, expoente igual a 2 e constante de variação igual a π (A área dentro de um círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio).
(3) Força da gravidade: $F = \dfrac{K}{d^2}$, expoente igual a -2 e constante de variação igual a k (A força de gravidade agindo sobre um objeto é inversamente proporcional ao

quadrado da distância do objeto ao centro da Terra(d)).
(4)Lei de Boyle: $V = \frac{k}{P}$*, expoente igual a -1 e constante de variação igual a k (A lei de Boyle afirma que o volume de um gás armazenado em uma temperatura constante varia inversamente com relação à pressão aplicada).*

As fórmulas de função potência com potências positivas (expoentes positivos) são exemplos de variação direta, e fórmulas de função potência com potências negativas (expoentes negativos) são exemplos de variação inversa. A menos que a palavra inversamente esteja incluída, em um exemplo de variação, ela é assumida como direta.

Exemplo 1.12.3.

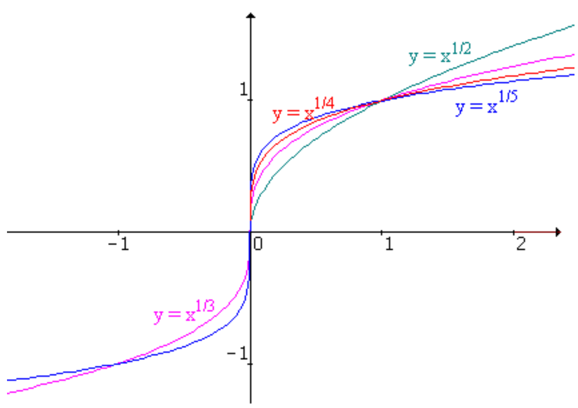


Figura 1.28

1.13 Função Exponencial

Definição 1.13.1. *Chamamos função exponencial à função f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = a^x$*, onde* $0 < a \neq 1$*.*

O domínio da função exponencial é D(f) = $\mathbb{R}$. A imagem é Im(f) = $(0, \infty) = \mathbb{R}_+^*$.

Exemplo 1.13.2. $f(x) = 2^x$, $f(x) = (\sqrt{3})^x$, $f(x) = e^x$.

Representação Gráfica:

Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$ podemos afirmar:

(1) a curva que o representa está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x > O$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1);

(3) $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

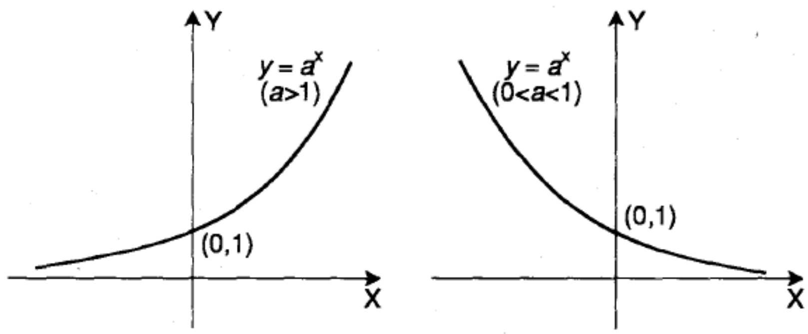


Figura 1.29

Exemplo 1.13.3.

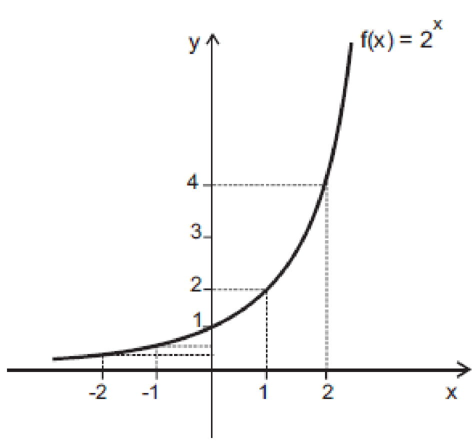


Figura 1.30

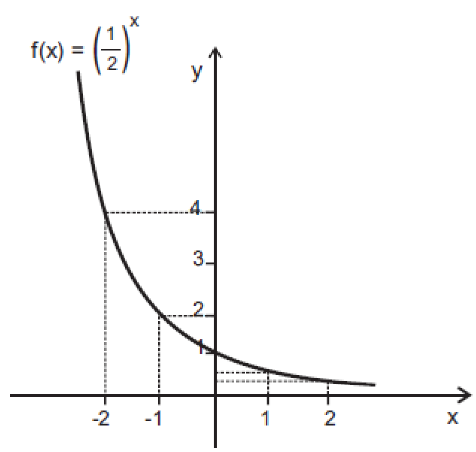


Figura 1.31

1.14 Função Logarítmica

Definição 1.14.1. *Definimos função logarítmica como a função f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = $log_a x$, onde $0 < a \neq 1$.*

As funções f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = $log_a x$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por f(x) = a^x; $O < a \neq 1$, são inversas uma da outra.

Exemplo 1.14.2. *f(x) = $log_2 x$, f(x) = $log x$.*

Representação Gráfica:

Com relação ao gráfico da função f(x) = $log_a x$ (0 < a $\neq$ 1), podemos afirmar:
(1) está todo à direita do eixo y;
(2) corta o eixo das abscissas no ponto (1, 0);
(3) f(x) = $log_a x$ é crescente se a > 1 e decrescente se $0 < a < 1$;
(4) é simétrico ao gráfico da função g(x) = a^x em relação a reta y = x.

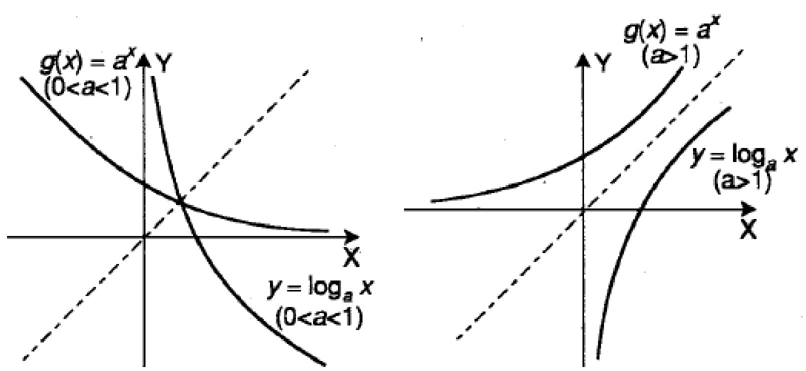


Figura 1.32

Exemplo 1.14.3.

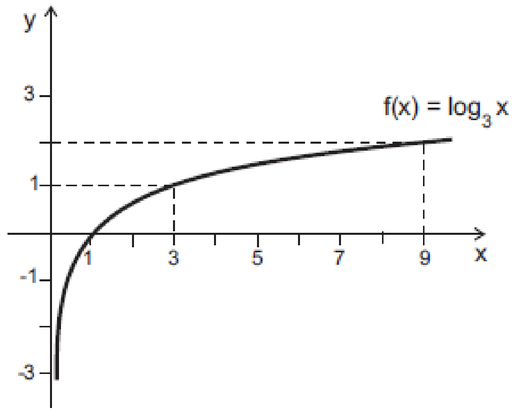


Figura 1.33

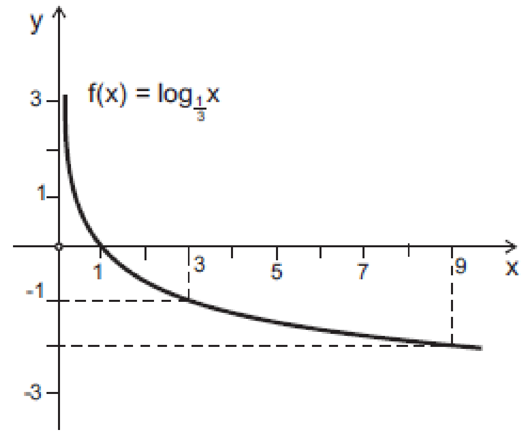


Figura 1.34

1.15 Funções Trigonométricas

1.15.1 Função Seno

Seja x um número real. Marcamos um ângulo com medida x radianos, na circunferência unitária com centro na origem. Seja P o ponto de interseção do ângulo x, com essa circunferência.

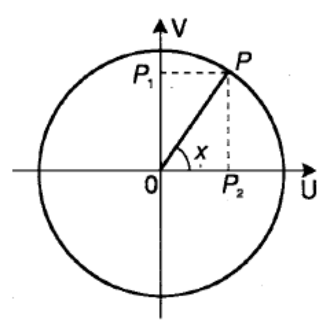


Figura 1.35

Denominamos seno de x a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema U0V e denotamos por sen x.

Definição 1.15.1 (Função Seno)**.** *Definimos a função seno como a função f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por: f(x) = sen x.*

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo [-1, 1].

A função y = sen x é periódica e seu período é 2π, já que sen $(x + 2\pi)$ = sen x.

Em alguns intervalos sen x é crescente e em outros é decrescente. Por exemplo, nos intervalos $[0, \pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$ a função f(x) = sen x é crescente. Já no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ ela é decrescente.

O gráfico da função f (x) = sen x, denominado senóide.

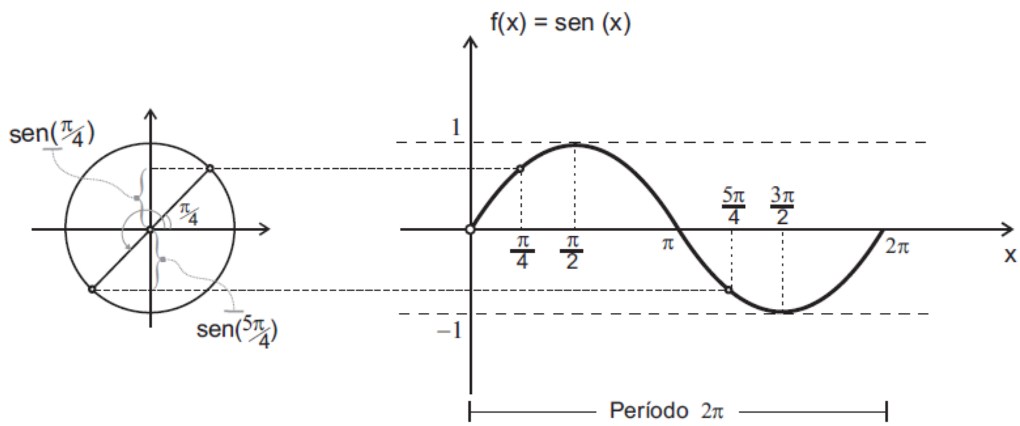


Figura 1.36

1.15.2 Função Cosseno

Denominamos cosseno de x a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema U 0 V (Figura 1.35).

Definição 1.15.2 (Função Cosseno)**.** *Definimos a função cosseno como a função f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por: f(x) = cos x.*

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo [-1, 1].

A função y = cos x é periódica e seu período é 2π, já que cos $(x + 2\pi)$ = cos x.

Em alguns intervalos cos x é crescente e em outros é decrescente. Por exemplo, nos intervalos $[0, \pi]$ a função f(x) = cos x é crescente. Já no intervalo $[\pi, \pi/2]$ ela é decrescente.

O gráfico da função f (x) = cos x, denominado cossenóide.

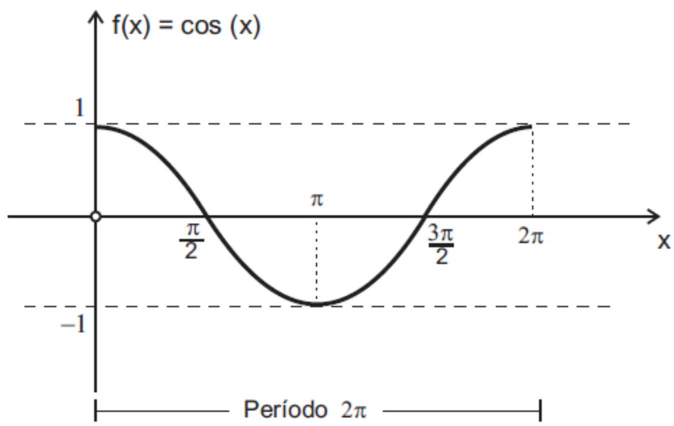


Figura 1.37

1.15.3 Função Tangente, Secante, Cossecante e Cotangente

Estas funções são definidas em termos das funções seno e cosseno.

As funções tangente e secante são, respectivamente, denotadas pelos símbolos tg e sec e definidas por:

$$\text{tg x} = \frac{senx}{cosx}; \ \text{sec x} = \frac{1}{cosx}$$

para todos os números reais x tais que cos x $\neq$ 0.

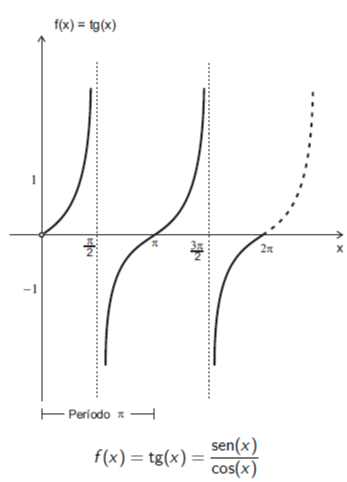


Figura 1.38

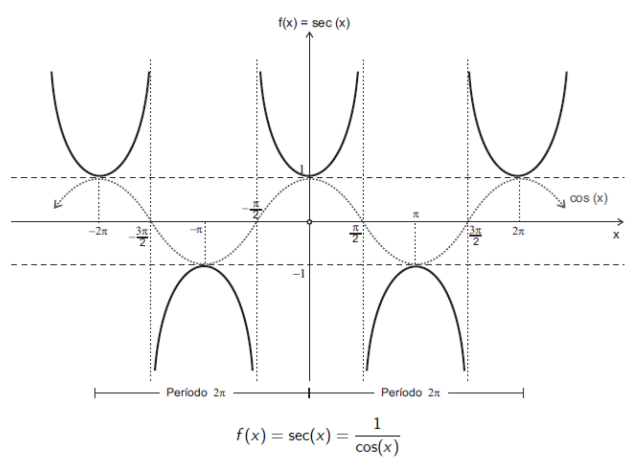


Figura 1.39

As funções cotangente e cossecante são, respectivamente, denotadas por cotg e cosec e definidas por:

$$\text{cotg x} = \frac{1}{tgx} = \frac{cosx}{senx}; \text{ cosec x} = \frac{1}{senx}$$

para todos os números reais x tais que sen x $\neq$ 0.

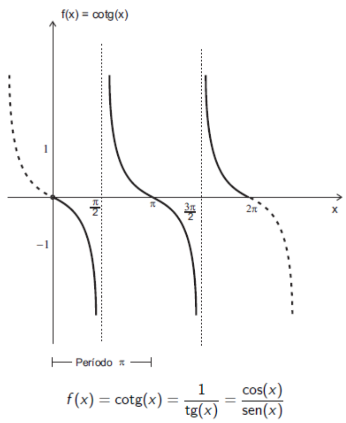


Figura 1.40

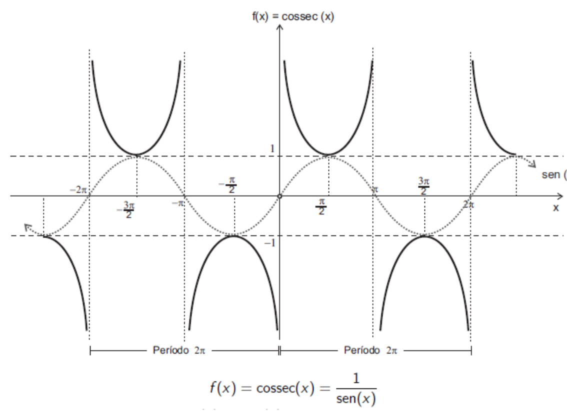


Figura 1.41

O domínio das funções f(x) = tg x e f(x) = sec x é o conjunto de todos os números reais x para os quais cos x $\neq$ 0. Como cos x = 0 quando x for $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ..., isto é, quando x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in$ Z, temos D(tg) = D(sec) = $\{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

Analogamente, o domínio das funções cotangente e cossecante é o conjunto de todos os números reais x para os quais sen x $\neq$ 0. Como sen x = O para x = $k\pi$, $k \in$ Z, temos D(cotg) = D(cosec) = $\{x \in \Re / x \neq k\pi, k \in Z\}$.

Podemos observar, através das figuras 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5, que as funções tangente e cotangente são periódicas de período π e que as funções secante e cossecante são periódicas de período 2π.

1.16 Funções Trigonométricas Inversas

Sabemos que é impossível definir uma função inversa para a função y = sen x, porque a cada valor de y $\in$ [-1, 1] corresponde uma infinidade de valores de x. Visto que sen(x + 2kπ) = sen x, $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$.

Portanto, para definirmos a função inversa de y = sen x necessitamos restringir o domínio.

Este fato ocorre com todas as demais funções trigonométricas.

1.16.1 Função Arco Seno

Definição 1.16.1 (Função Arco Seno). *Seja f:* $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *a função definida por f(x) = sen x. A função inversa da f(x), será chamada arco seno, e denotada por* f^{-1}*:* $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$*, onde* $f^{-1}(x)$ *= arc sen x.*

O gráfico desta função nos mostra uma função crescente(Figura 1.42).

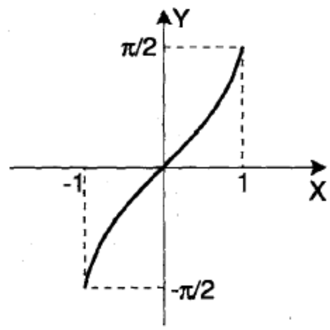


Figura 1.42

Observamos que na definição da função arco seno poderíamos ter restringido o domínio de y = sen x a qualquer dos seguintes intervalos:
$[\pi/2, 3\pi/2]$; $[3\pi/2, 5\pi/2]$; $[5\pi/2, 7\pi/2]$; ...; ou
$[-3\pi/2, -\pi/2]$; $[-5\pi/2, -3\pi/2]$; $[-7\pi/2, -5\pi/2]$; ...

1.16.2 Função Arco Cosseno

Definição 1.16.2 (Função Arco Cosseno). *Seja f:* $[0, \pi] \to [-1, 1]$ *a função definida por f(x) = cos x. A função inversa da f(x), será chamada arco cosseno, e denotada por* f^{-1}*:* $[-1, 1] \to [0, \pi]$*, onde* $f^{-1}(x)$ *= arc cos x.*

O gráfico desta função nos mostra uma função decrescente(Figura 1.43).

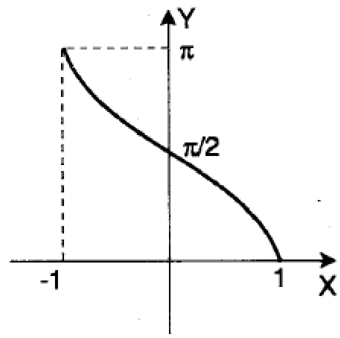


Figura 1.43

1.16.3 Função Arco Tangente

A função inversa da tangente é definida para todo número real.

Definição 1.16.3 (Função Arco Tangente)**.** *Seja f:* $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ *a função definida por f(x) = tg x. A função inversa da f(x), será chamada arco tangente, e denotada por* f^{-1}*:* $\mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$*, onde* $f^{-1}(x)$ *= arc tg x.*

O gráfico nos mostra que quando x se torna muito grande, arc tg x aproxima-se de $\pi/2$. Quando x se torna muito pequeno, arc tg x se aproxima de - $\pi/2$. É uma função crescente (Figura 1.44).

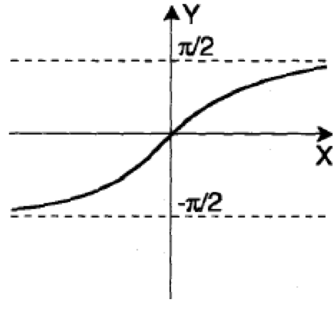


Figura 1.44

1.16.4 Função Arco Cotangente, Função Arco Secante e Função Arco Cossecante

Definição 1.16.4 (Função Arco Cotangente)**.** *Podemos definir a função inversa da cotangente como* $y = arc\ cotg\ x = \dfrac{\pi}{2}$ *- arc tg x, onde* $0 < y < \pi$*.*

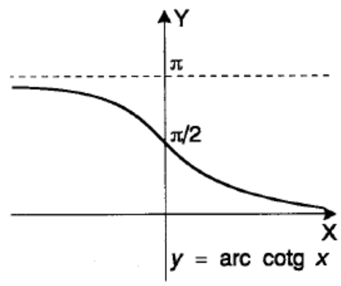


Figura 1.45

Definição 1.16.5 (Função Arco Secante e Função Arco Cossecante)**.** *As funções inversas da secante e da cossecante serão funções de x no domínio* $|x| \geqslant 1$ *desde que adotemos as definições:*
$y = arc\ sec\ x = arc\ cos(1/x)$
$y = arc\ cosec\ x = arc\ sen(1/x)$.

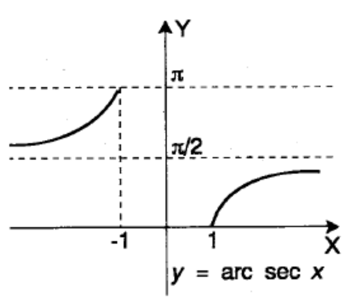


Figura 1.46

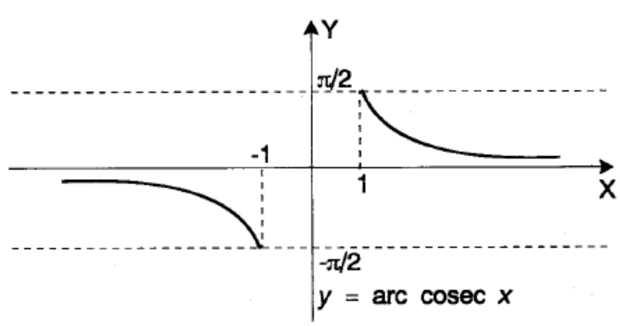


Figura 1.47

1.17 Funções Hiperbólicas

1.17.1 Seno Hiperbólico e Cosseno Hiperbólico

A função seno hiperbólico, denotada por senh, e a função cosseno hiperbólico, denotada por cosh, são definidas, respectivamente, por:

$\text{senh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(\text{x}) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

O domínio e imagem das funções senh(x) e cosh(x) são:

D(senh) = D(cosh) = $\mathbb{R}$, Im(senh) = $\mathbb{R}$ e Im(cosh) = $[1, \infty)$.

O gráfico da função senh é dado na Figura 1.48(a). Pode ser obtido pelo método chamado adição de ordenadas. Para usar essa técnica, esboçamos os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejados) e somamos as respectivas ordenadas.

Da mesma forma obtemos o gráfico da função cosh (Figura 1.48(b)).

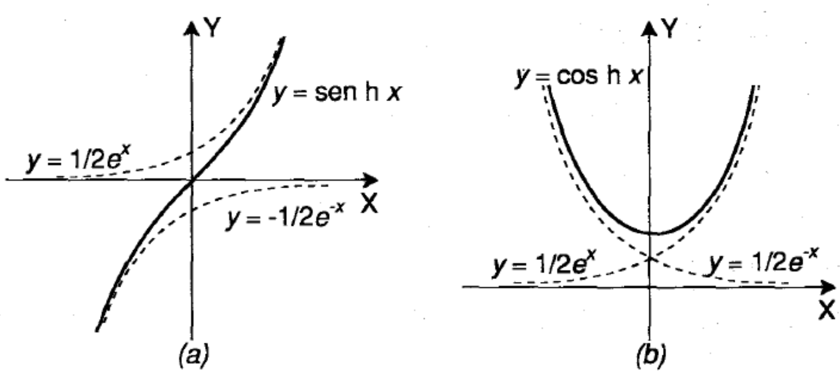


Figura 1.48

Exemplo 1.17.1. *A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, uniforme, cujas extremidades estão fixas a uma mesma altura.*

Na Figura 1.49 desenhamos um fio de telefone ou de luz. Observamos que a curva representada pelo fio aparenta a forma de uma parábola. No entanto, é possível mostrar que a equação correspondente é: $y = \cosh\,(x/a)$, $a \in \mathbb{R}$.
Esta curva recebe a denominação catenária.

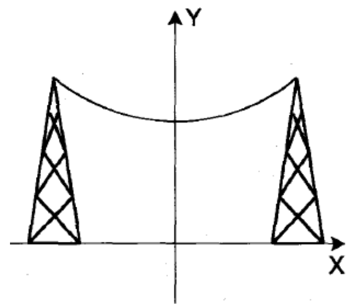


Figura 1.49

1.17.2 Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante Hiperbólicas

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, denotadas respectivamente por tgh, cotgh, sech e cosech são definidas por:

$$\text{tgh} = \frac{senh}{cosh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$\text{cotgh} = \frac{cosh}{senh} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$\text{sech} = \frac{1}{cosh} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \text{ e}$$

$$\text{cosech} = \frac{1}{senh} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Os gráficos dessas função podemos observar abaixo:

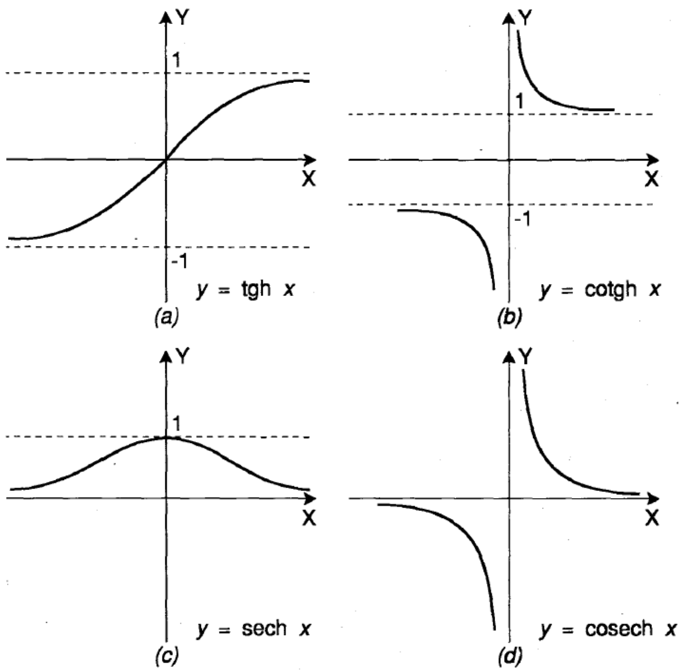


Figura 1.50

Muitas identidades análogas às conhecidas para funções trigonométricas são válidas para as funções hiperólicas. Por exemplo, pode-se verificar que:

$cosh^2 u - senh^2 u = 1;$

$cotghu = \dfrac{1}{tghu} = \dfrac{coshu}{senhu};$

$1tgh^2 u = sech^2 u$ e

$1cotgh^2 u = cosech^2 u.$

1.18 Funções Hiperbólicas Inversas

1.18.1 Inversa do Seno Hiperbólico

Analisando o gráfico da função y = senh x (Figura 1.48 (a)), vemos que a cada valor de y na imagem corresponde um único valor de x no domínio. Assim, podemos definir a sua função inversa.

A função inversa do seno hiperbólico, chamada argumento do seno hiperbólico e denotada por arg senh, é definida como segue:

$$\text{y} = \text{arg senh x} \Leftrightarrow \text{x} = \text{senh y}$$

Temos D(arg senh x) = Im (arg senh x) = $\mathbb{R}$.

O gráfico da função arg senh pode ser visto na Figura 1.51. Ele é obtido fazendo uma reflexão do gráfico da função senh sobre a reta y = x.

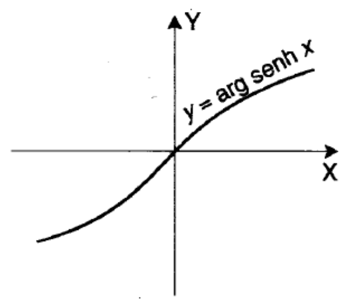


Figura 1.51

1.18.2 Inversa do Cosseno Hiperbólico

Para definirmos a inversa da função cosseno hiperbólico precisamos restringir o seu domínio, pois como podemos ver no seu gráfico, Figura 1.48(b), a cada valor de y na imagem, exceto y = 1, correspondem dois valores de x no domínio.

Seja f: $[0, +\infty) \to [1, +\infty)$ a função dada por f(x) = cosh x. A sua função inversa é chamada argumento do cosseno hiperbólico e é denotada por arg cosh. Simbolicamente, para y $\geqslant$ O, escrevemos:

$$\text{y} = \text{arg cosh x} \Leftrightarrow \text{x} = \text{cosh y}$$

Temos D(arg cosh x) = $[1, +\infty)$ e Im(arg cosh x) = $[0, +\infty)$.

O gráfico pode ser visto na Figura 1.52.

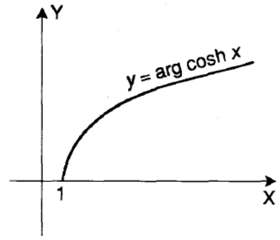


Figura 1.52

1.18.3 Inversas das Funções Tagente Hiperbólica, Cotangente Hiperbólica e Cossecante Hiperbólica

Para definirmos as inversas destas funções não necessitamos restringir os seus domínios, pois a cada valor de y na imagem corresponde um único valor de x no domínio [ver Figura 1.50,(a), (b) e (d)].

As funções inversas da tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica e cossecante hiperbólica, denotadas respectivamente por arg tgh, arg cotgh e arg cosech, são definidas como segue:

$$\begin{gathered}
\mathrm{y} = \mathrm{arg\ tgh\ x} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{tgh\ y}; \\
\mathrm{y} = \mathrm{arg\ cotgh\ x} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{cotgh\ y}; \\
\mathrm{y} = \mathrm{arg\ cosech\ x} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{cosech\ y}.
\end{gathered}$$

A Figura 1.53 mostra um esboço dos gráficos dessas funções.

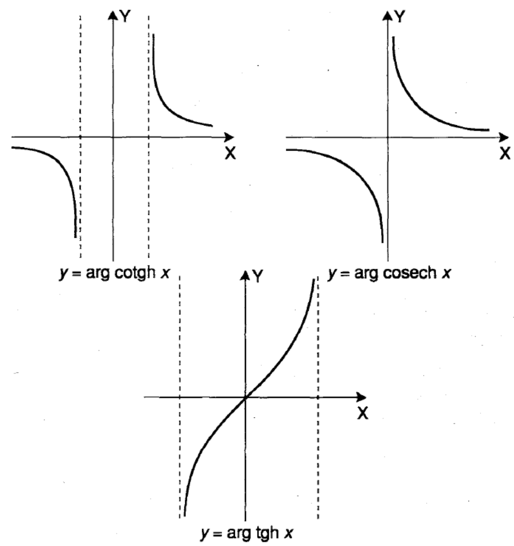


Figura 1.53

1.18.4 Inversa da Funções Secante Hiperbólica

Da mesma forma que ocorreu com a inversa do cosseno hiperbólico, para definirmos a inversa da função secante hiperbólica devemos restringir seu domínio.

Seja f: $[0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ a função dada por f(x) = sech x. A sua função inversa é denotada por arg sech. Simbolicamente, para y $\geqslant$ O, temos:

$$\text{y} = \text{arg sech x} \Leftrightarrow \text{x} = \text{sech y}$$

Na Figura 1.54 podemos ver um esboço do gráfico da função arg sech.

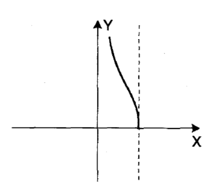


Figura 1.54

Capítulo 2

Modelagem Matemática e Aplicações

2.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática é usada a bastante tempo. Suas raízes são buscadas pelos pesquisadores através da análise da história a ciência e seus grandes pensadores.

Contudo, no incio do século XX, foi o período no qual ela foi muito utilizada na resoluão de problemas de biologia e economia e também nas aulas de matemática.

A modelagem matemática se define simplesmente, como um processo utilizado para se obter modelos matemáticos, uma vez que a modelagem expressa situações-problema reais através da linguagem matemática.

Para Bassanezi [1], a modelagem transforma problemas reais em problemas matemáticos. Dessa maneira ajuda a entender a matemática no cotidiano.

Já Skovsmose [2] afirma que o seu ambiente de aprendizagem convida e estimula os alunos a desenvolver atividades mas, além do convite é necessário abordar os seus interesses no ambiente, assim como Barbosa que acrescenta que esse ambiente estimula também explorações e investigações matemáticas de situações de outras áreas e que deve ser privilegiado o trabalho com situações reais do dia-a-dia do aluno.

Além de possibilitar a conexão de conteúdos matemáticos com outras áreas, o uso da modelagem também ajuda ao aluno na ampliaç ao do seu conhecimento matemático e em sua maneira de pensar e agir.

---

[1] BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. p. 16.

[2] SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. 160 p.

2.2 Modelo Matemático

Um modelo matemático é uma representação de um modelo real. A modelagem pode ser aplicada a vários tipos de problemas.

Um modelo tem como principal objetivo permitir enteder de forma bem simples e precisa o próprio modelo. Ele é a simplificação do mundo real com suas características essenciais e comportamento parecido com o do sistema modelado.

Um conjunto de equações que representam as hipóteses que foram usadas na construção do modelo é o que constitui um modelo matemático. Essas equações interpretam as hipóteses de um ponto de vista quantitativo e nos ajudam a deduzir consequências e também nos mostra onde estão os detalhes que deverão ser aceitos ou não.

2.3 Aplicações

2.3.1 Exemplo de Função Afim

Supondo que um usuário crônico de drogas fume diariamente 5 cigarros de maconha contendo 500 mg cada um e que a concentração de THC (tetrahidrocanabinol) de cada cigarro de 1%. Qual é a concentração desta substância no organismo do usuário com o passar do tempo?

(Referência: (Artigo) A Modelagem Matemática e o Uso da Maconha - Liliane Rose Refati)

Solução: A tabela a seguir mostra a concentração de THC no organismo desse indivíduo com o passar do tempo.

Dia	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
Cigarro	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
THC (mg)	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275

Assim, se cada cigarro de maconha possue 500 mg, em 5 cigarros teremos 5.500 = 2500 mg.

Logo,

$T_0 = 0$, ou seja no 1º dia, teremos: 1% de 2500 mg = 25 mg;

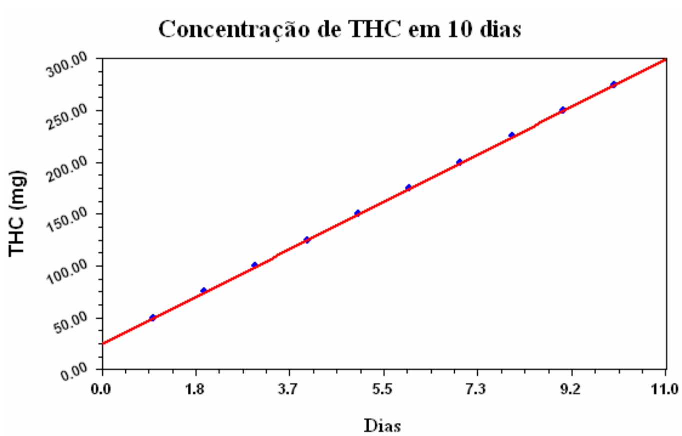
$T_1 = 1$, ou seja no 2º dia, teremos: 2 . (1% de 2500 mg) = 50 mg;

$T_2 = 2$, ou seja no 3º dia, teremos: 3 . (1% de 2500 mg) = 75 mg; ...

Ou seja, sendo x o tempo medido em dias e y a concentração de THC, temos que a concentração de THC no organismo do usuário com o passar do tempo é dada por: f(x) = y = 25x + 25. Onde representa uma função polinomial do 1º grau, crescente e bijetora, com domínio: D = [0, $+\infty$[, contra-domínio: CD = [25, $+\infty$[e imagem: Im = [25, $+\infty$[.

Análise da solução: Em 10 dias esse indivíduo possuirá em seu organismo um total de 275 mg de THC. Com o passar do tempo aumentará a concentração de THC, levando, este indivíduo a ter sérios problemas cardiovasculares ou até mesmo desenvolver um câncer de pulmão entre outras doenças.

Graficamente, temos:



Ou seja, com o passar do tempo percebe-se que a concentração de THC no organismo cresce linearmente.

2.3.2 Exemplos de Função Exponencial

1) Uma xícara de café contêm cerca de 100 mg de cafeína; a cada hora, aproximadamente 16% da quantidade de cafeína no corpo é metabolizada e eliminada.

a) Escreva C, a quantidade de cafeína no corpo, em mg, como uma função do número, t, de horas desde que o café foi consumido.

b) Qual a quantidade de cafeína presente no corpo após 5 horas?

(Referência: (Livro) Funções para Modelar Variações - Eric Connally)

Solução:

a)Para t = 1, ou seja a quantidade de cafeína no corpo após 1 hora, temos: C = 100 - (16% de 100) = 100 - 0,16 . 100 = 100(1 - 0,16) = 100 . 0,84;
Para t = 2, ou seja a quantidade de cafeína no corpo após 2 hora, temos: C = 100 .0,84 - (16% de 100.0,84) = 100 . 0,84 . (1 - 0,16) = 100 . 0,84^2;
Para t = 3, ou seja a quantidade de cafeína no corpo após 3 hora, temos: C = 100 .0,84^2 - (16% de 100.0,84^2) = 100 . 0,84^2 . (1 - 0,16) = 100 . 0,84^3;

Ou seja, em t horas tem-se, C = 100 . (0,84)^t.

b) Após 5 horas, teremos: C = 100 . (0,84)^5 = 41,821 mg.

2) Suponha que 2 mg de uma droga sejam injetados na corrente sanguínia de uma pessoa. À medida que a droga vai sendo metabolizada, a quantidade diminui a uma taxa contínua de 4% por hora.

a) Determine uma fórmula para Q(t), a quantidade de droga que permanece no corpo, após t horas.

b) Por qual percentual decresce o nível da droga durante uma hora qualquer?

c) A pessoa deve receber uma dose adicional de 2 mg da droga sempre que o nível tiver diminuído para 0,25mg. Quando deverá a pessoa receber a segunda dose?

d) Quando deverá a pessoa receber a terceira dose?

(Referência: (Livro) Funções para Modelar Variações - Eric Connally)

Solução: a) Para t = 1, temos: Q(1) = 2 - (4% de 2) = 2 - 0,04 . 2 = 2(1 - 0,04) = 2 . 0,96;
Para t = 2, temos: Q(2) = 2.0,96 - (4% de 2.0,96) = 2.0,96 - 0,04.2.0,96 = 2.0,96(1 - 0,04) = 2 . (0,96)^2;
Para t = 3, temos: Q(3) = 2.(0,96)^2 - [4% de 2.(0,96)^2] = 2.(0,96)^2 - 0,04.2.(0,96)^2 = 2.(0,96)^2(1 - 0,04) = 2 . (0,96)^3;

Ou seja, em t horas tem-se: Q(t) = 2 . (0,96)^t = 2 . e$^{ln(0,96)^t}$ = 2 . e$^{t.ln(0,96)}$ = 2 . e$^{-0,04t}$.

b) Pegaremos t = 2 e t = 3.

Para t = 2, temos: Q(2) = 2 . e$^{-0,08}$ e para t = 3, temos: Q(3) = 2 . e$^{-0,12}$.

Portanto, da terceira (t = 3) para a segunda (t = 2) hora, o decréscimo é de 2 . e$^{-0,08}$ - 2 . e$^{-0,12}$ = 2 . e$^{-0,08}$(1 - e$^{-0,04}$).

Logo, temos que 2 . e$^{-0,08}$ representa 100% e o decréscimo 2 . e$^{-0,08}$(1 - e$^{-0,04}$) representa 3,921%.

c) Se para receber uma dosagem adicional o nível deve estar em 0,25mg, teremos: 0,25 = 2 . e$^{-0,04t}$ $\Rightarrow \frac{0,25}{2} = e^{-0,04t} \Rightarrow ln(0,125) = ln(e^{-0,04t}) \Rightarrow -2,07944 =$

$-0,04t \Rightarrow t = 51,986$ horas.

d) Quando receber a segunda dosagem a pessoa ter 2,25 mg na corrente sanguínea, logo a fórmula da quantidade de drogas que permanece no corpo, após t horas, ser: Q(t) = 2,25 . $e^{-0,04t}$. Logo, 0,25 = 2,25 . $e^{-0,04t} \Rightarrow \frac{0,25}{2,25} = e^{-0,04t} \Rightarrow ln(0,11111) = ln(e^{-0,04t}) \Rightarrow -2,19732 = -0,04t \Rightarrow t = 54,933$ horas.

3) Quando se dá um medicamento a um paciente, a droga entra na corrente sanguínea. Ao passar pelo fígado e rins, é metabolizada e eleminada a uma taxa que depende da particular droga. Para o antibiótico ampicilina, aproximadamente 40% da droga é eliminado a cada hora. Uma dose típica de ampicilina é de 250 mg. Seja Q = f(t), onde Q é a quantidade de ampicilina, em mg, na corrente sanguínea, ao tempo t horas desde que a droga foi dada.

a) Determine uma fórmula para a quantidade de ampicilina Q = f(t), em mg, na corrente sangunea, aps t horas.

b) Construa o gráfico dessa função.

(Referência: (Livro) Funções para Modelar Variações - Eric Connally)

Solução: a) Como a cada hora a quantidade que resta é 60% da quantidade anterior, temos:

Para t = 0 $\rightarrow$ f(0) = 250;
Para t = 1 $\rightarrow$ f(1) = 60% de 250 $\rightarrow$ f(1) = 250 . (0,6);
Para t = 2 $\rightarrow$ f(2) = 60% de (250.0,6) $\rightarrow$ f(2) = 250 . $(0,6)^2$;
Para t = 3 $\rightarrow$ f(3) = 60% de [250.$(0,6)^2$] $\rightarrow$ f(2) = 250 . $(0,6)^3$;
e assim, após t horas, temos: Q = f(t) = 250 . $(0,6)^t$

b)

2.3.3 Exemplo de Função Exponencial e Logarítmica

A meia-vida da nicotina no sangue é de cerca de duas horas. Uma pessoa absorve cerca de 0,4 mg de nicotina em sua corrente sanguínea ao fumar um cigarro típico. Preencha a tabela seguinte com a quantidade de nicotina que ficou no sangue despois de t horas. Avalie o intervalo de tempo até que a quantidade de nicotina se reduza a 0,04 mg.

t(horas)	0	2	4	6	8	10
Nicotina (mg)	0,4					

(Referência: (Artigo) A Modelagem Matemática e o Uso da Maconha - Liliane

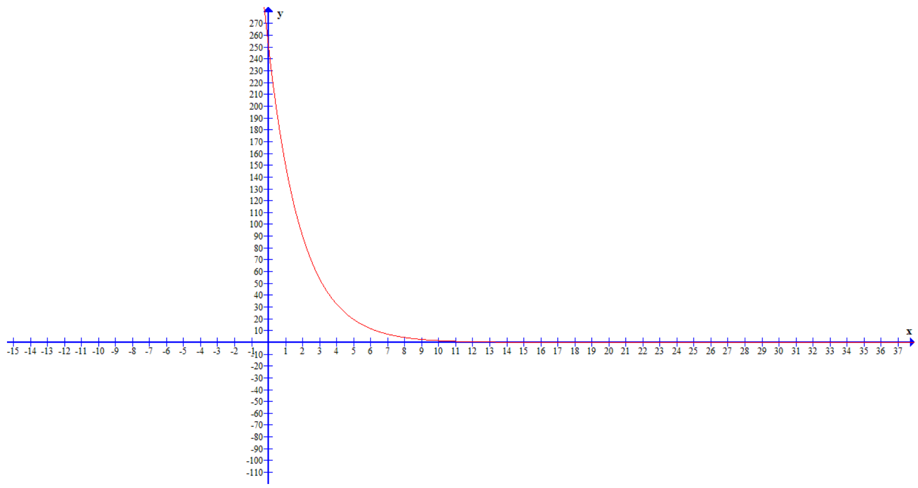


Figura 2.1

Rose Refati)

Solução: Se a meia-vida da nicotina no sangue é de duas horas, temos:

t(horas)	0	2	4	6	8	10
Nicotina (mg)	0,4	0,2	0,1	0,05	0,025	0,0125

Logo, percebemos que a quantidade de redução da nicotina na corrente sanguínea será uma função do tipo Q(t) = ab^t

Assim, temos:

Para t = 0 $\rightarrow 0,4 = ab^0 \rightarrow a = 0,4$;
Para t = 2 $\rightarrow 0,2 = 0,4b^2 \rightarrow b = \sqrt{0,5}$;
Para t = 4 $\rightarrow 0,1 = 0,4b^4 \rightarrow b = \sqrt{0,5}$;
Logo, temos: Q(t) = 0,4 . $(\sqrt{0,5})^t = 0,4.(0,5)^{\frac{t}{2}}$.

Portanto, para que se reduza a 0,04 mg, teremos:

0,04 $= 0,4.(0,5)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 0,1 = (0,5)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow log(0,1) = log[(0,5)^{\frac{t}{2}}] \Rightarrow -1 = \frac{t}{2}.(-0,301) \Rightarrow$
$t = \dfrac{2}{0,301} \Rightarrow t = 6,64h.$

2.3.4 Exemplo de Função Logarítmica

A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: h(t) = 1,5 + $log_3(t+1)$, com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, o tempo(em anos) transcorrido do momento da plantação até a do corte foi de:

(Referência: (Site) http://sn1489liodecasa.blogspot.com.br/2010/03/ arvore-e-sua-altura-media.html)

Solução: Temos h(t) = 1,5 + $log_3(t+1)$

Fazendo h(t) = 3,5m, teremos: 3,5 = 1,5 + $log_3(t+1) \Rightarrow log_3(t+1) = 2$.

Usando a definição de logaritmo, temos: t + 1 = $3^2 \Rightarrow t = 8$

Portanto, foi passado 8 anos para ser feito o corte dessa árvore.

2.3.5 Exemplo de Função Trigonométrica

A pressão sanguínea, P, de uma pessoa (em milímetros de mercúrio, abreviado mm Hg), é dada no instante, t, em segundos, por

$$P = 100 - 20 \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right),$$

Desenhe o gráfico dessa função. Determine o período e a amplitude.

(Referência: (Livro) Funções para Modelar Variações - Eric Connally)

Solução: Vamos construir a tabela a seguir:

t	P
0	80
$\frac{3}{8} = 0{,}375$	120
$\frac{3}{4} = 0{,}75$	80
$\frac{9}{8} = 1{,}125$	120
$\frac{3}{2} = 1{,}5$	80

Para t = 0, teremos: $P = 100 - 20 \cos\left(\frac{8\pi}{3}.0\right) = 100 - 20 \cos 0 = 100 - 20 = 80$, logo o gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 80).

Logo, teremos o gráfico a seguir

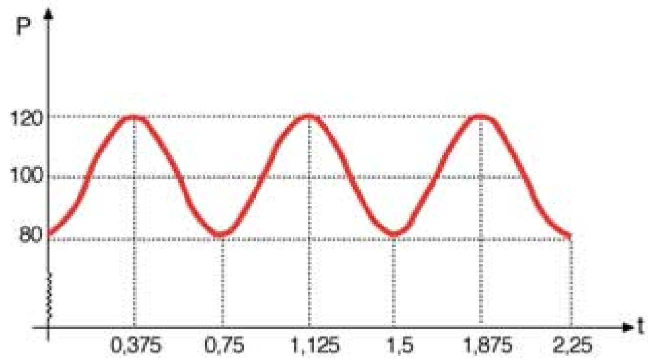


Figura 2.2

Como a amplitude é a metade da distância vertical entre um ponto mínimo a um ponto máximo, o seu valor seré igual a 20.

E seu período será igual a $\dfrac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \dfrac{6\pi}{8\pi} = \dfrac{3}{2}$ segundos.

Capítulo 3

Gráficos

3.1 Limite

Definição 3.1.1. *Seja f(x) definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de f(x) quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\mid f(x) - L \mid< \varepsilon$ sempre que $0 <\mid x - a \mid< \delta$, x $\in$ I.

Exemplo 3.1.2. *Usando a definição, para provar* $\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$

De acordo com a definição devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\mid (3x - 1) - 2 \mid< \varepsilon \text{ sempre que } 0 <\mid x - 1 \mid< \delta.$$

O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ.

As seguintes desigualdades são equivalentes:
$\mid 3x - 1 - 2 \mid< \varepsilon \Leftrightarrow\mid 3x - 3 \mid< \varepsilon \Leftrightarrow\mid 3(x - 1) \mid< \varepsilon \Leftrightarrow 3 \mid x - 1 \mid< \varepsilon \Leftrightarrow\mid x - 1 \mid< \dfrac{\varepsilon}{3}$.

A última desigualdade nos sugere a escolha do δ.

Fazendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, vem que $\mid (3x - 1) - 2 \mid< \varepsilon$ sempre que $O <\mid x - 1 \mid< \delta$.

Portanto, $\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$.

Definição 3.1.3. *(Continuidade) Uma função f é contínua no ponto a se:*
(i) $\exists f(a)$*;*
(ii) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$*;*
(iii)$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 3.1.4. *(a)*$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}; x = -1.$
(i)$\exists f(-1) = 0$*;*
(ii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 0$*. Portanto, existe* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$*;*
(iii)$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = f(-1).$

Logo, f(x) é contínua em x = -1.

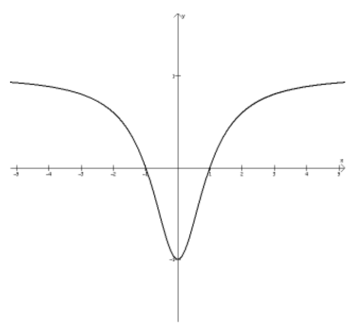


Figura 3.1

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$*; x = 0.*
(i) $\nexists f(0)$*. Assim, com o domínio nos* $\mathbb{R}$*, a primeira condição de continuidade já não é satisfeita, o que implica que f não é contínua em x = 0. Observe a descontinuidade no gráfico.*

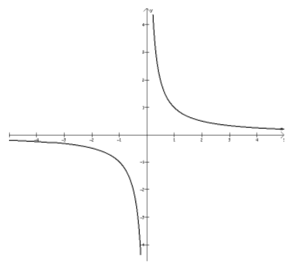


Figura 3.2

3.2 Derivada

Vamos definir a inclinação de uma curva y=f(x) para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

Seja y = f(x) uma curva definida no intervalo (a, b), como na Figura 3.3.

Sejam P(x_1, y_1) e Q(x_2, y_2) dois pontos distintos da curva y = f(x).

Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, na Figura 3.3, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é

$$\text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

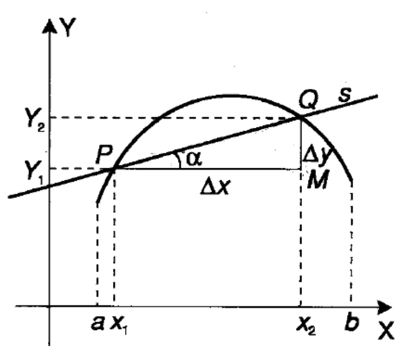


Figura 3.3

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (Ver Figura 3.4).

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P, ou também inclinação da curva em P.

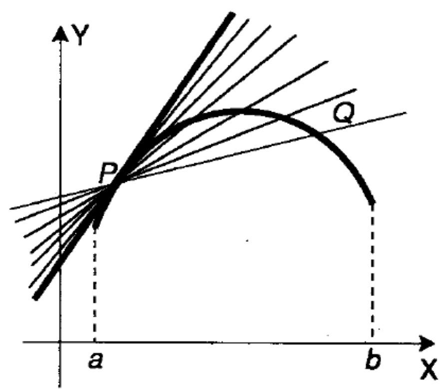


Figura 3.4

Definição 3.2.1. *(Inclinação da Reta Tangente) Dada uma curva y = f(x), seja P(x_1,y_1) um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por* $m(x_1) = \lim\limits_{Q \to P} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *(1), quando o limite existe.*

Fazendo $x_2 = x_1 + \triangle x$ podemos reescrever o limite (1) na forma
$m(x_1) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$ (2)

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

Definição 3.2.2. *(Equação da Reta Tangente) Se a função f(x) é contínua em x_1, então a reta tangente à curva y = f(x) em P(x_1, f(x_1)) é :*

(i) A reta que passa por P tendo inclinação $m(x_1) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$, *se este limite existe. Neste caso temos a equação y - f(x_1) = m (x - x_1). (3)*

(ii) A reta $x = x_1$ *se* $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$ *for infinito.*

Exemplo 3.2.3. *Encontre a inclinação da reta tangente à curva y = x^2 - 2x + 1 no ponto (x_1, y_1)*

Se f (x) = x^2 - 2x + 1, então f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1 e
f($x_1 + \triangle x$) = $(x_1 + \triangle x)^2$ - $2(x_1 + \triangle x)$ + 1 = x_1^2 + $2x_1\triangle x + (\triangle x)^2 - 2x_1 - 2\triangle x + 1$.

Usando (2), vem

m(x_1) = $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x} =$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{x_1^2 + 2x_1\triangle x + (\triangle x)^2 - 2x_1 - 2\triangle x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\triangle x} =$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{2x_1\triangle x + (\triangle x)^2 - 2\triangle x}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle x(2x_1 + \triangle x - 2)}{\triangle x} = 2x_1 - 2.$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva y = x^2 - 2x + 1 no ponto (x_1 , y_1) é m(x_1) = 2x_1 - 2.

Definição 3.2.4. *(Derivada de uma função num ponto) A derivada de uma função f(x) no ponto x_1 , denotada por f'(x_1), (lê-se derivada de f no ponto x_1), é definida pelo limite*

f'(x_1) = $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$*, quando este limite existe.*

Também podemos escrever f'(x_1) = $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva y = f(x) no ponto (x_1,f(x_1)). Portanto, geometricamente, a derivada da função y = f(x) no ponto x_1, representa a inclinação da curva neste ponto.

Definição 3.2.5. *(Derivada de uma função) A derivada de uma função y = f(x) é a função denotada por f', (lê-se derivada de f no ponto x), tal que, seu valor em qualquer $x \in$ D(f) é dado por*

f'(x) = $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$*, quando este limite existe.*

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 3.2.6. *Dada f(x) = 5x^2 + 6x - 1, encontre f'(2).*

f'(2) = $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(2 + \triangle x) - f(2)}{\triangle x} =$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{5(2 + \triangle x)^2 + 6(2 + \triangle x) - 1 - (5.2^2 + 6.2 - 1) - f(2)}{\triangle x} =$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{26\triangle x + 5(\triangle x)^2}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} (26 + 5\triangle x) = 26.$

Observação 3.2.7. *Portanto definimos a derivada de uma função f no ponto a, como sendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto (a, f(a)).*

3.3 Gráficos

O objetivo dessa seção é justificar os gráficos das funções apresentadas nesse trabalho, para isso precisaremos estudar crescimento, decrescimento e concavidades. Tal procedimento será feito analisando o posicionamento das retas tangentes aos gráficos de tais funções.

Definição 3.3.1. *(Teste da Derivada Primeira) Seja f contínua em [a, b] e c $\in$]a, b[. Suponhamos que f seja derivável em]a, b[exceto possivelmente em c .*

(i)se f'(x)> 0 para $x < c$ e f'(x) < 0 para $x > c$, então c é o ponto máximo relativo.

(ii) se f'(x)< 0 para $x < c$ e f'(x) > 0 para $x > c$, então c é o ponto mínimo relativo.

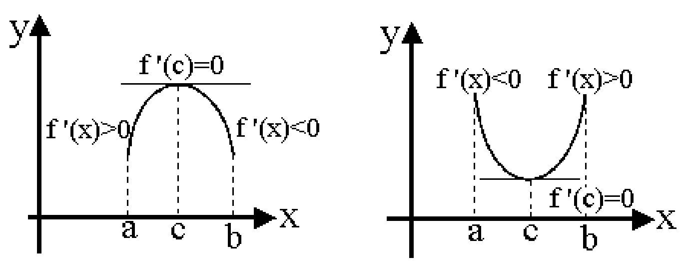


Figura 3.5

Exemplo 3.3.2. *Encontre os intervalos de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos relativos da função f(x) = x^3 - 7x + 6 .*

f'(x) = 3x^2 - 7. Fazendo f'(x) = 0, obtemos x = $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Portanto, os pontos críticos de f são $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$ e $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

É fácil verificar que se $x < -\sqrt{\frac{7}{3}}$ ou $x > \sqrt{\frac{7}{3}}$ têm-se f'(x) > 0 o que implica que f é crescente nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}})$ e $(\sqrt{\frac{7}{3}}, \infty,)$. Para $-\sqrt{\frac{7}{3}} < x < \sqrt{\frac{7}{3}}$, têm-se f'(x) < 0, logo f é decrescente em $(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}})$. Assim, pelo critério da derivada primeira, concluímos que f tem um máximo realtivo em $x_1 = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ e um mínimo relativo em $x_2 = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Observe o gráfico:

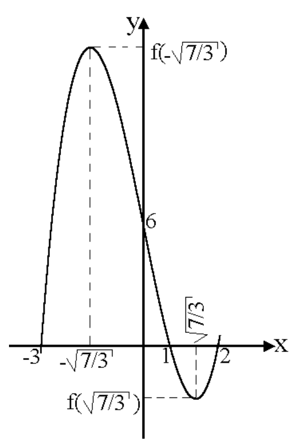


Figura 3.6

Logo, se f uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável no intervalo (a, b).
(i)Se f'(x) > O para todo x $\in$ (a, b) então f é crescente em [a, b];
(ii)Se f '(x) < O para todo x $\in$ (a, b) então f é decrescente em [a, b].

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.

Vamos introduzi-lo, analisando geometricamente a Figura 3.7.

Na Figura 3.7(a) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b, em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto P (c,f(c)). Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b).

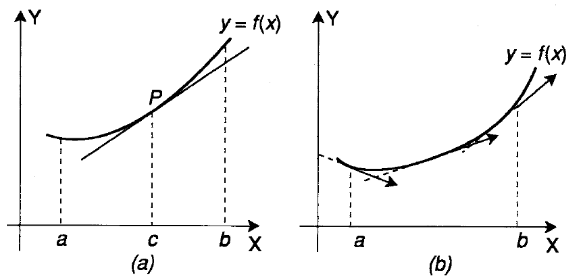


Figura 3.7

Como f' é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto (x, f(x)), observa-se na Figura 3.7(b), que podemos descrever esta mesma situação afirmando que no intervalo (a, b) a derivada f' crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.

Analogamente, a Figura 3.8 descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b).

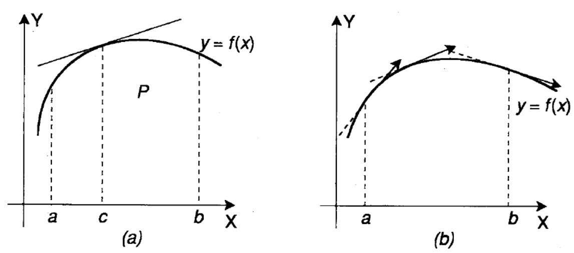


Figura 3.8

Na Figura 3.8(b) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada f' é decrescente em (a, b).

Temos as seguintes definições:

Definição 3.3.3. *(Côncava para Cima) Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b), se f'é crescente neste intervalo.*

Definição 3.3.4. *(Côncava para Baixo) Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b), se f'é decrescente neste intervalo.*

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo, auxilia muito no traçado de seu gráfico. Faremos isso, analisando o sinal da derivada f ".

Proposição 3.3.5. *Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável até segunda ordem no intervalo (a, b):*
(i)Se f"(x) $>$ 0 para todo $x \in$ (a, b), então f é côncava para cima em (a, b).
(ii) Se f"(x) $<$ 0 para todo $x \in$ (a, b), então f é côncava para baixo em (a, b).

Prova:
Como f"(x) = [f'(x)]', se f"(x)> 0 para todo x $\in$ (a, b), f' é crescente no intervalo (a, b). Logo, f é côncava para cima em (a, b).

Analogamente, se prova (ii).

Com base nesta seção, seguiremos o seguinte roteiro para construir os gráficos das funções dos exemplos a seguir.
1) Encontrar o domínio da função;
2) Calcular os pontos de intersecção com os eixos (quando não requer muito cálculo);
3) Encontrar os pontos críticos (pontos onde a primeira derivada é nula);
4) Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função;
5) Encontrar os máximos e mínimos relativos;
6) Determinar a concavidade e os pontos de inflexão da função (pontos onde a curva muda de curvatura côncava para cima para concavidade para baixo, ou vice-versa;
7) Esboçar o gráfico.

Exemplo 3.3.6. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall a \neq 0$.

Usaremos o roteiro e as definições acima para construir o gráfico dessa função.

1) D(f) = $\Re$;

2) Intersecção com o eixo y: f(0) = c;

3) f'(x) = 2ax + b. Resolvemos a equação 2ax + b = 0, para obter o ponto crítico $x_1 = -\frac{b}{2a}$;

4) Como f'(x) = 2ax + b é uma função afim e seu ponto crítico é x = $-\frac{b}{2a}$, podemos fazer o estudo dos sinais e teremos:

(i) sendo a > 0, teremos, x < $-\frac{b}{2a}$ para f'(x) < 0 (ou seja, a função decresce) e x> $-\frac{b}{2a}$ para f'(x) > 0(ou seja, a função cresce);

(ii) sendo a $<$ 0, teremos, x $< -\dfrac{b}{2a}$ para f'(x) $>$ 0 (ou seja, a função cresce) e x$> -\dfrac{b}{2a}$ para f'(x) $<$ 0(ou seja, a função decresce);

5) Aplicando a derivada segunda no ponto crítico, obtemos f"(x_1) = 2a que pode ser positivo(valor mínimo) ou negativo (valor máximo), dependendo do valor de a.

6) Para determinarmos as concavidades teremos que analisar dois casos:

(i) Se a $>$ 0 então f"(x_1) = 2a $>$ 0 e o ponto x_1 é um ponto de mínimo. A concavidade está voltada para cima.

(ii) Se a $<$ 0 então f"(x_1) = 2a $<$ 0 e o ponto x_1 é um ponto de máximo. A concavidade está voltada para baixo.

Não temos pontos de inflexão, pois f"(x_1) = 2a é constante, ou seja a curva não muda de curvatura.

7)

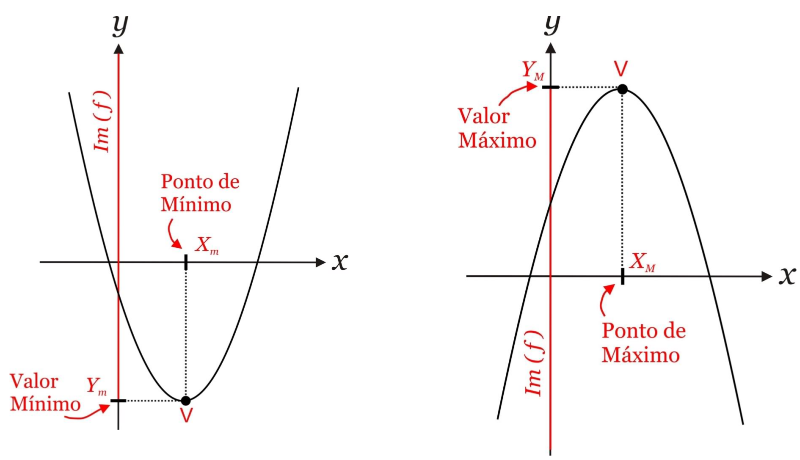


Figura 3.9

Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função quadrática é uma Parábola.

Exemplo 3.3.7. *$f(x) = a^x$, $\forall a > 0$ e $a \neq 1$.*

1) D(f) = $\Re$;

2) Intersecção com o eixo y: f(0) = 1;

3) f'(x) = $a^x ln(a)$. A equação $a^x ln(a)$ = 0 não apresenta solução, portanto não temos ponto crítico;

4) Como f'(x) = $a^x ln(a)$ teremos que analisar dois casos:

(i) Se 0 < a < 1, então f'(x) <0, a função decresce.

(ii) Se a > 1, então f'(x) >0, a função cresce.

5) Aplicando a derivada segunda, obtemos f"(x) = (a^x)' .ln(a) + a^x .ln(a)' = $a^x(lna)^2$. Logo, como a função não possui ponto crítico, não teremos máximos e nem mínimos relativos. E como f"(x) = $a^x(lna)^2 > 0$, não teremos pontos de inflexão.

6) Como f"(x) = $a^x(lna)^2 > 0$, $\forall a > 0$, a concavidade está voltada para cima.

7)

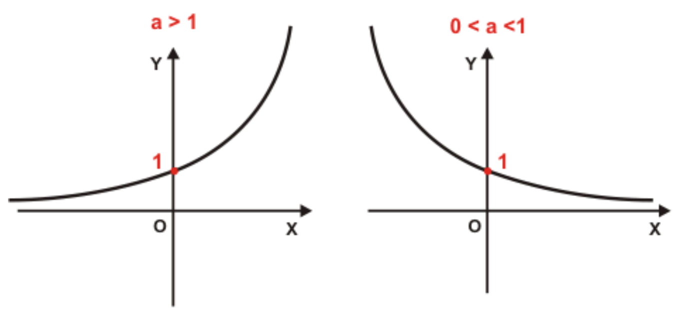


Figura 3.10

Com isso podemos concluir o gráfico de uma função exponencial.

Exemplo 3.3.8. $f(x) = e^x$

1) D(f) = $\Re$;

2) Intersecção com o eixo y: f(0) = 1;

3) f'(x) = e^x. A equação $e^x = 0$ não apresenta solução, portanto não temos ponto crítico;

4) Como f'(x) = e^x >0, a função cresce.

5) Aplicando a derivada segunda, obtemos f"(x) = e^x. Logo, como função não possui ponto crítico, não teremos máximos e nem mínimos relativos. E como f"(x) = e^x >0, não teremos pontos de inflexão.

6) Como f"(x) = e^x >0, a concavidade está voltada para cima.

7)

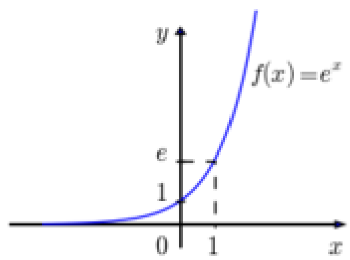


Figura 3.11

Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função $f(x) = e^x$ é uma Semi-Parábola.

Exemplo 3.3.9. $f(x) = \log_a x$, *com* $0 < a \neq 1$

Como a função logarítmica é a função inversa da exponencial, isso implica que os gráficos das funções logarítmica e exponencial são reflexões em relação à reta y = x. Observe:

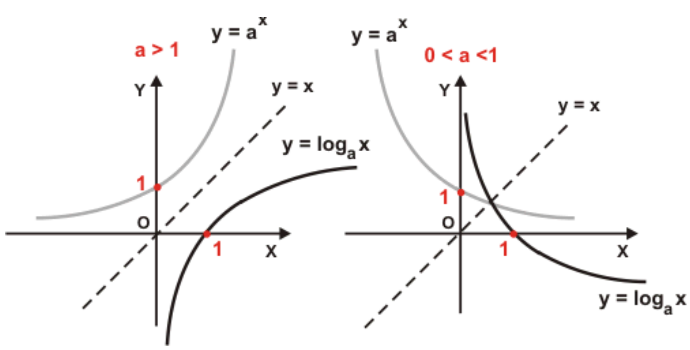


Figura 3.12

Exemplo 3.3.10. *f(x)* = *sen* x

Como a função f(x) = sen x é periódica e seu período é 2π, só faremos o estudo no intervalo $[0, 2\pi]$.

1) D(f) = $\Re$;

2) Intersecção com o eixo y: f(0) = 0;

3) f'(x) = cos x. Resolvemos a equação cos x = 0, para obter os pontos críticos $x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{2}$;

4) Como f'(x) = cos x e seus pontos críticos são $x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, podemos fazer o estudo dos sinais e teremos:

(i) Para $x < \frac{\pi}{2}$, como o cosseno no primeiro quadrante é positivo, teremos f'(x)>0, ou seja a função cresce;

(ii) Para $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, como o cosseno no segundo e terceiro quadrantes é negativo, teremos f'(x)<0, ou seja a função decresce;

(iii) Para $x > \frac{3\pi}{2}$, como o cosseno no quarto quadrante é positivo, teremos f'(x)>0, ou seja a função cresce;

5) Aplicando a derivada segunda, f"(x) = - sen x, nos pontos críticos, obtemos f"(x_1) = - sen $\frac{\pi}{2}$ = -1 ($\frac{\pi}{2}$ é máximo relativo) e f"(x_2) = - sen $\frac{3\pi}{2}$ = 1 ($\frac{3\pi}{2}$ é mínimo relativo).

6) Para determinarmos as concavidades teremos que analisar dois casos:

(i) No intervalo $[0, \pi]$, como no primeiro e segundo quadrantes o seno é positivo, teremos f"(x) = - sen x < 0 e o ponto x_1 é um ponto de máximo. A concavidade está voltada para baixo.

(ii) No intervalo $[\pi, 2\pi]$, como no terceiro e quarto quadrantes o seno é negativo, teremos f"(x) = - sen x > 0 e o ponto x_2 é um ponto de mínimo. A concavidade está voltada para cima.

Assim, temos que π é um dos pontos de inflexão.

7)

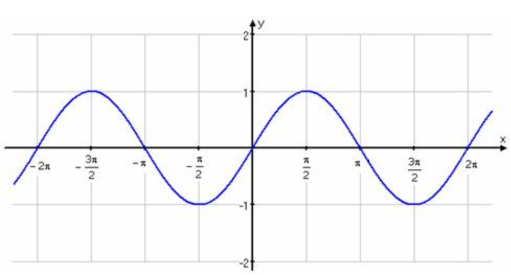


Figura 3.13

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho buscamos mostrar a importância das inter-relações de aulas teóricas e práticas, ressaltando que estas são referências para o ensino, no que se refere à Funções, tendo como objetivo suscitar nos professores de matemática o desejo de inovação nas práticas pedagógicas, relacionando a teoria com a prática.

Relacionar a teoria com o cotidiano dos alunos é praticamente dar a eles a chance de um maior aprendizado, pois só interessamos e aprendemos aquilo que tem utilidade e serventia em nosso dia a dia, e com os alunos do ensino básico de matemática acontece o mesmo, eles anseiam em saber onde iram aplicar tal conteúdo exposto e se não encontram resposta e nem fundamentos concreto da utilidade da matéria explicita, desinteressam pela disciplina.

Portanto, relacionar a teoria com a prática na matemática do ensino básico, será algo de grande valor, dando ao aluno a oportunidade de visualizar a matemática como algo indispensável em sua vida, pois perceberá na realidade que praticamente quase tudo pode ser considerado e trabalhado como instrumento matemático. E vale destacar que trabalhar e conciliar nas aulas de matemática teoria e prática, ou prática e teoria é a chave para uma verdadeira aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] CONNALLY, Eric; HUGHES-HALLETT, Debora; GLEASON, Andrew M.; ET AL; **Funções para Modelar Variações**: Rio de Janeiro, LTC, Terceira Edição, 2009.

[2] IEZZI, Gelson; **Fundamentos de Matemática Elementar**: Volume 2, Nona Edição, São Paulo, Editora Atual, 2004.

[3] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss; **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração**: Sexta Edição, Editora Prentice Hall , 2007.

[4] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesár; **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 1, Décima Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[5] HUGHES-HALLETT, Deborah; GLEASON, Andrew M.; LOCK, Patti Frazer; ET AL., Daniel E. Flath; **Cálculo e Aplicações**: São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA, 2012.

[6] PAIVA, Manoel; **Matemática - conceitos, linguagem e aplicações**: Volume 1, São Paulo, Editora Moderna, 2002.

[7] TOLEDO, Neila de Toledo e; **A resolução de problemas como Ferramenta para a Modelagem Matemática**, VII CIBEM, Montevideo-Uruguai, 2013.

[8] REFATTI, Liliane Rose; CHAVES, Vanessa da Silva; STIELER, Marinez Cargnin; BISOQNIN, Vanilde; **A Modelagem Matemática e o Uso da Maconha**.

[9] **Só Matemática**; Disponível em: http://www.somatematica.com.br; Acesso em: 26/02/2015.