



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Fundamentos de Teoria de Grupos e Aplicações ao Jogo Resta Um

Por:

Epifanio Lima Santos

Mestrado Profissional de Matemática - São Cristóvão - SE

São Cristóvão, 2015.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Fundamentos de Teoria de Grupos e Aplicações ao Jogo Resta Um

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Epifanio Lima Santos

Orientador: Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni

São Cristovão, 2015.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237f Santos, Epifanio Lima
Fundamentos de teoria de grupos e aplicações ao jogo resta
um / Epifanio Lima Santos ; orientador Humberto Henrique de
Barros Viglioni, – São Cristóvão, 2015,
92 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Teoria dos
grupos. 4. Simetria (Matemática). I. Viglioni, Humberto Henrique
de Barros, orient. II. Título.

CDU 512:37.016



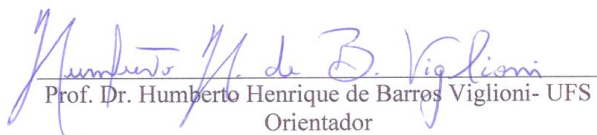
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

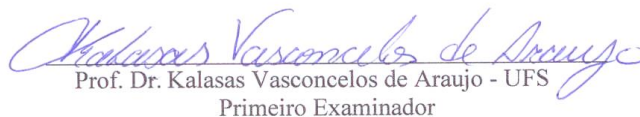
Fundamentos de Teoria de Grupos e Aplicações ao Jogo Resta Um

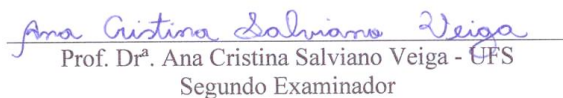
por

Epifanio Lima Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni - UFS
Orientador


Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr.^a Ana Cristina Salviano Veiga - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 02 de Maio de 2015.

Sumário

Introdução	13
1 Grupos	15
1.1 Definição e Exemplos	15
1.2 Grupo Cíclico e Geradores	20
1.3 Grupo Finito e Grupo Infinito	22
1.4 Elemento Regular e Elemento Absorvente	22
1.5 Subgrupo Normal e Classes Laterais	26
1.6 Índice de um Grupo e Grupo Quociente	27
1.7 Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos	28
1.8 Teorema de Cayley	29
2 Grupos de Simetria	31
2.1 Grupos de Matrizes	31
2.2 Grupos de Permutações	40
2.3 Grupos de Simetria	41
3 Jogo Resta Um	55
3.1 História do Jogo Resta Um	55
3.2 Jogo Resta um: Uma aplicação do grupo de Klein	58
3.3 Jogo Resta um: Uma aplicação do grupo de Simetrias do Quadrado	60
3.4 O jogo e suas seqüências de movimento	65
Considerações Finais	82
Anexos	84
Referências	91

Dedicatória

À minha família e em especial aos meus grandes amigos Marcos Barros, Marcelo de Jesus e José Roberto.

Agradecimentos

- À Deus;
- À minha mulher, Diana Tayne, pelo amor, atenção e compreensão;
- Aos meus filhos, pela compreensão;
- Aos meus pais;
- Aos meus sogros e cunhadas;
- Ao professor Humberto Viglione, pelo desafio proposto, que com sua paciência, palavras de confiança e disponibilidade me ajudou a enfrentar;
- Aos meus amigos de turma, irmãos de coração;
- Aos professores, que compuseram a banca examinadora;
- Aos professores da equipe PROFMAT que com empenho e dedicação, compartilharam seus conhecimentos e nos deram oportunidade de crescermos como profissionais.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia de ensino da álgebra associada à geometria, fundamentada na teoria de grupos de simetria \mathbb{D}_4 com ênfase no grupo de Klein, pois percebe-se que a estrutura do jogo resta um tem os mesmos princípios que regem a teoria de Klein associado ao grupo de simetria \mathbb{D}_4 ; por isso, exploramos os recursos didáticos oferecidos por este jogo popular para apresentar noções básicas de grupos e a relação entre seus aspectos algébricos e geométricos, tornando-os acessíveis a alunos do ensino médio.

Palavras chaves:

Grupos, simetrias, grupo de Klein, resta um.

Abstract

This paper aims to present an methodology of teaching of algebra associated to the geometry, based on the theory of symmetry groups \mathbb{D}_4 with emphasis on the Klein group, as perceive that the game structure "peg solitaire" has the same principles governing the Klein theory associated with symmetry group \mathbb{D}_4 ; so we explored the teaching resources offered by this popular game to introduce basics of groups and the relationship between their algebraic and geometric aspects, making them accessible to high school students.

Keywords:

Groups, symmetries, group Klein, peg solitaire.

Lista de Figuras

1.1	Tábua de composição \mathbb{Z}_4	21
2.1	Álgebra g do grupo G	34
2.2	Exponencial é difeomorfismo de $B(0, r)$ em U	36
2.3	Triângulo isósceles.	42
2.4	Rotação de $0^\circ : I$	43
2.5	Reflexão: r_d	43
2.6	Retângulo.	44
2.7	Reflexões: σ_y e σ_x	44
2.8	Rotações: I e 180°	44
2.9	Triângulo equilátero.	45
2.10	Reflexões: σ_m, σ_n e σ_p	46
2.11	Rotações: $0^\circ, 120^\circ$, e 240°	46
2.12	Quadrado.	47
2.13	Reflexões: r_z e r_y	48
2.14	Reflexões: r_g e r_h	48
2.15	Rotações: I e R_{90°	48
2.16	Rotações: R_{180° . e R_{270°	48
2.17	Quadrado.	49
2.18	Pentágono.	50
2.19	Reflexões: r_j, r_g e r_h	51
2.20	Rotações: I, R_{144° e R_{144°	51
2.21	Reflexões: r_i e r_f	51
2.22	Rotações: R_{216° e R_{288°	51
2.23	Polígono de n lados.	53
3.1	Jogo resta um.	56

3.2	A Princesa de Soubise ao lado do Resta Um.	56
3.3	Posição inicial	57
3.4	Posição inicial	57
3.5	Posição final	57
3.6	Posição final	57
3.7	O grupo de Klein.	58
3.8	Quadrado e o resta um	60
3.9	Posição inicial	61
3.10	$R_{0^\circ} : I$	61
3.11	Posição inicial	61
3.12	R_{90°	61
3.13	Posição inicial	61
3.14	R_{180°	61
3.15	Posição inicial	62
3.16	R_{270°	62
3.17	Posição inicial	62
3.18	ρ_y	62
3.19	Posição inicial	62
3.20	ρ_x	62
3.21	Posição inicial	63
3.22	ρ_p	63
3.23	Posição inicial	63
3.24	ρ_z	63
3.25	Posição inicial	63
3.26	ρ_z	63
3.27	Rotação 90°	64
3.28	ρ_x	64
3.29	Rotação 180°	64
3.30	ρ_p	64
3.31	Rotação 270°	64
3.32	ρ_y	64
3.33	Composição inicial	65
3.34	Composição inicial	65
3.35	Posições de encerramento	66
3.36	Posições finais	66

3.37	Tábua de orientação	67
3.38	Composição inicial do jogo.	67
3.39	Movimentos iniciais	67
3.40	Movimento inicial (I)	67
3.41	Movimento inicial (II)	67
3.42	Movimento Inicial	68
3.43	Posição 0°	69
3.44	Posição 0°	69
3.45	Posição 90°	69
3.46	Posição 180°	69
3.47	Posição 270°	69
3.48	Movimento inicial	70
3.49	Sequência 3	70
3.50	Sequência 4	71
3.51	Posição Final	71
3.52	Sequência 5	71
3.53	Posição Final	71
3.54	Tábua do resta um	75
3.55	Sem uma peça	75
3.56	Tábua do resta um	75
3.57	Sem duas peças	75
3.58	Tábua do resta um	76
3.59	Tábua do resta um	76
3.60	Posições iniciais	76
3.61	Sequência 1	76
3.62	Sequência 2	77
3.63	Sequência 3	77
3.64	Sequência 2	78
3.65	Sequência 3	78
3.66	Sequência 4	78
3.67	Posição Final	78
3.68	Sequência 5	78
3.69	Posição Final	78
3.70	Lado 5u	79
3.71	Lado 9u	80

3.72 Lado 8u	80
3.73 Lado 10u	80
3.74 Logomarcas	85
3.75 Quadrados	86
3.76 Figuras	86
3.77 Resta um	86
3.78 Resta um	87
3.79 Objetos	87
3.80 figuras	88
3.81 Resta um	88
3.82 Figuras planas	89
3.83 triângulo isósceles	89
3.84 Figuras planas	89
3.85 Jogo resta um	91

Introdução

O ensino da Álgebra na escola ao longo dos anos, tem se modificado devido a metodologia apresentada nos livros didáticos, pois, cada vez mais seus conteúdos são apresentados de forma sintetizada e objetiva, limitando por vezes o professor a mera reprodução das informações ali contidas.

Observamos por meio dos jogos uma forma de contornar esse problema e tornar o aluno um participante de sua aprendizagem e não um mero espectador. Um dos jogos lúdicos associados a Teoria de Grupos é o Resta Um.

Apresentaremos a teoria de grupos para que tenhamos mais um subsídio para a elaboração de uma nova metodologia e não adote como base apenas o que é disponibilizado pelos livros didáticos.

A dinâmica do jogo resta um e a sua manipulação mostrará uma associação entre os ramos da matemática: Álgebra e Geometria.

Portanto, há a necessidade de um conhecimento complementar para o desenvolvimento dessa metodologia. Da mesma maneira, é percebida a importância do estudo dos grupos de simetria.

De posse desses conhecimentos apresentaremos a estrutura do jogo, embasada no grupo de Klein, que se utilizou do teorema de Cayley para fundamentação de sua teoria.

Mostraremos as transformações existentes na tábua e sua relação com a simetria \mathbb{D}_4 do quadrado, obtendo assim as sequências de movimentos que determinarão o possível encerramento do jogo.

Capítulo 1

Grupos

Grupos é um conteúdo de suma importância para a matemática, seu estudo faz-se relevante para a compreensão dos conteúdos que servirão de base para o desenvolvimento dessa pesquisa. Após o estudo de alguns pré-requisitos, iremos desenvolvermos o estudo dos grupos de simetria e as associações com o jogo resta um.

1.1 Definição e Exemplos

Seja G um conjunto não vazio onde está definida uma operação entre pares de G , denotada por:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\rightsquigarrow x * y \end{aligned}$$

Dizemos que o par $G, *$ é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:

(i) *Associativa*

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G;$$

(ii) *Elemento Neutro*

$$\exists e \in G \text{ tal que } a * e = e * a = a, \quad \forall a \in G;$$

Demonstração da unicidade:

Seja $a \in G$ e os elementos neutros $e_1, e_2 \in G$ tais que $e_1 \neq e_2$.

$$\text{Temos que, } ae_1 = e_1a = a \text{ e } ae_2 = e_2a = a, \quad \forall a \in G.$$

Logo, $e_1 = e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$. (Contradição)

(iii) *Elemento Inverso*

$\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$, então o elemento b é denotado por a^{-1} e recebe o nome de inverso de a .

Demonstração da unicidade:

Seja e o elemento neutro do grupo G e considere a_1 e $a_2 \in G$ inversos de $a \in G$, tal que $a_1 \neq a_2$.

Temos que, $aa_1 = a_1a = e$ e $aa_2 = a_2a = e$.

Logo, $a_1 = a_1e = a_1(aa_2) = (a_1a)a_2 = ea_2 = a_2$. (Contradição)

Se em um grupo $(G, *)$ verifica-se a propriedade comutativa

(iv) $a * b = b * a, \forall a, b \in G$

dizemos que esse grupo é um grupo abeliano.

Para facilitar o estudo de grupos utilizaremos a notação G em vez de $\langle G, * \rangle$, onde as características peculiares de um grupo serão utilizadas para identificá-los.

A primeira estrutura de grupo estudada na educação básica é o conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Será que os números naturais é um grupo aditivo?

Como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, note que todos números com exceção do zero não possui elemento inverso. Logo, não constitui uma estrutura de grupo. Para verificar a afirmação observe que $1 \in \mathbb{N}$, no entanto $-1 \notin \mathbb{N}$.

Sendo assim, como o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} é formado pelos números naturais e os seus inversos verificamos que os números inteiros é um grupo aditivo pois admite as propriedades associativa, elemento neutro e elemento inverso. Da mesma forma, como os números racionais \mathbb{Q} são formados por todos os quocientes de números inteiros a e b , em que b é não nulo também terá uma estrutura de grupo aditivo, logo:

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}.$$

Além disso, sabemos que os números reais \mathbb{R} são uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais, logo terá uma estrutura de grupo aditivo.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

No ensino médio estudamos o conjunto dos números complexos \mathbb{C} o qual é formado por uma parte real e uma parte imaginária, tendo assim uma estrutura de grupo aditivo.

$$z = a + bi, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Portanto, verificamos que os números inteiros, racionais, reais e complexos tem uma estrutura de grupo aditivo.

Seja \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros verifica-se que não possui inversos multiplicativos. Sendo assim, não tem uma estrutura de grupo multiplicativo. Da mesma forma, os conjuntos numéricos racionais, reais e complexos não tem uma estrutura de grupo multiplicativo porque para o número zero não possui elemento inverso.

Vamos exemplificar alguns grupos importantes estudados no Ensino Fundamental e Médio.

Grupos Aditivos	Grupos Multiplicativos
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	$\langle \mathbb{Q}^*, \times \rangle$
$\langle \mathbb{Q}, + \rangle$	$\langle \mathbb{R}^*, \times \rangle$
$\langle \mathbb{R}, + \rangle$	$\langle \mathbb{C}^*, \times \rangle$
$\langle \mathbb{C}, + \rangle$	—————

Tabela 1 : Tabela de grupos

EXEMPLO 1 : Se $n \geq 1$ é um número inteiro então o conjunto Z_n dos números inteiros módulo n , é um grupo aditivo contendo exatamente n elementos.

EXEMPLO 2 : Os inteiros \mathbb{Z} módulo p (onde p é um primo) munidos da operação de multiplicação.

Vamos construir a tábua \mathbb{Z}_7^* .

1ª linha:

$$\bar{1} \times \bar{1} = \bar{1}; \bar{1} \times \bar{2} = \bar{2}; \bar{1} \times \bar{3} = \bar{3}; \bar{1} \times \bar{4} = \bar{5}; \bar{1} \times \bar{5} = \bar{6}; \bar{1} \times \bar{6} = \bar{6};$$

2ª linha:

$$\bar{2} \times \bar{1} = \bar{2}; \bar{2} \times \bar{2} = \bar{4}; \bar{2} \times \bar{3} = \bar{6}; \bar{2} \times \bar{4} = \bar{1}; \bar{2} \times \bar{5} = \bar{3}; \bar{2} \times \bar{6} = \bar{5};$$

3ª linha:

$$\bar{3} \times \bar{1} = \bar{3}; \bar{3} \times \bar{2} = \bar{6}; \bar{3} \times \bar{3} = \bar{2}; \bar{3} \times \bar{4} = \bar{5}; \bar{3} \times \bar{5} = \bar{1}; \bar{3} \times \bar{6} = \bar{4};$$

4ª linha:

$$\bar{4} \times \bar{1} = \bar{4}; \bar{4} \times \bar{2} = \bar{1}; \bar{4} \times \bar{3} = \bar{5}; \bar{4} \times \bar{4} = \bar{2}; \bar{4} \times \bar{5} = \bar{6}; \bar{4} \times \bar{6} = \bar{3};$$

5ª linha:

$$\bar{5} \times \bar{1} = \bar{5}; \bar{5} \times \bar{2} = \bar{3}; \bar{5} \times \bar{3} = \bar{1}; \bar{5} \times \bar{4} = \bar{6}; \bar{5} \times \bar{5} = \bar{4}; \bar{5} \times \bar{6} = \bar{2};$$

6ª linha:

$$\bar{6} \times \bar{1} = \bar{6}; \bar{6} \times \bar{2} = \bar{5}; \bar{6} \times \bar{3} = \bar{4}; \bar{6} \times \bar{4} = \bar{3}; \bar{6} \times \bar{5} = \bar{2}; \bar{6} \times \bar{6} = \bar{1};$$

A tábua de composição do grupo $\langle \mathbb{Z}_7^*, \times \rangle$ é dada por:

\times	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tábua de composição do grupo $\langle \mathbb{Z}_7^*, \times \rangle$

Vamos representar os elementos inversos do grupo multiplicativo \mathbb{Z}_7^* :

$$\bar{1}' = \bar{1} \quad \bar{2}' = \bar{4} \quad \bar{3}' = \bar{5} \quad \bar{4}' = \bar{2} \quad \bar{5}' = \bar{3} \quad \bar{6}' = \bar{6}.$$

EXEMPLO 3 : O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais, denotado por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem estrutura de grupo munido da operação usual de adição de matrizes.

EXEMPLO 4 : Seja o par $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$, onde $a * b = a + b - 2$.

(i) $*$ é uma operação interna em \mathbb{Z}

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ temos que $a + b \in \mathbb{Z}$ pois a operação de adição é fechada nos números inteiros.

(ii) $*$ é associativa

Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $(a * b) = a + b - 2$ temos que

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b - 2) * c \\ &= (a + b - 2) + c - 2 \\ &= a + b + c - 2 - 2 \\ &= a + (b + c - 2) - 2 \\ &= a + (b * c) - 2 \\ &= a * (b * c) \end{aligned}$$

(iii) $*$ admite elemento neutro?

$\exists e \in \mathbb{Z} / x * e = e * x = e, \forall x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x * e &= x \\ x + e - 2 &= x \\ e &= x - x + 2 \\ e &= 2. \end{aligned}$$

Verificando se $2 * x = x$.

$$\begin{aligned}2 * x &= 2 + x - 2 \\2 * x &= x.\end{aligned}$$

Logo, existe elemento neutro $e = 2$.

(iv) $*$ admite elemento inverso?

Para cada $x \in \mathbb{Z}$, existe um único elemento $v \in \mathbb{Z}$ tal que $x * v = 2 = v * x$.

$$\begin{aligned}x * v &= x \\x + v - 2 &= 2 \\v &= 2 + 2 - x \\v &= 4 - x.\end{aligned}$$

Verificando se $v * x = 2$

$$\begin{aligned}v * x &= v + x - 2 \\v * x &= (4 - x) + x - 2 \\v * x &= 4 - x + x - 2 \\v * x &= 2.\end{aligned}$$

Logo, cada elemento a admite inverso $v = 4 - a$.

(iv) $*$ admite a propriedade comutativa?

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $(a * b) = a + b - 2$ temos que

$$\begin{aligned}a * b &= a + b - 2 \\&= b + a - 2 \\&= b * a.\end{aligned}$$

Logo, é abeliano.

Os grupos citados na tabela 1 também admitem a propriedade comutativa, logo são grupos abelianos.^{1 2}

¹Os grupos abelianos receberam esse nome devido a Niels Henrik Abel.

²Niels Henrik Abel (Nedstrand, 25 de agosto de 1802-Froland, 6 de Abril de 1829) foi um matemático norueguês.

1.2 Grupo Cíclico e Geradores

Seja um grupo G . Diz-se que G é cíclico se existir um elemento $x \in G$ tal que x gere todos os elementos do conjunto G , isto é, $G = \langle x \rangle = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$.

Logo, $x^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n\text{vezes}}$, onde x é o elemento gerador de G e é denotado por $G = \langle x \rangle$.

Assim, dado um subconjunto S de elementos de um grupo $\langle G, * \rangle$ com a propriedade de que todo elemento de G pode ser escrito como um produto finito de elementos de S e seus inversos é denominado conjunto de geradores de $\langle G, * \rangle$, e denotamos por $G = \langle S \rangle$.

Se S é finito, então $\langle G, * \rangle$ é chamado Grupo Finitamente Gerado.

Sabemos que um grupo cuja operação interna é a adição denomina-se grupo aditivo $\langle G, + \rangle$ e será um Grupo Cíclico se, para algum elemento $x \in G$ a igualdade $G = [x] = \{nx / n \in \mathbb{Z}\}$ é verificada.

$$x^n = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{vezes}} = nx.$$

Para grupos multiplicativo, teremos $G = [x] = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$.

$$a^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n\text{vezes}} = x^n.$$

EXEMPLO 5 : Os números inteiros \mathbb{Z} com a adição é um grupo cíclico tendo como geradores os elementos -1 e 1 ;

Observe que, no grupo $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ o gerador de n é definido como $\langle n \rangle = \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$, onde

$$kn = \underbrace{n + n + \dots + n}_{k\text{vezes}}, \text{ se } k > 0,$$

definido como 0 se $k = 0$, e

$$kn = \underbrace{-n - n - \dots - n}_{|k|\text{vezes}}, \text{ se } k < 0.$$

Logo, o subconjunto das potências de n é um subgrupo de \mathbb{Z} , e é denotado por:

$$\langle n \rangle = \{n^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, n^{-3}, n^{-2}, n^{-1}, n^0, n, n^2, n^3 \dots\},$$

onde $n^0 = e$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 6 : Os números inteiros \mathbb{Z} módulo 4 com a adição é um grupo cíclico tendo como geradores os elementos 1 e 3, onde é representado por $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$.

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Figura 1.1: Tábua de composição \mathbb{Z}_4

Observe que, o conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, fixando $x = 1$ temos que:

$$1^1 = 1;$$

$$1^2 = 1 + 1 = 2;$$

$$1^3 = 2 + 1 = 3;$$

$$1^4 = 3 + 1 = 0;$$

Logo, $\langle 1 \rangle = \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4$.

De forma análoga, temos para $x = 2$ e $x = 3$.

$$2^1 = 2;$$

$$2^2 = 2 + 2 = 0;$$

$$2^3 = 0 + 2 = 2;$$

$$2^4 = 3 + 1 = 0;$$

Logo, $\langle 2 \rangle = \{0, 2\}$.

$$3^1 = 3;$$

$$3^2 = 3 + 3 = 2;$$

$$3^3 = 2 + 3 = 1;$$

$$3^4 = 1 + 3 = 0;$$

Logo, $\langle 3 \rangle = \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4$.

Portanto, os números inteiros \mathbb{Z} módulo 4 com a adição é um grupo cíclico tendo como geradores os elementos 1 e 3.

Seja o grupo $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, + \rangle$. Logo, $G = \{(\overline{0}, \overline{0})(\overline{0}, \overline{1})(\overline{1}, \overline{0})(\overline{1}, \overline{1})\}$. Note que o elemento neutro é $e = (\overline{0}, \overline{0})$ e vamos provar que $\forall (\overline{a}, \overline{b}) \in G$ temos:

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e.$$

Portanto, o grupo G é um grupo abeliano não cíclico.

Na educação básica são estudados os grupos não cíclicos: $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ e $\langle \mathbb{R}^*, \times \rangle$.

Se um grupo G é cíclico então G é abeliano.

Demonstração:

Seja um grupo cíclico G gerado por g . Se $a, b \in G$ então existe t_1 e t_2 tais que $a = g^{t_1}$ e $b = g^{t_2}$.

Logo,

$$ab = g^{t_1} g^{t_2} = g^{t_2} g^{t_1} = ba.$$

1.3 Grupo Finito e Grupo Infinito

Dado um grupo G , dizemos que este é finito quando podemos determinar a quantidade dos n elementos do conjunto G . Logo, se o conjunto G é finito então o grupo G é finito.

A ordem de G é igual a n e é denotada por $|G| = n$.

EXEMPLO 7 : Grupo dos números inteiros \mathbb{Z} munidos da operação de adição.

EXEMPLO 8 : Grupo dos números reais \mathbb{R} munidos da operação de multiplicação.

De forma análoga, dizemos que G é um grupo infinito quando não podemos determinar a quantidade de elementos do conjunto.

Se o conjunto G é infinito então o grupo G é infinito.

Logo, a ordem de G é igual a ∞ e é denotada por $|G| = \infty$.

EXEMPLO 9 : Grupo dos números inteiros não nulos \mathbb{Z}_m módulo m munidos da operação de adição.

EXEMPLO 10 : Grupo dos números inteiros não nulos \mathbb{Z}_m^* módulo m munidos da operação de multiplicação.

1.4 Elemento Regular e Elemento Absorvente

Seja G um grupo. Se $a, b \in G$, com $a \neq b$, então $x * a \neq x * b$.

Dessa forma, denominaremos x com regular.

Sendo $\alpha \in G$, verificaremos que:

$\alpha * x = x * \alpha = \alpha$, para qualquer que seja $x \in G$

então, α é denominado elemento absorvente.

EXEMPLO 11 : Dado o grupo aditivo \mathbb{Z}_7 , temos que $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Logo, $|\mathbb{Z}_7| = 7$ e $e = \bar{0}$.

Vamos construir a tábua \mathbb{Z}_7 .

1ª linha:

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}; \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}; \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}; \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}; \bar{0} + \bar{4} = \bar{4}; \bar{0} + \bar{5} = \bar{5}; \bar{0} + \bar{6} = \bar{6};$$

2ª linha:

$$\bar{1} + \bar{0} = \bar{1}; \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}; \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}; \bar{1} + \bar{3} = \bar{4}; \bar{1} + \bar{4} = \bar{5}; \bar{1} + \bar{5} = \bar{6}; \bar{1} + \bar{6} = \bar{0};$$

3ª linha:

$$\bar{2} + \bar{0} = \bar{2}; \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}; \bar{2} + \bar{2} = \bar{4}; \bar{2} + \bar{3} = \bar{5}; \bar{2} + \bar{4} = \bar{6}; \bar{2} + \bar{5} = \bar{0}; \bar{2} + \bar{6} = \bar{1};$$

4ª linha:

$$\bar{3} + \bar{0} = \bar{3}; \bar{3} + \bar{1} = \bar{4}; \bar{3} + \bar{2} = \bar{5}; \bar{3} + \bar{3} = \bar{6}; \bar{3} + \bar{4} = \bar{0}; \bar{3} + \bar{5} = \bar{1}; \bar{3} + \bar{6} = \bar{2};$$

5ª linha:

$$\bar{4} + \bar{0} = \bar{4}; \bar{4} + \bar{1} = \bar{5}; \bar{4} + \bar{2} = \bar{6}; \bar{4} + \bar{3} = \bar{0}; \bar{4} + \bar{4} = \bar{1}; \bar{4} + \bar{5} = \bar{2}; \bar{4} + \bar{6} = \bar{3};$$

6ª linha:

$$\bar{5} + \bar{0} = \bar{5}; \bar{5} + \bar{1} = \bar{6}; \bar{5} + \bar{2} = \bar{0}; \bar{5} + \bar{3} = \bar{1}; \bar{5} + \bar{4} = \bar{2}; \bar{5} + \bar{5} = \bar{3}; \bar{5} + \bar{6} = \bar{4};$$

7ª linha:

$$\bar{6} + \bar{0} = \bar{6}; \bar{6} + \bar{1} = \bar{0}; \bar{6} + \bar{2} = \bar{1}; \bar{6} + \bar{3} = \bar{2}; \bar{6} + \bar{4} = \bar{3}; \bar{6} + \bar{5} = \bar{4}; \bar{6} + \bar{6} = \bar{5}.$$

A tábua de composição do grupo $\langle \mathbb{Z}_7, + \rangle$ é dada por:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

Tábua de Composição do Grupo $\langle \mathbb{Z}_7, + \rangle$

Note que no grupo aditivo \mathbb{Z}_7 não existe um elemento absorvente.

Além disso, o grupo aditivo \mathbb{Z}_7 possui elementos inversos:

$$\bar{0}' = \bar{0} \quad \bar{1}' = \bar{6} \quad \bar{2}' = \bar{5} \quad \bar{3}' = \bar{4} \quad \bar{4}' = \bar{3} \quad \bar{5}' = \bar{2} \quad \bar{6}' = \bar{1}.$$

EXEMPLO 12 : Dado o grupo multiplicativo \mathbb{Z}_7 temos que:

1ª linha:

$$\bar{0} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{0} \times \bar{1} = \bar{0}; \bar{0} \times \bar{2} = \bar{0}; \bar{0} \times \bar{3} = \bar{0}; \bar{0} \times \bar{4} = \bar{0}; \bar{0} \times \bar{5} = \bar{0}; \bar{0} \times \bar{6} = \bar{0};$$

2ª linha:

$$\bar{1} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{1} \times \bar{1} = \bar{1}; \bar{1} \times \bar{2} = \bar{2}; \bar{1} \times \bar{3} = \bar{3}; \bar{1} \times \bar{4} = \bar{4}; \bar{1} \times \bar{5} = \bar{5}; \bar{1} \times \bar{6} = \bar{6};$$

3ª linha:

$$\bar{2} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{2} \times \bar{1} = \bar{2}; \bar{2} \times \bar{2} = \bar{4}; \bar{2} \times \bar{3} = \bar{6}; \bar{2} \times \bar{4} = \bar{1}; \bar{2} \times \bar{5} = \bar{3}; \bar{2} \times \bar{6} = \bar{5};$$

4ª linha:

$$\bar{3} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{3} \times \bar{1} = \bar{3}; \bar{3} \times \bar{2} = \bar{6}; \bar{3} \times \bar{3} = \bar{2}; \bar{3} \times \bar{4} = \bar{5}; \bar{3} \times \bar{5} = \bar{1}; \bar{3} \times \bar{6} = \bar{4};$$

5ª linha:

$$\bar{4} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{4} \times \bar{1} = \bar{4}; \bar{4} \times \bar{2} = \bar{1}; \bar{4} \times \bar{3} = \bar{5}; \bar{4} \times \bar{4} = \bar{2}; \bar{4} \times \bar{5} = \bar{6}; \bar{4} \times \bar{6} = \bar{3};$$

6ª linha:

$$\bar{5} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{5} \times \bar{1} = \bar{5}; \bar{5} \times \bar{2} = \bar{3}; \bar{5} \times \bar{3} = \bar{1}; \bar{5} \times \bar{4} = \bar{6}; \bar{5} \times \bar{5} = \bar{4}; \bar{5} \times \bar{6} = \bar{2};$$

7ª linha:

$$\bar{6} \times \bar{0} = \bar{0}; \bar{6} \times \bar{1} = \bar{6}; \bar{6} \times \bar{2} = \bar{5}; \bar{6} \times \bar{3} = \bar{4}; \bar{6} \times \bar{4} = \bar{3}; \bar{6} \times \bar{5} = \bar{2}; \bar{6} \times \bar{6} = \bar{1}.$$

Logo, a tábua de composição do grupo $\langle \mathbb{Z}_7, \times \rangle$ é dada por:

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tábua de Composição do Grupo $\langle \mathbb{Z}_7, \times \rangle$

Observe que o $\bar{0}$ é o elemento absorvente do grupo multiplicativo \mathbb{Z}_7 .

Algumas outras noções são importantes para uma melhor compreensão da teoria de grupos. Dessa forma, apresentaremos algumas provas importantes.

I) Para todo $a \in G$ vale que $(a^{-1})^{-1} = a$;

Demonstração:

Do enunciado temos que $a \in G$. Logo, sendo e o elemento neutro de G , basta mostrar que $a^{-1}a = e$ e $aa^{-1} = e$, e sabemos que estas igualdades fazem parte da definição de grupo.

II) Sejam $a, b \in G$, então $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Do enunciado temos que $a, b \in G$. Logo, sendo e o elemento neutro de G , vamos mostrar que $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ e $b^{-1}a^{-1}(ab) = e$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e \\ (b^{-1}a^{-1})(ab) &= b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = (b^{-1}e)b = b^{-1}b = e. \end{aligned}$$

III) Seja G um grupo. Se $a \in G$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ então $a^m a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$.

Demonstração de $a^m a^n = a^{m+n}$:

Do enunciado temos que $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \in G$, onde G é um grupo. Logo, vamos separarmos a demonstração de $a^m a^n = a^{m+n}$ em duas partes:

1. Para $(n \geq 0)$, demonstraremos por indução sobre n .

Dados $P(n) : a^m a^n = a^{m+n} (*)$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Seja $X = \{n \in \mathbb{Z}_+ / P(n) \text{ é verdadeira} \}$, onde $P(n)$ é a propriedade $(*)$.

(i) $0 \in X$.

$$a^m a^0 = a^m e = a^m = a^{m+0}. (\text{Verdade})$$

(ii) $k \in X \Rightarrow (k+1) \in X$.

Suponha que $P(k)$ é válida para algum $k \in X$.

Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira.

Por hipótese de indução temos

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Logo,

$$a^m a^{n+1} = a^m (a^n a^1) = (a^m a^n) a = a^{m+n} a = a^{m+n+1}.$$

Portanto, pelo princípio de indução finita $P(n)$ é válida para qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Para $(n < 0)$, isto é, $n \in \mathbb{Z}_-$ temos que, se $n < 0$ então $-n > 0$. Desse modo:

$$a^{m+n} = (a^{-1})^{-(m+n)} = (a^{-1})^{-m+(-n)} = (a^{-1})^{-m} (a^{-1})^{-n} = a^m a^n.$$

De forma análoga, temos a demonstração de $(a^m)^n = a^{mn}$.

1.5 Subgrupo Normal e Classes Laterais

Seja um subconjunto S de um grupo G . Se S for um grupo com a mesma operação interna de G e com as mesmas propriedades, então dizemos que o grupo S é subconjunto do grupo G , e denotaremos por $S \leq G$. Assim, todo grupo G admite, pelo menos, dois subgrupos: $\{e\}$ e G .

O grupo aditivo dos números inteiros \mathbb{Z} é um subgrupo do grupo aditivo dos números racionais \mathbb{Q} que, por sua vez, é um subgrupo aditivo dos números reais \mathbb{R} .

O grupo multiplicativo dos números racionais não nulos \mathbb{Q}^* é um subgrupo do grupo multiplicativo dos números reais não nulos \mathbb{R}^* que, por sua vez, é um subgrupo do grupo multiplicativo dos números complexos não nulos \mathbb{C}^* .

Dado N um subgrupo de G , dizemos que N é um Invariante ou Normal de G se as afirmações da proposição seguinte são satisfeitas:

Proposição: Seja N um subgrupo de G . As afirmações abaixo são equivalentes:

- (i) A operação induzida sobre as classes laterais à esquerda de G é bem definida;
- (ii) $\forall g \in G$, vale $gNg^{-1} \subset N$;
- (iii) $\forall g \in G$, vale $gNg^{-1} = N$;
- (iv) $\forall g \in G$, vale $gN = Ng$.

Seja G um grupo e S um subgrupo de G , vamos definir sobre G a seguinte relação R_S :

$$aR_Sb \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ tal que } a = bs.$$

Se R_S admitir as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, então será uma relação de equivalência.

Reflexiva: $aR_Sa \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ tal que } a = as$. Basta tomar $s = e$, onde e é o elemento neutro de S .

Simétrica: $aR_Sb \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ tal que } a = bs \Leftrightarrow |as^{-1} = b| \Leftrightarrow bR_Sa$.

Transitiva: aR_Sb e $bR_Sc \Leftrightarrow \exists s_1, s_2$ tais que $a = bs_1$ e $b = cs_2 \Leftrightarrow a = bs_1 = cs_2s_1 = c(s_2s_1) \Leftrightarrow aR_Sc$.

Similarmente, podemos definir a seguinte relação R'_S

$$aR'_Sb \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ tal que } a = bs$$

e, como na relação R_S , concluímos que R'_S é uma relação de equivalência.

A classe de equivalência, segundo a relação R_S , que contém o elemento a é o conjunto

$$\bar{a} = \{b \in G; bR_S a\} = \{as; s \in S\}$$

e denominamos classe Lateral à esquerda de S . De modo análogo, definimos

$$\bar{a} = \{b \in G; bR'_S a\} = \{sa; s \in S\}$$

a classe lateral à direita de S .

Obtemos assim, a classe lateral à esquerda de S em G de a , denotada por aS e a classe lateral à direita de S em G de a , denotada por Sa .

EXEMPLO 13 : No grupo aditivo \mathbb{Z}_4 , temos o subgrupo $S = \{\bar{1}, \bar{2}\}$, com as classes laterais:

$$\begin{aligned}\bar{0} + S &= \{\bar{0} + \bar{1}, \bar{0} + \bar{2}\} = \{\bar{1}, \bar{2}\}; & S + \bar{0} &= \{\bar{1} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}\} \\ \bar{1} + S &= \{\bar{1} + \bar{1}, \bar{1} + \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{3}\}; & S + \bar{1} &= \{\bar{1} + \bar{1}, \bar{2} + \bar{1}\} = \{\bar{2}, \bar{3}\} \\ \bar{2} + S &= \{\bar{2} + \bar{1}, \bar{2} + \bar{2}\} = \{\bar{3}, \bar{0}\}; & S + \bar{2} &= \{\bar{1} + \bar{2}, \bar{2} + \bar{2}\} = \{\bar{3}, \bar{0}\} \\ \bar{3} + S &= \{\bar{3} + \bar{1}, \bar{3} + \bar{2}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}; & S + \bar{3} &= \{\bar{1} + \bar{3}, \bar{2} + \bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}.\end{aligned}$$

Note que, o número de classes laterais à esquerda é igual ao número de classes laterais à direita e para classes diferentes, o número de elementos é igual ao número de elementos de S .

1.6 Índice de um Grupo e Grupo Quociente

Se $\langle S, * \rangle$ é um subgrupo de $\langle G, * \rangle$, então o número de diferentes classes laterais à direita de S em G , é denominado índice de S em G e é denotado por $|G : H|$. Se G é um grupo finito, então ele possui índice finito. Se G for um grupo infinito então o seu índice pode ser finito ou infinito.

Seja $N, *$ um subgrupo normal de $G, *$. O conjunto de todas as classes laterais à direita de N em G é denotado G/N . Nesse conjunto são válidas as seguintes propriedades para multiplicação de subconjuntos de G :

- (i) $(aN)(bN) = (ab)N$;
- (ii) $[(aN)(bN)](cN) = (aN)[(bN)(cN)]$;
- (iii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$;
- (iv) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$.

Portanto, o Grupo Quociente de G por N é o grupo formado pelo conjunto G/N e pela multiplicação de subconjuntos de G .

EXEMPLO 14 : Seja G o grupo dos números inteiros com a adição e seja N o subgrupo normal dos múltiplos de 3. Assim, Na é na verdade $N+a$. Todo inteiro a de G pode ser expresso como $a = 3b+c$, onde c é o resto da divisão de a e b ; Do algoritmo de Euclides temos $c = 0, 1$ ou 2 . Note que se c for 3 teremos $3(b+1)$. Se for 4 teremos $3b+4 = 3b+3+1 = 3(b+1)+1$, ou seja, voltamos para $c = 1$ com um inteiro $d = b+1$. Portanto, as classes laterais possíveis são $N, N+1, N+2$, e este é o grupo quociente. Pois note que, $NaNb = Nab$ é traduzida por $(N+1) + (N+2) = N+4 = N+1$. Dessa forma, temos um fechamento.

1.7 Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

Embora o conceito de homomorfismo seja um dos conceitos centrais da Álgebra, ele aparece em contextos estudados pelos alunos do 1º ano do ensino médio. As funções logarítmicas são um homomorfismo do conjunto dos números reais positivos com a operação de multiplicação no conjunto dos números reais com a operação de adição.

Sejam G e G' . Uma função φ de G em G' é dita homomorfismo se para todo $a, b \in G$ existir

$$\varphi(ab) = \varphi a \varphi b.$$

Note que, no termo φab , ab é calculado com a operação em G , já em $\varphi a \varphi b$ a operação em questão é a operação em G' .

EXEMPLO 15 : Sejam G e G' grupos e φ uma função de G em G' tal que $\varphi(a) = e$ para cada $a \in G$. Este é obviamente um homomorfismo, já que temos

$$\varphi(ab) = e = e.e = \varphi a \varphi b$$

para todo $a, b \in G$, o que mostra que φ é um homomorfismo.

EXEMPLO 16 : Seja G o grupo dos inteiros com a operação de adição e G' o conjunto dos números inteiros pares com a operação de adição. Definiremos a função $\varphi : G \rightarrow G'$ onde $\varphi(a) = 2a$.

Então temos que:

$$\varphi(a+b) = 2(a+b) = 2a+2b = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Isso mostra que φ é um homomorfismo.

Ao estudarmos funções é interessante analisarmos suas características quanto a sua injetividade ou sobrejetividade. Relembremos as definições de tais termos.

Definição 1. *Injetividade*

Uma função $\varphi : A \rightarrow B$ é injetiva se para todo $a_1 \neq a_2$ temos $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

Definição 2. *Sobrejetividade*

Uma função $\varphi : A \rightarrow B$ é sobrejetiva se para todo $b \in B$ temos $b = \varphi(a)$, para algum $a \in A$.

Dispondo dessas definições podemos classificar as funções. Note que nas funções que foram apresentadas anteriormente como exemplos sobre homomorfismos não foram explicitados nem o domínio, nem o contradomínio das funções. Além disso, sabemos que para a função ser sobrejetiva, ela deve ter $G = \{e\}$, por consequência, para ser injetiva, o domínio deve ser necessariamente $G = \{e\}$.

Um homomorfismo de G em G' é chamado Monomorfismo quando φ é injetiva. Se φ for injetiva e sobrejetiva o homomorfismo de G em G' é chamado Isomorfismo. Nesse caso, escrevemos $G \approx G'$ e dizemos que G e G' são isomorfos.

Portanto, um isomorfismo é um homomorfismo bijetor.

Seja G um grupo. Um isomorfismo de $f : G \rightarrow G$ é dito um automorfismo de G .

1.8 Teorema de Cayley

Se G é um grupo de ordem $G = |n|$ então G é isomorfo a um subgrupo do grupo S_n .

Assim, definiremos uma função bijetora que vai representar o elemento do subgrupo $A(S)$ isomorfo ao grupo G para algum S apropriado, onde $A(S)$ é o conjunto das bijeções $S \rightarrow S$. Sendo assim, seja $G, *$ um grupo e S o conjunto G sem a estrutura de grupo. Se $g \in G$, vamos definir $\varphi_g : S \rightarrow S$ por $\varphi_g(x) = gx$. Esta função é uma bijeção.

1. Se $\varphi_g x = \varphi_g y$ temos que $gx = gy \Rightarrow x = y$, pois g pertence a um grupo. Logo, φ_g é injetiva.

2. Dado $y \in S$ devemos encontrar $x \in S$ tal que $\varphi_g(x) = y$, ou seja, $gx = y$. Num grupo esta equação tem solução $x = g^{-1}(y)$. Logo, φ_g é sobrejetiva.

Assim, definiremos uma função de G em $A(S)$ de modo que seja um isomorfismo de grupo. Pela definição de φ_g temos

$$F : G \rightarrow A(S)$$

$$g \mapsto \varphi_g$$

1. (F é homomorfismo) Vamos mostrar que $F(g_1g_2) = F_{g_1} \circ F_{g_2}$.

Note que, para todo elemento $x \in S$ temos

$$\varphi_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)(x) = g_1(g_2x) = \varphi_{g_1}(g_2x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = (\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2})(x).$$

Da igualdade $\varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ temos

$$F(g_1g_2) = \varphi_{g_1g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = F(g_1) \circ F(g_2).$$

2. (F é injetora) Vamos mostrar que $Ker(F) = \{e\}$. Seja $g \in Ker(F)$, ou seja, $F(g) = \varphi_g = id_S \Rightarrow x = \varphi_g(x) = gx$ para todo $x \in G$. Em particular, para $x = e$, temos $g = e$.

Portanto, F é um isomorfismo de G em um subgrupo de $A(S)$ e um grupo finito G pode ser visto como um subgrupo de S_n , onde $n = |G|$.

Capítulo 2

Grupos de Simetria

Os estudos desenvolvidos sobre estruturas algébricas e grupos nos ajudarão a compreender os Grupos de Simetria que serão utilizados para o desenvolvimento da resolução do jogo lúdico resta um.

2.1 Grupos de Matrizes

Da teoria de matrizes sabemos que, seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ a operação de adição é associativa, a matriz nula $O_{m \times n}$ é o elemento neutro e seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ temos a matriz oposta $-A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ como seu elemento simétrico. Veja as propriedades demonstradas a seguir:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$,
temos:

(i) A é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}_B \right) + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}_C =$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}_B + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}_C \right)$$

(ii) A admite elemento neutro $O : A + O = A$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_O = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A$$

(iii) A admite elemento simétrico $-A$: $A + (-A) = O$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}}_{-A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_O$$

(iv) A é comutativa: $A + B = B + A$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}_B + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_A$$

Portanto, o conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ munidos da operação de adição é um grupo abeliano.

Um grupo de matrizes $n \times n$ invertíveis de ordem n munido da operação de multiplicação é denominado grupo linear geral ou grupos de matrizes, e é denotado por $GL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Estes grupos são importantes na teoria de representação de grupos, e aparecem no estudo de simetrias espaciais e simetrias de espaços vetoriais, assim como no estudo de polinômios. O grupo modular isomorfo a um grupo quociente do grupo $SL(2, Z)$. Se $n \geq 2$, então o grupo $GL(n, K)$ não abeliano.

EXEMPLO 17 : Seja a matriz A, B e C matrizes que pertence ao conjunto das matrizes 2×2 com determinante diferente de zero, vamos verificar que as propriedades de grupo são satisfeitas pois também são propriedades de produto de matrizes, como descrito abaixo:

$$\text{Dado: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

(i) A é associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_B \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_C \right)$$

(ii) A admite elemento neutro $I : A.I = A$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A$$

Como por definição o determinante é diferente de zero não existe uma matriz tal que:

(iii) A admite matriz inversa $A^{-1} : A.A^{-1} = I$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I$$

Assim, dizemos que o conjunto $GL(2)$ munido da operação de multiplicação é um grupo.

O grupo especial linear $GL(n)$ é o grupo de todas as matrizes de determinantes iguais a 1. Elas são especiais porque se encontram em uma subvariedade satisfazendo uma equação polinomial (pois o determinante é um polinômio de entradas). Matrizes desse tipo formam um grupo, onde o determinante do produto das matrizes é o produto de cada um dos determinantes da matriz.

Um grupo (de Lie) de matrizes G é subgrupo de $GL(n)$ fechado em $GL(n)$.

Sejam $G \leq GL(n)$ e $H \leq GL(m)$ grupos de matrizes e dado um homomorfismo $\Phi : G \rightarrow H$, definimos

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} g & \\ & \Phi(g) \end{pmatrix} : g \in G \right\}.$$

Se Φ é contínuo, então F é um grupo das matrizes de $GL(n+m)$.

Demonstração:

Dada uma sequência de termos $\begin{pmatrix} g_k & \\ & \Phi(g_k) \end{pmatrix} \in F$ convergente em $GL(n+m)$, supomos que $g_k \rightarrow g$ (em G) e $\Phi(g_k) \rightarrow h$ (em H). Mas, pela continuidade de Φ , temos que: $\Phi(g_k) \rightarrow \Phi(g)$, e pela unicidade dos limites, $h = \Phi(g)$.

Portanto, como:

$$\begin{pmatrix} g_k & \\ & \Phi(g_k) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} g & \\ & \Phi(g) \end{pmatrix} \in F,$$

então F é fechado em $Gl(n + m)$.

Vamos mostrar agora que F é subgrupo de $Gl(n + m)$.

Dados $\begin{pmatrix} g & \\ & \Phi(g) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & \\ & \Phi(h) \end{pmatrix} \in F$, temos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g & \\ & \Phi(g) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} h & \\ & \Phi(h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g^{-1} & \\ & \Phi(g)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h & \\ & \Phi(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g^{-1}h & \\ & \Phi(g)^{-1}\Phi(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g^{-1}h & \\ & \Phi(g^{-1}h) \end{pmatrix} \in F \end{aligned}$$

uma vez que $g^{-1}h \in G$. Dessa forma, completamos a demonstração de que F é subgrupo de $Gl(n + m)$.

Um subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n^2} que é fechado para o comutador de matrizes é denominado uma álgebra (de Lie) de matrizes g . Uma álgebra de Lie é um subespaço de \mathbb{R}^{n^2} tal que

$$[X, Y] = XY - YX \in g, \text{ para todo } X, Y \in g.$$

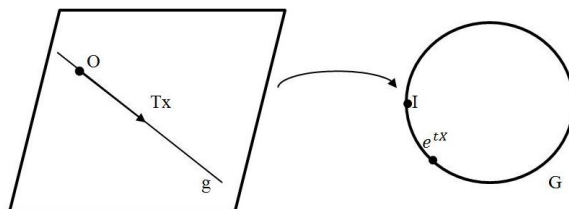


Figura 2.1: Álgebra g do grupo G .

A álgebra linear geral é a álgebra \mathbb{R}^{n^2} de todas as matrizes de ordem n que denotamos por $gl(n)$.

A cada grupo de matrizes $G \leq Gl(n)$ associamos o conjunto denominado a álgebra de G , que é denotado por:

$$g = \{X \in gl(n) : e^{tX} \in G, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.\}$$

A álgebra g de um grupo de matrizes $G \leq Gl(n)$ é uma álgebra de matrizes.

Demonstração:

Pela definição de g temos: $e^{t(\alpha X)} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\alpha X \in g$, sendo $X \in g$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, dado $t \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in G$, onde $k \in \mathbb{N}$, temos que $e^{\frac{tX}{k}}, e^{\frac{tY}{k}} \in G$. Como G é um subgrupo de $Gl(n)$, então $\left(e^{\frac{tX}{k}} e^{\frac{tY}{k}}\right)^k \in G$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pelo exponencial da soma e do comutador temos:

$$e^{X+Y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{X}{k}} e^{\frac{Y}{k}}\right)^k \text{ e } e^{[X,Y]} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{X}{k}} e^{-\frac{Y}{k}} e^{\frac{X}{k}} e^{\frac{Y}{k}}\right)^k.$$

Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{tX}{k}} e^{-\frac{tY}{k}} e^{\frac{tX}{k}} e^{\frac{tY}{k}}\right)^{k^2} = e^{[tX,tY]} = e^{t[X,Y]} \in Gl(n).$$

Como G é fechado em $Gl(n)$, segue que $e^{t(X+Y)} \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mostrando que $X + Y \in g$. Isso mostra que g é subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n^2} .

Resta mostrar que, g é fechado para o comutador. Análogo á demonstração anterior verificamos que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\left(e^{-\frac{tX}{k}} e^{-\frac{tY}{k}} e^{\frac{tX}{k}} e^{\frac{tY}{k}}\right)^{k^2} \in G.$$

E,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{tX}{k}} e^{-\frac{tY}{k}} e^{\frac{tX}{k}} e^{\frac{tY}{k}}\right)^{k^2} = e^{[tX,tY]} = e^{t[X,Y]} \in Gl(n).$$

Como G é fechado em $Gl(n)$, segue que $e^{t[X,Y]} \in Gl(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mostrando assim que $[X, Y] \in g$.

Dessa forma, caracterizaremos os homomorfismos contínuos da reta no grupo linear geral que é denominado grupo a um parâmetro.

Logo, se $g, h \in B(I, 1) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ e $g^2 = h^2$, então $g = h$.

Demonstração

Seja $g = I + A$ e $h = I + B$, onde $|A| < 1$ e $|B| < 1$, temos

$$\begin{aligned} g^2 &= (I + A)^2 = (I + B)^2 = h^2 \\ I + 2A + A^2 &= I + 2B + B^2 \\ 2(A - B) &= (B^2 - A^2). \end{aligned}$$

E fatorando $2(A - B)$ temos:

$$2(A - B) = B(B - A) + (B - A)A.$$

Tomando a norma segue que,

$$\begin{aligned} 2|A - B| &= |B(B - A) + (B - A)A| \\ 2|A - B| &\leq |B||B - A| + |B - A||A| \\ 2|A - B| &= |B - A|(|A| + |B|). \end{aligned}$$

Note que, se $B \neq A$ então $2|A - B| < 2|B - A|$. (Absurdo)

Portanto, $A = B$, ou seja, $g = h$.

Assim temos que, $t \rightarrow g(t)$ é um grupo a um parâmetro se e somente se, existir um único $X \in gl(n)$ tal que $g(t) = e^{tX}$.

Demonstração:

Seja $g(t) = e^{tX}$ para algum $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ temos que a função E é de classe C^1 e sua derivada na origem $E'(0)$ é a aplicação identidade. Além disso, a função $t \mapsto e^{tX}$ satisfaz $(e^{tX})' = Xe^{tX}$, para todo $t \in J$. Segue imediatamente que $t \mapsto g(t)$ é um grupo a um parâmetro.

Reciprocamente, pelo teorema da função inversa, existe $r > 0$ tal que a função exponencial $E : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow Gl(n)$ é um difeomorfismo da bola $B(0, r)$ numa vizinhança aberta U de I em $Gl(n)$ contida na bola $B(I < 1)$.

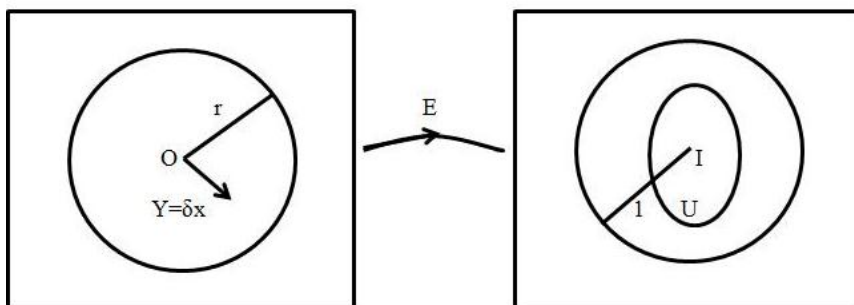


Figura 2.2: Exponencial é difeomorfismo de $B(0, r)$ em U .

Pela continuidade de g , segue que existe um $\delta > 0$ tal que $|x| \leq \delta$. Isso implica que $g(t) \in U$. Em particular, $g(\delta) \in U$. Logo, $g(\delta) = e^Y$ para algum $Y \in B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$.

Definindo $X = \frac{1}{\delta}Y$, note que $g(\delta) = e^{\delta X}$.

Vamos provar por indução que,

$$g\left(\frac{\delta}{2^k}\right) = e^{\frac{\delta}{2^k}X} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Para $k = 0$ a afirmação é verdadeira.

Utilizando o fato de g ser um homomorfismo temos que:

$$\left(g\left(\frac{\delta}{2^{k+1}}\right)\right)^2 = g\left(2\frac{\delta}{2^{k+1}}\right) = g\left(\frac{\delta}{2^k}\right).$$

Pela hipótese de indução temos:

$$\left(e^{\frac{\delta}{2^{k+1}}X}\right)^2 = \left(e^{\frac{\delta}{2^k}X}\right) = g\left(\frac{\delta}{2^k}\right).$$

Como $\left|\frac{\delta}{2^{k+1}}X\right| \leq |\delta X| < r$, segue que $e^{\frac{\delta}{2^{k+1}}X} \in U$. Como U é vizinhança aberta de I com diâmetro menor que 1 temos: $e^{\frac{\delta}{2^{k+1}}X} = g\left(\frac{\delta}{2^{k+1}}\right)$. O que completa a demonstração por indução.

Pra qualquer $m \in \mathbb{Z}$ e para todo $k \geq 0$ temos que,

$$g\left(m\frac{\delta}{2^k}\right) = \left(g\left(\frac{\delta}{2^k}\right)\right)^m = e^{m\frac{\delta}{2^k}X}.$$

Dessa forma, ficou demonstrado que para todo $t \in \left\{m\frac{\delta}{2^k} : k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\right\}$ temos $g(t) = e^{tX}$, que é um subconjunto denso da reta. Como as funções $g(t)$ e e^{tX} são contínuas, segue que $g(t) = e^{tX}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Resta provar a unicidade de X .

Suponha $e^{tX} = e^{tY}$. Derivando os dois lados da igualdade em $t = 0$, temos que $X = Y$.

Portanto, um homomorfismo entre álgebra de matrizes é uma transformação linear que preserva o comutador de matrizes.

Sejam $G \leq Gl(n)$ e $H \leq Gl(m)$ grupos de matrizes. Se $\Phi : G \rightarrow H$ é contínuo, existe um único homomorfismo $\Phi' : g \rightarrow h$ de álgebras de lie tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\Phi'} & h \\ \downarrow E & & \downarrow E \\ G & \xrightarrow{\Phi} & H \end{array}$$

ou seja

$$\Phi(e^X) = e^{\Phi'X},$$

para todo $X \in g$.

Considere $F = \left\{ \begin{pmatrix} g & \\ & \Phi(g) \end{pmatrix} : g \in G \right\}$. Temos que F um grupo de matrizes de $Gl(n + m)$, então podemos considerar a álgebra de matrizes associadas a F .

Para cada $X \in g$, temos que $t \mapsto \Phi(e^{tX})$ é um homomorfismo contínuo. Logo, existe um único $X_\Phi \in h$ tal que $\Phi(e^{tX}) = e^{tX_\Phi}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, seja $X \in g$ e $Z = \left\{ \begin{pmatrix} X & \\ & X_\Phi \end{pmatrix} \in f : \forall t \in \mathbb{R} \right\}$. Então temos que,

$$e^{tZ} = \begin{pmatrix} e^{tX} & \\ & e^{tX_\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tX} & \\ & \Phi(e^{tX}) \end{pmatrix} \in F.$$

Como f é uma álgebra de matrizes, para qualquer

$$Z = \begin{pmatrix} X & \\ & X_\Phi \end{pmatrix} \text{ e } W = \begin{pmatrix} Y & \\ & Y_\Phi \end{pmatrix} \in f$$

e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda X & \\ & \lambda X_\Phi \end{pmatrix} = \lambda Z \\ \begin{pmatrix} X + Y & \\ & X_\Phi + Y_\Phi \end{pmatrix} = Z + W \\ \begin{pmatrix} [X, Y] & \\ & [X_\Phi, Y_\Phi] \end{pmatrix} = [Z, W] \end{cases}$$

pertencente a f . Pela definição da álgebra f , para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^{t\lambda Z} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda X} & \\ & e^{t\lambda X_\Phi} \end{pmatrix} \in F,$$

mostrando que

$$e^{t(\lambda X_\Phi)} = \Phi(e^{t(\lambda X)}) = e^{t(\lambda X_\Phi)}.$$

De forma análoga, concluimos que:

$$e^{t(X_\Phi + Y_\Phi)} = \Phi(e^{t(X + Y)}) = e^{t(X + Y)_\Phi}$$

e que

$$e^{t[X_\Phi, Y_\Phi]} = \Phi(e^{t[X, Y]}) = e^{t[X+Y]_\Phi}.$$

Definindo $\Phi' : g \rightarrow h$ por $\Phi'(X) = X_\Phi$ e utilizando as equações e a unidade definida anteriormente, segue que Φ' é homomorfismo de álgebras de matrizes.

Resta então provar a unicidade de Φ' . Supomos assim, que existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\Phi', \varphi' : g \rightarrow h$ tais que os diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\Phi'} & h \\ \downarrow E & & \downarrow E \\ G & \xrightarrow{\Phi} & H \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\varphi'} & h \\ \downarrow E & & \downarrow E \\ G & \xrightarrow{\Phi} & H \end{array}$$

Segue que, dado $X \in g$ $e^{\Phi' X} = \Phi(e^X) = e^{\varphi' X}$. Pela injetividade da exponencial numa vizinhança da origem, temos que $\Phi' X = \varphi' X$, para todo X numa vizinhança de origem. Como Φ' e φ' são transformações lineares, dizemos que elas são iguais.

O homomorfismo de álgebras Φ' associado ao homomorfismo topológico Φ é denominado homomorfismo derivado de Φ . O próximo resultado mostra homomorfismos derivados de isomorfismos topológicos, são os isomorfismos de álgebras.

Sejam $G, H \leq Gl(n)$ grupos de matrizes. Se G e H são isomorfos, então suas álgebras também são isomorfas.

Demonstração:

Seja $\Phi : G \rightarrow H$ um isomorfismo de grupos (topológicos). Pelo teorema precedente temos que existe um homomorfismo $\Phi' : g \rightarrow h$ tal que,

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\Phi'} & h \\ \downarrow E & & \downarrow E \\ G & \xrightarrow{\Phi} & H \end{array}$$

comuta. Da mesma forma, existe um homomorfismo $(\Phi^{-1})' : h \rightarrow g$ tal que,

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{(\Phi^{-1})'} & h \\ \downarrow E & & \downarrow E \\ G & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & H \end{array}$$

comuta. Logo segue que

$$\begin{array}{ccc}
 g & \xrightarrow{\Phi' \circ (\Phi^{-1})'} & h \\
 \downarrow E & & \downarrow E \\
 G & \xrightarrow{\Phi \circ \Phi^{-1}} & H
 \end{array}$$

comuta. Pela unicidade do homomorfismo de álgebras de Lie associado a $(\Phi \circ \Phi^{-1}) = id_H : H \rightarrow H$, segue que $(\Phi' \circ (\Phi^{-1})') = id_h$. De forma análoga, concluímos que $((\Phi^{-1})' \circ \Phi') = id_g : g \rightarrow g$.

Isso completou a prova de que $(\Phi^{-1})' = (\Phi')^{-1}$, ou seja, completou a prova de que Φ' é um isomorfismo e portanto, g e h são isomorfos.

2.2 Grupos de Permutações

Seja o conjunto S uma função $\sigma : S \rightarrow S$. Se a função S em S for bijetiva, então temos uma permutação σ do conjunto S .

Logo,

$$\sigma : S \rightarrow S : \sigma \text{ bijetiva}$$

Portanto, dado um grupo $\langle G, * \rangle$ em que $G = \{\varphi : S \rightarrow S : \varphi \text{ bijetiva}\}$ e $*$ é a operação de composição de funções “ \circ ”, denominamos grupo de permutações do conjunto S . Podemos assim, escrever uma permutação de S na forma matricial como a que se segue:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(3) \end{bmatrix}$$

onde $\sigma(i) (i = 1, 2, \dots, n)$ é a imagem de cada i pela aplicação σ e a ordem destes conjuntos bijeções, denotado $Bij(S)$ é $n!$.

EXEMPLO 18. Dado um conjunto $S = \{1, 2, 3\}$, a aplicação $\sigma : S \Rightarrow S$ tal que $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$ é uma bijeção. E todas as possíveis bijeções $\sigma : S \Rightarrow S$ são:

$$\begin{array}{l} \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Portanto, $S_{ij}(S)$ é denominado conjunto de todas estas permutações munidos da operação de composição e denotado por $P_3 = \{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)\}$.

EXEMPLO 19 : Considere o grupo $G = Z_4$. Pelo teorema de Cayley, sabemos que Z_4 é isomorfo a um subgrupo S_4 . Por meio da função $\varphi_{(\bar{a})}(\bar{x}) = \bar{a} + \bar{x}$, encontramos os elementos correspondentes em S_4 :

$$\varphi_{(\bar{0})}(\bar{x}) = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}. \text{ Logo, temos a permutação } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_4.$$

$$\varphi_{(\bar{1})}(\bar{x}) = \bar{1} + \bar{x}. \text{ Logo, temos a permutação } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4.$$

$$\varphi_{(\bar{2})}(\bar{x}) = \bar{2} + \bar{x}. \text{ Logo, temos a permutação } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4.$$

$$\varphi_{(\bar{3})}(\bar{x}) = \bar{3} + \bar{x}. \text{ Logo, temos a permutação } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Sabemos que o grupo de permutação é um grupo cujo os elementos são permutações de elementos de um conjunto S , com uma operação binária de composição de funções onde o grupo simétrico é o grupo de todas as permutações desse conjunto. Logo, pelo teorema de Cayley ¹ temos que o grupo S_4 é isomorfo a um grupo de permutações. Assim, o grupo S_4 age sobre si mesmo, no sentido de que cada $s \in S$ produz uma permutação em S .

Portanto, por causa das descobertas feitas por Cayley percebemos a importância dos grupos de permutações.

2.3 Grupos de Simetria

2.3.3 Definição

Seja $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, onde $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, denominaremos este por Grupo de Simetria. Tendo como denotação S_n .

¹Arthur Cayley (Richmond, 16 de agosto de 1821-Cambridge, 26 de janeiro de 1895) foi um matemático britânico. As suas contribuições incluem a multiplicação de matrizes e o teorema de Cayley.

Assim, dada uma figura geométrica A , temos que uma simetria de A é uma transformação bijetora $B : A \rightarrow A$ que preservam distância entre os pontos de A .

Observe que dada duas simetrias $B_1 : A \rightarrow A$ e $B_2 : A \rightarrow A$ a composição $B_2 \circ B_1 : A \rightarrow A$ é bijetora e preserva distâncias, logo ainda é uma simetria.

Sabemos que, em $I : A \rightarrow A$ a aplicação identidade é uma simetria. Contudo se B é uma simetria, então existe a aplicação B^{-1} inversa de B tal que $d(B^{-1}(x_1), B^{-1}(x_2)) = d(x_1, x_2)$ satisfazendo as propriedades de grupo.

Logo, o grupo de simetria da figura A é o conjunto de todas as transformações bijetoras de A em A que preserva a distância entre seus pontos, munido da operação de composição de função.

Portanto, para que se adquira um melhor entendimento, estudaremos o grupo de simetria de algumas figuras planas estudadas na educação básica.

2.3.2 Grupo de Simetria de um Triângulo Isósceles

Por definição temos um triângulo isósceles quando este possuir pelo menos dois de seus lados de mesma medida e dois ângulos congruentes. Além disso, o ângulo formado pelos lados congruentes é denominado ângulo do vértice e os demais ângulos denominam-se ângulos da base e são congruentes.

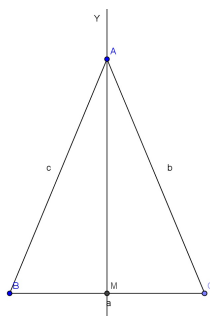


Figura 2.3: Triângulo isósceles.

Logo, dado o triângulo isósceles de vértices A, B e C , onde y é a mediatriz de BC , temos que, a bijeção dos vértices do triângulo determina a rotação de 0° em torno do centro do triângulo isósceles.

$$I = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

Fixada a mediatriz y segue que a reflexão $r_d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, leva B em C e C em B de tal forma que tenham uma isometria uma vez que $d(B, M) = d(C, M)$. Essa reflexão é representada por:

$$r_d = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix}$$

O conjunto $\{I, r_d\}$ denotado por \mathbb{S}_{ti} é formado pelos movimentos de rotação e reflexão.

Vamos representar a tabela de operação dessas transformações no plano.

\circ	I	r_d
I	I	r_d
r_d	r_d	I

Tábua de composição do triângulo isósceles.

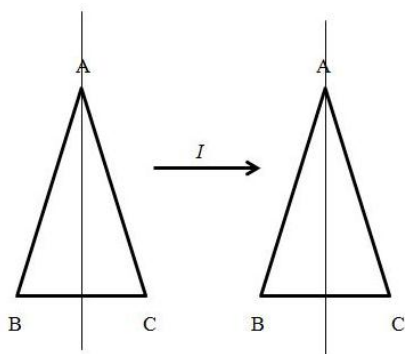


Figura 2.4: Rotação de 0° : I .

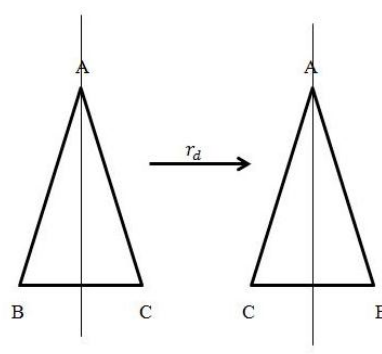


Figura 2.5: Reflexão: r_d .

Dessa forma teremos que, as três propriedades de grupo com a operação composição são satisfeitas, sendo assim o conjunto \mathbb{S}_{ti} é denominado grupo de simetria do triângulo isósceles.

2.3.3 Grupo de Simetria de um Retângulo

Por definição temos que, um retângulo é todo paralelogramo, cujos ângulos internos são retos.

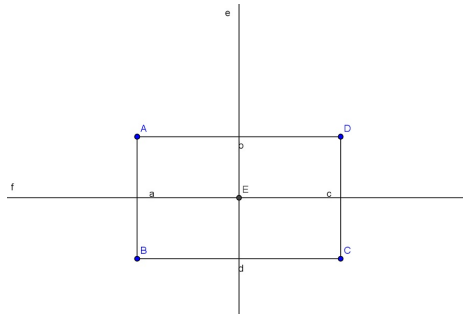


Figura 2.6: Retângulo.

Assim, seja o retângulo $ABCD$, onde e e f são as mediatrizes dos lados AD e DC , temos que os movimentos de reflexão em torno dos eixos de coordenadas x e y são simetrias e são descritas pelo esquema.

$$r_y = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \qquad r_x = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{bmatrix}$$

Além disso, se rotacionarmos o retângulo sob o ângulo de $0^\circ, 180^\circ$ em torno de E (centro do retângulo) no sentido anti-horário, teremos:

$$I = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \qquad R_{180^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{bmatrix}$$

O conjunto $\{I, r_y, r_x, R_{180^\circ}\}$ denotado por \mathbb{S}_r é formado pelos movimentos de rotação e reflexão.

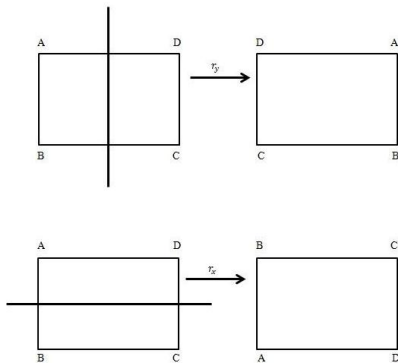


Figura 2.7: Reflexões: σ_y e σ_x .

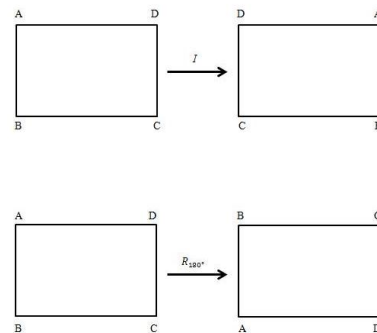


Figura 2.8: Rotações: I e 180° .

Representando a tabela de operação composição dessas transformações no plano temos:

\circ	I	r_y	r_x	R_{180°
I	I	r_y	r_x	R_{180°
r_y	r_y	I	R_{180°	r_x
r_x	r_x	R_{180°	I	r_y
R_{180°	R_{180°	r_x	r_y	I

Tábua de composição do retângulo.

Analizando a tábua de composição, note que:

$$r_y \circ (r_x \circ R_{180^\circ}) = r_y \circ r_y = r_x = R_{180^\circ} \circ R_{180^\circ} = (r_y \circ r_x) \circ R_{180^\circ}$$

para quaisquer três elementos do conjunto \mathbb{S}_r .

Além disso, se $r_y \circ I = r_y, \dots, R_{180^\circ} I = R_{180^\circ}$, então I (elemento neutro) pertence a \mathbb{S}_r e $r_y \circ R_{180^\circ} = I, \dots, r_x \circ r_x$, logo cada elemento do conjunto \mathbb{S}_r possui inverso.

Como a tábua é simétrica implica que $r_x \circ r_y = r_y \circ r_x$. Logo, admite a propriedade comutativa.

Portanto, o grupo de simetrias do retângulo é o conjunto \mathbb{S}_r munido da operação composição e esse grupo é comutativo.

2.3.4 Grupo de Simetria de um Triângulo Equilátero

Por definição temos um triângulo equilátero quando este possuir todos os lados de mesma medida. Consequentemente é equiangular, isto é, possui todos os ângulos internos congruentes e medem 60° .

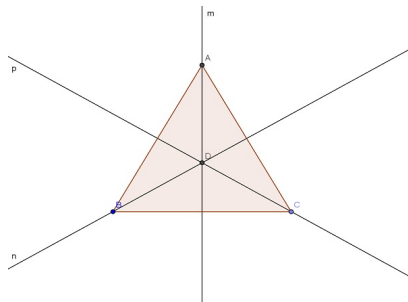


Figura 2.9: Triângulo equilátero.

Assim, seja um triângulo equilátero ABC , onde m, n e p são as mediatrizes relativa aos lados BC, AC e AB . Logo, os movimentos de reflexão em torno de cada eixo de simetria axial denotados por: σ_m, σ_n e σ_p serão representados a seguir.

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad \sigma_n = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad \sigma_p = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

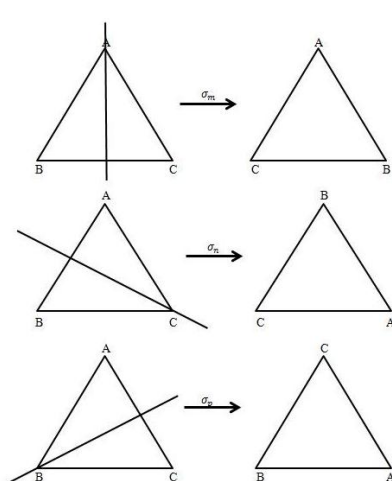


Figura 2.10: Reflexões: σ_m, σ_n e σ_p .

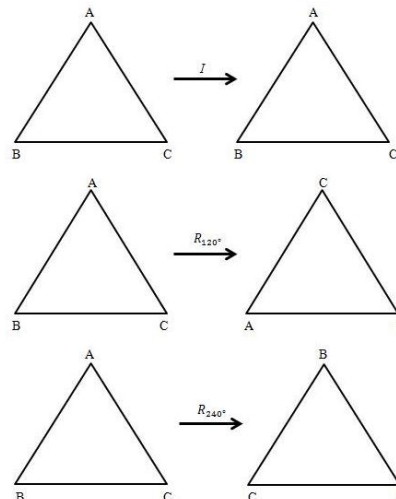


Figura 2.11: Rotações: $0^\circ, 120^\circ$, e 240° .

Ao rotacionarmos o triângulo equilátero sob os ângulos de $0^\circ, 120^\circ$, e 240° em torno de D (centro do triângulo equilátero) no sentido anti-horário, teremos:

$$I = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad R_{120^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} \quad R_{240^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}$$

Representando a tabela de operação composição dessas transformações no plano temos:

\circ	I	R_{120°	R_{240°	ρ_m	ρ_n	ρ_p
I	I	R_{120°	R_{240°	ρ_m	ρ_n	ρ_p
R_{120°	R_{120°	R_{240°	I	ρ_p	ρ_m	ρ_n
R_{240°	R_{240°	I	R_{120°	ρ_n	ρ_p	ρ_m
ρ_m	ρ_m	ρ_p	ρ_n	I	R_{120°	R_{240°
ρ_n	ρ_n	ρ_m	ρ_p	R_{120°	I	R_{240°
ρ_p	ρ_p	ρ_n	ρ_m	R_{240°	R_{120°	I

Tábua de composição \mathbb{D}_3 .

O grupo $\mathbb{D} = \{I, r_m, r_n, r_p, R_1, R_2\}$ é o grupo de simetrias do triângulo equilátero.

Para facilitar nosso entendimento para futuras análises tomaremos: $a^2 = R_{240^\circ}$, $a^3 = R_{360^\circ} = I$, $ab = r_p$, $a^2b = r_m$, $a^3b = r_n$.

Dessa forma, concluímos que, se operarmos as rotações n vezes, onde n é o número de lados e em seguida, a partir de uma única reflexão operada com essas rotações serão obtidas as outras reflexões então, podemos determinarmos o grupo de simetrias de figuras geométricas planas e limitadas.

Portanto, o grupo de simetrias do triângulo equilátero é isomorfo ao grupo de permutações do conjunto $\{A, B, C\}$ e pode ser descrito como $\mathbb{D}_3 = \{I, a, a^2, b, ab, a^2b\}$.

2.3.5 Grupo de Simetria de um Quadrado

Por definição temos que, um quadrado é um retângulo que possui todos os lados de mesma medida.

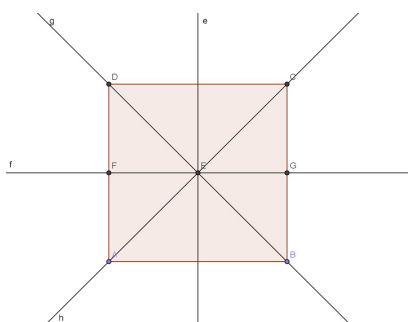


Figura 2.12: Quadrado.

Assim, seja um quadrado $ABCD$, onde f e e são as mediatrizes dos lados AD e DC , respectivamente, g e h são as diagonais do quadrado temos que, os movimentos de reflexão em torno dos eixos de simetria axial serão representados a seguir:

$$r_y = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{bmatrix}$$

$$r_z = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{bmatrix}$$

$$r_g = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{bmatrix}$$

$$r_h = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{bmatrix}$$

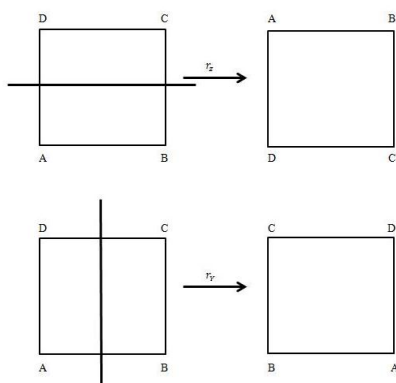


Figura 2.13: Reflexões: r_z e r_y .

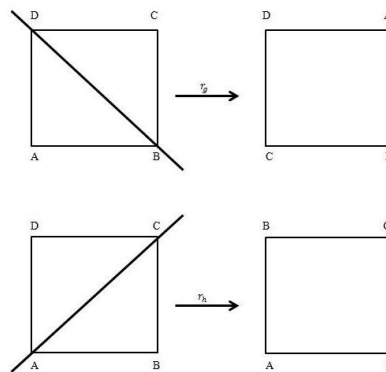


Figura 2.14: Reflexões: r_g e r_h .

Além disso, se rotacionarmos o quadrado sob os ângulos de 0° , 90° , 180° e 270° em torno de E (centro do quadrado) no sentido anti-horário, teremos:

$$I = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{bmatrix}$$

$$R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{bmatrix}$$

$$R_{180^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{bmatrix}$$

$$R_{270^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{bmatrix}$$

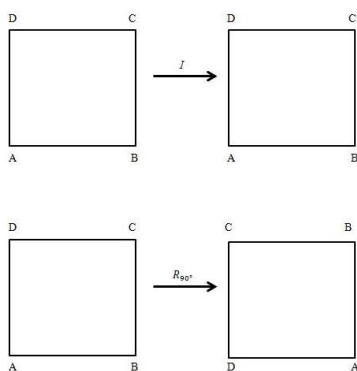


Figura 2.15: Rotações: I e R_{90° .

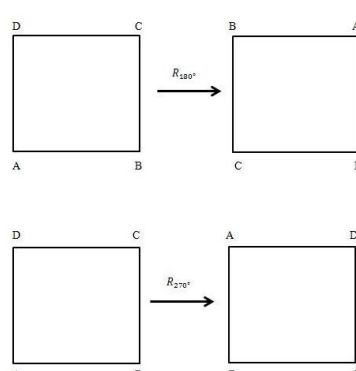


Figura 2.16: Rotações: R_{180° e R_{270° .

Representando a tabela abaixo de operação composição dessas transformações no plano temos:

\circ	I	R_{90°	R_{180°	R_{270°	r_z	r_y	r_g	r_h
I	I	R_{90°	R_{180°	R_{270°	r_z	r_y	r_g	r_h
R_{90°	R_{90°	R_{180°	R_{270°	I	r_h	r_g	r_z	r_y
R_{180°	R_{180°	R_{270°	I	R_{90°	r_y	r_z	r_h	r_g
R_{270°	R_{270°	I	R_{90°	R_{180°	r_g	r_h	r_y	r_z
r_z	r_z	r_g	r_y	r_h	I	R_{180°	R_{90°	R_{270°
r_y	r_y	r_h	r_z	r_g	R_{180°	I	R_{270°	R_{90°
r_g	r_g	r_h	r_y	r_z	R_{270°	R_{90°	I	R_{180°
r_h	r_h	r_z	r_g	r_y	R_{90°	R_{270°	R_{180°	I

Tábua de Composição \mathbb{D}_4 .

Portanto, o grupo de simetrias do quadrado denotado por $\mathbb{D} = \{I, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$, é formado pelas transformações de reflexão e rotação, onde $a = R_{90^\circ}$, $a^2 = R_{180^\circ}$, $a^3 = R_{270^\circ}$ e b é uma reflexão do quadrado. Dessa forma, \mathbb{D}_4 é um subgrupo do grupo de permutações do conjunto $\{A, B, C, D\}$, e podemos notar que, a bijeção a seguir não preserva a figura invariante no plano, ou seja, não é uma isometria.

$$T = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{bmatrix}$$

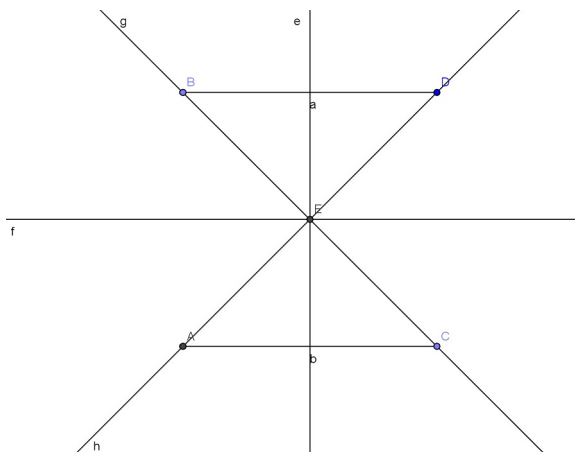


Figura 2.17: Quadrado.

2.3.6 Grupo de Simetria de um Pentágono Regular

Por definição temos que, um pentágono é um polígono que possui cinco lados de mesma medida. Além disso, como a soma dos ângulos internos é 540° , logo cada

ângulo interno mede 108° e o ângulo central mede 72° .

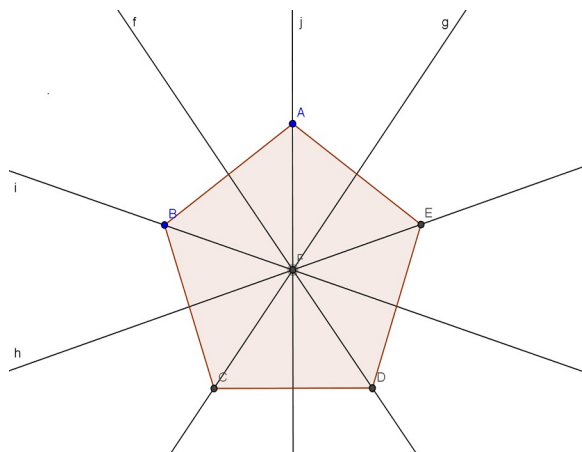


Figura 2.18: Pentágono.

Assim, seja o pentágono $ABCDE$, onde f, g, h, i e j são mediatrizes dos lados AE, CD, AB, ED e BC , respectivamente temos que, os movimentos de reflexão em torno dos eixos de simetria axial são:

$$r_g = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ E & D & C & B & A \end{bmatrix} \qquad r_f = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ B & A & E & D & C \end{bmatrix}$$

$$r_j = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & D & C & B \end{bmatrix}$$

$$r_i = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ C & B & A & E & D \end{bmatrix} \qquad r_h = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ D & C & B & A & E \end{bmatrix}$$

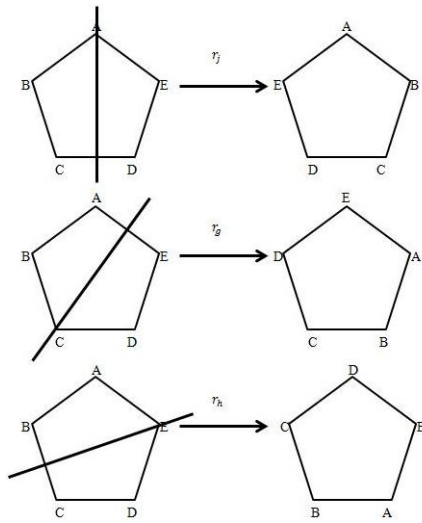


Figura 2.19: Reflexões: r_j , r_g e r_h .

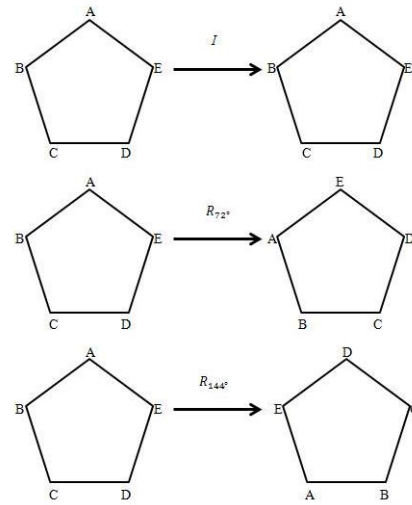


Figura 2.20: Rotações: I , R_{144° e R_{144° .

Da rotação do pentágono sob os ângulos de 0° , 72° , 144° , 216° e 288° em torno de F (centro do pentágono) no sentido anti-horário, teremos:

$$I = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ A & B & C & D & E \end{bmatrix}$$

$$R_{72^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ E & A & B & C & D \end{bmatrix}$$

$$R_{144^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ D & E & A & B & C \end{bmatrix}$$

$$R_{216^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ C & D & E & A & B \end{bmatrix}$$

$$R_{288^\circ} = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \end{bmatrix}$$

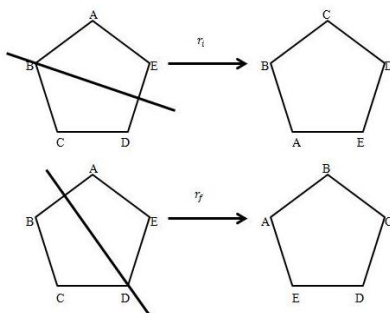


Figura 2.21: Reflexões: r_i e r_f .

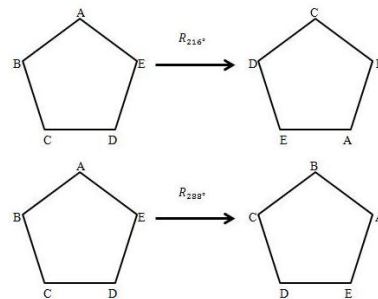


Figura 2.22: Rotações: R_{216° e R_{288° .

Portanto, o grupo de simetria do pentágono regular é formado pelas transformações de reflexão e rotação do pentágono, onde $a = R_{72^\circ}$, $a^2 = R_{144^\circ}$, $a^3 = R_{216^\circ}$, $a^4 = R_{288^\circ}$ e b é uma reflexão do pentágono. É denotado por $\mathbb{D}_5 = \{I, a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$.

Analogamente, a conclusão feita para \mathbb{D}_4 temos que $\mathbb{D}_5 \subset \mathbb{P}_5$.

A composição das transformações estão representadas na tabela abaixo:

\circ	I	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	r_j	r_g	r_h	r_i	r_f
I	I	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	r_j	r_g	r_h	r_i	r_f
R_{72°	R_{72°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	I	r_g	r_h	r_i	r_f	r_j
R_{144°	R_{144°	R_{216°	R_{288°	I	R_{72°	r_h	r_i	r_f	r_j	r_g
R_{216°	R_{216°	R_{288°	I	R_{72°	R_{144°	r_i	r_f	r_j	r_g	r_h
R_{288°	R_{288°	I	R_{72°	R_{144°	R_{216°	r_f	r_j	r_g	r_h	r_i
r_j	r_j	r_f	r_i	r_h	r_g	I	R_{288°	R_{216°	R_{144°	R_{72°
r_g	r_g	r_j	r_f	r_i	r_h	R_{72°	I	R_{288°	R_{216°	R_{144°
r_h	r_h	r_g	r_j	r_f	r_i	R_{144°	R_{72°	I	R_{288°	R_{216°
r_i	r_i	r_h	r_g	r_j	r_f	R_{216°	R_{144°	R_{72°	I	R_{288°
r_f	r_f	r_i	r_h	r_g	r_j	R_{288°	R_{216°	R_{144°	R_{72°	I

Tábua de composição \mathbb{D}_5 .

2.3.7 Grupo de Simetria de um Polígono Regular de n lados

Um polígono é dito regular se possuir todos os seus lados e todos ângulos de mesma medida. Além disso, por ser regular pode ser inscritível e circunscritível numa circunferência.

Logo, seja um polígono regular de n lados, centrado na origem do plano \mathbb{R}^2 , com as mediatrizes de todos os lados, Obteremos um grupo constituído por n rotações de $\frac{2k\pi}{n}$ radianos ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) em torno do centro do polígono e por n reflexões nos eixos de simetria do polígono.

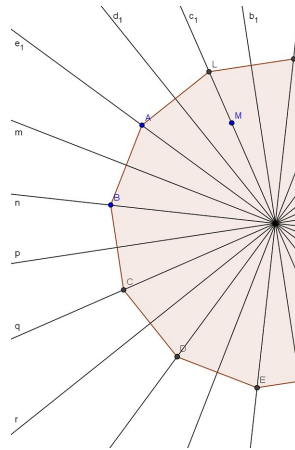


Figura 2.23: Polígono de n lados.

Com isso, se o polígono tiver um número par de lados representado por $n = 2k$, teremos k eixos de simetria passando por dois a dois vértices opostos e k eixos passando pelos pontos médios de dois a dois lados opostos do polígono, totalizando $2k = n$ reflexões. E, se o polígono tiver um número ímpar de lados representados por $n = 2k + 1$, teremos eixos de simetria passando pelo ponto médio de cada lado e pelo vértice oposto a este lado, totalizando $2k + 1 = n$ reflexões.

Dessa forma, o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados é constituído por $2n$ bijeções.

Ao refletirmos um polígono regular de n lados em relação a uma reta $y = mx$ (eixo de simetria) em que $m = tg\beta$ ($\beta = 0 \dots 180^\circ$), que passa pela origem do sistema cartesiano, teremos em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \text{sen} 2\beta \\ \text{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$$

Rotacionando um polígono regular de n lados em relação a origem sob um ângulo θ , em sentido anti-horário, teremos:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Assim, podemos verificar que $I \in \mathbb{D}_n$, já que:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 0 & -\text{sen} 0 \\ \text{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$$

onde

$$I = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, o elemento inverso pertence a $I \in \mathbb{D}_n$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é a inversa de R_θ sob a rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário, e

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a inversa da reflexão r é dada por:

$$r^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$$

Da composição de transformações temos:

$$\left(\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cos k\theta & \operatorname{sen} k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta & -\cos k\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \operatorname{sen} k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta & -\cos k\theta \end{bmatrix} \right)$$

Dadas as matrizes, A , B e C , temos geralmente pela propriedade associativa de multiplicação de matrizes que:

$$A(BC) = \sum_{k=1}^p a_{ik} \sum_{l=1}^q b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} \sum_{l=1}^q c_{lj} = (AB)C.$$

Note que, a propriedade associativa também é satisfeita. Portanto, \mathbb{D} é um grupo. Esse grupo pode ser representado por $\mathbb{D} = \{I, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, a^3b, \dots, a^{n-1}b\}$, onde n é o número de lados do polígono, $b = r$ (uma das reflexões do polígono), $a^k = R_{\theta_k}$ (Rotações do polígono onde $R_{\theta_k} = I = R_{\theta_n}$) para $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ e $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Capítulo 3

Jogo Resta Um

Conheceremos a origem do jogo resta um, sua descrição, seu objetivo e suas regras para consequentemente relacionarmos ao grupo de Klein e ao grupo de simetrias do quadrado e com isso, obtermos um novo método de resolução que poderá ser aplicado pelos professores da educação básica.

3.1 História do Jogo Resta Um

Para tratar do jogo resta um vamos conhecer um pouco de sua história.

Existem duas versões históricas que diz respeito a origem do jogo resta um: Uma delas remete à Roma Antiga, e a outra à França. A primeira conta que o poeta Ovídio¹ cita em seus escritos um jogo para uma só pessoa que usava um tabuleiro com concavidades e pequenas bolas chamadas pilae. A segunda é atribuída ao nobre francês do século XVIII chamado Pellison² que criou o jogo quando esteve encarcerado na Bastilha pelo Rei Luís XIV, ao qual chamou de “Solitaire”. Para isso, foi utilizado o tabuleiro de um jogo comum à época denominado “Rapousa e Gansos”.

¹Públio Ovídio Naso (Sulmona, 20 de março 43 a.C-Constança, Romênia, 17 ou 18 d.C) foi um poeta romano e é autor de Heroides, Amores, e Ars Amatoria.

²Paul Pellisson-Fontanier (Béziers, 30 de outubro de 1624-Paris, Paris 7 de fevereiro de 1693) foi um escritor francês.



Figura 3.1: Jogo resta um.

Fonte: Didática da Matemática - Jogo Resta Um.

O jogo resta um é conhecido simplesmente como “Solitaire” no Reino Unido e é chamado de “Brainvita”, especialmente na Índia.

No ano de 1697, a revista literária francesa *Galant Mercure* publicou uma imagem de Claude Auguste Berey de Anne de Rohan-Chabot, princesa Soubise³, ao lado de um quebra cabeça na corte de Luís XIV. Junto a imagem, continha informações sobre a descrição do jogo, as regras e o seu objetivo. Essa foi a primeira evidência do jogo resta um que se tem conhecimento.



Figura 3.2: A Princesa de Soubise ao lado do Resta Um.

Fonte: [en.wikipedia.org/wiki/Peg Solitaire](http://en.wikipedia.org/wiki/Peg_Solitaire)

O jogo resta um⁴ é um jogo composto por um tabuleiro com 33 posições e 32 peças, cujo objetivo é conseguir deixar apenas uma peça sobre o tabuleiro que inicialmente apresenta-se com a posição central vazia.

³Claude Auguste Berey de Anne de Rohan-Chabot, princesa de Soubise (nasceu em 1648- faleceu em 1709) foi um dos amores secretos do Rei Luís XIV.

⁴Disponível em: <http://educarepersone.blogspot.com.br/2010/11/didatica-da-matematica-jogo-resta-um.html>. Acesso em 06/12/2014

As regras do jogo resta um permitem que o jogador execute apenas movimentos horizontais ou verticais e elimine a peça que estiver na posição adjacente, pulando sobre a mesma e alcançando a posição não adjacente vazia.

De posse dessas informações, serão descritos um movimento horizontal e um movimento vertical para o jogo resta um. Para isso, serão utilizados três posições do tabuleiro.

Observe na composição inicial do jogo resta um que as posições 1 e 2 estão ocupadas.

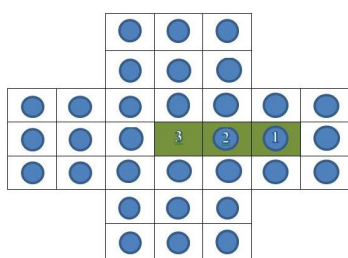


Figura 3.3: Posição inicial

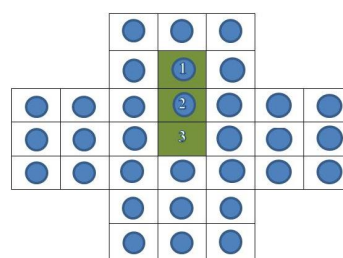


Figura 3.4: Posição inicial

Posição 1 : Posição inicial;

Posição 2 : Posição adjacente;

Posição 3 : Posição não adjacente.

A peça que ocupa a posição 1 será movimentada sobre a peça que ocupa a posição 2 eliminando-a e passando a ocupar a posição 3, inicialmente vazia. Esta é a composição do jogo resta um após o movimento horizontal ou vertical.

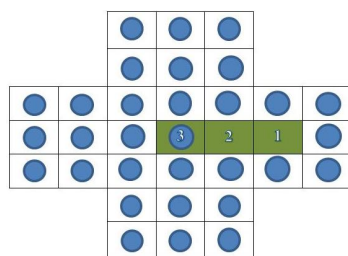


Figura 3.5: Posição final

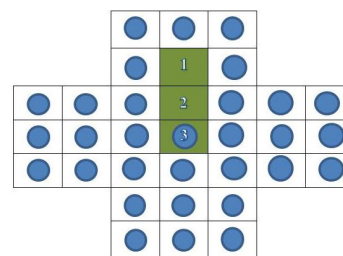


Figura 3.6: Posição final

3.2 Jogo Resta um: Uma aplicação do grupo de Klein

Durante essa produção observou-se que o jogo resta um não se limita a esse padrão pois sua composição recai na estrutura do grupo de Klein⁵. Grupo este, denotado por v e definido por um conjunto S formado por quatro elementos que denominaremos por: $e, a, b, a * b$, onde e é o elemento neutro do grupo G . Como o grupo de Klein é definido por um conjunto S formado por quatro elementos possui ordem 4, onde todo elemento não trivial tem ordem 2. Os elementos não triviais do grupo de Klein são: $a, b, a * b$. Ele é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ e é um produto de grupos cíclicos. Esta é a representação do grupo de Klein

$$v = \{1, a, b, ab\}$$

Onde o elemento neutro é o elemento 1. A figura (3.7) também pode representar o grupo de Klein.

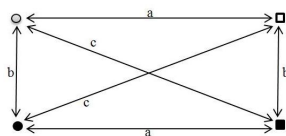


Figura 3.7: O grupo de Klein.

Além disso, no grupo de Klein é verificado:

1. Cada elemento é seu próprio inverso;
2. Todo elemento operado pelo elemento neutro resulta nele mesmo.

$$e^{-1} = e; \quad a^{-1} = a; \quad b^{-1} = b; \quad (a * b)^{-1} = (a * b).$$

$$e * e = e$$

$$e * a = a$$

$$e * b = b$$

$$e * (a * b) = (a * b)$$

$$a * e = a$$

$$b * e = b$$

$$(a * b) * e = (a * b)$$

Observe na tabela de operações do grupo de Klein que $a * b = (a * b)$.

⁵Felix Christian Klein(Dusseldorf, 25 de abril de 1849-Gottingen, 22 de junho de 1925) foi um matemático alemão que desenvolveu seus estudos na geometria não euclidiana e nas interligações entre a teoria dos grupo e a geometria

TABELA DAS OPERAÇÕES

$e * e = e$	$a * e = a$	$b * e = b$	$(a * b) * e = (a * b)$
$e * a = a$	$a * a = e$	$b * a = (a * b)$	$(a * b) * a = b$
$e * b = b$	$a * b = (a * b)$	$b * b = e$	$(a * b) * b = a$
$e * (a * b) = (a * b)$	$a * (a * b) = b$	$b * (a * b) = a$	$(a * b) * (a * b) = e$

Pois, se $a * b = a$ ou $b * a = a$ pela lei do cancelamento temos que

$$a * b = a \Rightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) \Rightarrow e * b = e \Rightarrow b = e.$$

Isso significa que b é o elemento neutro do grupo v , o que não é verdade pois o elemento neutro do grupo é único e tinha sido definido como e . Para o caso em que $a * b = b$ ou $b * a = b$ pela lei do cancelamento temos que

$$a * b = b \Rightarrow a * (b^{-1} * b) = b^{-1} * b \Rightarrow a * e = e \Rightarrow a = e.$$

Isso significa que a é o elemento neutro do grupo v , o que também não é verdade. Essa mesma análise poderia ser feita para o caso $a * b = e$ ou $b * a = e$, sendo assim pela lei do cancelamento temos que

$$a * b = e \Rightarrow (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * e \Rightarrow e * b = a^{-1} * e \Rightarrow b = a^{-1}.$$

Isso significa que b é o elemento inverso de a , o que não é verdade pois no grupo de Klein cada elemento é seu próprio inverso e este é único. Logo, o inverso do elemento a é o próprio a .

A tábua de composição de v é dada por:

$*$	e	a	b	$(a * b)$
e	e	a	b	$(a * b)$
a	a	e	$(a * b)$	b
b	b	$(a * b)$	e	a
$(a * b)$	$(a * b)$	b	a	e

Analisando a tábua de composição do grupo de Klein observou-se que esta é simétrica. Sendo assim, pôde-se perceber a propriedade comutativa. Logo, o grupo de Klein é abeliano. Dessa forma, teremos uma composição de função e uma ação de grupos no conjunto, onde se combinam dois desses elementos e mapeiam em um terceiro.

De posse dessas informações foi observado que o grupo de Klein aplicado ao jogo resta um poderia ser útil na formulação da inovação no jogo.

3.3 Jogo Resta um: Uma aplicação do grupo de Simetrias do Quadrado

Seja um quadrado $ABCD$ onde se insere a tábua do resta um. Observe que, os eixos x e y são mediatrizes relativas aos lados BC e AB , e os eixos p e z são as retas suportes das diagonais do quadrado.

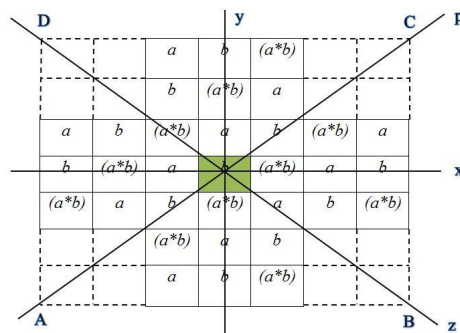


Figura 3.8: Quadrado e o resta um

Percebe-se também que o jogo resta um é uma aplicação do grupo de simetrias do quadrado, pois a forma do seu tabuleiro está inserida no quadrado, onde estão definidos quatro eixos de simetrias.

Dessa forma, as transformações que preservam o jogo resta um serão as mesmas que preservam o grupo de simetrias do quadrado, tanto em relação ao comprimento quanto a largura das partes necessárias para compor o todo. Sendo assim, será formado pelas transformações obtidas a partir das rotações e das reflexões do quadrado.

Os movimentos de rotações do jogo resta um sob os ângulos de 0° , 90° , 180° e 270° no sentido horário e centrado em b (centro do quadrado e do jogo resta um) serão: I , R_{90° , R_{180° e R_{270° . E, os movimentos de reflexão do resta um em torno dos eixos de simetria axial do quadrado serão: ρ_y , ρ_x , ρ_p e ρ_z .

Contudo, vamos analisar o grupo de simetrias do quadrado com a operação composição de função e traçar um paralelo com o que acabamos de obter. As transformações que preservam a tábua do jogo resta um são:

1. I : Rotação plana de 0° no sentido horário centrada em b ;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de rotação de 0° .

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.9: Posição inicial

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.10: $R_{0^\circ} : I$

2. R_{90° : Rotação plana de 90° no sentido horário centrada em b ;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de rotação de 90° .

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.11: Posição inicial

		a	b	(a*b)		
		(a*b)	a	b		
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
		b	(a*b)	a		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.12: R_{90°

3. R_{180° : Rotação plana de 180° no sentido horário centrada em b ;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de rotação de 180° .

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.13: Posição inicial

		(a*b)	b	a		
		b	a	(a*b)		
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
		a	(a*b)	b		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.14: R_{180°

4. R_{270° : Rotação plana de 0° no sentido horário centrada em b ;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de rotação de 270° .

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.15: Posição inicial



		(a*b)	b	a		
		a	(a*b)	b		
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
		b	a	(a*b)		
		(a*b)	b	a		

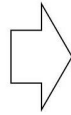
Figura 3.16: R_{270°

5. ρ_y : Reflexão (rotação espacial de 180°) em torno de y;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de reflexão em torno de y.

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.17: Posição inicial



		(a*b)	b	a		
		a	(a*b)	b		
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
		b	a	(a*b)		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.18: ρ_y

6. ρ_x : Reflexão (rotação espacial de 180°) em torno de x;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de reflexão em torno de x.

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.19: Posição inicial



		a	b	(a*b)		
		(a*b)	a	b		
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
		b	(a*b)	a		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.20: ρ_x

7. ρ_p : Reflexão (rotação espacial de 180°) em torno de p;

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de reflexão em torno de p.

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.21: Posição inicial



		(a*b)	b	a		
		b	a	(a*b)		
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
		a	(a*b)	b		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.22: ρ_p

8. ρ_z : Reflexão (rotação espacial de 180°) em torno de z.

Observe a composição inicial do jogo resta um e a sua composição após o movimento de reflexão em torno de z.

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.23: Posição inicial



		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.24: ρ_z

A partir da análise das transformações do grupo de simetrias do quadrado aplicadas ao jogo resta um foi observado que as oito transformações recaem em apenas quatro transformações. Assim, o movimento de rotação 0° equivale ao movimento de reflexão ρ_z .

		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.25: Posição inicial



		a	b	(a*b)		
		b	(a*b)	a		
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
		(a*b)	a	b		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.26: ρ_z

Bem como, o movimento de rotação 90° equivale ao movimento de reflexão ρ_x .

		a	b	(a*b)		
		(a*b)	a	b		
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
		b	(a*b)	a		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.27: Rotação 90°

		a	b	(a*b)		
		(a*b)	a	b		
(a*b)	a	b	(a*b)	a	b	(a*b)
b	(a*b)	a	b	(a*b)	a	b
a	b	(a*b)	a	b	(a*b)	a
		b	(a*b)	a		
		a	b	(a*b)		

Figura 3.28: ρ_x

Também temos que o movimento de rotação 180° equivale ao movimento de reflexão ρ_p .

		(a*b)	b	a		
		b	a	(a*b)		
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
		a	(a*b)	b		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.29: Rotação 180°

		(a*b)	b	a		
		b	a	(a*b)		
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
		a	(a*b)	b		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.30: ρ_p

E, que o movimento de rotação 270° equivale ao movimento de reflexão ρ_y .

		(a*b)	b	a		
		a	(a*b)	b		
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
		b	a	(a*b)		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.31: Rotação 270°

		(a*b)	b	a		
		a	(a*b)	b		
a	(a*b)	b	a	(a*b)	b	a
b	a	(a*b)	b	a	(a*b)	b
(a*b)	b	a	(a*b)	b	a	(a*b)
		b	a	(a*b)		
		(a*b)	b	a		

Figura 3.32: ρ_y

De posse dessas informações, foi observada que as transformações do grupo de simetrias do quadrado aplicadas ao jogo resta um poderiam ser úteis na formulação da inovação no jogo, reduzindo assim o número de sequências de movimentos que serão descritas para alcançar o objetivo do jogo. A inovação no jogo permitirá ao jogador uma melhor compreensão e manipulação.

No entanto, as aplicações do jogo resta um acima demonstradas recaem simultaneamente no grupo de Klein e no grupo de simetrias do quadrado que pelo teorema de Cayley são grupos isomorfos.

3.4 O jogo e suas sequências de movimento

Após a análise da composição do jogo resta um serão descritas as sequências de movimentos embasadas na teoria do grupo de Klein e que preservam as mesmas transformações do grupo de simetrias do quadrado. Para isso, cada peça do jogo resta um será nomeada de acordo com a posição ocupada no tabuleiro. Sendo assim, poderemos perceber que o arranjo dos elementos é muito importante e que no movimento do jogo resta um o produto de suas casas fica invariante.

Observe a teoria do grupo de Klein aplicada no jogo resta um, onde a posição central b apresenta-se vazia.

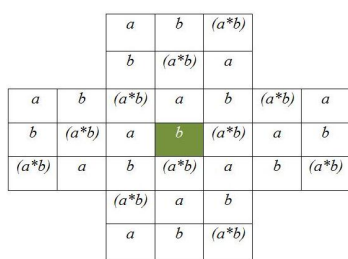


Figura 3.33: Composição inicial

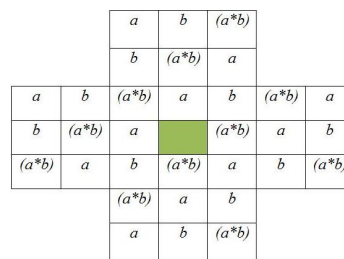


Figura 3.34: Composição inicial

Analisando a composição inicial do jogo resta um percebe-se um total de 11 peças a , 10 peças b e 11 peças $(a * b)$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{a * e} * (a * b) \\
 &= a * (a * b) \\
 &= b.
 \end{aligned}$$

Fazendo com que o produto inicial resulte no elemento b .

Como a operação inicial resulta em b , efetuando as operações devidas conclui-se que o jogo só poderá ser encerrado na posição b .

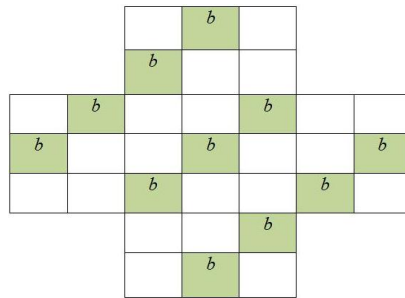


Figura 3.35: Posições de encerramento

De posse dessas informações serão descritas sequências de movimentos que nos permitirão alcançar cinco possíveis posições, possibilitando ao jogador ser considerado um jogador gênio, se alcançar a posição central ou ser um jogador excepcional, se alcançar uma das outras posições.

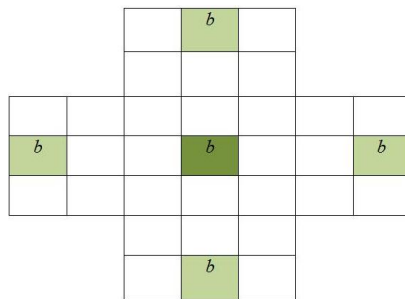


Figura 3.36: Posições finais

Observe o quadro de orientações que permitirá ao jogador uma melhor compreensão dos movimentos descritos para alcançar o objetivo do jogo.

QUADRO DE ORIENTAÇÕES

- BAIXO (↓)
- CIMA (↑)
- DIREITA (→)
- ESQUERDA (←)

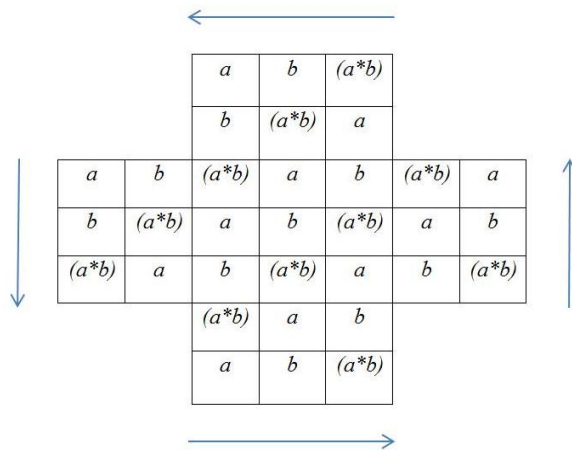


Figura 3.37: Tábua de orientação

Note que o jogo resta um permite ao jogador inicialmente dois possíveis movimentos. Como temos a posição central b vazia, então só poderemos iniciar o jogo de uma das posições a ou $(a * b)$, alterando assim, a sua configuração inicial.

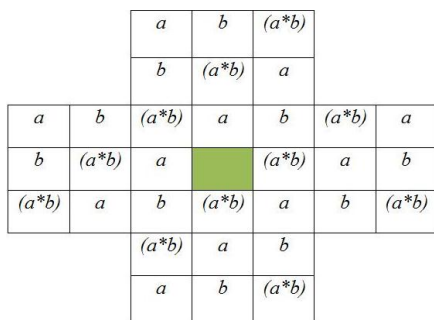


Figura 3.38: Composição inicial do jogo.

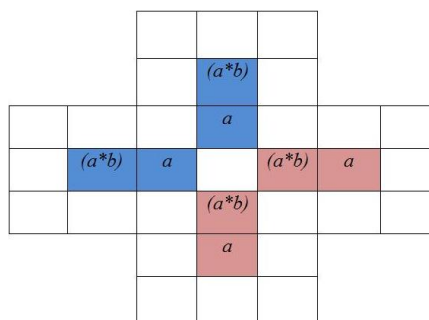


Figura 3.39: Movimentos iniciais

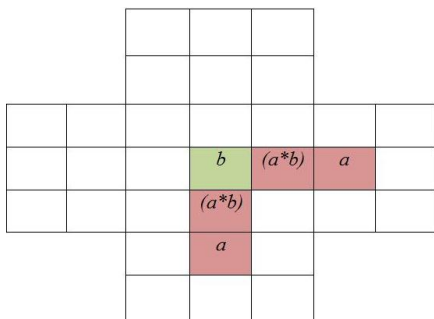


Figura 3.40: Movimento inicial (I)

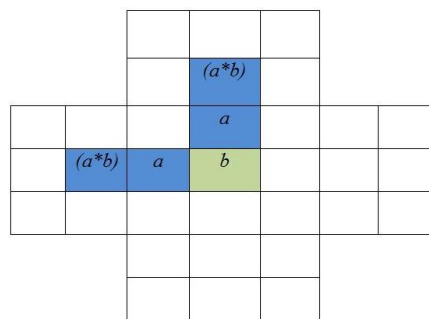


Figura 3.41: Movimento inicial (II)

Desse modo, será demonstrada a parte lógica do jogo para uma melhor aplicação de suas sequências de movimentos e por consequência um melhor desempenho do jogador. Logo, o algoritmo das equações associadas são:

$$\begin{cases} a * (a * b) = b(I) \\ (a * b) * a = b(II) \end{cases}$$

Igualando as equações (I) e (II) temos

$$(a * b) * a = b = a * (a * b)$$

e assim fica definida a propriedade comutativa e elemento simetrizável.

Essa posição foi definida como posição de partida para formular as sequências de movimentos para alcançar a posição central do tabuleiro.

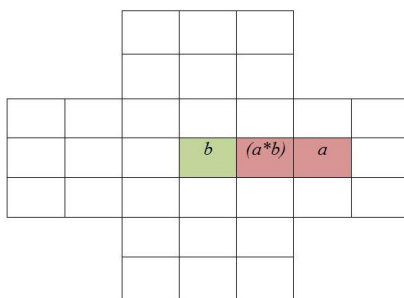


Figura 3.42: Movimento Inicial

Agora será analisada a tábua de composição do jogo resta um para começarmos a descrever as sequências de movimentos que nos permitirão uma melhor compreensão.

Sequência 1: Esquerda.

$$a * (a * b) = b.$$

Sequência 2: Baixo, esquerda, cima, direita, esquerda.

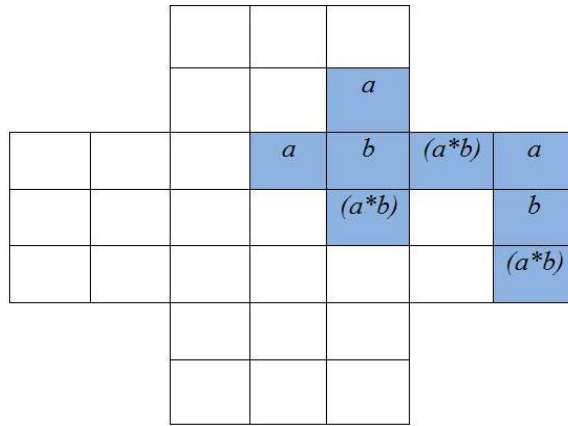


Figura 3.43: Posição 0°

$$a * b = (a * b) \Rightarrow a * (a * b) = b \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * b = (a * b) \Rightarrow a * (a * b) = b.$$

Ao executarmos uma rotação plana de 90° no sentido horário centrada em b percebe-se a simetria das posições da tábua do jogo resta um e conseqüentemente a continuidade da regra 2. De forma análoga, isso também ocorrerá nos outros eixos simétricos.

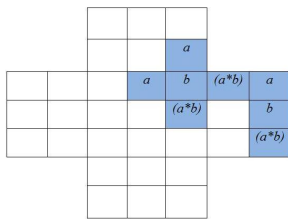


Figura 3.44: Posição 0°

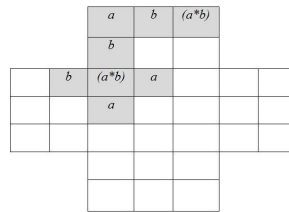


Figura 3.45: Posição 90°

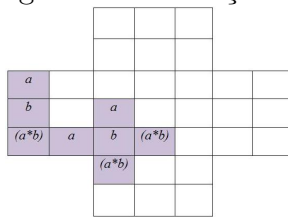


Figura 3.46: Posição 180°

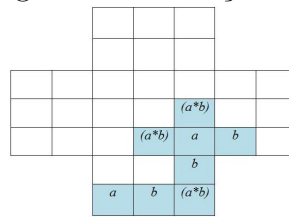


Figura 3.47: Posição 270°

$$b * (a * b) = a \Rightarrow a * b = (a * b) \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * (a * b) = b \Rightarrow a * b = (a * b).$$

$$(a * b) * b = a \Rightarrow (a * b) * a = b \Rightarrow a * b = (a * b) \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow (a * b) * a = b.$$

$$b * a = (a * b) \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * b = (a * b) \Rightarrow (a * b) * a = b \Rightarrow (a * b) * b = a.$$

Analizando as estruturas algébricas acima ficam bem definidas as propriedades associativas, elemento neutro e elemento simétrico do grupo de Klein.

Assim,

$$a * b = (a * b) = b * a; \text{ (comutativa)}$$

$$b * (a * b) = a = (a * b) * b; \text{ (associativa)}$$

$$a * b = (a * b) \Rightarrow a * a * (a * b) = (a * b) \Rightarrow a * a = e; \text{ (elemento neutro e inverso)}$$

$$b * (a * b) = a \Rightarrow b * a * b = a \Rightarrow b * b = e; \text{ (elemento neutro e inverso)}$$

$$a * (a * b) = b \Rightarrow b * (a * b) * (a * b) = b \Rightarrow b * b = e; \text{ (elemento neutro e inverso)}$$

$$a * b = (a * b) \Rightarrow (b * (a * b)) * (a * (a * b)) = (a * b) \Rightarrow b * (a * (a * b)) = e; (*)$$

$$a * (a * b) = b \Rightarrow (b * (a * b)) * (b * a) = b \Rightarrow (b * (a * b)) * a = e; (**)$$

$$b * (a * b) = a \Rightarrow (a * (a * b)) * (a * b) = a \Rightarrow (a * b) * (a * b) = e. (***)$$

De (*),(**) e (***) temos que

$$a * (b * (a * b)) = b * (a * (a * b)) = (a * b) * (a * b).$$

Portanto, como a estrutura algébrica do jogo resta um admite as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento simétrico será denominada por grupo abeliano.

Sequência 3 : Movimento em ciclo no sentido anti-horário a partir da posição a .

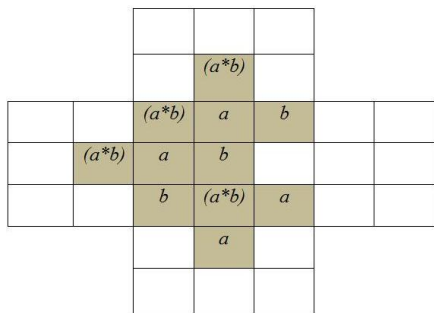


Figura 3.48: Movimento inicial

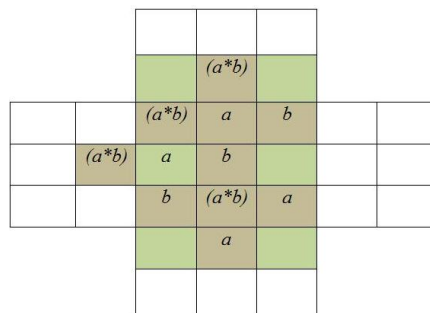


Figura 3.49: Sequência 3

$$a * b = (a * b) \Rightarrow (a * b) * a = b \Rightarrow b * a = (a * b) \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * (a * b) = b \Rightarrow b * (a * b) = a.$$

Sequência 4 : Cima, direita, cima, baixo.

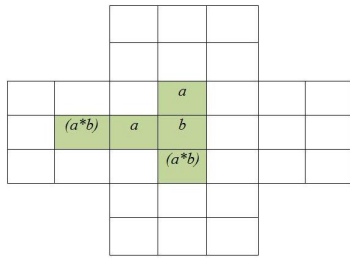


Figura 3.50: Sequência 4

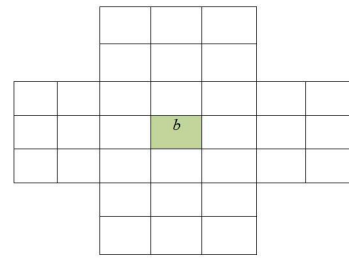


Figura 3.51: Posição Final

$$b * a = (a * b) \Rightarrow (a * b) * a = b \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow (a * b) * a = b.$$

A substituição da sequência 4 pela sequência 5 permitirá ao jogador ser considerado um jogador excepcional.

Sequência 5 : Cima, direita, cima, cima.

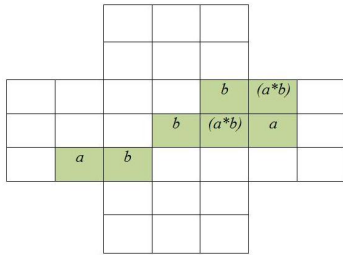


Figura 3.52: Sequência 5

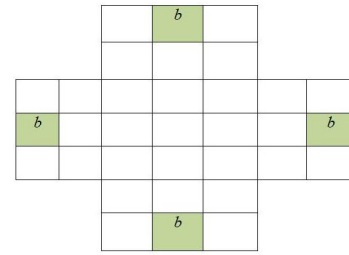


Figura 3.53: Posição Final

$$b * a = (a * b) \Rightarrow (a * b) * a = b \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * (a * b) = b.$$

Portanto, a associação do jogo resta um a estrutura do grupo de Klein e a estrutura do grupo de simetrias D_4 proporcionou sequências de movimentos que permitirão a qualquer jogador uma fácil compreensão e manipulação do jogo.

Vamos analisar as variações do jogo resta um para as situações em que foram retiradas peças do tabuleiro e verificar se é possível determinar sequências de movimentos que conduzam o jogador ao objetivo do jogo.

1º caso: Retirada de uma peça:

(Peça a):

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{e * e}_{2\text{vezes}} * (a * b) \\ &= e * (a * b) \\ &= (a * b). \end{aligned}$$

(Peça b):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{a * b}_{11\text{vezes}} * (a * b) \\
 &= (a * b) * (a * b) \\
 &= e.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(Peça $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{10\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{10\text{vezes}} * e \\
 &= a * e \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

2º caso: Retirada de duas peças:

(Duas peças a):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{10\text{vezes}} * (a * b) \\
 &= a * (a * b) \\
 &= b.
 \end{aligned}$$

(Duas peças b):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{8\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{10\text{vezes}} * (a * b) \\
 &= a * (a * b) \\
 &= b.
 \end{aligned}$$

(Duas peças $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{9\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{10\text{vezes}} * (a * b) \\
 &= a * (a * b) \\
 &= b.
 \end{aligned}$$

(Peças a e b):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{e * b}_{10\text{vezes}} * (a * b) \\
 &= b * (a * b) \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

(Peças a e $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{10\text{vezes}} &= \underbrace{e * e * e}_{(3.2)} \\
 &= e * e \\
 &= e.
 \end{aligned}$$

(Peças b e $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{10\text{vezes}} &= \underbrace{a * b}_{(3.2)} * e \\
 &= (a * b) * e \\
 &= (a * b).
 \end{aligned}$$

3º caso: Retirada de três uma peças:

(Três peças a):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{8\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{e * e}_{(3.2)} * (a * b) \\
 &= e * (a * b) \\
 &= (a * b).
 \end{aligned}$$

(Três peças b):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{7\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{a * b}_{(3.3)} * (a * b) \\
 &= (a * b) * (a * b) \\
 &= e.
 \end{aligned}$$

(Três peças $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{8\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{(3.3)} * e \\
 &= a * e \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

(Três peças: Duas a e uma b):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{a * b}_{9\text{vezes}} * (a * b) \\
&= (a * b) * (a * b) \\
&= e.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(Três peças: Duas a e uma $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{10\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{9\text{vezes}} * e \\
&= a * e \\
&= a.
\end{aligned}$$

(Três peças: Duas b e uma a):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{8\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{11\text{vezes}} &= \underbrace{e * e}_{10\text{vezes}} * (a * b) \\
&= e * (a * b) \\
&= (a * b).
\end{aligned}$$

(Três peças: Duas b e uma $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{8\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{10\text{vezes}} &= \underbrace{a * e}_{11\text{vezes}} * e \\
&= a * e \\
&= a.
\end{aligned}$$

(Três peças: Duas $(a * b)$ e uma a):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{9\text{vezes}} &= \underbrace{e * e}_{10\text{vezes}} * (a * b) \\
&= e * (a * b) \\
&= (a * b).
\end{aligned}$$

(Três peças: Duas $(a * b)$ e uma b):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{11\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{9\text{vezes}} &= \underbrace{a * b}_{11\text{vezes}} * (a * b) \\
&= (a * b) * (a * b) \\
&= e.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(Três peças: Uma a , uma b e uma $(a * b)$):

$$\begin{aligned}
\underbrace{(a * a * \dots * a)}_{10\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{9\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{10\text{vezes}} &= \underbrace{e * b * e}_{10\text{vezes}} \\
&= b * e \\
&= b.
\end{aligned}$$

Contudo, percebeu-se que com a retirada de uma peça b igual a da posição central (3.8) ou duas peças (uma a e uma $(a * b)$) (3.2) este jogo não se encerrará, porque a operação inicial resultou no elemento neutro e e este não representa uma posição do tabuleiro do jogo resta um. Esta mesma análise pode ser feita para as situações (3.3), (3.4) e (3.7).

Observe a seguir a representação de duas situações apresentadas:

	a	b	$(a*b)$			
		b	$(a*b)$	a		
a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a
b	$(a*b)$	a	$(a*b)$	a	b	
$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
		$(a*b)$	a	b		
	a	b	$(a*b)$			



	a	b	$(a*b)$			
		b	$(a*b)$	a		
a	b	$(a*b)$	a		$(a*b)$	a
b	$(a*b)$	a		$(a*b)$	a	b
$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
		$(a*b)$	a	b		
	a	b	$(a*b)$			

Figura 3.54: Tábua do resta um

Figura 3.55: Sem uma peça

	a	b	$(a*b)$			
		b	$(a*b)$	a		
a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a
b	$(a*b)$	a	$(a*b)$	a	b	
$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
		$(a*b)$	a	b		
	a	b	$(a*b)$			



	a	b	$(a*b)$			
		b	$(a*b)$	a		
a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a
b	$(a*b)$	a		$(a*b)$	a	b
$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
			a	b		
			b	$(a*b)$		

Figura 3.56: Tábua do resta um

Figura 3.57: Sem duas peças

A partir da retirada da quarta peça do tabuleiro, a composição do jogo resta um poderá ser analisada da mesma forma como o qual foi analisada as situações anteriores, percebendo que recairá numa das situações anteriormente apresentadas.

Vamos imaginar um jogador que perdeu peças do tabuleiro do resta um e que mesmo assim deseja jogar. Em posse dessas informações formulei novas sequências de movimentos para alcançar o objetivo do jogo para situação em que foi retirada peças do tabuleiro. Para isso, defini uma nova composição para o jogo resta um de modo que preservasse as mesmas transformações do grupo de simetrias do quadrado.

Observe uma possibilidade para que o jogador continue utilizando o resta um usando a descrição e o objetivo do jogo original.

		b	$(a*b)$	a	
	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a
	a	b	$(a*b)$	a	b
		$(a*b)$	a	b	

Figura 3.58: Tábua do resta um

		b	$(a*b)$	a	
	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
	$(a*b)$	a		$(a*b)$	a
	a	b	$(a*b)$	a	b
		$(a*b)$	a	b	

Figura 3.59: Tábua do resta um

Analisando as posições iniciais do jogo teremos:

			$(a*b)$		
			a		
	$(a*b)$	a		$(a*b)$	a
			$(a*b)$		
			a		

Figura 3.60: Posições iniciais

Sequência 1 : Esquerda.

			b	$(a*b)$	a

Figura 3.61: Sequência 1

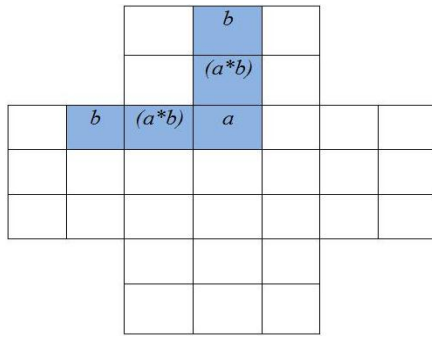


Figura 3.64: Sequência 2

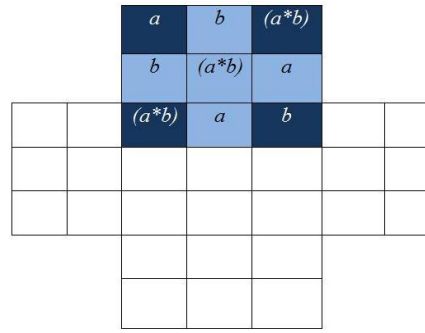


Figura 3.65: Sequência 3

Sequência 4 : Direita, cima, esquerda, cima, esquerda, baixo.

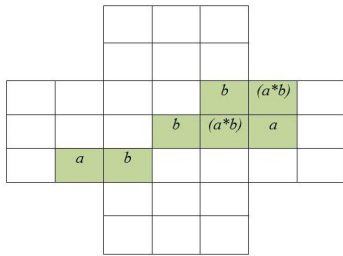


Figura 3.66: Sequência 4

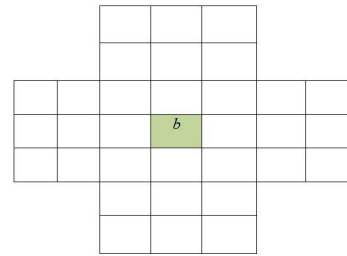


Figura 3.67: Posição Final

$$a * b = (a * b) \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * (a * b) = b \Rightarrow b * a = (a * b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow (a * b) * a = b.$$

A substituição da seqüência 4 pela seqüência 5 permitirá ao jogador ser considerado um jogador excepcional.

Sequência 5 : Direita, cima, esquerda, cima, esquerda, cima.

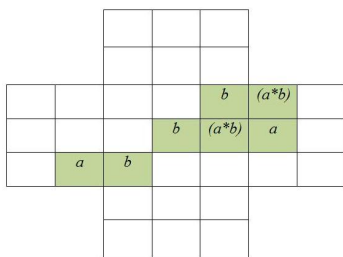


Figura 3.68: Sequência 5

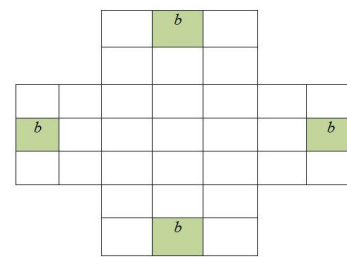


Figura 3.69: Posição Final

$$a * b = (a * b) \Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * (a * b) = b \Rightarrow b * a = (a * b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a * b) * b = a \Rightarrow a * (a * b) = b.$$

Portanto, foi verificado que o objetivo do jogo resta um foi alcançado utilizando a descrição do jogo tradicional.

Analizando a composição do jogo resta um representado pela figura 3.70 nota-se que a posição central a está vazia. Logo, percebe-se um total de 6 peças a , 7 peças b e 7 peças $(a * b)$. Assim temos que:

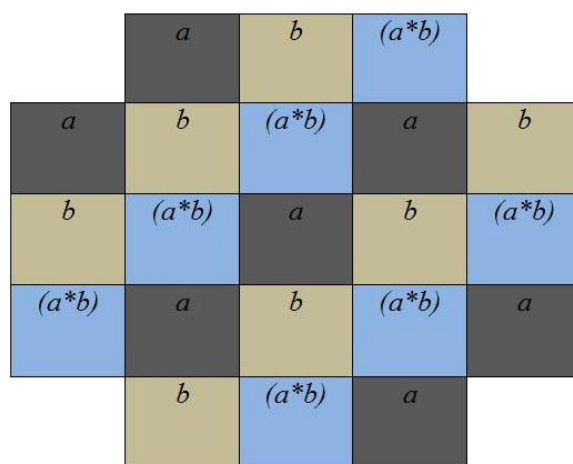


Figura 3.70: Lado 5u

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{6\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{7\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{7\text{vezes}} &= \underbrace{e * b}_{6\text{vezes}} * (a * b) \\ &= b * (a * b) \\ &= a. \end{aligned}$$

Como a operação inicial resulta no elemento a , efetuando as operações devidas concluímos que o jogo só poderá ser encerrado na posição a .

De forma análoga temos que, a figura 3.71 possui a posição central $(a * b)$ vazia. Logo, é percebido um total de 15 peças a , 15 peças b e 14 peças $(a * b)$, com isso conclui-se que o jogo só poderá ser encerrado na posição $(a * b)$. Assim temos:

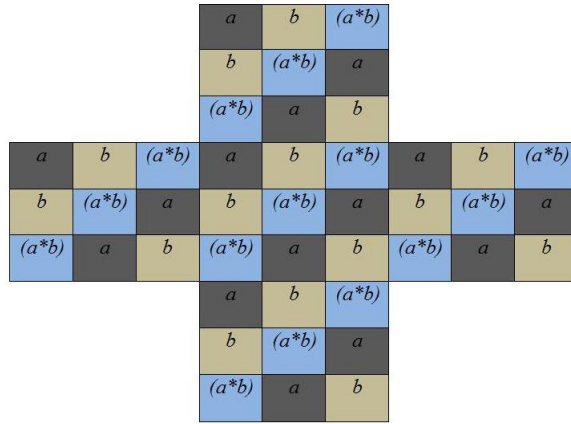


Figura 3.71: Lado 9u

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{15\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{15\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{14\text{vezes}} &= \underbrace{a * b * e}_{15\text{vezes}} \\
 &= (a * b) * e \\
 &= (a * b).
 \end{aligned}$$

Note que, as tábuas do jogo resta um analizadas foram construídas a partir de quadrados cujas medidas são números ímpares. Logo, será determinada a posição central do quadrado, obtendo o grupo de simetrias do jogo resta um formado pelas transformações de reflexão e rotação do mesmo. Mas, se a tábua do jogo resta um for construída a partir de quadrados cujas medidas sejam números pares, será que conseguiremos determinar a posição central e conseqüentemente suas transformações?

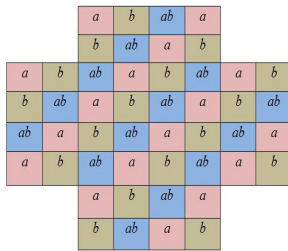


Figura 3.72: Lado 8u

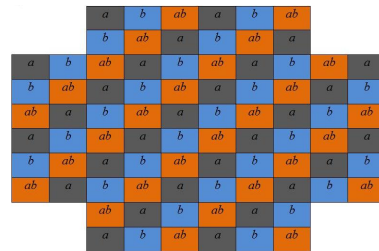


Figura 3.73: Lado 10u

Observando as figura 3.72 e 3.73 foi percebida que não há uma posição central. Assim, não poderemos determinar os eixos y e x utilizados para obter as transformações de reflexão ρ_y e ρ_x do jogo resta um. Dessa forma, não poderá ser determinada sequências de movimentos de modo que o jogador alcance o objetivo do jogo utilizando as regras do jogo tradicional. Mas, analisando a sua operação inicial pode ser determinada a posição de encerramento.

Vamos analisar a composição inicial da figura 3.72, mostrando as variações do jogo resta um e verificando se é possível determinar sequências de movimentos que conduzam o jogador ao objetivo do jogo.

1º caso: Iniciando com uma das posições a vazia:

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{16\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{17\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{14\text{vezes}} &= \underbrace{e * b * e} \\ &= b * e \\ &= b. \end{aligned}$$

2º caso: Iniciando com uma das posições b vazia:

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{17\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{16\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{14\text{vezes}} &= \underbrace{a * e * e} \\ &= a * e \quad (3.6) \\ &= a. \end{aligned}$$

3º caso: Iniciando com uma das posições $(a * b)$ vazia:

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{17\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{17\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{13\text{vezes}} &= \underbrace{a * b * (a * b)} \\ &= (a * b) * (a * b) \\ &= e. \quad (3.7) \end{aligned}$$

De forma análoga, analisaremos a configuração inicial da figura 3.73.

1º caso: Iniciando com uma das posições a vazia:

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{27\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{28\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{28\text{vezes}} &= \underbrace{a * e * e} \\ &= a * e \\ &= a. \end{aligned}$$

2º caso: Iniciando com uma das posições b vazia:

$$\begin{aligned} \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{28\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{27\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{28\text{vezes}} &= \underbrace{e * b * e} \\ &= b * e \quad (3.8) \\ &= b. \end{aligned}$$

3º caso: Iniciando com uma das posições $(a * b)$ vazia:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(a * a * \dots * a)}_{28\text{vezes}} * \underbrace{(b * b * \dots * b)}_{28\text{vezes}} * \underbrace{((a * b) * (a * b) * \dots * (a * b))}_{27\text{vezes}} &= \underbrace{e * e}_{(3.9)} * (a * b) \\
 &= e * (a * b) \\
 &= (a * b).
 \end{aligned}$$

Foi concluído que, das situações apresentadas a única que não possibilita a criação de seqüências de movimentos para alcançar o objetivo do jogo é dada pelo 2º caso do quadrado de lado $8u$, onde iniciamos com uma das posições b vazia.

Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre Fundamentos de Teoria de Grupos e Aplicações ao Jogo Resta Um. No primeiro capítulo foi definido e exemplificado Grupos. Por conseguinte, associamos aos modelos apresentados na educação básica. No capítulo seguinte, continuamos o estudo dos grupos de matrizes, grupos de permutações e concluímos este capítulo com os grupos de simetria necessário para o desenvolvimento da simetria \mathbb{D}_4 . No último capítulo apresentamos a história, a descrição, o objetivo e as regras do jogo resta um. Além disso, foi definido e exemplificado a teoria que rege o grupo de Klein e verificamos que as transformações do jogo resta um são as mesmas do grupo de simetrias do quadrado. De posse desses conhecimentos, formulamos quando possível sequências de movimentos que permitirão ao jogador alcançar o objetivo do jogo.

Tais conhecimentos aqui presentes deram embasamento para a construção de uma nova metodologia associando a álgebra à geometria que poderá ser aplicada pelos professores da educação básica. Com isso, pude formular questionamentos que possibilitarão o aluno compreender o conceito de simetria e de suas transformações: rotação e reflexão. Para que a partir desses conhecimento o aluno possa buscar novas perspectivas a respeito desse assunto.

Desse modo, a aplicação desse jogo será feita da seguinte forma: Apresentaremos o jogo resta um para que o aluno manipule e formule suas próprias teorias que possa levá-lo ao objetivo do jogo percebendo assim a relação álgebra-geometria. Sendo assim, este estudo faz-se relevante para a literatura atual, visto que, pouco se é trabalhado bem como há uma escassez de material didático na área.

É importante salientar que para o desenvolvimento desse trabalho houve uma limitação de fontes que embasam as teorias aplicadas no conceito do jogo resta um pois, não há variações de modelos do jogo resta um para que possamos desenvolver novas possibilidades e conseqüentemente verificar associações entre estas. Por fim, resalto que esta produção de conhecimento, me trouxe reflexões antes não percebidas.

Pude obter uma nova visão direcionada dos conteúdos tradicionais na educação básica de uma forma diferenciada que desmistifica o olhar reducionista sobre a matemática. No entanto, essa é apenas uma das formas de inovar e facilitar a compreensão do jogo resta um, podendo a partir deste estudo surgir outras produções que contemplem novos formatos para o jogo e, conseqüentemente, uma continuidade e aprofundamento do tema.

Anexos

Sugestões de Atividades Propostas

1ª Atividade Proposta

1. Algumas empresas se utilizam do conceito de simetria para montar suas logomarcas. Destacamos algumas logomarcas, analise-as e depois complete a tabela abaixo.



Figura 3.74: Logomarcas

Marque com um X a característica correspondente a cada logomarca:

Logomarca	Simétrica	Assimétrica
I		
II		
III		
IV		

Elaborado pelo autor

2. Explique com suas palavras qual o conceito de simetria?

3. Dobre um quadrado duas vezes como está indicado na figura. Depois faz-se um buraco como também está indicado. Desenhe o que achas que vai ver quando abrir a figura.



Figura 3.75: Quadrados

4. Utilizando uma régua trace os eixos de simetria da figuras abaixo:

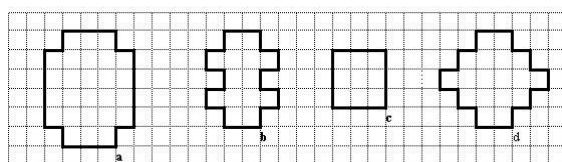


Figura 3.76: Figuras

5. Observe a figura representada abaixo e desenhe a figura simétrica de X em relação ao eixo de simetria vertical.

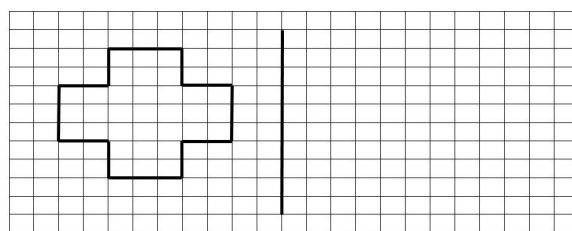


Figura 3.77: Resta um

2ª Atividade Proposta

1. Complete a figura abaixo de acordo com seus eixos de simetria.

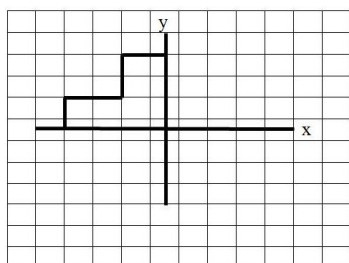


Figura 3.78: Resta um

2. Observe atentamente as figuras abaixo quanto a linha traçada como eixo de simetria.

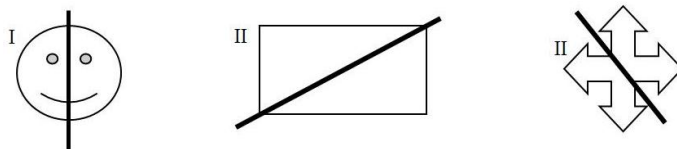


Figura 3.79: Objetos

Marque a única alternativa correta onde a linha destacada representa o eixo de simetria nas figuras anteriores.

- a) Somente a alternativa I;
- b) Somente a alternativa I e II;
- c) Somente a alternativa I e III;
- d) Somente a alternativa II e III;
- e) Em todas as alternativas.

3. Quando um objeto é colocado diante de um espelho plano, observamos que o objeto e a imagem não se sobrepõem se o objeto não for simétrico em relação à posição do espelho e os eixos de simetria. A figura a seguir indica um ladrilho colocado ao lado de dois espelhos planos I eixo de simetria vertical e plano II eixo de simetria horizontal. Indique a alternativa que corresponde às duas imagens formadas pelos espelhos I e II, respectivamente.

- a) F E b) F F
- c) F E d) F F



4. Observe as formas geométricas planas representadas a seguir:

Note que o contorno dessas figuras é formado apenas por linhas retas que não se cruzam. Nesse caso dizemos que essas figuras são polígonos. Entre as figuras abaixo quais são polígonos?

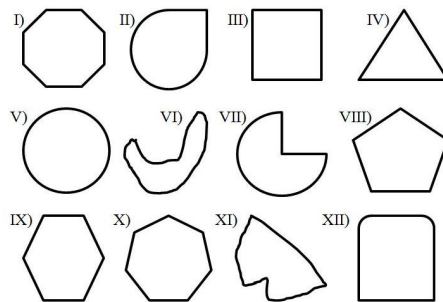


Figura 3.80: figuras

5. Cada polígono pode ser classificado de acordo com o número de lados que possui. Indicaremos abaixo o nome e o número de lados de alguns polígonos:

nome: triângulo

número de lados: 3

nome: hexágono

número de lados: 6

nome: quadrilátero

número de lados: 4

nome: heptágono

número de lados: 7

nome: pentágono

número de lados: 5

nome: octógono

número de lados: 8

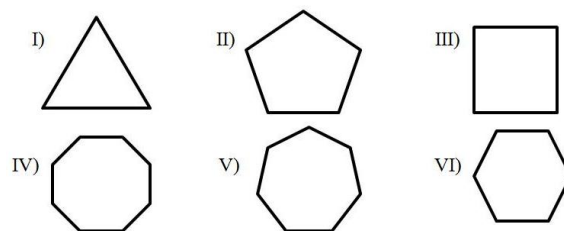


Figura 3.81: Resta um

Escreva o nome dos polígonos de acordo com o número de lados.

3ª Atividade Proposta

1. Observe as figuras planas e determine os eixos de simetria de cada figura:

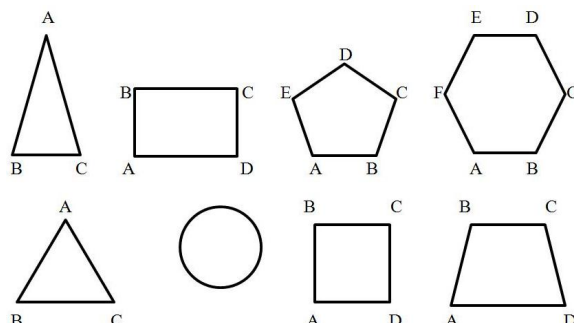


Figura 3.82: Figuras planas

2. Vamos representar os vértices de cada polígono abaixo como matrizes e a partir de cada eixo de simetria efetuaremos a permutação de seus vértices para obter uma nova matriz. Analise o exemplo descrito abaixo e continue para figuras seguintes.

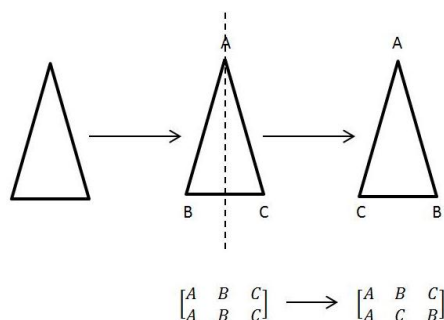


Figura 3.83: triângulo isósceles

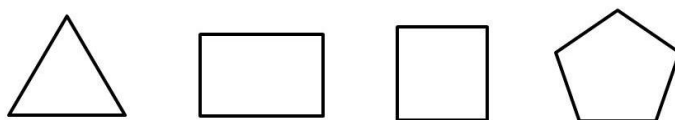


Figura 3.84: Figuras planas

3. Determine algumas propriedades que lhe ajudará a distinguir uma figura geométrica da outra.

4. Podemos verificar a presença de formas geométricas que lembram polígonos em objetos, construções e alguns elementos da natureza. Pesquise algumas imagens, recorte-as e escreva o nome da forma que cada uma lembra.

5. Após a manipulação do jogo resta um, indique a forma geométrica plana ao qual está inserida. Com isso, determine sobre esta figura geométrica as informações descritas a seguir:

a) vértices;

b) lados;

c) diagonais;

d) mediatrizes;

e) ângulos.

4ª Atividade Proposta

1. Se as casas do jogo resta um fossem elementos de um conjunto A , como poderíamos representá-lo?

Dado:

		a	b	$(a*b)$		
		b	$(a*b)$	a		
a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a
b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a	b
$(a*b)$	a	b	$(a*b)$	a	b	$(a*b)$
		$(a*b)$	a	b		
		a	b	$(a*b)$		

Figura 3.85: Jogo resta um

2. Quantos elementos possui o conjunto A ?

3. Sabemos que um conjunto é finito quanto podemos determinar o número de elementos e infinito senão podemos determinar. De posse dessas informações responda:

a) O conjunto A é finito ou infinito?

b) Qual é a sua representação na forma abstrata e na forma do diagrama de Venn.

c) Represente os subconjuntos do conjunto A .

d) O número de subconjuntos do conjunto A ?

4. Formem grupo de no máximo 4 pessoas e utilizem isopor, cartolina e bolinhas de gude para construir a tábua jogo resta a partir de um quadrado de lado 7 cm.

5. Descreva as sequências de movimentos que o levarão ao objetivo do jogo.

Referências Bibliográficas

- [1] FRANCO, Maisa Damazio. *Classificação de alguns grupos de ordem finita*/Maisa Damazio Franco.-Joinville, 2012.
- [2] GONÇALVES, Adilson. *Introdução á Álgebra*. Ed. 3. 194 pp. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.
- [3] MONTEIRO, Guilherme Elias Egg. *Contando as simetrias rotacionais dos poliedros regulares* /Guilherme Elias Egg Monteiro.-Curitiba, 2013.
- [4] PATRÃO, Mauro. *Introdução ao Grupo de Matrizes*/Mauro Patrão.-Brasília, 2010.
- [5] SCARPA, Alice Duarte. *P-Grupos*/Alice Duarte Scarpa.-Belo Horizonte, 2011.
- [6] SILVA, Elisabete Santana de Ávila e. *Um código co-dígito verificador baseado em D_5 : uma aplicação dos grupos de simetria*/ Elisabete Santana de Ávila e Silva.-São Cristovão, 2013.
- [7] SILVA, Marco Antônio da. *Grupos Finitos*/Marco Antônio da Silva.-Florianópolis, 2002.
- [8] SOUZA, Rodrigo Luiz de Souza. *Uma Breve Introdução à Teoria de Grupos*/Rodrigo Luiz de Souza Souza.-Florianópolis, 2014.
- [9] TEORIA dos grupos e o resta um. Emanuel Carneiro. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=8clu801ewzy>. Acesso em: Novembro de 2014.